ć Ћ ć

Klerić

'rs è

Ж Ч Б Є

Вв

НАЧЕЛА

ВЫШЕ МАТЕМАТИКЕ

У ТРИ ЧАСТИ.

ИЗРАДІО

ПОНАЙПРЕЧЕ ЗА ПОТРЕБУ АРТИЛЉРІЙСКЕ ШКОЛЕ К. С.,

ЕМИЛІЯНЪ ІОСИМОВИЋЪ,

при истой школи выше математике, механике и выше геодезіе професоръ,
школске комисіе и дружства србске словесности редовный чланъ.

У БЕОГРАДУ.

У Кньигопечатньи Княжества Србскогъ.

1860.

Strebe unermüdet stets nach Erweiterung deiner Kenntnisse, und du erstrebst damit neben eigener Befriedigung und hohem geistigen Genusse, noch das erhedende Gefühl — nützlich geworden zu sein.

E. J.

Fleiss ist mehr, als Genie, und Tausende, die sich mit diesem den Hals brechen würden, ersteigen mit jenem die Höhe glücklich die sie sich vorgesetzt haben.

Justus Möser.

НАЧЕЛА ВЫШЕ МАТЕМАТИКЕ

II. ЧАСТЬ.

ИНФИНИТЕЗИМАЛНЫЙ РАЧУНЪ

У ТРИ КЊИГЕ.

Reichst mit dem Endlichen nicht mehr du aus,
Musst dann zum Unendlichen flüchten;
Doch Herr musst du ganz des Endlichen sein,
Soll auch das Unendliche endlich dir werden.

Садржай.

Кньига III.

КНЂИГА I.

ДИФЕРЕНЦІАЛНЫЙ РАЧЎНЪ.

А. Диференціаленђ функція єдногъ пременљивогъ броя.

а) Понятія.

§ 1.

Премена неке функціє $f(x)$ збогъ увећаногъ — или умалђногъ — пременљивога броя x съ некимъ **изчезљиво** малимъ, иначе сталнимъ или пременљивимъ броємъ, зове се исте функціє **диференціалъ**, и означує се — за разлику одъ нђне премене збогъ некогъ крайногъ приращтая броя x, кою смо у I. Ч. представляли съ $\Delta f(x)$ — предпоставлђнимъ іой знакомъ d, т. є. символомъ $df(x)$.

Изчезљиво малый приращтай броя x притомъ, назива се **диференціалъ одъ** x, а означує съ dx, за разлику одъ каквогъ крайногъ нђговогъ приращтая, кои смо бележили съ Δx.

Диференціалъ неке функціє дакле ніє ништа друго, по нђна разлика одъ оне функціє, кою добыямо, ако у ньой метнемо $x+dx$ место x; у символима

$$df(x) = f(x+dx) - f(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1.$$

Определиванђ ове — каошто ћемо одма видити, изчезљиво мале — разлике, зове се **диференціаленђ** дотичне функціє $f(x)$.

§ 2.

По I. Ч. §. 11. є сасвимъ уобште

$$f(x+h) - f(x) = f_1(x)h + f_2(x)\frac{h^2}{2!} + f_3(x)\frac{h^3}{3!} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Поставляюћи ту место h изчезльиво малу вредность dx, одпадаю у десной части членови одъ другога на далѣ, као изчезльиво мали броєви выши редова, спрамъ првога члана, као изчезльиво малога првога реда (I. Ч. § 29.), и остає само да є $f(x+dx) - f(x)$, т. є.

$$df(x) = f_1(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2.$$

Изъ овога видимо:

1.) **диференціалъ є сваке функціє равανъ производу одъ нѣне прве изводне функціє са диференціаломъ променльивога броя**; пошто є пакъ овай другій чинитель изчезльиво малый брой, то є и цео производъ $f_1(x)\,dx$ такавъ брой, и тако

2.) **диференціалъ є сваке функціє изчезльиво малый брой**; найпосле

3.) **да є при диференціаленю неке функціє све само до тога стало, да се изнађе нѣна прва изводна функція, еръ имаюћи ту, имамо съ места и траженый диференціалъ, чимъ є помложимо съ dx.**

§. 3.

Изъ горнѣгъ израза подъ 2.) слѣдує деобомъ чрезъ dx,

$$\frac{df(x)}{dx} = f_1(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.,$$

изъ чега видимо, да є **размера диференціала сваке функціє съ диференціаломъ дотичногъ променльивогъ броя** — еръ то є безъ сумнѣ лева часть овогъ израза, т. є. количникъ $\frac{df(x)}{dx}$ — , **равна првой изводной функціи исте функціє, и као такова дакле или опетъ нека функція истогъ променльивогъ броя, или пакъ некій, по томъ брою сталный брой** (I. Ч. §. 11.).

Та размера назива се просто **диференціалный количникъ**, а изъ доцніє увиђавны узрока іошъ **првый** диф. количникъ дотичне функціє, може се пакъ обзиромъ на горнѣй изразъ подъ 2.) назвати такођеръ и диференціалный **сачинитель**.

б.) Основна или главна правила диференціаленя.

§ 4.

1.) Ако A представля свакій уобште сталный брой, у смотреню дотичногъ пременльивогъ броя, можемо ставити

$A = A.1 = A.x^0$; но тадъ имамо по § 1.

$$dA = A(x+dx)^0 - A.x^0 = A[(x+dx)^0 - x^0]$$

$$= A(1-1) = A.0$$

$$= 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}.$$

дакле є **диференціалъ свакогъ, по дотичномъ пременльивомъ брою сталнога броя, равaнъ нулли.**

Изъ овога слѣдує непосредно

2.), да **функціе єдногъ истогъ пременльивогъ броя, коє се међу собомъ само некимъ сталнимъ броемъ разликую, имаю све єданъ истый диференціалъ.**

3.) Ако є за диференціаленѣ дата функція вида $A\varphi(x)$, при чему A значи као пређе ма кои по x сталный брой, имамо по истомъ §.

$$dA\varphi(x) = A\varphi(x+dx) - A\varphi(x) = A[\varphi(x+dx) - \varphi(x)]$$

$$= A\,d\varphi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}.$$

то ће рећи: **диференціалъ производа одъ єдногъ сталногъ чинителя и неке функціе, равaнъ є производу одъ истогъ сталногъ чинителя съ диференціаломъ те функціе.**

4.) Ако є вопросна функція вида

$$F(x) = f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \ldots\ldots,$$ т. є.

алгебрайскій сбиръ више функція, имамо по §. 2.

$$dF(x) = F_1(x)\,dx.$$

Но по I. Ч. § 12. є прва изводна функція одъ $F(x)$,

$$F_1(x) = f_1(x) + \varphi_1(x) + \psi_1(x) + \ldots\ldots;$$ дакле, ако ово съ dx помложимо, $F_1(x)\,dx$, т. є.

$$d.\ F(x) = d\,[f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \ldots]$$
$$= f_1(x)\,dx + \varphi_1(x)\,dx + \psi_1(x)\,dx + \ldots$$
$$= df(x) + d\varphi(x) + d\psi(x) + \ldots\ldots\ldots \quad (III.,$$

а то ће рећи: **диференціалъ алгебрайскогъ сбира одъ више функція, раванъ є алгебрайскомъ сбиру диференціала' поєдины сабирака**.

5.) Ако є пакъ вопросна функція далѣ вида

$$F(x) = f(x)\,.\,\varphi(x),$$

т. є. производъ одъ две функціє, имамо, опетъ по §. 2.,

$$dF(x) = F_1(x)\,dx.$$

Но по истомъ пређе поменутомъ §. I. Ч. є у томъ случаю прва изводна функція

$$F_1(x) = \varphi(x).\,f_1(x) + f(x).\,\varphi_1(x)\,;$$

дакле ако исту помложимо съ dx, бытће $d\,F(x)$, т. є.

$$d\,f(x)\,\varphi(x) = \varphi(x)\,f_1(x)\,dx + f(x)\,\varphi_1(x)\,dx$$
$$= \varphi(x)\,d\,f(x) + f(x)\,d\,\varphi(x) \quad \ldots (IV.$$

Да се, и како се може ово докученѣ распрострти и на више чинителя, увиђа се лако по себи; зато можемо уобште рећи: **диференціалъ производа одъ ма колико функція, раванъ є сбиру производа одъ диференціала свакогъ поєдиногъ чинителя са свима осталимъ чинительима.** Найпосле

6.) Ако є дотична функція вида

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

т. є. количникъ одъ две функціє, имамо такођеръ по §. 2.,

$$dF(x) = F_1(x)\,dx:$$

Но у истомъ пређе поменутомъ §. I. Ч. нашли смо за предпоставлѣну функцію

$$F_1(x) = \frac{\varphi(x)\,f_1(x) - f(x)\,\varphi_1(x)}{\varphi^2(x)}\,;$$

дакле ако помложимо съ dx, $dF(x)$, т. є.

$$d\,\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi(x)\,f_1(x)\,dx - f(x)\,\varphi_1(x)\,dx}{\varphi^2(x)}$$

$$= \frac{\varphi(x)\,df(x) - f(x)\,d\varphi(x)}{\varphi^2(x)} \;\ldots\ldots\; (\mathrm{V.},$$

а то ће рећи: **диференціалъ количника две функціе, равань є разлици одъ производа именителя съ диференціаломъ бројителя и производа броителя съ диференціаломъ именителя, — раздѣленой съ квадратомъ именителя.**

Ова иста правила могли смо добыти такођеръ и изъ дотичны правила за крайне разляке функція (Ч. I. § 209.), поставляюћи у тима место $\Delta f(x)$ или $\Delta\varphi(x)$ и т. д. $df(x)$, $d\varphi(x)$, и т. д., и dx место Δx, па онда испытуюћи: шта одъ исты израза остає обзиромъ на свойства изчезльивы броєва. Почетникъ ће врло добро учинити, ако то самъ покуша.

