

24<sup>th</sup> national and 1<sup>st</sup> international scientific convention



**moNGeometrija**

**2008**

Serbia | Vrnjačka Banja | September 25<sup>th</sup> - 27<sup>th</sup> | [www.mongeometrija.org](http://www.mongeometrija.org)

**PROCEEDINGS | ZBORNIK RADOVA**

**UNDER THE AUSPICES OF:**

**The Republic of Serbia / Ministry of Education  
University of Niš  
Faculty of Architecture and Civil Engineering of Niš  
The Faculty of Mechanical engineering of Niš  
Faculty of Sciences and Mathematics of Niš  
The Faculty of Occupational Safety of Niš  
Donors**

**POKROVITELJI:**

**Ministarstvo prosvete Republike Srbije  
Univerzitet u Nišu  
Građevinsko-arhitektonski fakultet u Nišu  
Mašinski fakultet u Nišu  
Prirodno-matematički fakultet u Nišu  
Fakultet zaštite na radu u Nišu  
Donatori**

24<sup>th</sup> national and 1<sup>st</sup> international scientific conference  
24. nacionalni i 1. međunarodni naučni skup

**moNGeometrija 2008**

**PROCEEDINGS | ZBORNİK RADOVA**

September 25<sup>th</sup> - 27<sup>th</sup> 2008

24<sup>th</sup> national and 1<sup>st</sup> international scientific conference  
24. nacionalni i 1. međunarodni naučni skup

## **moNGeometrija 2008**

**Publisher | Izdavač**

**Faculty of Architecture and Civil Engineering in Niš  
Građevinsko-arhitektonski fakultet u Nišu**

**Serbian Society for Geometry and Graphics  
Srpsko udruženje za geometriju i grafiku  
SUGIG**

**Title of Publication | Naziv publikacije**

**PROCEEDINGS | ZBORNIK RADOVA**

**Reviewers | Recenzenti**

Hranislav Anđelković, PhD  
Miroslav Marković, PhD  
Biserka Marković, PhD  
Ljubica Velimirović, PhD

**Editor-in-Chief | Glavni urednik**

Biserka Marković, PhD

**Co-Editor | Zamenik urednika**

Sonja Krasić, PhD

**Text formatting | Tehnička obrada teksta**

Vladan Nikolić

**ISBN 978-86-80295-83-1**

Number of copies printed | Tiraž: 100 primeraka / CDs  
Printing | Štampa: M-COPS Niš

Izdavač zadržava sva prava. Reprodukција pojedinih delova ili celine ove publikacije nije dozvoljena.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced without either the prior written permission of the publisher.

**Scientific committee | Naučni odbor**

Stachel Hellmuth, PhD  
Weiss Gunter, PhD  
Natasha Danilova, PhD  
Hubert Gollek, PhD

**Organization committee | Organizacioni odbor**

Biljana Predić, PhD  
Dragan Aranđelović, PhD  
Jovan Mandić, architect  
Mića Stanković, PhD  
Mihailo Đurđanović, PhD  
Ljiljana Radović, PhD  
Ljubica Velimirović, PhD  
Hranislav Anđelković, PhD  
Miroslav Marković, PhD  
Biserka Marković, PhD

**Executive committee | Izvršni odbor**

Biserka Marković, PhD  
Hranislav Anđelković, PhD  
Miroslav Marković, PhD  
Sonja Krasić, PhD  
Ljubica Velimirović, PhD  
Ljiljana Radović, PhD  
Mihailo Đurđanović, PhD

## CONTENTS | SADRŽAJ

Foreword   Predgovor .....	13
<b>Aleksandar Čučaković, Magdalena Dimitrijević</b> NAČIN ODREĐIVANJA TANGENTI U SINGULARNOJ TAČKI PROSTORNE KRIVE 4.REDA .....	16
ONE PROCEDURE FOR DETERMINATION OF TANGENTS IN THE SINGULAR (DOUBLE) POINT OF SPATIAL CURVE OF 4 <sup>TH</sup> ORDER (english summary).....	24
<b>Aleksandar Čučaković, Magdalena Dimitrijević</b> VARIJANTE MEĐUSOBNOG POLOŽAJA DIREKTRISA KOSOG JEDNOGRANOG ELIPTIČKOG HIPERBOLOIDA .....	25
VARIETIES OF SPATIAL SETTING OF DIRECTRICES OF OBLIQUE ELLIPTICAL HYPERBOLOID(english summary).....	37
<b>Marija Ćirić</b> GRAPHICAL PRESENTATION OF SOME CONSTANT MEAN CURVATURE SURFACES.....	38
GRAFIČKI PRIKAZ NEKIH POVRŠI KONSTANTNE SREDNJE KRIVINE (rezime na srpskom) .....	47
<b>Natasha K. Danailova</b> FRACTAL GEOMETRY - SYNTHESIS OF ART AND SCIENCE .....	48
FRAKTALNA GEOMETRIJA - SINTEZA UMETNOSTI I NAUKE (rezime na srpskom) .....	60
<b>Hubert Gollek</b> PROJECTIVE DUALS OF NULL CURVES.....	61
PROJEKTIVNI DUALI NUL KRIVA (rezime na srpskom) .....	75
<b>Lozica Ivanović, Danica Josifović, Zoran Ivanović</b> MODELIRANJE I VIZUELIZACIJA GEROTORSKIH PUMPI .....	76
MODELING AND VISUALIZATION OF THE GEROTOR PUMPS (english summary).....	86

