

NUMERIČKA ANALIZA NOSIVOSTI NEUNIFORMNIH PRITISNUTIH ELEMENATA NA FLEKSIONO IZVIJANJE

NUMERICAL ANALYSIS OF FLEXURAL BUCKLING RESISTANCE OF NON-UNIFORM COMPRESSION MEMBERS

Aljoša FILIPOVIĆ
Jelena DOBRIĆ
Milan SPREMIĆ
Zlatko MARKOVIĆ
Nina GLUHOVIĆ

PREGLEDNI RAD
REVIEW PAPER
UDK:692.522.046
doi:10.5937/grmk1703003F

1 UVOD

Konstruktivni elementi sa neuniformnom promenom poprečnih preseka imaju značajnu primenu u zgradarstvu, najčešće kod stubova okvirnih nosača velikih raspona, ili kod stubova industrijskih hala koje su opremljene kranovima velike nosivosti. Promena poprečnog preseka, koja prati neuniformnu raspodelu presečnih sila duž elementa, može da bude linearna duž elementa, ili skokovita u određenom broju diskretnih tačaka elementa. Ovakvim konstruktivnim rešenjem postiže se značajna ušteda u količini čeličnog materijala i ceni konstrukcije.

Proračun nosivosti neuniformnih elemenata na fleksiono izvijanje kompleksan je i zahtevan sa stanovišta svakodnevnih inženjerske prakse.

Izraz za elastičnu kritičnu silu izvijanja nije obuhvaćen osnovnim Ojlerovim slučajevima izvijanja. Vrednost elastične kritične sile izvijanja treba da se odredi vodeći računa o tačnoj raspodeli geometrijskih

1 INTRODUCTION

Structural members with non-uniform change in cross sections have a significant role in constructions, usually as columns of large-scale structural frames, or as columns in industrial halls that are equipped with cranes of high load carrying capacity. The cross-sectional change, which follows the non-uniform distribution of the internal forces along the member, can be linear along the member, or stepped in a certain number of discrete points. This structural solution achieves significant savings in the amount of steel material and in the costs of construction.

Analysis of flexural buckling resistance of non-uniform compression members is complex and demanding from a standpoint of everyday engineering practices.

The critical elastic buckling force is not included in the basic Eulerian cases of buckling. The value of the

Aljoša Filipović, asistent-student doktorskih studija, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, afilepovic@grf.bg.ac.rs
Jelena Dobrić, doc. dr, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, jelena@imk.grf.bg.ac.rs
Milan Spremić, doc. dr, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, spremitc@imk.grf.bg.ac.rs
Zlatko Marković, prof. dr, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, zlatko@imk.grf.bg.ac.rs
Nina Gluhović, asistent - student doktorskih studija, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, nina@imk.grf.bg.ac.rs

Aljosa Filipovic, Teaching assistant Aljosa Filipovic, Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, Republic of Serbia, afilepovic@grf.bg.ac.rs
Jelena Dobric, Assis. Prof. Jelena Dobric, PhD, Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, Republic of Serbia, jelena@imk.grf.bg.ac.rs
Milan Spremic, Assis. Prof. Milan Spremic, PhD, Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, Republic of Serbia, spremitc@imk.grf.bg.ac.rs
Prof. ZlatkoMarkovic, PhD, Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, Republic of Serbia, zlatko@imk.grf.bg.ac.rs
Nina Gluhovic, Teaching assistant Nina Gluhovic, Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, Republic of Serbia, nina@imk.grf.bg.ac.rs

karakteristika po dužini elementa, graničnim uslovima oslanjanja i postojanju eventualnih ekscentriciteta u položaju sistemnih osa susjednih segmenta kod elemenata sa stepenastom promenom preseka. Elastična kritična sila izvijanja može da se odredi koristeći teorijske analize koje zahtevaju nalaženje rešenja nelinearne diferencijalne jednačine izvijanja, ili primenom neke od metoda naprednih numeričkih analiza. U jednostavnijim slučajevima mogu se koristiti uprošćeni postupci proračuna u kojima se vrednost elastične kritične sile izvijanja određuje modifikacijom osnovnih Ojlerovih izraza za izvijanje uniformnih elemenata sa ekvivalentnim momentom inercije, ili ekvivalentnom dužinom izvijanja, kojima se uzima u obzir geometrijska neuniformnost analiziranog elementa.

Položaj kritičnog preseka u kojem je dostignuta vrednost granične nosivosti na fleksiono izvijanje nije jednoznačno određen. Ovo je posebno izraženo kod elemenata s linearnom promenom preseka, pa se pri nalaženju rešenja zahteva iterativan postupak proračuna. U opštem slučaju može se smatrati da je to presek u kome normalni napon pritiska dostiže maksimalnu vrednost.

Za praktičnu inženjersku primenu, proračun nosivosti neuniformnih elemenata na fleksiono izvijanje treba da bude zasnovan na primeni globalne analize drugog reda, uzimajući u obzir uticaj geometrijskih, materijalnih i strukturnih imperfekcija na ponašanje konstrukcije u stanju granične nosivosti. Uticaji drugog reda mogu se uzeti u proračunu na dva načina [1], [2]:

– **Indirektno, određivanjem vrednosti kritične sile izvijanja** primenom približnih metoda ili linearno-elastične analize za element bez imperfekcija, nakon čega treba primeniti opšti postupak proračuna nosivosti na fleksiono izvijanje koji važi za uniformne elemente, u saglasnosti sa SRPS EN 1993-1-1 [3].

– **Direktno, primenom proračuna po teoriji drugog reda** s početnim ekvivalentnim globalnim i lokalnim imperfekcijama elementa. Oblik imperfekcija treba da odgovara najnižem sopstvenom obliku elastičnog izvijanja u odgovarajućoj ravni izvijanja, a veličine imperfekcija treba da budu u skladu s preporukama datim u SRPS EN 1993-1-1/NA [4]. Ovim postupkom kontrola nosivosti elemenata na izvijanje svodi se na kontrolu nosivosti najopterećenijeg poprečnog preseka za dejstvo aksijalne sile pritiska i momenta savijanja drugog reda.

Treba pomenuti primenu Metode konačnih elemenata koja se danas efikasno koristi u analizi različitih problema stabilnosti koji uključuju geometrijsku i materijalnu nelinearnost. Osim što je osnova naprednih softverskih paketa (RSTAB, Sofistik, DIANA FEA...), ona je i osnova individualnih naučnih programa razvijenih primenom različitih programskih jezika. Kao primer, program ALIN [5], [6] rešava kompleksne probleme statičke i dinamičke analize, linerane analize izvijanja putem koje se kritično opterećenje može odrediti i u elastičnoj i u nelineranoj oblasti naprezanja.

