



PD 13398



98555067

COBISS

**Univerzitet u Beogradu
Građevinski fakultet**

Branislav S. Pujević

**PRILOG NELINEARNOJ ANALIZI
TANKOZIDNIH ARMIRANO-BETONSKIH
KONSTRUKCIJA**

- Doktorska disertacija -

**Beograd
1989**

9243398

UNIVERZITET U BEOGRADU
GRADJEVINSKI FAKULTET

UNIVERZITET U BEOGRADU
GRADJEVINSKI FAKULTET

BRANISLAV S. PUJEVIĆ

PRILOG NELINEARNOJ ANALIZI TANKOZIDNIH
ARMIRANO-BETONSKIH KONSTRUKCIJA



DOKTORSKA DISERTACIJA

BEOGRAD, 1989. godine

Zahvaljujem se Prof. dr Miodragu Sekuloviću, mentoru ovog rada, na korisnim savetima, pomoći i podršci.

Želim takodje da se zahvalim:

Inženjerskom računskom centru Gradjevinskog fakulteta na finansijskoj pomoći za tehničku obradu teksta i upotrebu računara.

Nadi Ugrici i Zori Živanović na uspešnoj tehničkoj obradi teksta.

Olgi Radosavljević i Milki Laković iz biblioteke Gradjevinskog fakulteta na pomoći u prikupljanju literature.

Posebno se zahvaljujem Akademiku Prof. dr Nikoli Hajdinu na sugestijama koje su bile korisne i inspirativne za izradu ovog rada.

Na kraju želim da se zahvalim svojim roditeljima i supruzi na razumevanju i podršci.

Branislav Pujević

1. UVOD

1.1. OPŠTE NAPOMENE

Proračun stanja naprezanja i deformacija ekscentrično pritisnutih vitkih armirano-betonskih štapova proizvoljnog poprečnog preseka predstavlja jedan od vrlo interesantnih ali ne i potpuno rešenih problema. Naime, uobičajene metode proračuna koje se zasnivaju na elastičnoj teoriji prvog ili drugog reda ili na određivanju graničnog stanja koristeći teoriju loma, mogu ponekad dovesti i do pogrešnih rezultata. Kao što je poznato ove metode proračuna imaju i dobrih strana ali i nedostataka koji se prevashodno ogledaju u nemogućnosti sagledavanja ponašanja u svim fazama rada uz istovremeno uvažavanje reoloških svojstava materijala i promene geometrije štapa.

Savremeno shvatanje analize ovakvih konstrukcija, kojom se obezbeđuje sigurnost i upotrebljivost u svim fazama rada, treba da podrazumeva pored geometrijske i materijalne nelinearnosti i uticaj pojave i razvoja prslina kao i uticaj temperaturnih i vremenskih deformacija betona.

Veliki deo takvih shvatanja je već uključen u propise mnogih zemalja, međutim problem nelinearnog ponašanja, uključujući i vremenski zavisne efekte, ekscentrično pritisnutih vitkih štapova tankozidnog preseka ostaje i dalje nedovoljno razjašnjen, pogotovo ako je štap sastavni deo jednog prostornog okvirnog nosača. Do novih saznanja o ponašanju ovakvih konstrukcija možemo doći eksperimentalnim ili teorijskim razmatranjem. Oba pristupa su neophodna i obostrano komplementarna u proučavanju nelinearnog ponašanja ovakvih konstrukcija.

Sa pojavom računara i razvojem numeričkih postupaka teorijska razmatranja dobijaju na značaju. Došlo je do formiranja takvih matematičkih modela koji su u stanju da što vernije simuliraju realno ponašanje armirano-betonskih konstrukcija. Jedna od numeričkih metoda koja je zbog svoje opštosti i pouzdanosti našla široku primenu u analizi armirano-betonskih konstrukcija je metoda konačnih elemenata. Ona omogućava da se gore pomenuti fenomeni nelinearnog ponašanja armirano-betonskih konstrukcija, koji su ranijih godina bili zanemarivani ili vrlo aproksimativno sagledavani, danas uspešnije rešavaju. Ograničavajući faktor za još uspešniju primenu ogleda se u teškoći izbora najadekvatnijeg modela ponašanja materijala. Zbog kompleks-

nosti koja je posledica sprezanja dva materijala različitih reoloških osobina, danas još uvek ne postoje opšte prihvaćene konstitutivne relacije koje u potpunosti opisuju ponašanje armirano-betonskih konstrukcija u svim fazama rada. Doprinos ovog rada ogleda se u izboru najpovoljnijeg modela ponašanja i njegova modifikacija radi što realnijeg opisivanja ponašanja armirano-betonskih prostornih okvirnih nosača.

Koristeći inkrementalnu formulaciju metode konačnih elemenata u radu je definisan prostorni linijski armirano-betonski konačni element, proizvoljnog punog i tankozidnog poprečnog preseka. Za tankozidne elemente pretpostavlja se da su otvorenog i nedeformabilnog poprečnog preseka i da opterećenje deluje samo u pravcu ose štapa.

Naučni cilj i osnovni doprinos ovog rada je formiranje numeričkog postupka, koristeći metodu konačnih elemenata, za nelinearnu analizu složenih prostornih armirano-betonskih linijskih sistema sastavljenih od punih i tankozidnih elemenata. U tu svrhu definisan je algoritam i napisan program za računar.

1.2. KRATAK ISTORIJSKI PREGLED

Početak primene metode konačnih elemenata u analizi armirano-betonskih konstrukcija povezuje se sa radovima Ngo-a i Scordelisa [1] 1967 godine. Analizirane su proste grede kao ravan problem naprezanja, koristeći trougaone konačne elemente za beton i armaturu, pri čemu je interakcija ostvarena posebnim veznim elementima. Za unapred definisane prsline u grednim elementima sprovedena je linearna statička analiza i dobijena preraspodela napona između betona i armature. Od tada pa do danas objavljeno je niz radova o primeni metode konačnih elemenata u analizi armirano-betonskih konstrukcija. Radi preglednosti ova istraživanja mogu biti razvrstana u tri grupe:

- razmatranja vezana za ponašanje betona i armature: konstitutivne jednačine, vremenski zavisni fenomeni, prostorno stanje naprezanja, itd.
- razmatranja vezana za proučavanje lokalnih fenomena: interakcija betona i armature, efekti smicanja, preraspodela napona u zategnutom betonu, i td.
- razmatranja vezana za proučavanje globalnih fenomena: formiranje modela za analizu ponašanja armirano-betonskih grednih nosača, ploča, ljuski, itd.

Širok pregled radova iz ove oblasti dali su Scordelis [2] i [3], Schnobrich [4] i ASCE komitet za primenu metode konačnih elemenata u anali-

zi armirano-betonskih konstrukcija [5].

U oblasti linijskih sistema, većina radova vezana je za ponašanje armirano-betonskih okvirnih nosača u ravni. Jedan od prvih radova u toj oblasti je rad Selne [6] koji je analizirao AB okvirne nosače koristeći konačni elemenat ravnog štapa i postupak slojevite diskretizacije poprečnog preseka. Aas-Jackobsen [7] su proučavali ponašanje vitkih AB okvirnih nosača, uzimajući u obzir tečenje i geometrijsku nelinearnost, a Aldstedt [8] je u svoja proučavanja uvrstio i efekat interakcije betona i armature. Kang [9] je proučavao armirano-betonske i prednapregnute okvirne nosače u ravni uzimajući u obzir materijalnu i geometrijsku nelinearnost kao i vremenski zavisne efekte od opterećenja i temperature. Radi što realnijeg sagledavanja konturnih uslova za armirano-betonske ljske, Chan [10] je formulisao prostorni AB linijski elemenat, a Mari, Scordelis i Chan [11] su koristeći sličnu formulaciju, proučavali ponašanje linijskih prostornih prednapregnutih štapova.

Broj eksperimentalnih i teorijskih radova koji tretiraju tankozidne konstrukcije u vidu sprege betona i armature je veoma skroman. Najveći broj radova iz ove oblasti uglavnom ima karakter analize nekog konkretnog problema. Najcelovitiji prikaz ponašanja tankozidnih nosača, podrazumevajući izotropan i homogen materijal u elastičnoj i plastičnoj oblasti dat je u radovima Kolbrunera i Hajdina [12], [13]. U njima su definisani osnovni stavovi jedne opšte teorije koja je primenljiva i za analizu svih tipova spregnutih betonsko-čeličnih konstrukcija.

Značajan doprinos u eksperimentalnom i teorijskom razmatranju armirano-betonskih i prednapregnutih tankozidnih grednih nosača otvorenog poprečnog preseka pri graničnom stanju loma dali su Grob i Thürliman [14] [15].

Većina radova u kojima je primenjena metoda konačnih elemenata u analizi tankozidnih nosača spada u oblast geometrijski nelinearnih problema i bazirana je na kinematičkim relacijama Vlasova [16]. Krahula [17] je prvi formulisao linearnu matricu krutosti otvorenog pravog tankozidnog štapa, a Renton [18] je razmatrao problem bifurkacione stabilnosti uzimajući u obzir uticaj aksijalne sile pritiska. Nelinearna matrica krutosti u kojoj pored aksijalne sile pritiska imamo i uticaj momenata savijanja bila je predložena od strane Krajčinovića [19], Barsoum-a i Gallagher-a [20], Mei-a [21], Powell-a i Klingner-a [22], Rajasekaran-a i Murray-a [23] [24] i Tebedge-a i Tall-a [25]. Bažant i El Numeiri [26] i Yoo [27] su u matricu krutosti uključili i uticaj bimomenta. Interesantno je napomenuti da je većina autora pretpostavila kubnu promenu parametara pomeranja duž štapa, dok je Krajčinović u formulaciji koristio hiperbolične funkcije. Radovi novijeg datuma [28] - [33] u procesu formiranja nelinearnih jednačina, za

razliku od prvobitnih, uzimaju u obzir i zanemarene članove u tenzoru deformacije. Istovremeno razmatranje geometrijske i materijalne nelinearnosti srećemo u radu Rajasekaran-a i Murray-a [34]. Inkrementalna formulacija metode konačnih elemenata za geometrijsku nelinearnost tankozidnog štapa otvorenog poprečnog preseka sa elastičnim ponašanjem materijala data je u radu Sekulovića [35] [40] [100]. Ovaj rad je poslužio kao polazna osnova za formulaciju armirano-betonskog tankozidnog štapa izloženog u ovom radu.

1.3. KRATAK PRIKAZ SADRŽAJA RADA

Predmet ovog rada je upotreba metode konačnih elemenata za rešenje problema nelinearnog ponašanja armirano-betonskih štapova punog i otvorenog tankozidnog poprečnog preseka, uzimajući u obzir i vremenski zavisne efekte od opterećenja i temperature.

U cilju obuhvatanja promene stanja napona i deformacija po visini poprečnog preseka u radu je usvojen model konačnog elementa štapa sa diskretizovanim poprečnim presekom u kome se pretpostavlja idealna veza između betona i armature. Zanemarujući uticaj smicanja na deformaciju, pretpostavlja se jednoaksijalno stanje naprezanja za elemente betona i armature. Za opisivanje ponašanja primenjene su nelinearne konstitutivne relacije koje važe za kratkotrajno i dugotrajno opterećenje. Model ponašanja pri kratkotrajnom opterećenju je modifikovan radi sagledavanja uticaja utezanja preseka uzengijama, rasterećenja usled pojave prslina i uticaja preraspodele u zonama sa prslinama.

U radu se razmatraju samo pravolinijski štapovi konstantnog poprečnog preseka. Za parametre pomeranja u čvorovima na krajevima konačnog elementa usvajaju se inkrementi pomeranja, njihovi izvodi i inkrement deplanacije kod tankozidnog štapa. Radi bolje aproksimacije materijalne nelinearnosti i obuhvatanja pojave prslina, uveden je dopunski stepen slobode pomeranja u podužnom pravcu u sredini štapa, koji se eliminiše postupkom statičke kondenzacije na nivou elementa. Geometrijska matrica krutosti izvedena je pretpostavljajući velika pomeranja i rotacije a male deformacije.

Za odredjivanje deformacija tečenja u betonu koristi se numerički postupak zasnovan na eksponencijalnom algoritmu. Za napone bliske čvrstoći na pritisak razmatraju se i efekti nelinearnog tečenja.

Za odredjivanje napona i deformacija koje su vremenski zavisne koristi se postupak eksplicitne integracije u diskretnom nizu vremenskih intervala. U okviru svakog intervala vremena, nelinearne jednačine koje opisuju ponašanje armirano-betonskih okvira sastavljenih od štapova punog i otvorenog

tankozidnog preseka, rešavaju se inkrementalnom formulacijom metode konačnih elemenata.

Pored prvog poglavlja koje obuhvata uvodne napomene, kratak istorijski pregled i kratak prikaz sadržaja ovog rada, rad sadrži još osam poglavlja.

U drugom poglavlju izvedene su inkrementalne jednačine ravnoteže koristeći korigovanu (Updated) Lagrange-ovu formulaciju.

U trećem poglavlju dat je prikaz usvojenog modela ponašanja betona i čelika pri opterećenju kratkotrajnog karaktera.

U četvrtom poglavlju dat je prikaz ponašanja betona pri opterećenju dugotrajnog karaktera.

U petom poglavlju je izložena formulacija konačnog elementa štapa punog i otvorenog tankozidnog poprečnog preseka. Izvedena je tangencijalna matrica krutosti, matrica transformacije inkrementalnog postupka, ekvivalentan vektor unutrašnjih sila, vektor čvornih sila usled deformacije tečenja i skupljanja betona i matrica krutosti sistema.

U šestom poglavlju prikazani su usvojeni postupci za rešavanje nelinearnih algebarskih jednačina.

U sedmom poglavlju izložena je struktura računarskog programa sa opisom toka proračuna putem blok dijagrama.

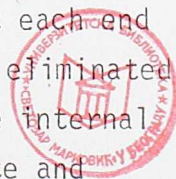
U osmom poglavlju dati su brojni primeri za ilustraciju predloženog numeričkog postupka.

U poslednjem poglavlju dat je spisak literature.

1.4. SUMMARY

A numerical procedure for the material and geometric nonlinear analysis of three dimensional reinforced concrete frames, with members of arbitrary and thin-walled cross-section, under short and long time loading has been presented. The response of such structures can be traced throughout their service load history as well as through their elastic, inelastic and ultimate load ranges taking into account time dependent effects.

A straight beam element with an arbitrary and thin-walled open cross-section is considered. The description of the reinforced thin-walled beam with an arbitrary open cross-section is based on the assumptions introduced by Vlasov. The element has seven degrees of freedom at each end and one internal axial degree of freedom at mid length, which is eliminated by static condensation at element level. In order to evaluate the internal actions, the element is divided into a discrete number of concrete and



reinforcing steel filaments which are assumed to be perfectly bonded together. Both materials are considered to be subjected to uniaxial stress state. Material nonlinearities as a result of tension cracking, tension stiffening between cracks, the nonlinear response of concrete in compression and the yielding of the reinforcement are considered. For short-time loading the modified stress-strain relationship suggested by Yugoslav preliminary codes is used. The modification assumes cracking at tensile strength. A bilinear model in both tension and compression is used for steel reinforcement. A simple model for inelastic load reversal is incorporated.

Creep strain is evaluated by numerical procedure based on the exponential algorithm. Nonlinear creep effect at high stress level is also considered.

A step forward integration is performed by dividing the time domain into a discrete number of intervals for the time dependent analysis. For each time interval nonlinear equilibrium equations, which are valid for the current material and geometry properties, are set up and solved by the finite element method. An incremental load method combined with the unbalanced load iteration is used for the solution of nonlinear equilibrium equations.

An updated Lagrangian formulation has been used to take into account the nonlinear geometry of the beam elements. The formulation is based upon small strains and small incremental rigid body rotations.

Several numerical examples are presented to study the validity and applicability of the proposed numerical procedure.

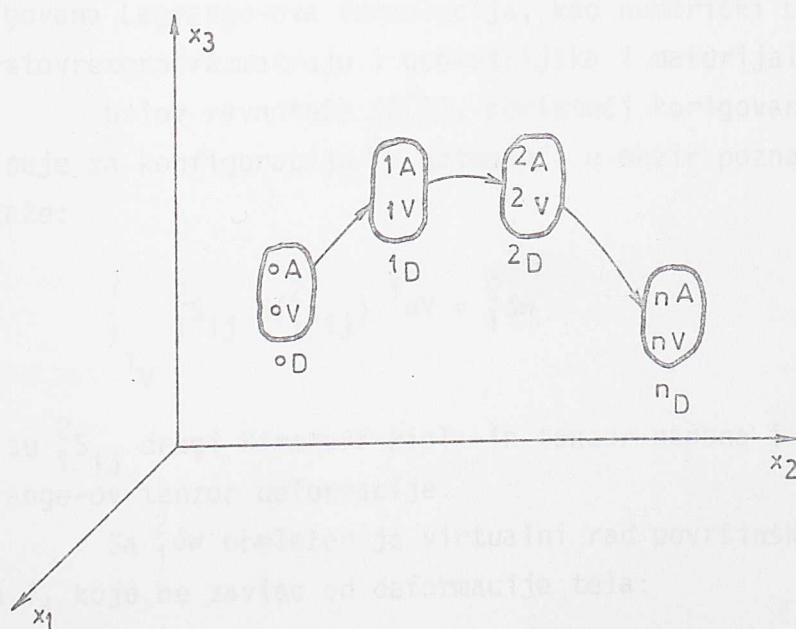
2. OPŠTA FORMULACIJA INKREMENTALNIH JEDNAČINA RAVNOTEŽE

2.1. KORIGOVANA LAGRANGE-OVA FORMULACIJA PROBLEMA

Osnovne inkrementalne jednačine ravnoteže linijskog elementa biće izvedene polazeći od opštih nelinearnih jednačina mehanike kontinuuma [36] - [40]. Razmatranjem pomeranja proizvoljnog tela u globalnom koordinatnom sistemu dolazimo do inkrementalnih jednačina ravnoteže iz kojih sračunavamo nepoznate inkremente pomeranja. Polazeći od nedeformisane konfiguracije kao poznatog stanja, sukcesivnim sračunavanjem inkremenata pomeranja dolazimo do ukupnog pomeranja datog tela.

Na (Sl. 2.1) prikazane su karakteristične konfiguracije u toku deformacije: početna 0D , tekuća 1D , inkrementalna 2D koja je na inkrementalnom odstojanju od 1D i krajnja konfiguracija nD . Odgovarajuće zapremine, površine i koordinate proizvoljne tačke P obeležene su sa iV , iA , ix .

Inkrementalna formulacija podrazumeva da je potrebno odrediti rešenje za konfiguraciju 2D ako su naponsko-deformacijska stanja poznata za sva prethodna stanja tj. 0D i 1D .



Slika 2.1

Uslov ravnoteže u Lagrange-ovoj inkrementalnoj formulaciji možemo izraziti korišćenjem principa virtualnih pomeranja:

$$\int \tau_{ij} \delta e_{ij} dV = \delta w \quad (2.1)$$

gde δw predstavlja virtualan rad površinskih i zapreminskih sila:

$$\delta w = \int_A p_i \delta u_i dA + \int_V f_i \delta u_i dV \quad (2.2)$$

U ovom izrazu τ_{ij} predstavlja Cauchy-ev tenzor napona u odnosu na deformisanu konfiguraciju D .

Virtualan tenzor deformacije koji odgovara gornjem tenzoru napona dat je na sledeći način:

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2} \delta (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.3)$$

S obzirom da je konfiguracija D nepoznata nije moguće dobiti direktno rešenje koristeći uslov ravnoteže (2.1).

U zavisnosti od toga koja se konfiguracija uzima za referentnu razlikuju se dve varijante Lagrange-ove inkrementalne formulacije: korigovana Lagrangeova formulacija u kojoj se za referentnu konfiguraciju usvaja tekuća deformisana konfiguracija 1D i totalna Lagrange-ova formulacija u kojoj se za referentnu konfiguraciju usvaja početno stanje 0D .

Iako oba pristupa dovode do istih rezultata, u radu je korišćena korigovana Lagrange-ova formulacija, kao numerički pogodnija [41], [42] jer se istovremeno razmatraju i geometrijska i materijalna nelinearnost.

Uslov ravnoteže (2.1), koristeći korigovanu formulaciju, koji se ispisuje za konfiguraciju 2D , uzimajući u obzir poznato stanje 1D , može da se prikaže:

$$\int \tau_{ij} \delta (\epsilon_{ij}) dV = \delta w \quad (2.4)$$

gde su τ_{ij} drugi Kirchoff-Piola-in tenzor napona i $\delta \epsilon_{ij}$ virtualni Green-Lagrange-ov tenzor deformacije.

Sa δw obeležen je virtualni rad površinskih p_i i zapreminskih sila f_i koje ne zavise od deformacije tela:

$$\delta w = \int_{^0V} p_i \delta u_i dA + \int_{^0V} f_i \delta u_i dV \quad (2.5)$$

Drugi Kirchoff-Piola-in tenzor napona može se izraziti preko Cauchy-ovog tenzora napona na sledeći način:

$${}^2S_{ij} = \frac{1}{2V} {}^1x_{i,k} {}^2\tau_{kl} {}^1x_{j,l} \quad (2.6)$$

Ako se Green-Lagrange-ov tenzor deformacije, kao što je to uobičajeno, izrazi preko komponentata pomeranja u_i , dobija se:

$$\delta({}^2\epsilon_{ij}) = \delta \left(\frac{1}{2} ({}^2u_{i,j} + {}^2u_{j,i} + {}^2u_{k,i} {}^2u_{k,j}) \right) \quad (2.7)$$

gde je

$$u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j \quad \text{itd.}$$

Koristeći sledeću inkrementalnu dekompoziciju:

$${}^2S_{ij} = {}^1S_{ij} + \Delta S_{ij} = {}^1\tau_{ij} + \Delta S_{ij} \quad (2.8)$$

$${}^1S_{ij} = {}^1\tau_{ij} \quad (2.9)$$

$${}^2u_i = {}^1u_i + \Delta u_i \quad (2.10)$$

sledi da je

$${}^2\epsilon_{ij} = {}^1\epsilon_{ij} + \Delta \epsilon_{ij} \quad (2.11)$$

tj.,

$${}^2\epsilon_{ij} = \Delta \epsilon_{ij} \quad (2.12)$$

pošto su komponente tenzora deformacije ${}^1\epsilon_{ij}$ jednake nuli.

Green-Lagrange-ov tenzor deformacije možemo izraziti u inkrementalnom obliku:

$${}^2\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^1\Delta u_{i,j} + {}^1\Delta u_{j,i} + {}^1\Delta u_{k,i} {}^1\Delta u_{k,j}) \quad (2.13)$$

ili

$${}^2\epsilon_{ij} = \Delta \epsilon_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta \eta_{ij} \quad (2.14)$$



gde su

$$e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^1\Delta u_{i,j} + {}^1\Delta u_{j,i}) \quad (2.15a,b)$$

$$\Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} ({}^1\Delta u_{k,i} - {}^1\Delta u_{k,j})$$

linearni i nelinearni inkrementalni tenzor deformacije.

Ako usvojimo sledeću konstitutivnu vezu izmedju inkremenata tenzora napona i deformacije:

$$\Delta S_{ij} = D_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \quad (2.16)$$

onda se izraz (2.4) može napisati

$$\int_{1V} ({}^1\tau_{ij} + \Delta S_{ij}) \delta \Delta \epsilon_{ij} {}^1dV = {}^2\delta W \quad (2.17a)$$

ili

$$\int_{1V} D_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \delta \Delta \epsilon_{ij} {}^1dV + \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} {}^1dV = {}^2\delta W - \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta \Delta e_{ij} {}^1dV \quad (2.17b)$$

Sa D_{ijkl} obeležen je inkrementalni konstitutivni tenzor preko koga se uključuju efekti materijalne nelinearnosti.

Zbog nemogućnosti direktnog određivanja inkremenata pomeranja Δu_i iz jednačine (2.17) koja je nelinearna, vrši se linearizacija korišćenjem sledećih aproksimacija:

$$\delta \Delta \epsilon_{ij} \cong \delta \Delta e_{ij} \quad (2.18a,b)$$

$$\Delta S_{ij} \cong {}^1D_{ijkl} \Delta e_{kl}$$

Linearizovana jednačina ravnoteže glasi:

$$\int_{1V} \Delta S_{ij} \delta \Delta e_{ij} {}^1dV + \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} {}^1dV = {}^2\delta W - \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta \Delta e_{ij} {}^1dV \quad (2.19)$$

Gornji izraz predstavlja polaznu osnovu za primenu MKE u nelinearnoj analizi AB tankozidnih nosača sa otvorenim nedeformabilnim poprečnim presekom.

3. VEZE IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA ZA BETON I ČELIK PRI OPTEREĆENJU KRATKOTRAJNOG KARAKTERA

3.1. UVODNE NAPOMENE

U slučaju armirano-betonskih štapova punog ili tankozidnog otvorenog poprečnog preseka, koji su ekscentrično pritисnuti, moraju se, pored geometrijskih, uzimati u obzir i fizičke nelinearnosti materijala kako za opterećenja kratkotrajnog tako i dugotrajnog karaktera. Da bi se formulisao matematički model nelinearnog ponašanja armiranog betona, potrebno je što realnije sagledati pojedinačno ponašanje betona, ponašanje armature i njihovu interakciju. Osnovni efekti materijalne nelinearnosti u svim armirano-betonskim konstrukcijama potiču od sledećih fenomena: pojave i razvoja prslina, nelinearnih veza izmedju napona i deformacija betona i armature, plastičnog tečenja i drobljenja betona kao i plastičnog tečenja armature. Pored ovih na nelinearno ponašanje utiču još i: preraspodela naprezanja izmedju betona i armature u zoni prslina ("tension stiffening" efekat), temperaturni efekti, vremenski zavisni efekti skupljanja i tečenja betona, prenos sila smicanja, veze izmedju betona i armature i dr. Opširniji prikaz ovih fenomena dati su u brojnoj literaturi [6] [43] [44] [45] [46].

U ovom poglavlju biće dat prikaz usvojenog modela ponašanja betona i čelika za armaturu pri opterećenju kratkotrajnog karaktera.

Model ponašanja betona i armature obrazovaće se na osnovu sledećih pretpostavki:

- beton je homogen i izotropan materijal,
- pretpostavlja se idealan spoj betona i armature sve do loma,
- stanje loma u betonu i armaturi nastupa samo usled normalnih napona, dok se uticaj napona smicanja zanemaruje.

Poslednja pretpostavka nije sasvim tačna, pošto lom kod armirano-betonskih konstrukcija nastupa usled simultanog delovanja normalnih i smičućih napona. U principu armirano betonski posači mogu da ostvare granično stanje loma na više načina. Pod lomom betona podrazumeva se takvo stanje napona ili deformacija pri kojima beton gubi sposobnost nošenja. Razlikuju se dva osnovna tipa loma: lom pri zatezanju koga karakterišu diskretne prsline i krto ponašanje i lom pri pritisku koga karakteriše duktilnost i pojava bezbroj malih prslina. U prvom slučaju dolazi do loma samo u jednom pravcu, tj. beton gubi sposobnost da prenese napone kroz prslinu, pri čemu i nadalje sve ostale napone može da primi, a pri drugom beton gubi sposobnost nošenja

u svim pravcima. Kako je u radu reč o štapovima punog ili tankozidnog otvorenog preseka koji su ekscentrično pritisnuti gornja pretpostavka o lomu je dopuštena s obzirom da je dominantan udeo normalnih napona.

Za formulaciju armirano-betonskog konačnog elementa prostornog štapa i radi što realnijeg sagledavanja naponsko-deformacijskog stanja, vrši se diskretizacija datog elementa na konačan broj betonskih i čeličnih podužnih vlakana koji su monolitno povezani. Usvaja se pretpostavka da su sva vlakna jednoaksijalno napregnuta. Na taj način konstitutivne relacije možemo definisati preko radnih dijagrama betona i čelika.

Predloženi modeli ponašanja važe samo za monotono rastuća ili opadajuća kratkotrajna opterećenja. Uticaj cikličnih opterećenja ne razmatra se u ovom radu.

3.2. VEZE IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA U BETONU PRI OPTEREĆENJU KRATKOTRAJNOG KARAKTERA

U literaturi i propisima pojedinih zemalja i međunarodnih udruženja postoje različiti predlozi za određivanje jednoaksijalne veze između napona i deformacija pri kratkotrajnom opterećenju. Predlozi Karsan-a i Jirs-a [47], Kent-a i Park-a [48], Aktan-a i Pecknold-a [49], Blakely-a i Park-a [50], Suharwardy-a i Pecknold-a [51] itd., koristili su se u analizi armirano-betonskih linijskih nosača primenom metode konačnih elemenata. Računski modeli za vezu napona i deformacija utegnuto betona mogu se naći u radovima Vellenos-a, Berter-a i Popov-a [52] Sheikh-a i Uzumeri-a [53], Skot-a i Park-a [54], Mander-a, Priestly-a i Park-a [55] itd. Osnovna karakteristika ovih modela je povećana čvrstoća betona na pritisak kao i veća duktilnost.

Prema starom Pravilniku o tehničkim merama i uslovima za beton i armirani beton [56] važio je sledeći izraz za trenutnu deformaciju prema Sl. 3.1.

$$\sigma_b = \frac{2f_B}{\epsilon_{bu}} \left(\epsilon_b - \frac{\epsilon_b^2}{2\epsilon_{bu}} \right) \quad (3.1)$$

gde ϵ_{bu} predstavlja graničnu vrednost deformacije pri stanju loma betona, a f_B graničnu računsku vrednost normalnog napona u betonu. Pri tome se predpostavljaju sledeće vrednosti:

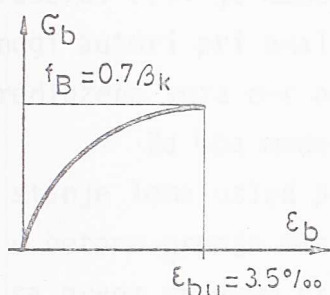
$$\epsilon_{bu} = 3,5 \cdot \dots, \quad f_B = 0,7 \beta_k$$

gde je β_k čvrstoća na pritisak normative kocke betona.

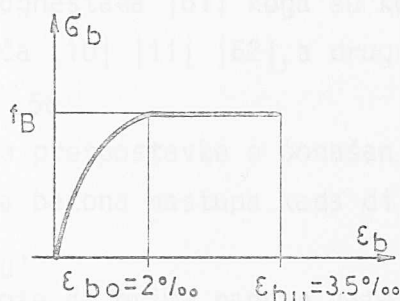
Model propisa CEB/FIP [57] predlaže vezu σ - ϵ u obliku prikazanom na Sl. 3.2 gde su:

$$\sigma_b = \frac{2f_B}{\epsilon_{bo}} \left(\epsilon_b - \frac{\epsilon_b^2}{2\epsilon_{bo}} \right), \quad \epsilon_b \leq \epsilon_{bo} \quad (3.2)$$

$$\sigma_b = f_B, \quad \epsilon_{bo} \leq \epsilon_b \leq \epsilon_{bu}$$



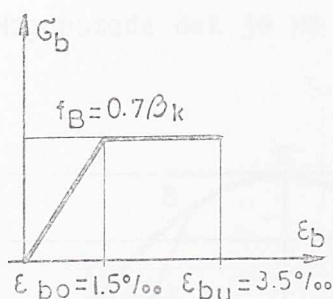
Slika 3.1



Slika 3.2

Slična veza između napona i deformacija data je i u britanskim propisima SP110 [58], nemačkim normama DIN 1045 [59] i američkim standardima ACI 318-77 [60].

Predlog Istočne Nemačke pretpostavlja idealnu elastoplastičnu vezu između napona i dilatacija pri kratkotrajnom opterećenju sa ograničenjem maksimalne dilatacije na 3,5‰. Na sl. 3.3 prikazan je ovaj predlog kod koga plastično tečenje nastupa pri $0,7 \beta_k$ i dilataciji od 1,5‰.



Slika 3.3

Dobra strana primene jednoaksijalnih računskih modela u analizi AB linijskih nosača ogleda se u mogućnosti unošenja što realnijeg modela ponašanja betona i mogućnosti analize komplikovanih slučajeva opterećenja.

3.3. USVOJENA VEZA IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA U BETONU PRI OPTEREĆENJU KRATKOTRAJNOG KARAKTERA

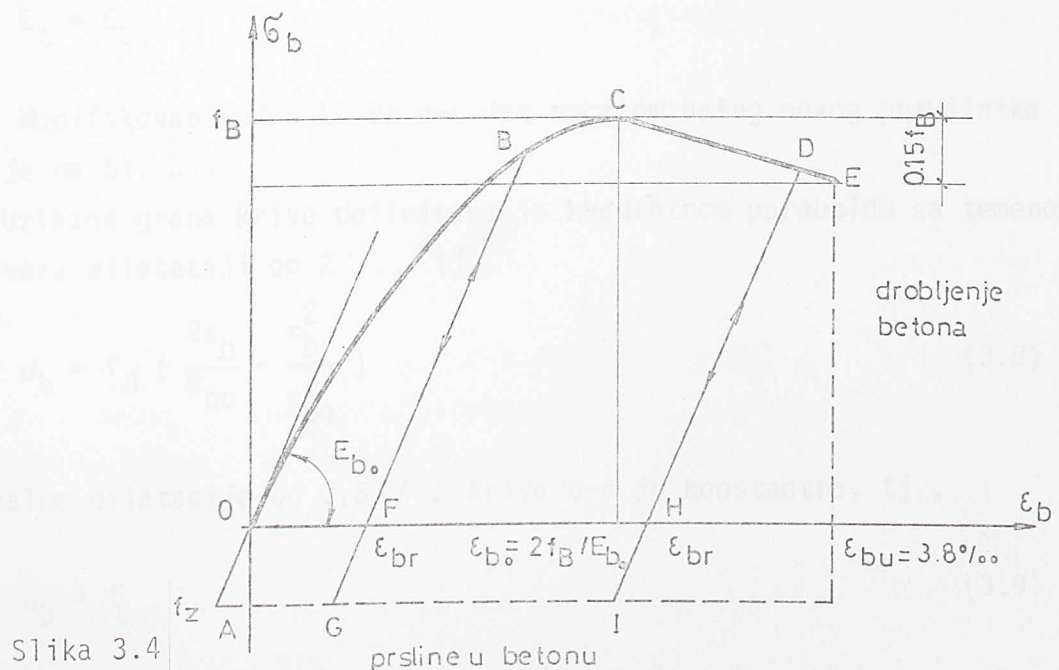
U radu su usvojena dva modela ponašanja betona za analizu linijskih okvirnih nosača sastavljenih od štapova punog i otvorenog tankozidnog preseka. Prvi je model veze predložen od Hognestada [61] koga su koristili mnogi autori pri analizi AB linijskih nosača [10] [11] [62], a drugi je model predložena veza σ - ϵ našeg novog pravilnika [56].

Za oba modela usvojene su sledeće pretpostavke o ponašanju:

- stanje loma usled pritiska ili drobljenja betona nastupa kada dilatacija u betonu predje maksimalnu dilataciju ϵ_{bu} ,
- sa prvom pojavom prsline beton više ne može da prima napone zatezanja, ali može napone pritiska usled rasterećenja, tj. zatvaranja prsline,
- nagib tangente na krivu rasterećenja je isti kao početni modul elastičnosti,
- stanje loma usled zatezanja, tj. pojava prsline u betonu se javlja kada napon zatezanja prekorači čvrstoću na zatezanje,
- tečenje betona usled pritiska nastupa kada dilatacija premaši vrednost dilatacije ϵ_{b0} koja odgovara maksimalnom računskom naponu pritiska pri savijanju $f_B = 0.85 \beta_c$ pri čemu je β_c čvrstoća na pritisak normativnog cilindra.

Na osnovu gore pomenutih pretpostavki sledeći parametri su potrebni za definisanje krive σ - ϵ : početni modul elastičnosti betona, čvrstoća na pritisak, čvrstoća na zatezanje i maksimalna dilatacija usled pritiska.

Modifikovani model Hognesteda dat je na Sl. 3.4.



Slika 3.4

prsline u betonu

Uzlazna kriva σ - ϵ u pritisku definisana je na sledeći način:

$$\sigma_B = f_B \frac{\epsilon_b}{\epsilon_{bo}} \left(2 - \frac{\epsilon_b}{\epsilon_{bo}} \right) \quad (3.3)$$

a tangencijalni modul elastičnosti kao:

$$E_t = E_{bo} \left(1 - \frac{\epsilon_b}{\epsilon_{bo}} \right) = \frac{2f_B}{\epsilon_{bo}} \left(1 - \frac{\epsilon_b}{\epsilon_{bo}} \right) \quad (3.4)$$

Silazna kriva, tj. plastično tečenje betona usled pritiska, definisana je sledećom relacijom:

$$\sigma_b = - 0,15 f_B \frac{\epsilon_b - \epsilon_{bo}}{\epsilon_{bu} - \epsilon_{bo}} + f_B \quad (3.5)$$

$$E_t = - 0.15 \frac{f_B}{\epsilon_{bu} - \epsilon_{bo}}$$

Pri zatezanju imamo linearnu funkciju:

$$\sigma_b = E_{bo} \cdot \epsilon_b \quad (3.6)$$

$$E_t = E_{bo}$$

a pri rasterećenju se pretpostavlja linearna funkcija čiji je nagib jednak početnom modulu elastičnosti:

$$\sigma_b = E_{bo} (\epsilon_b - \epsilon_{br}) \quad (3.7)$$

$$E_t = E_{bo}$$

Modifikovan model krive σ - ϵ dat nacrtom našeg novog pravilnika prikazan je na Sl. 3.5.

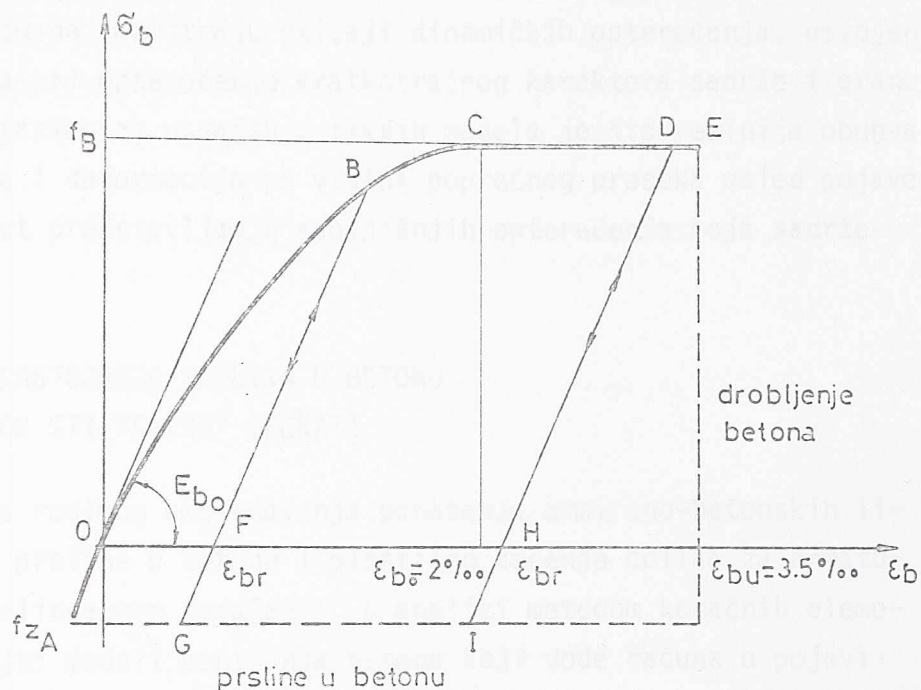
Uzlazna grana krive definisana je kvadratnom parabolom sa temenom koje odgovara dilataciji od 2 ‰, tj.,

$$\sigma_b = f_B \left(\frac{2\epsilon_b}{\epsilon_{bo}} - \frac{\epsilon_b^2}{\epsilon_{bo}^2} \right) \quad (3.8)$$

Do maksimalne dilatacije od 3,5 ‰ kriva σ - ϵ je konstantna, tj.,

$$\sigma_b = f_B \quad (3.9)$$

Modifikacija krive sastoji se u proširenju dijagrama i na područje zatezanja.



Slika 3.5

Pretpostavlja se linearna funkcija do čvrstoće betona na zatezanje:

$$\sigma_b = E_{bo} \cdot \epsilon_b \quad (3.10)$$

a pri rasterećenju:

$$\sigma_b = E_{bo}(\epsilon_b - \epsilon_{br}) \quad (3.11)$$

gde je ϵ_{br} zaostala dilatacija.

U programu pravljenom za računar, ponašanje betona je predstavljeno na sledeći način:

- stanje zatezanja (tok OA ili AO na Sl. 3.4 i Sl. 3.5)
- stanje pritiska (tok OC)
- stanje pritiska, plastično tečenje (tok CE)
- stanje prslina (preko tačaka A, G, I)
- stanje drobljenja (iza tačke E)
- stanje rasterećenja iz stanja pritiska (tok BG ili GB)
- stanje rasterećenja iz stanja plastičnog tečenja (tok DI ili ID)
- stanje pritiska posle pojave prslina (tok OC ili BC)
- stanje plastičnog tečenja pri pritisku posle pojave prslina (tok CE ili DE)
- stanje rasterećenja iz stanja pritiska posle pojave prslina (tok BF ili FB)

- stanje rasterećenja iz stanja plastičnog tečenja pri pritisku posle pojave prsline (tok DH ili HD).

Iako se u radu ne razmatraju uticaji dinamičkih opterećenja, usvojeni modeli ponašanja betona pri opterećenju kratkotrajnog karaktera sadrže i grane rasterećenja. Osnovni razlog za usvajanje takvih modela je što realnije obuhvatanje stanja naprezanja i deformacija po visini poprečnog preseka usled pojave prsline, kao i mogućnost predstavljanja spoljašnjih opterećenja koja sadrže faze rasterećenja.

3.4. UTICAJ RASTOJANJA PRSLINA U BETONU ("TENSION STIFFENING" EFEKAT)

Sa stanovišta realnog sagledavanja ponašanja armirano-betonskih linijskih nosača, pojava prsline u betonu i plastično tečenje čelika za armaturu su osnovni uzroci nelinearnog ponašanja. U analizi metodom konačnih elemenata predloženi su brojni modeli ponašanja betona koji vode računa o pojavi prsline [65] [66] [67]. Svi predloženi modeli uglavnom su zasnovani na tri osnovne pretpostavke: prva je uslov pod kojim dolazi do pojave prsline, druga je način prikazivanja prsline i treća je kriterijum propagacije prsline. Kod većine modela uslov pod kojim dolazi do pojave prsline je baziran na kriterijumu čvrstoće betona na zatezanje. Izbor načina prikazivanja prsline zavisi od vrste analize i u primeni su tri pristupa: prvi u kome se prsline uzimaju "razmazane" unutar konačnog elementa, drugi u kome se prsline uzimaju kao diskretne i treći pristup baziran je na principima mehanike loma. Za propagaciju se koriste uglavnom dva kriterijuma: prvi je baziran na čvrstoći a drugi na lomu betona.

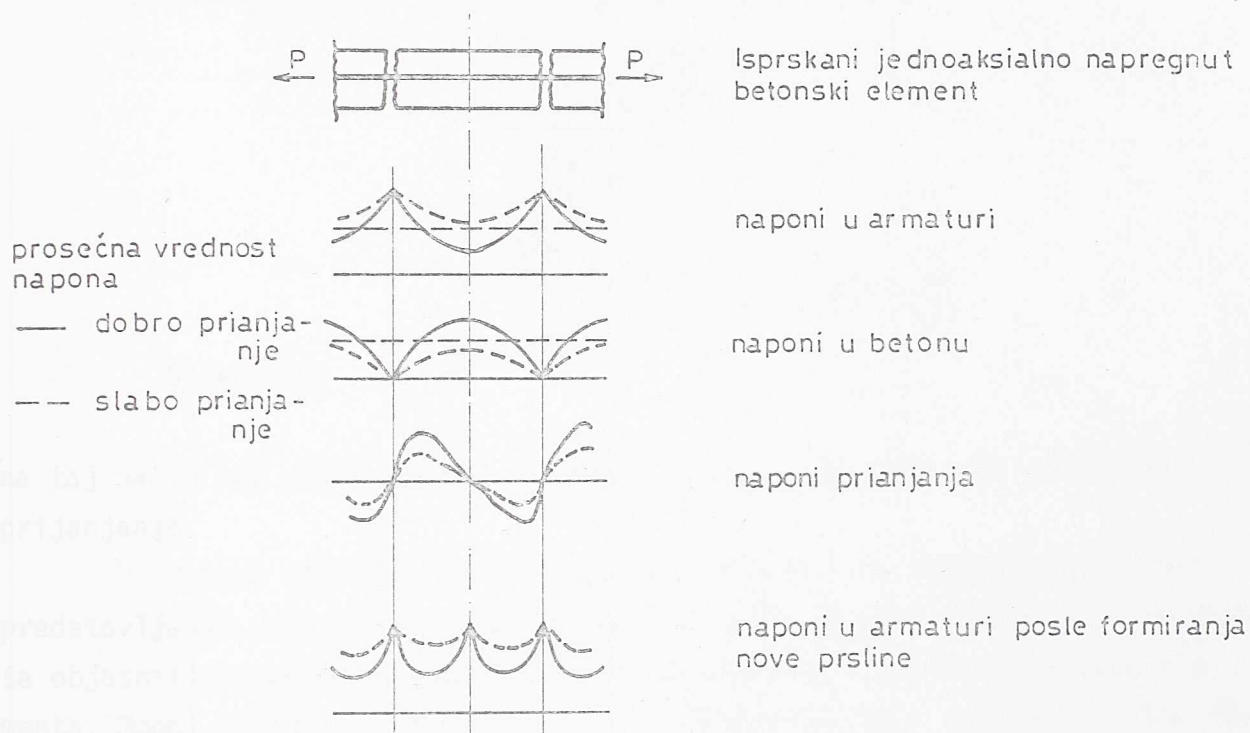
U ovom radu prsline se predstavljaju kao "razmazane" unutar jednog konačnog elementa štapa, a uslov pod kojim dolazi do pojave prsline i njihova propagacija bazirani su na kriterijumu čvrstoće betona na zatezanje.