<b>Milorad Janić, Dragomir Grujović, Gordana Djukanović</b> PRIMENA INŽENJERSKE GRAFIKE U PEJZAŽNOM PROJEKTOVANJU .....	87
USAGE OF ENGINEERING GRAPHICS IN LANDSCAPE PROJECTION (english summary).....	94
<b>Milorad Janić, Dragomir Grujović, Gordana Djukanović</b> MODELOVANJE ELEMENATA PEJZAŽNOG PROJEKTOVANJA .....	95
MODELLING OF ELEMENTS IN LANDSCAPE PROJECTION (english summary).....	103
<b>Marijana Kalabić</b> KONUSNA ANAMORFOZA .....	104
CONE ANAMORPHOSES (english summary).....	116
<b>Vladimir Kubet, Milena Krklješ, Ksenija Hiel</b> GEOMETRIJA UGAONIH OBJEKATA MODERNE U NOVOM SADU .....	117
GEOMETRY OF CORNER BUILDINGS FROM MODERNA PERIOD IN NOVI SAD (english summary).....	123
<b>Sonja Krasić, Vladan Nikolić</b> DETERMINATION OF ABSOLUTE CONIC FIGURE IN GENERAL COLLINEAR SPACES .....	124
ODREĐIVANJE SLIKE APSOLUTNE KONIKE U OPŠTE KOLINEARNIM POLJIMA (rezime na srpskom) .....	135
<b>Sonja Krasić, Vladan Nikolić</b> MAPPING A SPHERE INTO A SPHERE WITH THE AID OF THE ABSOLUTE CONIC OF SPACE IN THE GENERAL COLLINEAR SPACES .....	136
PRESLIKAVANJE SFERE U SFERU POMOĆU APSOLUTNE KONIKE PROSTORA U OPŠTE KOLINEARNIM PROSTORIMA (rezime na srpskom) .....	143

<b>Sonja Krasić, Vladan Nikolić</b> MAPPING OF A SPHERE INTO A ROTATIONAL ELLIPSOID WITH THE AID OF THE ABSOLUTE CONIC OF SPACE IN GENERAL COLLINEAR SPACES .....	144
PRESLIKAVANJE SFERE U ROTACIONI ELIPSOID POMOĆU APSOLUTNE KONIKE PROSTORA U OPŠTE KOLINEARNIM PROSTORIMA (rezime na srpskom) .....	154
<b>Biserka Marković, Marija Jevrić, Vladan Nikolić</b> DETERMINING THE CHARACTERS OF INFINITELY DISTANT POINTS OF 4 <sup>th</sup> ORDER CURVE MADE BY THE SQUARE TRANSFORMATION IN AFFINED PENCIL OF CONIC IH .....	155
OREĐIVANJE KARAKTERE BESKONAČNO DALEKIH TAČAKA KRIVE 4. REDA NASTALE KVADRATNOM TRANSFORMACIJOM U AFINOM PRAMENU KONIKA IH (rezime na srpskom).....	168
<b>Slobodan Mišić, Marija Obradović</b> KONKAVNA KUPOLA NAD HENDEKAGONALNOM OSNOVOM .....	169
CONCAVE CUPOLA WITH HENDECAGONAL BASE (english summary) .....	179
<b>Branko Malešević</b> APPLICATIONS OF GROEBNER BASES IN COMPUTER GRAPHICS .....	180
PRIMENA BAZISA GROEBNER U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI (rezime na srpskom) .....	186
<b>Milan Mitić, Biljana Jović, Aleksandar Čučaković</b> PREDLOZI ZA UNAPREĐENJE PRIMENE NACRTNE GEOMETRIJE U NASTAVNOM PROCESU NA ODSEKU ZA PEJZAŽNU ARHITEKTURU, ŠUMARSKOG FAKULTETA, UNIVERZITETA U BEOGRADU .....	187
SUGGESTIONS FOR IMPROVED APPLYING OF DESCRIPTIVE GEOMETRY THROUGH TEACHING AT DEPARTMENT FOR LANDSCAPE ARCHITECTURE, FACULTY OF FORESTRY, UNIVERSITY OF BELGRADE (english summary) .....	197



<b>Miodrag Nestorović, Aleksandar Čučaković, Biljana Jović</b> GEOMETRIJSKA KORELACIJA NABORANIH PROSTORNIH STRUKTURA U FUNKCIJI BIONIKE .....	198
GEOMETRICAL CORRELATION FOLDED SPACE STRUCTURES IN FUNCTION OF BIONIC (english summary) .....	208
<b>Marija Obradović, Slobodan Mišić</b> PREVOĐENJE KONKAVNIH KUPOLA DRUGE VRSTE U TRIDIMENZIONALNE KONSTRUKTIVNE SISTEME - PROSTORNE REŠETKE .....	209
TRANSPOSING THE CONCAVE CUPOLAE OF SECOND SORT INTO TRIDIMENSIONAL SPATIAL STRUCTURES - SPACE FRAMES (english summary) .....	221
<b>Marija Obradović, Maja Petrović</b> PROSTORNA INTERPRETACIJA HÜGELSCHÄFFER-OVE KONSTRUKCIJE JAJASTE KRIVE .....	222
THE SPATIAL INTERPRETATION OF HÜGELSCHÄFFER'S CONSTRUCTION OF THE EGG CURVE (english summary) .....	232
<b>Ratko Obradović, Branislav Beljin</b> MODELING TRANSITIONAL DEVELOPABLE SURFACES IN COMPUTER GRAPHICS - TRANSITION FROM POLYGON TO POLYGON .....	233
MODELIRANJE PRELAZNIH RAZVOJNIH POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI - PRELAZ SA POLIGONA NA POLIGON (rezime na srpskom).....	243
<b>Branislav Popkonstantinović, Zorana Jelić, Vladimir Čalić</b> KONSTRUKTIVNA GEOMETRIJA I KINEMATIKA MEHANIČKIH ČASOVNIKA .....	244
THE CONSTRUCTIVE GEOMETRY AND KINEMATICS OF MECHANICAL CLOCKS (english summary).....	259

