



**UNIVERZITET CRNE GORE
GRAĐEVINSKI FAKULTET
U PODGORICI**

**INTERNACIONALNI NAUČNO-STRUČNI SKUP
*GRAĐEVINARSTVO - NAUKA I PRAKSA***



ZBORNİK RADOVA

ŽABLJAK, 20-24. FEBRUARA 2006.

ISBN 86-82707-12-8

ISBN 86-82707-13-6

Izdavač

**UNIVERZITET CRNE GORE
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

Za izdavača

Prof.dr Duško Lučić

Urednik

Prof.dr Duško Lučić

Uređivački odbor

Prof.dr Mladen Ulićević

Doc.dr Miloš Knežević

Mr Biljana Šćepanović

Tehnički urednici

Mr Biljana Šćepanović

Goran Pavlović

Priprema za štampu

Goran Pavlović

Štampa

3M Makarije

Tiraž

300 primjeraka

CIP – Каталогизacija у публикацији
Централна народна библиотека Црне Горе, Цетиње

624 (082)

691 (082)

ИНТЕРНАЦИОНАЛНИ научно–стручни скуп
Грађевинарство – наука и пракса (2006 ; Жабљак)
Zbornik radova / Internacionalni naučno–stručni skup
Građevinarstvo – nauka i praksa, Žabljak 20–24. februara 2006. ;
[urednik Duško Lučić]. – Podgorica : Univerzitet Crne Gore,
Građevinski fakultet, 2006 (Podgorica : 3M Makarije).
– 2 knj. (1016 str.) : ilustr. ; 24 cm

Radovi na više jezika. – Tiraž 300. – Bilješke
uz tekst. – Bibliografija uz većinu radova. –
Rezimei na više jezika uz sve radove.

ISBN 86-82707-12-8 (knj. 1)

ISBN 86-82707-13-6 (knj. 2)

a) Грађевинарство – Зборници b) Грађевински
материјали – Зборници
COBISS.CG-ID 10024976



INTERNACIONALNI NAUČNO-STRUČNI SKUP GRAĐEVINARSTVO - NAUKA I PRAKSA

ŽABLJAK, 20-24. FEBRUARA 2006.

Dorđe Vuksanović¹, Marina Četković²

KONAČNI ELEMENT SENDVIČ PLOČE

Rezime

Kako su 2D modeli ploča u stanju da pruže samo odgovor na globalno ponašanje kompozitnih materijala, formulisana je nova grupa teorija zasnovana na 3D kinematici deformacije poprečnog preseka, odnosno Opšta laminatna teorija ploča. U okviru pomenute teorije, polje pomeranja se pretpostavlja za svaki od slojeva po debljini, u obliku koji dopušta nezavisnu interpolaciju u ravni i po debljini ploče. Naime, 2D mreža u ravni i 1D mreža po debljini mogu se nezavisno proglašavati bez potrebe za definisanjem 3D mreže konačnih elemenata. Osnovne jednačine konačnog elementa formulisane su po metodi deformacije, za slučaj statički opterećene ploče proizvoljne šeme laminacije. Dobijena rešenja upoređena su sa rešenjem Kirchhoff-ove teorije (CLPT), 3D teorije i rešenjem teorije ploča višeg reda (HSDT).

Ključne reči

Višeslojna ploča, konačni element, statička analiza

SANDWICH PLATE FINITE ELEMENT

Summary

As 2D plate models are capable only to determine global behaviour of laminated composites, new family of theories based on 3D kinematics is formulated, that is Generalized Laminated Plate Theory (GLPT). Within the mentioned theory, displacement field is defined at ply level, in the form which allow independent in plane and through the thickness interpolation. Namely, the in-plane 2D mesh and the transverse 1D mesh can be refined independently, without having to reconstruct a 3D finite element mesh. Basic element equations are derived using displacement-based finite element formulation, in the case of statically loaded generally laminated plate. The obtained results have been compared with Classical Lamination Theory (CLPT), 3D Theory and Higher-order Shear Deformation Theory (HSDT).