Poznato je da beton u zategnutoj zoni između dve prsline učestvuje u prijemu spoljašnjih sila, pa se njegov uticaj na krutost datog štapa ne može zanemariti. Da bi se realnije predstavile prsline, u predložene modele se uvođi i efekat naponske preraspodele između betona i armature ("tension stiffening" efekat).

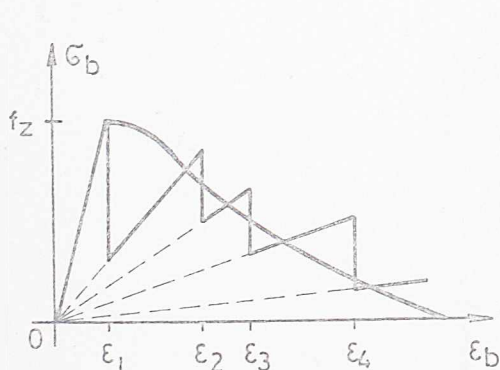
Efekat naponske preraspodele i uticaj betona između dve prsline na krutost elementa štapa, najlakše je objasniti na primeru jednoaksijalno zategnutog armirano-betonskog elementa, Sl.3.6. U opštem slučaju data pojava važi za sve vrste naprezanja usled kojih dolazi do pojave prsline.

U numeričkom smislu ovaj fenomen se može predstaviti na dva načina. Ako se razmatra samo ponašanje betona, onda se kriva σ - ϵ za zategnut beton proširi sa opadajućom granom, a ako se razmatra samo armatura onda se dijagram

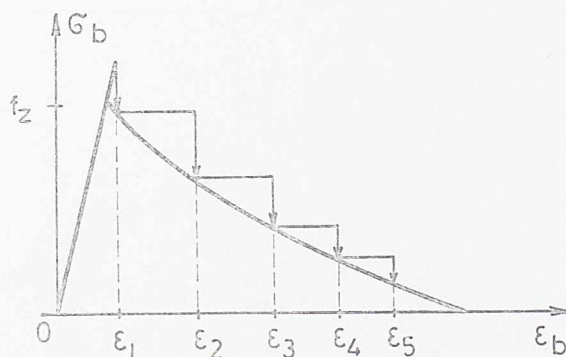
σ - ϵ modifikuje sa rastućom granom. U literaturi srećemo brojne pokušaje da se numerički modelira ovaj značajan efekat zategnutog armiranog betona. Scanlon [68] ponašanje zategnutog armiranog betona sa prslinama opisuje stepenasto opadajućom krivom σ - ϵ zategnutog betona Sl. 3.7. Lin [65] modifikuje Scanlon-ov model i uvodi glatku krivu za opadajuću granu zategnutog betona, Sl. 3.8.



Slika 3.6



Slika 3.7

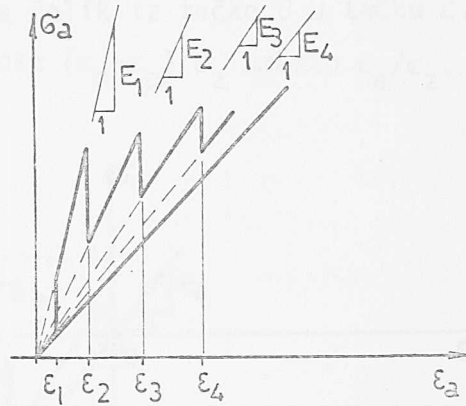


Slika 3.8

Nedostatak oba modela je zanemarivanje napona prijanjanja između betona i armature između dve prsline, nemogućnost uzimanja pravog položaja armature po visini preseka i netačnost sračunatih napona i u betonu i u armaturi.

Gilbert [69] vrši modifikaciju veze između napona i deformacije za armaturu i na taj način uvodi napone zatezanja u betonu između dve prsline Sl. 3.9. Nedostatak predloženog modela je zanemarivanje napona prijanjanja. Model vodi računa o položaju armature po visini preseka.

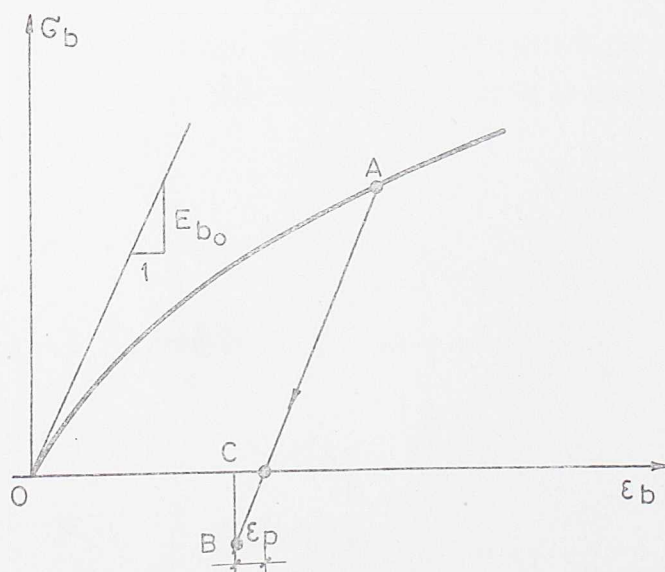
Aldstedt [9] predlaže model koji vodi računa o naponu prijanjanja, uvijek izlazi iz pretpostavke da su elastični moduli betona i čelika isti. Da bi se umnogome približilo stvarnom ponašanju, Aldstedt predlaže model koji vodi računa o naponu prijanjanja, uvijek izlazi iz pretpostavke da su elastični moduli betona i čelika isti. Da bi se umnogome približilo stvarnom ponašanju, Aldstedt predlaže model koji vodi računa o naponu prijanjanja, uvijek izlazi iz pretpostavke da su elastični moduli betona i čelika isti.



Slika 3.9

na taj način što uvodi dopunski stepen slobode pomeranja koji aproksimira prijanjanje.

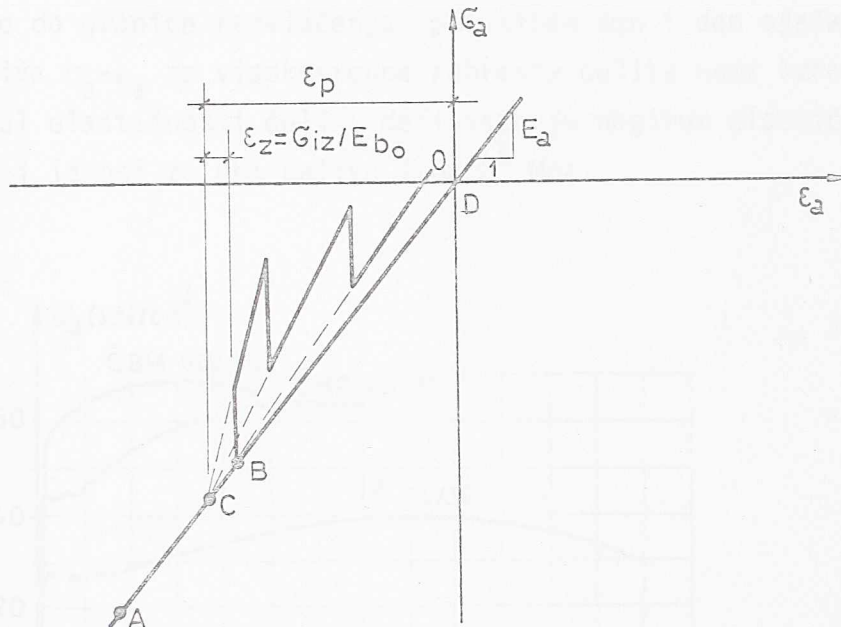
U ovom radu usvojen je postupak Gilbert-a sa modifikacijom radi predstavljanja rasterećenja. Jednostavnosti radi usvojeni postupak je najlakše objasniti na primeru jednoosijalno napregnutog armirano-betonskog elementa. Model pretpostavlja idealnu vezu između betona i armature u svim fazama naprezanja. Da bi se objasnila faza rasterećenja, armirano-betonski element se prvo napregne silom pritiska kome odgovara stanje naprezanja označeno tačkom A u dijagramu σ - ε betona i čelika Sl. 3.10 i Sl. 3.11. Pri elastičnom rasterećenju u betonu će se pojaviti prslina pri dostizanju čvrsto-



Slika 3.10

stičnom rasterećenju u betonu će se pojaviti prslina pri dostizanju čvrsto-

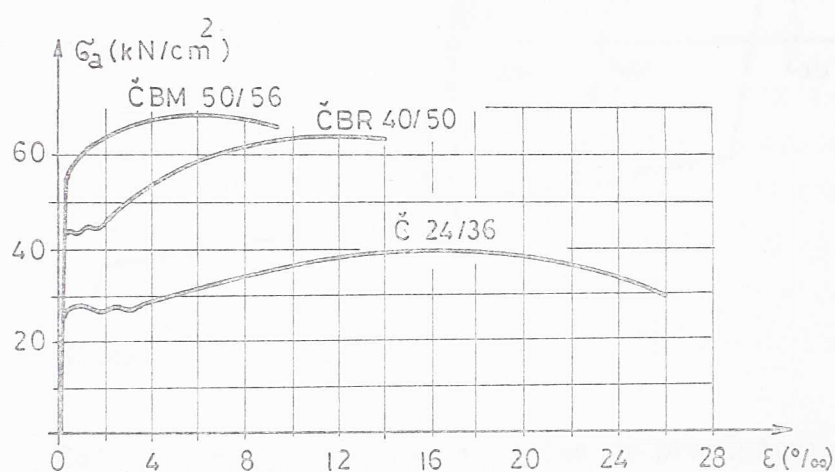
će na zatezanje (tačka B u dijagramu σ - ϵ za beton), dok u čeliku možemo još uvek imati pritisak (tačka B u dijagramu σ - ϵ za čelik). Da bi se numerički obuhvatila preraspodela izmedju betona i čelika vrši se translacija koordinatnog početka dijagrama σ - ϵ za čelik iz tačke D u tačku C, tako da se faktor preraspodele računa iz odnosa $(\epsilon_a - \epsilon_p)/\epsilon_z$ umesto ϵ_a/ϵ_z .



Slika 3.11

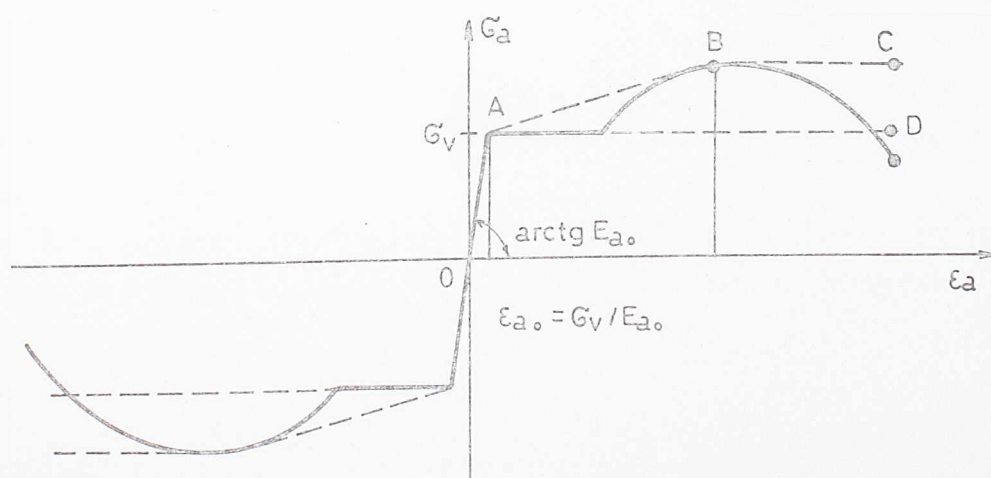
3.5. ČELIK

Karakterističan dijagram napon-dilatacija za meki betonski čelik i visokovredni rebrasti čelik dat je na Sl. 3.12. Kriva σ - ϵ za meki čelik koja se dobija pri monotono rastućoj aksijalnoj sili zatezanja sadrži elastičan deo do granice razvlačenja, plastičan deo i deo ojačanja do tačke loma. Kriva σ_a - ϵ_a za visokovredne rebraste čelike nema izražen plastičan deo. Modul elastičnosti čelika definisan je nagibom elastičnog dela dijagrama σ_a - ϵ_a i iznosi za oba čelika $2,0 \times 10^5$ Mpa.



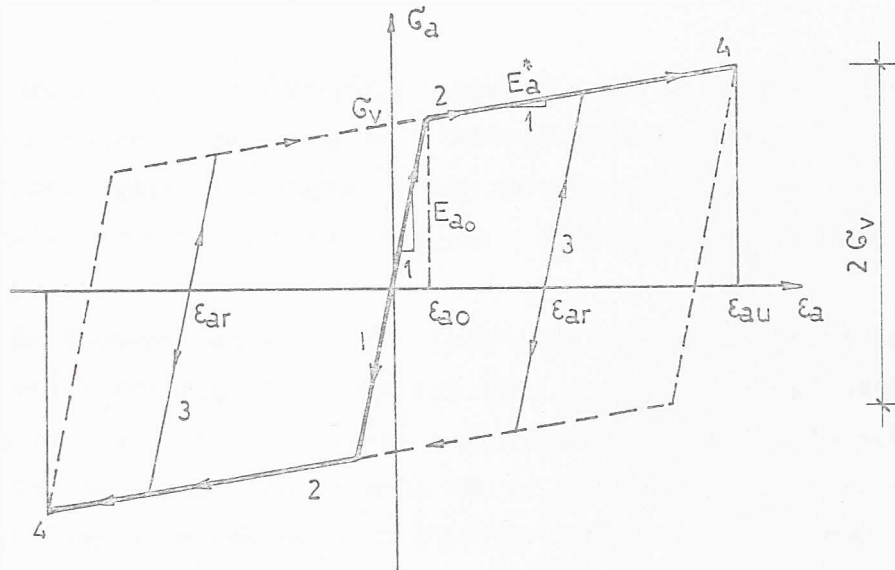
Slika 3.12

Uobičajeni računski modeli za meki čelik prikazani su na Sl. 3.13. Stvarni dijagram σ_a - ϵ_a može se aproksimirati trilinearnim modelom OABC ili bilinearnim modelom OAB ili OAD.



Slika 3.13

U radu je usvojen bilinearan dijagram prikazan na Sl. 3.14. Predloženi model obuhvata i fazu rasterećenja podrazumevajući Bauschinger-ov efekat. Nagib na krivu rasterećenja je isti kao i početni modul elastičnosti. Za definisanje datog modela potrebno je definisati četiri parametra: početni modul elastičnosti E_a , modul ojačanja E_a^* , napon razvlačenja σ_V i dilataciju pri lomu ϵ_{au} .



Slika 3.14

četiri stanja su karakteristična za predloženi model $\sigma_a - \epsilon_a$:

- $\sigma_a = E_{ao} \cdot \epsilon_a$ $\epsilon_a \leq \epsilon_{ao}$
- $\sigma_a = E_a^* \cdot \epsilon_a \pm (\sigma_V - E_a^* \epsilon_{ao})$ za $\epsilon_{ao} \leq \epsilon_a < \epsilon_{au}$
- $\sigma_a = E_{ao} (\epsilon_a - \epsilon_r)$ za fazu rasterećenja
- lom koji nastupa za $\epsilon_a \geq \epsilon_{au}$.

4. VEZA IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA U BETONU PRI OPTEREĆENJU DUGOTRAJNOG KARAKTERA

4.1. UVODNE NAPOMENE

Promene stanja deformacija u betonu mogu da nastanu odmah posle promene stanja napona i nazivaju se trenutnim deformacijama ili mogu da se razvijaju tokom vremena i poznate su kao deformacije tečenja. Pored toga usled promene relativne vlažnosti sredine i sadržaja vlage u betonu nastaju deformacije skupljanja.

U prethodnom poglavlju dat je prikaz modela ponašanja betona pri opterećenju kratkotrajnog karaktera koji se, primenom metode konačnih elemenata, u ovom radu koristi za analizu armirano-betonskih prostornih okvirnih nosača. Kao što je poznato pored opterećenja kratkotrajnog karaktera i uticaj tečenja i skupljanja betona je vrlo značajan faktor za ponašanje i ocenu stabilnosti ekscentrično pritisnutih armirano-betonskih štapova kao i čitavog sistema.

Pri analizi ovakvih konstrukcija trebalo bi početi od najsloženijeg reološkog modela ponašanja betona koji pretpostavlja nelinearnu vezu između napona i deformacija, kako trenutnih tako i deformacija tečenja.

U nelinearnoj teoriji tečenja betona, za neki konstantan napon koji deluje od trenutka vremena t_1 , veza između napona i deformacija može se predstaviti na sledeći način:

$$\epsilon(t) = \frac{f_1(\sigma)}{E(t_1)} + f_2(\sigma) C(t, t_1) + \epsilon_s(t) + \epsilon_{o_t}(t) \quad (4.1)$$

gde prvi član određuje trenutnu deformaciju koja nastaje odmah posle nanošenja opterećenja, drugi deformaciju tečenja, treći skupljanje betona a četvrti uticaj temperature.

Veza napona i deformacija za beton pri promenljivom stanju napona sa vremenom može se prikazati preko nelinearne Volterine integralne jednačine druge vrste [74] [75] [76]:

$$\epsilon(t) = \frac{f_1|\sigma(t)|}{E(t_1)} + \int_{t_1}^t \frac{f_1|\sigma(\tau)|}{E(\tau)} k(\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \frac{f_2|\sigma(\tau)|}{E(\tau)} K(t, \tau) d\tau + \epsilon_s(t) + \epsilon_{o_t}(t) \quad (4.2)$$

gde su:

$$k(\tau) = - E_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left| \frac{1}{E_b(\tau)} \right| \quad (4.3a,b)$$

$$K(t,\tau) = - E_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t,\tau)$$

Funkcija $f_1(\sigma)$ definiše trenutnu deformaciju a funkcija $f_2(\sigma)$ određuje uticaj napona σ_b na tečenje betona i prema Arutjunjanu [77] ona se izražava u obliku:

$$f_2(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{za } \sigma \leq \bar{\eta}\beta_p \\ \sigma + \bar{\beta}\sigma & \text{za } \sigma > \bar{\eta}\beta_p \end{cases} \quad (4.14)$$

gde je β_p čvrstoća betonske prizme, $\bar{\eta}$ koeficijent koji određuje važenje linearne teorije tečenja i iznosi (0,5-0,6) i $\bar{\beta}$ koeficijent koji se određuje eksperimentalno.

Kako precizna formulacija reoloških osobina betona pri dugotrajnom opterećenju nije moguća kako zbog složene strukture tako i zbog nepredvidivosti spoljašnjih činioca, pribegava se različitim aproksimacijama. Jedna od aproksimacija koja se može prihvatiti, ako naponi ne prelaze 50% čvrstoće na pritisak, je da su i trenutne i deformacije tečenja linearno zavisne od napona, i da za deformacije tečenja važi princip superpozicije. Linearost veze podrazumeva da ako je dilatacija u vremenskom trenutku t usled delovanja konstantnog napona σ_b od trenutka t_0 jednaka ϵ_1 onda je dilatacija u istom vremenskom trenutku usled napona $K\sigma_b$ koji deluje od t_0 jednaka $K\cdot\epsilon_1$. Matematički fomulisano ovo znači da je deformacija tečenja linearna funkcija prethodne istorije naprezanja. Princip superpozicije podrazumeva da se ukupna deformacija usled tečenja pri promenljivim naponima može odrediti kao suma deformacija tečenja koje nastaju kao rezultat odgovarajućih prirasta napona. Pri tome se pretpostavlja da deformacija tečenja zavisi samo od dužine trajanja napona i da na nju ne utiče ni prethodna niti kasnija promena napona.

U slučaju da se napon u betonu menja sa vremenom onda se ukupna deformacija $\epsilon_b(t)$ uzimajući u obzir princip superpozicije formuliše u obliku linearne Volterine integralne jednačine:

$$\epsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)} + \int_{t_1}^t L(t,\tau) \frac{\sigma_b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + \epsilon_s(t) + \epsilon_{o_t}(t) \quad (4.5)$$

čije je jezgro

$$L(t, \tau) = - E_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{E_b(\tau)} + C(t, \tau) \right) \quad (4.6)$$

Datu vezu između napona i deformacija možemo koristeći princip superpozicije predstaviti i u rezolventnom obliku:

$$\sigma_b(t) = \int_{t_0}^t R(t, \tau) \left[d\varepsilon(\tau) - d\varepsilon_s(\tau) - d\varepsilon_{of}(\tau) \right] \quad (4.7)$$

gde funkcija $R(t, \tau)$ predstavlja funkciju relaksacije.

Za rešavanje problema naprezanja prostornih okvirnih nosača pri opterećenju dugotrajnog karaktera, u ovom radu se usvaja model ponašanja betona koji pretpostavlja nelinearnu vezu za trenutne deformacije i linearnu vezu za deformacije tečenja betona tokom vremena. Nelinearan uticaj tečenja razmatra se aproksimativno uvodeći efektivne napone.

Konkretna rešenja na osnovu veze (4.5) mogu se dobiti samo pod uslovom da su poznate funkcije $\varepsilon_s(t)$, $E_b(t)$, $C(t, \tau)$. Ove funkcije se u opštem slučaju određuju eksperimentalno i prikazuju analitičkim izrazima. Praktična vrednost date konstitutivne veze najviše zavisi od načina definisanja mere tečenja $C(t, \tau)$ koja figuriše u jezgru date integralne jednačine. U zavisnosti od izbora jezgra i same funkcije tečenja mogu se izvesti skoro svi do sada korišćeni predlozi za vezu napona i deformacija takozvane linearne teorije tečenja. Date veze se pri promenljivom stanju napona prikazuju u obliku integralnih jednačina ili njima odgovarajućih diferencijalnih jednačina, sa konstantnim ili promenljivim koeficijentima sa vremenom. Ovo znači da bi primenjujući neku od datih veza u tom obliku i zadatak određivanja stanja napona i deformacija prostornih armirano-betonskih linijskih nosača i zahtevao postupak rešavanja sistema integralnih ili diferencijalnih jednačina. Zbog ovoga su u poslednje vreme činjeni napor da se sa datih integralnih veza predje na algebarske veze, pomoću kojih se onda rešavanje naprezanja armirano-betonskih konstrukcija znatno pojednostavljuje. Najveći broj ovih predloga oslanjao se na primenu metode tzv. srednje vrednosti integrala za područje u kome se napon menja u funkciji vremena. Značajne predloge dali su Ulicki [78], Trost [79], Bažant [80] [81], Djurić [82] Livšic [83] itd.

Pri tačnijoj analizi armirano-betonskih konstrukcija metodom konačnih elemenata sa većim brojem stepeni slobode pomeranja, pokazalo se sa stanovišta utrošenog računarskog vremena i zauzetosti memorije računara da primena integralnih veza nije racionalna. Potreba memorisanja i korišćenja celokupne istorije napona i deformacija može se izbeći ako se izvrši prelazak sa integralnih veza na njima ekvivalentne diferencijalne veze. Ovo se

može postići sa dovoljnom tačnošću ako jezgro integralne jednačine razvijemo u Dirichlet-ove redove na sledeći način:

$$\text{JEZGRO} = A_{\mu}(\tau)e^{-(t-\tau)/\tau_{\mu}} = B_{\mu}(\tau)(1-e^{-(t-\tau)/\tau_{\mu}}) \quad (4.8)$$

gde jezgro može biti ili funkcija tečenja ili funkcija relaksacije, $A_{\mu}(\tau)$ i $B_{\mu}(\tau)$ su funkcije koje zavise od starosti betona a τ_{μ} konstanta koja se naziva vreme relaksacije.

Kada je funkcija tečenja $L(t, \tau)$ data preko Dirichlet-ovih redova može se pokazati da je integralna veza ekvivalentna sledećoj diferencijalnoj vezi:

$$\epsilon = \sum_{\mu} \left(\frac{\dot{\sigma}}{\hat{E}_{\mu}(t)} - \dot{\gamma}_{\mu} \right) + \dot{\epsilon}_s + \dot{\epsilon}_{0t}, \quad \dot{\gamma}_{\mu} + \frac{\gamma_{\mu}}{\tau_{\mu}} = \frac{\dot{\sigma}}{\hat{E}_{\mu}(t)} \quad (4.9a, b)$$

gde $\gamma_{\mu} (\mu=1, 2, \dots, N)$ predstavljaju unutrašnje promenljive koje se ne mogu meriti direktno. Trenutne vrednosti ovih promenljivih karakterišu efekte prethodne istorije ponašanja materijala. Efikasnost pri numeričkoj integraciji se postiže time što je za opisivanje istorije naprezanja za neki dugi vremenski period potrebno memorisati samo nekoliko ovih promenljivih.

Stavljajući da je:

$$\dot{\sigma}/\hat{E}_{\mu} - \dot{\gamma}_{\mu} = \dot{\epsilon}_{\mu} \quad (4.10)$$

može se pokazati da data diferencijalna veza odgovara ponašanju Kelvin-ovog tela čija se fizička svojstva menjaju sa vremenom. U slučaju da razvijamo funkciju relaksacije integralna veza je ekvivalentna diferencijalnoj vezi koja odgovara ponašanju Maksvel-ovog tela.

Primenjujući aproksimaciju jezgra integralnih jednačina preko Dirichlet-ovih redova ne mogu se otkloniti sve numeričke poteškoće koje se javljaju pri numeričkoj integraciji sa konstantnim vremenskim korakom Δt . Zbog prirode promene u početnom intervalu vremena, bio bi potreban, radi numeričke stabilnosti, veliki broj malih vremenskih koraka da bi se došlo do rešenja za duži period. Da bi se izbegli ovakvi problemi danas se koriste eksponencijalni algoritmi rešavanja koji dozvoljavaju upotrebu koraka različite vremenske dužine bez opasnosti za numeričku stabilnost i sigurnost numeričkog postupka. Opširan pregled ovih algoritama rešavanja dat je u publikaciji ASCE komiteta za primenu metode konačnih elemenata u analizi armirano-betonskih konstrukcija [5].

McHenry [84] Maslov [85], Arutyunyan [77] su koristili aproksimaciju funkcije tečenja preko eksponencijalnih redova radi prevodjenja problema rešavanja naprezanja armirano-betonskih konstrukcija sa integralnih na njima ekvivalentne diferencijalne jednačine, a ne radi potrebe izbegavanja sračunavanja celokupne istorije naprezanja pri korišćenju numeričkih postupaka integracije. Prvi koji su koristili datu aproksimaciju radi izbegavanja sračunavanja celokupne istorije naprezanja bili su Selna i Bresler [86]:

$$L(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \alpha_i a_j \tau^{-0.1(j-i)} \left| 1 - e^{-k_i(t-\tau)} \right| \quad (4.11)$$

gde su α_i , a_j i k_i konstante koje se odredjuju eksperimentalno. Nedostatak predloženog algoritma ogledao se u nemogućnosti rešavanja problema tečenja različitim koracima vremenske integracije.

Zienkiewicz i Watson [87], [88] su predložili eksponencijalni algoritam na osnovu sledeće aproksimacije funkcije tečenja:

$$L(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + \sum_{i=1}^n C_i(\tau, T) \left| 1 - e^{-p_i(t-\tau)} \right| \quad (4.12)$$

gde se $C_i(\tau, T)$, n , p_i odredjuju eksperimentalno. Korišćenjem gornje veze oni su pokazali da je za sračunavanje inkrementa deformacije tečenja u vremenskom trenutku t dovoljno poznavati samo inkrement naprezanja u prethodnom vremenskom trenutku. Značajne doprinose dali su još Bažant [89] [90], Kabir i Scordelis [91] [92], Taylor, Pister i Goudreau [93], Argyris, Pister, Szirma i Willam [94], [95], itd.

Kao polazna osnova za izbor funkcije tečenja i algoritma rešavanja poslužio je rad Kabira i Scordelisa [91]. Oni su polazeći od eksponencijalne aproksimacije Zienkiewicza i Watsona predložili numerički postupak za nelinearnu analizu armirano-betonskih ploča i ljuski pri opterećenju dugotrajnog karaktera. U ovom poglavlju izvršena je modifikacija datog postupka za slučaj prostornih linijskih nosača.

4.2. USVOJENI MODEL PONAŠANJA BETONA PRI OPTEREĆENJU DUGOTRAJNOG KARAKTERA

U radu se polazi od pretpostavke da je ukupna deformacija u vremenskom trenutku t u jednom jednoosijalno napregnutom betonskom elementu, opterećenom u trenutku t_1 jednaka:

$$\epsilon(t) = \epsilon_k(t_1) + \epsilon_t(t, t_1) + \epsilon_s(t, t_1) + \epsilon_{o_t}(t, t_1) \quad (4.13)$$

gde su

$\epsilon_k(t_1)$ - deformacija betona usled kratkotrajnog opterećenja za koju se pretpostavlja da je nezavisna promenljiva u reološkom modelu betona, $\sigma(t_1) = f|\epsilon_k(t_1)|$

$\epsilon_t(t, t_1)$ - deformacija betona usled tečenja,

$\epsilon_s(t, t_1)$ - deformacija betona usled skupljanja,

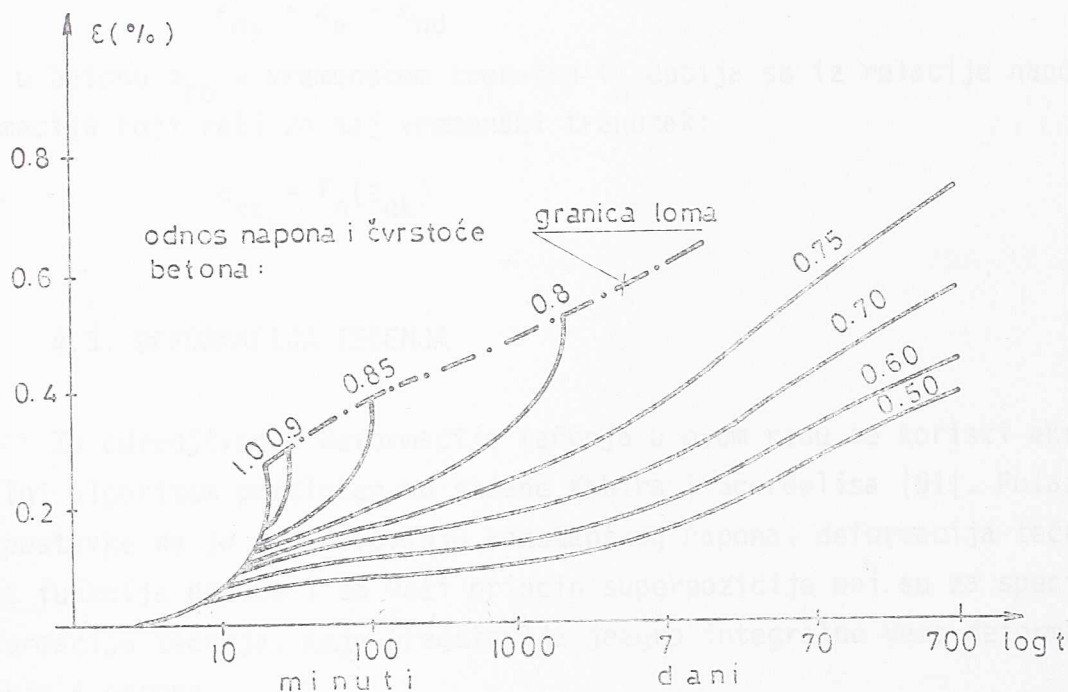
$\epsilon_{o_t}(t, t_1)$ - deformacija betona usled temperaturne promene.

Za opisivanje trenutne deformacije u betonu koriste se nelinearne veze napona i deformacija date u prethodnom poglavlju. Za deformacije tečenja usvaja se da su linearno zavisne od napona, da važi princip superpozicije, da zavise od starosti betona, da ostaju ograničene i u fazi loma i da apsolutna veličina deformacije ne zavisi od predznaka napona. Kao što je poznato gornje pretpostavke čine osnovu linearne teorije tečenja koja važi za naprezanja: $(0,5-0,6)\beta_p$. U slučaju većih napona gornje pretpostavke gube na važnosti i moraju se koristiti nelinearne veze napona i deformacija [118] Sl.4.1. Da bi se obuhvatili ovi nelinearni efekti zadržavajući pri tom linearnu formulu, u ovom radu se koristi aproksimativni postupak Becker-a i Bresler-a [96] zasnovan na konceptu efektivnih napona. Suština postupka ogleda se u dobijanju približno istih deformacija tečenja usled realnog naprezanja i unapred definisanih efektivnih napona koristeći linearnu teoriju tečenja. Do efektivnih napona dolazimo uvodeći sledeće korekzione faktore:

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \sigma & \text{za} & \quad \sigma \leq r_1 f_B \\ \sigma_e &= c_1 + c_2 f_B & \text{za} & \quad r_1 f_B < \sigma < f_B \\ \sigma_e &= r_2 \cdot \sigma & \text{za} & \quad \sigma = f_B \end{aligned} \quad (4.14)$$

gde r_1 predstavlja odnos napona i čvrstoće na pritisak do kojeg su deformacije tečenja linearno zavisne od napona, a r_2 je multiplikator koji važi za napon jednak čvrstoći na pritisak. Sa poznatim vrednostima r_1 i r_2 koeficijente C_1 i C_2 možemo sračunati iz sledećih relacija:

$$C_1 = \frac{r_2 - r_1}{1 - r_1} \quad C_2 = r_1(1 - C_1) \quad (4.15a,b)$$



Slika 4.1

Polazeći od gornjih pretpostavki do numeričkog rešenja u vremenski zavisnoj analizi dolazimo tako što ukupno vreme delimo na konačan broj vremenskih intervala. Na taj način ponašanje jednog armirano-betonskog prostornog okvira se razmatra samo u diskretnim trenucima vremena t_n ($n=1, 2, \dots, N$), gde je N ukupan broj vremenskih trenutaka. Do rešenja u vremenskom trenutku t_N dolazi se koristeći inkrementalni postupak ("step-by-step") polazeći od početne konfiguracije u vremenskom trenutku t_0 . Za odredjivanje nepoznatih veličina u diskretnim trenucima vremena koristi se postupak eksplisite integracije. Napone i deformacije u tekućem koraku vremena t_n sračunavamo na sledeći način:

- ukupna dilatacija ϵ_n u vremenskom trenutku t_n dobija se superpozicijom inkrementa ukupne dilatacije $\Delta\epsilon_n$ koja važi za vremenski interval $t_{n-1}-t_n$ i ukupne dilatacije ϵ_{n-1} iz prethodnog vremenskog trenutka:

$$\epsilon_n = \epsilon_{n-1} + \Delta\epsilon_n$$

- inkrement dilatacije usled opterećenja dugotrajnog karaktera i temperature promene dobija se na sledeći način:

$$\Delta \epsilon_{nd} = \Delta \epsilon_{nt} + \Delta \epsilon_{ns} + \Delta \epsilon_{n^0 t}$$

- dilatacija ϵ_{nd} za vremenski trenutak t_n izgleda:

$$\epsilon_{nd} = \epsilon_{n-1d} + \Delta \epsilon_{nd}$$

- dilatacija usled kratkotrajnog opterećenja ϵ_{nk} dobija se oduzimanjem dilatacija usled dugotrajnog opterećenja od ukupne dilatacije ϵ_n :

$$\epsilon_{nk} = \epsilon_n - \epsilon_{nd}$$

- napon u betonu σ_{nb} u vremenskom trenutku t_n dobija se iz relacije napon-deformacija koji važi za taj vremenski trenutak:

$$\sigma_{nb} = f_n(\epsilon_{nk})$$

4.3. DEFORMACIJA TEČENJA

Za odredjivanje deformacije tečenja u ovom radu se koristi eksponencijalni algoritam predložen od strane Kabira i Scordelisa [91]. Polazeći od pretpostavke da je pri delovanju konstantnog napona, deformacija tečenja linearna funkcija napona i da važi princip superpozicije oni su za specifičnu deformaciju tečenja, koja predstavlja jezgro integralne veze deformacije tečenja i napona,

$$\epsilon_t(t) = \int_0^t C(\tau, t-\tau, {}^0t) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.16)$$

predložili sledeću aproksimaciju preko Dirichlet-ovih redova:

$$C(\tau, t-\tau, {}^0t) = \sum_{i=1}^m a_i(\tau) \left| 1 - e^{-\lambda_i \phi({}^0t)(t-\tau)} \right| \quad (4.17)$$

gde su $a_i(\tau)$ parametri koji zavise od starosti betona, λ_i parametri koji definišu oblik krive tečenja, a $\phi({}^0t)$ funkcija koja odredjuje temperaturnu zavisnost deformacije tečenja.

U radu je usvojen jednostavan reološki model zavisnosti betona od temperature. Pretpostavlja se da usled promene temperature dolazi do translacije krive tečenja za neku zadatu vrednost funkcije $\psi({}^0t)$ Sl. 4.2. Ova zavisnost može se napisati na sledeći način:

$$C_{{}^0t}({}^1nt) = C_{{}^0t_0}({}^1nt + \psi({}^0t)) \quad (4.18)$$

gde su C_{0t} i C_{0t_0} specifične deformacije tečenja koje odgovaraju temperatura-
ma 0t i 0t_0 . Kako leva i desna strana izraza predstavljaju istu krivu tečenja
i uzimajući u obzir da je

$$e^{\ln t} = t \quad (4.19a,b)$$

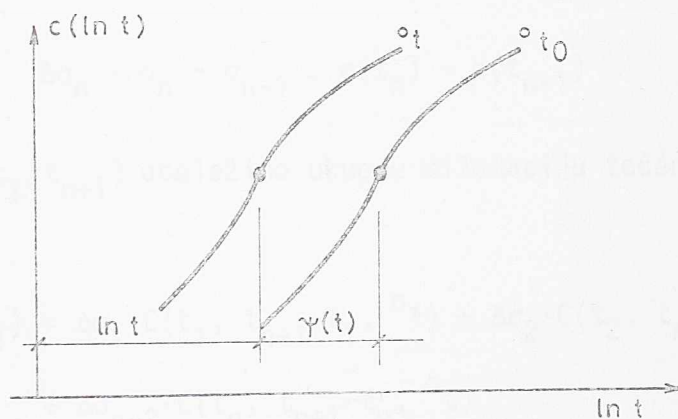
$$e^{\ln t + \psi(^0t)} = t e^{\psi(^0t)}$$

dobijamo

$$C_{0t}(t) = C_{0t_0}(te^{\psi(^0t)}) = C_{0t_0}(t\phi(^0t)) \quad (4.20a,b)$$

tj. $\phi(^0t) = e^{\psi(^0t)}$

gde $\phi(^0t)$ predstavlja funkciju translacije krive tečenja usled temperaturne
promene.



Slika 4.2

Model ponašanja pretpostavlja da se promena napona dešava samo u diskretnim
trenucima vremena t_n ($n=1,2,\dots,N$). Prilikom odredjivanja inkremenata defor-
macije tečenja pretpostavlja se da je napon konstantan u okviru jednog vremen-
skog intervala.

Polazeći od formulacije Kabira i Scordelisa veza izmedju inkremen-
ta deformacije tečenja $\Delta \underline{\epsilon}_t(t)$ i inkrementa napona $\Delta \underline{\sigma}(t)$ može se napisati u
sledećem vidu:

$$\Delta \underline{\epsilon}_t(t) = \underline{D}_0^{-1} \underline{C}(\tau, t-\tau, ^0t) \Delta \underline{\sigma}(t) \quad (4.21)$$

gde su

$$\Delta \underline{\varepsilon}_t(t) = \begin{vmatrix} \Delta \varepsilon_{zt}(t) \\ \Delta \gamma_{zst}(t) \end{vmatrix}, \quad \Delta \underline{\sigma}(t) = \begin{vmatrix} \Delta \sigma_z(t) \\ \Delta \tau_{zs}(t) \end{vmatrix}, \quad \underline{D}_0^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2(1+\nu_c) \end{vmatrix}$$

Pretpostavlja se da je Poisson-ov koeficijent tečenja ν_c jednak elastičnom.

Ukupna dilatacija tečenja u vremenskom trenutku t_n za opterećenje koje deluje od vremena t_1 može se za jednoaksijalan slučaj naprezanja sračunati na sledeći način (Sl. 4.3):

$$\varepsilon_t(t_n) = \Delta \sigma_1 \cdot C(t_1, t_n - t_1, {}^0t) + \Delta \sigma_2 \cdot C(t_2, t_n - t_2, {}^0t) + \dots + \Delta \sigma_{n-1} C(t_{n-1}, t_n - t_{n-1}, {}^0t) \quad (4.22)$$

ili

$$\varepsilon_t(t_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \underline{D}_0^{-1} C(t_i, t_n - t_i, {}^0t_i) \Delta \underline{\sigma}(t_i) \quad (4.23)$$

gde je

$$\Delta \sigma_n = \sigma_n - \sigma_{n-1} \equiv \sigma(t_n) - \sigma(t_{n-1}) \quad (4.24)$$

Ako sa $\varepsilon_t(t_{n+1})$ obeležimo ukupnu dilataciju tečenja u vremenskom trenutku t_{n+1} :

$$\varepsilon_t(t_{n+1}) = \Delta \sigma_1 \cdot C(t_1, t_{n+1} - t_1, {}^0t) + \Delta \sigma_2 \cdot C(t_2, t_{n+1} - t_2, {}^0t) + \dots + \Delta \sigma_{n-2} \cdot C(t_n, t_{n+1} - t_n, {}^0t) \quad (4.25)$$

onda se inkrement dilatacije tečenja može dobiti iz sledeće relacije:

$$\Delta \varepsilon_t(t_n) = \varepsilon_t(t_{n+1}) - \varepsilon_t(t_n) \quad (4.26)$$

Razmatrajući gornje relacije vidimo da je za sračunavanje inkrementa dilatacije tečenja u okviru proizvoljnog vremenskog intervala $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ potrebno poznavati sve priraštaje napona od početka delovanja opterećenja. Sračunavanje celokupne prethodne istorije naprezanja može se izbeći ako se specifična deformacija tečenja aproksimira eksponencijalnim redom (4.17).