Ovaj rad prikazuje rezultate parametarske numeričke analize neuniformnih, obostrano zglobno oslonjenih i konzolnih elemenata, koja je sprovedena u softveru Abaqus [7]. Neuniformnost se ogleda u promeni poprečnog preseka kroz dva segmenta i stepenastoj promeni aksijalne sile pritiska. Variran je odnos momenta inercije poprečnih preseka gornjeg i donjeg

critical elastic buckling load should be determined taking into account the exact distribution of geometric characteristics along the length of the member, boundary conditions, and the existence of possible eccentricity in the position of the system axes of the adjacent segments in members with a stepped change in cross section. The critical elastic buckling load can be determined using theoretical analyses that require the solution of nonlinear differential equations, or using one of the advanced numerical analysis methods. In simpler cases, simplified calculation procedures can be used in which the value of the elastic buckling force is determined by modifying the basic Eulerian expressions for buckling of uniform elements with an equivalent moment of inertia or an equivalent effective length, both of which take into account the geometric non-uniformity of the analysed member.

The position of the critical cross-section in which the ultimate flexural buckling load is achieved is unclearly defined. This is especially pronounced in the case of members with linear change of cross-section, where finding the solution asks for iterative calculations. In general, it can be at the cross-section in which normal stress reaches the maximum value.

For practical engineering applications, the flexural buckling resistance of non-uniform members should be based on the use of global second-order analysis, taking into account the influence of geometric, material and structural imperfections on the behaviour of the structure in the state of ultimate load capacity. Second-order influences can be included in design in one of the two ways [1], [2]:

– **Indirectly, by determining the value of the critical buckling load** using approximate methods or linear-elastic analysis for members without imperfections, after which the general method of calculating the flexural buckling resistance, which is valid for uniform elements, should be applied in accordance with SRPS EN 1993-1-1 [3].

– **Directly, by applying a second order theory** with the equivalent initial global and local imperfections of members. The shape of imperfection should correspond to the fundamental form of elastic self-buckling in the appropriate plane of buckling, and the size of the imperfection should be in accordance with the recommendations given in SRPS EN 1993-1-1 / NA [4]. By this procedure, the calculation of the flexural buckling resistance of members is reduced to the calculation of the load bearing capacity of the critical cross-section for the compressive axial force and bending moment of second order.

Finite element method should be mentioned as an effective method in analysis of different stability problems that include geometric and material nonlinearities. Except for being the basis of advanced software packages (RSTAB, Sofistik, DIANA FEA...), it is also the basis of individual scientific programs developed using different programming languages. As an example, program ALIN [5], [6] solves complex problems of static and dynamic analysis, linear analysis of buckling through which the critical load can be determined both in the elastic and in the non-linear stress region.

This paper presents the results of parametric numerical analysis of non-uniform, hinged ends and cantilever members carried out in Abaqus software package [7].

segmenta i odnos aksijalnih sila u segmentima. Dužina elemenata je 10 m, visina gornjeg segmenta 4 m, visina donjeg segmenta 6 m. Za zglobno oslonjene elemente poprečni presek donjeg segmenta je HEA 300 dok je poprečni presek gornjeg segmenta variran u opsegu: HEA 160, HEA 180, HEA 200, HEA 220 i HEA 240. Za konzolne elemente poprečni presek donjeg segmenta stuba je HEB 450, dok je poprečni presek gornjeg segmenta variran u opsegu: HEB 220, HEB 240, HEB 260, HEB 280 i HEB 300. Analiziran opseg odnosa sila na krajevima FE modela, $P_1/(P_1+P_2)$ je od 0,05 do 0,50 s korakom od 0,05. Ukupan broj analiziranih FE modela je 100. Svrha ovog rada je da se na osnovu zadatih parametara i rezultata linerane analize izvijanja utvrdi opseg koeficijenata dužine izvijanja oko jače ose inercije pojedinačanih segmenata analiziranih neuniformnih elemenata. Analiza fleksione stabilnosti elemenata oko slabije ose inercije nije analizirana u okviru ovog rada, imajući u vidu praktičan značaj utvrđivanja veličine koeficijenata izvijanja oko jače ose inercije koji ne mogu biti jednoznačno određeni kako je to u slučaju izvijanja oko slabije ose preseka. Takođe, u radu je izvršena procena tačnosti proračunskih vrednosti nosivosti na fleksiono izvijanje prema opštoj metodi proračuna [3] kroz njihovo pređenje s rezultatima nelinearne numeričke analize.

2 OPŠTA METODA PRORAČUNA PREMA SRPS EN 1993-1-1

Opšta metoda proračuna nosivosti elemenata na izvijanje data u poglavlju 6.3.1, SRPS EN 1993-1-1 [3] odnosi se na pritisnute elemente konstantnog poprečnog preseka. Opšti format kontrole nosivosti na izvijanje prema ovoj metodi, podrazumeva zadovoljenje uslova da je odnos proračunske vrednosti sile pritiska N_{Ed} i proračunske nosivosti elementa na izvijanje $N_{b,Rd}$ manji ili jednak od jedan. Proračunska nosivost elementa na izvijanje $N_{b,Rd}$ predstavlja proizvod bezdimenzionalnog koeficijenta izvijanja χ i nosivosti poprečnog preseka koja odgovara naponu na granici razvlačenja Af_y , a koji je redukovano parcijalnim koeficijentom sigurnosti γ_{M1} . Bezdimenzionalni koeficijent izvijanja χ zavisi od relativne vitkosti elementa $\bar{\lambda}$ i koeficijenta imperfekcije α kojim su obuhvaćeni uticaji nesavršenosti realnih elemenata. Relativna vitkost za fleksiono izvijanje u slučaju klase poprečnog preseka 1, 2 i 3 može da se odredi prema opštem izrazu:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} \quad (1)$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2} \quad (2)$$

gde su: N_{cr} Ojlerova kritična sila za fleksiono izvijanje, E modul elastičnosti, I momenat inercije poprečnog

The non-uniformity is reflected in the change of cross-section through two segments and the stepped change in compressive axial force. The ratio of the moment of inertia of cross-sections of the upper and lower segments and the ratio of axial forces in the segments is varied. The length of the members is 10 m, the height of the upper segment is 4 m, and the height of the lower segment is 6 m. For the hinged elements, the cross-section of the lower segment is HEA 300 while the cross-section of the upper segment varies in the range: HEA 160, HEA 180, HEA 200, HEA 220 and HEA 240. For the cantilever members, the cross section of the lower segment of the column is HEB 450 while the cross-section of the upper segment varies in the range: HEB 220, HEB 240, HEB 260, HEB 280 and HEB 300. The analysed range of force ratio at the ends of the FE model, $P_1/(P_1+P_2)$ is from 0.05 to 0.50 with a step of 0.05. The total number of FE models analysed is 100. The purpose of this paper is to determine, on the basis of the given parameters and the results of the linear analysis of buckling, the range of effective length coefficients for the major axis of the individual segments of analysed non-uniform elements. The analysis of the flexural stability of the members for the minor axis of inertia has not been analysed in this paper, given the practical importance of determining the value of the buckling coefficient for the major axis, which cannot be uniquely determined as it is in the case of buckling for the minor axis of cross-section. Also, the paper assesses the accuracy of the design values for flexural buckling resistance according to the general method [3] by comparing them with the results of nonlinear numerical analysis.