Keywords

Multi-layer plate, finite element, static analysis

¹ Prof. dr Dorđe Vuksanović, dipl. građ. inž., Građevinski fakultet u Beogradu, george@grf.bg.ac.yu

² Mr Marina Četković, dipl. građ. inž., Građevinski fakultet u Beogradu, marina@grf.bg.ac.yu

1. UVOD

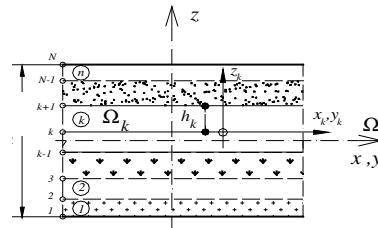
Kombinacijom dva ili više različitih materijala na makroskopskom nivou dobijen je čitav niza novih materijala više ili manje izraženog anizotropnog ponašanja. Jednu široko primenjivanu grupu materijala čine i lamelirani vlaknasti kompoziti, pa će oni i biti predmet dalje analize.

Slojeviti model ploče, prikazan u ovom radu, zasnovan je na opštoj laminatnoj teoriji ploča, koju je postavio Reddy. Osnovna odlika ovoga modela jeste da je polje pomeranja u ravni ploče (u_1, u_2) razvijeno po debljini svakog sloja primenom familije 1D Lagrange-ovih interpolacionih funkcija, dok je pomeranje u_3 konstantno po debljini ploče. Ovakva razdvojena interpolacija polja pomeranja u ravni i po debljini čini pomenuti model efikasnijim i isto toliko tačnim u poređenju sa uobičajenim 3D modelom elastične teorije. Kako su polje pomeranja, iz uslova kompatibilnosti, i polje smičućih napona, iz 3D uslova ravnoteže, kontinualne funkcije, to one treba da zadovolje samo C^0 kontinuitet po debljini laminata.

Polazeći od pretpostavljenog polja pomeranja, linearnih veza deformacija i pomeranja i konstitutivnih jednačina laminata, primenom principa o minimumu potencijalne energije biće formulisan konačni element ploče sa m čvorova i n slojeva. Cilj je da se utvrdi pouzdanost predloženog konačnog elementa, za slučaj statički opterećene ploče.

2. POLJE POMERANJA

Analizirana je laminatna ploča sastavljena od n ortotropnih slojeva. Broj k označava redni broj sloja, počevši od donje površine ploče. Globalni koordinatni sistem (x, y, z) je usvojen u srednjoj ravni, dok je lokalni koordinatni sistem (x_k, y_k, z_k) usvojen na donjoj površini svakog od slojeva. Debljina ploče je h , dok je h_k debljina sloja k .



Slika 1. Višeslojna kompozitna ploča

Komponente pomeranja (u_1, u_2, u_3) u tački (x, y, z) pretpostavljamo u obliku:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + U(x, y, z) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + V(x, y, z) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

gde su (u, v, w) komponente pomeranja tačke ($x, y, 0$) u srednjoj ravni ploče, a U, V su funkcije definisane kao:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \sum_{I=1}^N U^I(x, y) \cdot \Phi^I(z) \\ V(x, y, z) &= \sum_{I=1}^N V^I(x, y) \cdot \Phi^I(z) \end{aligned} \quad (2)$$

gde su U^I, V^I komponente pomeranja u I-toj ravni ploče, a $\Phi^I(z)$ je 1D Lagrange-ova interpolaciona funkcija (linearna, kvadratna ili kubna). Na dalje ćemo usvojiti linearnu interpolaciju polja pomeranja po debljini ploče