<b>Branislav Popkonstantinović, Dragan Petrović</b> OSNOVNI PRINCIPI I KONSTRUKTIVNA REŠENJA KOMPENZACIJE TEMPERATурсKE DILATACIJE KLATNA .....	260
BASIC PRINCIPLES AND CONSTRUCTIVE SOLUTIONS OF THE COMPENSATION OF THE PENDULUM TEMPERATURE DILATATION (english summary)	270
<b>Branislav Popkonstantinović, Nikola Mladenović</b> EVOLUCIJA ZAPREČNO-IMPULSNIH MEHANIZAMA KROZ VEKOVE.	271
THE ESCAPEMENT MECHANISMS EVOLUTION THROUGH THE CENTURIES (english summary).....	287
<b>Branislav Popkonstantinović, Aleksandar Čučaković</b> PROJEKAT I KONSTRUKCIJA VELIKOG WESTMINSTERSKOG ČASOVNIKA .....	288
THE PROJECT AND CONSTRUCTION OF THE GREAT CLOCK OF WESTMINSTER (english summary).....	304
<b>Ljiljana Radović, Slavik Jablan</b> VIZUELNA KOMUNIKACIJA KROZ VIZUELNU MATEMATIKU .....	305
VISUAL COMMUNICATION THROUGH VISUAL MATHEMATICS.....	315
<b>Zoran Rastović, Radovan Štulić, Radovan Jelača</b> STRUKTURA NASTAVE CAD-A METODOM MINIMALNO GEOMETRIJE MAKSIMALNO TIPSKIH FORMI U OSNOVNIM I SREDNJIM ŠKOLAMA I GIMNAZIJAMA .....	316
THE STRUCTURE OF THE CAD-LECTURES - THE USE OF THE METHOD "MINIMUM OF GEOMETRY AND MAXIMUM OF THE FEATURES" IN PRIMARY, SECONDARY AND GRAMMAR SCHOOLS (english summary).....	326
<b>Vesna Stojaković, Predrag Šidanić</b> STRUKTURALIZACIJA I OBRADA ATRIBUTA ARHITEKTONSKOG OBJEKTA RADI KREIRANJA IDEALIZOVANOG 3D MODELA .....	327
STRUCTURING AND PROCESSING ARCHITECTURE OBJECT ATTRIBUTES IN PURPOSE OF CREATING IDEALIZED 3D MODEL (english summary).....	335

<b>Tima Segedinac, Milan Segedinac</b> KONSTRUKTIVNA GEOMETRIJA U FUNKCIJI OBRADE SLIKE NA RAČUNARU .....	336
DESCRIPTIVE GEOMETRY AND FINISHING PICTURE ON THE COMPUTER (english summary).....	343
<b>Predrag S. Stanimirović, Marko D. Petković, Milan Zlatanović</b> VISUALIZATION IN OPTIMIZATION WITH MATHEMATICA .....	344
VIZUALIZACIJA I OPTIMIZACIJA U PROGRAMSKOM PAKETU MATHEMATICA (english summary).....	355
<b>Radovan B. Štulić, Vesna Z. Stojaković</b> ON POSSIBLE MODIFICATIONS OF DESCRIPTIVE GEOMETRY TOPICS - ARCHITECTURAL CURRICULA BASED UPON COMPETENCES AND LEARNING OUTCOMES .....	356
O MOGUĆIM MODIFIKACIJAMA NASTAVE NACRTNE GEOMETRIJE U SKLADU SA NASTAVNIM PLANOM STUDIJA ARHITEKTURE ZASNOVANIM NA KOMPETENCIJAMA I ISHODIMA UČENJA (rezime na srpskom).....	364
<b>Risto Taševski</b> PROJEKCIJE 4D POVRŠI .....	365
PROJECTIONS OF 4D SURFACES (english summary).....	373
<b>Bojana Todorović</b> CONSTRUCTION OF MINIMAL SURFACES .....	374
KONSTRUKCIJA MINIMALNIH POVRŠI (rezime na srpskom).....	382
<b>Ljubica Velimirović, Svetozar Rančić, Milan Zlatanović</b> GRAPHICAL PRESENTATIONS OF INFINITESIMAL BENDING OF CURVES .....	383
GRAFIČKO PREDSTAVLJANJE BESKONAČNO MALOG SAVIJANJA NEKIH KRIVIH (rezime na srpskom).....	393
<b>Ljubica Velimirović, Milica Cvetković</b> DEVELOPABLE SURFACES AND APPLICATIONS .....	394
RAZVOJNE POVRŠI I PRIMENE (rezime na srpskom).....	403

<b>Ljubica Velimirović, Predrag Stanimirović, Milan Zlatanović</b> GEOMETRY USING PROGRAM PACKAGE <i>MATHEMATICA</i> .....	404
<b>GEOMETRIJA UZ KORIŠĆENJE PAKETA</b> <i>MATHEMATICA</i> (rezime na srpskom).....	413
<b>Gunter Weiss</b> DESCRIPTIVE GEOMETRIC MAPPINGS - A TOOL FOR ELEGANT PROOFS .....	414
<b>PRESLIKAVANJA IZ NACRTNE GEOMETRIJE -</b> ALAT ZA ELEGANTNE DOKAZE (rezime na srpskom).....	425
<b>Biljana Jović, Branislav Popkonstantinović,</b> <b>Aleksandar Čučaković, Marija Jevrić</b> KLASIFIKACIJA STEREOGRAMA .....	426
CLASSIFICATION OF STEREOGRAMS (english summary).....	435
<b>Hellmuth Stachel</b> THE INFLUENCE OF THE GEOMETRY ON RIGIDITY OR FLEXIBILITY (english summary).....	436
<b>UTICAJ GEOMETRIJE NA KRUTOST I</b> FLEKSIBILNOST(rezime na srpskom).....	436
<b>Ivana Marcikić</b> NASTAVA GEOMETRIJE NA FAKULTETU PRIMENJENIH UMETNOSTI U BEOGRADU .....	437
<b>Ivana Marcikić</b> MESTO NACRTNE GEOMETRIJE I PERSPEKTIVE U VISOKOM ŠKOLSTVU - BOLONJSKA DEKLARACIJA I POSLEDICE .....	439

## FOREWORD

There is almost four decades long tradition in organizing scientific conferences on descriptive geometry, all the way since the year 1953. The national conferences were held under different titles and organized by, then Yugoslav and later on Serbian, national societies for descriptive geometry. The conferences have been held, as a rule, once in a two years period.

The city of Nis hosted 10<sup>th</sup> conference in 1975. while celebrating 10<sup>th</sup> anniversary of University of Nis. In the year 2000. Nis hosted the conference again, this time celebrating 35<sup>th</sup> anniversary of the University. Upon foundation of Yugoslav society for descriptive geometry (JUNGIG), organization of scientific conferences has become one of the primary tasks for its members. The scope of activities was, and has remained, quite broad: education issues, human resources, the status of descriptive geometry in educational system. However, the first of all tasks remained to be presenting scientific achievements in the field of descriptive geometry.