§ 5.

Съ овимъ правилама, съ изразомъ подъ 1.) у §. 1., докученѣмъ 2. §, да є диференціалъ сваке функціє равань производу одъ нѣне прве изводне функціє съ диференціаломъ променльивога броя, и да є све до тога стало, да изнађемо прву изводну функцію, — као найпосле іошъ и образцима у § 210. I. Ч. у станю смо изнаћи диференціалъ сваке безъ разлике функціє єдногъ променльивогъ броя. Но да извидимо овде одма єданпутъ за свагда, колики су

в.) Диференціали найглавніи — рећи ће найвећма употреблявајући се — функція.

§ 6.

1.) $f(x) = x^n$.

Ова є функція алгебрайска; можемо дакле лако направити нѣну прву изводну функцію, по § 11. Ч. I. —

Добыямо ю по тому, ако изложителя n при x съ єдномъ єдиницомъ уманьимо, и тай степенъ после съ n помложимо. Т. є. прва є изводна функція одъ x^n;

$$f_1(x) = nx^{n-1}.$$

Множећи дакле по §. 2. ту функцію съ dx, имамо

$$dx^n = nx^{n-1}.\, dx.$$

Или: Нашли смо у § 210. I. Ч.

$$\Delta x^n = \binom{n}{1} x^{n-1}.\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}.\Delta^2 x + \binom{n}{3} x^{n-3}.\Delta^3 x + \ldots;$$

узимаюћи ту dx место Δx, па зато и dx^n место Δx^n: изчезавају спрамъ првога члана сви други, као изчезљиви броєви выши редова, и остає дакле само

$$dx^n = nx^{n-1}.\, dx,$$

као пређе. — **Или:** По §. 1. є

$$dx^n = (x + dx)^n - x^n.$$

Ако развіємо $(x + dx)^n$ по биномномъ правилу, коє, каошто знамо, важи за свакогъ уобште изложителя, и ако после одма одузмемо x^n, быва

$$dx^n = nx^{n-1}.\, dx + \binom{n}{2} x^{n-2}.\, d^2x + \binom{n}{3} x^{n-3}.\, d^3x + \ldots\ldots,$$

или зато што спрамъ првога члана сви други, као изчезљиви броєви выши редова, изчезавају,

$$dx^n = nx^{n-1}.\, dx$$

као пре.

Ма кои начинъ дакле употребили, налазимо свагда да є

$$\left.\begin{array}{l} dx^n = nx^{n-1}.\, dx, \text{ и уобште} \\ d\varphi^n(x) = n\varphi^{n-1}(x)\,.\, d\varphi(x) \end{array}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\; (I.$$

При овой єдной функціи употребисмо више начина, при другимъ пакъ іошъ слѣдуюћимъ функціяма служитћемо се понайвише само онимъ еднимъ, кои намъ се види, да є найпречій

Ако є при томе изложитель n некій разломакъ, н. п. $n = \frac{\nu}{\mu}$, имамо

$$dx^{\frac{\nu}{\mu}} = d\sqrt[\mu]{x^{\nu}} = \frac{\nu}{\mu}\, x^{\frac{\nu}{\mu}-1} \cdot dx = \frac{\nu}{\mu}\, x^{\frac{\nu-\mu}{\mu}} .\ ax$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{\nu}{\mu}\sqrt[\mu]{x^{\nu-\mu}} .\ dx\,, \quad \text{уобште} \\ d\sqrt[\mu]{f^{\nu}(x)} &= \frac{\nu}{\mu}\sqrt[\mu]{f^{\nu-\mu}(x)} \cdot df(x) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}'.$$

Дакле у случаю ако є $\frac{\nu}{\mu} = \frac{1}{2}$, кои є врло обичанъ,

$$\text{уобште} \quad \left.\begin{aligned} d\sqrt{x} &= \frac{dx}{2\sqrt{x}}\,, \\ d\sqrt{f(x)} &= \frac{df(x)}{2\sqrt{f(x)}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\mathrm{II}'.$$

§ 7.

2.) $f(x) = a^x$.

По 2. §. диференціалъ сваке функціє, па дакле и ове, раванъ є производу одъ нѣне прве изводне функціє съ dx; прва є пакъ изводна функція одъ a^x, по I. Ч. § 161., $a^x la$; слѣдователно

$$da^x = a^x la \,.\, dx.$$

Или: По § 210. I. Ч.

$$\Delta a^x = a^x \left(la\Delta x + \frac{l^2 a}{2!}\,\Delta^2 x + \frac{l^3 a}{3!}\,\Delta^3 x + \ldots\ldots \right).$$

Дакле ако место Δx узмемо dx,

$$da^x = a^x la \,.\, dx\,,$$

єръ остали чланови спрамъ првога изчезавaю.

Ма како радили, стои

$$\left.\begin{aligned} da^x &= a^x la \;.\; dx, \text{ а уобште} \\ da^{\varphi(x)} &= a^{\varphi(x)} la \;.\; d\varphi(x) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (II.$$

У случаю да є $a = e$, т. є. основица природны логаритама, быва збогъ $le = 1$,

$$\left.\begin{aligned} de^x &= e^x dx, \text{ уобште} \\ de^{\varphi(x)} &= e^{\varphi(x)}.\; d\varphi(x) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (II'.$$

3.) $f(x) = log\ x$.

По истомъ пређе поменутомъ §. I. Ч. имамо

$$\Delta\ log\, x = M\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 x}{x^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta^3 x}{x^3} - \ldots\right);$$

дакле ако место Δx узмемо dx, мора быти

$$\left.\begin{aligned} d\ log\, x &= M\ \frac{dx}{x}, \text{ уобште} \\ d\ log\, \varphi(x) &= M\ \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (III.$$

За природне логаритме пакъ, при коима є $M = 1$, бытће

$$\left.\begin{aligned} dlx &= \frac{dx}{x}, \text{ уобште} \\ dl\varphi(x) &= \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (III'.$$

Изъ овогъ последнѣта израза слѣдує

$$d\varphi(x) = \varphi(x) \,.\, dl\varphi(x) \quad \ldots\ldots\ldots (III''$$

врло употребителанъ образацъ за диференціаленѣ оны функція, коє се логаритмійски могу разправити. По томъ образцу имали бы н. п.

[illegible]

$$d\,[\varphi(x)]^{\psi(x)} = [\varphi(x)]^{\psi(x)} \,.\, d\,l\,[\varphi(x)]^{\psi(x)} = [\varphi(x)]^{\psi(x)} \,.\, d\,[\psi(x) \,.\, l\varphi(x)]$$

$$= [\varphi(x)]^{\psi(x)} \,.\, [l\varphi(x) \,.\, d\psi(x) + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\, d\varphi(x)] \;\ldots\ldots\; (\text{III}''$$

[illegible]

§ 8.

4.) $f(x) = \sin x$.

