

**UNIVERZITET CRNE GORE
GRAĐEVINSKI FAKULTET
U PODGORICI**

**TREĆI INTERNACIONALNI NAUČNO-STRUČNI SKUP
*GRAĐEVINARSTVO - NAUKA I PRAKSA***



ZBORNIK RADOVA

KNJIGA 1

ŽABLJAK, 15-19. FEBRUARA 2010.

ISBN 978-86-82707-18-9

Izdavač

**UNIVERZITET CRNE GORE
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

Za izdavača

Prof.dr Duško Lučić

Urednik

Prof.dr Duško Lučić

Uređivački odbor

**Prof.dr Duško Lučić
Doc.dr Miloš Knežević
Mr Biljana Šćepanović
Mr Mladen Gogić
Mr Strahinja Pavlović**

Tehnički urednici

**Goran Pavlović
Mr Biljana Šćepanović**

Priprema za štampu

Goran Pavlović

Štampa

Štamparija Publikum, Beograd

Tiraž

400 primjeraka

CIP – Каталогизacija u publikaciji
Централна народна библиотека Црне Горе, Цетиње

624(082)
69(082)

ИНТЕРНАЦИОНАЛНИ научно–стручни скуп
"Грађевинарство – наука и пракса" (3 ; 2010 ; Жабљак)
Zbornik radova / Treći Internacionalni naučno–stručni skup
Građevinarstvo – nauka i praksa, Žabljak, 15–19. februara 2010. ;
[organizator Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore ;
urednik Duško Lučić]. – Podgorica : Univerzitet Crne Gore,
Građevinski fakultet, 2010
(Beograd : Publikum). – 2 knj. (1848 str.) : graf. prikazi, tabele ; 24 cm

Ćir. i lat. – Tekst na više jezika. – Tiraž 400. –
Bibliografija uz sve radove. – Rezimeji na više jezika.

ISBN 978-86-82707-18-9 (Knj. 1)
ISBN 978-86-82707-19-6 (Knj. 2)

a) Грађевинарство – Зборници
COBISS.CG–ID 15315472



Montenegro

Štampanje ovog Zbornika radova podržala je Kancelarija Programa Ujedinjenih nacija za razvoj (UNDP) u Crnoj Gori, kroz implementaciju "Projekta podrške prostornom planiranju", finansiranog od strane Švedske agencije za međunarodni razvoj i saradnju (SIDA).

Printing of this publication has been supported by United Nations Development Programme (UNDP) in Montenegro, through "Spatial planning support project" financed by Swedish International Development Cooperation Agency (SIDA).





Marina Četković¹, Đorđe Vuksanović²

IZVIJANJE SENDVIČ PLOČA PRIMENOM SLOJEVITOG MODELA PLOČE

Rezime

U ovom radu analizirano je izvijanja sendvič ploča primenom slojevitog modela ploče [2]. Matematičkim modelom pretpostavljena je deo po deo linearna raspodela pomeranja u ravni, konstantno poprečno pomeranje i kvadratna promena poprečnih smičućih napona unutar svakog sloja ploče. Koristeći pretpostavljeno polje pomeranja, nelinearne veze deformacija i pomeranja (u von Karman-ovom smislu) i 3D konstitutivne jednačine lamine, formulisana je linearizovan problem izvijanja ploče. Napisan je program u MATLAB programskom jeziku za numeričko rešenje dobijeno po metodi konačnih elemenata. Rešenja kritičnih opterećenja sendvič ploča dobijena primenom sopstvenog programa, upoređena su sa raspoloživim rešenjima iz literature.