2 GENERAL DESIGN METHOD ACCORDING TO SRPS EN 1993-1-1

The general design method for buckling resistance of members given in Chapter 6.3.1, SRPS EN 1993-1-1 [3] refers to compressed members with uniform cross-section. The general format of buckling resistance design according to this method implies that the ratio of the design value of compressive load N_{Ed} and design value of buckling resistance $N_{b,Rd}$ is less than or equal to one. The design value of buckling resistance $N_{b,Rd}$ represents the product of non-dimensional buckling coefficient χ and the cross-sectional load carrying capacity correspondent to the yield stress Af_y , which is reduced by the partial safety factor γ_{M1} . The non-dimensional coefficient of buckling χ depends on the relative slenderness of the member $\bar{\lambda}$ and the coefficient of imperfection α , which includes the influence of imperfections of real members. The relative slenderness for flexural buckling in the case of the cross-section classes 1, 2 and 3 can be determined according to the general expression:

where: N_{cr} is Euler critical flexural buckling load, E is modulus of elasticity, I is moment of inertia of the cross-

preseka u ravni izvijanja a L_{cr} dužina izvijanja elementa.

Nesavršenosti realnih elemenata smanjuju njihovu nosivost na izvijanje. Evrokod 3 [3] definiše analitičku zavisnost između relativne vitkosti elementa $\bar{\lambda}$ i bezdimenzionalnog koeficijenta izvijanja χ preko familije krivih izvijanja. Osnova za matematičku interpretaciju ovih krivih je Ajraton-Perijeva funkcija u kojoj je uticaj nesavršenosti realnih elemenata uzet preko koeficijenta imperfekcije α . Vrednost ovog koeficijenta zavisi od oblika poprečnog preseka, relevantne ravni izvijanja, vrste proizvodnog procesa (vruće valjanje, hladno oblikovanje ili zavarivanje), kao i kvaliteta osnovnog materijala.

Opšta metoda proračuna može se primeniti i pri proračunu nosivosti pritisnutih neuniformnih elemenata na fleksiono izvijanje uz modifikaciju koja se odnosi na određivanje vrednosti kritične sile izvijanja N_{cr} , za koju se ne može koristiti izraz (2). Savremeni postupci proračuna podrazumevaju određivanje elastične kritične sile izvijanja primenom linearno-elastične analize izvijanja u odgovarajućem softveru, ili primenom približnih, pojednostavljenih metoda koje su date u relevantnoj literaturi [1], na primer u funkciji ekvivalentnog momenta inercije.

3 OPIS NUMERIČKIH MODELA

Dve različite vrste analize su urađene za svaki numerički model: linearno-elastična analiza i nelinearna statička analiza fleksionog izvijanja oko jače ose inercije, uz korišćenje Riksovog solvera. Linearno-elastična analiza, zasnovana na problemu bifurkacione stabilnosti, daje elastičnu kritičnu silu izvijanja idealno pravog elementa bez imperfekcija. Odgovor elementa je praćen zanemarljivo malim bočnim deformacijama, a kada sila dostigne graničnu, kritičnu vrednost, dolazi do naglog izvijanja koje je praćeno velikim deformacijama. Kako je modul elastičnosti u linearno-elastičnoj oblasti konstantan, vrednost kritične sile izvijanja isključivo zavisi od vitkosti elemenata i graničnih uslova na krajevima elementa. S druge strane, materijalna i geometrijska nelinearnost kao i strukturne imperfekcije realnih konstruktivnih elemenata ograničavaju njihovu nosivost na fleksiono izvijanje. U takvim slučajevima linearno-elastična analiza koristi se za određivanje osnovnih oblika izvijanja, a njeni rezultati za interpretaciju početnih geometrijskih imperfekcija u kasnijim fazama analize stabilitetnih problema realnih elemenata. U Abaqusu [7] postoji nekoliko različitih numeričkih metoda za rešavanje nelinearnih statičkih problema. Metoda Riksa, ili metoda kružnog luka osnovna je i najviše korišćena metoda za analizu ponašanja pritisnutih elemenata na različite oblike izvijanja. Uslov za njenu primenu jeste da kriva sila-pomeranje bude glatka i bez grananja. Tačnost vrednosti granične sile značajno zavisi od veličine početnih geometrijskih imperfekcija realnog elementa. Ukoliko su ova odstupanja idealizovana, odnosno zanemarljivo mala, početni, uzlazni deo krive je strm s naglim prelaskom u nestabilno ravnotežno stanje, kada primena Riksove metode može dovesti do divergencije rešenja.

FE modeli su realizovani sa *solid* elementima i *wedge* mrežom konačnih elemenata dimenzija 15 mm. U

section in the buckling plane and L_{cr} is effective length of member.

The imperfections of real elements reduce their buckling resistance. Eurocode 3 [3] defines the analytical relation between the relative slenderness of the member $\bar{\lambda}$ and the non-dimensional coefficient of buckling ϕ with a family of buckling curves. The basis for the mathematical interpretation of these curves is the Ayrton-Perry formula, in which the influence of the imperfections of real elements is taken into account using the coefficient of imperfection α . The value of this coefficient depends on the shape of the cross-section, the relevant plane of buckling, the type of the production process (hot, cold rolled or welded), as well as the quality of the steel material.

The general design method can also be applied in the flexural buckling resistance design of the compressed non-uniform members with a modification that refers to the determination of the critical buckling force value N_{cr} for which the expression (2) cannot be used. Modern design methods involve determining the critical elastic buckling load using a linear-elastic analysis in the appropriate software, or using approximate, simplified methods, given in the relevant literature [1], for example in the function of the equivalent moment of inertia.

3 NUMERICAL MODELS DESCRIPTION

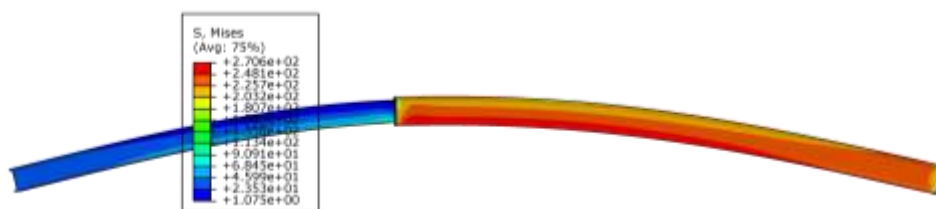
Two different types of analysis were undertaken for each numerical model: linear-elastic analysis and non-linear static analysis of flexural buckling for major axis, using the Riks solver. Linear-elastic analysis, based on the problem of bifurcation stability, gives the critical elastic buckling load of an ideal real member without imperfection. The response of the member is accompanied by negligibly small lateral deformations, and when the load reaches the ultimate critical value, a sudden buckling followed by large deformations occurs. Since the modulus of elasticity in the linear-elastic region is constant, the value of the critical buckling load depends exclusively on the slenderness of members and the boundary conditions at the ends of the members. On the other hand, material and geometric non-linearity as well as structural imperfections of real structural members limit their flexural buckling resistance. In these cases, the linear-elastic analysis is used to determine the basic modes of buckling, and its results are used for the interpretation of initial geometric imperfections in later stages of analysis of the stability problems of real members. In Abaqus [7] there are several different numerical methods for solving nonlinear static problems. The Riks method, or the arc-length method, is the basic and most widely used method for analysing the behaviour of compressed members in different modes of buckling. The requirement for its application is that load-displacement curve is smooth and without branching. The accuracy of the critical load value depends greatly on the size of the initial geometric imperfections of the real member. If these deviations are idealised, or negligible, the initial, ascending part of the curve is steep with a sudden transition to an unstable equilibrium state, when the application of the Riks method can lead to a divergence in calculations.