По веђ вишепута поменутомъ §. I. Ч. имамо

$$\Delta \sin x = \cos x \,.\, \Delta x - \frac{1}{2!} \sin x \,.\, \Delta^2 x - \frac{1}{3!} \cos x \,.\, \Delta^3 x + \ldots,$$

дакле ако место Δx метнемо dx,

$$\left.\begin{array}{ll} d \sin x = \cos x \,.\, dx, & \text{уобште} \\ d \sin \varphi(x) = \cos \varphi(x) \,.\, d\varphi(x) & \end{array}\right\} \ldots\ldots (\text{IV}.$$

На истый начинъ добыямо

5.) збогъ

$$\Delta \cos x = - \sin x \,.\, \Delta x - \frac{1}{2!} \cos x \,.\, \Delta^2 x + \frac{1}{3!} \sin x \,.\, \Delta^3 x + \ldots,$$

$$\left.\begin{array}{ll} d \cos x = - \sin x\, dx, & \text{уобште} \\ d \cos \varphi(x) = - \sin \varphi(x)\, d\varphi(x) & \end{array}\right\} {}^{*)} \ldots\ldots (\text{V}.$$

---

*) Помоћу § 1. имали бы

$$\begin{aligned} d \sin x &= \sin(x + dx) - \sin x \\ &= \sin x \,.\, \cos dx + \cos x \,.\, \sin dx - \sin x, \\ d \cos x &= \cos(x + dx) - \cos x \\ &= \cos x \,.\, \cos dx - \sin x \,.\, \sin dx - \cos x, \end{aligned}$$

или обзиромъ на то, да се cos врло малогъ лука одъ полупречника 1, а sin таквога лука одъ нулле неразликуе,

$$\begin{aligned} d \sin x &= \sin x + \cos x\, dx - \sin x = \cos x\, dx \\ d \cos x &= \cos x - \sin x\, dx - \cos x = - \sin x\, dx, \end{aligned}$$

каошто е нађено пређашньимъ начиномъ.

§ 9.

По 5. правилу у §. 4. имамо употреблѣнѣмъ докученя подъ IV. и V.,

6.) збогъ $tang\, x = \frac{sin\, x}{cos\, x}$:

$$d\, tang\, x = \frac{cos\, x \,.\, d\, sin\, x - sin\, x \,.\, d\, cos\, x}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x}\, dx$$

$$= \frac{dx}{cos^2 x} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\text{VI.};$$

7.) збогъ $cot\, x = \frac{cos\, x}{sin\, x}$:

$$d\, cot\, x = \frac{sin\, x \,.\, d\, cos\, x - cos\, x \,.\, d\, sin\, x}{sin^2 x} = - \frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x}\, dx$$

$$= - \frac{dx}{sin^2 x} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\text{VII.};$$

8.) збогъ $sec\, x = \frac{1}{cos\, x}$:

$$\left.\begin{aligned} d\, sec\, x &= - \frac{d\, cos\, x}{cos^2 x} = \frac{sin\, x}{cos^2 x}\, dx \\ &= sec\, x \,.\, tang\, x \,.\, dx \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\; (\text{VIII.},$$

9.) збогъ $cosec\, x = \frac{1}{sin\, x}$:

$$\left.\begin{aligned} d\, cosec\, x &= - \frac{d\, sin\, x}{sin^2 x} = - \frac{cos\, x}{sin^2 x}\, dx \\ &= - cosec\, x \,.\, cot\, x \,.\, dx \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\; (\text{IX}.$$

§ 10.

10.) $f\,(x) = sin\, v \,.\, x.$

Изъ тригонометріє (§ 4.) знамо, да є

$$sin\, v \,.\, x = 1 - cos\, x\,;$$

дакле по §. 4. (правило III. и I.), а обзиромъ на § 8. мора быти

$$d \, \sin v . x = - \, d \, \cos x = \sin x . dx \; . \; . \; . \; . \; . \; (X.$$

Сасвимъ истимъ начиномъ налазимо

11.) збогъ $\cos v . x = 1 - \sin x$,

$$d \, \cos v . x = - \, d \, \sin x = - \cos x . dx \; . \; . \; . \; . \; (XI.$$

§ 11.

12.) Ставимо $x = \sin z$; быт'ће по образцу IV., § 8.,

$$dx = \cos z . dz, \text{ и одатле}$$

$$dz = \frac{dx}{\cos z} = \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Но z по предпоставлѣню ніє ништа друго, но лукъ, коєга є $\sin$ раванъ x, т. є. $z = arc\,(\sin = x)$; ако дакле место z узмемо овай изразъ, стои

$$d \, arc \, (\sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (XII.$$

13.) Ако є $x = \cos z$, имамо по образцу V., §. 8.,

$$dx = - \sin z . dz, \text{ и одатле}$$

$$dz = - \frac{dx}{\sin z} = - \frac{dx}{\sqrt{1 - \cos^2 z}} = - \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ т. є.}$$

$$d \, arc \, (\cos = x) = - \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (XIII.$$

14.) За $x = tang\, z$ быва по обр. VI., §. 9.,

$$dx = d \, tang \, z = \frac{dz}{\cos^2 z},$$

и одатле

$$dz = \cos^2 z . dx = \frac{dx}{\sec^2 z} = \frac{dx}{1 + tang^2 z} = \frac{dx}{1 + x^2},$$

то ће рећи

$$d \, arc \, (tang = x) = \frac{dx}{1 + x^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (XIV.$$

15.) За $x = cot\, z$ слѣдує по обр. **VII.**, §. 9.,

$$dx = -\frac{dz}{sin^2 z},$$

и одтуда

$$dz = -\, sin^2 z\,.\,dx = -\frac{dx}{cosec^2 z} = -\frac{dx}{1+cot^2 x} = -\frac{dx}{1+x^2},$$

т. є.

$$d\,arc\,(cot = x) = -\frac{dx}{1+x^2}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;\text{(XV.}$$

16.) За $x = sec\, z$, по обр. **VIII.**, §. 9.,

$$dx = sec\,z\,.\,tang\,z\,.\,dz,$$

и одатле

$$dz = \frac{dx}{sec\,z\,.\,tang\,z} = \frac{dx}{sec\,z\sqrt{sec^2 z-1}} = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},\ \text{т. є.}$$

$$d\,arc\,(sec = x) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\;\ldots\ldots\ldots\;\text{(XVI.}$$

17.) За $x = cosec\, z$, по обр. **IX.** (§. 9.),

$$dx = -\,cosec\,z\,.\,cot\,z\,.\,dz,$$

и одтудъ

$$dz = -\frac{dx}{cosec\,z\,.\,cot\,z} = -\frac{dx}{cosec\,z\sqrt{cosec^2 z-1}} = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

т. є.

$$d\,arc\,(cosec = x) = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\;\ldots\ldots\;\text{(XVII.}$$

18.) За $x = sin\,v\,.\,z$, по обр. X., §. 10.,

$$dx = sin\,.\,z\;dz;$$

одатле пакъ

$$dz = \frac{dx}{sin\,z} = \frac{dx}{\sqrt{1-cos^2 z}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-cos\,z)(1+cos\,z)}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{sinv.z\,[1+(1-sin\,v\,.\,z)]}} = \frac{dx}{\sqrt{sin\,v\,.\,z\,(2-sinv.z)}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}},$$

т. є.

$$d\,arc\,(sin\,v\,. = x) = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}\;\ldots\ldots\;\text{(XVIII.}$$

Найпосле

19.) За $x = cos\,v\,.\,z$, на сасвимъ истый начинъ, а помоћу обр. XI. (§. 10.),

$$d\,arc\,(cos\,v\,.=x)=-\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}\quad\ldots\ldots\ldots\quad\text{XIX.}$$

Врло добро урадитћемо безъ сумнѣ, ако узмемо одма за упражнѣнѣ и неколико

г.) Примера.

§ 12.

1.) Чему є раванъ

$$d\left(2\,x^3-\frac{a}{x^2}+x\sqrt[3]{2x^2}+\frac{x}{lx}\right)^{\frac{2}{3}}=d\,X^{\frac{2}{3}}\ ?$$

Найпре имамо по образцу I. (или I'.) § 6.

$$d\,X^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}X^{-\frac{1}{3}}\,d\,X=\frac{2}{3}\cdot\frac{d\,X}{\sqrt[3]{X}}\,;$$

употреблѣнѣмъ правила III. §. 4., вопросный диференціалъ далѣ

$$=\frac{2}{3\sqrt[3]{X}}\cdot\left(d\,2x^3-d\,\frac{a}{x^2}+d\,x\sqrt[3]{2x^2}+d\,\frac{x}{lx}\right);$$

употреблѣнѣмъ правила II. §. 4. и обр. I. §. 6. на $d\ 2\,x^3$, — правила V. §. 4. и обр. I. §. 6. съ обзиромъ на правило II. §. 4. на $d\,\frac{a}{x^2}$, — правила IV. §. 4. и обр. I'. §. 6. съ обзиромъ на правило II. §. 4. на $d\ x\sqrt[3]{2x^2}$, — найпосле правила V. §. 4. и обр. III'. §. 7. на $d\,\frac{x}{lx}$: вопросный диференціалъ далѣ

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{X}} \cdot \left(6x^2 + \frac{2a}{x^3} + \sqrt[3]{2x^2} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{2x^2} + \frac{lx-1}{l^2x}\right) dx$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{X}} \cdot \left(6x^2 + \frac{2a}{x^3} + \frac{5}{3}\sqrt[3]{2x^2} + \frac{1}{lx^2} \cdot l\,\frac{x}{e}\right) dx;$$

дакле коначно

$$d\,\left(2x^3 - \frac{a}{x^2} + x\sqrt[3]{2x^2} + \frac{x}{lx}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{18\,x^5 \cdot l^2x + 6a\,l^2x + 5\,x^3\,l^2x\,\sqrt[3]{2x^2} + 3x^3 l\,\frac{x}{e}}{\left(2x^3 - \frac{a}{x^2} + x\sqrt[3]{2x^2} + \frac{x}{lx}\right)^{\frac{1}{3}}}\,dx.$$

§ 13.