Ključne reči

Kritično opterećenje, sendvič ploča, slojeviti model, konačni element

BUCKLING OF SANDWICH PLATES USING LAYERWISE DISPLACEMENT MODEL

Summary

In this paper a layer wise displacement model is used to study buckling of sandwich plates [2]. Mathematical model assumes layer wise description of in plane displacements, constant transverse displacement and quadratic variation of transverse shear stresses within each layer of the plate. Utilizing assumed displacement field, non-linear strain displacement relations (in Von Karman sense) and 3D constitutive equations of lamina, a linear zed buckling plate problem is formulated. A MATLAB computer program was coded for the numerical solution of the problem, using Finite Element Method. The results for buckling loads of sandwich plates, obtained using this program, are compared with the available ones from the literature.

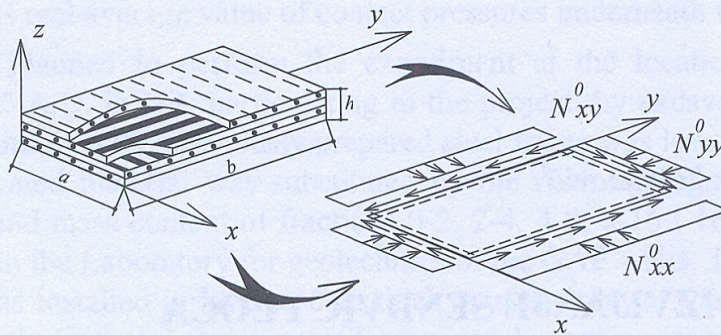
Key words

Buckling loads, sandwich plate, layer wise model, finite element

¹ Asistent, mr, dipl.građ.inž., Građevinski fakultet u Beogradu, Srbija, marina@grf.bg.ac.yu

² Profesor, dr, dipl.građ.inž., Građevinski fakultet u Beogradu, Srbija, george@grf.bg.ac.yu

1. UVOD



Slika 1. Ploča opterećena silama pritiska i smicanja ($N_{xx}^0, N_{yy}^0, N_{xy}^0$) na ivicama ploče

Stanje napona u ploči može imati dvojako poreklo, jedno, koje potiče od deformacija i konstitutivnog zakona i drugo, koje nije posledica deformacije već različitih režima opterećenja/rasterećenja ili različitih temperaturnih režima. U prvom slučaju reč je o konstitutivnim naponima, a u drugom o početnim naponima. Početni naponi koji su posledica opterećenja silama pritiska i smicanja ($N_{xx}^0, N_{yy}^0, N_{xy}^0$) na ivicama ploče biće predmet analize u ovom radu, Slika 1. Ako se usvoji pretpostavka o malim pomeranjima ili geometrijskoj linearnosti, sile u ravni ploče će biti konstantne i nezavisne od deformacije ploče. Od posebnog je značaja ona vrednost sila, ili tzv. kritično opterećenje, pri kome membranski naponi koji usled njih nastaju, dostižu vrednost napona usled savijanja, a ploča iz početnog, nedeformisanog, prelazi u novo deformisano ili izvijeno stanje. Izvijanje ploče ili gubitak stabilnosti označava trenutak nakon koga, daljim povećanjem opterećenja, iznad kritične vrednosti, može doći i do potpunog gubitka nosivosti, a time i loma ploče.

Analiziraće se izvijanje posebne grupe kompozitnih ploča, poznatih kao sendvič ploče. Lako debelo jezgro od penastog ili saćastog materijala i tanke, spoljašnje laminatne ploče, formiraju ploču manje poprečne deformabilnosti i manje težine, u odnosu na odgovarajući punu laminatnu ploču iste visine, zahtevajući istovremeno strožije matematičke modele za analizu. Pokazalo se da teorije ploča zasnovane na jednom ekvivalentnom sloju nisu sposobne da opišu naglu promenu nagiba u funkciji pomeranja po debljini ploče, ali ni da daju tačnu procenu smičućih napona, koji su dominantno prisutni kod ploča sa izraženim anizotropnim ponašanjem, kakve su sendvič ploče. Jedan od načina da se prevaziđu nedostaci teorija zasnovanih na jednom ekvivalentnom sloju jeste primena slojevitih modela ploča ili 3D teorije elastičnosti. S obzirom da 3D modeli zahtevaju veliki numerički obim, slojeviti modeli ploča sve više nalaze opravdanost za svoju primenu. U slojevitim modelima, polje pomeranja, a time i deformacija i napona pretpostavlja se na nivou sloja, čime se dobija realna slika krivljenja poprečnog preseka ploče.