Zamenom izraza (4.17) u izraz koji definiše ukupnu deformaciju tečenja u vremenskom trenutku t_n dobija se:

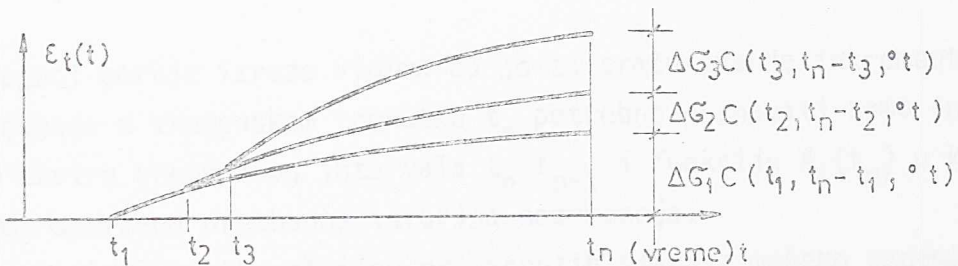
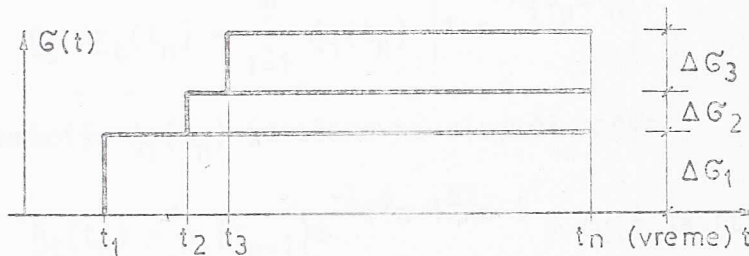
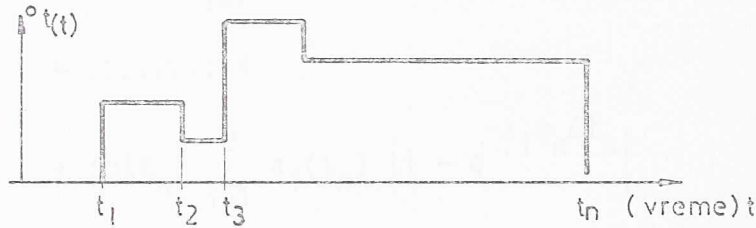
$$\underline{D}_0 \varepsilon_t(t_n) = \Delta \underline{\sigma}(t_1) \sum_{i=1}^m a_i(t_1) \left| 1 - e^{-\lambda_i \phi_1 \Delta t_1 - \dots - \lambda_i \phi_{n-1} \Delta t_{n-1}} \right| + \Delta \underline{\sigma}(t_2) \sum_{i=1}^m a_i(t_2) \left| 1 - e^{-\lambda_i \phi_2 \Delta t_2 - \dots - \lambda_i \phi_{n-1} \Delta t_{n-1}} \right|$$

+

$$+ \Delta \sigma(t_{n-1}) \sum_{i=1}^m a_i(t_{n-1}) \left| 1 - e^{-\lambda_i \phi_{n-1} \Delta t_{n-1}} \right| \quad (4.27)$$

gde su

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad i \quad \phi_i = \phi({}^0 t_i)$$



Slika 4.3

Na isti način možemo napisati i ukupnu deformaciju tečenja u vremenskom trenutku t_{n+1} :

$$\begin{aligned} \bar{D}_0 \varepsilon_t(t_{n+1}) &= \Delta \sigma(t_1) \sum_{i=1}^m a_i(t_1) \left| 1 - e^{-\lambda_i \phi_1 \Delta t_1 - \dots - \lambda_i \phi_n \Delta t_n} \right| \\ &+ \Delta \sigma(t_2) \sum_{i=1}^m a_i(t_2) \left| 1 - e^{-\lambda_i \phi_2 \Delta t_2 - \dots - \lambda_i \phi_n \Delta t_n} \right| \\ &+ \dots \\ &+ \Delta \sigma(t_n) \sum_{i=1}^m a_i(t_n) \left| 1 - e^{-\lambda_i \phi_n \Delta t_n} \right| \end{aligned} \quad (4.28)$$

Inkrement deformacije tečenja za vremenski trenutak t_n glasi:

$$\begin{aligned}
 \underline{D}_0 \Delta \underline{\varepsilon}_t(t_n) &= \underline{D}_0 \underline{\varepsilon}_t(t_{n+1}) - \underline{D}_0 \underline{\varepsilon}_t(t_n) = \\
 &= \Delta \underline{\sigma}(t_1) \sum_{i=1}^m a_i(t_1) e^{-\lambda_i \phi_1 \Delta t_1 - \dots - \lambda_i \phi_{n-1} \Delta t_{n-2}} \left| 1 - e^{-\lambda_i \phi_n \Delta t_n} \right| \\
 &+ \Delta \underline{\sigma}(t_n) \sum_{i=1}^m a_i(t_2) e^{-\lambda_i \phi_2 \Delta t_2 - \dots - \lambda_i \phi_{n-1} \Delta t_{n-1}} \left| 1 - e^{-\lambda_i \phi_n \Delta t_n} \right| \\
 &+ \dots + \\
 &+ \Delta \underline{\sigma}(t_n) \sum_{i=1}^m a_i(t_n) \left| 1 - e^{-\lambda_i \phi_n \Delta t_n} \right|
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Posle sredjivanja, gornja relacija može se napisati u sledećem vidu:

$$\underline{D}_0 \Delta \underline{\varepsilon}_t(t_n) = \sum_{i=1}^m A_i(t_n) \left| 1 - e^{-\lambda_i \phi_n \Delta t_n} \right| \tag{4.30}$$

gde su funkcije $A_i(t_n)$ izražene na sledeći način:

$$A_i(t_n) = A_i(t_{n-1}) e^{-\lambda_i \phi_{n-1} \Delta t_{n-1}} + \Delta \underline{\sigma}(t_n) a_i(t_n) \tag{4.31}$$

$$A_i(t_1) = \Delta \underline{\sigma}(t_1) a_i(t_1) \tag{4.32}$$

Analizirajući gornje izraze vidimo da je za sračunavanje inkrementa deformacije tečenja u vremenskom trenutku t_n potrebno poznavati samo inkrement napona u okviru vremenskog intervala $t_n - t_{n-1}$ i funkciju $A_i(t_n)$ u kojoj je implicitno sadržana prethodna istorija naprezanja.

U slučaju ekscentrično pritisnutih štapova možemo zanemariti tečenje usled smičućih napona tako da se problem svodi na jednoaksijalno tečenje u podužnom pravcu štapa:

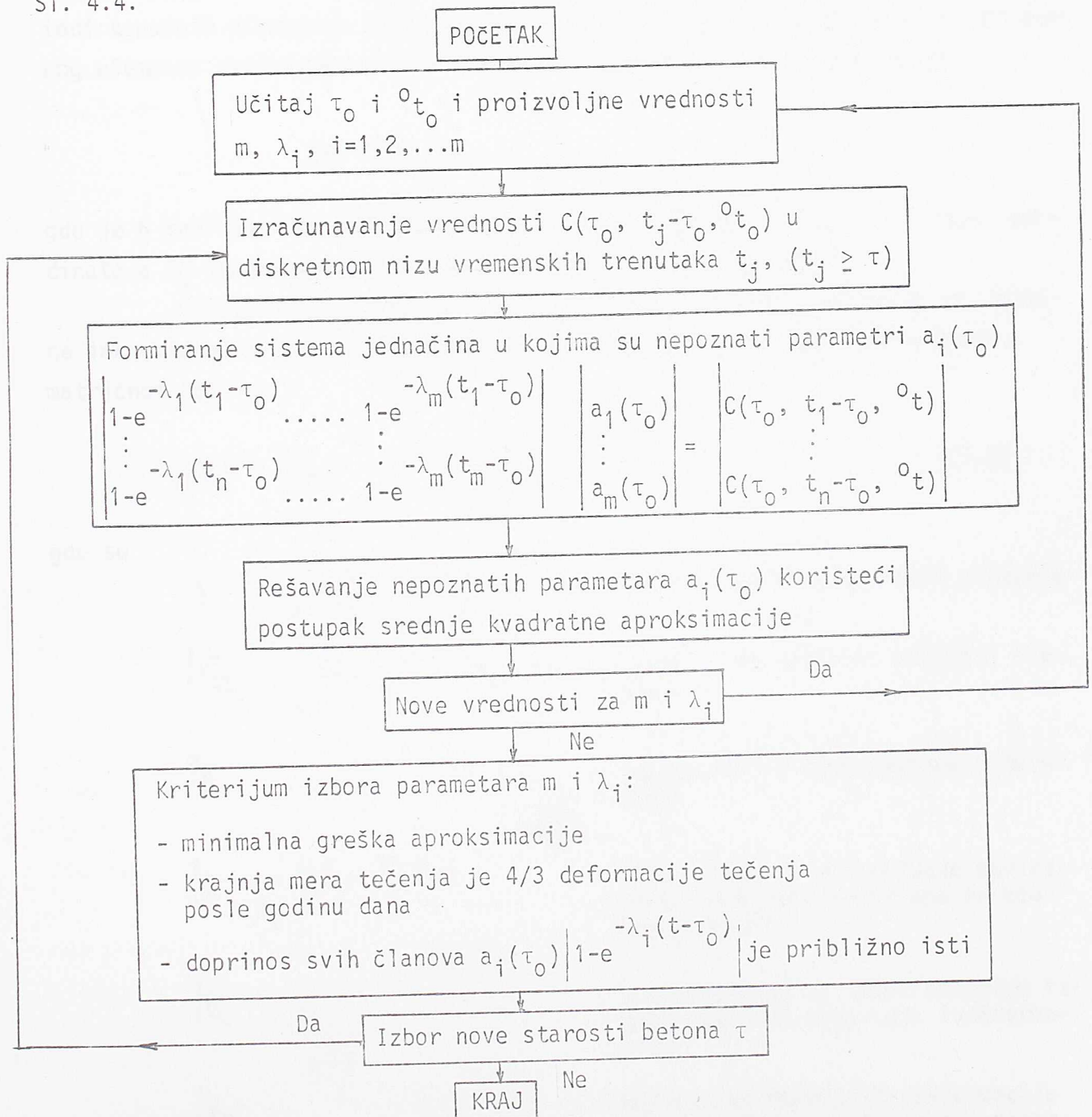
$$\Delta \varepsilon_t(t_n) = \sum_{i=1}^m A_i(t_n) \left| 1 - e^{-\lambda_i \phi_n \Delta t_n} \right| \tag{4.33}$$

$$A_i(t_n) = A_i(t_{n-1}) e^{-\lambda_i \phi_{n-1} \Delta t_{n-1}} + \Delta \sigma(t_n) a_i(t_n) \tag{4.34}$$

$$A_i(t_1) = \Delta \sigma(t_1) a_i(t_1) \tag{4.35}$$

4.4. ODREĐJIVANJE SPECIFIČNE FUNKCIJE TEČENJA

Za sračunavanje specifične funkcije tečenja $C(\tau, t-\tau, {}^0t)$ izražene preko Dirichlet-ovih redova potrebno je odrediti parametre m , $a_i(\tau)$, λ_i i $\phi({}^0t)$. Dati parametri se mogu odrediti iz eksperimentalnih ili empirijski definisanih funkcija tečenja, koristeći neki od postupaka aproksimacije. U ovom radu koristi se postupak srednje kvadratne aproksimacije unapred zadate funkcije tečenja. Algoritam određivanja datih parametara dat je na Sl. 4.4.



Slika 4.4

5. FORMULACIJA REŠENJA PO METODI KONAČNIH ELEMENATA

5.1. UVODNE NAPOMENE

Za dobijanje odgovarajućih algebarskih jednačina i rešenja iz linearizovane jednačine (2.19) koja predstavlja uslove ravnoteže deformabilnog tela, primeni će se metoda konačnih elemenata. Usvajajući pogodnu aproksimaciju za polje pomeranja unutar elementa, do odgovarajućih jednačina po metodi konačnih elemenata dolazimo tako što inkrementalna pomeranja unutar jednog elementa definišemo preko vrednosti nepoznatih čvornih pomeranja:

$$\Delta \underline{u} = \underline{N} \cdot \Delta \underline{q} \quad (5.1)$$

gde je \underline{N} matrica interpolacionih funkcija definisana za lokalni sistem koordinata a $\Delta \underline{q}$ vektor nepoznatih inkrementalnih čvornih pomeranja.

Polazeći od jednačina (2.15a,b), (2.19) i (5.1) dobijaju se osnovne inkrementalne jednačine ravnoteže za jedan konačni elemenat napisane u matričnom obliku:

$$\left(\underline{1}k_L^e + \underline{1}k_{NL}^e \right) \cdot \Delta \underline{q}^e = \underline{2}R^e - \underline{1}Q^e \quad (5.2)$$

gde su

$$\underline{1}k_L^e = \int_V \underline{1}B_L^T \cdot \underline{1}D \cdot \underline{1}B_L \, dV \quad - \text{Linearna matrica krutosti elementa}$$

$$\underline{1}k_{NL}^e = \int_V \underline{1}B_{NL} \cdot \underline{1}\sigma \cdot \underline{1}B_{NL} \, dV \quad - \text{Geometrijska matrica krutosti elementa}$$

$$\underline{2}R \quad - \text{Vektor spoljašnjeg čvornog opterećenja}$$

$$\underline{1}Q = \int_V \underline{1}B^T \cdot \underline{1}\hat{\sigma} \, dV \quad - \text{Vektor čvornog opterećenja ekvivalentan unutrašnjim silama za konfiguraciju 1}$$

$$\underline{1}B_L \quad - \text{Linearna matrica transformacije izmedju vektora pomeranja i deformacije}$$

$$\underline{1}B_{NL} \quad - \text{Nelinearna matrica transformacije izmedju vektora pomeranja i deformacije}$$

- 1D - Inkrementalna konstitutivna matrica
- ${}^1\underline{\sigma}$, ${}^1\hat{\underline{\sigma}}$ - Matrica i vektor Cauchy-ovih napona

Jednačine ravnoteže za ceo sistem dobijaju se standardnom formulacijom uobičajenoj u metodi deformacija:

$$\sum_e ({}^1K_{-L}^e + {}^1K_{-NL}^e) \cdot \Delta \underline{q} = \sum_e {}^1R^e - \sum_e {}^1Q^e \quad (5.3)$$

u daljim razmatranjima biće formulisane inkrementalne jednačine armirano-betonskog linijskog konačnog elementa otvorenog tankozidnog i punog poprečnog preseka, koji mogu imati velika pomeranja i rotacije, pri čemu deformacije ostaju male.

5.2. KONAČNI ELEMENAT OTVORENOG TANKOZIDNOG PRESEKA

5.2.1. Osnovne pretpostavke o deformaciji štapa

Iako pojam tankozidnosti armirano-betonskih konstrukcija ne odgovara u potpunosti pojmu tankozidnosti definisanom u tehničkoj teoriji tankozidnih štapova, pretpostavićemo da se i u ovom slučaju mogu da prihvate sledeće pretpostavke o deformaciji štapa:

- poprečni presek štapa i dužina štapa ostaju za vreme deformacije nepromenjeni
- deformacija klizanja u srednjoj površi štapa se zanemaruje
- linijski elemenat upravan na srednju površ ostaje i posle deformacije prav i upravan na deformisanu srednju površ, ne menjajući dužinu
- pretpostavke o kinematici deformacije važe i za linearno i nelinearno ponašanje materijala.

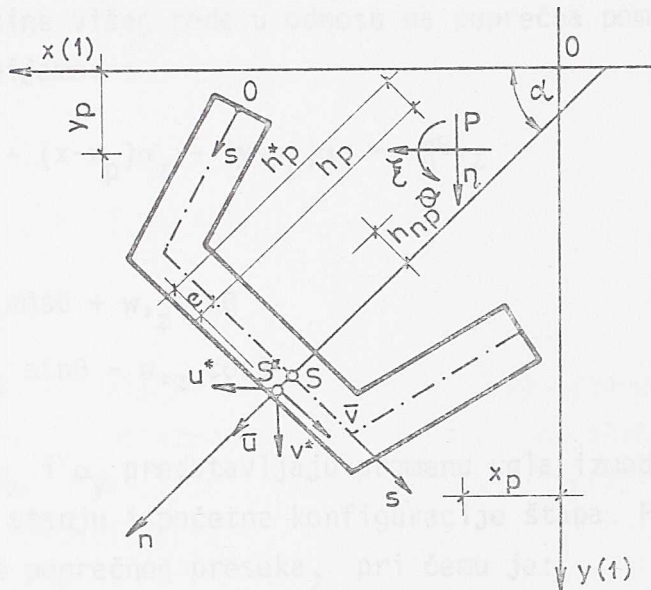
Polazeći od gornjih pretpostavki, određivanje naponsko-deformacionog stanja tankozidnog štapa sa otvorenim poprečnim presekom svodi se na jednodimenzionalan problem i sve veličine su funkcije jednog argumenta tj. ose štapa.

Saglasno prvoj pretpostavci, pomeranje proizvoljne tačke poprečnog preseka u ravni moguće je opisati putem tri nezavisna parametra, kao u slučaju kretanja krute ploče u ravni. Ovi parametri su dve komponente pomeranja u_p i v_p u pravcu lokalnih osa, i ugao θ koji opisuje obrtanje poprečnog preseka oko tačke P.

Sa sl. 5.1 komponente pomeranja proizvoljne tačke S^* u pravcu osa x i y su:

$$u^* = u_p - (y - y_p)\sin\theta - (x - x_p)(1 - \cos\theta) \quad (5.4a,b)$$

$$v^* = v_p + (x - x_p)\sin\theta - (y - y_p)(1 - \cos\theta)$$



Slika 5.1

Komponente pomeranja u pravcu tangente i normale na srednju liniju preseka mogu se izraziti preko komponenti pomeranja u^* i v^* :

$$\bar{u}^* = u^*\cos\alpha + v^*\sin\alpha \quad (5.5a,b)$$

$$\bar{v}^* = -u^*\sin\alpha + v^*\cos\alpha$$

gde je α ugao što ga normala zaklapa sa pozitivnim pravcem x-ose.

Ako u izraz (5.5a,b) unesemo (5.4a,b) posle sredjivanja dobijamo:

$$\bar{u}^* = u_p\cos\alpha + v_p\sin\alpha + h_{np}\sin\theta - h_p(1 - \cos\theta) \quad (5.6a,b)$$

$$\bar{v}^* = u_p\cos\alpha + v_p\sin\alpha + h_{np}\sin\theta + h_p(1 - \cos\theta)$$

gde su

$$h_{np} = (x - x_p)\sin\alpha - (y - y_p)\cos\alpha \quad (5.7a,b)$$

$$h_p = (x - x_p)\cos\alpha - (y - y_p)\sin\alpha$$

Na osnovu druge i treće pretpostavke mogu se napisati sledeće relacije:

$$\gamma_{zs} = w_{,s} + \bar{v}_{,z} + \bar{u}_{,z} \cdot \bar{u}_{,s} + \bar{v}_{,z} \cdot \bar{v}_{,s} + w_{,z} \cdot w_{,s} = 0 \quad (5.8)$$

$$\gamma_{zn} = w_{,n} + \bar{u}_{,z} + \bar{u}_{,z} \cdot \bar{u}_{,n} + \bar{v}_{,z} \cdot \bar{v}_{,n} + w_{,z} \cdot w_{,n} = 0 \quad (5.9)$$

Ubacivanjem izraza (5.6) u gornje izraze i zanemarivanjem člana $w_{,z}$ kao male veličine višeg reda u odnosu na poprečna pomeranja štapa, posle integracije dobijamo:

$$w_s^* = w_c - (x-x_p)\alpha_z - (y-y_p)\alpha_y - \omega_p^* \theta, z \quad (5.10)$$

gde su

$$\alpha_x = v_{,z} \cos\theta + w_{,z} \sin\theta \quad (5.11a,b)$$

$$\alpha_y = v_{,z} \sin\theta - w_{,z} \cos\theta$$

Izrazi α_x i α_y predstavljaju promenu ugla izmedju podužne ose štapa u deformisanom stanju i početne konfiguracije štapa. Poslednji član predstavlja krivljenje poprečnog preseka, pri čemu je:

$$\omega_p^* = \int_0^s h_p ds + h_{up} \cdot e = \omega_p + h_{np} \cdot e \quad (5.12)$$

uopštena sektorska koordinata.

U slučaju inkrementalnih pomeranja možemo zanemariti kvadrate i više stepene ugla θ ($\cos\theta \cong 1$ i $\sin\theta \cong \theta$) pa izraze (5.4a,b) i (5.10) možemo napisati na sledeći način koristeći matricnu formulaciju:

$$\begin{bmatrix} \Delta u^* \\ \Delta v^* \\ \Delta w^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -(y-y_p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (x-x_p) & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & -y & 0 & -\omega_p^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_p \\ \Delta u'_p \\ \Delta v_p \\ \Delta v'_p \\ \Delta \theta \\ \Delta \theta' \\ \Delta w_c \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Inkrementalni tenzor deformacije, s obzirom na učinjene pretpostavke ima samo tri člana različita od nule:

$$\Delta \epsilon_{zz} = \Delta e_{zz} + \Delta \eta_{zz} = \Delta w_{,z} + 1/2(\Delta u_{,z}^2 + \Delta v_{,z}^2 + \Delta w_{,z}^2) \quad (5.14a,b,c)$$

$$\Delta \gamma_{zx} = \Delta e_{zx} + \Delta \eta_{zx} = \Delta w_{,x} + \Delta u_{,z} + \Delta u_{,x} \cdot \Delta u_{,z} + \Delta v_{,x} \cdot \Delta v_{,z} + \Delta w_{,x} \cdot \Delta w_{,z}$$

$$\Delta \gamma_{zy} = \Delta e_{zy} + \Delta \eta_{zy} = \Delta w_{,y} + \Delta v_{,z} + \Delta u_{,y} \cdot \Delta u_{,z} + \Delta v_{,y} \cdot \Delta v_{,z} + \Delta w_{,y} \cdot \Delta w_{,z}$$

5.3. VEZE IZMEDJU SILA U PRESECIMA I POMERANJA

Veze izmedju sila u preseku i pomeranja bazirana su na konstitutivnim relacijama opisanim u poglavljima 3 i 4.

Inkrementalna linearizovana veza izmedju napona i deformacija može se napisati:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_z &= E_t^* \Delta\varepsilon_k = E_t^* (\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_0) \\ \Delta\tau_{zs} &= G \Delta\gamma_{zs}\end{aligned}\quad (5.15a,b)$$

gde su $\Delta\varepsilon_k$ inkrement dilatacije usled kratkotrajnog opterećenja, $\Delta\varepsilon$ inkrement ukupne dilatacije i $\Delta\varepsilon_0$ inkrement dilatacije usled dugotrajnog opterećenja.

Inkrement dilatacije i klizanja može se izraziti preko generalisanih pomeranja na sledeći način:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_z &= \Delta w_c' - y \cdot \Delta v_p'' - x \cdot \Delta u_p'' - \omega_p^* \Delta\theta'' \\ \Delta\gamma_{zs} &= 2e \cdot \Delta\theta'\end{aligned}\quad (5.16a,b)$$

Zamenom gornjih izraza u izraze za generalisane presečne sile tankozidnog štapa, dobija se sledeća veza izmedju sila i pomeranja:

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_y \\ \Delta M_x \\ \Delta M_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A E_t^* dA & \int_A E_t^* \cdot x \cdot dA & \int_A E_t^* \cdot y \cdot dA & \int_A E_t^* \cdot \omega_p^* dA \\ & \int_A E_t^* \cdot x^2 dA & \int_A E_t^* \cdot x \cdot y dA & \int_A E_t^* \cdot x \cdot \omega_p^* dA \\ & & \int_A E_t^* \cdot y^2 dA & \int_A E_t^* \cdot y \cdot \omega_p^* dA \\ & & & \int_A E_t^* \cdot \omega_p^{*2} dA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta w_c' \\ -\Delta u_p'' \\ -\Delta v_p'' \\ \Delta\theta'' \end{bmatrix}\quad (5.17)$$

SIMETRIČNO

i St. Venant-ov moment torzije

$$\Delta M_{SV} = G \cdot K_T \cdot \Delta\theta' \quad (5.18)$$

gde je

$$K_T \cong \frac{1}{3} \sum \frac{E_t^*}{E} \cdot b_t t_i^3$$

Usvajanjem pretpostavke o zanemarenju klizanja u srednjoj ravni

štapa, nije moguće uspostaviti neposrednu vezu između napona smicanja τ_w i klizanja.

Da se relacije (5.17) mogu se uprostiti izborom funkcije x , y i ω tako da budu zadovoljeni uslovi ortogonalnosti sledećih integrala:

$$\begin{aligned} \int_A E_t^* \cdot y \cdot dA &= 0 \\ \int_A E_t^* \cdot x \cdot dA &= 0 \\ \int_A E_t^* \cdot x \cdot y \cdot dA &= 0 \\ \int_A E_t^* \cdot x \cdot \omega \cdot dA &= 0 \\ \int_A E_t^* \cdot y \cdot \omega \cdot dA &= 0 \end{aligned} \quad (5.19a,b,c,d,e,f)$$

Prva tri uslova služe za određivanje težišta poprečnog preseka i glavnih centralnih osa inercije, a preostali uslovi služe za određivanje centra smicanja, sektorske koordinate i položaja nulte tačke sektorske koordinate na srednjoj liniji profila.

5.4. INTERPOLACIONE FUNKCIJE ZA INKREMENTALNA POMERANJA

Prostorni konačni element tankozidnog štapa otvorenog poprečnog preseka prikazan je na Sl. 5.2. Analize elementa izvršiće se u lokalnom koordinatnom sistemu x, y, z sa koordinatnim početkom u proizvoljnoj tački C. Na Sl. 5.2 prikazane su i referentne ose koje prolaze kroz tačke C i P, u odnosu na koje su definisane sile na krajevima elementa sa odgovarajućim pomeranjima.

Vektor osnovnih inkrementalnih pomeranja u čvorovima 1, 2 i 3 označen je sa:

$${}^1\Delta \underline{q} = | {}^1\Delta \underline{q}_u \quad {}^1\Delta \underline{q}_v \quad {}^1\Delta \underline{q}_\theta \quad {}^1\Delta \underline{q}_w |^T \quad (5.20)$$

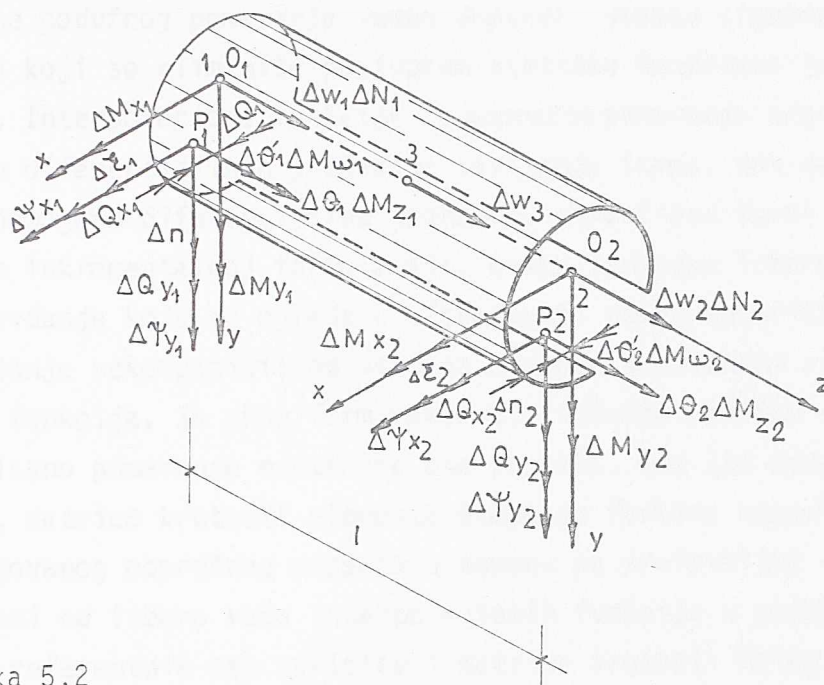
gde su
$${}^1\Delta \underline{q}_u = | {}^1\Delta u_{P1} \quad {}^1\Delta u_{P1}' \quad {}^1\Delta u_{P2} \quad {}^1\Delta u_{P2}' |^T \quad (5.21)$$

$${}^1\Delta \underline{q}_v = | {}^1\Delta v_{P1} \quad {}^1\Delta v_{P1}' \quad {}^1\Delta v_{P2} \quad {}^1\Delta v_{P2}' |^T$$

$${}^1\Delta \underline{q}_\theta = | {}^1\Delta \theta_1 \quad {}^1\Delta \theta_1' \quad {}^1\Delta \theta_2 \quad {}^1\Delta \theta_2' |^T$$

$${}^1\Delta \underline{q}_w = | {}^1\Delta w_1 \quad {}^1\Delta w_3 \quad {}^1\Delta w_2 |^T$$

Inkrementi pomeranja i obrtanja u elementu mogu se prikazati u



Slika 5.2

zavisnosti od parametara pomeranja u čvorovima pomoću sledećih interpolacionih funkcija:

$$\begin{aligned}
 1\Delta u_P &= 1N_u \quad 1\Delta q_u \\
 1\Delta v_P &= 1N_v \quad 1\Delta q_v \\
 1\Delta \theta &= 1N_\theta \quad 1\Delta q_\theta \\
 1\Delta w &= 1N_w \quad 1\Delta q_w
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

gde su

$$\begin{aligned}
 1N_u &= 1N_v = 1N_\theta = |1-3\zeta^2+2\zeta^3, 1(\zeta-2\zeta^2+\zeta^3), 3\zeta^2-2\zeta^3, 1(-\zeta^2+\zeta^3)| \\
 1N_v &= |1-3\zeta^2+2\zeta^3, 1(-\zeta+2\zeta^2-\zeta^3), 3\zeta^2-2\zeta^3, 1(\zeta^2-\zeta^3)| \\
 1N_w^I &= |(2\zeta-1)(\zeta-1), -4\zeta(\zeta-1), \zeta(2\zeta-1)| \\
 1N_w^{II} &= |1-\zeta, 4\zeta(1-\zeta), \zeta|
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

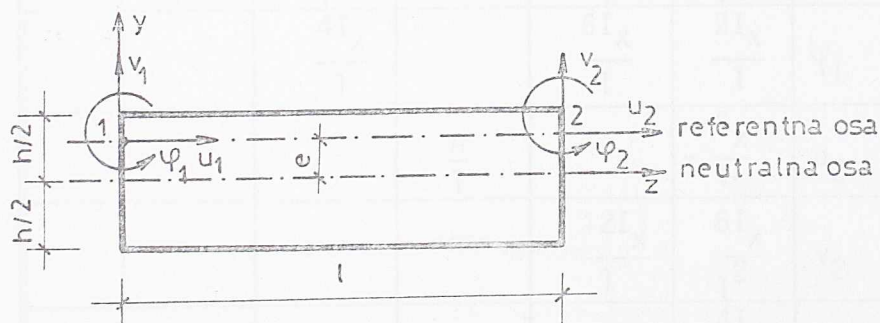
gde je

$$\zeta = z/l$$

Za interpolacione funkcije kod poprečnih pomeranja i obrtanja oko

ose štapa usvojeni su Hermitt-ovi polinomi prve vrste pomoću kojih je obezbedjen kontinuitet C^1 , dok je za pomeranje u podužnom pravcu pretpostavljena linearna ili kvadratna promena izmedju pomeranja u čvorovima. U slučaju linearne promene podužnog pomeranja imamo dopunski stepen slobode pomeranja u sredini štapa koji se eliminiše postupkom statičke kondenzacije na nivou samog elementa. Interpolacione funkcije za poprečna pomeranja odgovaraju rešenju homogenih diferencijalnih jednačina savijanja štapa, dok obrtanja ne zadovoljavaju homogenu diferencijalnu jednačinu ograničene torzije. S obzirom da je reč o inkrementalnoj formulaciji, ovako usvojene interpolacione funkcije imaju opravdanje koje se ogleda u efikasnosti samog numeričkog postupka. Razlog za usvajanje nekompatibilnog stepena slobode u podužnom pravcu pri izboru linearnih funkcija, je zbog formiranja što tačnije matrice krutosti kojom bi bilo opisano pomeranje neutralne ose preseka. Kao što ćemo detaljno videti kasnije, matrica krutosti elementa štapa se formira numeričkom integracijom diskretizovanog poprečnog preseka u odnosu na proizvoljne referentne ose. U zavisnosti od izbora reda interpolacionih funkcija u podužnom pravcu, kao i lokacije referentnih osa zavisice i matrica krutosti datog elementa. Opravdanost usvajanja pomenutih interpolacionih funkcija u podužnom pravcu biće ilustrovana formiranjem matrice krutosti za dva različita elementa pravog štapa koji su izloženi savijanju u ravni.

Prvi elemenat prikazan na Sl. 5.3 ima ukupno šest stepeni slobode



Slika 5.3

pomeranja vezanih za referentnu osu. Usvojeni su parametri pomeranja u_1 , v_1 , φ_1 u čvoru 1 i u_2 , v_2 , φ_2 u čvoru 2. Za poprečna pomeranja usvojena je kubna funkcija a za podužno pomeranje linearna funkcija pomeranja.

Ako za vektor osnovnih nepoznatih u čvorovima 1 i 2 usvojimo:

$$\underline{q} = |u_1, u_2, v_1, v_2, \varphi_1, \varphi_2| \quad (5.24)$$

onda se veza izmedju vektora pomeranja bilo koje tačke referentne ose i vek-

tora osnovnih nepoznatih u čvorovima na kraju štapa može napisati:

$$\underline{v} = \underline{N} \cdot \underline{q} \quad (5.25)$$

gde su

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \underline{N} = \begin{bmatrix} 1-\zeta, & \zeta, & 1+\zeta^3-3\zeta^2, & 3\zeta^2-2\zeta^3, & 1(\zeta-2\zeta^2+\zeta^3), & -1(\zeta^2-\zeta^3) \end{bmatrix}, \quad \zeta = \frac{z}{l}$$

Drugi elemenat prikazan na Sl. 5.4 je u svemu isti kao prethodni sem što ima još jedan dodatni stepen slobode pomeranja u podužnom pravcu koji se eliminiše statičkom kondenzacijom.

TABELA 1

Matrica krutosti za elemenat sa 6 stepeni slobode pomeranja

u_1	v_1	ψ_1	u_2	v_2	ψ_2	
$\frac{A}{l}$		$-\frac{S_x}{l}$	$-\frac{A}{l}$		$\frac{S_x}{l}$	u_1
	$\frac{12I_x}{l^3}$	$-\frac{6I_x}{l^2}$		$-\frac{12I_x}{l^3}$	$-\frac{6I_x}{l^2}$	v_1
		$\frac{4I_x}{l}$		$\frac{6I_x}{l}$	$\frac{2I_x}{l}$	ψ_1
			$\frac{A}{l}$		$-\frac{S_x}{l}$	u_2
				$\frac{12I_x}{l}$	$\frac{6I_x}{l^2}$	v_2
					$\frac{4I_x}{l}$	ψ_2

$k = E^*$

$$A = \int_A dA$$

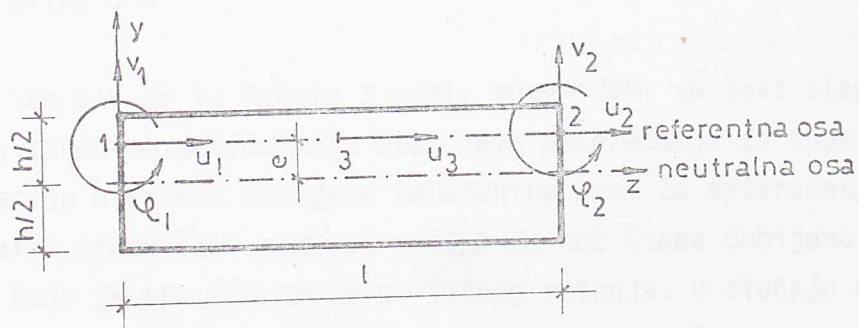
$$S_x = \int_A y dA$$

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

TABELA 2

Matrica krutosti za elemenat sa 7 stepeni slobode pomeranja

u_1	v_1	φ_1	u_2	v_2	φ_2	u_3	
$\frac{A}{l}$		$-\frac{S_x}{l}$	$-\frac{A}{l}$		$\frac{S_x}{l}$		u_1
	$\frac{12I_x}{l^3}$	$-\frac{6I_x}{l^2}$		$-\frac{12I_x}{l^3}$	$-\frac{6I_x}{l^2}$	$-\frac{8S_x}{l^2}$	v_1
		$\frac{4I_x}{l}$		$\frac{6I_x}{l}$	$\frac{2I_x}{l}$		φ_1
			$\frac{A}{l}$		$-\frac{S_x}{l}$		u_2
				$\frac{6I_x}{l}$	$\frac{6I_x}{l}$	$\frac{8S_x}{l^2}$	v_2
					$\frac{4I_x}{l}$		φ_2
						$\frac{16A}{3l}$	u_3



Slika 5.4

Vektor osnovnih nepoznatih pomeranja možemo napisati:

$$\underline{q} = |u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, \varphi_1, \varphi_2| \quad (5.26)$$

a vezu između vektora pomeranja bilo koje tačke referentne ose i vektora nepoznatih pomeranja u čvorovima:

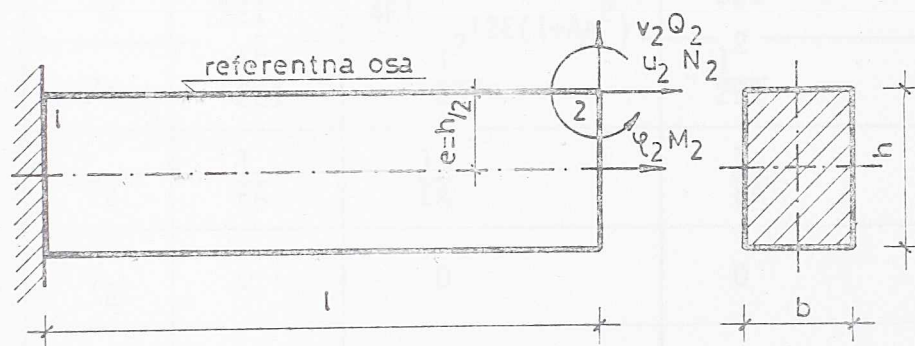
$$\underline{v} = \underline{N} \underline{q} \quad (5.27)$$

gde je

$$\underline{N} = |1-\zeta, \zeta, 4\zeta(1-\zeta), 1+2\zeta^3-2\zeta^2, 3\zeta^2-2\zeta^3, 1(\zeta-2\zeta^2+\zeta^3), -1(\zeta^2-\zeta^3)|$$

Matrice krutosti za oba elementa date su u tabeli 1 i 2.

Na primeru konzole prikazane na Sl. 5.5 sprovedena je uporedna analiza ponašanja ova dva elementa za različite slučajeve jediničnog opterećenja. Za referentnu osu usvojena je osa koja se nalazi na odstojanju $e=h/2$ od težišne ose. Rezultati analize prikazani su u tabeli 3.



Slika 5.5

Kao što se iz Tabele 3 vidi, elementom sa šest stepeni slobode pomeranja, tačno se sračunavaju slučajevi opterećenja za koje imamo konstantnu dilataciju u pravcu usvojene referentne ose. Za opterećenje $Q_2=1$ koje daje linearno promenljiv momenat savijanja duž štapa dobijeno je poprečno pomeranje koje je oko 20% manje od tačnog rešenja. U slučaju elementa sa popravljenom funkcijom u podužnom pravcu, imamo poklapanje sa tačnim rezultatima, nezavisno od izbora referentne ose.

Da bi se dobila veza između inkremenata vektora pomeranja tačaka unutar tankozidnog štapa i vektora inkremenata nepoznatih čvornih pomeranja potrebno je da se jednačine (5.13) uvrste u (5.22):

TABELA 3

OPTEREĆENJE	POMERANJE	TAČNO REŠENJE*	LINIJSKI ELEMENAT ŠTAPA SA 6 SSP	LINIJSKI ELEMENAT ŠTAPA SA 7 SSP
$N_2=1$	u_2	$\frac{1}{EA} + \frac{1}{EI} e^2$	$\frac{1}{EA} + \frac{1}{EI} e^2$	$\frac{1}{EA} + \frac{1}{EI} e^2$
	v_2	$\frac{1^2 e}{2EI}$	$\frac{1^2 e}{2EI}$	$\frac{1^2 e}{2EI}$
	φ_2	$-\frac{1}{EI} e$	$-\frac{1}{EI} e$	$-\frac{1}{EI} e$
$Q_2=1$	u_2	$\frac{1^2 e}{2EI}$	$\frac{1^2 e}{2EI}$	$\frac{1^2 e}{2EI}$
	v_2	$\frac{1^3}{3EI}$	$\frac{1^3}{4EI} + \frac{1^3}{12E(I+Ae^2)}$	$\frac{1^3}{3EI}$
	φ_2	$-\frac{1^2}{2EI}$	$-\frac{1^2}{2EI}$	$-\frac{1^2}{2EI}$
$N_2=1$ $M_2=e$	u_2	$\frac{1}{EA}$	$\frac{1}{EA}$	$\frac{1}{EA}$
	v_2	0	0	0
	φ_2	0	0	0

* Tačno rešenje podrazumeva pretpostavke tehničke teorije savijanja štapa.

$$\begin{bmatrix} 1\Delta u_* \\ 1\Delta v_* \\ 1\Delta w_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\underline{N} & 0 & -(y-y_p)1\underline{N} & 0 \\ 0 & 1\underline{N}_v & (x-x_p)\underline{N} & 0 \\ -x_1\underline{N}' & -y_1\underline{N}'_v & -\omega_p^* 1\underline{N}' & 1\underline{N}_w^{I,II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\Delta q_u \\ 1\Delta q_v \\ 1\Delta q_\theta \\ 1\Delta q_w \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

gde su

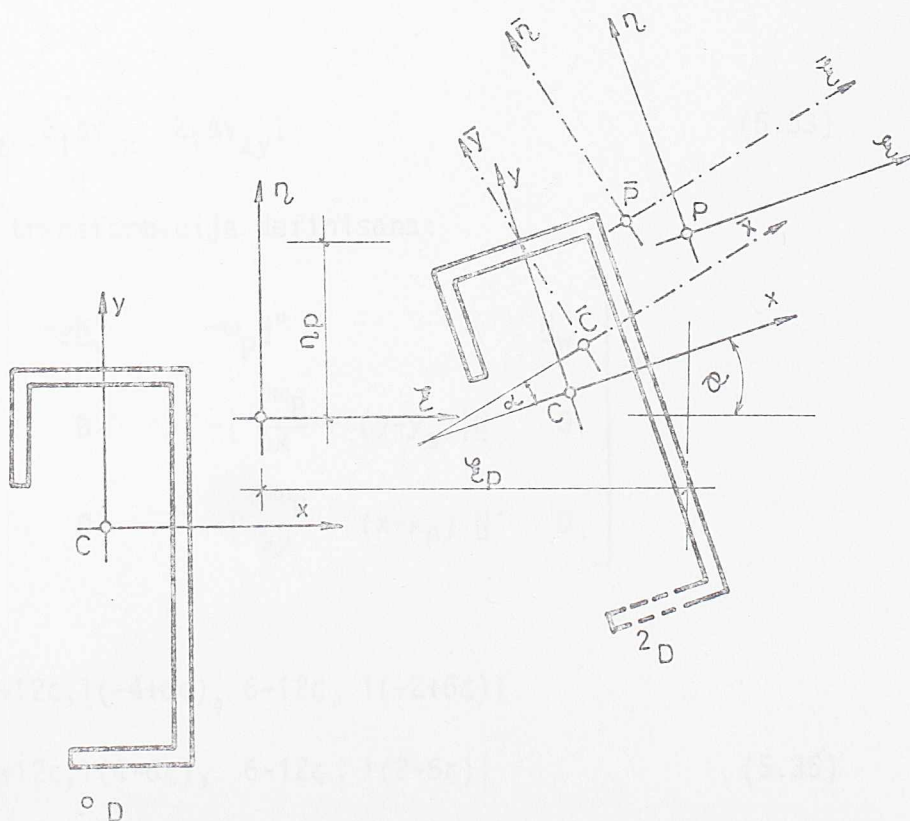
$$1\underline{N}' = \frac{1}{l} | -6\zeta + 6\zeta^2, 1(1-4\zeta+3\zeta^2), 6\zeta-6\zeta^2, 1(-2\zeta+3\zeta^2) | \quad (5.29)$$

$$1\underline{N}'_v = \frac{1}{l} | -6\zeta + 6\zeta^2, 1(-1+4\zeta-3\zeta^2), 6\zeta-6\zeta^2, 1(2\zeta-3\zeta^2) | \quad (5.30)$$

5.5 IZBOR REFERENTNIH OSA

Uzimajući u obzir nelinearno ponašanje betona i čelika za armaturu, pojavu prslina, tečenje i drobljenje betona i plastično tečenje armature imamo da se težišna osa i osa smicanja menjaju i po položaju i po orijentaciji u zavisnosti od trenutka vremena ili promene opterećenja, tj. funkcija su rasporeda deformacije po površini poprečnog preseka. U slučaju samo geometrijske nelinearnosti i elastičnog ponašanja materijala bez pojave prslina analiza elementa se može sprovesti u odnosu na ose koje se poklapaju sa glavnim osama inercije poprečnog preseka i osu koja prolazi kroz centar smicanja. Ako se uzme u obzir i nelinearno ponašanje materijala onda se analiza elementa može sprovesti ili u odnosu na: fiksne referentne ose koje mogu odgovarati glavnim osama inercije i osi smicanja elastičnog poprečnog preseka 0D , Sl. 5.6, ili u odnosu na promenljive referentne ose koje mogu odgovarati glavnim osama inercije i osi smicanja transformisanog poprečnog preseka u konfiguraciji 1D , Sl. 5.6.

U radu će biti prikazana formulacija matrice krutosti u odnosu na oba sistema referentnih osa.



Slika 5.6

5.6 LINEARNA MATRICA KRUTOSTI DEFINISANA U ODNOSU NA FIKSNE REFERENTNE OSE

Kao što je napomenuto usvajaju se fiksne referentne ose u odnosu na koje se definišu inkrementalni uslovi ravnoteže. U radu je usvojeno da su to ose koje odgovaraju glavnim osama inercije i osi smicanja elastičnog poprečnog preseka.