2.) $d\,\frac{a^x - a^{\sin x}}{a^x + a^{\sin x}} = d\,X = ?$

По правилу **V.** у §. 4.

$$d\,X = \frac{(a^x + a^{\sin x}).\,d\,(a^x - a^{\sin x}) - (a^x - a^{\sin x}).\,d\,(a^x + a^{\sin x})}{(a^x + a^{\sin x})^2};$$

по правилу **III.** §. 4., обр. **II.** §. 7. и **IV.** §. 8., истый диференціалъ далѣ

$$= \frac{(a^x + a^{\sin x}).\,(a^x\,la\,dx - a^{\sin x}\,la\,\cos x\,.\,dx - \\ - (a^x - a^{\sin x})\,(a^x la\,dx + a^{\sin}\,la\cos x\,.\,dx)}{(a^x + a^{\sin x})^2}$$

$$= \frac{2\,la\,.\,a^{x + \sin x}\,.\,(1 - \cos\,x)}{(a^x + a^{\sin x})^2} \cdot dx;$$

найпосле ако место $(1 - \cos\,x)$ узмемо (по тригонометріє § 29.) $2\,\sin^2\frac{x}{2}$, вопросный диференціалъ, т. є.

$$d\,\frac{a^x - a^{\sin x}}{a^x + a^{\sin x}} = \frac{4la\,.\,\sin^2\frac{x}{2}\,.\,a^{x + \sin x}}{(a^x + a^{\sin x})^2} \cdot dx\,\cdot$$

3.) $d\,(l\,\sin v\,.\,x - a^{\cos x})^{x^2} = d\,X^{x^2} = ?$

По §. 7. обр. III.″,

$$d\,X^{x^2} = X^{x^2}.\cdot\left(l\,X\,.\,dx^2 + \frac{x^2}{X}\,d\,X\right)$$

$$= X^{x^2-1}.\,(2x\,X l\,X dx + x^2 d\,X),$$

далѣ после

$$= X^{x^2-1}\cdot\left[2x\,X\,l\,X dx + x^2\left(\frac{d\sin v\,.\,x}{\sin v\,.\,x} + a^{\cos x}.\,la\,\sin x\,dx\right)\right]$$

(обр. III′. §. 7., обр. II. §. 7. и обр. V. §. 8.),

$$= X^{x^2-1}\cdot\left[2x\,X\,l\,X dx + x^2\left(\frac{\sin\,x}{\sin v\,.\,x} + a^{\cos x}.\,la\,\sin x\right)dx\right]$$

(обр. X. §. 10.),

$$= \frac{X^{x^2-1}}{\sin v.x}\cdot\left[2x X l X.\,\sin v\,.\,x + x^2(\sin x + a^{\cos x}.\,la\,\sin x\,\sin v\,.\,x)\right]dx‘$$

при чему место X валя узети $l\,\sin v\,.\,x - a^{\cos x}$.

§ 14.

4.) $d\,l\,(1 \pm x) = \frac{d\,(1 \pm x)}{1 \pm x} = \pm\,\frac{dx}{1 \pm x}$

(обр. III′. §. 7. и правило III. §. 4.)

5.) $d\,l\,(1 \pm x^2) = \frac{d\,(1 \pm x^2)}{1 \pm x^2} = \pm\,\frac{2x\,dx}{1 \pm x^2}$

(преѣ. обр. и правило, и осимъ тога іошъ I. обр. §. 6.)

6.) $d\,l\,(x \pm \sqrt{1+x^2}) = \frac{d\,(x \pm \sqrt{1+x^2})}{x \pm \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 \pm \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x \pm \sqrt{1+x^2}}\cdot dx$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} \pm x}{x \pm \sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{\pm\,(x \pm \sqrt{1+x^2})}{x \pm \sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \pm\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

(обр. III′. §. 7., правило III. §. 4. и обр. I′′. §. 6.)

$$7.)\ \frac{d\,l(x\pm\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{d(x\pm\sqrt{x^2-1})}{x\pm\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1\pm\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{-1}\,.(x\pm\sqrt{x^2-1})}\,.\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{x\pm\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{-1}\,.\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{\pm\,(x\pm\sqrt{x^2-1})}{x\pm\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \pm\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(осимъ пређашньи образаца и правила іошъ прав. II. §. 4.).

Сравни овай диференціалъ съ $d\ arc\ (sin = x)$ и $d\ arc\ (cos = x)$ у §. 11. подъ XII. и XIII.

$$8.)\ d\,\frac{l(\sqrt{1-x^2}\pm x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} = \frac{d(\sqrt{1-x^2}\pm x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}\,.(\sqrt{1-x^2}\pm x\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\,.(\sqrt{1-x^2}\pm x\sqrt{-1})}\,.\,dx$$

$$= \frac{-x\mp\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{x\mp\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{\mp(\sqrt{x^2-1}\mp x)}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \pm\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(исти обр. и правила као пре).

9. $$d\,\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot l\,\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,d\left[l\left(1+x\sqrt{-1}\right)-l\left(1-x\sqrt{-1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\left[\frac{d\left(1+x\sqrt{-1}\right)}{1+x\sqrt{-1}}-\frac{d\left(1-x\sqrt{-1}\right)}{1-x\sqrt{-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{-1}}{1+x\sqrt{-1}}+\frac{\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+x\sqrt{-1}}+\frac{1}{1-x\sqrt{-1}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+x^2}\,dx=\frac{dx}{1+x^2}$$

(образци II. и III. § 4., и обр. III'. § 7).

Сравни овай диференціалъ съ d *arc* (*tang* $= x$) у § 11. подъ XIV.

10.) $$d\,l\,\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}+x}=d\left[l\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)-l\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)\right]$$

$$=\frac{d\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)}{\sqrt{1-x^2}-x}-\frac{d\left(\sqrt{1-x^2}+x\right.}{\sqrt{1-x^2}+x}$$

$$=\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}-1}{\sqrt{1-x^2}-x}\,dx-\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+1}{\sqrt{1-x^2}+1}\,dx$$

$$=\left(\frac{-x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}-x}-\frac{-x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+x}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\left[-\frac{\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2+\left(-x+\sqrt{1-x^2}\right)^2}{\left(\sqrt{1-x^2}-x\right).\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)}\right].\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{2\;dx}{\left(1-2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}\,.$$

11.) $$d\,.\,\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\,d\left[l\,(1+x)-l\,(1-x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}\right)dx=\frac{dx}{1-x^2}$$

(прав. III. § 4. и обр. III'. § 7.)

§ 15.

12.) $$d\,\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,d\,\left(e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}}.\,d\,x\sqrt{-1}+e^{-x\sqrt{-1}}.\,d\,x\sqrt{-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}}.\sqrt{-1}+e^{-x\sqrt{-1}}.\sqrt{-1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right)dx$$

(прав. II. и III. § 4., и обр. II'. § 7.)

На истый начинъ добыямо

13.) $$d\,\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}}.\,dx\sqrt{-1}-e^{-x\sqrt{-1}}.\,dx\sqrt{-1}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}\right)dx=\frac{-1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}\right)dx$$

$$=-\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\,.\,dx$$

Сравни ова два диференціала међу собомъ, и са $d\,sin\,x$ и $d\,cos\,x$ у § 8., съ обзиромъ на то, шта є првый изразъ $\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$, а шта другій $\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$?

(I. Ч. § 163.)

§ 16.

14.) $d\,llx=\dfrac{d\,lx}{lx}=\dfrac{dx}{x\,lx}$ (обр. III'. § 7.)

15.) $d\,l\,tang\,x = \frac{d\,tang\,x}{tang\,x} = \frac{dx}{tang\,x\,cos^2 x} = \frac{dx}{sin\,x\,cos\,x}$

$= \frac{2\;dx}{sin\;2x}$

(обр. III'. § 7. и тригоном. §§ 15. и 26.).

16.) $d\,sin\,lx = cos\,lx\,.\,d\,lx = cos\,lx \cdot \frac{dx}{x} = \frac{cos\,lx}{x} \cdot dx$
(обр. IV. § 8. и III'. § 7.).