FE models are developed using "solid" elements and

težištima poprečnih preseka, na oba kraja FE modela, definisane su referentne tačke koje su povezane s površinama krajnjih poprečnih preseka preko opcije *kinematic coupling type*. U zavisnosti od analiziranog statičkog sistema FE modela, referentnim tačkama su dodeljeni odgovarajući granični uslovi koji simuliraju idealni zglobovi oslonac u slučaju proste grede, odnosno uklještenje u slučaju konzole. Koncentrisane sile pritiska u pravcu podužne ose FE modela zadate su u težištu krajnjeg gornjeg poprečnog preseka, odnosno na mestu stepenaste promene poprečnog preseka, respektivno. Nominalne vrednosti krive napon-dilatacija koja je dobijena eksperimentalnim ispitivanjem epruveta uzetih iz finalnog vruće-valjanog profila HEB 260 s kvalitetom čeličnog materijala S275 [8] usvojena je za opisivanje mehaničkih svojstava materijala svih FE modela. Eksperimentalne vrednosti su transformisane u stvarne vrednosti napon-dilatacija. Pri analizi su usvojene uobičajene vrednosti elastičnih konstanti materijala za čelik $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ i $\nu = 0,3$. Zaostali naponi nastali kao rezultat proizvodnog procesa nisu modelirani. Standard SRPS EN 1993-1-5 [9] u Prilogu C sugeriše da se geometrijske imperfekcije mogu bazirati na obliku kritičnog oblika izvijanja u relevantnoj ravni i dopušta redukciju geometrijskih tolerancija fabričke izrade u iznosu od 80% u interpretaciji početnih nesavršenosti. Međutim, budući da zaostali naponi nisu uključeni u analizi statičkog odgovora elementa, za amplitudu početne imperfekcije usvojena je dopuštena proizvodna tolerancija koja uključuje odstupanje ose elementa od vertikalnosti u punom iznosu od $L/750$, u skladu sa standardom SRPS EN 1090-2 [10]. Normalizovane vrednosti koordinata deformisanog modela za kritični oblik izvijanja su skalirane i učitane su naredbom *Imperfection* u opciji-*Edit keyword* za svaki pojedinačni model. Uticaj lokalnih imperfekcija poprečnog preseka zanemaren je u okviru analize.

4 PRIKAZ REZULTATA NUMERIČKE ANALIZE

Slike 1 i 2 prikazuju raspodelu Misesovih napona pri graničnom stanju nosivosti analiziranog neuniformnog elementa statičkog sistema proste grede usled fleksionog izvijanja oko jače ose inercije. Lom elementa određen je plastifikacijom kritičnog preseka u donjem, odnosno gornjem segmentu, respektivno.

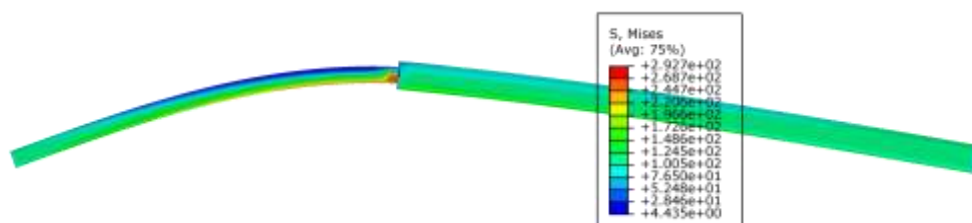


Slika 1. Lom donjeg segmenta FE neuniformnog modela
Figure 1. Failure of the lower segment of the non-uniform FE model

"wedge" finite element mesh with a size of 15 mm. In centroids of cross-sections, at both ends of the FE model, reference points are defined and they are coupled with the cross-sections at the ends using the "kinematic coupling type" option. Depending on the type of the analysed FE model, the reference points are assigned appropriate boundary conditions that simulate an idle hinge in the case of simply supported beam, or a clamp in the case of cantilever. Concentrated compressive forces in the direction of the longitudinal axis of the FE model are applied at the centroid of the upper cross section, and at the stepped change in the cross section, respectively. The nominal values of the stress-strain curve obtained by experimental testing of the specimens taken from the final hot-rolled profile HEB 260 with the quality of steel material S275 [8] were adopted to describe the mechanical properties of materials for all FE models. The experimental values were transformed into the actual values of the stress-strain. In the analysis, the usual values of the elastic constants of steel material $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ and $\nu = 0,3$ were adopted. The residual stresses resulting from the manufacturing process were not modelled. Design code SRPS EN 1993-1-5 [9] in Appendix C suggests that geometric imperfections can be based on the buckling mode in the relevant plane and allows for the reduction of manufacturing geometric tolerances of 80% in the interpretation of initial imperfections. However, since the residual stresses are not included in the analysis of the static response of the member, the allowable manufacturing tolerance has been adopted for the amplitude of the initial imperfection, and it includes deviation of the member axis from the vertical plane in the full amount of $L/750$ in accordance with SRPS EN 1090-2 [10]. The normalized coordinate values of the deformed model for the critical buckling mode are scaled and assigned with the "Imperfection" command in the "Edit keyword" option for each individual model. The influences of local imperfections of the cross-section are disregarded in this analysis.