Do linearne matrice krutosti tankozidnog elementa dolazimo iz prvog integrala linearizovanih inkrementalnih jednačina ravnoteže (2.19). Linearni deo inkrementalnog tenzora deformacije izgleda:

$$\begin{aligned} {}_1\Delta e_{zz} &= {}_1\Delta w_{,z} \\ {}_1\Delta \gamma_{zx} &= {}_1\Delta u_{,z} + {}_1\Delta w_{,x} \\ {}_1\Delta \gamma_{zy} &= {}_1\Delta v_{,z} + {}_1\Delta w_{,y} \end{aligned} \quad (5.31a,b,c)$$

Unošenjem (5.31a,b,c) u (5.28) dobija se veza izmedju deformacija i nepoznatih čvornih pomeranja:

$${}_1\underline{e} = {}_1\underline{B}_L {}_1\underline{\Delta q} \quad (5.32)$$

gde je

$${}_1\Delta \underline{e}^T = | {}_1\Delta e_{zz} \quad 2{}_1\Delta \gamma_{zx} \quad 2{}_1\Delta \gamma_{zy} | \quad (5.33)$$

a ${}_1\underline{B}_L$ linearna matrica transformacije definisana:

$${}_1\underline{B}_L = \begin{bmatrix} -x\underline{N}'' & -y\underline{N}'' & -\omega_p\underline{N}'' & \underline{N}'_w \\ 0 & 0 & -\left| \frac{\partial \omega_p}{\partial x} + (y-y_p) \right| \underline{N}' & 0 \\ 0 & 0 & -\left| \frac{\partial \omega_p}{\partial y} - (x-x_p) \right| \underline{N}' & 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

gde su

$$\begin{aligned} \underline{N}'' &= \frac{1}{12} | -6+12\zeta, 1(-4+6\zeta), 6-12\zeta, 1(-2+6\zeta) | \\ \underline{N}''_v &= \frac{1}{12} | -6+12\zeta, 1(4-6\zeta), 6-12\zeta, 1(2-6\zeta) | \\ \underline{N}'_w &= | 8\zeta-3, -4(2\zeta-1), 4\zeta-1 | \quad \underline{N}'_w{}^{II} = \frac{1}{12} | -1, 4(1-2\zeta), 1 | \end{aligned} \quad (5.35)$$

Linearna matrica krutosti tankozidnog štapa dobija se:

$${}^1\underline{k}_L = \int_V {}^1\underline{B}_L^T {}^1\underline{D} {}^1\underline{B}_L {}^1dV = \int_0^1 {}^1\underline{B}_L^T \left(\int_A E_t^* \varphi(x,y) dx dy \right) {}^1\underline{B}_L dz \quad (5.36)$$

gde je

$${}^1\underline{B}_L^T {}^1\underline{D} {}^1\underline{B}_L = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E_t^* x^2 \underline{N}^T \underline{N} & E_t^* x y \underline{N}^T \underline{N}_V & E_t^* x \omega_P \underline{N}^T \underline{N} & -E_t^* x \underline{N}^T \underline{N}_W \\ \hline & E_t^* y^2 \underline{N}_V^T \underline{N}_V & E_t^* y \omega_P \underline{N}_V^T \underline{N} & -E_t^* y \cdot \underline{N}_V^T \underline{N}_W \\ \hline \text{SIMETRIČNO} & & E_t^* \omega_P \underline{N}^T \underline{N} + \\ & & E_t^* \alpha \underline{N}^T \underline{N} + \\ & & G^* \beta \underline{N}^T \underline{N} & E_t^* \omega_P \underline{N}^T \underline{N}_W \\ \hline & & & E_t^* \underline{N}_W^T \underline{N}_W \\ \hline \end{array} \quad (5.37)$$

Posle integracije dobijamo:

$${}^1\underline{k}_L = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline {}^1k_{uu} & {}^1k_{uv} & {}^1k_{u\theta} & {}^1k_{uw} \\ \hline {}^1k_{vu} & {}^1k_{vv} & {}^1k_{v\theta} & {}^1k_{vw} \\ \hline {}^1k_{\theta u} & {}^1k_{\theta v} & {}^1k_{\theta\theta} & {}^1k_{\theta w} \\ \hline {}^1k_{wu} & {}^1k_{wv} & {}^1k_{w\theta} & {}^1k_{ww} \\ \hline \end{array} \quad (5.38)$$

Kako podintegralne funkcije nisu prikladne za integraciju u zatvorenom vidu u radu se primenjuje postupak Gauss-ove numeričke integracije kombinovan sa integracijom po površini poprečnog preseka:

$$\int_0^1 {}^1\underline{B}_L^T \left(\int_A E_t^* \varphi(x,y) dx dy \right) {}^1\underline{B}_L dz = \sum_{i=1}^n w_i \phi(\xi_i) D_i \quad (5.39)$$

gde su

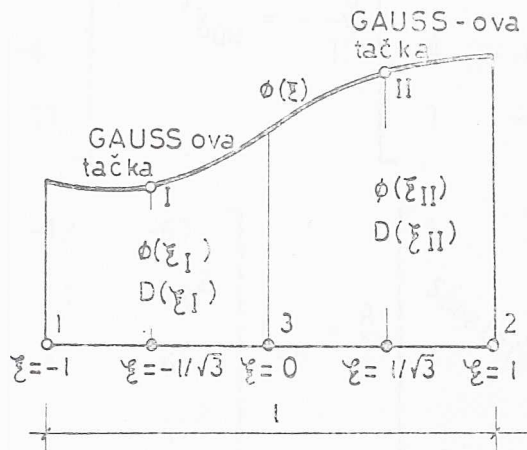
$$D_i = \int_A E_t^* \varphi(x,y) dx dy$$

w_i - koeficijent integracije

ξ_i - koordinate integracionih tačaka

n - ukupan broj integracionih tačaka

Za integraciju elementa se primenjuje integracija u dve tačke prikazana na Sl. 5.7.



Slika 5.7

Ako usvojimo da geometrijske karakteristike poprečnog preseka u sredini konačnog elementa predstavljaju prosečne vrednosti po dužini elementa onda se integracija matrice krutosti može izvesti na sledeći način:

$${}^1k_L = \int_A E_t^* \cdot f(x,y) dx dy \cdot \int_0^l \phi(z) \cdot dz \quad (5.40)$$

gde prvi integral zavisi samo od karakteristika poprečnog preseka a drugi je funkcija ose štapa.

Polazeći od gornje pretpostavke dovoljno je ubaciti nekompatibilan stepen slobode pomeranja u podužnom pravcu, tj. interpolacione funkcije predstaviti preko N_w^{II} . Datim uprošćenjem možemo vrlo lako eliminisati Δw_3 postupkom statičke kondenzacije na nivou elementa, tako da operišemo sa matricom krutosti reda (14,14). Elementi matrice krutosti (5.38) u tom slučaju izgledaju:

$${}^1k_{uu} = \frac{I_y}{1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{Simetr.} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad {}^1k_{uv} = \frac{I_{xy}}{1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{Simetr.} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$${}^1k_{v\theta} = -\frac{I_{xw}}{1^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ \text{Simetr.} & & 12 & 6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad {}^1k_{u\theta} = -\frac{I_{yw}}{1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{Simetr.} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 {}^1k_{vw} &= -\frac{S_x}{I^2} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 31 & -41 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -41 & 31 \end{bmatrix} & {}^1k_{uw} &= -\frac{S_y}{I^2} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 31 & -41 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -41 & 31 \end{bmatrix} \\
 {}^1k_{vv} &= \frac{I_x}{I^3} \begin{bmatrix} 12 & -61 & -12 & -61 \\ & 41^2 & 61 & 21^2 \\ \text{Simetrično} & & 12 & 61 \\ & & & 41^2 \end{bmatrix} & k_{ww} &= \frac{A}{I} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{Simetrično} & & 16/3 \end{bmatrix} \\
 {}^1k_{\theta\theta} &= \frac{I_\omega}{I^3} \begin{bmatrix} 12 & 61 & -12 & 61 \\ & 41^2 & -61 & 21^2 \\ \text{Simetrično} & & 12 & -61 \\ & & & 41^2 \end{bmatrix} + \frac{I_t}{30I} \begin{bmatrix} 36 & 31 & -36 & 31 \\ & 41^2 & -31 & -1^2 \\ \text{Simetrično} & & 36 & -31 \\ & & & 41^2 \end{bmatrix} \\
 {}^1k_{\theta w} &= \frac{S_\omega}{I^2} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 31 & -41 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -41 & 31 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

gde su

$$\begin{aligned}
 A &= \int_A E_t^* \cdot dA & S_\omega &= \int_A E_t^* \cdot \omega \cdot dA \\
 S_x &= \int_A E_t^* \cdot y \cdot dA & I_x &= \int_A E_t^* \cdot y \cdot \omega \cdot dA \\
 S_y &= \int_A E_t^* \cdot x \cdot dA & I_{y\omega} &= \int_A E_t^* \cdot x \cdot \omega \cdot dA \\
 I_{xy} &= \int_A E_t^* \cdot x \cdot y \cdot dA & I_\omega &= \int_A E_t^* \cdot \omega^2 \cdot dA \\
 I_x &= \int_A E_t^* \cdot y^2 \cdot dA & I_t &= \int_s G^* h \cdot ds \\
 I_y &= \int_A E_t^* \cdot x^2 \cdot dA
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

inkrementalne geometrijske karakteristike preseka koje se odredjuju postupkom

numeričke integracije.

5.7. LINEARNA MATRICA KRUTOSTI U ODNOSU NA PROMENLJIV SISTEM REFERENTNIH OSA

U ovom slučaju za svaki inkrement opterećenja određujemo novi sistem referentnih osa koje zadovoljavaju jednačine (5.19). Nepoznata inkrementalna pomeranja računaju se u odnosu na referentne ose koje se poklapaju sa glavnim osama inercije i osom smicanja u konfiguraciji 1D . Usvajajući prosečne geometrijske karakteristike štapa matrica krutosti štapa svodi se na:

$${}^1\underline{k}_L = \begin{bmatrix} {}^1k_{\xi\xi} & & & \\ & {}^1k_{\eta\eta} & & \\ & & {}^1k_{\theta\theta} & \\ & & & {}^1k_{z z} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

gde su blok matrice date eksplicitno:

$${}^1k_{\xi\xi} = \frac{I_\eta}{1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6I & -12 & 6I \\ & 4I^2 & -6I & 2I^2 \\ \text{Simetrično} & & 12 & -6I \\ & & & 4I^2 \end{bmatrix} \quad {}^1k_{\eta\eta} = \frac{I_\xi}{1^3} \begin{bmatrix} 12 & -6I & -12 & -6I \\ & 4I^2 & 6I & 2I^2 \\ \text{Simetrično} & & 12 & 6I \\ & & & 4I^2 \end{bmatrix}$$

$${}^1k_{\theta\theta} = \frac{I}{1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6I & -12 & 6I \\ & 4I^2 & -6I & 2I^2 \\ \text{Simetrično} & & 12 & -6I^2 \\ & & & 4I^2 \end{bmatrix} + \frac{I_t}{30I} \begin{bmatrix} 36 & 3I & -36 & 3I \\ & 4I^2 & -3I & -I^2 \\ \text{Simetrično} & & 36 & -3I \\ & & & 4I^2 \end{bmatrix}$$

$${}^1k_{z z} = \frac{A}{I} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{Simetr.} & & 16/3 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

gde su I_ξ , I_η , I_ω , I_t i A geometrijske karakteristike preseka koje se određuju postupkom numeričke integracije za svaki korak opterećenja.

Zbog pogodnosti pri kasnijim transformacijama, vektor osnovnih nepoznatih inkrementalnih pomeranja (5.20) usvajamo u sledećem obliku:

$${}^1\Delta\underline{q} = |\Delta u_1 \ \Delta v_1 \ \Delta w_1 \ -\Delta v_1' \ \Delta u_1' \ \Delta\theta_1 \ \Delta\theta_1' \ \Delta u_2 \ \Delta v_2 \ \Delta w_2 \ -\Delta v_2' \ \Delta u_2' \ \Delta\theta_2 \ \Delta\theta_2' \ \Delta w_3|^T \quad (5.45)$$

Linearna matrica krutosti (5.38) dobija se odgovarajućim premeštanjem vrste i kolona date matrice:

$${}^1\underline{k}_L = \begin{bmatrix} {}^1k_{11} & {}^1k_{13} \\ {}^1k_{31} & {}^1k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\Delta\underline{q} \\ {}^1\Delta w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\Delta Q \\ {}^1\Delta Q_3 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Nekompatibilan stepen slobode u podužnom pravcu ${}^1\Delta w_3$ može se eliminisati postupkom statičke kondenzacije na nivou elementa tako da dobijamo matricu krutosti reda (14,14). Uzimajući da je ${}^1\Delta Q_3=0$, matrica krutosti posle kondenzacije dobija sledeći oblik:

$${}^1\underline{k}_L = {}^1k_{11} - 1/{}^1k_{33} \cdot {}^1k_{13} \cdot {}^1k_{31} \quad (5.47)$$

5.8. GEOMETRIJSKA MATRICA KRUTOSTI

Ako se u inkrementalnom tenzoru deformacije (2.13) uključi i nelinearni deo:

$$\Delta n_z = \frac{1}{2} |(\Delta w_{,z})^2 + (\Delta u_{,z})^2 + (\Delta v_{,z})^2|$$

$$2\Delta n_{zy} = \Delta v_{,x} \cdot \Delta v_{,z} + \Delta w_{,x} \cdot \Delta w_{,z} \quad (5.48)$$

$$2\Delta n_{zx} = u_{,y} \cdot \Delta u_{,z} + \Delta w_{,y} \cdot \Delta w_{,z}$$

onda tangencijalna matrica krutosti pored linearne matrice krutosti mora da sadrži i geometrijsku matricu krutosti definisanu izrazom (5.2). Matrica ${}^1\underline{B}_{NL}$ može se napisati u sledećem vidu:

$$\begin{matrix}
 \mathbf{1} \\
 \mathbf{1}
 \end{matrix}
 \mathbf{B}_{-NL} =
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & \underline{N} & \\
 \hline
 -\underline{N}' & & \frac{\partial \omega_p}{\partial x} \underline{N}' & \\
 \hline
 & & -\underline{N} & \\
 \hline
 & -\underline{N}'_v & -\frac{\partial \omega_p}{\partial y} \underline{N}' & \\
 \hline
 \underline{N}' & & (y_p - y) \underline{N}' & \\
 \hline
 & \underline{N}'_v & (x - x_p) \underline{N}' & \\
 \hline
 -x \underline{N}'' & -y \underline{N}''_v & -\omega_p \underline{N}'' & \underline{N}'_w
 \end{array}
 \quad (5.49)$$

Matrica Cauchy-ovih napona za tankozidni štap sa otvorenim poprečnim presekom data je

$$\mathbf{1}^\sigma =
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & & \tau_{xz} & \\
 \hline
 & & & & & \tau_{xz} \\
 \hline
 & & & \tau_{yz} & & \\
 \hline
 & & & & & \tau_{yz} \\
 \hline
 & & \tau_{yz} & \sigma_z & & \\
 \hline
 \tau_{xz} & & & & \sigma_z & \\
 \hline
 & \tau_{xz} & & \tau_{yz} & & \sigma_z
 \end{array}
 \quad (5.50)$$

Množenjem datih matrica $\mathbf{1}^\sigma \mathbf{1}^\top_{-NL} \mathbf{1}^\sigma \mathbf{1}_{-NL}$ dobija se:

$(x^2 \bar{N}''^T \bar{N}'' + \bar{N}''^T \bar{N}'') \sigma_z$ $x (\bar{N}''^T \bar{N}' + \bar{N}'^T \bar{N}'') \tau_{xz}$	$xy \bar{N}''^T \bar{N}_V'' \sigma_z +$ $x \bar{N}''^T \bar{N}_V'' \tau_{yz} + y \bar{N}'^T \bar{N}_V'' \tau_{xz}$	$i x \omega \bar{N}''^T \bar{N}'' - (y - y_p) \bar{N}'^T \bar{N}' \sigma_z +$ $+ \omega \bar{N}'^T \bar{N}'' \tau_{xz} - \bar{N}'^T \bar{N}'' \tau_{yz} +$ $+ \left(\frac{\partial \omega p}{\partial x} x \tau_{xz} + \frac{\partial \omega p}{\partial y} y \tau_{yz} \right) \bar{N}'^T \bar{N}'$	$-x \bar{N}''^T \bar{N}_W'' - \bar{N}'^T \bar{N}_W'' \tau_{xz}$
$(y^2 \bar{N}''^T \bar{N}_V'' + \bar{N}_V''^T \bar{N}'') \sigma_z$ $+ y (\bar{N}_V''^T \bar{N}' + \bar{N}'^T \bar{N}_V'') \tau_{yz}$	$(y \omega \bar{N}''^T \bar{N}'' + (x - x_p) \bar{N}'^T \bar{N}' \sigma_z +$ $+ \omega \bar{N}'^T \bar{N}_V'' \tau_{yz} + \bar{N}'^T \bar{N}_V'' \tau_{xz} +$ $+ \left(\frac{\partial \omega p}{\partial x} y \tau_{xz} + \frac{\partial \omega p}{\partial y} y \tau_{yz} \right) \bar{N}''^T \bar{N}'$	$ y \omega \bar{N}''^T \bar{N}'' + (x - x_p) \bar{N}'^T \bar{N}' \sigma_z +$ $+ \omega \bar{N}'^T \bar{N}_V'' \tau_{yz} + \bar{N}'^T \bar{N}_V'' \tau_{xz} +$ $+ \left(\frac{\partial \omega p}{\partial x} y \tau_{xz} + \frac{\partial \omega p}{\partial y} y \tau_{yz} \right) \bar{N}''^T \bar{N}'$	$-y \bar{N}''^T \bar{N}_V'' \sigma_z - \bar{N}'^T \bar{N}_V'' \tau_{yz}$
<p>S I M E T R I Č N O</p>		$\{ \omega \bar{N}'^T \bar{N}'' + (y - y_p)^2 + (x - x_p)^2 \bar{N}'^T \bar{N}' \} \sigma_z$ $+ (y - y_p) \tau_{yz} + (x - x_p) \tau_{xz} (\bar{N}'^T \bar{N}' + \bar{N}'^T \bar{N}') +$ $\left(\omega p \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \omega p \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} \right) (\bar{N}''^T \bar{N}' + \bar{N}'^T \bar{N}'')$	$-\omega \bar{N}''^T \bar{N}_W'' \sigma_z -$ $- \left(\frac{\partial \omega p}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial \omega p}{\partial y} \tau_{yz} \right) \bar{N}'^T \bar{N}_W''$
			$\bar{N}_W''^T \bar{N}_W'' \sigma_z$

$$1_{NL}^T \sigma_1 B_{NL} =$$

(5.51)

$$k_4 = \frac{1}{30I} \begin{bmatrix} 36 & 31 & -36 & 31 \\ & 4I^2 & -31 & -I^2 \\ \text{Simetr.} & & 36 & -31 \\ & & & 4I^2 \end{bmatrix} \quad k_5 = \frac{1}{30I} \begin{bmatrix} 36 & -31 & -36 & -31 \\ & 4I^2 & 31 & -I^2 \\ \text{Simetr.} & & 36 & 31 \\ & & & 4I^2 \end{bmatrix}$$

$$k_6 = \frac{1}{30I} \begin{bmatrix} 36 & 31 & -36 & 31 \\ -31 & -4I^2 & 31 & I^2 \\ -36 & -31 & 36 & -31 \\ -31 & I^2 & 31 & -4I^2 \end{bmatrix} \quad k_7 = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -33 & 31 \\ 6I & I^2 & -6I & 0 \\ -3 & 0 & 33 & -31 \\ -31 & -I^2 & 31 & 3I^2 \end{bmatrix}$$

$$k_8 = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -33 & 31 \\ -6I & I^2 & 6I & 0 \\ -3 & 0 & 33 & -31 \\ 31 & I^2 & -3I^2 & -3I^2 \end{bmatrix} \quad k_9 = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 18 & 31 & -18 & 0 \\ & I^2 & -31 & -\frac{1}{2}I \\ \text{Simetr.} & & 18 & 0 \\ & & & 3I^2 \end{bmatrix}$$

$$I_p = I_x + I_y + (x_p^2 + y_p^2)A$$

$$I_{px} = \int_A E_t^* (x^2 + y^2) x dA - 2x_p I_y$$

$$I_x = \int_A E_t^* y^2 dA$$

$$I_{py} = \int_A E_t^* (x^2 + y^2) y dA - 2y_p I_x$$

(5.55)

$$A = \int_A E_t^* dA$$

$$I_{p\omega} = \int_A E_t^* (x^2 + y^2) \omega_p dA$$

geometrijske karakteristike koje se odredjuju postupkom numeričke integracije.

Nelinearna matrica krutosti (5.54) i izrazi (5.55) važe za sistem referentnih osa koje u svakom koraku opterećenja zadovoljavaju uslove ortogonalnosti (5.19). U slučaju fiksnih referentnih osa umesto izraza (5.53) imamo:

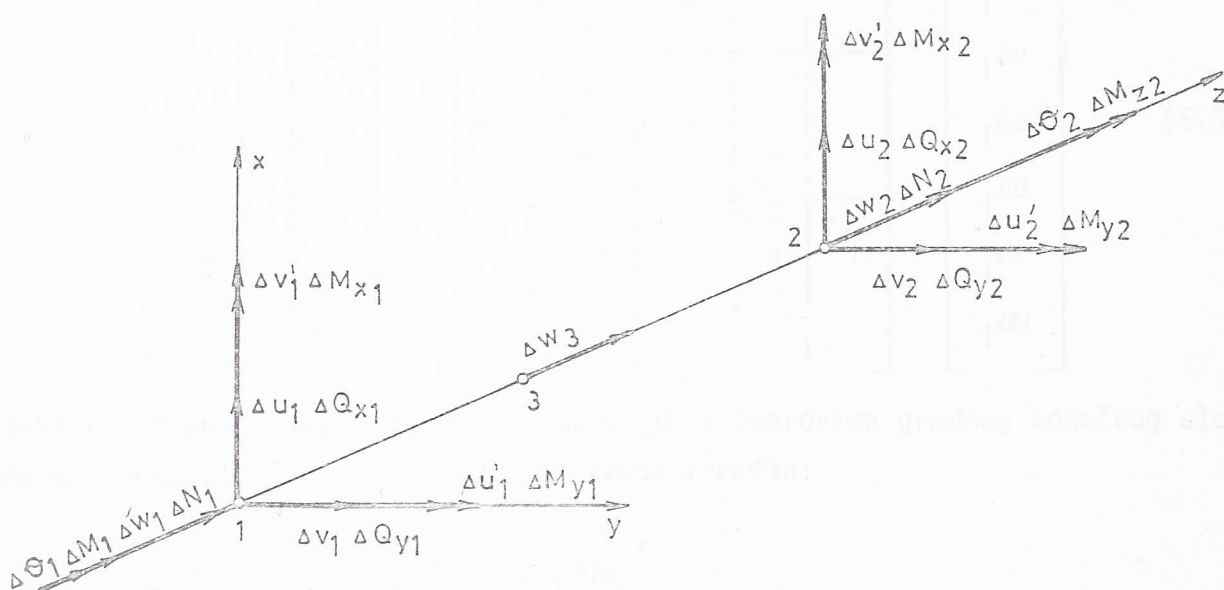
$$\sigma_z = (1 \ y-x-\omega_p) \begin{bmatrix} A & S_y & -S_x & -S_\omega \\ S_y & I_x & -I_{xy} & -I_{\omega y} \\ -S_x & -I_{xy} & I_y & I_{\omega x} \\ S_\omega & I_{\omega y} & -I_{\omega x} & -I_\omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ M_{p\omega} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

i do geometrijske matrice dolazimo iz (5.52) numeričkom integracijom.

5.10. KONAČNI ELEMENAT PUNOG POPREČNOG PRESEKA

5.10.1. Osnovne pretpostavke o deformaciji štapa

Da bi se omogućila analiza prostornih linijskih armirano-betonskih nosača koji se sastoje iz štapova punog i tankozidnog otvorenog poprečnog preseka u ovom poglavlju biće definisan i pravolinijski prostorni gredni element sa pravom osom konstantnog proizvoljnog punog poprečnog preseka, Sl. 5.8.



Slika 5.8

Za usvojeni gredni element uvode se sledeće pretpostavke:

- zanemaruje se efekat smičućih napona na deformaciju,
- poprečni presek i dužina štapa se ne menjaju tokom deformacije,
- gornje pretpostavke važe i za linearno i nelinearno ponašanje materijala.

Polazeći od činjenice da se tehnička teorija tankozidnih nosača otvorenog poprečnog preseka zasniva na pretpostavkama o kinematici deformacije štapa koje pojednostavljaju problem, tako da se čitava teorija može shvatiti kao proširenje teorije klasičnog štapa, formulacija grednog elementa punog poprečnog preseka biće data samo u kratkim crtama.

5.11. LINEARNA MATRICA KRUTOSTI GREDNOG KONAČNOG
ELEMENTA U ODNOSU NA FIKSNE OSE

(5.60)

Polazeći od pretpostavke da je poprečni presek štapa nedeformabilan sa slobodnim vitoperenjem upravno na svoju ravan, izrazi za inkrementalna pomeranja proizvoljne tačke poprečnog preseka mogu se napisati u funkciji generalisanih inkrementalnih pomeranja ose štapa na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} {}_1\Delta u_* \\ {}_1\Delta v_* \\ {}_1\Delta w_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & -y & & & \\ & & & & & & & \\ & & & 1 & & x & & \\ & & -x & & -y & & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1\Delta u \\ {}_1\Delta u' \\ {}_1\Delta v \\ {}_1\Delta v' \\ {}_1\Delta\theta \\ {}_1\Delta\theta' \\ {}_1\Delta w \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Vektor osnovnih inkrementalnih nepoznatih u čvorovima grednog konačnog elementa prema Sl. 5.8 obeležavamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} {}_1\Delta \underline{q}_u &= |{}_1\Delta u_1 \ {}_1\Delta u_2 \ {}_1\Delta u_1' \ {}_1\Delta u_2'|^T \\ {}_1\Delta \underline{q}_v &= |{}_1\Delta v_1 \ {}_1\Delta v_2 \ -{}_1\Delta v_1' \ -{}_1\Delta v_2'|^T \\ {}_1\Delta \underline{q}_\theta &= |{}_1\Delta\theta_1 \ {}_1\Delta\theta_2|^T \\ {}_1\Delta \underline{q}_w &= |{}_1\Delta w_1 \ {}_1\Delta w_2 \ {}_1\Delta w_3|^T \end{aligned} \quad (5.58)$$

Inkremeinte pomeranja i obrtanja u elementu prikazujemo u zavisnosti od nepoznatih parametara pomeranja u čvorovima pomoću interpolacionih funkcija:

$$\begin{aligned} {}_1\Delta u &= {}_1N_u \ {}_1\Delta \underline{q}_u \\ {}_1\Delta v &= {}_1N_v \ {}_1\Delta \underline{q}_v \\ {}_1\Delta\theta &= {}_1N_\theta \ {}_1\Delta \underline{q}_\theta \\ {}_1\Delta w &= {}_1N_w \ {}_1\Delta \underline{q}_w \end{aligned} \quad (5.59)$$

gde su

$$\begin{aligned} {}_1N_u &= |\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4| \\ {}_1N_v &= |\varphi_1 \ \varphi_2 \ -\varphi_3 \ -\varphi_4| \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned}
 {}_1N_{-\theta} &= |1-\zeta, \zeta| & (5.60) \\
 {}_1N_{-w} &= |1-\zeta, \zeta, 4\zeta(1-\zeta)| & \zeta = \frac{z}{l}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 1 + 2\zeta^3 - 3\zeta^2 \\
 \varphi_2 &= 3\zeta^2 - 2\zeta^3 \\
 \varphi_3 &= 1(\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3) \\
 \varphi_4 &= -1(\zeta^2 - \zeta^3)
 \end{aligned}
 \tag{5.59}$$

Kao što se vidi usvojene su iste interpolacione funkcije kao i kod tankozidnog konačnog elementa.

Zamenom izraza (5.58) u (5.56) dobija se veza izmedju inkrementalnih pomeranja tačaka proizvoljnog preseka i osnovnih nepoznatih parametara pomeranja:

$$\begin{bmatrix} {}_1\Delta u_* \\ {}_1\Delta v_* \\ {}_1\Delta w_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ {}_1N_{-u} & & -y_1N_{-\theta} & \\ \hline & {}_1N_{-v} & x_1N_{-\theta} & \\ \hline -x_1N_{-u} & -y_1N_{-v} & \phi_1N_{-\theta} & {}_1N_{-w} \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1\Delta q_{-u} \\ {}_1\Delta q_{-v} \\ {}_1\Delta q_{-\theta} \\ {}_1\Delta q_{-w} \end{bmatrix} = {}_1N_{-} \cdot {}_1\Delta q \tag{5.61}$$

gde su:

$$\begin{aligned}
 {}_1N_{-u} &= |\varphi_{1,\zeta} \quad \varphi_{2,\zeta} \quad \varphi_{3,\zeta} \quad \varphi_{4,\zeta}| \\
 {}_1N_{-v} &= |\varphi_{1,\zeta} \quad \varphi_{2,\zeta} \quad \varphi_{3,\zeta} \quad \varphi_{4,\zeta}| \\
 {}_1N_{-\theta} &= \frac{1}{l} \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{5.62}$$

Polazeći od pretpostavke da se rastojanja izmedju poprečnih preseka ne menjaju pri deformaciji, veza izmedju dilatacije u podužnom pravcu štapa i komponenti pomeranja, u okviru klasične teorije štapa, data je izrazom:

$${}_1\Delta e_{zz} = {}_1\Delta w_{,z} = {}_1\Delta w' - y_1\Delta v'' - x_1\Delta u'' \tag{5.63}$$

gde je $\Delta w'$ podužna dilatacija u pravcu referentne ose a ${}_1\Delta v''$ i ${}_1\Delta u''$ promene nagiba tangente u odnosu na referentne ose x i y. Zamenom izraza (5.62) u (5.60) dobija se veza izmedju dilatacije u podužnom pravcu štapa i nepoznatih inkrementalnih parametara pomeranja u čvorovima datog štapa:

$${}_1\Delta e = {}_1B_{-L} {}_1\Delta q \tag{5.64}$$

gde je

$${}^1\underline{B}_L = \begin{bmatrix} -x_1 \underline{N}_U'' & -y_1 \underline{N}_V'' & 0 & {}^1\underline{N}_W' \\ & & \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) {}^1\underline{N}_\theta' & \\ & & \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + x \right) {}^1\underline{N}_\theta' & \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

$${}^1\underline{N}_U'' = |\varphi_{1,\zeta\zeta} \quad \varphi_{2,\zeta\zeta} \quad \varphi_{3,\zeta\zeta} \quad \varphi_{4,\zeta\zeta}|$$

$${}^1\underline{N}_V'' = |\varphi_{1,\zeta\zeta} \quad \varphi_{2,\zeta\zeta} \quad \varphi_{3,\zeta\zeta} \quad \varphi_{4,\zeta\zeta}|$$

$${}^1\underline{N}_W' = \frac{1}{T} |-1, \quad 1, \quad 4(1-2\zeta)|$$

(5.66)

Linearna matrica krutosti dobija se iz sledećeg izraza:

$${}^1\underline{k}_L = \int_V {}^1\underline{B}_L^T \underline{D} {}^1\underline{B}_L dV \quad (5.67)$$

gde je

$${}^1\underline{B}_L^T \underline{D} {}^1\underline{B}_L = \begin{bmatrix} E_t^* x^2 \underline{N}_U''^T \underline{N}_U'' & E_t^* x y \underline{N}_U''^T \underline{N}_V'' & -E_t^* x \underline{N}_U''^T \underline{N}_W' & \\ & E_t^* y^2 \underline{N}_V''^T \underline{N}_V'' & -E_t^* y \underline{N}_V''^T \underline{N}_W' & \\ & & G \alpha \underline{N}_\theta'^T \underline{N}_\theta' & \\ & & & E_t^* \underline{N}_W'^T \underline{N}_W' \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Posle integracije dobijamo:

$${}^1\underline{k}_L = \begin{bmatrix} {}^1k_{un} & {}^1k_{uv} & 0 & {}^1k_{uw} \\ {}^1k_{vu} & {}^1k_{vv} & 0 & {}^1k_{vw} \\ 0 & 0 & {}^1k_{\theta\theta} & 0 \\ {}^1k_{wu} & {}^1k_{wv} & 0 & {}^1k_{ww} \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

U opštem slučaju matrica krutosti se može dobiti postupkom Gauss-ove numeričke integracije. Ako pretpostavimo da geometrijske karakteristike u sredini konačnog elementa predstavljaju prosečne vrednosti po dužini elementa onda se integracija može izvesti na način dat izrazom (5.40). Ako vektor osnovnih nepoznatih parametara pomeranja čvorova napišemo u sledećem vidu:

$$\underline{\Delta q} = |\Delta w_1 \quad \Delta v_1 \quad \Delta u_1 \quad \Delta \theta_1 \quad \Delta v_1' \quad \Delta u_1' \quad \Delta w_2 \quad \Delta v_2 \quad \Delta u_2 \quad \Delta \theta_2 \quad \Delta v_2' \quad \Delta u_2' \quad \Delta w_3|^T \quad (5.70)$$

onda se matrica krutosti može napisati eksplicitno u sledećem vidu:

(5.71)

Δw_1	Δv_1	Δu_1	$\Delta \theta_1$	$\Delta v_1'$	$\Delta u_1'$	Δw_2	Δv_2	Δu_2	$\Delta \theta_2$	$\Delta v_2'$	$\Delta u_2'$	Δw_3
$\frac{A}{l}$				$-\frac{S_y}{l}$	$\frac{S_x}{l}$	$-\frac{A}{l}$						
	$\frac{12I_x}{l^3}$	$\frac{12I_{xy}}{l^3}$		$-\frac{6I_{xy}}{l^2}$	$\frac{6I_x}{l^2}$		$-\frac{12I_x}{l^3}$	$-\frac{12I_{xy}}{l^3}$		$-\frac{6I_{xy}}{l^2}$	$\frac{6I_x}{l^2}$	$-\frac{8S_x}{l^2}$
		$\frac{12I_y}{l^3}$		$-\frac{6I_y}{l^2}$	$\frac{6I_{xy}}{l^2}$		$-\frac{12I_{xy}}{l^3}$	$-\frac{12I_x}{l^3}$		$-\frac{6I_y}{l^2}$	$\frac{6I_{xy}}{l^2}$	$-\frac{8S_y}{l^2}$
			$\frac{GJ}{l}$						$-\frac{GJ}{l}$			$\frac{4S_y}{l}$
				$\frac{4I_y}{l}$	$-\frac{4I_{xy}}{l}$		$\frac{6I_{xy}}{l^2}$	$\frac{6I_y}{l^2}$		$-\frac{6I_{xy}}{l^2}$	$\frac{2I_{xy}}{l}$	
					$\frac{4I_x}{l}$		$-\frac{6I_x}{l^2}$	$-\frac{6I_{xy}}{l^2}$		$-\frac{6I_x}{l^2}$	$\frac{2I_x}{l}$	$-\frac{4S_x}{l}$
						$\frac{A}{l}$				$\frac{S_x}{l}$		
							$\frac{12I_x}{l^3}$	$\frac{12I_{xy}}{l^3}$		$\frac{6I_{xy}}{l^2}$	$\frac{6I_x}{l^2}$	$-\frac{8S_x}{l^2}$
								$\frac{12I_y}{l^3}$		$\frac{6I_y}{l^2}$	$\frac{6I_{xy}}{l^2}$	$-\frac{8S_y}{l^2}$
									$\frac{GJ}{l}$			$\frac{4S_y}{l}$
										$-\frac{4I_{xy}}{l}$		
										$\frac{4I_x}{l}$		$-\frac{4S_x}{l}$
												$\frac{16}{3l} A$

(13,13)

 1_{k-L}

S I M E T R I Č N O

gde su

$$\begin{aligned}
 A &= \int_A E_t^* dA & I_x &= \int_A E_t^* y^2 dA \\
 S_x &= \int_A E_t^* y dA & I_y &= \int_A E_t^* x^2 dA \\
 S_y &= \int_A E_t^* x dA & & \\
 I_{xy} &= \int_A E_t^* x \cdot y \cdot dA & &
 \end{aligned}
 \tag{5.72}$$

geometrijske karakteristike preseka koje se odredjuju postupkom numeričke integracije.

Nekompatibilan stepen slobode Δw_3 eliminiše se postupkom statičke kondenzacije na nivou elementa.

Do geometrijske matrice se dolazi na sličan način kao i kod tankozidnog štapa.

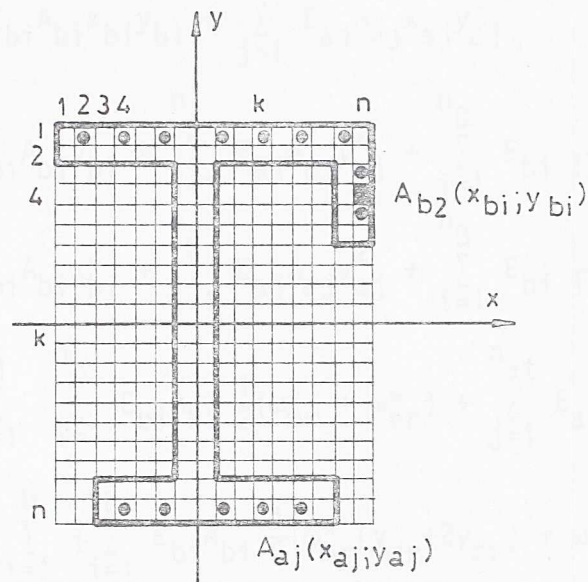
5.12. GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE POPREČNOG PRESEKA

Da bi se sračunale geometrijske karakteristike (5.42), (5.55) i (5.72) treba izvršiti numeričku integraciju diskretizovanog armirano-betonskog poprečnog preseka. Diskretizacija se vrši konačnim brojem jednodimenzionalnih elemenata površine A_{bi} a dužine jednake dužini usvojenog konačnog elementa (Sl. 5.9). Ukupna površina ovih elemenata ekvivalentna je ukupnoj površini poprečnog preseka. Podrazumeva se kompatibilnost svih elemenata u podužnom pravcu.

Položaj svakog elementa odredjen je u lokalnom sistemu referentnih osa koordinatama geometrijskog centra x_{bi} , y_{bi} . Radi pojednostavljenja numeričkog postupka u ovom radu je usvojen prav štapa sa tankim zidovima kod koga srednja linija profila ima oblik otvorene poligonalne linije koja se može upisati u mrežu dimenzija $b \times h$. Na taj način imamo štapa čiji se poprečni presek formira od niza uzanih pravougaonika pri čemu se podrazumeva da je betonski deo preseka prožet armaturom površine A_{ai} . Položaj armature definiše se koordinatama u lokalnom koordinatnom sistemu x_{aj} , y_{aj} . Sl. 5.9.

Da bi se opisao poprečni presek u unapred zadatoj pravougaonoj mreži definiše se pomoćna matrica C_{ij} na sledeći način:

- prvi član u svakoj vrsti matrice C_{ij} predstavlja red u pravougaoniku u kome se nalazi dati elementarni deo betona,



Slika 5.9

- drugi član u svakoj vrsti predstavlja kolonu gde započinje prvi elemenat datog poprečnog preseka,
- treći član u svakoj vrsti predstavlja kolonu u kojoj se završava betonski poprečni presek,
- četvrti član u svakoj vrsti predstavlja elemenat betona koji se nalazi ili ne nalazi u utegnutom preseku.

Za unapred poznatu matricu C_{ij} geometrijske karakteristike poprečnog preseka mogu se sračunati na sledeći način:

$$I = \int_A F(x,y) dA = \sum_{i=1}^{n_A} C_{i3} \sum_{j=C_{i2}} F(x_i, y_j) \Delta x_i \cdot y_j \quad (5.73)$$

gde je n_A broj vrsta u matrici C_{ij} a $k=C_{i,1}$ razmatrana vrsta.

Ako se površina svakog betonskog elementa diskretizovanog preseka obeleži sa A_{bi} , pozicija definiše koordinatama x_{bi} , y_{bi} u odnosu na sistem referentnih osa i tangenti modul obeleži sa E_{bi} , a površina armature sa A_{aj} , pozicija sa x_{aj} i y_{aj} i tangenti modul sa E_{aj} onda geometrijske karakteristike postaju:

$$A = \int_A E_t^* dA = \sum_{i=1}^{n_B} E_{bi} A_{bi} + \sum_{j=1}^{n_a} E_{aj} A_{aj}$$

$$S_x = \int_A E_t^* y dA = \sum_{i=1}^{n_B} E_{bi} A_{bi} y_{bi} + \sum_{j=1}^{n_a} E_{aj} A_{aj} y_{aj}$$

$$\begin{aligned}
S_y &= \int_A E_t^* x dA = \sum_{i=1}^{n_B} E_{bi} A_{bi} x_{bi} + \sum_{j=1}^{n_a} E_{aj} A_{aj} x_{aj} \\
I_{xy} &= \int_A E_t^* xy dA = \sum_{i=1}^{n_B} E_{bi} A_{bi} x_{bi} y_{bi} + \sum_{j=1}^{n_a} E_{aj} A_{aj} x_{aj} y_{aj} \\
I_x &= \int_A E_t^* y^2 dA = \sum_{i=1}^{n_B} E_{bi} A_{bi} y_{bi}^2 + \sum_{j=1}^{n_a} E_{aj} A_{aj} y_{aj}^2 + \sum_{i=1}^{n_B} E_{bi} \frac{1}{12} \Delta x_{bi} \Delta y_{bi}^3 \\
I_y &= \int_A E_t^* x^2 dA = \sum_{i=1}^{n_B} E_{bi} A_{bi} x_{bi}^2 + \sum_{j=1}^{n_a} E_{aj} A_{aj} x_{aj}^2 + \sum_{i=1}^{n_B} E_{bi} \frac{1}{12} \Delta x_{bi}^3 \Delta y_{bi} \\
S_\omega &= \int_A E_t^* \omega^* dA = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^M \left| \sum_{i=1}^{n_{bt}} E_{bi} A_{bi} \frac{1}{2} (\omega_{mr}^* + \omega_{nr}^*) \right| + \sum_{j=1}^{n_{at}} E_{aj} A_{aj} \frac{1}{2} (\omega_{mr}^* + \omega_{nr}^*) \\
I_{y\omega} &= \int_A E_t^* y \omega^* dA = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^M \left\{ \sum_{i=1}^{n_{bt}} E_{bi} A_{bi} \frac{1}{6} |\omega_{mr}^* (y_{mr} + 2y_{nr}) + \omega_{nr}^* (y_{nr} + 2y_{mr})| \right. + \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{n_{at}} E_{aj} A_{aj} \frac{1}{6} |\omega_{mr}^* (y_{mr} + 2y_{nr}) + \omega_{nr}^* (y_{nr} + 2y_{mr})| \right\} \quad (5.74) \\
I_{x\omega} &= \int_A E_t^* x \omega^* dA = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^M \left\{ \sum_{i=1}^{n_{bt}} E_{bi} A_{bi} \frac{1}{6} |\omega_{mr}^* (x_{mr} + 2x_{nr}) + \omega_{nr}^* (x_{nr} + 2x_{mr})| \right. + \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{n_{at}} E_{aj} A_{aj} \frac{1}{6} |\omega_{mr}^* (x_{mr} + 2x_{nr}) + \omega_{nr}^* (x_{nr} + 2x_{mr})| \right\} \\
I_\omega &= \int_A E_t^* \omega^{*2} dA = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^M \sum_{i=1}^{n_{bt}} E_{bi} A_{bi} (\omega_{mr}^2 + \omega_{mr} \omega_{nr} + \omega_{nr}^2) + \sum_{j=1}^{n_{at}} E_{aj} A_{aj} (\omega_{mr}^2 + \\
&\quad + \omega_{mr} \omega_{nr} + \omega_{nr}^2)
\end{aligned}$$

gde je

N - ukupan broj poligonalnih segmenata tankozidnog poprečnog preseka,

M - ukupan broj podela duž jednog segmenta Sl. 5.10,

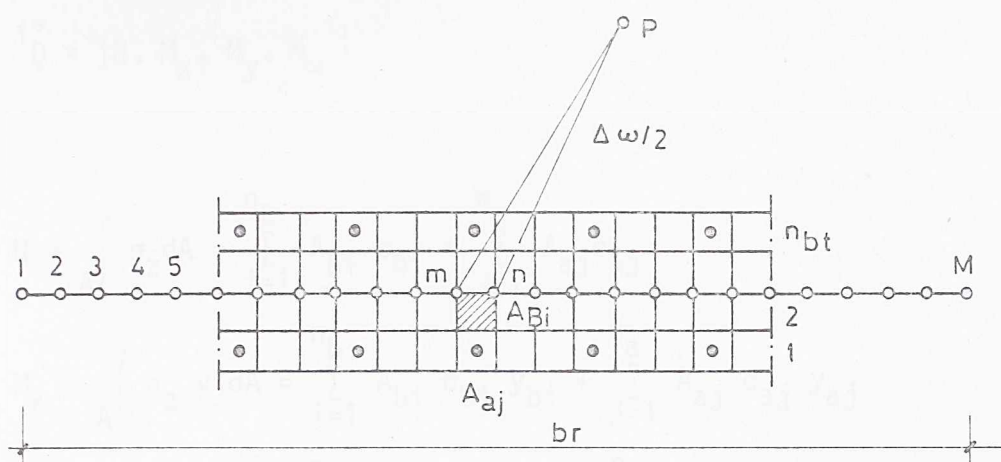
n_{bt} - ukupan broj betonskih elemenata po debljini elementa,

n_{at} - ukupan broj elemenata armature unutar jedne podele segmenta,

$\omega_{mr}^*, \omega_{nr}^*$ - sektorske koordinate u odnosu na tačke m i n ,

x_{mr}, x_{nr} - koordinate tačaka m i n u odnosu na sistem referentnih osa,

y_{mr}, y_{nr}



Slika 5.10.