3. KOSTITUTIVNE JEDNAČINE LAMINATA

Konstitutivne jednačine za ceo laminat glase:

$$\{\mathbf{N}^0\} = [\mathbf{A}]\{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} + \sum_{I=1}^N [\mathbf{B}^I]\{\boldsymbol{\varepsilon}^I\}, \quad \{\mathbf{N}^I\} = [\mathbf{B}^I]\{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} + \sum_{J=1}^N [\mathbf{D}^{IJ}] \quad (3)$$

vektor sila u srednjoj ravni ploče, odnosno vektor sila u I-toj ravni ploče:

$$\{\mathbf{N}^0\} = \{N_{xx} \quad N_{yy} \quad N_{xy} \quad Q_x \quad Q_y\}^T, \quad \{\mathbf{N}^I\} = \{N'_{xx} \quad N'_{yy} \quad N'_{xy} \quad Q'_x \quad Q'_y\}^T \quad (4)$$

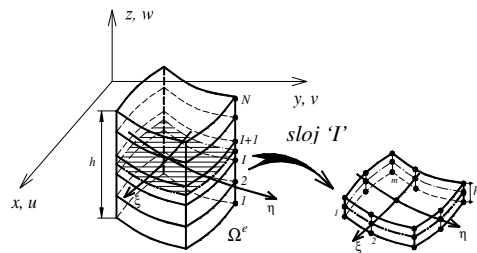
vektor deformacija u srednjoj ravni ploče, odnosno vektor deformacija u I-toj ravni ploče:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T, \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}^I\} = \left\{ \frac{\partial U^I}{\partial x} \quad \frac{\partial V^I}{\partial y} \quad \frac{\partial U^I}{\partial y} + \frac{\partial V^I}{\partial x} \quad U^I \quad V^I \right\}^T \quad (5)$$

gde su $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{D}]$ konstitutivne matrice laminata^[1].

4. MODEL KONAČNOG ELEMENTA

Konačni element ploče sastoji se iz srednje ravni ploče i ravni u čvorovima $I = 1, N$ po debljini ploče. Za osnovne nepoznate u čvorovima usvojene su komponente pomeranja (u, v, w) u srednjoj ravni i komponente pomeranja (U^I, V^I) u I-toj ravni ploče. Dakle, od osnovnih nepoznatih se zahteva da ispune samo C^0 kontinuitet na granicama susjednih elementa.



Slika 2. Konačni element ploče sa m čvorova i n slojeva

4.1. POLJE POMERANJA

Polje generalisanih pomeranja u funkciji osnovnih nepoznatih u čvorovima konačnog elementa Ω^e sa m čvorova i n slojeva dato je kao :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m u_j \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m v_j \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m w_j \Psi_j \end{Bmatrix}^e = \sum_{j=1}^m [\Psi_j]^e \{\mathbf{d}_j\}^e, \quad \begin{Bmatrix} U^I \\ V^I \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m U_j^I \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m V_j^I \Psi_j \end{Bmatrix}^e = \sum_{j=1}^m [\bar{\Psi}_j]^e \{\mathbf{d}'_j\}^e \quad (6)$$

gde su $\{\mathbf{d}_j\}^e = \{u_j^e, v_j^e, w_j^e\}^T$ i $\{\mathbf{d}'_j\}^e = \{U_j^I, V_j^I\}^T$ vektori pomeranja koji odgovaraju čvoru j elementa Ω^e u srednjoj, odnosno u I-toj ravni ploče, a Ψ_j^e interpolacione funkcije u čvoru j , elementa Ω^e .

4.2. USLOVNE JEDNAČINE

Iz principa o minimumu potencijalne energije možemo dobiti model konačnog elementa zasnovan na opštoj laminatnoj teoriji ploča u sledećem obliku:

$$[\mathbf{K}]^e \{\Delta\}^e = \{\mathbf{f}\}^e \quad (7)$$

matrica krutosti elementa Ω^e glasi:

$$[\mathbf{K}]^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} [\mathbf{H}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{H}] & \sum_{I=1}^N [\mathbf{H}]^T [\mathbf{B}^I] [\bar{\mathbf{H}}] \\ \sum_{I=1}^N [\bar{\mathbf{H}}]^T [\mathbf{B}^I] [\mathbf{H}] & \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N [\bar{\mathbf{H}}]^T [\mathbf{D}^{IJ}] [\bar{\mathbf{H}}] \end{bmatrix} d\Omega^e \quad (8)$$