4 THE RESULTS OF THE NUMERICAL ANALYSIS

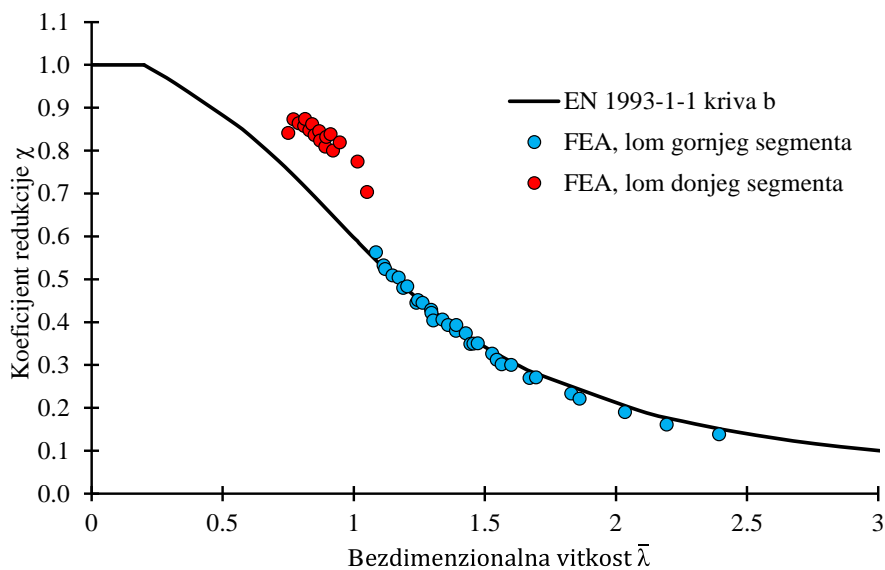
Figures 1 and 2 show the distribution of Mises stresses at the ultimate load state of the analysed non-uniform simply supported member due to the flexural buckling for major axis. The failure of the member is determined by the plasticization of the critical cross-section in the lower and upper segment, respectively.



Slika 2. Lom gornjeg segmenta FE neuniformnog modela
Figure 2. Failure of the upper segment of the non-uniform FE model

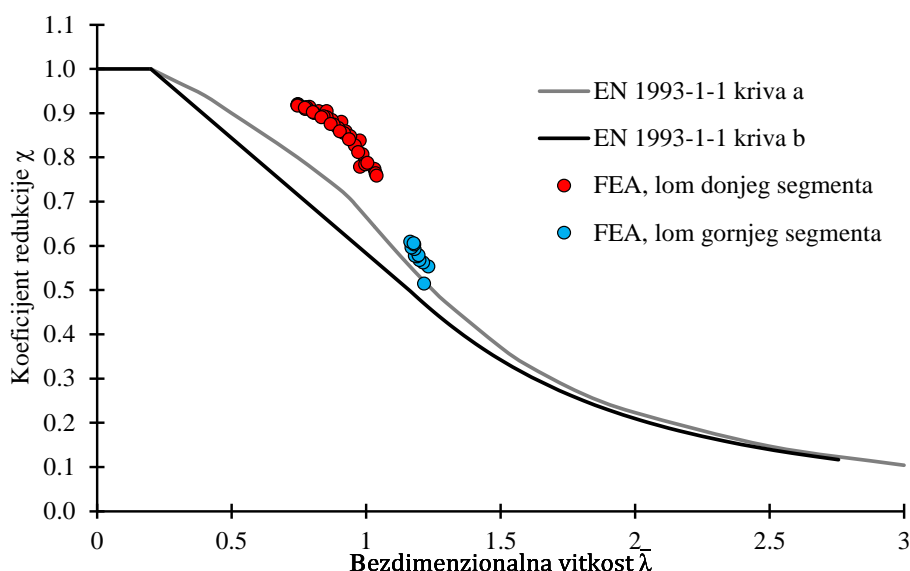
Numeričke vrednosti graničnih sila fleksionog izvijanja oko jače ose inercije $N_{b,FEA}$ normalizovane su s vrednošću sile pri kojoj dolazi do plastifikacije poprečnog preseka A_f za svaki pojedinačni segment, upoređene s rezultatima opšte metode proračuna prema SRPS EN 1993-1-1 [3] izborom relevantne krive za odgovarajući poprečni presek i grafički prezentovane na slici 3 u slučaju FE elemenata sistema proste grede, odnosno slici 4 u slučaju elemenata konzolnog sistema. Uzimajući u obzir oblik poprečnog preseka segmenta, proračunske nosivosti obostrano zglobno oslonjenih elemenata određene su izborom krive b . U slučaju konzolnih elemenata, proračunske nosivosti donjih segmenata sračunate su za krivu izvijanja a , odnosno za krivu b kod gornjih segmenata.

The numerical values of the ultimate flexural buckling for the major axis $N_{b,FEA}$ are normalized with the value of the force in which the cross-section is plasticized A_f for each individual segment and compared with the results of the general design method according to SRPS EN 1993-1-1 [3] through adequate choosing of the curves for the corresponding cross-sections. These values are graphically presented in Figure 3 in the case of simply supported FE member, that is, in Figure 4 in the case of cantilever members. Taking into account the shape of the cross section of the segment, the design ultimate strength of simply supported members is determined by choosing the curve b . In the case of cantilever members, the design ultimate strength of the lower segments are calculated for the curve a , that is, for the curve b in the case of the upper segments.



Slika 3. Poređenje numeričkih i proračunskih vrednosti nosivosti na fleksiono izvijanje u slučaju obostrano zglobno oslonjenog elementa

Figure 3. Comparison of numerical and design values of flexural buckling resistance in the case of simply supported members



Slika 4. Poređenje numeričkih i proračunskih vrednosti nosivosti na fleksiono izvijanje u slučaju konzolnog elementa
Figure 4. Comparison of numerical and design values of flexural buckling resistance in the case of cantilever members

Tabela 1. Vrednosti koeficijenta dužine izvijanja β za zglobno oslonjene elemente
Table 1. The values of the effective length coefficients β for simply supported members

		$P_2/(P_1+P_2)$										
		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	
	Donji segment Lower segment	0,09	2,295	2,398	2,497	2,593	2,687	2,777	2,866	2,951	3,035	3,117
		0,14	1,952	2,034	2,114	2,192	2,267	2,341	2,412	2,482	2,550	2,617
		0,20	1,692	1,757	1,821	1,883	1,944	2,004	2,062	2,118	2,174	2,229
		0,30	1,513	1,563	1,613	1,662	1,710	1,758	1,804	1,850	1,896	1,940
		0,42	1,394	1,430	1,468	1,506	1,544	1,581	1,618	1,655	1,692	1,727
	Gornji segment Upper segment	0,09	4,656	3,440	2,925	2,631	2,438	2,300	2,197	2,117	2,052	1,999
		0,14	4,854	3,577	3,035	2,725	2,522	2,377	2,268	2,183	2,114	2,058
		0,20	5,104	3,747	3,170	2,840	2,622	2,467	2,350	2,259	2,185	2,125
		0,30	5,523	4,035	3,399	3,034	2,792	2,620	2,490	2,389	2,307	2,240
		0,42	6,097	4,421	3,706	3,293	3,019	2,823	2,675	2,559	2,466	2,389

Tabela 2. Vrednosti koeficijenta dužine izvijanja β za konzolne elemente
Table 2. The values of the effective length coefficients β for cantilever members