17.) $d\,cos\,a^x = -\,sin\,a^x.\,da^x = -\,sin\,a^x.\,a^x la\,dx$
$= -\,la\,.\,a^x sin\,a^x.\,dx$ (обр. V. § 8. и II. § 7.)

18.) $de^{sin\,x} = e^{sin\,x}.\,d\,sin\,x = e^{sin\,x}.\,cos\,x\,dx$ (обр. II'. § 7. и IV. § 8.).

19.) $da^{lx} = a^{lx}.\,la\,.\,dlx = a^{lx}\,la\,.\,\frac{dx}{x} = \frac{a^{lx}la}{x}\,.\,dx$
(обр. II. и III'. § 7.).

20.) $de^{sin\,a^{lx}} = e^{sin\,a^{lx}}.\,d\,sin\,a^{lx}$ (обр. II'. § 7.),

притомъ $d\,sin\,a^{lx} = cos\,a^{lx}.\,da^{lx}$ (обр. IV. § 8.),

притомъ $da^{lx} = a^{lx}la\,dlx$ (обр. II. § 7.),

притомъ $dlx = \frac{dx}{x}$ (обр. III'. § 7.);

дакле ако надлежно заменемо, вопросный

$$de^{sin\,a^{lx}} = e^{sin\,a^{lx}}.\,cos\,a^{lx}.\,a^{lx}la\,.\,\frac{dx}{x}$$

21.) $d\,cos\,a^{l\,sin\,a^x} = -\,sin\,a^{l\,sin\,a^x}.\,da^{l\,sin\,a^x}$ (обр. V. § 8.),

притомъ $da^{l\,sin\,a^x} = a^{l\,sin\,a^x}.\,la\,.\,dl\,sin\,a^x$ (обр. II. § 7.),

притомъ $dl\,sin\,a^x = \frac{d\,sin\,a^x}{sin\,a^x}$ (обр. III'. § 7.),

$= \frac{cos\,a^x}{sin\,a^x}\,.\,da^x$ (об. IV. § 8.);

$= cot\,a^x.\,da^x$,

притомъ $da^x = a^x la\,dx$ (обр. II. § 7.);

дакле ако надлежно заменемо, вопросный

$$d\cos a^{\mathrm{l\,sin\,a^{x}}} = -\sin a^{\mathrm{l\,sin\,a^{x}}} \,.\, a^{\mathrm{l\,sin\,a^{x}}} \,.\, la \,.\, \cot a^{x} \,.\, a^{x} la \,.\, dx$$

$$= - la \,.\, \sin a^{\mathrm{l\,sin\,a^{x}}} \,.\, a^{\mathrm{l\,sin\,a^{x}+x}} \,.\, \cot a^{x} \,.\, dx$$

22.) $da^{\mathrm{e^{a^{lx}}}} = a^{\mathrm{e^{a^{lx}}}} \,.\, la \,.\, de^{\mathrm{a^{lx}}}$,

притомъ $de^{\mathrm{a^{lx}}} = e^{\mathrm{a^{lx}}} \,.\, da^{\mathrm{lx}}$,

притомъ $da^{\mathrm{lx}} = a^{\mathrm{lx}} \,.\, la \,.\, dlx$,

притомъ $d\,lx = \frac{dx}{x}$ (об. II., II'. и III'. § 7.);

дакле после надлежне замене, вопросный

$$da^{\mathrm{e^{a^{lx}}}} = a^{\mathrm{e^{a^{lx}}}} \,.\, l^2a \,.\, e^{\mathrm{a^{lx}}} \,.\, a^{\mathrm{lx}} \,.\, \frac{dx}{x} = a^{\mathrm{e^{a^{lx}}+lx}} \,.\, l^2a \,.\, e^{\mathrm{a^{lx}}} \,.\, \frac{dx}{x} \,.$$

23.) $da^{\mathrm{sin\,v\,e^{x\,cos\,v\,x}}} = a^{\mathrm{sin\,x\,e^{x\,cos\,v\,x}}} \,.\, la \,.\, d\sin v\, e^{\mathrm{x\,cos\,v\,x}}$,

притомъ $d\sin v\, e^{\mathrm{x\,cos\,v\,x}} = \sin e^{\mathrm{x\,cos\,v\,x}} \,.\, de^{\mathrm{x\,cos\,v\,x}}$,

притомъ $de^{\mathrm{x\,cos\,v\,x}} = e^{\mathrm{x\,cos\,v\,x}} \,.\, d\,x\cos v\,x$,

притомъ $d\,x\cos v \,.\, x = (\cos v\,x\,dx + x\,d\cos v\,x)$,

притомъ $d\cos v\,x = -\cos x \,.\, dx$ (обр. II. § 7., X. § 10., II'. § 7., XI. § 10.); дакле ако надлежно заменемо, вопросный

$$da^{\mathrm{sin\,v\,e^{x\,cos\,v\,.\,x}}} = a^{\mathrm{sin\,v\,e^{x\,cos\,v\,x}}} \,.\, la \,.\, \sin e^{\mathrm{x\,cos\,v\,x}} \,.\, e^{\mathrm{x\,cos\,v\,x}}$$

$$.\,(\cos v\,x - x\cos x)\; dx.$$

24.) $d\sec a^{\mathrm{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.\,=x)}}} = \sec a^{\mathrm{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.\,=x)}}} \times$

$\times\ tang\ a^{\mathrm{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.\,=x)}}} \times da^{\mathrm{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v=x)}}}$

притомъ $da^{\mathrm{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.\,=x)}}} = a^{\mathrm{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.\,=x)}}}$

$\times\ la \,.\, d\cot e^{\mathrm{l\,arc\,(sin\,v\,.\,=x)}}$, притомъ $d\,cot\,e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)} = -\dfrac{de^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)}}{sin\,e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)}}$,

притомъ $de^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)} = e^{l\,\mathrm{are}\,(\sin v\,.=x)}\,.\,dl\,arc\,(sin\,v\,.=x)$,

притомъ $d\,l\,arc\,(sin\,v\,.=x) = \dfrac{d\,arc\,(sin\,v\,.=x)}{arc\,(sin\,v\,.=x)}$,

притомъ $d\,arc\,(sin\,v\,.=x) = \dfrac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

(обр. VIII. § 9., II. § 7., VII. § 9., II'. § 7., III'. § 7., XVIII. § 11.); дакле после надлежне замене, вопросный диференціалъ

$$= sec\,a^{\cot e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)}}\,.\,tang\,a^{\cot e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)}}\,.\,a^{\cot e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)}}\,.\,la$$

$$\times\frac{-e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)}\,dx}{sin^2 e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)}\,.\,arc\,(sin\,v\,.=x)\,.\sqrt{2x-x^2}}$$

$$= -\frac{\left[sec\,a^{\cot e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)}}\,.\,tang\,a^{\cot e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)}} \times a^{\cot e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)}}\,.\,e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)}\right]}{sin^2 e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.=x)}\,.\,arc\,(sin\,v\,.=x)\,.\sqrt{2x-x^2}}\,dx.$$

Найпосле

25.) $d\,\dfrac{arc\,\left(cos=\sqrt{\dfrac{x}{lx}}\right)}{cot\,(xa^{lx})}$

$$= \frac{cot\,(xa^{'x})\,d\,arc\,\left(cos=\sqrt{\dfrac{x}{lx}}\right) - arc\,\left(cos=\sqrt{\dfrac{x}{lx}}\right).dcot(xa^{xl}),}{cot^2\,(xa^{lx})}$$