vektor čvornih sila elementa Ω^e , odnosno vektor pomeranja čvornih tačaka elementa Ω^e glase:

$$\{\mathbf{f}\}^e = \int_{\Omega^e} [\bar{\Psi}]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \end{Bmatrix} d\Omega^e, \quad \{\Delta\}^e = \left\{ \begin{Bmatrix} \{\mathbf{d}\} \\ \sum_{I=1}^N \mathbf{d}^I \end{Bmatrix} \right\}^e \quad (9)$$

4.3. POLJE NAPONA KONAČNOG ELEMENTA

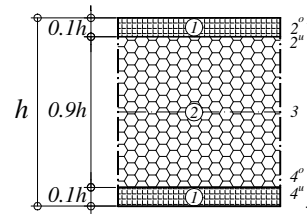
Polje napona u ravni $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})$ za sloj k dobijamo iz konstitutivnih jednačina sloja. Do tačnih vrednosti smičućih napona, dolazimo pretpostavljajući zakon promene smičućih napona $(\tau_{xz}^{(k)}, \tau_{yz}^{(k)})$ u svakom od slojeva po debljini ploče.

5. NUMERIČKI PRIMERI

Analizirana je kvadratne ($a/b = 1, a/h = 10$) troslojna ortotropna laminatna sendvič ploča, opterećena jednako podeljenim opterećenjem p , čiji su slojevi sačinjeni od materijala sledećih karakteristika:

$$E_1/E_2 = 0.5252, G_{12}/E_1 = 0.2928, G_{23}/E_1 = 0.2972, G_{13}/E_1 = 0.1781, \nu_{12} = 0.44, \nu_{23} = 0.23$$

Analiziran je uticaj odnosa modula $\beta = E_1^{(1)}/E_1^{(2)}$ u spoljnim slojevima i unutrašnjem sloju na stanje napona i deformacija u ploči. U tabeli 1 prikazane su vrednosti normalizovanog ugiba $w_0 = wE_1^{(2)}/hp(1 - \nu_{12}\nu_{23})$ u tački ($x = a/2, y = b/2$), kao i vrednosti normalnog napona $\sigma_x(x = a/2, y = b/2)$ i smičućeg napona $\tau_{xz}(0, b/2)$ u tačkama po debljini ploče, za **CLPT**, **3D**, **HSDT** i predloženi model.