		$P_2/(P_1+P_2)$										
		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	
	Donji segment Lower segment	0,10	2,093	2,208	2,361	2,540	2,730	2,919	3,104	3,282	3,453	3,618
		0,14	2,089	2,186	2,304	2,440	2,586	2,736	2,885	3,032	3,175	3,314
		0,19	2,086	2,173	2,275	2,388	2,509	2,634	2,760	2,885	3,008	3,129
		0,24	2,084	2,166	2,257	2,357	2,462	2,569	2,679	2,788	2,896	3,003
		0,32	2,084	2,161	2,245	2,334	2,428	2,523	2,619	2,716	2,812	2,906
	Gornji segment Upper segment	0,10	4,469	3,332	2,910	2,711	2,606	2,544	2,504	2,477	2,457	2,442
		0,14	5,260	3,892	3,350	3,073	2,912	2,813	2,746	2,699	2,666	2,639
		0,19	6,048	4,455	3,808	3,462	3,253	3,117	3,024	2,957	2,907	2,868
		0,24	6,867	5,046	4,294	3,882	3,627	3,456	3,336	3,247	3,181	3,128
		0,32	7,847	5,753	4,880	4,395	4,088	3,878	3,727	3,615	3,529	3,461

Na osnovu zadatih ulaznih parametara koji se ogledaju u odnosu momenata inercije gornjeg i donjeg segmenta I_2/I_1 i odnosa aksijalnih sila u segmentima analiziranih FE modela $P_1/(P_1+P_2)$ s jedne strane i dobijenih vrednosti kritičnih sila izvijanja N_{cr} s druge strane, definisane su vrednosti koeficijenta izvijanja β pojedinačnih segmenata koje su prikazane u tabelama 1 i 2. Nomogrami prezentovani na slici 5a i 5b za slučaj obostrano zglobno oslonjenih elemenata, odnosno konzolnih elemenata omogućavaju grafičko određivanje koeficijenta izvijanja β . Na apscisi nomograma dat je odnos aksijalnih sila u segmentima. Crne linije na nomogramu definišu vrednosti koeficijenta dužine izvijanja za gornji segment koje se očitavaju na levoj ordinati, dok crvene linije na nomogramu definišu vrednosti koeficijenta dužine izvijanja za donji segment koje se očitavaju na desnoj ordinati.

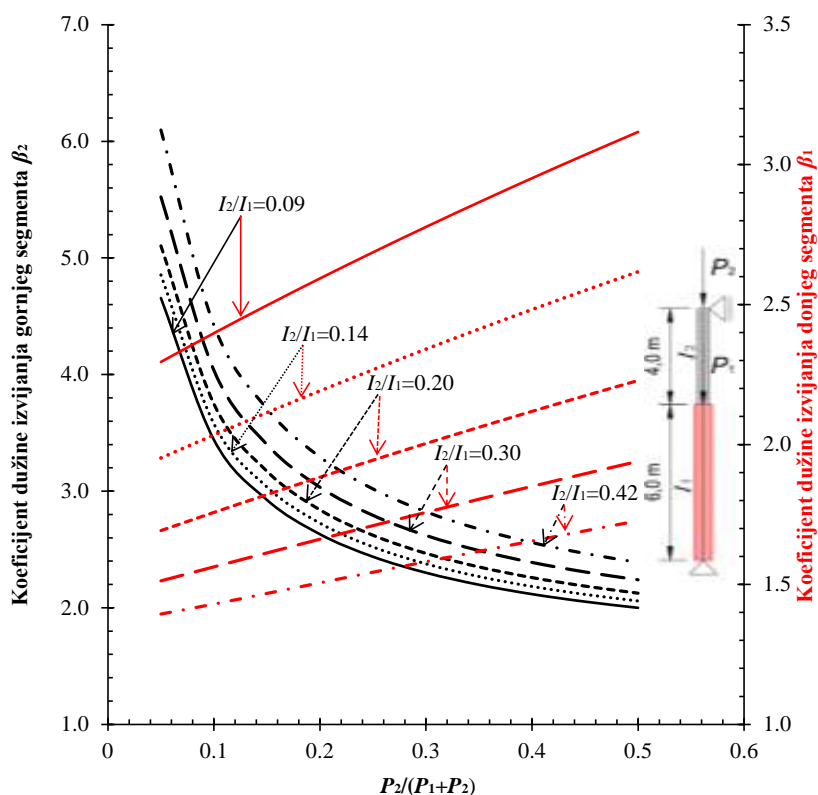
Vrednost koeficijenta dužine izvijanja za donji segment obostrano oslonjenog elementa je u opsegu od 1,4 do 3,1, a za konzolni element od 2,1 do 3,6. Koeficijenti dužine izvijanja imaju veću vrednost pri većim vrednostima odnosa sile u vrhu i sile na kontaktu segmenta. Vrednost koeficijenta smanjuje se povećanjem odnosa krutosti gornjeg i donjeg segmenta.

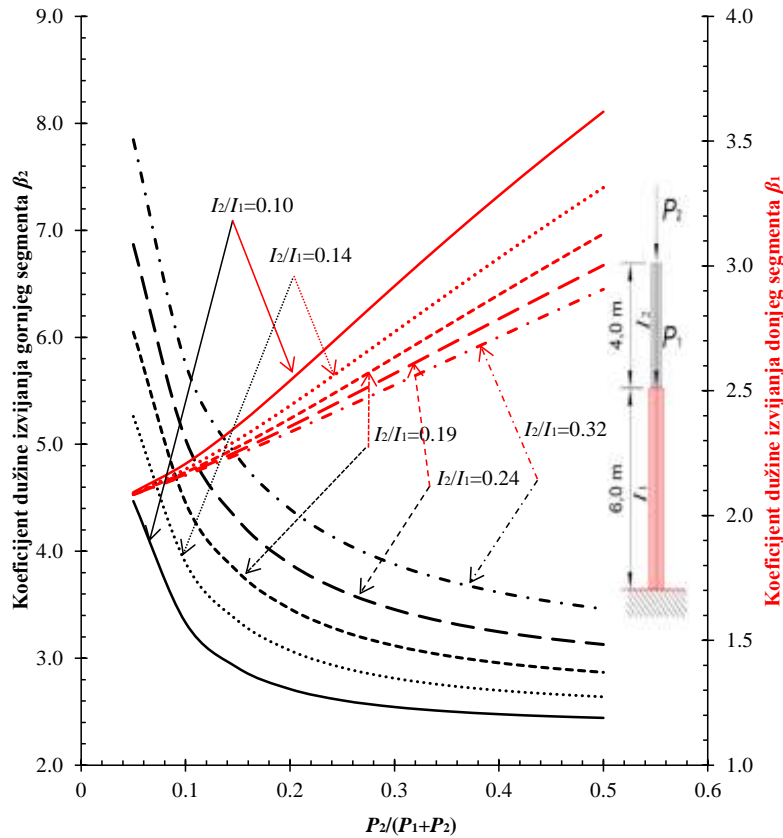
Vrednost koeficijenta dužine izvijanja za gornji segment obostrano oslonjenog elementa je u opsegu od 2 do 6,1, a za konzolni element od 2,4 do 7,8. Koeficijent dužine izvijanja opada s povećanjem odnosa sile u vrhu i sile na spoju segmenata, a raste s povećanjem odnosa krutosti gornjeg i donjeg segmenta.