притомъ 1.) $d\,arc\,\left(cos=\sqrt{\dfrac{x}{lx}}\right) = -\dfrac{d\sqrt{\dfrac{x}{lx}}}{\sqrt{1-\dfrac{x}{lx}}}$

$$= -\frac{\sqrt{lx}\,.\,d\sqrt{\dfrac{x}{lx}}}{\sqrt{lx-x}},$$

а ту опеть $d\sqrt{\frac{x}{lx}} = \frac{d\,\frac{x}{lx}}{2\sqrt{\frac{x}{lx}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{lx}{x}}\,.\,d\,\frac{x}{lx}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{lx}{x}}\,.\,\frac{lx.dx - xdlx}{l^2x}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{lx}{x}}\,.\,\frac{lx-1}{l^2x}\,dx$$

$$= \frac{lx-1}{2\,lx\sqrt{xlx}}\,.\,dx\,,$$

2.) $d\,cot\,(xa^{lx}) = -\frac{dxa^{lx}}{sin^2\,(xa^{lx})} = -\frac{a^{lx}dx + xda^{lx}}{sin^2\,(xa^{lx})}$

$$= -\frac{a^{lx}dx + xa^{lx}la\,.\,dlx}{sin^2\,(xa^{lx})} = -\frac{a^{lx}+a^{lx}la}{sin^2\,(xa^{lx})}\,dx$$

$$= -\frac{a^{lx}\,(1+la)}{sin^2\,(xa^{lx})}\,.\,dx\,;$$

дакле ако надлежно заменемо, вопросный

$$d\,\frac{arc\,(cos = \sqrt{\frac{x}{lx}})}{cot\,(xa^{lx})}$$

$$= -\frac{cot\,(xa^{lx})\,\frac{lx-1}{2lx\sqrt{xlx-x^2}} + arc\,(cos = \sqrt{\frac{x}{lx}})\,\frac{a^{lx}(1+la)}{sin^2\,(xa^{lx})}}{cot^2\,(xa^{lx})}\,dx$$

$$= -\frac{[sin(xa^{lx})cos(xa^{lx})(lx-1) - 2arc(cos = \sqrt{\frac{x}{lx}})\,lx.a^{lx}(1+la) \times \sqrt{xlx-x^2}]}{2lx\,\sqrt{xlx-x^2}.\,cos^2\,(xa^{lx})}\,dx$$

$$= -\frac{[sin\,(2xa^{lx})\,(lx-1) - 4\,arc\,(cos = \sqrt{\frac{x}{lx}})\,lx\,.\,a^{lx}.\,.\,(1+la)\,\sqrt{x\;lx-x^2}]}{4\,lx\,.\sqrt{x\,lx-x^2}\,cos^2\,(x\,a^{lx})}\,dx$$

$$= -\frac{sin(2xa^{lx})\,l\frac{x}{e} - 4\,arc\,(cos = \sqrt{\frac{x}{lx}}\,lx)\,a^{lx}.lae.\sqrt{xlx-x^2}}{4\,lx\,.\sqrt{x\,lx-x^2}.\,cos^2(xa^{lx})} - dx$$

д.) Выши диференціали.

§. 17.

Видили смо у §. 2., да є диференціалъ сваке функціє $f(x)$ раванъ производу одъ нѣне прве изводне функціє $f_1(x)$ са диференціаломъ променљивогa броя x, т. є. да є

$$d\,f(x) = f_1(x)\,.\,dx\,;$$

пошто є пакъ, каошто смо видили у I. Ч. §. 11., прва изводна функція $f_1(x)$ или опетъ нека функція одъ x, или пакъ некій, по томъ брою сталный брой: **то є дакле диференціалъ сваке функціє $f(x)$ или опетъ нека функція одъ x, или пакъ некій по x сталный брой.**

Ако є 1.) $f_1(x)$ сталанъ брой, и притомъ dx такођеръ сталанъ, онда, каошто є лако увидити, съ $d\,f(x)$, т. є. са $f_1(x)\,dx$ неможемо никакву више премену предузети, разумемо онакову, каошто смо протолковали у §. 1.

Ако є напротивъ 2.) или $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, а dx притомъ сталанъ брой, или $f_1(x)$ сталанъ брой а dx променљивъ: онда, каошто є такођеръ лако увидити, у $d\,f(x)$, т. є. у $f_1(x)\,dx$ можемо наново узети $x + dx$ место x, и пытати за премену збогъ тога, т. є. за $d\,d\,f(x) = d\,f_1(x)\,dx$. Тимъ пре пакъ можемо то наравно учинити, ако є

3.) не само $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, него уєдно и dx променљивъ брой.

Нашъ посао дакле бытѣе сада, да извидимо, како се налази $d\,d\,f(x)$ у ова два последня случая; ради олакшице пакъ сматратѣемо притомъ случай, где є $f_1(x)$ сталанъ а dx променљивъ брой, само као особитый случай онога, у комъ є поредъ $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, уєдно dx променљивъ брой.

Имамо дакле изнаћи $d\,d\,f(x)$ найпре у случаю, ако є $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, dx пакъ сталанъ брой, а после у случаю, ако є $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, и уєдно dx променљивый брой.

§ 18.

Уобште є
$$d\,d\,f(x) = d\,f_1(x)\,dx\,.$$

Предпоставляюћи ту, да є $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, а dx сталанъ бройи, имамо пре свега по правилу II. § 4.
$$d\,d\,f(x) = d\,f_1(x)\,dx = dx\,.\,d\,f_1(x)\,.$$

Но диференціалъ є $f_1(x)$, као уобште сваке функціє диференціалъ, раванъ производу одъ нѣне прве изводне функціє са dx, а прва є изводна функція прве изводне функціє неке функціє нико другій, но друга изводна функція ове функціє; слѣдователно
$$d\,d\,f(x = dx\,.\,d\,f_1(x) = dx\,.\,f_2(x)\,dx$$
$$= f_2(x)\,d^2x\,.$$

Диференціалъ даференціала неке $f(x)$, т. є. $d\,d\,f(x)$ зове се **другій** диференціалъ те функціє, а означує се подобно разлици разлике, кою смо у I. Ч. представляли съ ${}^2\!\Delta\,f(x)$, символомъ ${}^2\!d\,f(x)$. Служећи се съ овимъ символомъ, имамо дакле, да є при горнѣмъ предпоставлѣню.
$${}^2\!d\,f(x) = f_2(x)\,d^2x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha.,$$

то ће рећи: **другій диференціалъ сваке $f(x)$, раванъ є производу одъ нѣне друге изводне функціє са квадратомъ диференціала променльивога броя x, т. є. съ d^2x.**

Изъ тога израза слѣдує просто овай важный другій
$$\frac{{}^2\!d\,f(x)}{d^2x} = f_2(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \beta.,$$
кои показує, да є размера одъ другогъ диференціала сваке $f(x)$ са квадратомъ диференціала променльивога броя, равна другой изводной функціи исте функціє $f(x)$, и као такова дакле или опетъ нека функція одъ x, или пакъ некій по x сталный брой.

Та се размера зове **другій диференціалный количникъ**, или обзиромъ на изразъ α.), **другій диференціалный сачинитель** дотичне функціє $f(x)$.

§ 19.

Ако є у другомъ диференціалу функціє $f(x)$, при сталномъ dx, $f_2(x)$ опетъ нека функція одъ x, имамо

$$d\,{}^2d\,f(x) = d\,.\,f_2(x)\,d^2x = d^2x\,.\,d\,f_2(x);$$

или, изъ узрока што є $d\,f_2(x)$, као уобште диференціалъ сваке функціє одъ x, производъ одъ прве изводне функціє те $f_2(x)$ са dx, а прва изводна функція одъ $f_2(x)$ нико другій ніє, но **трећа** изводна функція основне функціє $f(x)$:

$$\begin{aligned} d\,{}^2d\,f(x) &= d^2x\,.\,d\,f_2(x) = d^2x\,.\,f_3(x)\,dx \\ &= f_3(x)\,d^3x. \end{aligned}$$

$d\,{}^2d\,f(x)$ зове се **трећій** диференціалъ функціє $f(x)$, а означує се ради краткоће, символомъ ${}^3d\,f(x)$. Служећи се тиме имамо дакле

$${}^8d\,f(x) = f_3(x)\,d^3x \quad . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \quad (\gamma.,$$

т. є. да є **трећій диференціалъ сваке функціє $f(x)$ раванъ производу одъ нѣне треће изводне функціє $f_3(x)$ са кубомъ — d^3x — диференціала одъ x.**

Одтудъ опетъ слѣдуе непосредно

$$\frac{{}^3d\,f(x)}{d^3x} = f_3(x) \quad . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \quad \delta.,$$

то ће рећи: размера одъ ${}^3d\,f(x)$ съ кубомъ диференціала одъ x, равна є трећой изводной функціи функціє $f(x)$, и као такова или опетъ нека функція одъ x, или пакъ некій, по x сталный брой.

Та размера зове се **трећій** диференціалный количникъ, или обзиромъ на изразъ γ.), трећій диференціалный сачинитель дотичне функціє $f(x)$.

На истый начинъ налазимо, ако є $f_3(x)$ поредъ сталнога dx опетъ нека функція одъ x,

$$\left.\begin{aligned} {}^4d\,f(x) &= f_4(x)\,d^4x \\ \text{а одатле}\quad \frac{{}^4d\,f(x)}{d^4x} &= f_4(x) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon.,$$

и т. д., докъ найпосле уобште:

$$\left.\begin{aligned} {}^nd\,f(x) &= f_n(x)\,d^nx \\ \frac{{}^nd\,f(x)}{d^nx} &= f_n(x) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.$$

§ 20.