Year by year, there is increasing number of fields that are supported by applied descriptive geometry, while submitted conference papers cover ever longer list of topics. Thus significance, actuality and longevity of descriptive geometry are being confirmed all over again. Its methods and graphical representations remain applicable even today. New software packages rely on the principles of descriptive geometry and help us visualize solutions to numerous technical problems.

Our publishing activities have begun by circulating assorted papers in the form of abstracts, followed by release of national conference Proceedings. In order to push our achievements and communication over national level, and to open wide our issues to international community, here we are with Proceedings of The First International Conference organized by Serbian Society for Descriptive Geometry.

Hereby we express our gratitude to members of Scientific Board, particularly our foreign colleagues for their understanding, support and cooperation.

Editor,  
Prof Biserka Markovic, Ph.D.

## PREDGOVOR

Tradicija održavanja stručno-naučnih skupova za nacrtanu geometriju duga je skoro četiri decenije, od 1953. godine do danas. Pod različitim nazivima, najpre u okviru bivše jugoslovenske, zatim državne zajednice Srbije i Crne Gore, danas kao aktivnost srpskog udruženja, UNGIG, za nacrtanu geometriju i kompjutersku grafiku, skup se po pravilu održava svake druge godine.

Niš je, 1975. godine, između ostalih, bio domaćin jubilarnog X Savetovanja, u godini proslave jubileja Univerziteta u Nišu - 15 godina visokoškolske nastave i 10 godina Univerziteta u Nišu. Sticajem okolnosti, 2000. godine, poklopila su se tri jubileja: XX Savetovanje, 40 godina visokoškolske nastave u Nišu i 35 godina Univerziteta u Nišu.

Po osnivanju jugoslovenskog udruženja, JUNGIG-a, ovo postaje jedna od stručnih aktivnosti udruženja. Sadržaj rada je bio i ostaje kompleksan: problemi edukacije, kadrovska pitanja, status nactne geometrije, ali pre svega saopštavanje stručnih i naučnih dostignuća.

Iz godine u godinu širi se spektar oblasti u kojima je geometrija našla svoju primenu i prezentuju radovi sa različitom tematikom. Tako se potvrđuje značaj, stalna aktuelnost i opravdava trajanje ove naučne discipline. Tradicionalno dugovečna geometrija, njena grafička-nacrtna praksa, naučno utemeljena, široko je primenljiva. Stoji pred novim kompjuterskim programima, koje treba da svojim rešenjima predvodi, kontroliše i u određenim segmentima koristi, kako bi pomogla da imaginacija tehničkih problema dobije što verniju vizuelizaciju.

Istorijat izdavaštva radova ovih naučnih skupova počinje od separatnih tekstova, štampanih u izvodima, nekad u celini, preko, relativno skromnih brošura, do Zbornika radova nacionalnog značaja sa međunarodnim učešćem. Odgovarajući potrebi da naše stvaralaštvo i komunikacije prerastu nacionalne okvire i što šire se otvore prema međunarodnim tokovima, ovo je Zbornik radova prve međunarodne Konferencije srpskog Udruženja.

Najsrdahnije zahvaljujemo članovima Naučnog odbora, pre svega cenjenim inostranim kolegama, za razumevanje, podršku i saradnju.

Urednik,  
prof. dr Biserka Marković

## KONKAVNA KUPOLA NAD HENDEKAGONALNOM OSNOVOM

Slobodan Mišić<sup>1</sup>  
Marija Obradović<sup>2</sup>

### Rezime

*Predmet istraživanja je konstruktivno geometrijska geneza novih geometrijskih tela, kupola sa konkavnim poliedarskim površima, koje bi korišćenjem pravilnih  $n$ -tougona u svojoj mreži, obrazovale zatvorene prostorne celine. Ove poliedarske forme - kupole, za polazne  $n$ -tougone imaju jedanaestougona i dvadesetdvougona u paralelnim horizontalnim ravnima. Način formiranja ovakve kupole zasniva se na nabiranju mreže koja obrazuje traku, a presavijanjem iste dobija se deltaedarski omotač koji čine nizovi pravilnih poligona - jednakostraničnih trouglova. Za geometrijsko određivanje osnovnih parametara tela korišćeni su preseki pramenova lopti sa centrima u karakterističnim tačkama prostornog sedmostranika ABCDEFG kao osnovne ćelije kupole nad hendekagonalnom osnovom. Objasnjene su geometrijske konstrukcije i projekcioni postupci pomoću kojih je moguće prikazati kupolu nad hendekagonalnom osnovom, kroz pronalaženje međusobnih relacija parametara, dimenzija i elemenata samog tela.*

Ključne reči: poliedar, kupola, jedanaestougona, lopta, mreža.

---

<sup>1</sup> Slobodan Mišić, magistar, asistent, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

<sup>2</sup> Marija Obradović, doktor, docent, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

## 1. UVOD

Pod pojmom kupole podrazumeva se poliedar koji se sastoji od dva pravilna poligona:  $n$ -tougona i  $2n$ -tougona u paralelnim ravnima, povezanih naizmeničnim nizom pravilnih poligona. Moguće je formirati kupolu koja bi za polazni  $n$ -tougona imala poligon kod kojeg je  $3 \leq n \leq 10$ , a čiji bi omotač činili nizovi jednakostraničnih trouglova, formirajući pri tome nekonveksni poliedar. Način formiranja ovakve kupole zasniva se na nabiranju mreže od  $m \times n$  trouglova koja obrazuje traku, čijim se presavijanjem dobija deltaedarski omotač. Već su opisane<sup>3</sup> kupole koje nastaju nabiranjem omotača koji se sastoji od dva niza jednakostraničnih trouglova, te su zato nazvane Konkavnim kupolama druge vrste i mogu imati polazne poligone od  $n=4$ , do  $n=10$ . Za osnove čiji broj temena premašuje  $n=10$ , mora se potražiti novo rešenje, jer ortogonalno rastojanje od ivica osnova ( $n$ -tougona i  $2n$ -tougona) premašuje vrednost  $a\sqrt{3}$ , dvostruku visinu jednakostraničnog trougla.