5.13. VEKTOR UNUTRAŠNJIH ČVORNIH SILA

Vektor unutrašnjih čvornih sila ${}^1\underline{Q}$ izražen preko unutrašnjih napona elementa ima oblik:

$${}^1\underline{Q} = \int_V {}^1\underline{B}_L^T {}^1\hat{\underline{\sigma}} {}^1dV \quad (5.75)$$

Linearnu matricu transformacije ${}^1\underline{B}_L$ možemo definisati na sledeći način:

$${}^1\underline{B}_L = {}^1\underline{B}_0 f(x, y) \quad (5.76)$$

gde je matrica ${}^1\underline{B}_0$ funkcija koordinate u podužnom pravcu štapa. Ako pretpostavimo da je normalni napon, definisan na površini Δx_i , Δy_i , konstantan u nekom preseku štapa, onda vektor unutrašnjih sila jednog elementa možemo sračunati na sledeći način:

$${}^1\underline{Q} = \int_0^l {}^1\underline{B}_0^T {}^1\tilde{\underline{Q}} dz \quad (5.77)$$

gde je

$${}^1\tilde{\underline{Q}} = \int_A \sigma(x, y) f(x, y) dA \quad (5.78)$$

Izraz (5.78) možemo shvatiti kao presečne sile u proizvoljnom preseku štapa:

$$\underline{1}\tilde{Q} = |N, M_x, M_y, M_\omega| \quad (5.79)$$

gde su

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_z dA = \sum_{i=1}^{n_b} A_{bi} \sigma_{bi} + \sum_{j=1}^{n_a} A_{aj} \sigma_{aj} \\ M_x &= \int_A \sigma_z y dA = \sum_{i=1}^{n_b} A_{bi} \sigma_{bi} y_{bi} + \sum_{j=1}^{n_a} A_{aj} \sigma_{aj} y_{aj} \\ M_y &= \int_A \sigma_z x dA = \sum_{i=1}^{n_b} A_{bi} \sigma_{bi} x_{bi} + \sum_{j=1}^{n_a} A_{aj} \sigma_{aj} x_{aj} \\ M_\omega &= \int_A \sigma_z \omega^* dA = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^M \left| \sum_{i=1}^{n_{bt}} A_{bi} \sigma_{bi} \frac{1}{2} (\omega_{m,r} + \omega_{n,r}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n_{at}} A_{aj} \sigma_{aj} \frac{1}{2} (\omega_{m,r} + \omega_{n,r}) \right| \end{aligned} \quad (5.80)$$

Za sračunate vrednosti (5.80) vektor čvornih sila (5.78) određuje se numeričkom integracijom korišćenjem Gauss-ovog postupka u dve tačke datog elementa štapa.

5.14. ČVORNE SILE USLED DEFORMACIJE TEČENJA I SKUPLJANJA

Ekvivalentan vektor čvornih sila usled deformacije tečenja i skupljanja može se shvatiti kao vektor čvornih sila usled početne deformacije i može se sračunati kao:

$$\underline{\Delta Q}_0 = \int_V \underline{1} \underline{B}^T E_t^* \Delta \underline{\varepsilon}_0 dV \quad (5.81)$$

u kojoj su E_t^* i $\Delta \underline{\varepsilon}_0$ funkcije koordinata x, y i z . Ako pretpostavimo da je tangencijalni modul E_t^* konstantan u svakom deliću $\Delta x_i, \Delta y_i$ proizvoljnog poprečnog preseka, onda vektor čvornih sila možemo napisati kao:

$$\underline{\Delta Q}_0 = \int_0^1 \underline{1} \underline{B}_0^T \underline{\Delta Q}_0 dz \quad (5.82)$$

gde je

$$\underline{\Delta Q}_0 = |N_0, M_x, M_{y0}, M_{\omega 0}| \quad (5.83)$$

Vrednosti presečnih sila usled početnih deformacija su sledeće:

$$N_o = \int_A E_t^* \Delta \epsilon_o dA = \sum_{i=1}^{n_B} A_{bi} E_{bi} \Delta \epsilon_{bio}$$

$$M_{x0} = \int_A E_t^* y \Delta \epsilon_o dA = \sum_{i=1}^{n_B} A_{bi} E_{bi} y_{bi} \Delta \epsilon_{bio}$$

(5.84a,b,c,d)

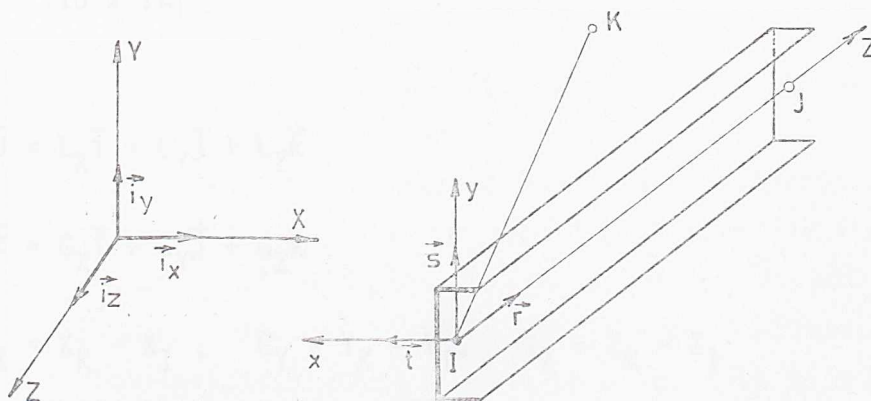
$$M_{y0} = \int_A E_t^* x \Delta \epsilon_o dA = \sum_{i=1}^{n_B} A_{bi} E_{bi} x_{bi} \Delta \epsilon_{bio}$$

$$M_{\omega 0} = \int_A E_t^* \omega^* \Delta \epsilon_o dA = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^M \left| \sum_{i=1}^{n_{bt}} A_{bi} E_{bi} \Delta \epsilon_{bio} \frac{1}{2} (\omega_{m,r} + \omega_{n,r}) \right|$$

5.15. MATRICA TRANSFORMACIJE

5.15.1. Veza lokalnih i globalnih osa za početnu konfiguraciju

Glavne ose inercije poprečnog preseka tankozidnog štapa određene su globalnim koordinatama tri tačke: dve čvorne tačke I i J i proizvoljne tačke K koja određuje položaj lokalne ose y. Sl. 5.11.



Slika 5.11

Veza između jediničnih vektora lokalnih osa x, y, z i globalnih osa X, Y, Z može se napisati u matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{s} \\ \vec{t} \end{bmatrix} = {}^0 \underline{t} \begin{bmatrix} \vec{i}_X \\ \vec{i}_Y \\ \vec{i}_Z \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

gde je sa ${}^0 \underline{t}$ obeležena matrica transformacije

$${}^0 \underline{t} = \begin{bmatrix} r_x & r_y & r_z \\ t_x & t_y & t_z \\ s_x & s_y & s_z \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

Projekcije jediničnog vektora \vec{r} na globalne ose su:

$$\vec{r} = \frac{\vec{IJ}}{|\vec{IJ}|} = r_x \vec{i}_x + r_y \vec{i}_y + r_z \vec{i}_z \quad (5.87)$$

$$r_x = \frac{L_X}{l}, \quad r_y = \frac{L_Y}{l}, \quad r_z = \frac{L_Z}{l} \quad (5.88a, b, c)$$

gde su

$$L_X = X_J - X_I, \quad L_Y = Y_J - Y_I, \quad L_Z = Z_J - Z_I \quad (5.89a, b, c)$$

$$l = \sqrt{L_X^2 + L_Y^2 + L_Z^2} \quad (5.90)$$

Jedinični vektor \vec{t} odredjen je vektorskim proizvodom:

$$\vec{t} = \frac{\vec{IJ} \times \vec{IK}}{|\vec{IJ} \times \vec{IK}|} = t_x \vec{i} + t_y \vec{j} + t_z \vec{k} \quad (5.91)$$

gde su

$$\vec{IJ} = L_X \vec{i} + L_Y \vec{j} + L_Z \vec{k} \quad (5.92)$$

$$\vec{IK} = G_X \vec{i} + G_Y \vec{j} + G_Z \vec{k} \quad (5.93)$$

$$G_X = X_K - X_I, \quad G_Y = Y_K - Y_I, \quad G_Z = Z_K - Z_I \quad (5.94a, b, c)$$

Ako vektorski proizvod u globalnim koordinatama predstavimo na sledeći način:

$$\vec{IJ} \times \vec{IK} = (L_Y G_Z - L_Z G_Y) \vec{i} + (L_Z G_X - L_X G_Z) \vec{j} + (L_X G_Y - L_Y G_X) \vec{k} \quad (5.95)$$

a modul

$$A = |\vec{IJ} \times \vec{IK}| = \sqrt{(L_Y G_Z - L_Z G_Y)^2 + (L_Z G_X - L_X G_Z)^2 + (L_X G_Y - L_Y G_X)^2} \quad (5.96)$$

onda za projekcije jediničnog vektora dobijamo:

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{L_Y G_Z - L_Z G_Y}{A} \\ t_y &= \frac{L_Z G_X - L_X G_Z}{A} \\ t_z &= \frac{L_X G_Y - L_Y G_X}{A} \end{aligned} \quad (5.97a,b,c)$$

Jedinični vektor s jednak je vektorskom proizvodu vektora:

$$\vec{s} = \vec{r} \times \vec{t} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ t_x & t_y & t_z \end{bmatrix} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k} \quad (5.98)$$

gde su

$$\begin{aligned} s_x &= r_y t_z - r_z t_y \\ s_y &= r_z t_x - r_x t_z \\ s_z &= r_x t_y - r_y t_x \end{aligned} \quad (5.99a,b,c)$$

5.15.2. Matrica transformacije za slučaj malih inkrementalnih rotacija

Inkrementalni postupak zahteva nalaženje matrice transformacije za svaki sledeći korak opterećenja. Postupak se može pojednostaviti ako pretpostavimo male inkrementalne rotacije lokalnih osa datog konačnog elementa štapa. Na taj način transformacija lokalnih osa iz konfiguracije 1 u konfiguraciju 2 može se sprovesti usvajajući prosečne inkrementalne rotacije. Pretpostavlja se da je poznat položaj lokalnog koordinatnog sistema u konfiguraciji 1 i vektor inkrementalnih čvornih pomeranja iz kojih se mogu sračunati relativna pomeranja:

$${}^1\Delta u = \Delta U_J - \Delta U_I, \quad {}^1\Delta v = \Delta V_J - \Delta V_I, \quad {}^1\Delta w = \Delta W_J - \Delta W_I \quad (5.100)$$

Matrica transformacije između jediničnih vektora lokalnih osa u konfiguraciji 1 i konfiguraciji 2, može se odrediti korišćenjem Euler-ovih uglova:

$$\begin{bmatrix} {}^2\vec{r} \\ {}^2\vec{s} \\ {}^2\vec{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\vec{r} \\ {}^1\vec{s} \\ {}^1\vec{t} \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

gde ugao α predstavlja rotaciju oko negativne ose 1x i prevodi lokalne ose ${}^1x, {}^1y, {}^1z$ u $\vec{r}, {}^1y, \vec{t}$. Ugao β je rotacija oko \vec{t} i prevodi $\vec{r}, {}^1y, \vec{t}$ u ${}^2z, \vec{s}, \vec{t}$. Rotacija oko podužne ose 2z je ugao γ koji prevodi ${}^1z, \vec{s}, \vec{t}$ u lokalne ose ${}^2x, {}^2y, {}^2z$. Uglovi α, β, γ koji definišu ovo pomeranje konačnog elementa štapa iz konfiguracije 1 u konfiguraciju 2 mogu se odrediti čisto geometrijskim razmatranjem Sl. 5.12.

$$\begin{aligned} {}^2\cos\alpha &= \frac{{}^1l + {}^1\Delta w}{\sqrt{|({}^1l + {}^1\Delta w)^2 + {}^1\Delta v^2|}} \\ {}^2\sin\alpha &= \frac{{}^1\Delta v}{\sqrt{|({}^1l + {}^1\Delta w)^2 + {}^1\Delta v^2|}} \\ {}^2\cos\beta &= \frac{\sqrt{|({}^1l + {}^1\Delta w)^2 + {}^1\Delta v^2|}}{\sqrt{|({}^1l + {}^1\Delta w)^2 + {}^1\Delta u^2 + {}^1\Delta v^2|}} \\ {}^2\sin\beta &= \frac{{}^1\Delta u}{\sqrt{|({}^1l + {}^1\Delta w)^2 + {}^1\Delta u^2 + {}^1\Delta v^2|}} \end{aligned} \quad (5.102a,b,c,d)$$

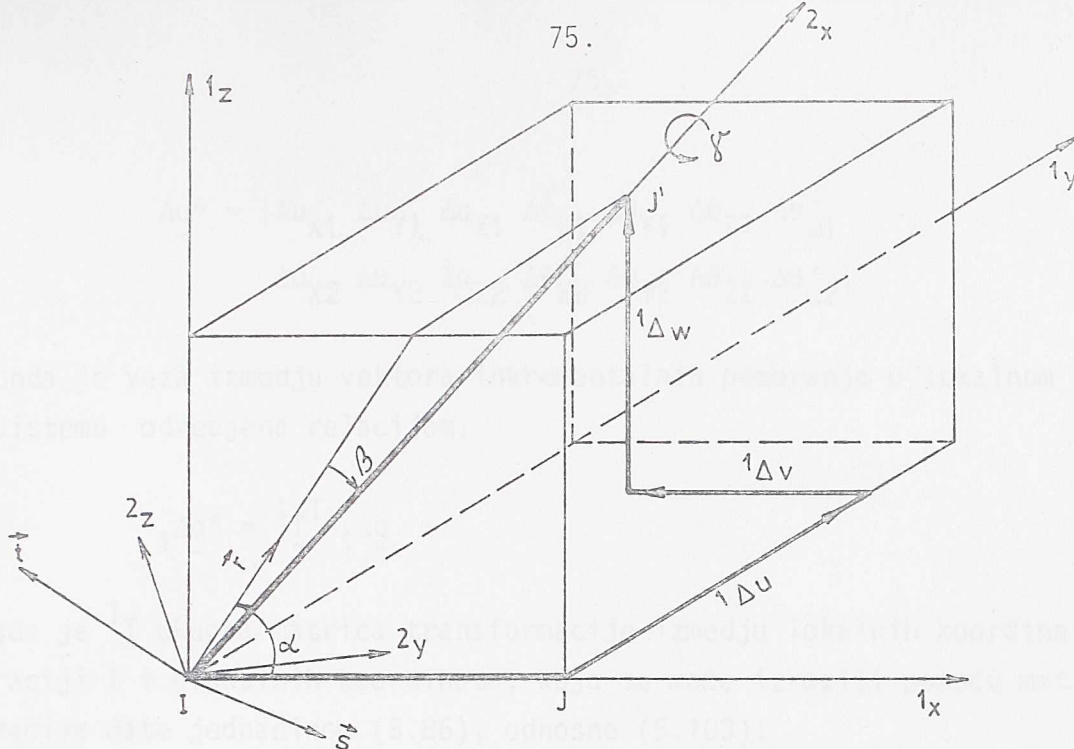
$${}^2\gamma = \frac{1}{2} (\theta_J + \theta_I)$$

Konačna matrica transformacije dobija se matričnim množenjem i glasi:

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta & \sin\beta & \sin\alpha \cos\beta \\ (-\cos\alpha \sin\beta \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma) & \cos\gamma \cos\beta & (-\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\gamma) \\ \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma - \sin\alpha \cos\gamma & -\cos\beta \sin\gamma & -\cos\beta \sin\gamma(\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos\gamma) \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

Da bi odredili koordinate čvorova u konfiguraciji 2 treba odrediti inkrementalna pomeranja čvora J u globalnim koordinatama:

$$\begin{bmatrix} {}^2x_J \\ {}^2y_J \\ {}^2z_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1x_J \\ {}^1y_J \\ {}^1z_J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^1\Delta u \\ {}^1\Delta v \\ {}^1\Delta w \end{bmatrix} \quad (5.104)$$



Slika 5.12

Na taj način dolazimo do nove dužine štapa 2l i inkrement dilatacije u podužnom pravcu može se sračunati:

$$\Delta e_{11} = \frac{{}^2l - {}^1l}{{}^1l} \quad (5.105)$$

Uzimajući u obzir i pretpostavku o malim deformacijama, dilataciju u podužnom pravcu možemo sračunati i u odnosu na dužinu štapa 0l . Na taj način inkrement pomeranja u podužnom pravcu u lokalnim koordinatama je

$$w_I = 0 \quad \text{i} \quad w_J = \Delta e_{11} \cdot {}^1l \quad (5.106)$$

i do rasporeda dilatacija duž elementa dolazimo korišćenjem izraza (5.32).

5.16. MATRICA KRUTOSTI TANKOZIDNOG KONAČNOG ELEMENTA U GLOBALNOM KOORDINATNOM SISTEMU

Izrazima (5.38), (5.54), (5.75) određene su matrice krutosti 1k_L , ${}^1k_{NL}$ i vektor čvornih sila 1Q u odnosu na lokalne koordinatne ose koje u konfiguraciji 1. Pri formiranju globalne matrice krutosti i vektora čvornih sila za sistem elemenata, neophodno je izvršiti transformaciju sa lokalnih na globalni sistem koordinata.

Ako sa Δq^* označimo vektor nepoznatih inkrementalnih pomeranja u pravcu globalnog koordinatnog sistema

$$\Delta \underline{q}^* = \begin{vmatrix} \Delta u_{X1} & \Delta u_{Y1} & \Delta u_{Z1} & \Delta \theta_{X1} & \Delta \theta_{Y1} & \Delta \theta_{Z1} & \Delta \theta_{\omega 1} \\ \Delta u_{X2} & \Delta u_{Y2} & \Delta u_{Z2} & \Delta \theta_{X2} & \Delta \theta_{Y2} & \Delta \theta_{Z2} & \Delta \theta_{\omega 2} \end{vmatrix} \quad (5.107)$$

onda je veza izmedju vektora inkrementalnih pomeranja u lokalnom i globalnom sistemu odredjena relacijom:

$${}^1 \Delta \underline{q}^* = {}^1 \underline{T}^T {}^1 \Delta \underline{q} \quad (5.108)$$

gde je ${}^1 \underline{T}$ ukupna matrica transformacije izmedju lokalnih koordinata u konfiguraciji 1 i globalnih koordinata, koja se može izraziti pomoću matrice transformacije date jednačinom (5.86), odnosno (5.103):

$${}^1 \underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{t} & & & & & & \\ & \underline{t} & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \underline{t} & & & \\ & & & & \underline{t} & & \\ & & & & & \underline{t} & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (5.109)$$

Zamenom (5.108) u uslove ravnoteže elementa (5.2) i posle množenja sa leve i desne strane sa ${}^1 \underline{T}^T$, dobijaju se tangencijalna matrica krutosti i vektor čvornih sila transformisani u odnosu na globalne koordinate:

$${}^1 \underline{k}_L^* = {}^1 \underline{T}^T {}^1 \underline{k}_L {}^1 \underline{T} \quad (5.110)$$

$${}^1 \underline{k}_{NL}^* = {}^1 \underline{T}^T {}^1 \underline{k}_{NL} {}^1 \underline{T} \quad (5.111)$$

$${}^1 \underline{Q}^* = {}^1 \underline{T}^T {}^1 \underline{Q} \quad (5.112)$$

Matrica transformacije data izrazom (5.109) važi za slučaj da su sve komponente vektora pomeranja $\Delta \underline{q}$ date u odnosu na jednu referentnu osu. Kako u slučaju tankozidnog štapa postoje dve referentne ose, u odnosu na koje je definisan vektor pomeranja, potrebno je prethodno vektor pomeranja transformisati u vektor pomeranja $\Delta \underline{q}_c$, čije se sve komponente odnose na jednu referentnu osu [27]. Ova transformacija može se napisati:

$$\Delta \underline{q}_c = \underline{T}_c \Delta \underline{q} \quad (5.113)$$

Ako stavimo,

$$\Delta u_C = \Delta u_P + y_P \Delta \theta \quad , \quad \Delta u'_C = \Delta u'_P + y_P \Delta \theta' \quad (5.114)$$

$$\Delta v_C = \Delta v_P - x_P \Delta \theta \quad , \quad \Delta v'_C = \Delta v'_P - x_P \Delta \theta' \quad (5.115)$$

za matricu transformacije dobijamo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
${}^1 T_{-C} =$	1					y_P									1
		1				$-x_P$									2
			1				$-x_P$								3
				1			y_P								4
					1										5
						1									6
							1								7
								1					y_P		8
									1				$-x_P$		9
										1					10
											1		$-x_P$		11
												1	y_P		12
														1	13
															1

(14,14)
(5.115)

Veza izmedju vektora sila $\Delta \underline{Q}$ i $\Delta \underline{Q}_C$ odredjena je izrazom:

$${}^1 \Delta \underline{Q} = {}^1 T_{-C}^T \Delta \underline{Q}_C \quad (5.116)$$

koji uspostavlja sledeće transformacije izmedju presečnih sila:

$$\Delta M_{zP} = \Delta M_{zC} + y_P \Delta Q_x - x_P \Delta Q_y \quad (5.117a,b)$$

$$\Delta M_{\omega P} = \Delta M_{\omega C} + y_P \Delta M_x - x_P \Delta M_y$$

Ukupna matrica transformacije koja daje vezu izmedju lokalnog i globalnog koordinatnog sistema i istovremeno uključuje transformaciju

svih komponentata na jednu referentnu osu glasi:

$$\hat{1}_{\underline{T}} = \underline{1}_{\underline{T}}^T \underline{1}_{\underline{T}} \quad (5.118)$$

5.17. MATRICA KRUTOSTI SISTEMA

Matrica krutosti sistema štapova punog i tankozidnog preseka može se simbolično napisati kao:

$$\underline{k} = \sum_m \underline{k}_m^* \quad (5.119)$$

gde je \underline{k}_m^* matrica krutosti m-tog elementa u globalnim koordinatama. Na sličan način formira se i vektor ravnotežnih čvornih sila:

$$\underline{Q} = \sum_m \underline{Q}_m^* \quad (5.120)$$

Da bi se omogućilo formiranje globalne matrice krutosti sistema koristeći matricnu relaciju (5.119), moraju matrice krutosti pojedinih elemenata biti istog reda kao i globalna matrica krutosti sistema. To je sa stanovišta primene računarske tehnike neracionalno jer su u matrici krutosti različiti od nule samo oni elementi koji odgovaraju stepenima slobode pomeranja datog elementa. Za formiranje globalne matrice krutosti u ovom radu je korišćen postupak predložen od strane Bathe-a [38] gde se pri formiranju matrica krutosti elementa obrazuju i pomoćni vektori LM koji povezuju stepene slobode pomeranja elementa i sistema štapova.

6. POSTUPCI ZA REŠAVANJE SISTEMA NELINEARNIH JEDNAČINA

6.1 UVODNE NAPOMENE

Efekti materijalne nelinearnosti betona i čelika za armaturu, pojava i razvoj prslina, vremenski zavisni efekti, kao i efekti geometrijske nelinearnosti imaju za posledicu pojavu nelinearnih jednačina pri analizi AB konstrukcija metodom konačnih elemenata. Za nalaženje rešenja ovih jednačina u ovom radu koristiće se postupak eksplicitne integracije u vremenskom domenu. Ukupan vektor pomeranja i deformacije dobiće se superpozicijom sračunatih inkremenata vektora pomeranja i deformacije za prethodne inkremente vremena. U okviru svakog inkrementa vremena nepoznata pomeranja računaju se iz nelinearnih jednačina (5.2). Za rešavanje ovih jednačina koristi se inkrementalni pristup koji omogućava praćenje naponsko-deformacijskog stanja u zavisnosti od opterećenja i toka deformacija. Osnovna ideja na kojoj se zasniva inkrementalni pristup u ovom radu sastoji se u podeli ukupnog opterećenja (spoljašnje sile i početne deformacije od tečenja i skupljanja) na niz manjih delova u okviru svakog inkrementa vremena. Radi postizanja veće tačnosti i brže konvergencije rešenja, inkrementalni postupak se kombinuje sa nekoliko iterativnih postupaka. U radu su usvojeni Newton-Raphson-ov, modifikovani Newton-Raphson-ov i kvazi Newton-ov "BFGS" postupak a za rešenje u blizini granične tačke i postkritično ponašanje "Arc length" postupak.

6.2. ITERATIVNI POSTUPCI

6.2.1. Newton-Raphson-ovi postupci

Osnovna funkcija svakog iterativnog postupka u okviru inkrementalne formulacije problema je disipacija neuravnoteženog opterećenja u čvorovima sistema. Da bi se ispitala efikasnost i pouzdanost usvojenih iterativnih postupaka u računarski program je ugradjen i klasičan Newton-Raphson-ov postupak, čiji će kratak prikaz biti izložen u narednom tekstu.

Za proizvoljan inkrement opterećenja, diskretizovan sistem nelinearnih jednačina može se napisati u sledećem obliku:

$$\underline{\psi}(\underline{q}^n) = 0 \quad (6.1)$$

gde je

$$\underline{\psi}(\underline{q}^n) = \underline{Q}(\underline{q}^n) - \underline{R}^n \quad (6.2)$$

Sa $\underline{\psi}$ je obeležen gradijent funkcionala Π ili vektor neuravnoteženog opterećenja, sa \underline{R}^n vektor spoljnih čvornih sila za inkrement opterećenja a sa \underline{Q}^n vektor unutrašnjih sila koje odgovaraju inkrementima napona u pojedinim elementima za inkrement opterećenja n .

Ako pretpostavimo aproksimativno rešenje za inkremente čvornih pomeranja \underline{q}_i^n , onda vektor neuravnoteženog opterećenja možemo da razvijemo u Taylor-ov red u okolini \underline{q}_i^n , tj.

$$\underline{\psi}(\underline{q}_{i+1}^n) = \underline{\psi}(\underline{q}_i^n) + \left. \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \underline{q}} \right|_{\underline{q}_i^n} \cdot \Delta \underline{q}_i^n \quad (6.3)$$

gde su članovi višeg reda zanemareni.

Ako sa,

$$\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \underline{q}_i^n} = \underline{k}_{Ti}^n \quad (6.4)$$

obeležimo tangencijalnu matricu krutosti za inkrement opterećenja n i iteraciju i , onda se izraz (6.1) korišćenjem izraza (6.3) može napisati:

$$\underline{\psi}(\underline{q}_i^n) + \underline{k}_{Ti}^n \cdot \Delta \underline{q}_i^n = \underline{0} \quad (6.5)$$

Iz gornje jednačine možemo da odredimo pomeranje posle iteracije i

$$\Delta \underline{q}_i^n = - |\underline{k}_{Ti}^n|^{-1} \cdot \underline{\psi}(\underline{q}_i^n) \quad (6.6)$$

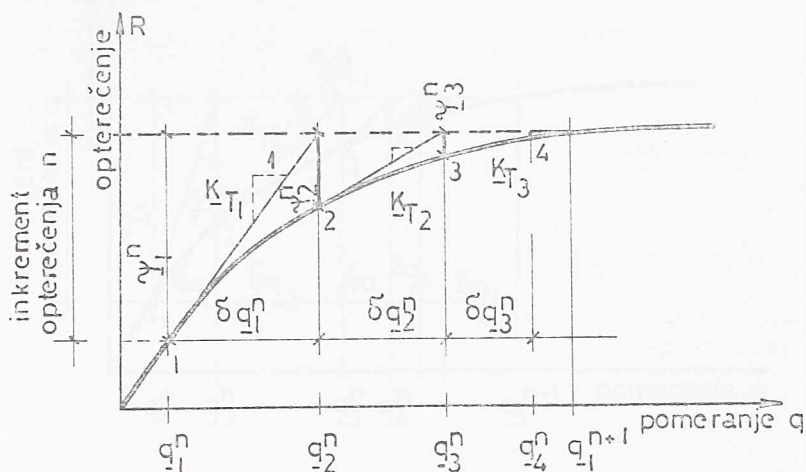
Pošto izraz (6.3) predstavlja samo aproksimaciju Taylor-ovim redom, onda se korekcija pomeranja može sračunati kao:

$$\underline{q}_{i+1}^n = \underline{q}_i^n + \Delta \underline{q}_i^n \quad (6.7)$$

Izrazima (6.6) i (6.7) izražen je Newton-Raphson-ov iterativni postupak za rešavanje nelinearnih jednačina čiji je grafički prikaz za sistem sa jednim stepenom slobode dat na (Sl. 6.1).

Osnovni nedostaci ovog postupka su neophodnost sračunavanja nove tangentne matrice i rešavanje sistema jednačina u svakom koraku iteracije,

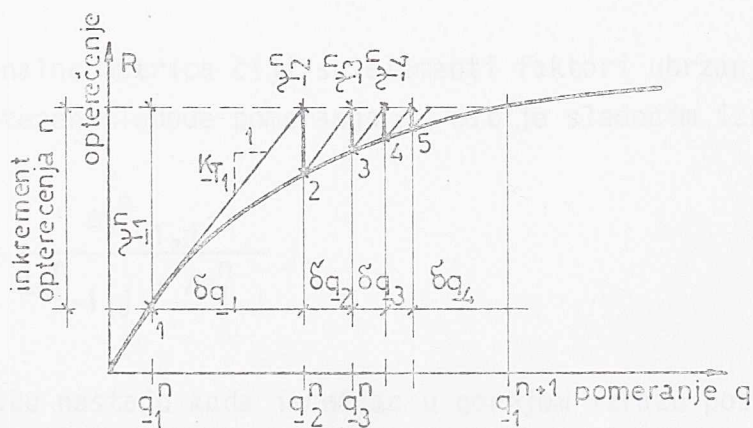
kao i problem konvergencije koji se javlja u blizini granične tačke.



Slika 6.1

Program sadrži i dva modifikovana Newton-Raphson-ova postupka i postupak sa ubrzanom konvergencijom. Prva modifikacija (Sl. 6.2) u odnosu na klasičan pristup zasniva se na sračunavanju matrice krutosti na početku svakog inkrementa opterećenja koja se zadržava ista za sve iteracije u okviru tog istog inkrementa, tj.

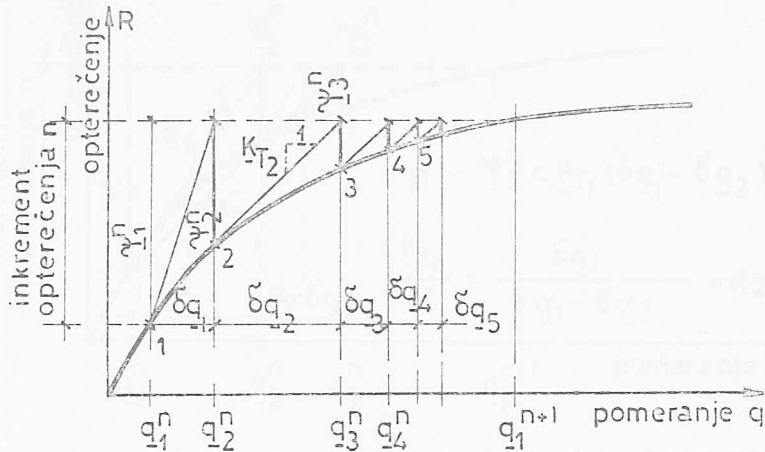
$$\underline{q}_i^n = - |k_{T1}^n|^{-1} \cdot \underline{\psi}_i^n \quad \text{za } i > 1 \quad (6.8)$$



Slika 6.2

Druga modifikacija Sl. 6.3 podrazumeva ponovno formiranje matrice krutosti na početku druge iteracije u okviru inkrementa opterećenja:

$$\underline{q}_i^n = - |k_{T2}^n|^{-1} \cdot \underline{\psi}_i^n \quad \text{za } i > 2 \quad (6.9)$$



Slika 6.3

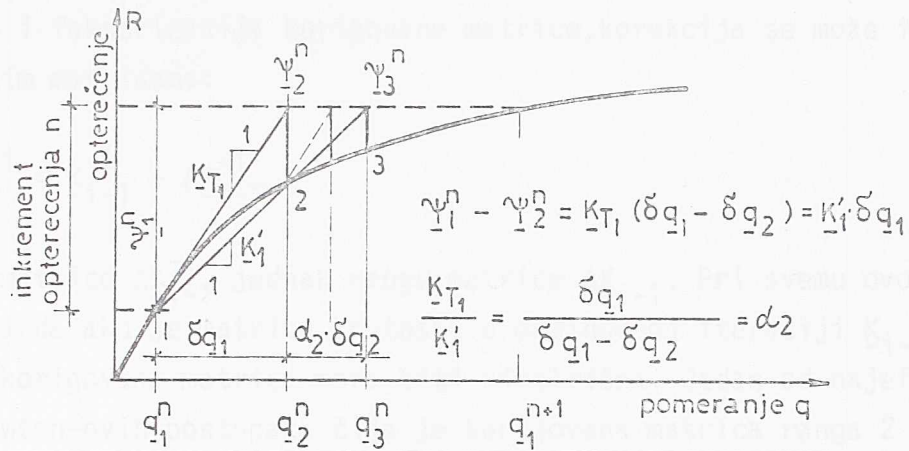
Pouzdanost modifikovanog postupka u odnosu na klasičan Newton-ov pristup ogleda se u tome da je tangenta matrica krutosti za svaki inkrement opterećenja pozitivno definitna. Nedostatak postupka ogleda se u sporijoj konvergenciji, pogotovu u slučaju iznenadne promene krutosti (primer naglog omekšanja zbog pojave prslina). Da bi modifikovan postupak bio efikasniji u radu je primenjen i Aitken-ov postupak sa ubrzanim iteracijama [103], u kome izraz (6.7) postaje:

$$\underline{q}_{i+1}^n = \underline{q}_i^n + \underline{\alpha}_i^n \cdot \Delta \underline{q}_i^n \quad (6.10)$$

gde je $\underline{\alpha}_i^n$ dijagonalna matrica čiji su elementi faktori ubrzanja. Faktor ubrzanja za svaki stepen slobode pomeranja j , dat je sledećim izrazom:

$$\alpha_{i,j} = \frac{\Delta q_{i-1,j}^n}{\Delta q_{i-1,j}^n - \Delta q_{i,j}^n} \quad (6.11)$$

Teškoće u postupku nastaju kada imenilac u gornjem izrazu postane mali za neki stepen slobode pomeranja. Osim toga, ubrzanje se može primeniti samo za svaku drugu iteraciju, pošto faktori ubrzanja, koristeći razliku između dva uzastopna vektora neuravnoteženog opterećenja, određuju odnos tangencijalne matrice krutosti prema lokalnoj sekantnoj matrici krutosti. Na Sl. 6.4 prikazana je grafička interpretacija Aitken-ovog postupka.



Slika 6.4

6.2.2. Kvazi-Newton-ov (BFGS) postupak

Kao alternativa klasičnom i modifikovanim Newton-ovim postupcima u radu je usvojen i kvazi-Newton-ov postupak za rešavanje nelinearnih jednačina. Primena ovog postupka za rešavanje nelinearnih jednačina prvi put se sreće u radu Matthies-a i Strang-a [104].

U kvazi-Newton-ovom postupku Sl. 6.5., korekcija matrice krutosti vrši se pomoću sekantne aproksimacije \underline{K}_i između iteracija $(i-1)$ i (i) , tj.:

$$\underline{K}_i (\underline{q}_i - \underline{q}_{i-1}) = \underline{\psi}_i - \underline{\psi}_{i-1} \quad (6.12)$$

ili

$$\underline{K}_i \cdot \eta_i \cdot \Delta \underline{q}_i = \underline{\psi}_i - \underline{\psi}_{i-1} \quad (6.13)$$

gde je

$$\eta_i \cdot \Delta \underline{q}_i = \underline{q}_i - \underline{q}_{i-1} \quad (6.14)$$

Za sisteme sa više stepeni slobode, sekantna matrica krutosti može se napisati u sledećem vidu:

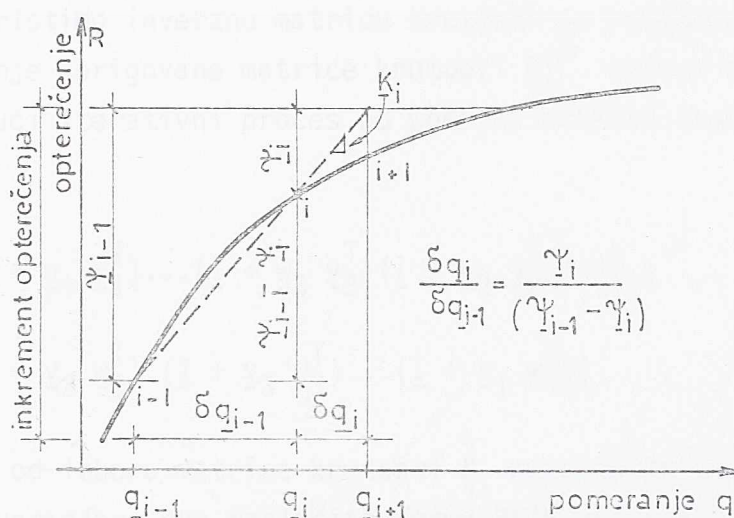
$$\underline{K}_i = \underline{K}_{i-1} + \Delta \underline{K}_{i-1} \quad (6.15)$$

U zavisnosti od ranga matrice $\Delta \underline{K}_{i-1}$ zavisi i rang korigovane matrice \underline{K}_i . Najčešće je rang korigovane matrice reda jedan ili dva. Da bi se izbeglo

sračunavanje i faktorizacija korigovane matrice, korekcija se može izvršiti i na inverznim matricama:

$$\underline{K}_i^{-1} = \underline{K}_{i-1}^{-1} + \Delta \underline{K}_{i-1}^{-1} \quad (6.16)$$

gde je rang matrice $\Delta \underline{K}_{i-1}^{-1}$ jednak rangu matrice $\Delta \underline{K}_{i-1}$. Pri svemu ovome treba voditi računa da ako je matrica krutosti u prethodnoj iteraciji \underline{K}_{i-1} simetrična, onda i korigovana matrica mora biti simetrična. Jedan od najefikasnijih kvazi-Newton-ovih postupaka čija je korigovana matrica ranga 2 je postupak "BFGS" (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno).



Slika 6.5

Koristeći "BFGS" postupak inverzna forma korigovane matrice krutosti može se napisati u sledećem vidu:

$$\underline{K}_i^{-1} = \underline{A}_i^T \underline{K}_{i-1}^{-1} \underline{A}_i \quad (6.17)$$

gde je \underline{A}_i kvadratna matrica:

$$\underline{A}_i = (\underline{I} + \underline{v}_i \circ \underline{w}_i^T) \quad (6.18)$$

a \underline{I} jedinična matrica.

Vektori \underline{v}_i i \underline{w}_i se sračunavaju iz poznatih čvornih sila i pomaranja na sledeći način:

$$\underline{v}_i = \underline{\psi}_{i-1} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\eta_{i-1} \circ \Delta q_{i-1}^T \circ (\psi_{i-1} - \psi_i)}{\Delta q_{i-1}^T \circ \psi_{i-1}}} \right\} - \underline{\psi}_i \quad (6.19)$$

$$\underline{w}_i = \frac{\Delta q_{i-1}}{\Delta q_{i-1}^T \cdot (\underline{\psi}_i - \underline{\psi}_{i-1})} \quad (6.20)$$

Kako je matični proizvod simetričan i pozitivno definitan, a da bi se izbegle numeričke poteškoće kod određivanja korigovane matrice, izračunava se uslovni broj C_i matrice \underline{A} , koji se zatim upoređuje sa nekim zadatim brojem (u programu je usvojen broj 10^5 [103]):

$$C_i = \frac{\{(\underline{v}_i^T \cdot \underline{v}_i)^{1/2} (\underline{w}_i^T \cdot \underline{w}_i)^{1/2} + |(\underline{v}_i^T \cdot \underline{v}_i)(\underline{w}_i^T \cdot \underline{w}_i) + 4(1 + \underline{w}_i^T \cdot \underline{v}_i)|^{1/2}\}^2}{4(1 + \underline{w}_i^T \cdot \underline{v}_i)} \quad (6.21)$$

Umesto da koristimo inverznu matricu krutosti iz prethodne iteracije \underline{K}_{i-1}^{-1} za sračunavanje korigovane matrice krutosti \underline{K}_i^{-1} , možemo da proširimo izraz (6.17), započinjući iterativni proces od početne matrice krutosti \underline{K}_1^{-1} , tj.,

$$\underline{K}_i^{-1} = |(\underline{I} + \underline{w}_1 \underline{v}_1^T) \dots (\underline{I} + \underline{w}_3 \underline{v}_3^T) (\underline{I} + \underline{w}_2 \underline{v}_2^T)| \cdot |\hat{\underline{K}}_1|^{-1} \cdot |(\underline{I} + \underline{v}_2 \underline{w}_2^T) \cdot (\underline{I} + \underline{v}_3 \underline{w}_3^T) \dots (\underline{I} + \underline{v}_i \underline{w}_i^T)| \quad (6.22)$$

U zavisnosti od izbora matrice krutosti $\hat{\underline{K}}_1$ na početku iterativnog postupka u program su ugrađene dve različite forme BFGS postupka:

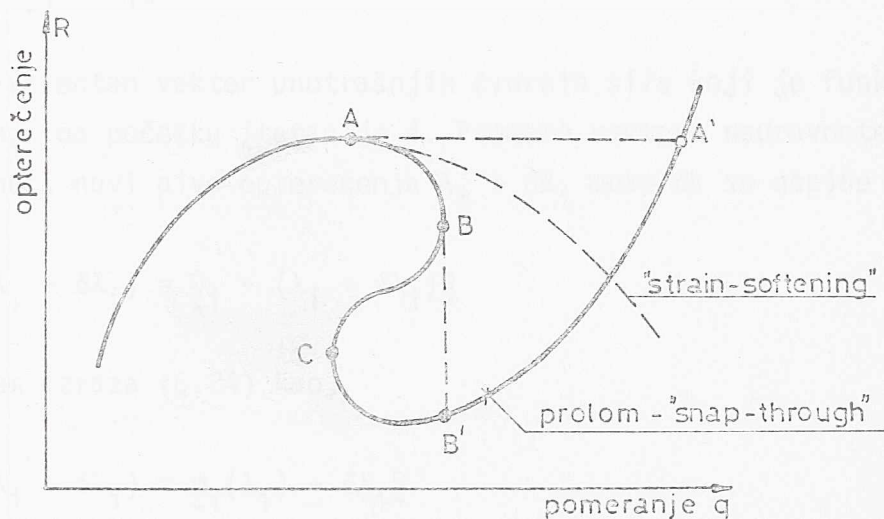
- BFGS postupak kod koga se na početku svakog inkrementa sračunava matrica krutosti $\hat{\underline{K}}_1 = \underline{K}_{T1}$
- BFGS postupak kod koga se koristi matrica krutosti iz druge iteracije za svaki inkrement opterećenja.

Bez obzira na izbor matrice krutosti $|\hat{\underline{K}}_1|^{-1}$ "pravac" novog inkrementa pomeranja može se sračunati, polazeći od (6.6) i (6.22) na sledeći način:

$$\Delta q_i = - \left| \prod_{j=1}^2 (\underline{I} + \underline{w}_j \underline{v}_j^T) \right| |\hat{\underline{K}}_1|^{-1} \left| \prod_{j=2}^i (\underline{I} + \underline{v}_j \underline{w}_j^T) \right| \cdot \underline{\psi}_i \quad (6.23)$$

6.3 NUMERIČKI POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE GRANIČNE TAČKE I POSTKRITIČNOG PONAŠANJA

Primenom inkrementalnog postupka sa klasičnim ili kvazi-Newton-ovim iteracijama nije moguće dobiti rešenja u blizini granične tačke čak i u slučaju usvajanja vrlo malih inkremenata opterećenja ili pomeranja. Numeričke poteškoće koje se javljaju pri promeni vrednosti determinante matrice krutosti u kritičnoj tački prikazane su na Sl. 6.6. U slučaju da krivu opterećenje-pomeranje odredjujemo klasičnim iterativnim postupcima iz inkremenata opterećenja onda iz rešenja A sledi rešenje A', a u slučaju da rešenje odredjujemo iz inkremenata pomeranja rešenje prelazi iz tačke B u tačku B'.



Slika 6.6

Za rešavanje gore pomenutih problema predloženo je nekoliko postupaka, medju kojima se ističu postupci Bergana [111], Crisfield-a [107], [108], Ramm-a [109], Bathe-a i Dvorkin-a [112] i Yang-a i McGuire-a [113]. U ovom radu, je za odredjivanje granične tačke kao i praćenja postkritičnog ponašanja, usvojen "arc-length" postupak, koga su prvi predložili Riks [105] i Wempner [106] a kasnije usavršili Crisfield [107] [108] i Ramm [109].

Suština usvojenog postupka ogleda se u modifikaciji nivoa opterećenja pri svakoj iteraciji u okviru inkrementa opterećenja. Razlika u odnosu na klasične postupke, gde je nivo opterećenja konstantan, je da rešenje prati neku napred izabranu krivu sve dok se ne zadovolji neki od uslova konvergencije.