${}^2d\,f(x)$, ${}^3d\,f(x)$, ... ${}^nd\,f(x)$ зову се скупа выши диференціали функціє $f(x)$, изъ предходећи §§а пакъ видимо, да се ти диференціали, при предпоставлѣню dx сталанъ брой, односно изъ $d\,f(x)$, ${}^2d\,f(x)$, ${}^3d\,f(x)$, ... ${}^{n-1}d\,f(x)$ на онай истый начинъ, т. є. по истимъ правилама и образцима добыяю, као $d\,f(x)$ изъ $f(x)$. —

Садъ да видимо, како се налазе выши диференціали $f(x)$ у случаю, гди є поредъ пременлЬивога dx, $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x.

§ 21.

Опетъ велимо: уобште є $d\,f(x) = f_1(x)\,dx$.

Предпоставляюћи ту да є $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, дакле **пременльива**, а dx такођеръ **пременльивъ**: слѣдує по IV. правилу §а 4.

$$\begin{aligned} {}^2d\,f(x) = d\,f_1(x)\,dx &= dx\,.\,d\,f_1(x) + f_1(x)\,.\,d\,dx \\ &= dx\,.\,f_2(x)\,dx + f_1(x)\,.\,{}^2dx \\ &= f_2(x)\,d^2x + f_1(x)\,.\,{}^2dx \quad \ldots \quad (\text{а.,} \end{aligned}$$

$$\text{и одтудъ}\qquad \frac{{}^2d\,f(x)}{d^2x} = f_2(x) + f_1(x)\,\frac{{}^2dx}{d^2x} \quad \ldots\ldots \quad (\text{б.}$$

Узимаюћи у а.) да є и $f_2(x)$ опетъ нека функція одъ x, добыямо далѣ помоћу III. и IV. правила §а 4., прећашньи докученя подъ 3.) и образца I. §а 6.:

$$
\begin{aligned}
{}^{3}d\,f(x) &= d^2x\,.\,d\,f_2(x) + f_2(x)\,d\,d^2x + {}^{2}dx\,.\,d\,f_1(x) + f_1(x).d\,{}^{2}dx \\
&= d^2x.f_3(x)\,dx + f_2(x).\,2\,dx.{}^{2}dx + {}^{2}dx\,.\,f_2(x)dx + f_1(x).{}^{3}dx \\
&= f_3(x)\,d^3x + 3\,f_2(x)\,.{}^{2}dx\,.\,dx + f_1(x)\,.{}^{3}dx \;.\;.\;.\;.\;.\;(\text{в.},
\end{aligned}
$$

и одтудъ

$$\frac{{}^{3}d\,f(x)}{d^3x} = f_3(x) + 3\,f_2(x)\,\frac{{}^{2}dx}{d^2x} + f_1(x)\,\frac{{}^{3}dx}{d^3x} \quad .\;.\;.\;(\text{г.}$$

И т. д.

Ово є безъ сумнѣ довольно за подпуно увиђанѣ, да су изрази выши диференціала у овомъ сада сматраномъ случаю истина сложеніи одъ оны у првомъ случаю, но да ньиово налазенѣ неподлежи никаквой другой тешкоћи.

§ 22.

После овога врло є лако докучити више диференціале функціє $f(x)$ іошъ и у случаю, ако є само dx пременьивъ брой, $f_1(x)$ пакъ по x стална.

Изъ пређашньи израза подъ а., б., в. и г.), слѣдуе уричући $f_1(x)$ као сталну, збогъ $f_2(x) = f_3(x) = \ldots = $ тада нулли,

$$ {}^{2}df(x) = f_1(x)\,.\,{}^{2}dx, \text{ дакле } \frac{{}^{2}d\,f(x)}{d^2x} = f_1(x)\,\cdot\,\frac{{}^{2}dx}{d^2x}\;; $$

$$ {}^{3}df(x) = f_1(x)\,.\,{}^{3}dx, \quad \text{„} \quad \frac{{}^{3}d\,f(x)}{d^3x} = f_1(x)\,\cdot\,\frac{{}^{3}dx}{d^3x}\;; $$

. . . .

све онако исто, као што бы нашли независно одъ поменуты израза изъ $d\,f(x) = f_1(x)\,dx$, предпоставляюћи одма, да є $f_1(x)$ сталанъ брой, а само dx пременьивъ.

§ 23.

За ова два последня случая (§. 21. и 22.) имамо іошъ слѣдуюће приметити:
dx као сталанъ може се на разный начинъ меняти, и зато остаю у истимъ случаєвима выши диференціали

функціє $f(x)$, или што є свеєдно нѣни выши диференціални количници дотле неопределѣни, доклегодъ се задаткомъ или природомъ дотичнога предмета неутврде вредности количника $\frac{{}^2dx}{d^2x}$, $\frac{{}^3dx}{d^3x}$, и т. д. Довольно є међутимъ, да є условлѣнъ или иначе познатъ само првый, т. є. само $\frac{{}^2dx}{d^2x}$, єръ се съ нъимъ, каошто ћемо одма видити, врло лако могу определити и сви остали.

Ако є $\frac{{}^2dx}{d^2x} = \varphi(x)$ нека известна (дата, или природомъ задатка подаюћа се) функція одъ x, добыямо

$${}^2dx = \varphi(x)\, d^2x;$$

одтудъ пакъ, узимаюћи лево и десно диференціале по правилу IV. § 4., слѣдує

$$\begin{aligned}{}^3dx &= d^2x \,.\, d\varphi(x) + \varphi(x)\, dd^2x \\ &= d^2x \,.\, \varphi_1(x)\, dx + 2\varphi(x) \,.\, {}^2dx \,.\, dx \\ &= \varphi_1(x)\, d^3x + 2\varphi(x) \,.\, {}^2dx \,.\, dx;\end{aligned}$$

дакле ако съ d^3x разделимо,

$$\frac{{}^3dx}{d^3x} = \varphi_1(x) + 2\varphi(x)\, \frac{{}^2dx}{d^2x} = \varphi_1(x) + 2\varphi^2(x),$$

подпуно определѣнъ.

На истый начинъ можемо изнаћи изъ $\frac{{}^3dx}{d^2x}$ четвртый диференціалный количникъ, изъ овога после 5., и т. д. свакій слѣдуюћій.

§ 24.

Другій диференціалный количникъ $\frac{{}^2dx}{d^2x}$ у случаєвима о коима говорисмо, утврђує се обично задаванѣмъ друге іошъ неке функціє поредъ дате, съ условіємъ: да првый диференціалъ те друге функціє буде сталанъ брой.

Тако н. п. ако бы тражили выше диференціале одъ e^{lx} съ тимъ условіємъ, да првый диференціалный количникъ одъ $\sin lx$ буде сталанъ брой имали бы

$$d \sin lx = \cos lx \;.\; dlx = \frac{\cos lx}{x} \;.\; dx\,,$$

и тай треба да є = некомъ сталномъ брою; тога ради ако наново диференціалимо, мора быти

$$\begin{aligned} {}^{2}d \sin lx &= d\,.\,\frac{\cos lx}{x} = dx\,.\,d\,\frac{\cos lx}{x} + \frac{\cos lx}{x}\,.\,ddx \\ &= dx\,.\,\frac{-\,x \sin lx\,.\,dlx - \cos lx\,.\,dx}{x^2} + \frac{\cos lx}{x}\; dx \\ &= -\,\frac{\sin lx + \cos lx}{x^2}\, d^2x + \frac{\cos lx}{x}\,.\,{}^{2}dx \\ &= \frac{x \cos lx\,.\,{}^{2}dx - (\sin lx + \cos lx)\, d^2x}{x^2} \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

т. є.

$$x \cos lx\,.\,{}^{2}dx - (\sin lx + \cos lx)\, d^2x = 0\,,$$

и одтудъ

$$\frac{{}^{2}dx}{d^2x} = \frac{\sin lx + \cos lx}{x \cos lx}\,,$$

подпуно **определѣнъ**.

Ово наново диференціалећи добыли бы трећій диференціалный количникъ, изъ тога после на истый начинъ 4., и т. д. све слѣдуюће такођеръ подпуно **определѣне**.