Based on the given input parameters that represent the relation between the moment of inertia of the upper and lower segment I_2/I_1 and the ratio of axial forces in the segments of the analysed FE models $P_1/(P_1+P_2)$ on one hand, and the obtained values of the critical buckling loads N_{cr} on the other, the values of the buckling coefficients β of single segments are defined and shown in Tables 1 and 2. The nomograms presented in Figures 5a and 5b in the case of simply supported or cantilever members allow the graphical determination of the buckling coefficient β . The abscissa of the nomogram gives the ratio of axial forces in the segments. The black lines in the nomogram define the values of the effective length coefficients for the upper segment and are read on the left ordinate, while the red lines on the nomogram define the values of the effective length coefficient for the lower segment and are read on the right ordinate.

The effective length coefficient for the lower segment of the simply supported members is in the range of 1.4 to 3.1, and for the cantilever member from 2.1 to 3.6. The effective length coefficients have a higher value for greater values of the force at the top to the force at the segment change ratio. The value of the coefficient reduces with the increase of the ratio of the stiffness of upper and lower segments.

The value of the effective length coefficient for the upper segment of simply supported members is in the range of 2 to 6.1, and for the cantilever members from 2.4 to 7.8. The effective length coefficient decreases with the increase in the ratio of the force at the top and force at the segment change, and increases with the increase in the ratio of the stiffness of the upper and lower segments.





Slika 5. Koeficijent dužine izvijanja gornjeg i donjeg segmenta u funkciji odnosa momenta inercije I_2/I_1 i odnosa sila na krajevima elementa $P_1/(P_1+P_2)$

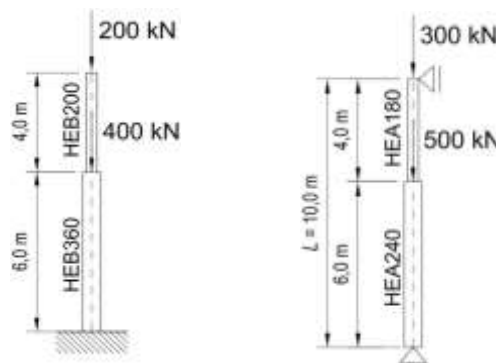
Figure 5. Effective length coefficient of upper and lower segments in function of moments of inertia ratio I_2/I_1 and axial forces ratio $P_1/(P_1+P_2)$

5 NUMERIČKE ANALIZE

Na primerima obostrano zglobno oslonjenog i konzolnog stuba, koji su prikazani na slici 6, pokazana je verifikacija rezultata koji su dobijeni u numeričkoj parametarskoj analizi.

5 NUMERICAL ANALYSES

Verification of the results of numerical parametric analysis is done through comparison with the examples of simply supported and cantilever members, shown in Figure 6.



Slika 6. Numerički primeri
Figure 6. Numerical examples

Verifikacija je sprovedena poređenjem vrednosti kritične sile fleksionog izvijanja dobijene u komercijalnom softveru Autodesk Robot 2012 i primenom nomograma koji su prikazani u ovom radu. Da bi se odredila vrednost kritične sile fleksionog izvijanja koristeći nomograme koji su dati na slici 5, potrebno je odrediti odnos momenata inercije gornjeg i donjeg segmenta i odnos vrednosti aksijalnih sila u gornjem i donjem segmentu.

Konzolni stub

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_{HEB200}}{I_{HEB360}} = \frac{5696 \text{ cm}^4}{43190 \text{ cm}^4} = 0,1319$$

$$\frac{P_2}{P_1 + P_2} = \frac{200}{200 + 400} = 0,333$$

Potrebno je uraditi linearnu interpolaciju za odnos momenata inercije 0,10 i 0,14.

$$\frac{I_2}{I_1} = 0,10 \Rightarrow \beta_1 = 3,04241; \beta_2 = 2,51763$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 0,14 \Rightarrow \beta_1 = 2,83522; \beta_2 = 2,76832$$

$$\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 0,1319 \Rightarrow \beta_1 = 2,87717; \beta_2 = 2,7156$$

Konačno, vrednost kritične sile je:

$$N_{cr} = \frac{E \cdot I_i \cdot \pi^2}{(\beta_i \cdot l_i)^2} \Rightarrow N_{cr,HEB360} = \frac{21000 \cdot 43190 \cdot \pi^2}{(2,87717 \cdot 600)^2} = 3003,78 \text{ kN}$$

$$N_{cr,HEB200} = \frac{21000 \cdot 5696 \cdot \pi^2}{(2,7156 \cdot 400)^2} = 1000,55 \text{ kN}$$

Obostrano zgloбно oslonjen stub

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_{HEA180}}{I_{HEA240}} = \frac{2510 \text{ cm}^4}{7763 \text{ cm}^4} = 0,3233$$

$$\frac{P_2}{P_1 + P_2} = \frac{300}{300 + 500} = 0,375$$

Potrebno je uraditi linearnu interpolaciju za odnos momenata inercije 0,30 i 0,42.

$$\frac{I_2}{I_1} = 0,30 \Rightarrow \beta_1 = 1,8274; \beta_2 = 2,4395$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 0,42 \Rightarrow \beta_1 = 1,6368; \beta_2 = 2,6170$$

$$\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 0,3233 \Rightarrow \beta_1 = 1,7904; \beta_2 = 2,4740$$

Konačno, vrednost kritične sile je:

$$N_{cr} = \frac{E \cdot I_i \cdot \pi^2}{(\beta_i \cdot l_i)^2} \Rightarrow N_{cr,HEA240} = \frac{21000 \cdot 7763 \cdot \pi^2}{(1,7904 \cdot 600)^2} = 1394,34 \text{ kN}$$

$$N_{cr,HEA180} = \frac{21000 \cdot 2510 \cdot \pi^2}{(2,4740 \cdot 400)^2} = 531,21 \text{ kN}$$

The verification was carried out by comparison of the values of the flexural buckling critical force obtained in the commercial software Autodesk Robot 2012 and those obtained from the nomograms shown in this paper. In order to determine the value of the flexural buckling critical force using the nomograms given in Figure 5 it is necessary to determine the ratio of the moment of inertia of the upper and lower segments and the ratio of the axial forces in the upper and lower segments.

Cantilever column

Linear interpolation for the ratio of the moments of inertia between 0.10 and 0.14 is required.

Finally, the value of the critical force is:

Simply supported column

Linear interpolation for the ratio of the moments of inertia between 0.30 and 0.42 is required.

Finally, the value of the critical force is:

U tabeli 3 date su vrednosti kritičnih sila fleksionog izvijanja određenih u softveru i grafičkim putem preko nomograma i njihovo poređenje.

Table 3 gives values of flexural buckling critical force values obtained from software modelling and graphically determined using nomograms and their comparison.