Za formiranje mreže omotača kupole nad jedanaestougonom osnovom (hendekagonalnom), moramo uvesti još jedan niz jednakostraničnih trouglova u mrežu omotača, za razliku od omotača Konkavnih kupola druge vrste. Tako dobijamo mrežu omotača koji se sastoji od 3 reda jednakostraničnih trouglova, pa uvodimo pojam Konkavne kupole treće vrste (uz usvajanje uslova da red kupola diktira broj redova jednakostraničnih trouglova u mreži, tj. širina trake omotača u funkciji od umnoška vrednosti visine jednakostraničnog trougla).

Da bi smo pronašli optimalno rešenje mreže, sa najmanjim potrebnim brojem strana u rešenju, a takodje i da bi bilo moguće sklopiti ovakvu mrežu, uz uslove geometrijskih pravilnosti koje diktira osnova zadate kupole (jedanaestougona i njemu koncentričan dvadesetdvougona), iz središnjeg dela mreže omotača izbacićemo svaki drugi trougao u nizu, a iz prvog reda mreže svaki četvrti trougao. Sklapanjem ovakve mreže, dobijamo omotač koji bi kao svoje jedinične ćelije imao prostorni sedmostranik. (slika br.1)

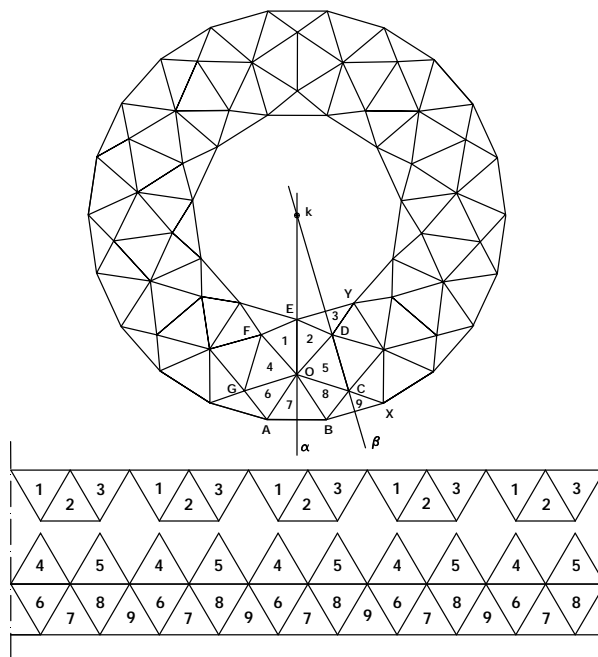
---

<sup>3</sup> M. Obradović, S. Mišić, *Concave regular faced cupolae of second sort*, Proceedings of XIII ICECGDG, Dresden, 2008.



## 2. POLAZNE PRETPOSTAVKE

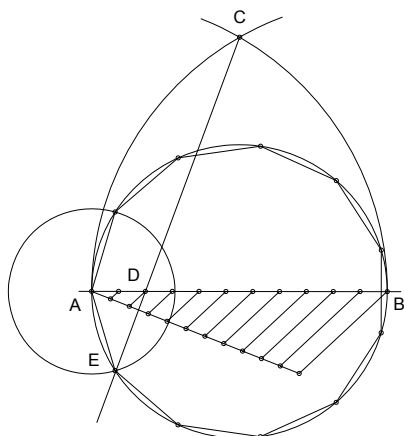
Na slici br.1 dat je izgled mreže omotača, koja se sastoji od troredne trake jednakostraničnih trouglova, kao i osnovnih poligona: jedanaestougona i njemu paralelnog dvadesetdvougona. Savijanjem i spajanjem odgovarajućih ivica mreže dobijamo zatvoreni, prstenasti fragment poliedarske površi.



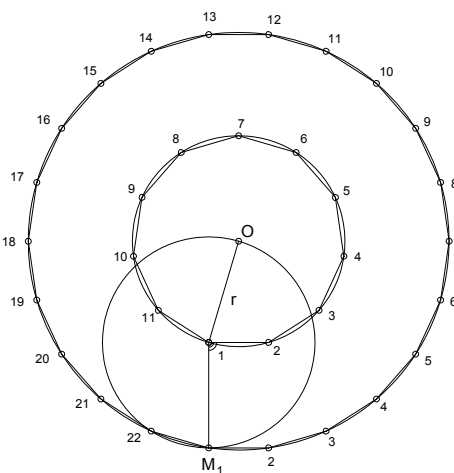
slika 1

Osnovu, jedanaestougona, uzimamo kao bazu za dalju konstrukciju. Usvajimo da se ona nalazi u horizontalnoj ravni, tako da se vidi u pravoj veličini u prvoj ortogonalnoj projekciji. Pretpostavimo da je data osnova iznad paralelne ravni obodnog poligona koji ima dvostruko više strana - dvadesetdvougona. Osnova i obodni poligon viđeni u prvoj ortogonalnoj projekciji su koncentrični, odnosno centri opisanih (i upisanih) krugova oko ovih poligona biće viđeni stopljeno jer će se nalaziti na vertikalnoj pravoj koja je u ovom slučaju i osa tela.

Za konstrukciju osnove i obodnog poligona korišćena je metoda<sup>4</sup> prikazana na slici br. 2.



slika 2



slika 3

Konstrukcija poligona od  $2n$  strana, ako poznajemo poligon od  $n$  strana, poznata je<sup>5</sup> i data je na slici br.3. Dovoljno je poluprečnik opisanog kruga oko  $n$ -tostranog poligona prebaciti na normalu ivice iz jednog njenog temena. Dobijena tačka  $M$  je teme novonastalog  $2n$ -tostranog poligona, ako mu je centar opisanog kruga zajednički sa polaznim,  $n$ -tostranim poligonom.