Postupak podrazumeva da je opterećenje dato kao proporcionalno.

Inkrement opterećenja je proizvod $\Delta\lambda_i^n \underline{R}$ gde $\Delta\lambda_i^n$ predstavlja faktor promene opterećenja za inkrement n i iteraciju i , a \underline{R} vektor spoljašnjeg opterećenja. Ukupan nivo opterećenja u bilo kom trenutku vremena dat je kao $\lambda \cdot \underline{R}$ gde je λ parametar nivoa opterećenja. Za sisteme sa N stepeni slobode pomeranja, Riks je pored N jednačina ravnoteže uveo i dodatnu jednačinu ograničenja (propisuje modifikaciju opterećenja) u kojoj se kao promenljiva javlja parametar nivoa opterećenja λ . Direktna primena ove jednačine dovodi do gubitka simetrije i trakaste strukture jednačina ravnoteže. Da bi se izbegao ovaj nedostatak, u radu je usvojen postupak sličan postupku "kontrola pomeranja" koga su formulisali Batoz i Dhatt [110].

Vektor neuravnoteženog opterećenja $\underline{\psi}_i$ za nivo opterećenja λ_i može da se napiše u sledećem vidu:

$$\underline{\psi}_i = \underline{Q}_i - \lambda_i \underline{R} \quad (6.24)$$

gde je \underline{Q}_i ekvivalentan vektor unutrašnjih čvornih sila koji je funkcija napona i pomeranja na početku iteracije i . Promena vektora neuravnoteženog opterećenja za neki novi nivo opterećenja $\lambda_i + \Delta\lambda_i$ može da se napiše kao:

$$\underline{\psi}_i(\lambda_i + \delta\lambda_i) = \underline{Q}_i - (\lambda_i + \delta\lambda_i) \underline{R} \quad (6.25)$$

ili korišćenjem izraza (6.24) kao,

$$\underline{\psi}_i(\lambda_i + \delta\lambda_i) = \underline{\psi}_i(\lambda_i) - \delta\lambda_i \underline{R} \quad (6.26)$$

Zamenom izraza (6.6) u (6.26) dobijamo,

$$- \underline{k}_{Ti} \cdot \delta\underline{q}_i(\lambda_i + \delta\lambda_i) = - \underline{k}_{Ti} \delta\underline{q}_i(\lambda_i) - \delta\lambda_i \cdot \underline{R} \quad (6.27)$$

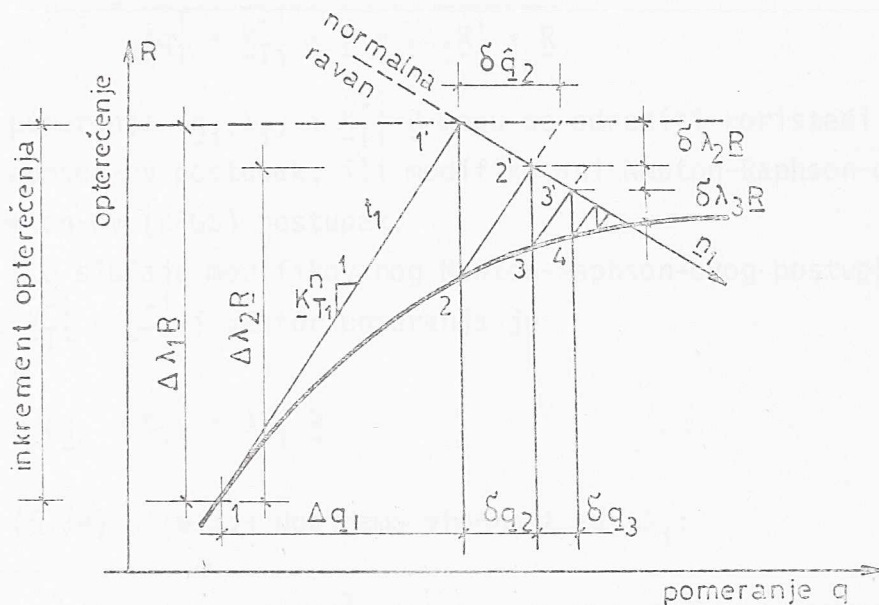
Množeći gornji izraz sa $-\underline{k}_{Ti}^{-1}$, dobijamo,

$$\delta\underline{q}_i(\lambda_i + \Delta\lambda_i) = \delta\underline{q}_i(\lambda_i) + \delta\lambda_i \underline{k}_{Ti}^{-1} \underline{R} \quad (6.28)$$

u kojoj vektor $\Delta\underline{q}_i(\lambda_i)$ predstavlja pomeranja dobijena iteracijama koje odgovaraju vektoru neuravnoteženog čvornog opterećenja $\underline{\psi}(\lambda_i)$. Izraz (6.28) može se shvatiti kao osnova svih "arc-length" postupaka. U zavisnosti od izbora $\Delta\lambda_i$, tj. izbora krive po kojoj pratimo rešenja dobijena iteracijama u toku jednog inkrementa opterećenja, razlikujemo nekoliko postupaka. U radu su usvojena tri postupka: postupak tangentnog luka, korigovanog tangentnog luka i sfernog luka.

6.3.1. Postupak tangentsnog luka

Jednačina ograničenja u ovom postupku propisuje da iterativni proces prati pravu koja je upravna na prvo formiranu tangentnu matricu krutosti (Sl. 6.7).



Slika 6.7

Ako sa \underline{t}_1 obeležimo vektor položaja tangente iz tačke 1 (početak inkrementa opterećenja), čije su komponente:

$$\underline{t}_1 = \begin{vmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta \lambda_1 R \end{vmatrix} \quad (6.29)$$

a sa \underline{n}_1 normalu upravnu na tangentu, čije su komponente jednake:

$$\underline{n}_1 = \begin{vmatrix} \delta q_1 \\ \delta \lambda_1 R \end{vmatrix} \quad (6.30)$$

onda je uslov normalnosti ispunjen, ako je skalarni proizvod jednak nuli:

$$\underline{t}_1 \cdot \underline{n}_1 = \begin{vmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta \lambda_1 R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta q_1 \\ \delta \lambda_1 R \end{vmatrix} = 0 \quad (6.31)$$

ili

$$\Delta \underline{q}_1^T \cdot \delta \underline{q}_i + \Delta \lambda_1 \cdot \delta \lambda_1 \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{R} = 0 \quad (6.32)$$

Jednačine (6.28) i (6.32) čine potpun sistem jednačina iz kojih određujemo $\delta \underline{q}_i$ i $\delta \lambda_i$, tj.

$$\delta \lambda_i = \frac{\Delta \underline{q}_1^T \cdot \delta \underline{q}_i(\lambda_i)}{\Delta \underline{q}_1^T \cdot \underline{K}_{T1}^{-1} \cdot \underline{R} + \Delta \lambda_1 \underline{R}^T \cdot \underline{R}} \quad (6.33)$$

Vektori pomeranja $\delta \underline{q}_i(\lambda_i)$ i $\underline{K}_{T1}^{-1} \cdot \underline{R}$ mogu se odrediti koristeći ili standardni Newton-Raphson-ov postupak, ili modifikovani Newton-Raphson-ov postupak ili kvazi-Newton-ov (BFGS) postupak.

U slučaju modifikovanog Newton-Raphson-ovog postupka, matrica krutosti je $\underline{K}_{T1}^{-1} = \underline{K}_{T1}^{-1}$ i vektor pomeranja je

$$\Delta \underline{q}_1 = \underline{K}_{T1}^{-1} \cdot \Delta \lambda_1 \underline{R} \quad (6.34)$$

Zamenom (6.34) u (6.33) dobijamo vrednost za $\delta \lambda_i$:

$$\delta \lambda_i = \frac{|\underline{K}_{T1} \cdot \underline{R}|^T \cdot \delta \underline{q}_i(\lambda_i)}{|\underline{K}_{T1} \cdot \underline{R}|^T |\underline{K}_{T1} \cdot \underline{R}| + \underline{R}^T \cdot \underline{R}} \quad (6.35)$$

gde je $\delta \underline{q}_i(\lambda_i)$ vektor pomeranja koji se određuje modifikovanim Newton-ovim iteracijama:

$$\delta \underline{q}_i(\lambda_i) = - \underline{K}_{T1}^{-1} \cdot \underline{\psi}_i \quad (6.36)$$

6.3.2. Postupak korigovanog tangentnog luka

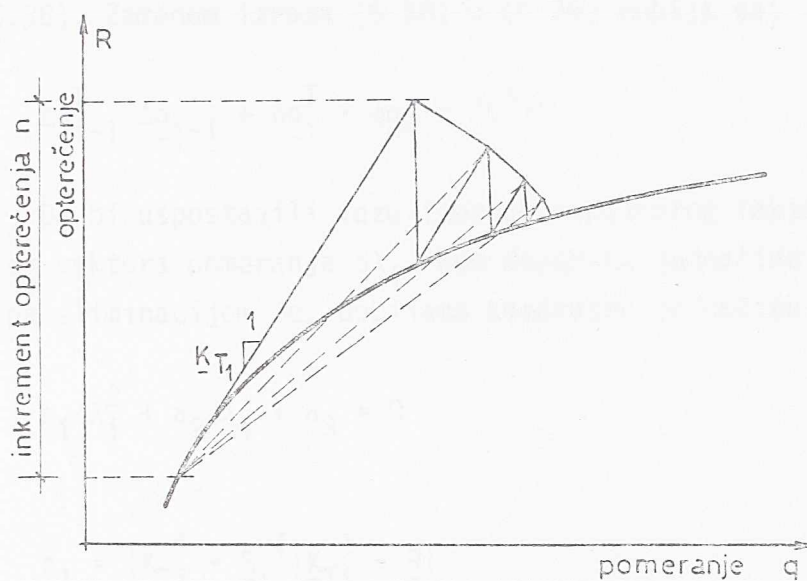
Ovaj postupak prikazan na Sl. 6.7. razlikuje se od prethodnog po tome što je iterativan proces u okviru inkrementa opterećenja ograničen normalom na trenutni vektor položaja \underline{t}_i . Ako izvršimo zamenu $\Delta \underline{q}_i$ umesto $\Delta \underline{q}_1$ i $\Delta \lambda_i$ umesto $\Delta \lambda_1$, dobijamo sledeći izraz za $\delta \lambda_i$:

$$\delta \lambda_i = \frac{\Delta \underline{q}_i^T \cdot \delta \underline{q}_i(\lambda_i)}{\Delta \underline{q}_i^T \cdot \underline{K}_{T1}^{-1} \cdot \underline{R} + \Delta \lambda_i \cdot \underline{R}^T \underline{R}} \quad (6.37)$$

Za oba postupka inkrementalni vektor pomeranja $\Delta \underline{q}_i$ koriguje se posle svake

iteracije na sledeći način:

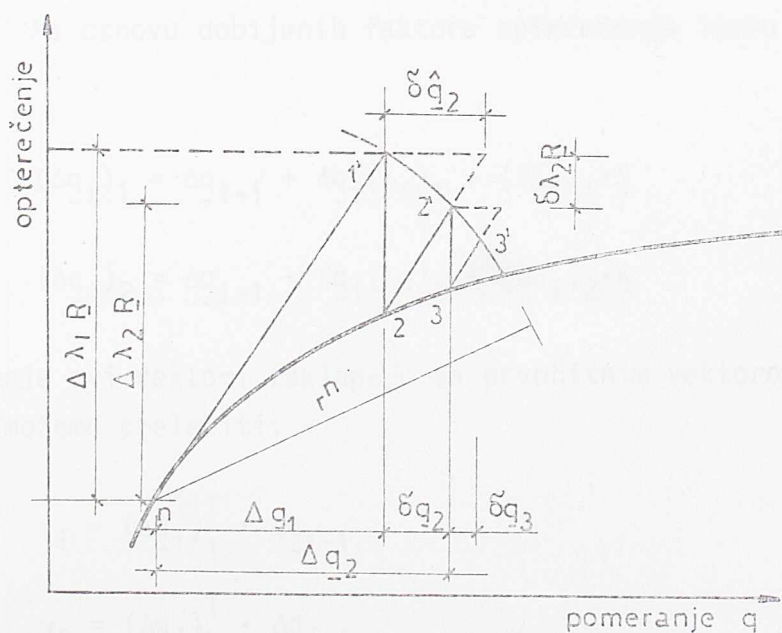
$$\Delta q_i = \Delta q_{i-1} + \Delta q_i \quad (6.38)$$



Slika 6.8

6.3.3. Postupak sfernog luka

Postupak koji je prvi primenio Crisfield [107], podrazumeva da pomeranja koja se dobijaju iteracijama slede sferni luk poluprečnika r^n čiji se centar nalazi u tački n , (Sl. 6.9). Jednačina ograničenja može se napisati u sledećem vidu:



Slika 6.9

$$\Delta \underline{q}_i^T \cdot \Delta \underline{q}_i = (r^n)^2 \quad (6.39)$$

gde je $\Delta \underline{q}_i$ ukupan inkrementalni vektor pomeranja za iteraciju i dat jednačinom (6.38). Zamenom izraza (6.38) u (6.39) dobija se:

$$\Delta \underline{q}_{i-1}^T \Delta \underline{q}_{i-1} + \delta \underline{q}_i^T \cdot \delta \underline{q}_i = (r^n)^2 \quad (6.40)$$

Da bi uspostavili vezu izmedju nepoznatog faktora opterećenja i nepoznatog vektora pomeranja $\delta \lambda_i$, kao dopunsku jednačinu koristimo izraz (6.28), pa eliminacijom $\delta \underline{q}_i$ dobijamo kvadratnu jednačinu za promenu $\delta \lambda_i$:

$$a_1 \delta \lambda_i^2 + a_2 \delta \lambda_i + a_3 = 0 \quad (6.41)$$

gde su

$$a_1 = |K_{Ti}^{-1} \cdot R|^T |K_{Ti}^{-1} \cdot R|$$

$$a_2 = 2|\Delta \underline{q}_{i-1} + \delta \underline{q}_i(\lambda_i)|^T \cdot |K_{Ti}^{-1} \cdot R| \quad (6.42a, b, c)$$

$$a_3 = |\Delta \underline{q}_{i-1} + \delta \underline{q}_i(\lambda_i)|^T \cdot |\Delta \underline{q}_{i-1} + \delta \underline{q}_i(\lambda_i)| - (r^n)^2$$

Rešenje jednačine (6.41) je:

$$(\delta \lambda_i)_{1,2} = -\frac{a_2}{a_1} \pm \frac{(a_2^2 - 4a_1 a_3)^{1/2}}{2a_1} \quad (6.43)$$

Na osnovu dobijenih faktora opterećenja imamo dva vektora pomeranja:

$$(\Delta \underline{q}_i)_1 = \Delta \underline{q}_{i-1} + \delta \underline{q}_i(\lambda_i)_1 + (\delta \lambda_i)_1 \cdot R \quad (6.44a, b)$$

$$(\Delta \underline{q}_i)_2 = \Delta \underline{q}_{i-1} + \delta \underline{q}_i(\lambda_i)_2 + (\delta \lambda_i)_2 \cdot R$$

Uglove koje ovi vektori zaklapaju sa prvobitnim vektorom inkrementalnih pomeranja možemo obeležiti:

$$\gamma_1 = (\Delta \underline{q}_i)_1^T \cdot \Delta \underline{q}_{i-1} \quad (6.45a, b)$$

$$\gamma_2 = (\Delta \underline{q}_i)_2^T \cdot \Delta \underline{q}_{i-1}$$

U slučaju da su oba korena (6.43) realna, usvajamo ono rešenje za $\delta\lambda_i$, koje daje pozitivan oštar ugao γ , a u slučaju istog znaka ugla γ usvajamo ono rešenje koje je bliže rešenju linearizovane jednačine (6.41), tj.,

$$\delta\lambda_i = -a_3/a_2 \quad (6.46)$$

Za poznatu vrednost faktora opterećenja $\delta\lambda_i$, vektor $\delta\mathbf{q}_i$ se sračunava iz (6.28). Korigovane vrednosti vektora inkrementalnih pomeranja $\Delta\mathbf{q}_i$ za slučaj modifikovanih Newton-ovih iteracija mogu se sračunati iz (6.34). Inkrementalni faktor opterećenja $\Delta\lambda_i$ i ukupni nivoi opterećenja λ_i sračunavaju se na sledeći način:

$$\Delta\lambda_i = \Delta\lambda_{i-1} + \delta\lambda_i \quad (6.47)$$

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} + \delta\lambda_i \quad (6.48)$$

U slučaju da se navedenim "arc-length" postupcima koristi BFGS postupak, dolazimo do sledećeg izraza posle ubacivanja korigovane matrice (6.22) u izraz (6.34):

$$\delta\mathbf{q}_i(\lambda_i + \delta\lambda_i) = \delta\mathbf{q}_i(\lambda_i) + \delta\lambda_i \left| \prod_{j=1}^2 (\mathbf{I} + \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{v}_j^T) \right| \left| \hat{\mathbf{K}}_1 \right|^{-1} \cdot \left| \prod_{j=2}^i (\mathbf{I} + \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j^T) \right| \cdot \mathbf{R} \quad (6.49)$$

Uvodeći oznake

$$\hat{\delta\mathbf{q}}_i = - \left| \prod_{j=1}^2 (\mathbf{I} + \mathbf{w}_j \mathbf{v}_j^T) \right| \left| \hat{\mathbf{K}}_1 \right|^{-1} \left| \prod_{j=2}^i (\mathbf{I} + \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j^T) \right| \psi_i \quad (6.50)$$

i

$$|\delta\mathbf{q}_i|_I = \left| \prod_{j=1}^2 (\mathbf{I} + \mathbf{w}_j \mathbf{v}_j^T) \right| \left| \hat{\mathbf{K}}_1 \right|^{-1} \left| \prod_{j=2}^i (\mathbf{I} + \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j^T) \right| \mathbf{R} \quad (6.51)$$

izraz (6.49) možemo napisati u sledećem obliku:

$$\delta\mathbf{q}_i = \hat{\delta\mathbf{q}}_i + \delta\lambda_i |\delta\mathbf{q}_i|_I \quad (6.52)$$

Vektor linearnih pomeranja dobijen korišćenjem korigovane matrice krutosti po "BFGS" postupku možemo odrediti na sledeći način:

a) prvo sračunavamo:

$$\mathbf{R}^* = \left| \prod_{j=2}^i (\mathbf{I} + \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j^T) \right|^T \mathbf{R} \quad (6.53)$$

b) zatim za sračunati vektor čvornog pomeranja odredjujemo

$$|\delta \underline{q}_i|_I = |\hat{K}_1|^{-1} \cdot \underline{R}^* \quad (6.54)$$

c) a potom sračunavamo

$$|\delta \underline{q}_i|_I = \left| \prod_{j=1}^2 (\underline{I} + \underline{w}_j \underline{v}_j^T) \right| |\delta \underline{q}_i|_I \quad (6.55)$$

Umesto izraza (6.28) sada koristimo izraz (6.52) za odredjivanje faktora promene nivoa opterećenja $\delta \lambda_j$ usled iteracija. Izrazi slični izrazima (6.33), (6.38) ili (6.43) za sračunavanje $\delta \lambda_j$, mogu da se koriste uzimajući u obzir vektor $\delta \underline{q}_i$ dat izrazom (6.54), $|\delta \underline{q}_i|_I$ dat sa (6.50) i $\Delta \underline{q}_1$ koje se sračunava iz:

$$\Delta \underline{q}_1 = - |\hat{K}_1|^{-1} \cdot \underline{\psi}_1 \quad (6.56)$$

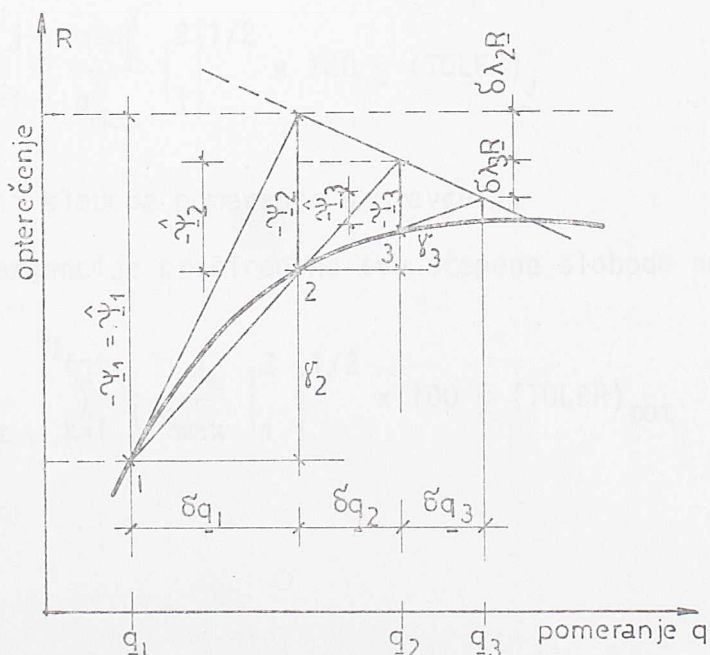
Matricu krutosti \hat{K}_1 sračunavamo na početku inkrementa opterećenja, tj.

$$\hat{K}_1 = \underline{K}_{T1}$$

Da bi se zadovoljio uslov sekantne matrice krutosti u iteraciji i , neuravnoteženo opterećenje sračunato u prethodnoj iteraciji $\underline{\psi}_{i-1}$ mora se zameniti nekim modifikovanim zamenjujućim opterećenjem $\hat{\underline{\psi}}_{i-1}$ Sl. 6.10, tako da je:

$$\underline{\gamma}_i = \underline{\psi}_i - \hat{\underline{\psi}}_{i-1} \quad (6.57)$$

Za promenu nivoa opterećenja $\delta \lambda_{i-1}$, modifikovan vektor neuravnote-



Slika 6.10

ženog opterećenja može se sračunati iz (6.26) na sledeći način:

$$\hat{\psi}_{i-1} = \psi_{i-1} + \delta\lambda_{i-1} \frac{R}{\dots} \quad (6.58)$$

Dijagram toka "arc-length" postupka ugradjenog u računarski program, za proizvoljan inkrement opterećenja prikazan je na (Sl. 6.11).

6.4. KRITERIJUMI KONVERGENCIJE

Iterativan postupak u okviru jednog inkrementa opterećenja se završava kada je ispunjen jedan od sledećih kriterijuma konvergencije:

- kriterijum konvergencije za svaki stepen slobode pomeranja odvojeno dat sledećom relacijom:

$$e_j = \frac{\eta_i \|\delta q\|_i^j}{\|q\|_i^j} \times 100 \leq (\text{TOLER})_j \quad (6.59)$$

gde $\|\delta q\|_i^j$ predstavlja Euclid-ovu normu za iterativno pomeranje u pravcu j pri iteraciji i ; $\|q\|_i^j$ normu ukupnog pomeranja u pravcu j ; (TOLER) procentualnu vrednost dozvoljene tolerancije za pravac pomeranja j .

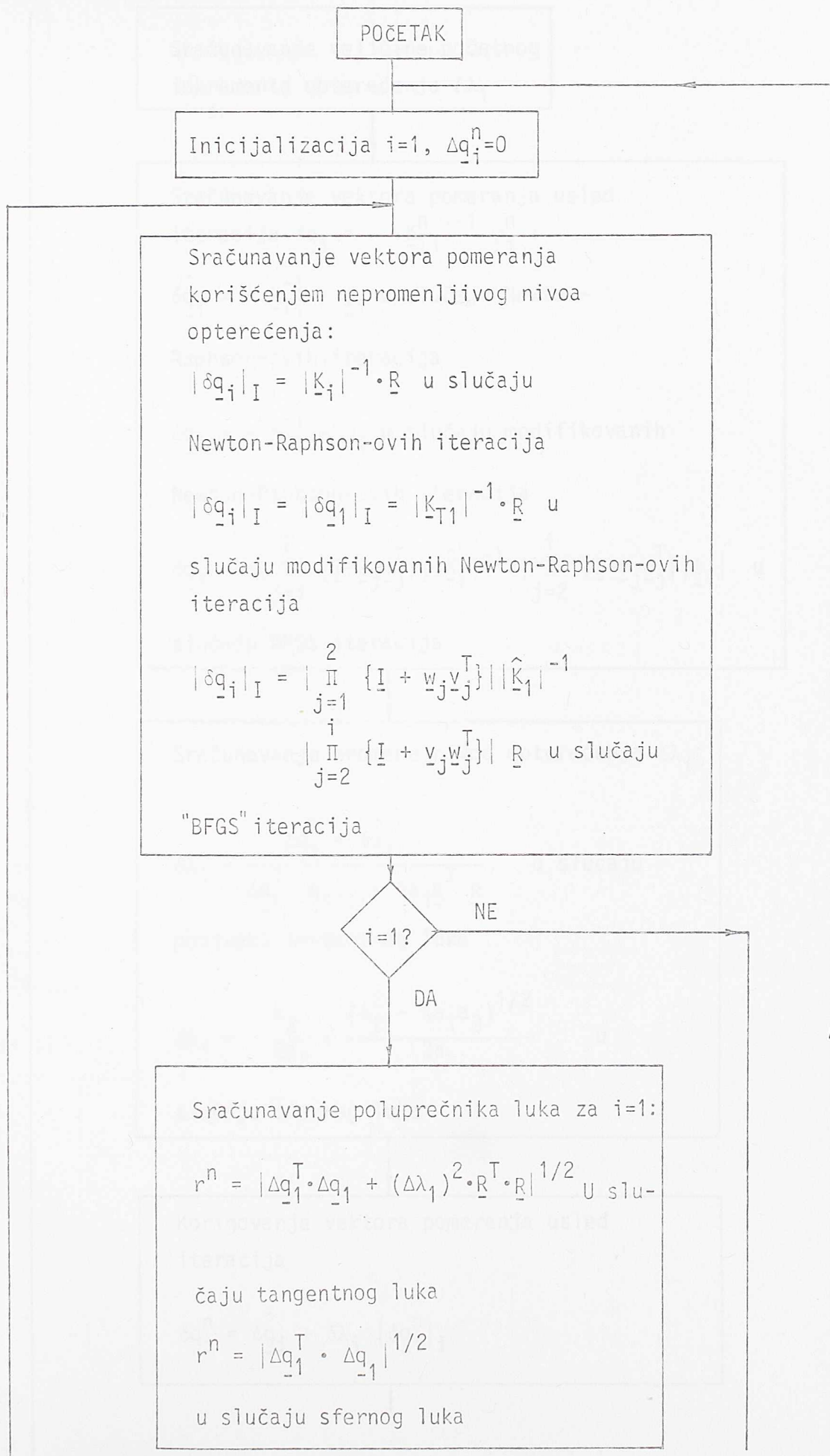
- kriterijum konvergencije po pomeranju dat preko bezdimenzionalnih veličina (vektor pomeranja u odredjenom pravcu j deli se sa veličinom najvećeg ukupnog pomeranja q_{\max}^j u tom pravcu):

$$e_j = \left| \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \left| \frac{\eta \delta q_k^j}{q_{\max}^j} \right|^2 \right|^{1/2} \times 100 \leq (\text{TOLER})_j \quad (6.60)$$

gde je N_j broj stepeni slobode pomeranja u pravcu j .

- isti kriterijum konvergencije proširen na sve stepene slobode pomeranja:

$$e_{\text{tot}} = \left| \frac{1}{N_{\text{tot}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{tot}}} \left| \frac{\eta q_k}{q_{\max}} \right|^2 \right|^{1/2} \times 100 \leq (\text{TOLER})_{\text{tot}} \quad (6.61)$$



Sračunavanje veličine početnog inkrementa opterećenja $\Delta\lambda_1$

Sračunavanje vektora pomeranja usled iteracija $\delta\hat{q}_i = - |K_{Ti}^n|^{-1} \psi_i^n$:

$\delta\hat{q}_i = - K_{Ti}^{-1} \cdot \psi_i$ u slučaju Newton-

Raphson-ovih iteracija

$\delta\hat{q}_i = - K_{Ti}^{-1} \cdot \psi_i$ u slučaju modifikovanih

Newton-Raphson-ovih iteracija

$\delta\hat{q}_i = - \left| \prod_{j=i}^2 \{I + w_j v_j^T\} \right| |K_1|^{-1} \cdot \left| \prod_{j=2}^i \{I + v_j w_j^T\} \right| \psi_i$ u

slučaju "BFGS" iteracija

Sračunavanje promene nivoa opterećenja $\delta\lambda_i$:

$\delta\lambda_i = \frac{\Delta q_1^T \cdot \delta\hat{q}_i}{\Delta q_1^T \cdot |q_i|_I + \Delta\lambda_1 R^T R}$ u slučaju

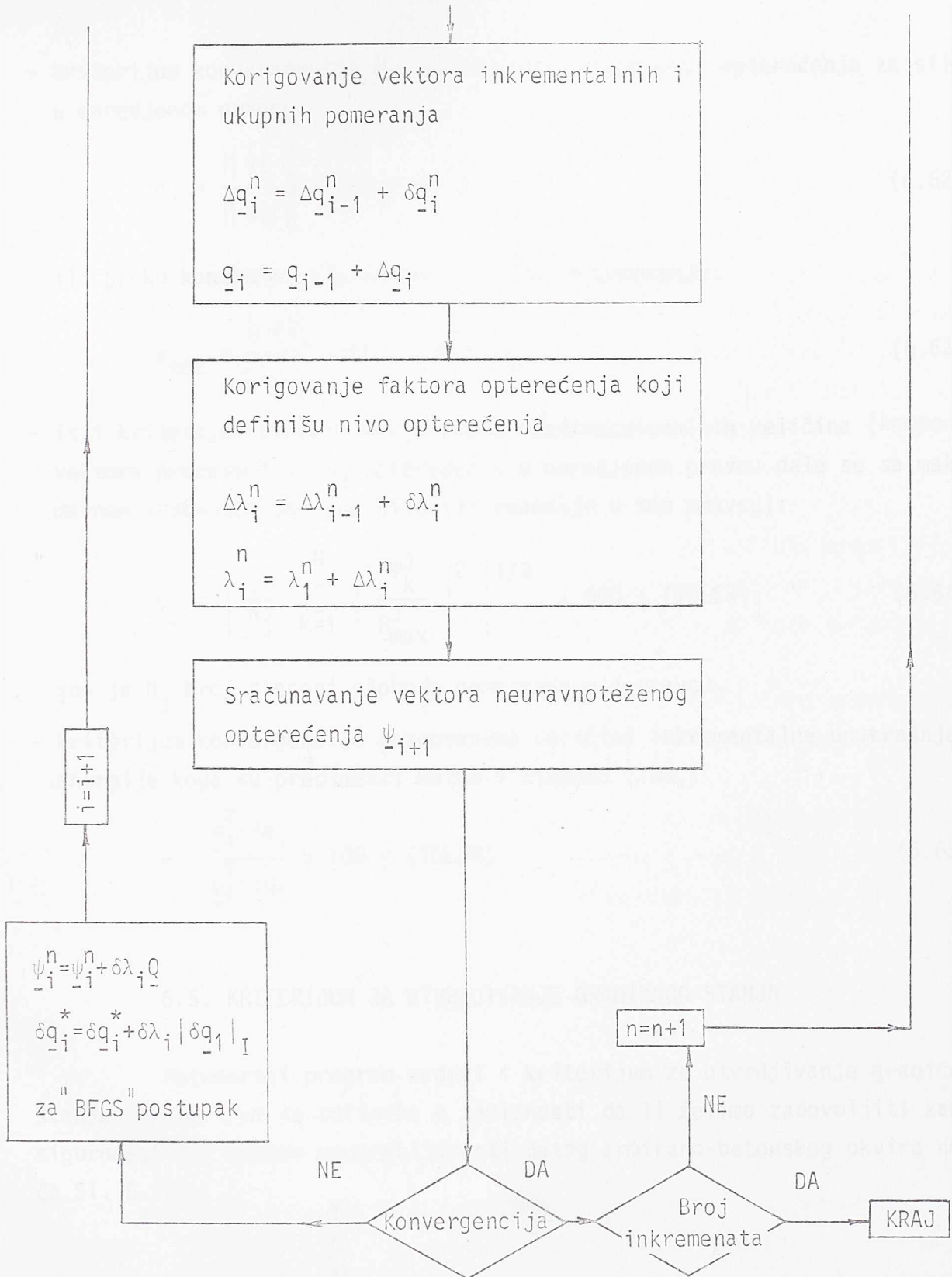
postupka tangentnog luka

$\delta\lambda_i = - \frac{a_2}{2a_1} \pm \frac{(a_2^2 - 4a_1 a_3)^{1/2}}{2a_1}$ u

slučaju sfernog luka

Korigovanje vektora pomeranja usled iteracija

$\delta q_i^n = \delta\hat{q}_i + \delta\lambda_i |\delta\hat{q}_i|_I$



Slika 6.11

- kriterijum konvergencije po vektoru neuravnoteženog opterećenja za sile u odredjenom pravcu:

$$e_j = \frac{\|\psi\|_i^j}{\|R\|_i^j} \times 100 \leq (\text{TOLER})_j \quad (6.62)$$

ili preko kontrole za sve stepene slobode pomeranja:

$$e_{\text{tot}} = \frac{\|\psi\|_i}{\|R\|_i} \times 100 \leq (\text{TOLER})_{\text{tot}} \quad (6.63)$$

- isti kriterijum konvergencije preko bezdimenzionalnih veličina (komponente vektora neuravnoteženog opterećenja u odredjenom pravcu dele se sa maksimalnom vrednošću spoljne sile ili reakcije u tom pravcu):

$$e_j = \left| \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \left| \frac{\psi_k^j}{R_{\text{max}}^j} \right|^2 \right|^{1/2} \times 100 \leq (\text{TOLER})_j \quad (6.64)$$

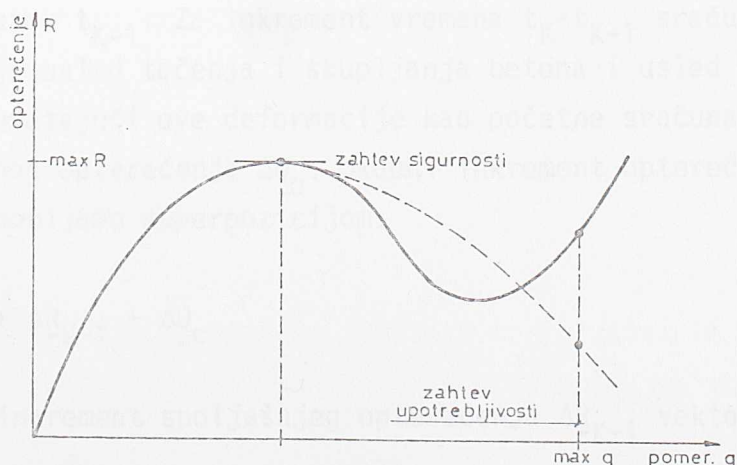
gde je N_j broj stepeni slobode pomeranja u j pravcu.

- kriterijum konvergencije zasnovan na veličini inkrementalne unutrašnje energije koga su predložili Bathe i Cimento [103]:

$$e = \frac{\underline{\psi}_i^T \cdot \delta q_i}{\underline{\psi}_1^T \cdot \delta q_1} \times 100 \leq (\text{TOLER}) \quad (6.65)$$

6.5. KRITERIJUM ZA UTVRĐIVANJE GRANIČNOG STANJA

Računarski program sadrži i kriterijum za utvrđivanje graničnog stanja. Kriterijum se definiše u zavisnosti da li želimo zadovoljiti zahtev sigurnosti ili zahtev upotrebljivosti datog armirano-betonskog okvira nosača Sl. 6.12.



Slika 6.12

7. ORGANIZACIJA RAČUNARSKOG PROGRAMA

7.1. UVODNE NAPOMENE

Na osnovu svega iznetog u prethodnim poglavljima napisan je program TANKZ-AB-3D za nelinearnu analizu armirano-betonskih punih i tankozidnih nosača sa otvorenim nedeformabilnim poprečnim presekom. Program je napisan na programskom jeziku FORTRAN V, i korišćen je na računaru DIGITAL-DEC-20.

Programom TANKZ-AB-3D moguće je rešavati sledeće vrste problema ponašanja punih i otvorenih tankozidnih nosača:

- linearno-elastično ponašanje
- geometrijski nelinearno ponašanje sa elastičnim materijalom
- simultano materijalno i geometrijski nelinearno ponašanje
- vremenski zavisno ponašanje betona koje se može kombinovati sa bilo kojim od prethodnih ponašanja.

Programom se može analizirati samo ono spoljašnje opterećenje koje deluje u čvorovima sistema. Moguće je zadati i poznata pomeranja i rotacije u oslonačkim čvorovima.

Izlazni rezultati su: pomeranje čvorova, reakcije oslonaca, vektor neuravnoteženih sila, stanje napona i deformacije u svim elementima betona i armature i presečne sile u svim štapovima sistema.

7.2. ALGORITAM REŠAVANJA

Na osnovu svega iznetog u prethodnim poglavljima algoritam rešavanja nelinearnih jednačina izgleda:

Polazimo od pretpostavke da je stanje napona i deformacija poznato za vremenski trenutak t_{K-1} . Za inkrement vremena $t_K - t_{K-1}$ sračunavamo inkremente deformacije usled tečenja i skupljanja betona i usled promene temperature. Potom shvatajući ove deformacije kao početne sračunavamo ekvivalentan vektor čvornog opterećenja ΔQ_{-0} . Ukupni inkrement opterećenja koji odgovara vremenu t_K dobijamo superpozicijom:

$$\Delta R_{-K} = \Delta R_{-K}^S + \Delta R_{-K-1} + \Delta Q_{-0}$$

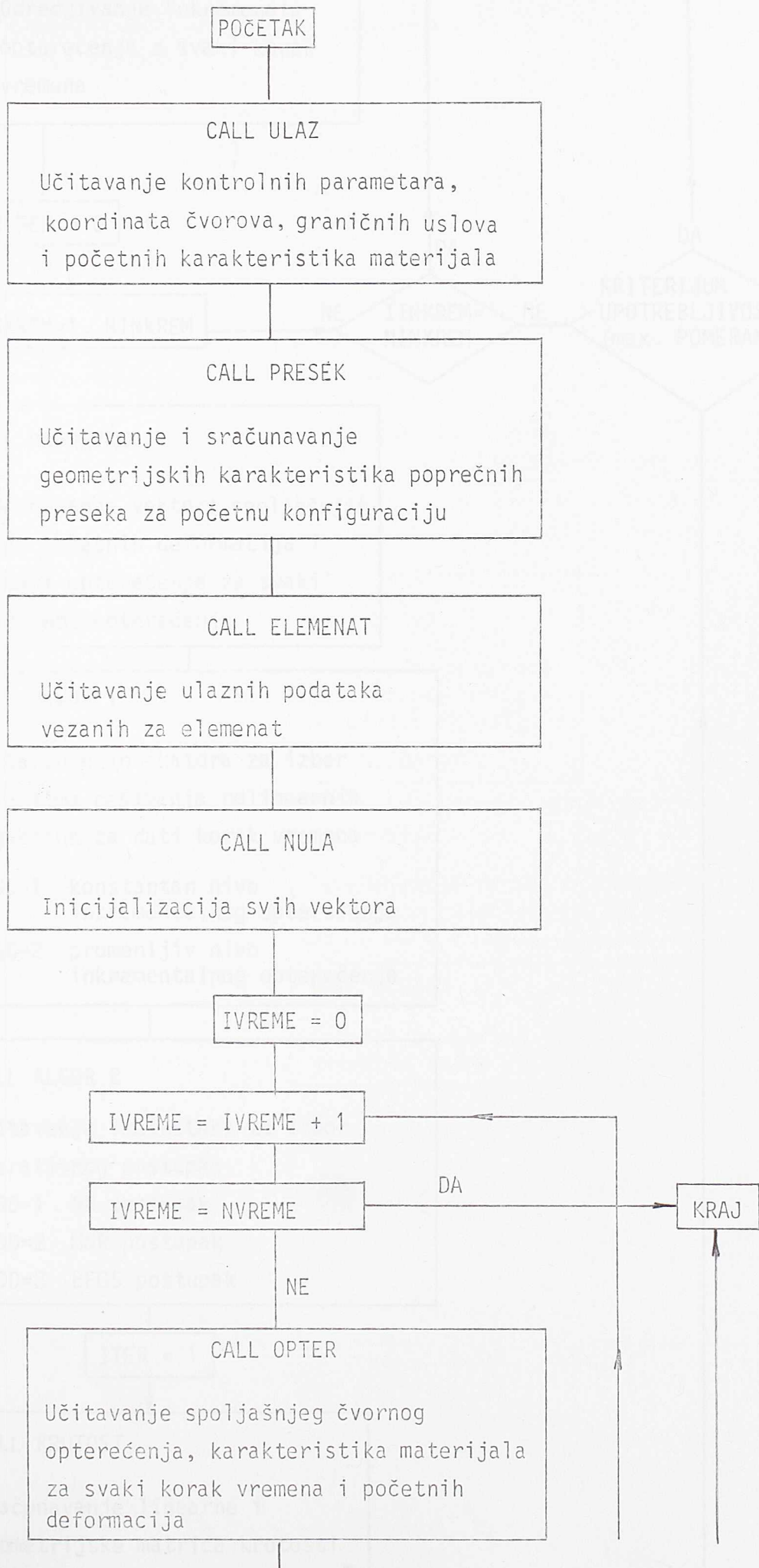
gde ΔR_{-K}^S predstavlja inkrement spoljašnjeg opterećenja ΔR_{-K-1} vektor neurav-

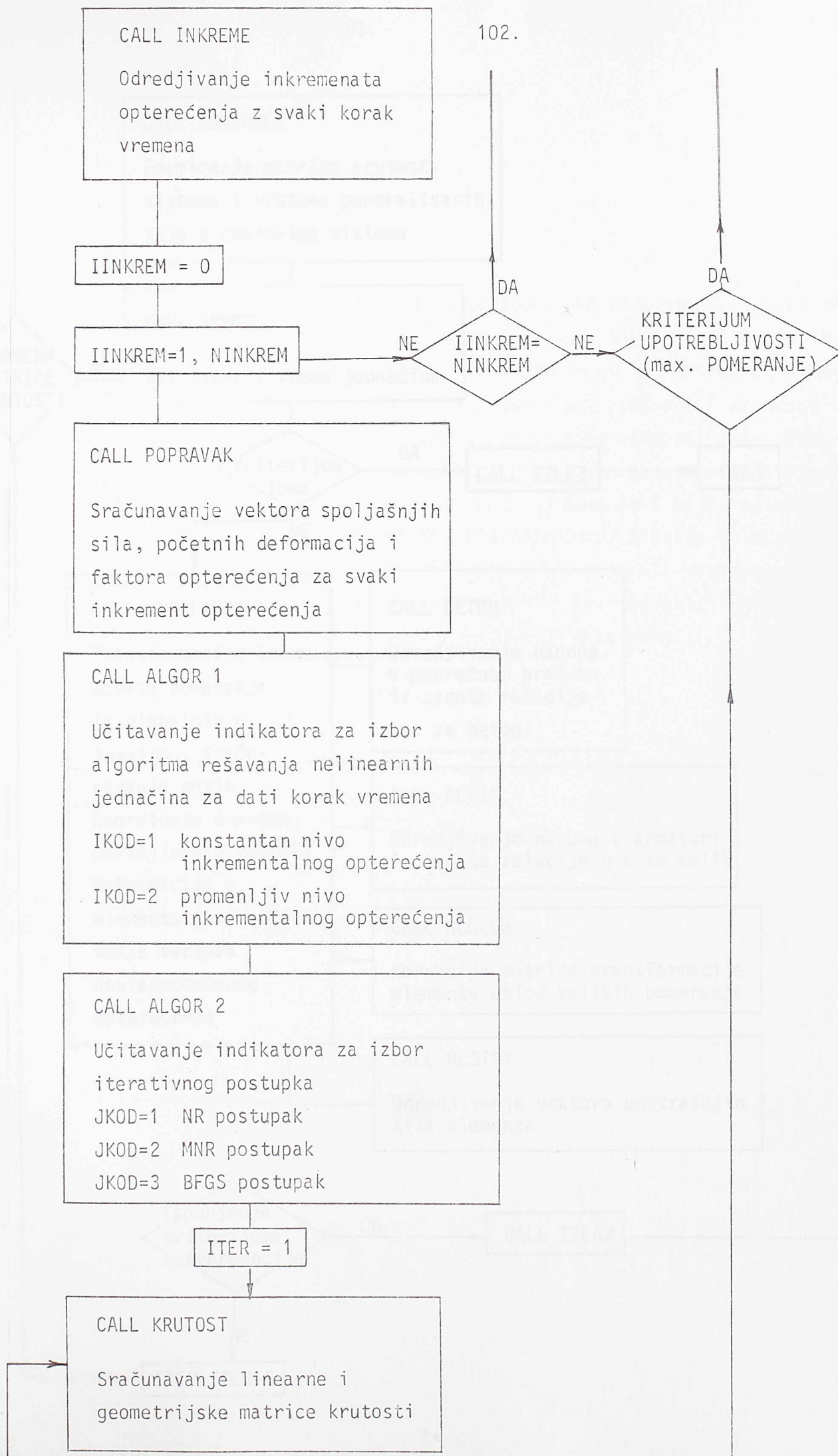
noteženog opterećenja koje odgovara vremenu t_{k-1} . Tako dobijeni vektor opterećenja delimo na potreban broj manjih delova u okviru kojih se koristi jedan od iterativnih postupaka. Pretpostavljajući da je za dostignuti nivo opterećenja, u vremenskom trenutku t_k , konfiguracija sistema određena globalnim koordinatama čvorova i čvornim silama svakog elementa, algoritam proračuna bio bi sledeći:

- 1) Formiraju se lokalne matrice krutosti polazeći od poznatih čvornih sila, geometrijskih karakteristika kao i karakteristika materijala.
- 2) Koristeći matrice transformacija, lokalne matrice krutosti i vektori čvornih sila transformišu se u globalni koordinatni sistem.
- 3) Vodeći računa o graničnim uslovima formira se matrica krutosti sistema.
- 4) Rešavanje sistema jednačina i određivanje inkremenata pomeranja i njihova transformacija na lokalne koordinate.
- 5) Određivanje inkremenata deformacije $\Delta \underline{\epsilon}$ iz inkremenata pomeranja $\Delta \underline{q}$ i sračunavanje ukupnih deformacija u betonu i armaturi.
- 6) Sračunavanje ukupnih vektora pomeranja iz kojih se određuje novi položaj štapa i vrši korekcija matrice transformacije.
- 7) Razdvajanje deformacija usled opterećenja od deformacija usled tečenja i skupljanja betona.
- 8) Polazeći od poznatih ukupnih deformacija od opterećenja sračunavaju se ukupni naponi u betonu i armaturi koristeći poznate jednoaksijalne relacije za oba materijala.
- 9) Sračunavanje vektora unutrašnjih sila, vezanih za lokalne koordinate, integracijom ukupnih napona u betonu i armaturi; transformacija na globalne koordinate koristeći korigovane matrice transformacije elemenata; formiranje ekvivalentnih čvornih sila sistema.
- 10) Formiranje vektora neuravnoteženih čvornih sila sistema i ponavljanje postupka od koraka 1 dok se ne ispuni kriterijum konvergencije.
- 11) Ponavljanje celokupnog postupka za novi inkrement opterećenja.