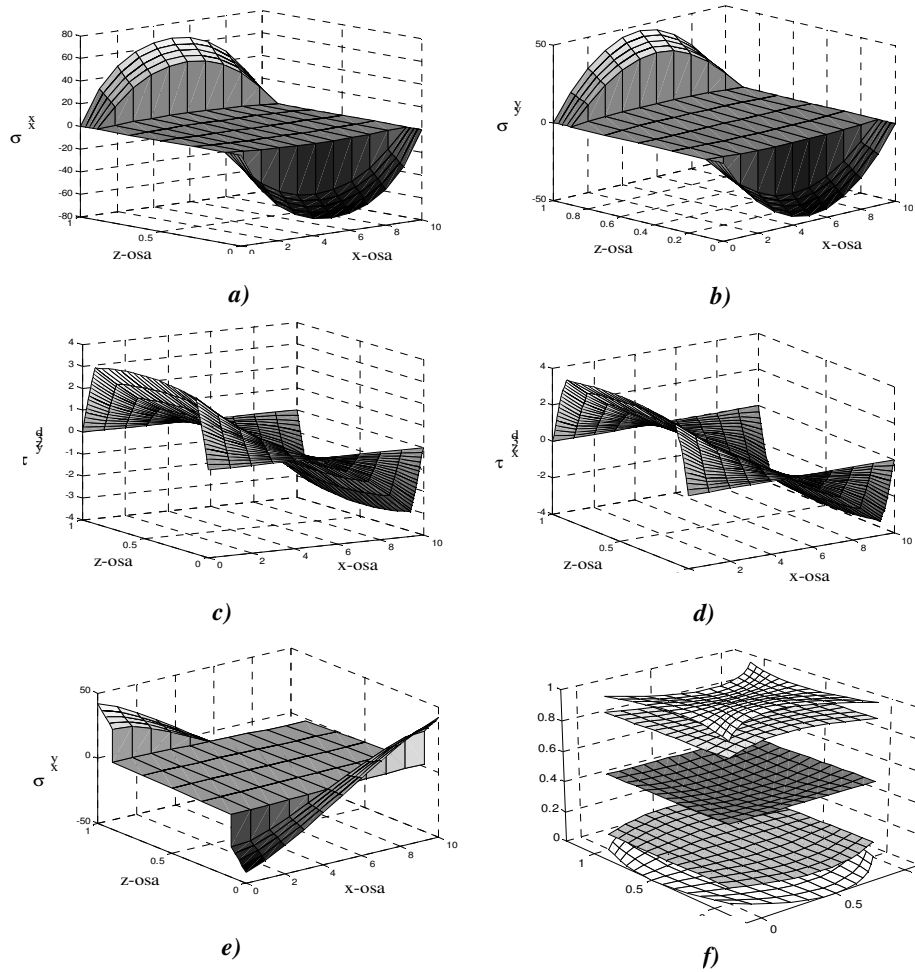
Slika 3. Geometrija poprečnog preseka ploče

Tabela 1. Pomeranja i naponi troslojne sendvič ploče

β			CLPT ^[2]	3D ^[2]	HSDT ^[2]	FEM_9 ^[4]
5	w_0		216.94	258.97	256.81	258.68
	σ_x/p	1	-61.141	-60.353	-60.330	-60.275
		2°	-48.913	-46.623	-46.981	-46.490
		2''	-9.7826	-9.3402	-9.3962	-9.298
		4°	9.7826	9.2845	9.3962	9.298
		4''	48.913	46.426	46.981	46.490
	5	61.141	60.155	60.330	60.275	
τ_{xz}/p	3	4.5899	4.3641	4.7130	4.3817	
15	w_0		81.768	121.72	114.42	121.70
	σ_x/p	1	-69.135	-66.787	-66.834	-66.713
		2°	-55.308	-48.299	-50.269	-48.238
		2''	-3.6872	-3.2379	-3.3513	-3.216
		4°	3.6872	3.2009	3.3513	3.216
		4''	55.308	48.028	50.269	48.238
	5	69.135	66.513	66.834	66.713	
τ_{xz}/p	3	4.2825	3.9638	3.9084	4.0090	

6. ZAKLJUČAK

Uočeno je da sendvič ploče sačinjene iz mekog jezgra zahtevaju primenu tačnijih matematičkih modela. Takođe, predloženi model pokazao je izuzetno slaganja sa rešenjima 3D teorije elastičnosti.



Slika 4. Polja napona a) σ_{xx} b) σ_{yy} c) τ_{yz} d) τ_{xz} e) τ_{xy} u (x,z) ravni i polje pomeranja f) po visini troslojne sendvič ploče

LITERATURA

- [1] Reddy, J. N., A plate bending element based on a generalized laminated plate theory, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, vol. 28, 2275-2292, 1989
- [2] Vuksanović, Đ., Linear Analysis Of Composite Plates Using Single Layer Higher-Order Discrete Models, *Composite Structures*, 48, 205-211, 2000
- [3] Četković, M., Vuksanović, Đ., Closed Form Solution Using A Generalized Laminate Plate Theory, *Zbornik radova Građevinskog fakulteta u Subotici-14*, 2005
- [4] Četković, M., Primena metode konačnih elemenata na opštu teoriju laminatnih poča, *Magistarska Teza*, Građevinski fakultet, Beograd, 2005