Da bi se jasnije sagledala geometrija Konkavnih kupola nad hendekagonalnom osnovom, pogledajmo jedan segment omotača tela. Na slici br.1 prikazana je jedinična ćelija ABCDEFG koja učestvuje u građi tela, a koja je sačinjena od 7 jednakostraničnih trouglova formiranih oko zajedničkog temena, označenog kao teme  $O$ . Radijalnim nizanjem identičnih ćelija oko ose ( $k$ ) i njihovim spajanjem dodatnim jednakostraničnim trouglovima u gornjoj i donjoj zoni dobijamo zatvorenu geometrijsku celinu koja odgovara omotaču pravilne konkavne kupole nad hendekagonalnom osnovom.

<sup>4</sup> Konstrukcija je data na osnovu: Robin Hu, *Constructing a Heptagon*, Nexus Network Journal/ Architecture and Mathematics, Vol.3. Summer 2001.

<sup>5</sup> M. Obradović, *Konstruktivno - geometrijska obrada toroidnih deltaedara sa pravilnom poligonalnom osnovom*, Doktorska disertacija, Beograd, 2006.

Da bi smo definisali željene parametre tela neophodno je postaviti polazne uslove koje ovakav prostorni sedmostranik mora da ispunjava:

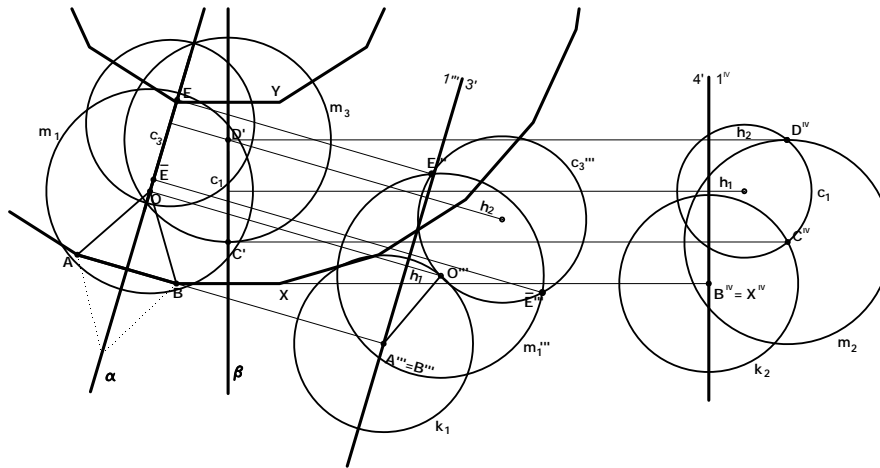
1. Ivica AB pripada horizontalnoj ravni dvadesetdvougla i tu ravan usvajamo za osnovnu horizontalnu ravan.
2. Tačka E pripada jedanaestouglu i ravni  $\alpha$ .
3. Ravan  $\alpha$  je simetralna ravan ivice AB i prolazi osom  $k$ , koja spaja centroe osnova - jedanaestougla i dvadesetdvougla.
4. Ravan  $\beta$  je simetralna ravan susedne ivice BX obodnog poligona osnove, dvadesetdvougla, i takođe prolazi osom  $k$ .
5. Prostorni sedmostranik ABCDEFG je ravanski simetričan u odnosu na ravan  $\alpha$ .
6. Prilikom određivanja visine tela prostorni sedmostranik ABCDEFG se kreće oko ivice AB koja bi bila fiksirana osa rotacije.
7. Ravan transformavije 3 paralelna je ravni  $\alpha$ , ravan transformacije 4 paralelna je ravni  $\beta$ .

### 3. GENEZA KONKAVNE KUPOLE NAD HENDEKAGONALNOM OSNOVOM

Na slici br.4 usvajamo početni položaj temena O, centralnog temena prostornog sedmostranika ABCDEFG. Teme O leži u ravni  $\alpha$ . U temenu O nalaziće se centar lopte  $m_1$  poluprečnika jednakog stranici AB, odnosno stranici (a) jednakostraničnog trougla. Na lopti  $m_1$  ležaće sva temena ovog prostornog sklopa - tačke A, B, C, D, E, F i G.

Teme O ima visinu  $h_1$ , udaljenje temena od osnovne ravni polaznog dvadesetdvougla. Visina temena O određena je njegovim položajem na ravni  $\alpha$ . Trougao ABO rotira oko ivice AB po krugu čiji je poluprečnik jednak visini ovog trougla,  $a\sqrt{3}/2$ . Ovaj krug kretanja tačke O obeležen je sa  $k_1$  i u transformacijskoj ravni  $\beta$  vidimo ga u pravoj veličini.

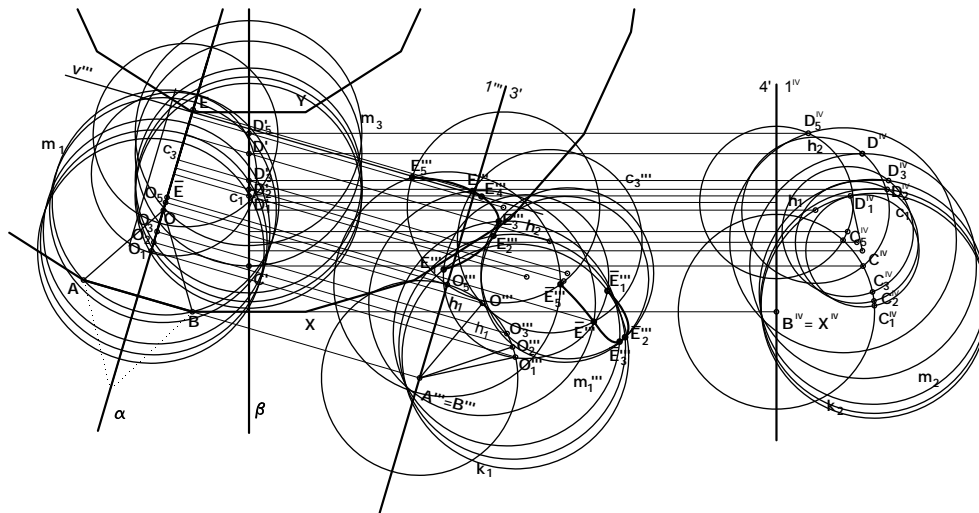
Ravan  $\beta$  seče loptu  $m_1$  po krugu  $c_1$ . Visina centra kruga  $c_1$  jednaka je visini usvojenog temena O - centra lopte. U transformacijskoj ravni  $\beta$  vidimo pravu veličinu i položaj ovog kruga  $c_1$ . Na krugu  $c_1$  leže temena C i D, koja se nalaze istovremeno i na lopti  $m_1$  i u ravni  $\beta$ .