U ovom radu prikazan je slojeviti model ploče u kome su pomeranja u ravni razvijena po debljini ploče primenom Lagrange-ove familije 1D interpolacionih funkcija, a poprečno pomeranje je konstantno po debljini ploče [2]. Teorija u obzir uzima kvadratnu promenu poprečnih smičućih napona unutar svakog sloja ploče. Nezavisna interpolacija polja pomeranja u ravni i po debljini ploče, čini pomenuti model numerički manje obimnim, ali isto toliko tačnim u poređenju sa 3D modelom elastične teorije. Sa druge strane, nezavisna interpolacija polja pomeranja u ravni i po debljini ploče, čini se naročito pogodnom za primenu u metodi konačnih elemenata, jer se time izbegavaju pojave

„smičućeg lokinga“, koje nastaju primenom 3D konačnih elemenata na tanke pločaste elemente. Koristeći pretpostavljeno polje pomeranja, nelinearne veze deformacija i pomeranja i konstitutivne jednačine ploče, formulisan je izoparametarski konačni element problema stabilnosti ploče, po metodi deformacije. Numerički primeri su urađeni primenom sopstvenog programa napisanog u MATLAB programskom jeziku, i upoređeni su sa rešenjima iz literature.

1.1. POLJE POMERANJA

Posmatra se ploča sačinjena od n ortotropnih slojeva. Ceo broj k označava redni broj sloja, koji uzima vrednosti počevši od donje površine ploče. Neka su (x, y, z) koordinate u srednjoj ravni ploče, a (x_k, y_k, z_k) koordinate unutar sloja k . Debljine ploče i sloja k su označene sa h i h_k , respektivno. Pretpostavlja se da su: 1) slojevi idealno spojeni, 2) materijal svakog sloja je linarno elastičan i ima tri ravni materijaln simetrije (tj. ortotropan), 3) deformacije su male, 4) slojevi su konstantne debljine i 5) važi pretpostavka o neistegljivosti normale na srednju ravan ploče.

Komponente pomeranja (u_1, u_2, u_3) u tački (x, y, z) mogu se napisati kao:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + \sum_{I=1}^N U^I(x, y) \cdot \Phi^I(z) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + \sum_{I=1}^N V^I(x, y) \cdot \Phi^I(z), \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

gde su (u, v, w) komponente pomeranja u tački $(x, y, 0)$ u srednjoj ravni ploče, U^I i V^I su neodređeni koeficijenti, a $\Phi^I(z)$ je deo po deo kontinualna funkcija koordinate z po debljini ploče. Ako se pretpostavi linearna Lagrange-ova interpolacija po debljini ploče, može se uočiti da je svaki sloj zapravo 1D konačni element i da su pomeranja u ravni kontinualna po debljini ploče.

1.2. VEZE DEFORMACIJA I POMERANJA

Nelinearne ili von Karman-ove veze deformacija i pomeranja glase:

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}^I\} &= \left\{ \frac{\partial U^I}{\partial x} \quad \frac{\partial V^I}{\partial y} \quad \frac{\partial U^I}{\partial y} + \frac{\partial V^I}{\partial x} \quad U^I \quad V^I \right\}^T \end{aligned} \quad (2)$$

1.3. KONSTITUTIVNE JEDNAČINE SLOJA

Veze napona i deformacija za k -ti sloj:

$$\{\sigma\}^{(k)} = [Q]^{(k)} \times \{\varepsilon\}^{(k)} \quad (3)$$

gde su $\sigma^{(k)} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^{(k)T}$ i $\varepsilon^{(k)} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^{(k)T}$ komponente vektora napona i deformacija, a $Q_{ij}^{(k)}$ je transformisana matrica elastičnih koeficijenata k -tog sloja u globalnim koordinatama.