7.3. DIJAGRAM TOKA

Program je sastavljen od glavnog programa koji poziva 18 potprograma. Dijagram toka glavnog programa u najopštijim crtama ima oblik:





CALL INKREME

102.

Odredjivanje inkremenata
opterećenja z svaki korak
vremena

IINKREM = 0

IINKREM=1, NINKREM

NE

IINKREM=
NINKREM

NE

KRITERIJUM
UPOTREBLJIVOSTI
(max. POMERANJE)

CALL POPRAVAK

Sračunavanje vektora spoljašnjih
sila, početnih deformacija i
faktora opterećenja za svaki
inkrement opterećenja

CALL ALGOR 1

Učitavanje indikatora za izbor
algoritma rešavanja nelinearnih
jednačina za dati korak vremena
IKOD=1 konstantan nivo
inkrementalnog opterećenja
IKOD=2 promenljiv nivo
inkrementalnog opterećenja

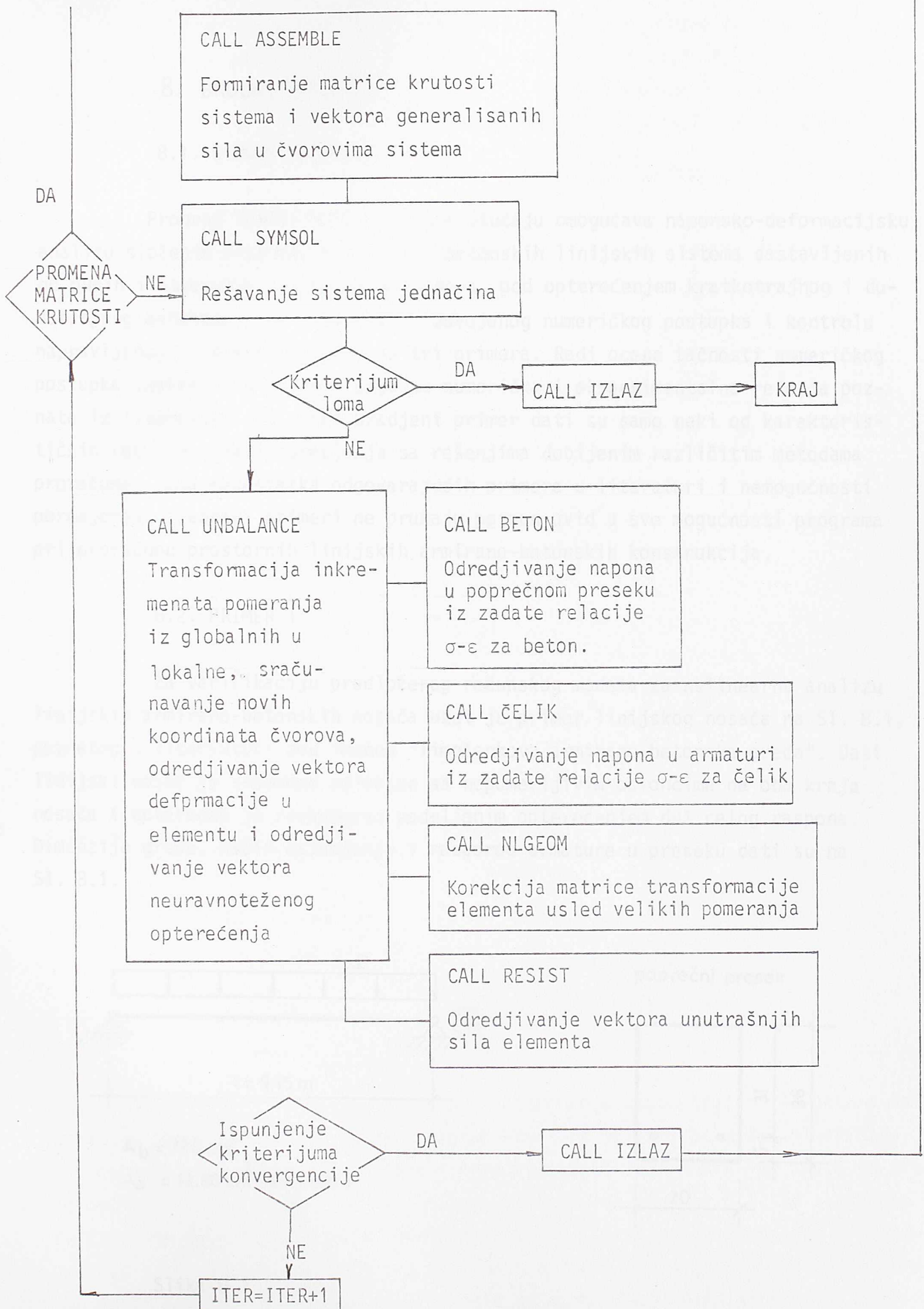
CALL ALGOR 2

Učitavanje indikatora za izbor
iterativnog postupka
JKOD=1 NR postupak
JKOD=2 MNR postupak
JKOD=3 BFGS postupak

ITER = 1

CALL KRUTOST

Sračunavanje linearne i
geometrijske matrice krutosti



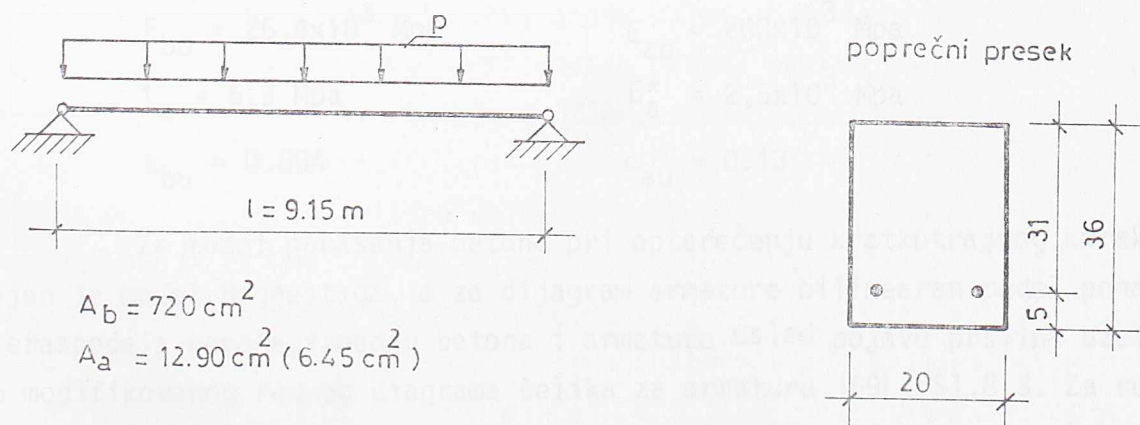
8. BROJNI PRIMERI

8.1. UVODNE NAPOMENE

Program TANKZ-AB-3D u opštem slučaju omogućava naponsko-deformacijsku analizu složenih prostornih armirano-betonskih linijskih sistema sastavljenih od punih i otvorenih tankozidnih štapova, pod opterećenjem kratkotrajnog i dugotrajnog karaktera. Za ilustraciju usvojenog numeričkog postupka i kontrolu napravljenog programa uradjena su tri primera. Radi ocene tačnosti numeričkog postupka izabrani su primeri čija su numerička i eksperimentalna rešenja poznata iz literature. Za svaki uradjeni primer dati su samo neki od karakterističnih rezultata radi poredjenja sa rešenjima dobijenim različitim metodama proračuna. Zbog nedostatka odgovarajućih primera u literaturi i nemogućnosti poredjenja, izabrani primeri ne pružaju potpun uvid u sve mogućnosti programa pri proračunu prostornih linijskih armirano-betonskih konstrukcija.

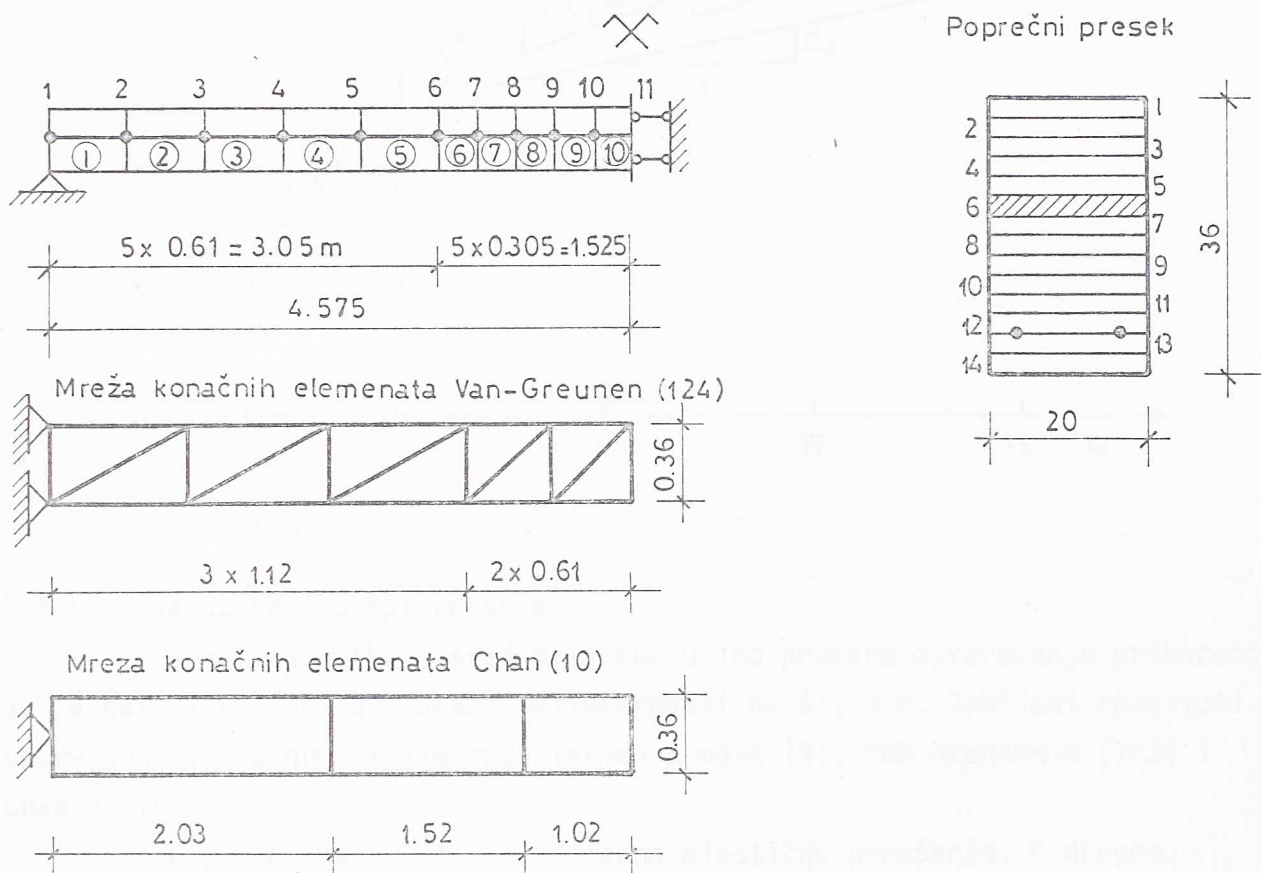
8.2. PRIMER 1

Za verifikaciju predloženog računskog modela za nelinearnu analizu linijskih armirano-betonskih nosača uzet je primer linijskog nosača na Sl. 8.1, poznatog u literaturi pod imenom "Timošenkova armirano-betonska greda". Dati linijski nosač je slobodno oslonjen sa nepomerljivim osloncima na oba kraja nosača i opterećen je ravnomerno podeljenim opterećenjem duž celog raspona. Dimenzije grede, način oslanjanja i raspored armature u preseku dati su na Sl. 8.1.



Slika 8.1

Usled simetrije, posmatrana je samo polovina grede koja je aproksimirana sa 10 konačnih elemenata različite dužine, Sl. 8.2. Kako je reč o deformaciji linijskog nosača u jednoj ravni, diskretizacija poprečnog preseka je izvršena samo sa 14 slojeva po visini preseka, Sl. 8.2. Materijalne



Slika 8.2

karakteristike betona i čelika za armaturu date su sledećim podacima:

BETON

$$\beta_c = 55,160 \text{ kpa}$$

$$E_{bo} = 26,4 \times 10^3 \text{ Mpa}$$

$$f_z = 5,3 \text{ Mpa}$$

$$\epsilon_{bu} = 0.004$$

ARMATURA

$$\sigma_v = 414 \text{ Mpa}$$

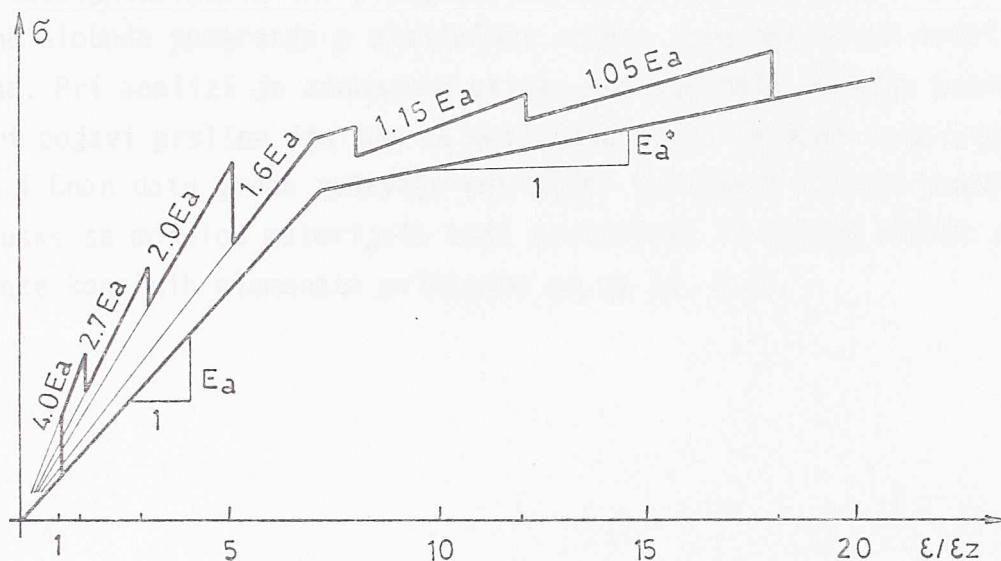
$$E_{ao} = 200 \times 10^3 \text{ Mpa}$$

$$E_a^* = 2,5 \times 10^3 \text{ Mpa}$$

$$\epsilon_{au} = 0.13$$

Za model ponašanja betona pri opterećenju kratkotrajnog karaktera usvojen je model Hognestada, a za dijagram armature bilinearan model ponašanja. Preraspodela napona između betona i armature usled pojave prslina uzeta je preko modifikovanog radnog diagrama čelika za armaturu [69], Sl.8.3. Za rešavanje nelinearnih jednačina korišćen je inkrementalno-iterativan postupak sa promenom matrice krutosti pri svakoj iteraciji. Do graničnog opterećenja bilo je potrebno oko deset koraka opterećenja u zavisnosti od sprovedene nelinearne analize. Krite

rijum konvergencije po pomeranju od 0.005% imao je kao posledicu maksimalno



Slika 8.3

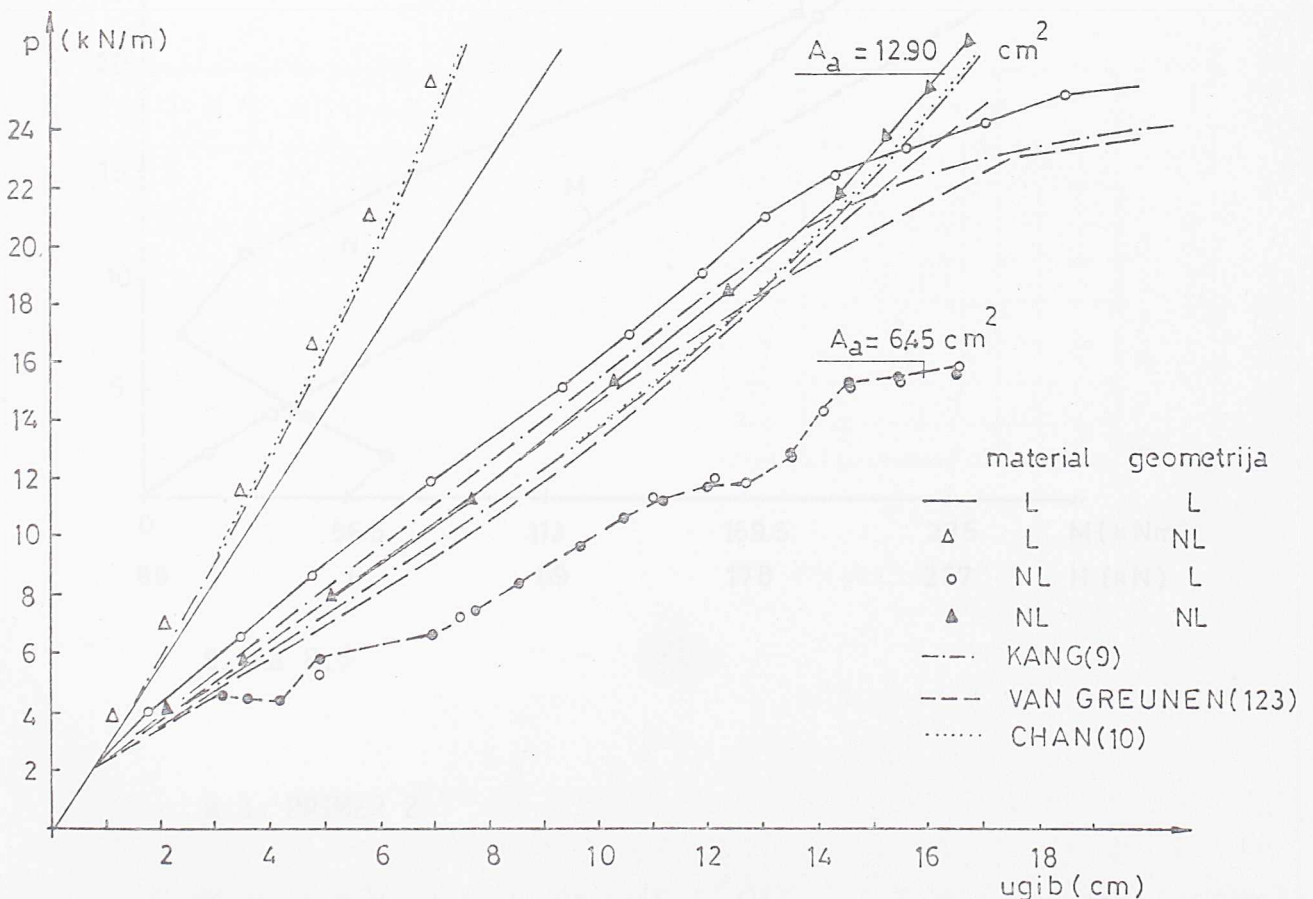
6 iteracija po koraku opterećenja.

Promena ugiba u sredini grede usled promene opterećenja prikazana je za četiri različita slučaja nelinearnosti na Sl. 8.4. Dobijeni rezultati upoređeni su sa numeričkim rezultatima Kang-a [9], Van Greunen-a [123] i Chan-a [10].

U prvom slučaju imamo linearno elastično ponašanje. U drugom slučaju razmatra se geometrijska nelinearnost uz elastično ponašanje materijala bez pojave prslina. Dobijena kriva ukazuje na povećanje krutosti date grede usled ispisivanja uslova ravnoteže na deformisanoj konfiguraciji datog konačnog elementa. U literaturi postoji analitičko rešenje datog problema koga je izveo Timošenko [124]. U trećem slučaju razmatra se samo materijalna nelinearnost. Posle pojave prve prsline, nelinearno ponašanje se manifestuje opadanjem krutosti date grede usled pojave novih prslina kao i opadanjem modula elastičnosti pritisnutog betona sve do pojave loma po pritisnutom betonu. U četvrtom slučaju dobijene su krive razmatranjem materijalne i geometrijske nelinearnosti istovremeno. čak i pri nižim nivoima opterećenja, usled razmatranja geometrijske nelinearnosti (tj. ispisivanja uslova ravnoteže na deformisanoj konfiguraciji), imamo pojavu aksijalne sile zatezanja, usled koje dolazi do novih prslina u zategnutoj zoni, što ima za posledicu smanjenje krutosti date grede. Za više nivoe opterećenja dobijena kriva pokazuje povećanje krutosti grede. U ovom slučaju aksijalna sila zatezanja smanjuje napon pritiska u betonu što ima za posledicu veću nosivost najopterećenijeg preseka nego u slučaju da se razmatra samo materijalna nelinearnost.

Poredjenjem dobijenih rezultata programom TANKZ-AB-3D sa rezultatima

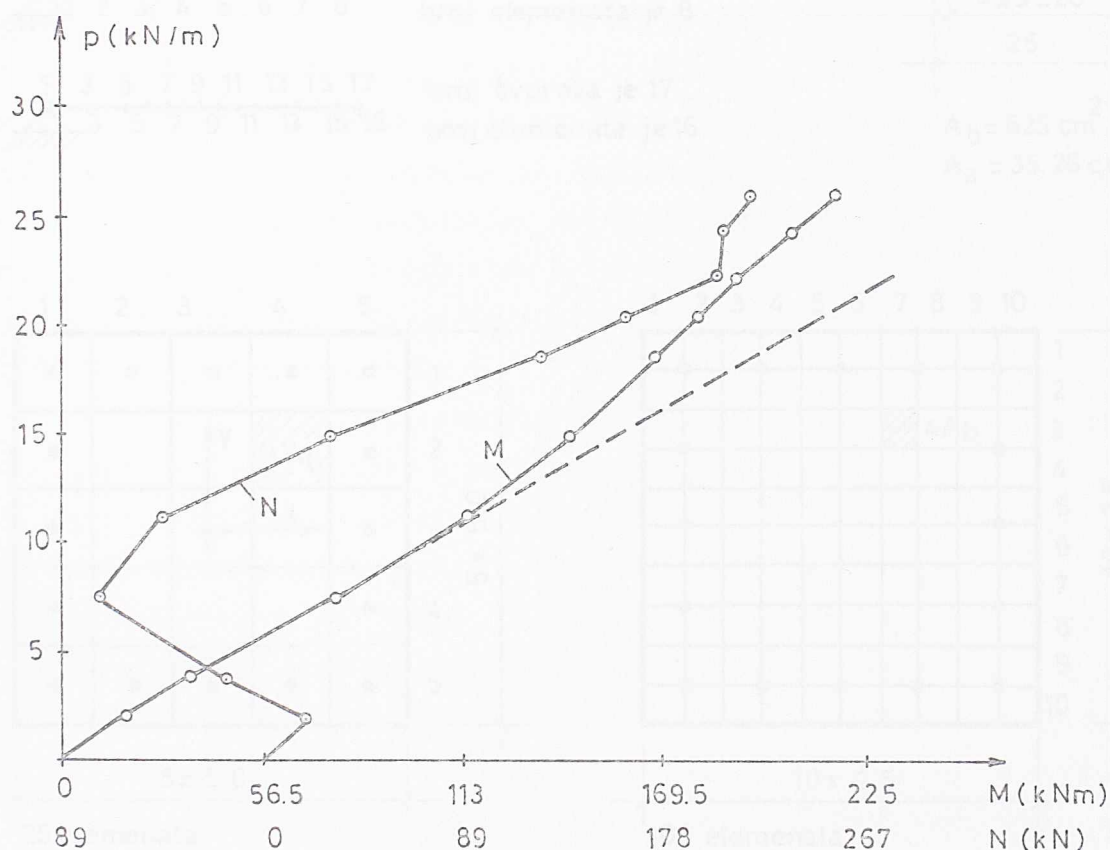
pomenutih autora ukazuje na relativno male razlike. Dobijena odstupanja su posledica razmatranja istog problema različitim računskim modelima. Kang je analizirao datu gredu koristeći linijski konačni element u ravni bez dopunskog stepena slobode pomeranja u aksijalnom pravcu i Hognestad-ov model ponašanja betona. Pri analizi je zanemaren uticaj preraspodele izmedju betona i armature pri pojavi prslina što ima za posledicu manju krutost date grede. Van Greunen i Chan datu gredu rešavaju koristeći trougaoni i četvorougaoni element ljuske sa modelom materijala koji proizilazi iz ravnog stanja naprezanja. Mreže konačnih elemenata prikazane su na Sl. 8.2.



Slika 8.4

Na istom dijagramu prikazana je i kriva koja se dobija kada je površina date armature dva puta manja. U ovom slučaju do loma dolazi usled plastičnog tečenja u armaturi. Dobijena kriva ukazuje na iznenadne promene krutosti i značajne preraspodele napona u betonu u svakom koraku opterećenja posle pojave prslina. Za isti korak opterećenja i kriterijum konvergencije bilo je potrebno skoro tri puta više iteracija za uravnoteženje spoljašnjeg opterećenja. Daleko efikasnijim se pokazao samo inkrementalni postupak sa malim korakom opterećenja.

Na Sl. 8.5 prikazana je promena presečnih sila (momenta i normalne sile) usled promene opterećenja za slučaj materijalne i geometrijske nelinearnosti istovremeno.

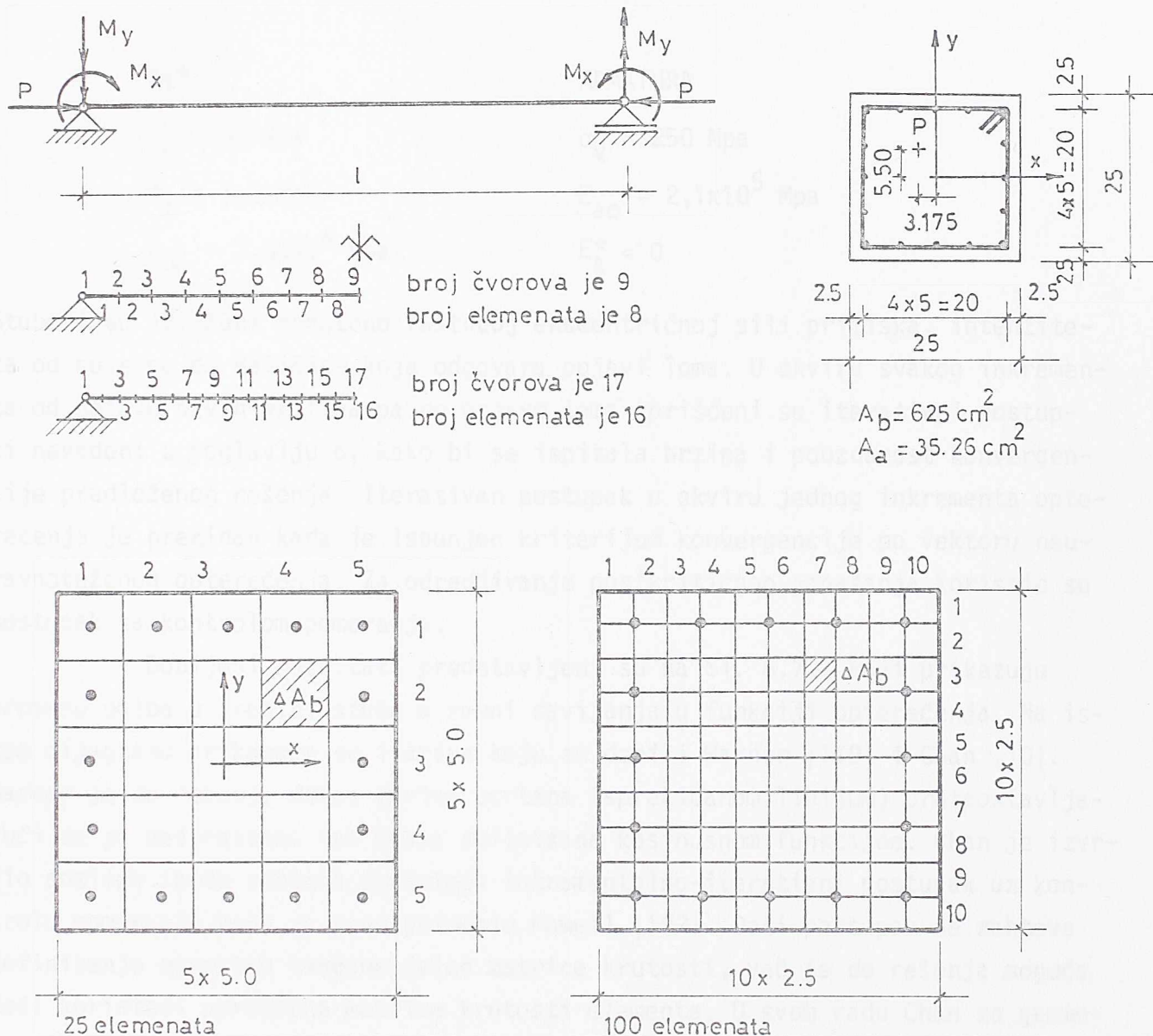


Slika 8.5

8.3. PRIMER 2

Radi sagledavanja mogućnosti napisanog programa za nelinearnu analizu prostornih armirano-betonskih nosača, uključujući materijalnu i geometrijsku nelinearnost istovremeno, pod opterećenjem kratkotrajnog karaktera, analizirana su četiri ekscentrično pritisnuta stuba za koje u literaturi postoje

eksperimentalni i numerički rezultati [119]. Stubovi imaju iste dimenzije poprečnih preseka i procenite armiranja a različite dužine $l=1,25; 2,5; 5; 10$ m. Dimenzije stubova, način oslanjanja i raspored armature u preseku dati su na Sl. 8.6.



Slika 8.6

Radi ocene tačnosti rezultata, diskretizacija stuba izvršena je sa različitim brojem konačnih elemenata. Zbog simetrije, posmatrana je samo polovina stuba. Aproksimacija je izvršena sa osam i šesnaest konačnih elemenata punog poprečnog preseka jednakih dužina. Diskretizacija betonskog preseka izvršena je sa 25 i 100 jednodimenzionalnih elemenata, čija je ukupna površina ekvivalentna ukupnoj površini poprečnog preseka. Položaj i površina armature odgovaraju realnom stanju. Pri analizi zanemaren je uticaj poprečne armature

kao i uticaj preraspodele napona izmedju betona i armature pri pojavi prslina.

Za model ponašanja betona pri opterećenju kratkotrajnog karaktera usvojen je model krive dat prema važećim jugoslovenskim propisima, a za armaturu pretpostavljen je idealno elastoplastičan model ponašanja. Materijalne karakteristike betona i čelika za armaturu date su sledećim podacima:

BETON

$$\beta_c = 30 \text{ Mpa}$$

$$f_z = 1,0 \text{ Mpa}$$

$$E_{bo} = 3,0 \times 10^4 \text{ Mpa}$$

ARMATURA

$$\sigma_v = 250 \text{ Mpa}$$

$$E_{ao} = 2,1 \times 10^5 \text{ Mpa}$$

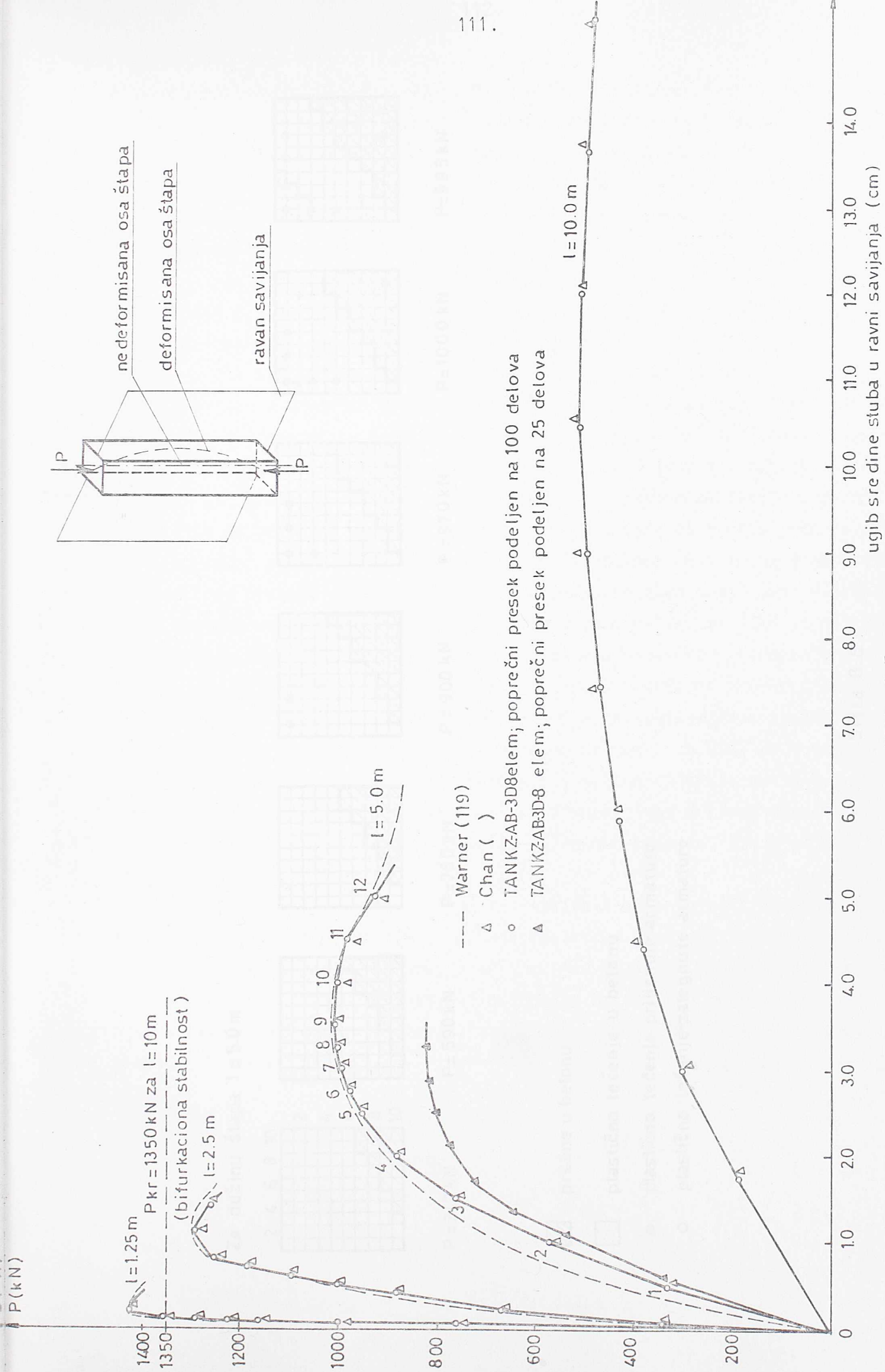
$$E_a^* = 0$$

Stubovi su izloženi monotono rastućoj ekscentričnoj sili pritiska, intenziteta od nule pa do veličine koja odgovara pojavi loma. U okviru svakog inkrementa od pojave prvih prslina pa do pojave loma korišćeni su iterativni postupci navedeni u poglavlju 6, kako bi se ispitala brzina i pouzdanost konvergencije predloženog rešenja. Iterativan postupak u okviru jednog inkrementa opterećenja je prekidan kada je ispunjen kriterijum konvergencije po vektoru neuravnoteženog opterećenja. Za odredjivanje postkritičnog ponašanja koristio se postupak sa kontrolom pomeranja.

Dobijeni rezultati predstavljeni su na Sl. 8.7., koji prikazuju promenu ugiba u sredini stuba u ravni savijanja u funkciji opterećenja. Na istom dijagramu prikazane su i krive koju su dobili Warner [119] i Chan [10]. Warner je do rešenja došao (kriva ucrtana isprekidanom linijom) pretpostavljajući da je deformisana osa štapa definisana kosinusnom funkcijom. Chan je izvršio analizu istih stubova koristeći inkrementalno-iterativni postupak uz kontrolu pomeranja koju je prvi primenio Powell [122]. Dati postupak ne zahteva definisanje egzaktne tangencijalne matrice krutosti, već je do rešenja moguće doći koristeći uprošćene matrice krutosti elementa. U svom radu Chan za geometrijsku matricu krutosti grednog elementa koristi geometrijsku matricu krutosti prostornog aksijalno napregnutog elementa.

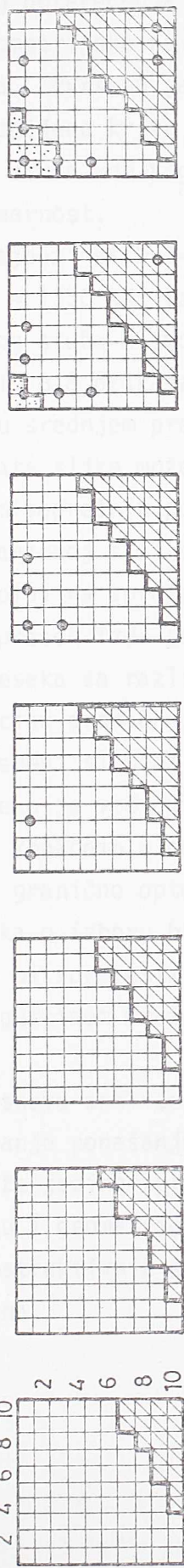
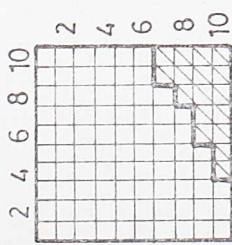
Poredjenjem numeričkih rezultata dobijenim korišćenjem programa TANKZ-AB-3D sa rezultatima Warner-a i Chan-a ukazuje na veoma dobro slaganje za stubove kraćih raspona. Kod dužih stubova postoje odstupanja koja su posledica različitog pristupa razmatranja geometrijske nelinearnosti.





Razmatranjem stubova istog poprečnog preseka i procenta armiranja a različite dužine može se najbolje shvatiti neophodnost primene predloženog numeričkog postupka. Kao što se sa dijagrama, Sl. 8.7, može primetiti, povećanjem dužine stuba od najkraćeg do najdužeg smanjuje se granično opterećenje od 1440 kN na 500 kN, ili drugim rečima za povećanje vitkosti od 800% imamo sma-



Slika 8.7

Za dužinu štapa $l = 5.0 \text{ m}$



-  prsline u betonu
-  plastično tečenje u betonu
-  plastično tečenje pritisnute armature
-  plastično tečenje zategnute armature

Stika 8.8

njenje graničnog opterećenja od približno 65%. Da bi se shvatila neophodnost uključivanja geometrijske nelinearnosti pri analizi vitkih ekscentrično pritisnutih stubova, izvršena je statička analiza uključujući samo materijalnu nelinearnost. Dobijena kriva i granično opterećenje približno odgovaraju rešenju najkraćeg stuba kod koga se istovremeno razmatraju i materijalna i geometrijska nelinearnost.

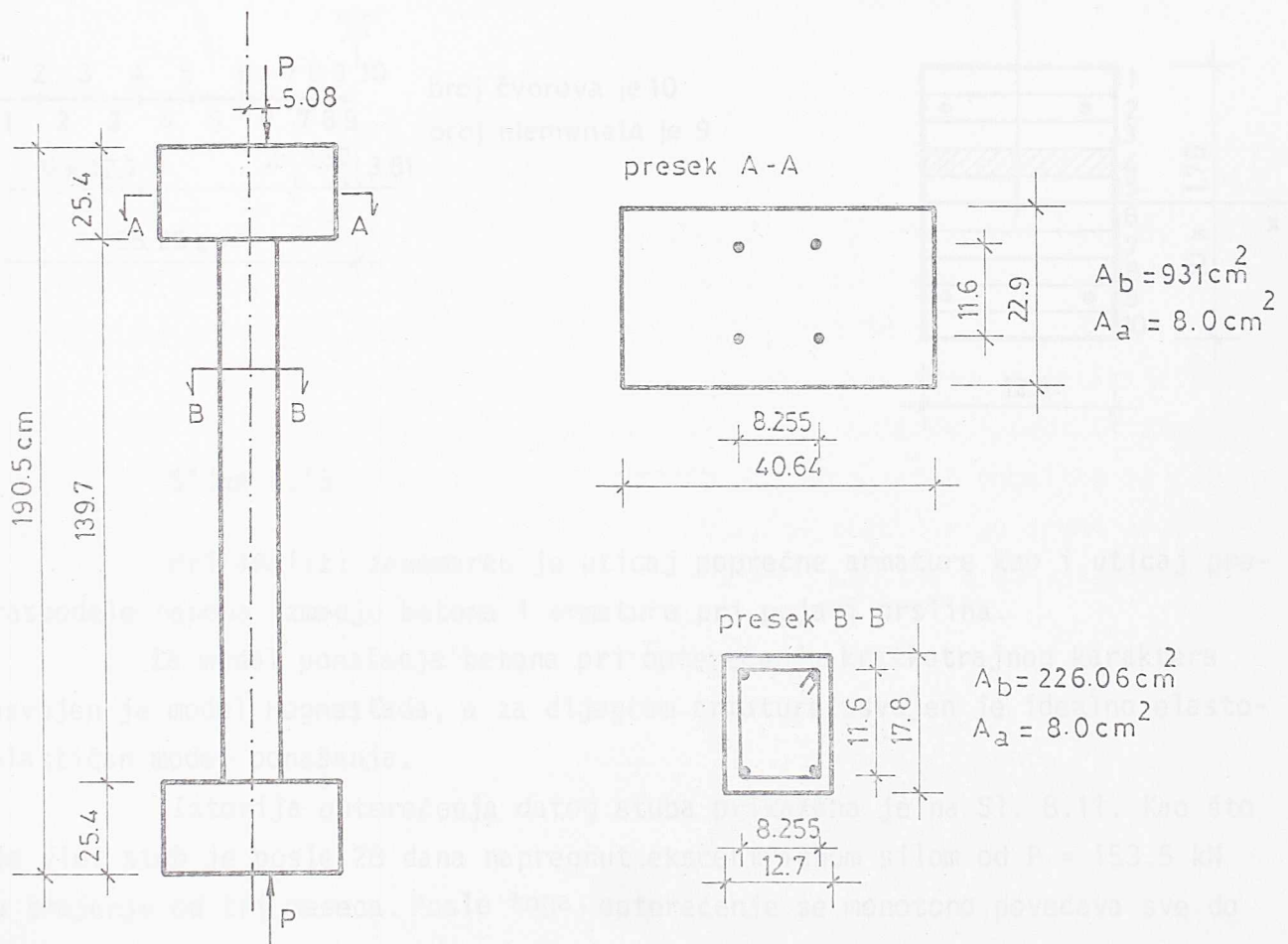
Za najduži stub $l=10,0$ m određena je i kritična sila izvijanja koja iznosi $P_{kr} = 1350$ kN. Kao što se vidi korišćenjem samo bifurkacione stabilnosti idealnog stuba nismo na strani sigurnosti.