slika 4

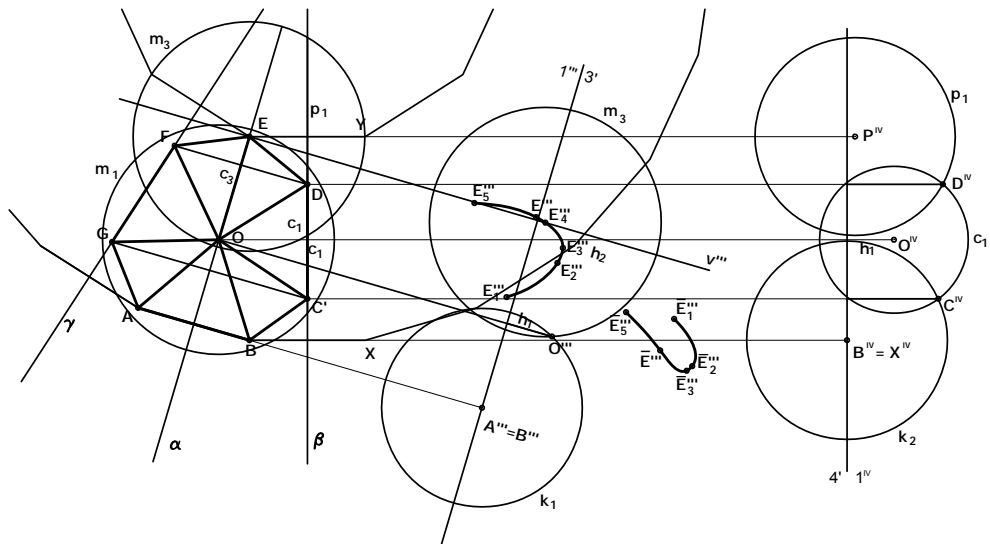
U ravni 4 crtamo krug  $k_2$ , poluprečnika  $a\sqrt{3}/2$ , koji će biti kružna trajektorija temena C koje rotira oko ivice BX. U preseku ovog kruga  $k_2$  i kruga  $c_1$  dobijamo dva rešenja mogućeg položaja temena C. Usvajamo jedno od rešenja, prema uslovu ispupčenosti ili udubljenosti temena C. U temenu C postavljamo centar nove lopte  $m_2$  poluprečnika  $r=a$ . U preseku kruga  $m_2$  (velikog kruga lopte  $m_2$ ) i kruga  $c_1$  (preseka ravni B sa loptom  $m_1$ ) dobijamo dva moguća položaja temana D. Biramo jedno od rešenja koje će u daljem postupku dati realno rešenje za traženi problem. To će biti rešenje sa visinskom koordinatom koja će dozvoliti da je rastojanje  $a\sqrt{3}/2$  poveže sa očekivanim položajem gornje ivice EY hendekagona.

Sada, sa centrom u temenu D, postavljamo novu loptu  $m_3$ , koja će seći ravan  $\alpha$  po krugu  $c_3$ , na kojem se mora nalaziti preostalo teme E, čiji položaj istražujemo. U transformacijskoj ravni 3 videćemo presek ove lopte  $m_3$  i ravni  $\alpha$  u pravoj veličini, kao krug  $c_3$ . Visina  $h_2$ , centra kruga  $c_3$ , jednaka je visini centra lopte  $m_3$  tj. tačke D koju smo odredili u transformacijskoj ravni 4. Znamo da se teme E mora nalaziti i na lopti  $m_1$  i na lopti  $m_3$ . Presek krugova  $m_1$  i  $c_3$ , u transformacijskoj ravni 3, daće nam rešenje položaja tačke E. Ponovo se pojavljuju dva rešenja, od kojih usvajamo jedno, prema unapred postavljenim uslovima.



slika 5

Na slici br.5 više puta ponavljamo postupak da bi smo dobili aproksimaciju trajektorije temena E u zavisnosti od položaja prvobitno usvojenog temena O. Poštujući polazne pretpostavke teme O uvek biramo da pripada ravni  $\alpha$  i da je iznad osnovne horizontalne ravni polaznog dvadesetdvougla. Teme O mora biti na intervalu od  $O_1$  do  $O_5$  da bi smo imali realno određene tačke C i D koje nas dovode do rešenja za tačku E. Teme  $O_1$  je određeno iz uslova da krug  $c_1$  bude jednak poluprečniku lopte  $m_2$  odnosno stranici (a) gradivnog jednakostraničnog trougla, da bi smo uspeli da dobijemo tačku D kao presek krugova  $m_2$  i  $c_1$ . Teme  $O_5$  je određeno iz uslova da je maksimalno udaljenje projekcije tačke O od stranice AB zapravo  $a\sqrt{3}/2$ , odnosno to je granični slučaj kad se trougao ABO nalazi u osnovnoj horizontalnoj ravni dvadesetdvougla.



slika 6

Presekom trajektorije temena E i vertikalne prave (v), na kojoj se očekuje traženi položaj temena E, dobijamo konačni položaj temena E. Na slici br.6 ovaj presek vidimo u transformacijskoj ravni 3. Vertikalna prava (v) je uslovljena diktiranim položajem tačke E kao temena usvojenog koncentričnog poligona jedanaestougla. Sa poznatim položajem temena E, retrogradnim konstruktivnim koracima, nalazimo preostala temena C i D, odnosno F i G, posmatranih prostornih jediničnih sklopova.