1.4. PRINCIP VIRTUALNOG RADA

Princip virtualnog rada za problem stabilnosti glasi:

$$\int_{\Omega} \left\{ N_{xx}^0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + N_{yy}^0 \frac{\partial \delta v}{\partial y} + N_{xy}^0 \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) + N_{xx}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + N_{yy}^0 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \right. \\ \left. + N_{xy}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + Q_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} + Q_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \right. \\ \left. \sum_{I=1}^{N+1} \left[N_{xx}^I \frac{\partial \delta U^I}{\partial x} + N_{yy}^I \frac{\partial \delta V^I}{\partial y} + N_{xy}^I \left(\frac{\partial \delta U^I}{\partial y} + \frac{\partial \delta V^I}{\partial x} \right) \right] + Q_x^I U^I + Q_y^I V^I \right\} d\Omega = 0 \quad (4)$$

Gde su: $(N_{xx}^0, N_{yy}^0, N_{xy}^0)$ zadate sile na granicama ploče, a $(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, Q_x, Q_y)$ i $(N_{xx}^I, N_{yy}^I, N_{xy}^I, Q_x^I, Q_y^I)$ su rezultante napona u srednjoj i I-toj ravni po debljini ploče.

2. KONAČNI ELEMENT

Polazeći od izraza za virtualni rad (4) i formulisanjem „slabe forme“, lako se može pokazati da su osnovne nepoznate konačnog elementa komponente pomeranja (u, v, w) u srednjoj ravni i komponente pomeranja (U^I, V^I) u I-toj ravni po debljini ploče. Veze komponenta pomeranja u proizvoljnoj tački ploče i komponenta pomeranja u čvorovima konačnog elementa, onda su date preko interpolacionih funkcija kao:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m u_j \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m v_j \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m w_j \Psi_j \end{Bmatrix}^e = \sum_{j=1}^m [\Psi_j]^e \{d_j\}^e, \quad \begin{Bmatrix} U^I \\ V^I \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m U_j^I \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m V_j^I \Psi_j \end{Bmatrix}^e = \sum_{j=1}^m [\bar{\Psi}_j]^e \{d_j^I\}^e \quad (5)$$

Gde su $\{\mathbf{d}_j\}^e = \{u_j^e \ v_j^e \ w_j^e\}^T$, $\{\mathbf{d}'_j\}^e = \{U'_j \ V'_j\}^T$ vektori komponenta pomeranja u srednjoj i I-toj ravni ploče, a Ψ_j^e su interpolacione funkcije, za j-ti čvor konačnog elementa Ω^e , dok su matrice interpolacionih funkcija $[\Psi_j]^e$ i $[\bar{\Psi}_j]^e$ date u [2].

Zamenom pretpostavljenog polja pomeranja (5) u izraz za virtualni rad (4), dobija se model konačnog elementa:

$$([\mathbf{K}]^e - \lambda [\mathbf{K}_G]^e) \{\Delta\}^e = \{\mathbf{0}\} \quad (6)$$

Matrica krutosti konačnog elementa Ω^e :

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} [\mathbf{H}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{H}] & \sum_{I=1}^N [\mathbf{H}]^T [\mathbf{B}^I] [\bar{\mathbf{H}}] \\ \sum_{I=1}^N [\bar{\mathbf{H}}]^T [\mathbf{B}^I] [\mathbf{H}] & \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N [\bar{\mathbf{H}}]^T [\mathbf{D}^{IJ}] [\bar{\mathbf{H}}] \end{bmatrix} d\Omega^e \quad (7)$$

Geometrijska matrica krutosti konačnog elementa Ω^e :

$$\mathbf{K}_G^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} [\mathbf{G}_i^e]^T [\mathbf{N}^0] [\mathbf{G}_j^e] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\Omega^e \quad (8)$$

Matrica izvoda interpolacionih funkcija i sila na granicama ploče:

$$[\mathbf{G}_i^e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{N}^0] = \begin{bmatrix} N_{xx}^0 & N_{xy}^0 \\ N_{xy}^0 & N_{yy}^0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Rešavanje sistema homogenih algebarskih jednačina (6) podrazumeva nalaženje svojstvenih vrednosti odgovarajuće karakteristične jednačine. Najmanja svojstvena vrednost daće kritičnu silu, pri kojoj dolazi do izvijanja ploče.