Na Sl. 8.8 prikazane je pojava i razvoj prslina kao i plastično tečenje armature u srednjem preseku stuba dužine $l=5.0$ m za različite nivoe opterećenja. Sa date slike može se primetiti obrtanje ravni savijanja, koja se izražava odnosom poprečnih pomeranja datog preseka. Ukupna rotacija iznosi oko $4,5^\circ$ pri graničnoj sili od $P \approx 1000$ kN. Prikazani rezultati odgovaraju stubu čija je polovina aproksimirana sa osam konačnih elemenata jednake dužine, a poprečni presek izdelfjen na sto jednakih delova. Pri istoj diskretizaciji poprečnog preseka sa različitim brojem jednakih elemenata imamo relativno sporu konvergenciju graničnog opterećenja. Drugim rečima za stub sa dvostruko većim brojem stepeni slobode pomeranja, dobijeno granično opterećenje se razlikuje za 4%. Daleko je veći uticaj diskretizacije poprečnog preseka. Za stub sa istim brojem konačnih elemenata po dužini a različitom diskretizacijom poprečnog preseka, granično opterećenje može da ostupa i do 20%. Za donošenje konačnih zaključaka o izboru broja elemenata i načina diskretizacije poprečnog preseka trebalo bi sprovesti analizu i sa promenljivom dužinom elemenata kao i promenljivom gustinom mreže elemenata poprečnog preseka, što u ovom primeru nije učinjeno.

Na osnovu analize dobijenih rezultata može se zaključiti da se realno sagledavanje ponašanja vitkih ekscentrično pritisnutih armirano betonskih stubova može jedino sprovesti nelinearnom analizom uključujući istovremeno i materijalnu i geometrijsku nelinearnost. Za potpuno sagledavanje ponašanja ovakvih konstruktivnih elemenata trebalo bi uključiti i efekte tečenja i skupljanja betona.

8.4. PRIMER 3

Da bi se ilustrovale mogućnosti predloženog algoritma pri analizi armirano-betonskih konstrukcija pod opterećenjem dugotrajnog karaktera kao drugi primer izabran je ekscentrično pritisnut stub za koga postoje eksperimentalni i numerički rezultati [10][120]. Dati stub je jedan iz niza opitnih, ekscentrično pritisnutih stubova, različite vitkosti, koje je eksperimentalno ispitivao Hellesland [120] radi sagledavanja uticaja tečenja i skupljanja betona na granično stanje loma. Dimenzije stuba i raspored armature po preseku dati su na Sl. 8.9.



Slika 8.9

Zbog simetrije, polovina stuba je podeljena na devet konačnih elemenata različite dužine Sl.8.10. S obzirom da je reč o savijanju u jednoj ravni, diskretizacija poprečnog preseka je izvršena sa deset betonskih elemenata iste površine, Sl. 8.10. Položaj i površina armature odgovaraju realnom stanju.

Materijalne karakteristike betona i čelika za armaturu date su sledećim podacima:

BETON

$$\beta_c = 36,5 \text{ Mpa}$$

$$f_z = 3,0 \text{ Mpa}$$

$$E_{bo} = 2,86 \times 10^4 \text{ Mpa}$$

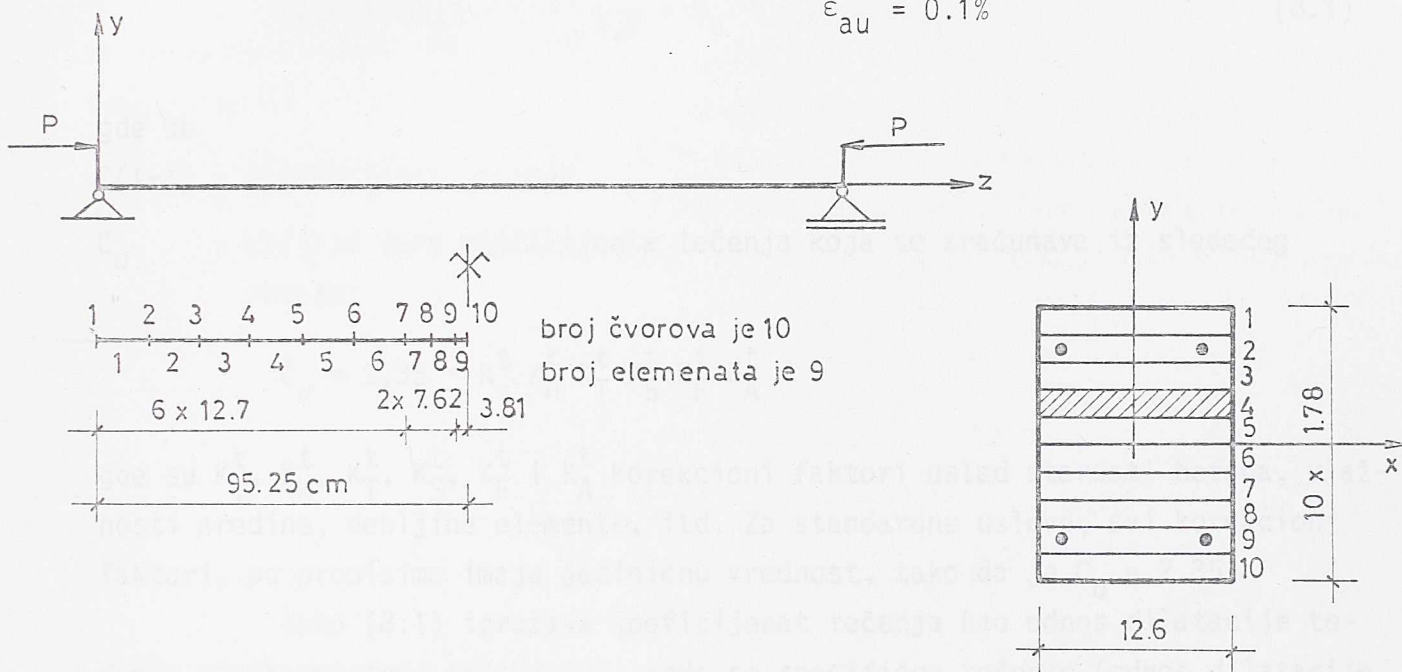
ARMATURA

$$\sigma_v = 407,0 \text{ Mpa}$$

$$E_{ao} = 2,1 \times 10^5 \text{ Mpa}$$

$$E_a^* = 0,0$$

$$\epsilon_{au} = 0.1\%$$

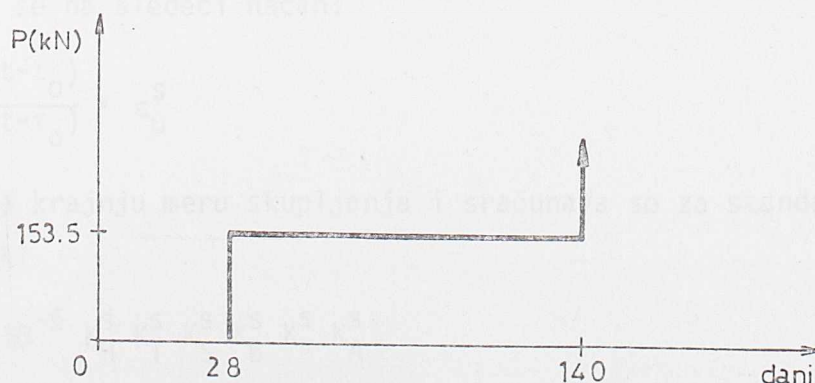


Slika 8.10

Pri analizi zanemaren je uticaj poprečne armature kao i uticaj preraspodele napona izmedju betona i armature pri pojavi prslina.

Za model ponašanja betona pri opterećenju kratkotrajnog karaktera usvojen je model Hognestada, a za dijagram armature usvojen je idealno elasto-plastičan model ponašanja.

Istorija opterećenja datog stuba prikazana je na Sl. 8.11. Kao što se vidi stub je posle 28 dana napregnut ekscentričnom silom od $P = 153.5 \text{ kN}$ u trajanju od tri meseca. Posle toga, opterećenje se monotono povećava sve do loma stuba.



Slika 8.11

Radi što jednostavnijeg sračunavanja uticaja tečenja i skupljanja, period od tri meseca je aproksimiran samo sa jednim vremenskim korakom. Za sračunavanje osnovnih parametara deformacije tečenja i skupljanja betona korišćeni su izrazi predloženi od strane ACI komiteta za beton [60] bazirani na istraživanjima Bransona [121]. Prema tim propisima koeficijent tečenja može se izraziti na sledeći način:

$$C(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{0,6}}{10 + (t-\tau)^{0,6}} \cdot C_u \quad (8.1)$$

gde su

$C(t-\tau)$ - koeficijent tečenja

C_u - krajnja mera koeficijenta tečenja koja se sračunava iz sledećeg izraza:

$$C_u = 2,35 \cdot K_T^t K_H^t K_T^t K_S^t K_F^t K_A^t$$

gde su K_T^t , K_H^t , K_T^t , K_S^t , K_F^t i K_A^t korekcionni faktori usled starosti betona, vlažnosti sredine, debljine elementa, itd. Za standardne uslove, svi korekcionni faktori, po propisima imaju jediničnu vrednost, tako da je $C_u = 2,35$.

Kako (8.1) izražava koeficijent tečenja kao odnos dilatacije tečenja prema početnoj dilataciji, onda se specifično tečenje (odnos dilatacije tečenja prema jediničnom naponu) može dobiti ako dati izraz podelimo sa početnim modulom elastičnosti $E_i(\tau)$. Koeficijenti a_j se sračunavaju prema algoritmu datom u poglavlju 4 za starost od $\tau=28$ dana i početni modul elastičnosti betona $E_{b0} = 2,86 \times 10^4$ Mpa, i iznose:

$$a_1 = 2,02565 \times 10^{-7}$$

$$a_2 = 1,85702 \times 10^{-7}$$

$$a_3 = 1,37290 \times 10^{-7}$$

Dilatacija skupljanja je takodje uzeta prema propisima ACI komiteta za beton i izražava se na sledeći način:

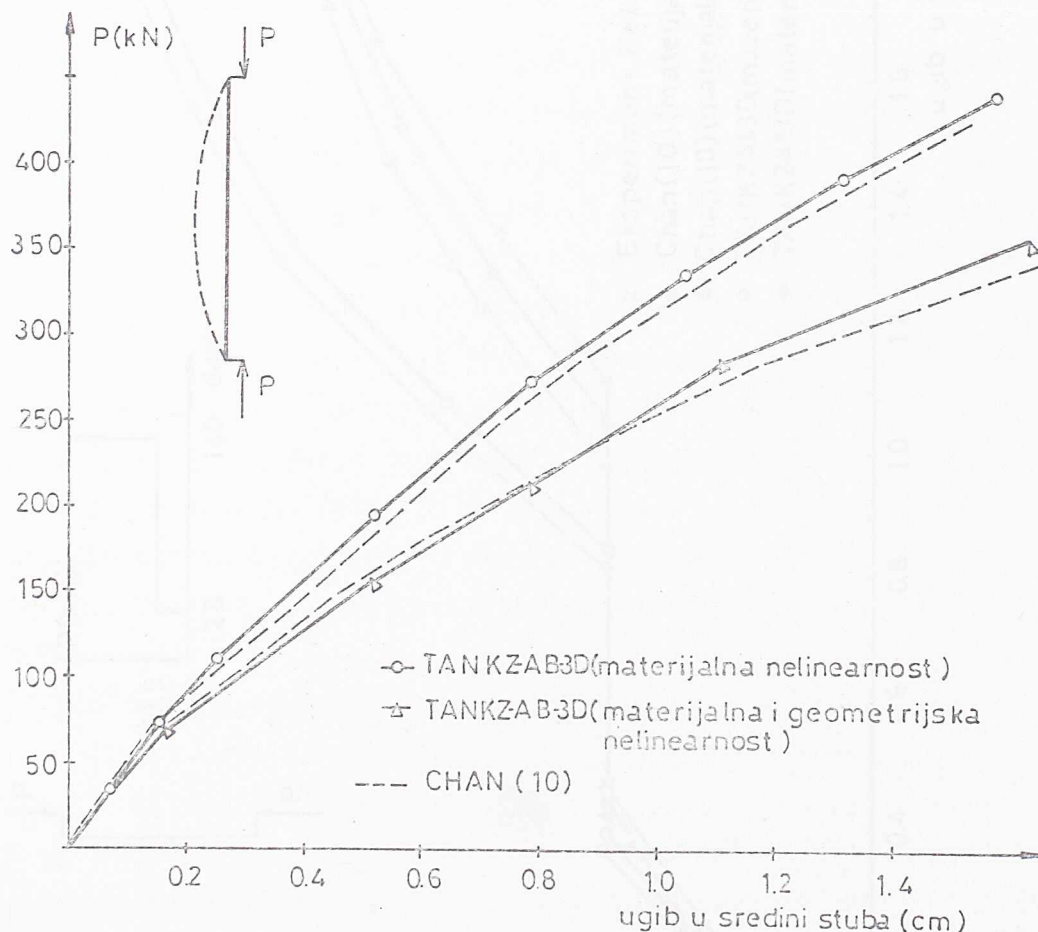
$$\epsilon_{t-\tau_0}^S = \frac{(t-\tau_0)}{f+(t-\tau_0)} \cdot \epsilon_u^S$$

Veličina ϵ_u^S predstavlja krajnju meru skupljanja i sračunava se za standardne uslove na osnovu izraza:

$$\epsilon_u^S = 800 \times 10^{-6} K_H^S K_T^S K_S^S K_B^S K_F^S K_A^S$$

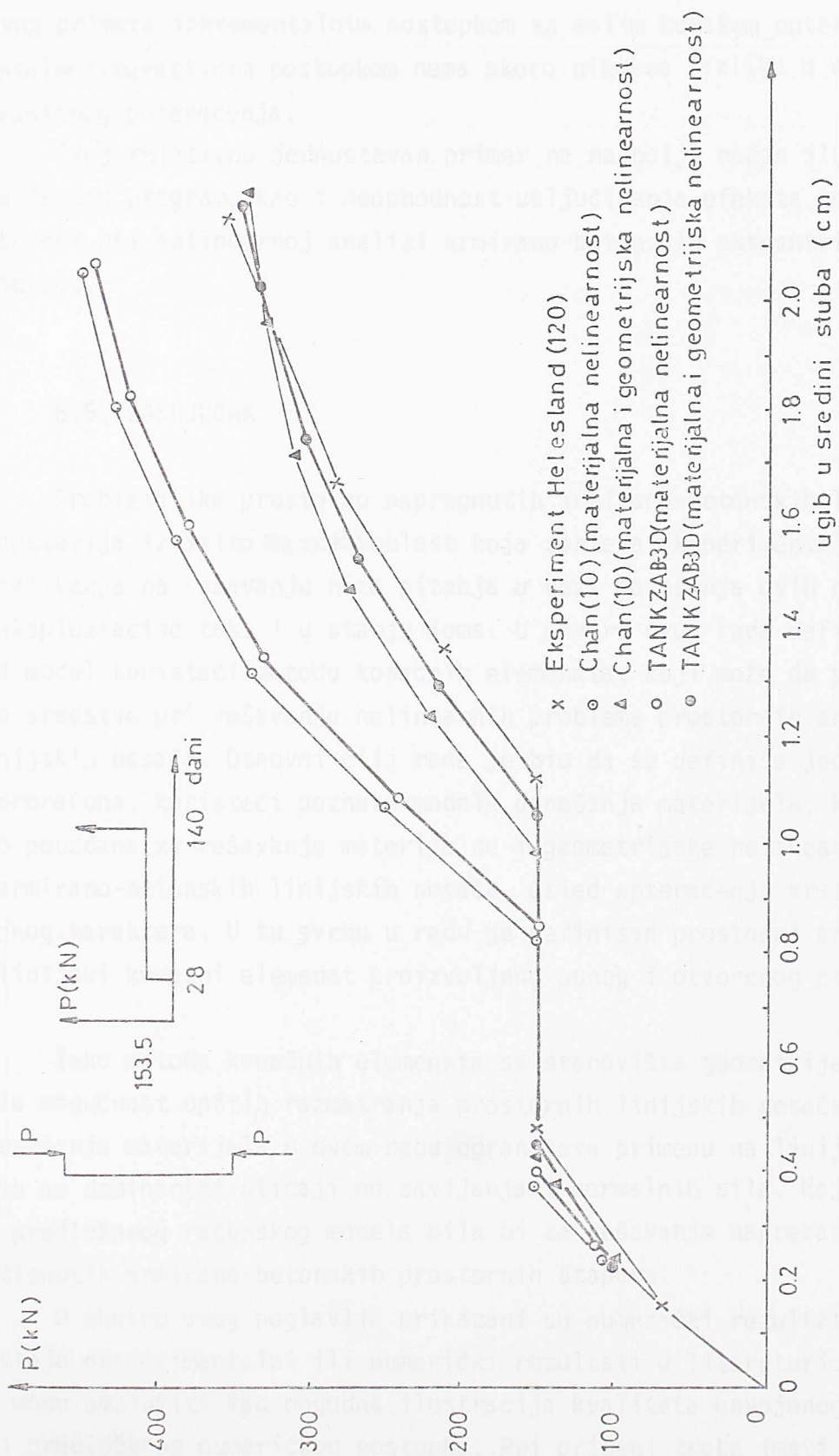
Pri standardnim uslovima korekcionni faktori K_H^S , K_T^S , K_S^S , K_B^S , K_F^S i K_A^S imaju jediničnu vrednost.

Na Sl. 8.12 prikazana je promena ugiba u sredini stuba usled promene opterećenja kratkotrajnog karaktera. Radi poredjenja, izvršena je nelinearna analiza za monotono rastuće opterećenje uzimajući u prvom slučaju samo materijalnu nelinearnost a u drugom i materijalnu i geometrijsku nelinearnost istovremeno. Da bi se ispitala efikasnost postupka za rešavanje nelinearnih jednačina, isti primer, pri kratkotrajnom opterećenju, rešavan je primenom inkrementalnog postupka sa korakom opterećenja $P = 25$ kN i inkrementalno-iterativnog sa korekcijom matrice krutosti na početku svakog inkrementa. Dobijeni rezultati upoređeni su sa numeričkim rezultatima do kojih je došao Chan [10]. Relativno male razlike koje se javljaju su posledica korišćenja različitih modela betona kao i različitog pristupa pri razmatranju geometrijske nelinearnosti.



Slika 8.12

Promena ugiba u sredini stuba usled dugotrajnog opterećenja uzimajući u obzir tečenje i skupljanje betona prema propisima ACI prikazana je na Sl. 8.13. Dobijeni rezultati upoređeni su sa eksperimentalnim rezultatima Hellesland-a i numeričkim rezultatima Chan-a. Evidentno je dobro slaganje do-



Slika 8.13

bijenih rezultata sa eksperimentalnim rezultatima u slučajevima kada se istovremeno razmatraju i materijalna i geometrijska nelinearnost. U slučaju da je nelinearna analiza sprovedena razmatrajući samo materijalnu nelinearnost, odstupanja rezultata su znatna. Interesantno je napomenuti da prilikom rešavanja ovog primera inkrementalnim postupkom sa malim korakom opterećenja i inkrementalno-iterativnim postupkom nema skoro nikakve razlike u veličini dobitog graničnog opterećenja.

Ovaj relativno jednostavan primer na najbolji način ilustruje mogućnost napisanog programa kao i neophodnost uključivanja efekata tečenja i skupljanja betona pri nelinearnoj analizi armirano-betonskih ekscentrično pritisnutih stubova.

8.5. ZAKLJUČAK

Problematika prostorno napregnutih armirano-betonskih linijskih nosača predstavlja izrazito široku oblast koja zahteva eksperimentalna i teorijska istraživanja na rešavanju niza pitanja u vezi ponašanja ovih nosača kako u stanju eksploatacije tako i u stanju loma. U okviru ovog rada definisan je računski model koristeći metodu konačnih elemenata, koji može da posluži kao efikasno sredstvo pri rešavanju nelinearnih problema prostornih armirano-betonskih linijskih nosača. Osnovni cilj rada je bio da se definiše jedna opšta metoda proračuna, koristeći poznate modele ponašanja materijala, koja bi bila dovoljno pouzdana za rešavanje materijalne i geometrijske nelinearnosti prostornih armirano-betonskih linijskih nosača, usled opterećenja kratkotrajnog i dugotrajnog karaktera. U tu svrhu u radu je definisan prostorni armirano-betonski linijski konačni element proizvoljnog punog i otvorenog poprečnog preseka.

Iako metoda konačnih elemenata sa stanovišta geometrije i opterećenja pruža mogućnost opštih razmatranja prostornih linijskih nosača, usvojeni model ponašanja materijala u ovom radu ograničava primenu na linijske nosače kod kojih su dominantni uticaji od savijanja i normalnih sila. Najadekvatnija primena predloženog računskog modela bila bi za rešavanje naprezanja ekscentrično pritisnutih armirano-betonskih prostornih štapova.

U okviru ovog poglavlja prikazani su numerički rezultati primera za koje postoje eksperimentalni ili numerički rezultati u literaturi. Analizirani primeri mogu poslužiti kao pogodna ilustracija kvaliteta usvojenog računskog modela i predloženog numeričkog postupka. Pri primeni treba imati na umu da na pouzdanost i efikasnost rešenja utiče čitav niz faktora kao što su: izbor modela ponašanja materijala, uticaj preraspodele napona usled pojave prslina,

9. LITERATURA

- [1] Ngo, D., Scordelis, A.C., "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams", *American Concrete Institute Journal*, v.64, No.3, March 1967.
- [2] Scordelis, A.C., "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures", *Proceedings of Speciality Conference on Finite Element Methods in Civil Engineering*, Montreal, June 1972.
- [3] Scordelis, A.C., "Analytical Models for Nonlinear Material, Geometric and Time Dependent Effects", *Proceedings of the International Symposium on Nonlinearity and Continuity in Prestressed Concrete*, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, July 1983.
- [4] Schnobrich, W.C., "Behaviour of Reinforced Concrete Predicted by Finite Element Method", *Proceedings of the Second National Symposium on Computerized Structural Analysis and Design*, George Washington University, Washington, D.C., March 1976.
- [5] ASCE Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures: "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete", State-of-the-Art Report, ASCE Special Publication, 1982.
- [6] Selna, L.G., "Time Dependent Behaviour of Reinforced Concrete Structures", UC-SESM Report No. 67-19, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, 1967.
- [7] Aas-Jackobsen, K., "Design of Slender Reinforced Concrete Frames", Bericht No. 48, Institute für Baustatik, ETH, Zurich 1973.
- [8] Aldstedt, E., "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames", Division of Structural Mechanics, Institute of Technology, University of Trondheim, Norway, 1975.
- [9] Kang, Y.J., "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames", Ph. D. Dissertation, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, UC-SESM Report No.77-1. January 1977.

- [10] Chan, E.C., "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced Concrete Stells with Edge Beams", Ph. D. Dissertation. Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, December 1982.
- [11] Mari A., Chan, E.C., Scordelis, A.C., "Nonlinear Material, Geometric and Time Dependent Analysis of 3-D Reinforced and Prestressed Concrete Frames, Proceedings of the 2nd International Conference held at Universidad Polytechnica De Barcelona, Spain, April, 1984.
- [12] Kollbrunner, F., Hajdin, N., "Dünnwandige Stäbe", Band I, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1975.
- [13] Kollbrunner, F., Hajdin, N., "Dünnwandige Stäbe, Band II, Springer Verlag, Berlin-Heidellerg, New York 1978.
- [14] Grob, J., Thürlimann, B., "Wölb-torsionsversuche an Stahlbetonbalken mit offenem Querschnitt", Institut für Baustatik, ETH, Zurich, 1974.
- [15] Grob, J., "Traglast von Stäben mit Dünnwandigen Offenen Querschnitten", Institut für Baustatik, ETH, Zurich, 1975.
- [16] Vlasov, V.Z., "Thin-Walled Elastic Beams", 2nd edn., National Science Foundation, Washinton D.C., 1961.
- [17] Krahula, J.L., "Analysis of Bent and Twisted Bars using the Finite Element Method", AIAA Journal, Vol. 5, 1967, str. 1194-1197.
- [18] Renton, J.D., "Stability of Space Frames by Computer Analysis", J. Struct. Div., ASCE, Vol. 88, No. ST4, Aug. 1962, Str. 81-103.
- [19] Krajčinović, D., "A Consistent Discrete Elements Technique for Thin-Walled Assemblages", Int. J. Solids and Struct., Vd. 5, 1969, str. 639-662.
- [20] Barsoum, R.S., Gallagher, R.H., "Finite Element Analysis of Torsional-Flexural Stability Problems" Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 2. 1970. Str. 335-352.
- [21] Mei, C., "Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams of Open Section Using the Finite Element Method", Int. J. Mech. Sci., Pergamon Press, N.Y. Vol. 12, 1970. Str. 883-891.
- [22] Powell, G., Klinger, R., "Elastic Lateral Buckling of Steel Beams", J. Struct. Div., ASCE, No. 96., Vol. ST9, 1970.

- [23] Rajasekaran, S., Murray, D.W., "Finite Element Large Deflection Analysis of Thin-Walled Beams of Open Section", Proceedings, First International Conference on Finite Element Methods in Eng., Univ. New South Wales, Aug. Sydney, Australia, 1974.
- [24] Rajasekaran S., "Finite Element Methods for Plastic Beam-Columns", Theory of Beam-Columns, Space Behaviour and Design, Vol. 2, Chap. 12, W.F. Chen, T. Atsuta, Eds. McGraw-Hill, NY, 1977, Str. 539-608.
- [25] Tebedge, N., Tall, L., "Linear Stability Analysis of Beam-Columns", J. Struct. Div., ASCE, No. 99, Vol. ST12, 1973.
- [26] Bažant, Z.P., Nimerriri, M., "Large Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames", J. Eng. Mech. Div., ASCE, No. 99, Vol. EM6, 1973, Str. 1259-1281.
- [27] Yoo, C.H., "Bimoment Contribution to Stability of Thin-Walled Assemblages", Comp and Struct., Vol. 11, 1980, Str. 465-471.
- [28] Roberts, T.M., Azizian, Z.G., "Instability of Thin-Walled Bars", J. Eng. Mech., ASCE, No. 109, Vol. 3, 1981.
- [29] Epstein, M., Murray, D.W., "Three-Dimensional Large Deformation Analysis of Thin-Walled Beams", Int. J. Solids Structures, Vol. 12, 1976, Str. 867-876.
- [30] Sharman, P.W., "Analysis of Structures with Thin-Walled Open Sections", Int. J. Mech. Sc., No. 27, Vol. 10, 1985.
- [31] Attard, M., "Nonlinear Theory of Non-Uniform Torsion of Thin-Walled Open Beams", Thin-Walled Structures, No. 4. 1986, Str. 101-134.
- [32] Yang, Y.B., McGuire, W., "Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis", J. Struct. Eng, ASCE, Vol. 112, No. ST4, Apr. 1986, Str. 853-877.
- [33] Chan, S.L., Kitipornchai, S., "Geometric Nonlinear Analysis of Asymmetric Thin-Walled Members", Research Report No. CE73, Dept. Civil. Eng., Univ. Queensland, July, 1986.
- [34] Rajasekaran, S., Murray, D.W., "Finite Element Solution of Inelastic Beam Equations", J. Struct. Div, ASCE, Vol. 99, No ST6, June 1973, Str. 1024-1042.
- [35] Sekulović, M., "Geometrically Nonlinear Analysis of Thin-Walled Members", Proceedings of the invited papers for the International Conference on Steel Structures, Recent Research Advances and Their

Application to Design, Budva, Yugoslavia, Sept. 1986.

- [36] Bathe, K.J., Ramm, E., Wilson, E.L., "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 9. 1975, Str. 353-386.
- [37] Malvern L.E., "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- [38] Bathe, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis" Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [39] Fung, Y.C., "Foundations of Solid Mechanics", Prentice-Hall, New Jersey, 1965.
- [40] Sekulović, M., "Metod konačnih elemenata", IRO: Gradjevinska knjiga, Beograd 1984.
- [41] Bathe, K.J., Bolourchi, S., "Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures", Int. J. Num. Meth. Eng. V.14, 1979.
- [42] Bathe, K.J., Ramm, E., Wilson, E.L., "Finite Element Formulations for Large Displacement and Large Strain Analysis", UC-SESM Rep. No. 73-14, Div. Struct. Eng. and Struct. Mech., Univ. of California, Berkeley, Feb. 1974.
- [43] Chen, W.F., "Plasticity in Reinforced Concrete", McGraw-Hill book Compony 1982.
- [44] Bažant, Z.P., "Advanced topics in Inelasticity and Failure of Concrete", Lecture notes presented at the Royal Institute of Technology, Stockholm, Swedish, Sept. 1977.
- [45] Park, R., Paulay, T., "Reinforced Concrete Structures", John Wiley and Sons, New York, 1975.
- [46] Ivković, M., "Betonske konstrukcije II, Beograd, 1981.
- [47] Karsan, I.K., Jirsa, J.O., "Behaviour of Concrete under Compressive Loadings", J. Struct. Div., ASCE, Vol. 95, Str. 2543-2563.
- [48] Kent, D.C., Park, R., "Flexural Members with Confined Concrete", J. Struct. Div., ASCE, 97 (7), 1971, Str. 1969-1990.
- [49] Aktan, A.E., Pecknold, D.A., "Response of a Reinforced Concrete Section to Two-Dimensional Curvature Histories", J. American Conct. Inst., Vol. 71, No. 5, May, 1975, Str. 346-350.

- [50] Blakely, R., W.G., Park, R., "Presstressed Concrete Sections with Cyclic Flexure", J. Struct. Div., ASCE, Vol. 99, No. ST8, Aug. 1973., Str. 1717-1742.
- [51] Suharwardy, M.I.H., Pecknold, D.A., "Inelastic Response Reinforced Concrete Columns Subjected to Two-Dimensional Earthquake Motions", Civil Eng. Stud., SRS, No. 455, Oct. 1975.
- [52] Vellenos, J., Bertero, V.V., Popov, E.P., "Concrete Confined by rectangular hoops subjected to axial loads", Rep. 77/13, Earth. Eng. Research Center, Univ. of Calif., Berkeley.
- [53] Sheikh, S.A., Uzumeri, S.M., "Strenght and Ductility of tied Concrete Columns", J. Struct., Div, ASCE, 106(5), 1980, Str. 1079-1102.
- [54] Scott, B.D., Park, R., Priestly, M.J.N., "Stress-Strain behaviour of Concrete Confined by overlaping hoops at low and high strain rates", Am. Concr. Inst. J., 79(1), 1982, Str. 13-27.
- [55] Mander, J.B., Priestly, M.J.N., Park, R., "Theoretical Stress-strain model for confined Concrete", J. Struct. Eng. Div., ASCE 114(8), 1988, Str. 1804-1826.
- [56] Nacrt pravilnika o tehničkim normativima za beton i armirani beton, Beograd, 1982.
- [57] Model propisa CEB-FIP za armirano-betonske i prethodno napregnute konstrukcije, 1978.
- [58] BSI (British Standard Institution), Code of Practise for the Structural use of Concrete, CP110, Part 1, 1972.
- [59] DIN 1045, Beton-Kalender, Teil II, Wilhelm Ernst und Sohn, 1979.
- [60] ACI Standard Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-77) 1977.
- [61] Hognestad, E., "A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members, Univ. of Illinois Eng. Exper. Station, Bull. Ser. No. 399, Bull. No. 1, Nov. 1951.
- [62] Kroenke, W.C., Gutzwiller, M.J., Lee, R.H., "Finite Element for Reinforced Concrete Frame Study", J. Struct. Div., ASCE, Vol. 99, No. ST7, July 1973.
- [63] Aroni, S., "Slender Presstressed Concrete Columns, J. Struct. Div., ASCE, Vol. 94, No. ST4, April 1968.

- [64] Wilhelm, W.J., Zia, P., "Effects of Creep and Shrinkage on Prestressed Concrete Columns", J. Struct. Div., ASCE, Vol. 96, No. ST10, Oct. 1970.
- [65] Lin, C.S., Scordelis, A., "Nonlinear Analysis of RC Shells of General Form", J. Struct. Div., ASCE, No. ST3, March, 1975.
- [66] Suidan, M., Schnobrich, W.C., "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete", J. Struct. Div., ASCE, Vol. 99, No. ST10, Oct. 1973, Str. 2109-2122.
- [67] Gupta, A.K., Akbar, A., "Cracking in Reinforced Concrete Analysis", J. Struct. Div., ASCE, 110, 1984, Str. 1735-1746.
- [68] Scanlon, A., "Time Dependent Deflections of Reinforced Concrete Slabs", Ph.d. Dissertation, Dept. Civil. Eng., Univ. Alberta, Edmonton, Canada, Dec. 1971.
- [69] Gilbert, R.I., Warner, R.F., "Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs", J. Struct. Div., ASCE, V.104, No.ST12, Dec., 1978.
- [70] Dilger, N.H., Koch, R., Kowalczyk, M., "Ductility of Plain and Confined Concrete under different Strain Rates", Am. Concr. Inst. J., 81(1), Str. 73-81.
- [71] Popovics, S., "Review of Stress-Strain Relations for Concrete", ACI Journal, Vol. 67, No.3, March 1970.
- [72] Chen, A.C.T., Chen, W.F., "Constitutive Relations for Concrete", J. Eng., Mech., Div., ASCE, V.101, No.EM.4., Avg. 1975, Str. 465-481.
- [73] Buyukozturk, O., "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures", Comp. Struct., Vol. 7., 1977, Str. 149-156.
- [74] Bondarenko, V.M., "Nekotorie voprosi helinejnoj teoriji železnobetona", Izdatat - Harkovskogo Universiteta, Harkov 1968.
- [75] Lazarević, Dj., Ivković, M., "Nelinearne deformacije betona", V kongres Jugoslovenskog društva građevinskih konstruktera, Budva, 1974, SVA1, Str. 1-47.
- [76] Prašcević, Ž., "Nelinearna teorija amiranobetonskog štapa", doktorska disertacija, Beograd 1979.
- [77] Arutjunjon, N.H., "Nekotorie voprosi teoriji polzučesti", Gosttehteorietizdat, Moskva 1952.
- [78] Ulicki, I.I., "Teoria i rasčet železobetonih konstrukci s učetom vlnjanja usadki i polzučesti betona", Kiev 1967.

- [79] Trost, H., Auswirkungen des Superpositionprinzips auf Kriech und Relaxationsprobleme bei Beton und Spanbeton, Beton und Stahlbetonbau 10, 11, 1967.
- [80] Bažant, Z.P., "Prediction of Concrete Creep Effects using Age-Adjusted Effective Modulus Method", Amer. Concrete Inst. J. 69 (1972), 212-217.
- [81] Bažant, Z.P., Najjar, L.J., "Comparison of Approximate Linear Methods for Concrete Creep", J. Struct. Div., Proc. Amer. Cos. of Civil Engineers 99 (1973) 1851-1874.
- [82] Djurić, M., "Teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija", SANU, Kng. CCCLXIV, Beograd, 1963.
- [83] Livšic, A.D., Rasčct zelezobetonnih konstrukcii s učetom vliania usadki i polzučesti betona", Viša škola, Kiev, 1976.
- [84] McHenry, D., "A new Aspect of Creep in Concrete and its Application to Design", ASTM 43. Str. 1069-1086.
- [85] Maslov, G.H., "Termičeskoe napražennoe sostoanie betonnih massivov pri učete polzučesti betona", Isvestia NIIG, tom. 28, Gesenergoizdat, Moskva, 1941.
- [86] Bresler, B., Selna, L., "Analysis of Time-Dependent Behaviour of Reinforced Concrete Structures", ACI Symposium on Creep of Concrete, ACI Special Publication SP-9, 1964.
- [87] Zienkiewicz, O.C., Watson, M., King, I.P., "A numerical method of Viskoelastic Stress Analysis", Int. J. Mech. Sci. 10 (1968) 807-827.
- [88] Zienkiewicz, O.C., Watson, M., "Some Creep Effects in Stress Analysis with particular Reference to Concrete Pressure Vessels", Nuclear Eng. and Design, No. 4, 1966.
- [89] Bažant, Ž.P., "Numerically Stable Algorithm with Increasing Time Steps for Integral-Type Aging Creep", Paper H2/3, Vol.3, First International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, West Berlin, Sept. 1971.
- [90] Bažant, Ž.P., Wu, S.T., "Creep and Shrinkage Law for Concrete at Variable Humidity", J. Engrg. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil. Eng. 100 (1974). No. EM6.
- [91] Kabir, A.F., Scordelis, A.C., "Analysis of RC Shells for Time Dependent Effects", IASS Bulletin, Vol. XXI, No. 69, April 1979.

- [92] Kabir, A.F., "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Panels, Slabs and Shells for Time Dependent Effects", Ph. D. Dissertation, Div. of Struct. Eng. and Struct. Mech. Univ. of Calif., Berkeley, Report. No. UC-SESM 76-6, Dec. 1976.
- [93] Taylor, R.L., Pister, K.S., and Goudrean, G.L., "Thermomechanical Analysis of Viscoelastic Solids", Int. J. Num. Methods in Engrg. 2 (1970) Str. 45-60.
- [94] Argyris, J.H., Pister, K.S., Szimmat, J., Willam, K.J., "Unified Concepts of Constitutive Modelling and Numerical Solution Methods for Concrete Creep Problems", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 10 (1977), Str. 199-246.
- [95] Argyris, J.H., Vaz, L.E., Willam, K.J., "Improved Solution methods for inelastic rate problems", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. Vol. 16, (1978) Str. 231-177.
- [96] Becker, J., Bresler, B., "Fire-RC, A computer program for the Fire response of Structures-Reinforced Concrete Frames", Div. Struct. Engng. and Struct. Mech., Univ. of Calif., Berkeley, Rep. No. UKB FRG 74-3, July 1974.
- [97] Prokić, A., "Prilog postritičnoj analizi prostornog sistema štapova punog i tankozidnog poprečnog preseka", magistarski rad, Beograd, 1983.
- [98] Sekulović, M., "Matrica krutosti za prav štap", Simpozijum Portorož, 1978.
- [99] Sekulović, M., "Prilog nelinearnoj analizi tankozidnih konstrukcija", Simpozijum, Kupari, 1981.
- [100] Sekulović, M., Prokić, A., "Analiza stabilnosti tankozidnih nosača po MKE", Simpozijum društva za mehaniku SRS, 1982.
- [101] Przemieniecki, J.S., "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill, New York, 1975.
- [102] Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method", McGraw-Hill, London, 1977.
- [103] Bathe, K.J., Cimento, A.P., "Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations", J. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 22, 1980, Str. 59-85.

- [104] Matthies H., Strang, G., "The Solution of Nonlinear Finite Element Equations", Int. J. Num. Meth. Eng., Col. 14. 1979, Str. 1613-1626
- [105] Riks, E., "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", Int. J. of Solids and Struct., V.15. 1979., Str. 529-551.
- [106] Wempner, G.A., "Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids", Int. J. of Solids and Struct., V.J. 1971.
- [107] Criesfield, M.A., "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through", J. Comp. and Struct., Vol. 13, 1981., Str. 55-62.
- [108] Criesfield, M.A., "An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations", Int. J. Num. Meth. Eng. Vol. 19, 1983. Str. 1269-1289.
- [109] Ramm, E., "Strategies for Tracing the Nonlinear Response near Limit Points, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [110] Batoz, J.L., Dhatt, G., "Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems", Int. J. for Num. Math. Eng., V.14, 1979.
- [111] Bergan, P.G., Hottigroe, G., Krakeland, B., Soreide, T.H., "Solution Techniques for Nonlinear Finite Element Problems", Int. J. Num. Meth. Eng., No.12. 1980.
- [112] Bathe, K.J., Dvorkin, E.N., "On the Automatic Solution of Nonlinear Finite Element Equations", Comp. Struct. Vo. 17. No. 5-6, 1983.
- [113] Yang, Y.B., McGuire, W., "Joint Rotation and Geometric Nonlinear Analysis", J. Struct. Eng., ASCE, 112, 4, 1986.
- [114] Bathe, K.J., Wilson, E.L. and Peterson, F.E., "SAP IV - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems", EERC Report No. 73-11, College of Engineering, University of California, Berkeley, June 1973, revised 1974.
- [115] ADINA - A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis", Report AE 81-1, ADINA Eng., Sept. 1981.
- [116] Hinton, E., and Ower, D.R.J., "Finite Elements in Plasticity", Pineridge Press, Swansea, U.K., 1980.

- [117] Pujević, B., "Elasto-Plastična analiza dvodimenzionalnih problema metodom konačnih elemenata", Magistarski rad, Gradjevinski fakultet, Beograd, 1983.
- [118] Rüsç, H., "Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete", ACI Journal, Proceeding, Vol. 32, July 1960.
- [119] Warner, R.F., "Long Reinforced Concrete Columns in Biaxial Bending", IABSE Publications, V. 29-I, 1969.
- [120] Hellesland, J., Green, R., "Sustained and Cyclic Loading of Concrete Columns", J. of Struct. Div., ASCE, No. ST4, April 1971.
- [121] Branson, D.E., Christiason, M.L., "Time-Dependent Concrete Properties Related to Design-Strength and Elastic Properties Creep and Shrinkage", ACI - Special Publication SP-27, 1971.
- [122] Powell, G., Simons, J., "Improved Iteration Strategy of Nonlinear Structures", Div. of Struct. Eng., Struct. Mech., Univ. of California, Berkeley, April 1980.
- [123] Van Greunen, J., "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Slabs and Panels", Div. of Struct. Eng. and Struct. Mech., University of California, Berkeley, UC-SESM, Rep. No. 79-3, Oct. 1979.
- [124] Timoshenko, S.P., Woinowsky-Kreieger, S., "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959.

S A D R Ž A J

	Str.
1. UVOD	3
1.1. Opšte napomene	3
1.2. Kratak istorijski pregled	4
1.3. Kratak prikaz sadržaja rada	6
1.4. Summary	7
2. OPŠTA FORMULACIJA INKREMENTALNIH JEDNAČINA RAVNOTEŽE	9
2.1. Korigovana Lagrange-ova formulacija problema	9
3. VEZE IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA ZA BETON I ČELIK PRI OPTEREĆENJU KRATKOTRAJNOG KARAKTERA	13
3.1. Uvodne napomena	13
3.2. Veze izmedju napona i deformacija u betonu pri opterećenju kratkotrajnog karaktera	14
3.3. Usvojena veza izmedju napona i deformacija u betonu pri opterećenju kratkotrajnog karaktera	16
3.4. Uticaj rastojanja prslina u betonu	19
3.5. Čelik	23
4. VEZA IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA U BETONU PRI OPTEREĆENJU DUGOTRAJNOG KARAKTERA	25
4.1. Uvodne napomene	25
4.2. Usvojeni model ponašanja betona pri opterećenju dugotrajnog karaktera	30
4.3. Deformacija tečenja	32
4.4. Odredjivanje specifične funkcije tečenja	37
5. FORMULACIJA REŠENJA PO METODI KONAČNIH ELEMENATA	38
5.1. Uvodne napomene	38
5.2. Konačni elemenat otvorenog tankozidnog preseka	39
5.2.1. Osnovne pretpostavke o deformaciji štapa	39
5.3. Veze izmedju sila u presecima i pomeranja	42
5.4. Interpolacione funkcije za inkrementalna pomeranja	43
5.5. Izbor referentnih osa	50
5.6. Linearna matrica krutosti definisana u odnosu na fiksne referentne ose	51

5.7. Linearna matrica krutosti u odnosu na promenljiv sistem referentnih osa	55
5.8. Geometrijska matrica krutosti	56
5.9. Uprošćena geometrijska matrica krutosti	59
5.10. Konačni element punog poprečnog preseka	61
5.10.1. Osnovne pretpostavke o deformaciji štapa	61
5.11. Linearna matrica krutosti grednog konačnog elementa u odnosu na fiksne ose	62
5.12. Geometrijske karakteristike poprečnog preseka	66
5.13. Vektor unutrašnjih čvornih sila	69
5.14. Čvorne sile usled deformacije tečenja i skupljanja	70
5.15. Matrica transformacije	71
5.15.1. Veza lokalnih i globalnih osa za početnu konfiguraciju	71
5.15.2. Matrica transformacije za slučaj malih inkrementalnih rotacija	73
5.16. Matrica krutosti tankozidnog konačnog elementa u globalnom koordinatnom sistemu	75
5.17. Matrica krutosti sistema	78
6. POSTUPCI ZA REŠAVANJE SISTEMA NELINEARNIH JEDNAČINA	79
6.1. Uvodne napomene	79
6.2. Iterativni postupci	79
6.2.1. Newton-Raphson-ovi postupci	79
6.2.2. Kvazi-Newton-ov (BFGS) postupak	83
6.3. Numerički postupak za određivanje granične tačke i postkritičnog ponašanja	86
6.3.1. Postupak tangentnog luka	88
6.3.2. Postupak korigovanog tangentnog luka	89
6.3.3. Postupak sfernog luka	90
6.4. Kriterijumi konvergencije	94
6.5. Kriterijum za utvrđivanje graničnog stanja	98
7. ORGANIZACIJA RAČUNARSKOG PROGRAMA	99
7.1. Uvodne napomene	99
7.2. Algoritam rešavanja	99
7.3. Dijagram toka	100
8. BROJNI PRIMERI	104
8.1. Uvodne napomene	104
8.2. Primer 1	104

8.3. Primer 2	108
8.4. Primer 3	114
8.5. Zaključak	119
9. LITERATURA	121