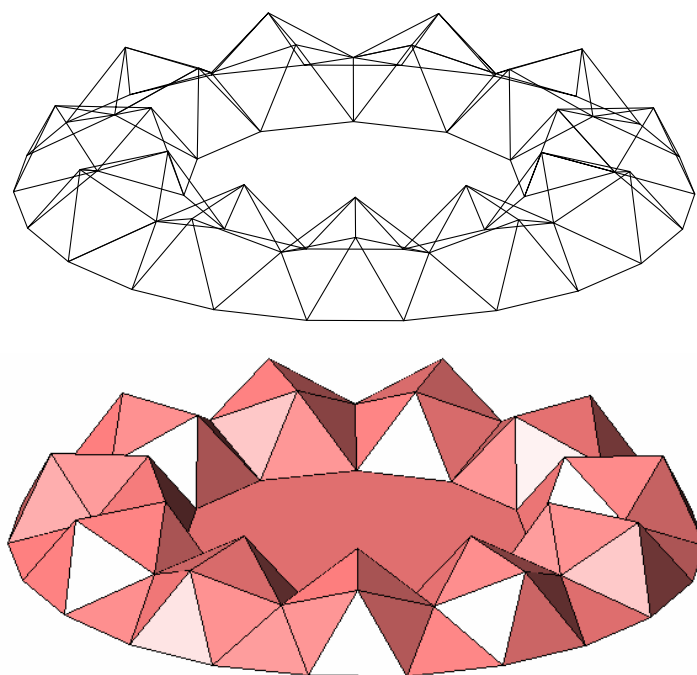
U temenu E postavljamo loptu  $m_3$  poluprečnika  $r=a$ . Ravan  $\beta$  seče loptu  $m_3$  po krugu  $p_1$  čiju pravu veličinu vidimo u transformacijskoj ravni 4. Na krugu  $p_1$  nalazi se i tačka D. U transformacijskoj ravni 3 u preseku krugova  $m_3$  (velikog kruga lopte  $m_3$ ) i  $k_1$  (poluprečnika  $r= a\sqrt{3} / 2$ ) dobijamo položaj i visinu  $h_1$  temena O. U temenu O postavljamo loptu  $m_1$  koju seče ravan  $\beta$  po krugu  $c_1$ . Visina centra kruga  $c_1$  jednaka je visini centra lopte  $m_1$  tj. tačke O. U transformacijskoj ravni 4 u preseku krugova  $p_1$  i  $c_1$  dobijamo tačku D, jer se tačka D mora nalaziti i na lopti  $m_1$  i na lopti  $m_3$ . Dobijamo dva rešenja ali usvajamo ono koje se nalazi iznad osnovne ravni polaznog dvadesetdvoougla.

U transformacijskoj ravni 4 crtamo krug  $k_2$ , poluprečnika  $a\sqrt{3}/2$ , koji će biti kružna trajektorija temena C koje rotira oko ivice BX. U preseku krugova  $c_1$  i  $k_2$  dobijamo dva rešenja za položaj tačke C i opet usvajamo ono koje nam daje položaj tačke C iznad osnovne

horizontalne ravni polaznog dvadesetdvougla. Prostorni sedmostranik ABCDEFG je ravanski simetričan u odnosu na ravan  $\alpha$  (ačke F i G simetrične su tačkama D i C). Na ovaj način pronašli smo sva temena prostornog sedmostranika ABCDEFG čije su visine prikazane u tabeli, za usvojenu veličinu stranice  $AB=100$ . Visine su određene primenom programa AutoCAD.

AB = a	O	C, G	D, F	E
100	40.431	78.715	82.616	6.947

Radijalnim ponavljanjem ovog prostornog sedmostranika zatvaramo omotač i time potpuno definišemo konkavnu kupolu nad hendekagonalnom osnovom (slika br.7).



slika 7

#### 4. ZAKLJUČAK

Imajući u vidu genezu Konkavnih kupola druge vrste prikazano rešenje za formiranje Konkavne kupole nad hendekagonalnom osnovom je složenije a problem višeg reda. Sada se pojavljuje više rešenja za moguće visine ove kupole, u zavisnosti od toga koja temena biramo kao ispučena a koja kao udubljena. Prema ovim kriterijumima, bilo bi moguće postaviti algoritam, numerički proračunati parametre kupole, a takodje i precizno predvideti trajektoriju temena.

#### LITERATURA

1. Obradović M.: *Konstruktivno - geometrijska obrada toroidnih deltaedara sa pravilnom poligonalnom osnovom*, Doktorska disertacija, Arhitektonski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2006.
2. Obradović M.: *Istraživanje geometrijskih pravilnosti šesdesetostranog toroidnog deltaedra*, XXII Jugoslovensko savetovanje za nacrtanu geometriju i inženjersku grafiku MonGEometrija 2004, Zbornik radova, Beograd, 2004, str. 133-145.
3. Obradović M., Mišić. S.: *Concave regular faced cupolae of second sort*, Proceedings of XIII ICECGDG, Dresden, 2008.
4. Hu R.: *Constructing a Heptagon*, Nexus Network Journal / Architecture and Mathematics, Vol.3. Summer 2001.



## CONCAVE CUPOLA WITH HENDECAGONAL BASE

Slobodan Mišić<sup>1</sup>  
Marija Obradović<sup>2</sup>

### Abstract

*The subject of this research is constructive - geometrical genesis of new geometric solids, cupolae with concave polyhedral surfaces, which would create closed (convergent) spatial structures by using regular  $n$ -gons as its faces. This polyhedral forms, cupolae, have for their basic polygones: a hendecagon and an icosicaidiecagon in the parallel planes. The method of forming such a cupola is based on wrinkling a planar net which tessellates a double triangular strip, by folding of which we obtain detahedral envelope. For geometrical determination of the elementary parameters of the solid, there are used section circles of the set of spheres with centers in the characteristic points (vertices) of spatial heptahedron ABCDEFG as the unit envelope cell. There are given explanations of geometrical constructions and projectional methods, which makes possible to present the cupola whith hendecagonal base, through finding mutual parametric relations, dimensions and elements of the solid.*

Key words: polyhedron, cupola, hendecagon, sphere, net

---

<sup>1</sup> Slobodan Mišić, MSc, Lecturer assistant, Faculty of Civil Engineering, Belgrade, Serbia

<sup>2</sup> Marija Obradović, PhD, Lecturer, Faculty of Civil Engineering, Belgrade, Serbia