Tabela 3. Poređenje vrednosti kritičnih sila fleksionog izvijanja
Table 3. Comparison of flexural buckling critical force values

		Kritična sila dobijena primenom softvera <i>Software critical force</i> $N_{cr,FEA}$	Kritična sila dobijena primenom nomograma <i>Nomogram critical force</i> $N_{cr,cal}$	Odstupanja <i>Differences</i>
		[kN]	[kN]	[%]
Konzolni stub <i>Cantilever</i>	Donji segment <i>Lower segment</i>	3022,7	3003,8	0,63
	Gornji segment <i>Upper segment</i>	1007,6	1000,6	0,70
Obostrano zglobno oslonjen stub <i>Simply supported column</i>	Donji segment <i>Lower segment</i>	1472,0	1394,3	5,57
	Gornji segment <i>Upper segment</i>	552,0	531,2	3,91

6 ZAKLJUČCI

Metoda koja indirektno uzima u obzir uticaje drugog reda uz prethodno određivanje kritične sile fleksionog izvijanja neuniformnog elementa daje dobru predikciju njegove granične nosivosti na fleksiono izvijanje.

Na osnovu rezultata parametarske numeričke analize koja je obuhvatila 100 razvijenih FE modela, definisani su grafički nomogrami i tabelarni moduli za određivanje koeficijenata dužine izvijanja segmenata neuniformnih elemenata. Analizom su obuhvaćeni najčešći statički sistemi ovakvog tipa stubova: uklješteni i obostrano zglobno oslonjeni.

Razvijeni nomogrami i tabelarni moduli jednostavni su za primenu u svakodnevnoj inženjerskoj praksi, što je pokazano u numeričkim primerima. Odstupanja između vrednosti kritične sile dobijene Linerano-elastičnom analizom i primenom nomograma ili tabela prihvatljiva su sa stanovišta tačnosti i pouzdanosti.

Parametarska analiza koja je prikazana u radu treba da bude proširena uzimajući u obzir različite visine segmenata s ciljem definisanja nomograma koji bi imali široku primenu u inženjerskoj građevinskoj praksi.

6 CONCLUSIONS

The method that indirectly takes into account the effects of the second order with the predetermination of the flexural buckling critical force of a non-uniform members provides a good prediction of its flexural buckling resistance.

Based on the results of the parametric numerical analysis that included 100 FE models, graphic nomograms and tabular modules were defined for determining effective buckling length coefficients of non-uniform members' segments. The analysis deals with the most common types of columns: simply supported and cantilever.

Developed nomograms and tabular modules are easy to apply in everyday engineering practice, as shown in numerical examples. The deviations between the critical force values obtained by linear-elastic analysis and from the nomograms or tables are acceptable from accuracy and reliability standpoint.

The parametric analysis shown in this paper should be further developed taking into account different heights of segments in order to define the nomograms that would have extensive application in the structural engineering practices.

7 LITERATURA REFERENCES

- [1] L. S. da Silva, R. Simoes, H. Gervasio: Design of steel structures. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-1 - General rules and rules for buildings, ECCS Eurocode Design Manuals, 1st Edition, Wilhelm Ernst & Sohn, 2010.
- [2] Z. Marković: „Granična stanja čeličnih konstrukcija prema Evrokodu”, Akademska misao, Beograd, 2014.
- [3] SRPS EN 1993-1-1: 2012 Evrokod 3: „Projektovanje čeličnih konstrukcija: Opšta pravila i pravila za zgrade”, 2012.
- [4] SRPS EN 1993-1-1/NA: 2013 Evrokod 3: „Projektovanje čeličnih konstrukcija-deo 1-1: Opšta pravila i pravila za zgrade-nacionalni prilog”, 2013.
- [5] Čorić S.: „Nelinearna analiza stabilnosti okvirnih nosača”, doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2013
- [6] Čorić S., Brčić S.: „Nelinearna analiza stabilnosti okvirnih nosača”, Građevinski materijali i konstrukcije 2016, vol 3, st. 27–44.
- [7] ABAQUS User Manual, Version 6,12, Providence, RI, USA: DS SIMULIA Corp; 2012.
- [8] Spremic M: *The analysis of headed studs group behavior in composite steel-concrete beam*, PhD thesis, University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering, October 2013
- [9] SRPS EN 1993-1-5: 2006 Evrokod 3: „Proračun čeličnih konstrukcija: Puni limeni elementi”, CEN, 2006.
- [10] SRPS EN 1090-2: Execution of steel structures and aluminium structures, Part 2: Technical requirements for steel structures, CEN, 2008.

REZIME

NUMERIČKA ANALIZA NOSIVOSTI NEUNIFORMNIH PRITISNUTIH ELEMENATA NA FLEKSIONO IZVIJANJE

Aljoša FILIPOVIĆ
Jelena DOBRIĆ
Milan SPREMIĆ
Zlatko MARKOVIĆ
Nina GLUHOVIĆ

Rad prikazuje parametarsku linearno-elastičnu analizu fleksionog izvijanja idealizovanog neuniformnog elementa i nelinearnu analizu fleksionog izvijanja sa ekvivalentnim geometrijskim imperfekcijama, urađenu u programu Abaqus. Analizom su obuhvaćeni zglobno oslonjeni i konzolni elementi sa stepenastom promenom poprečnog preseka, kod kojih je variran odnos krutosti gornjeg i donjeg segmenta i odnos vrednosti aksijalnih sila na vrhu i na mestu promene preseka. Rezultat rada je definisanje grafičkih i tabelarnih modela za određivanje koeficijenata dužine izvijanja segmenta neuniformnih elemenata na osnovu relevantne i pouzdane baze podataka koja je dobijena primenom Metode konačnih elemenata. Kao dodatak, ocenjena je pouzdanost metode proračuna fleksione stabilnosti pritisnutih stubova prema EC3 u kojoj je vrednost kritične sile izvijanja određena u prethodnom koraku primenom Elastične analize izvijanja idealizovanog elementa.

Ključne reči: neuniformni element, fleksiono izvijanje, FEA, opšta metoda, Evrokod 3

SUMMARY

NUMERICAL ANALYSIS OF FLEXURAL BUCKLING RESISTANCE OF NON-UNIFORM COMPRESSION MEMBERS

Aljosa FILIPOVIC
Jelena DOBRIC
Milan SPREMIC
Zlatko MARKOVIC
Nina GLUHOVIC

This paper presents parametric linear-elastic analysis of flexural buckling of idealised non-uniform member and nonlinear analysis of flexural buckling with equivalent imperfections, using software package Abaqus. The analysis includes hinged and cantileverstepped members, where the stiffness ratio of the upper and lower segments and the ratio of the values of axial forces at the top and at the change in the cross-section are varied. The aim of this paper is to define graphic and table models for determining effective lengths coefficients of non-uniform members' segments based on a relevant and reliable database that was obtained using the Finite element method. In addition, the reliability of the method for calculating the flexural stability of the compressed columns according to EC3 was evaluated in which the critical load value was determined in the previous step using the Elastic buckling analysis of idealised elements.

Key words: non-uniform members, flexural buckling, FEA, general method, Eurocode3