3. NUMERIČKI PRIMER

Koristeći prethodno izvedeno rešenje po metodi konačnih elemenata, napisan je program u MATLAB programskom jeziku. Matrica krutosti i geometrijska matrica krutosti konačnog elementa dobijene su primenom 3x3 Gauss-Legendre-ove numeričke integracije za konačni element sa devet čvorova. Primenom napisanog programa analizirana je simetrična 0/90/core/90/0 slobodno oslonjena kvadratna sendvič opterećena jedno aksijalnim silama pritiska N_{xx}^0 na ivicama ploče, Tabela 1. Spoljašnje cross-ply ploče su debljine t_f , a ukupna debljina ploče je h . Materijalne karakteristike slojeva su:

Spoljašnje ploče (Graphite-Epoxy T300/934)

$$E_1 = 131 \text{ GPa}, E_2 = E_3 = 10.34 \text{ GPa}, G_{12} = G_{23} = 6.895 \text{ GPa}, G_{13} = 6.205 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.22, \nu_{23} = 0.49$$

Jezgro (Izotropno)

$$E_1 = E_2 = E_3 = 6.89 \times 10^{-3} \text{ GPa}, G_{12} = G_{23} = G_{13} = 3.45 \times 10^{-3} \text{ GPa}, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 1 \times 10^{-5}$$

Tabela 1. Uticaj debljine ploče na kritičnu silu N_{xx}^{cr}

a/h	ESL ^[4]	LW ^[3]	LW ^[3]	Present ^{FEM}
2	0.03250	0.01090	0.01100	0.01180
4	0.1014	0.01900	0.01940	0.01957
10	0.54090	0.07490	0.07720	0.07603
20	1.6775	0.2659	0.2744	0.2654
30	2.7719	0.5576	0.5735	0.5564
40	3.5961	0.9181	0.9413	0.9193
50	4.1712	1.3150	1.3527	1.3232
60	4.5685	1.7209	1.7672	1.7413
70	4.8471	2.1156	2.1691	2.1532
80	5.0470	2.4862	2.5454	2.5456
90	5.1938	2.8260	2.8895	2.9107
100	5.3042	3.1324	3.1993	3.2451

4. ZAKLJUČAK

Analiza stabilnosti pokazala je da teorije ploča zasnovane na jednom ekvivalentnom sloju [4] nisu u stanju da tačno predvide odgovor kako tankih, tako i debelih sendvič ploča, dok je predloženi model pokazao izuzetno slaganja sa rešenjima dva slojevitog modela iz literature [3].

LITERATURA

- [1] Đ. Vuksanovic, Linear Analysis of Laminated Composite Plates Using Single Layer Higher-Order Discrete Models, Composite Structures, Vol. 48, 2000, p.205-211
- [2] Četković M., Vuksanović Đ., Bending, free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates using layer wise displacement model, Composite Structures, Volume 88, Issue 2, April 2009, Pages 219-227
- [3] W., Zhen, Y.K., Cheung, S.H., Lo., C., Wanji, Effects of higher-order global-local shear deformations on bending, vibration and buckling of multilayered plates, Composite Structures, 2007, in press
- [4] J.B., Dafedar, Y.M., Dasai, A.A., Mufti, Stability of sandwich plates by mixed, higher-order analytical formulation, International Journal of Solids and Structures, Vol. 40, 2003, pp 4501-4517