Ако дакле потомъ узмемо

$$de^{lx} = e^{lx}.\, dlx = \frac{e^{lx}}{x}\,.\,dx\,,$$

и наново диференціалимо, слѣдує

$$ {}^{2}de^{lx} = dx \,.\, d\,\frac{e^{lx}}{x} + \frac{e^{lx}}{x} \,.\, {}^{2}dx $$

$$ = dx \,.\, \frac{xde^{lx} - e^{lx}.\,dx}{x^2} + \frac{e^{lx}}{x} \,.\, {}^{2}dx $$

$$ = dx \,.\, \frac{e^{lx} - e^{lx}}{x^2} \cdot dx + \frac{e^{lx}}{x} \cdot {}^{2}dx $$

$$ = \frac{e^{lx}}{x} \cdot {}^{2}dx \;, \text{ и одтудъ} $$

$$ \frac{{}^{2}de^{lx}}{d^2x} = \frac{e^{lx}}{x} \,.\, \frac{{}^{2}dx}{d^2x} \,, $$

а ако іошъ за $\frac{{}^{2}dx}{d^2x}$ узмемо нѣгову нађену вредность,

$$ \frac{{}^{2}de^{lx}}{d^2x} = \frac{e^{lx}}{x} \,.\, \frac{\sin lx + \cos lx}{x \cos lx} = \frac{e^{lx}.\,(\sin lx + \cos lx)}{x^2 \cos lx} \,, $$

подпуно **определѣнъ.**

Подобно добыли бы и остале выше диференціалне количнике вопросне функціє, све **определѣне.**

Садъ намъ само іошъ остає узети за упражнѣнѣ у вышемъ диференціаленю неколико

Примера

съ предпоставлѣнѣмъ, да є dx **сталанъ.**

§ 25.

1.) Нашли смо у § 6.

$$ dx^n = nx^{n-1}.\,dx. $$

Узимаюћи наново диференціалъ, добыямо по истогъ § образцу I.

$$ {}^{2}dx^n = n\,(n-1)\; x^{n-2}.\, d^2x = n^{2|-1}.\, x^{n-2}.\, d^2x. $$

Одатле на истый начинъ

$$ {}^{3}dx^{n} = n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}.\,d^{3}x = n^{3|-1}.\,x^{n-3}.\,d^{3}x. $$

И на истый начинъ далѣ, докъ найпосле уобште

$$ {}^{v}dx^{n} = n^{v|-1}.\,x^{n-v}.\,d^{v}x\,, $$

Ако бы притомъ брой n быо **цео** и **положанъ**, онда є ${}^{n}dx^{n}$, збогъ $x^{n-n} = x^{0} = 1$ сталанъ брой, и зато сви іошъ выши диференціали одъ x^{n} нулле. При свакомъ другомъ брою n пакъ, може се диференціалити безъ края.

2.) **У** §. 7. добыли смо $da^{x} = a^{x}\,la\,.\,dx$; зато

$$ {}^{2}d\,a^{x} = la\,dx\,.\,d\,a^{x} = la\,dx\,.\,a^{x}\,la\,dx = a^{x}\,la^{2}\,.\,d^{2}x\,; $$

одтудъ опетъ ${}^{3}d\,a^{x} = a^{x}\,l^{3}a\,.\,d^{3}x$, и т. д. докъ уобште

$$ {}^{n}d\,a^{x} = {}^{n}d\,a^{x} = a^{x}\,l^{n}a\,.\,d^{n}x. $$

3.) **У** истомъ §у имали смо $d\,lx = \dfrac{dx}{x}$ мора дакле быти

$$ {}^{2}d\,lx = dx\,.\,d\,\frac{1}{x} = dx\,.\,\frac{-dx}{x^{2}} = -\,\frac{d^{2}x}{x^{2}}\,, $$

$$ {}^{3}d\,lx = -\,d^{2}x\,.\,d\,\frac{1}{x^{2}} = -\,d^{2}x\,.\,\frac{-2\,dx}{x^{3}} = +\,\frac{2\,d^{3}x}{x^{3}}\,, $$

$$ {}^{4}d\,lx = -\,2\,d^{3}x\,.\,d\,\frac{1}{x^{3}} = 2\,d^{3}x\,.\,\frac{-3\,dx}{x^{4}} = \frac{-2\,.\,3\,d^{4}x}{x^{4}}\,, $$

и т. д. докъ найпосле

$$ {}^{n}d\,lx = (-1)^{n-1}\,.\,(n-1)\,!\,.\,\frac{d^{n}x}{x^{n}}\,. $$

4.) По § 8. є $d\,sin\,x = cos\,x\,.\,dx$; зато по истомъ §-у

$${}^{2}d \sin x = - \sin x \,.\, d^2x,$$

$${}^{3}d \sin x = - \cos x \,.\, d^3x,$$

$${}^{4}d \sin x = \sin x \,.\, d^4x, \quad \text{и т. д. докъ уобште}$$

$${}^{2n-1}d \sin x = (-1)^{n+1} \cos x \,.\, d^{2n-1}x,$$

$${}^{2n}d \sin x = (-1)^{n} \sin x \,.\, d^{2n}x.$$

5.) § 10. показує $d \sin v \,.\, x = \sin x\, dx$; бытће дакле

$${}^{2}d \sin v \,.\, x = \cos x \,.\, d^2x,$$

$${}^{3}d \sin v \,.\, x = - \sin x \,.\, d^3x,$$

$${}^{4}d \sin v \,.\, x = - \cos x \,.\, d^4x,$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ , \quad \text{уобште}$$

$${}^{2n-1}d \sin v \,.\, x = (-1)^{n+1} \,.\, \sin x \,.\, d^{2n-1}x, \quad \text{а}$$

$${}^{2n}d \sin v \,.\, x = (-1)^{n+1} \,.\, \cos x \,.\, d^{2n}x.$$

6.) У § 11. имали смо $d\, arc\, (\sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; мора дакле быти

$$\begin{aligned}
{}^{2}d\, arc\, (\sin = x) &= dx \,.\, d\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= dx \,.\, (-\tfrac{1}{2})\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \,.\, (-2\,x\,dx) \\
&= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \,.\, x\, d^2x \\
&= \frac{x\, d^2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{3}d\, arc\, (\sin = x) &= d^2x \,.\, d\, x\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\
&= d^2x \,.\, [(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\, dx + x\, d\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}] \\
&= d^2x \,.\, [(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\, dx - \tfrac{3}{2}\, x\,(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \,.\, d\,(1-x^2)]
\end{aligned}$$

$$= d^2x\left[(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx - \tfrac{3}{2}x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}.(-2x\,dx)\right]$$

$$= \left[(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\right] d^3x$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.\left[1+3x^2(1-x^2)^{-1}\right] d^3x$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.\left[1+\frac{3x^2}{1-x^2}\right] d^3x$$

$$= \frac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1+2x^2)\,d^3x}{(1-x^2)}$$

$$= \frac{(1+2x^2)\,d^3x}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{(1+2x^2)\,d^3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}\,.$$

И т. д., найпосле

7.) По § 13. є $d\,ll\,x = \frac{dx}{x\,lx}$. Дакле

$$\overset{2}{d}\,ll\,x = dx\cdot d\,\frac{1}{x\,lx} = dx\cdot\frac{-d\,x\,lx}{x^2\,l^2x}$$

$$= -\,dx\cdot\frac{lx\,dx+dx}{x^2\,l^2x} = -\,\frac{lx+1}{x^2\,lx^2}\cdot d^2x$$

$$\overset{3}{d}\,ll\,x = -\,d^2x\,.\,d\,\frac{lx+1}{x^2\,lx^2}$$

$$= -\,d^2x\,.\,\frac{x^2\,l^2x\,.\,d\,(lx+1) - (lx+1)\,d\,x^2\,l^2x}{x^4\,l^4x}$$

$$= -\,d^2x\,.\,\frac{x^2l^2x\cdot\frac{dx}{x} - (lx+1)\,(l^2x.2xdx + x^2\,d\,l^2x)}{x^4\,.\,l^4x}$$

$$= -\,d^2x\cdot\frac{x\,l^2x\,.\,dx - (lx+1)\left(2\,x\,l^2x\,dx + x^2\,2lx\,\frac{dx}{x}\right)}{x^4\,l^4x}$$

$$= - d^2x \cdot \frac{xl^2xdx - 2xl^3xdx - 2xl^2xdx - 2xl^2xdx - 2xlxdx}{x^4 \; l^4x}$$

$$= d^2x \cdot \frac{3\,x\,l^2x\,dx + 2\,x\,l^3x\,dx + 2\,x\,lx\,dx}{x^4 \; lx^4}$$

$$= \frac{2 + 3\,lx + 2\,l^2x}{x^3 \; l^3x} \cdot d^3x \text{ , и т. д.}$$

е.) Телеровъ образацъ.

§ 26.

По § 11. Ч. I. имамо

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f_1(x)\,h + f_2(x)\,\frac{h^2}{2!} \pm f_3(x)\,\frac{h^3}{3!} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Узимаюћи место $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... у §§ 3., 18. и 19. нађене ньиове вредности, добыя овай образацъ видъ

$$f(x \pm h) = f(x) \pm \frac{df(x)}{dx}\,h + \frac{{}^{2}d\,f(x)}{d^2x} \cdot \frac{h^2}{2!} \pm \frac{{}^{3}df(x)}{d^3x} \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdot\cdot\cdot\cdot,$$

у комъ є познатъ подъ именомъ **Телеровъ** (Taylor) **образацъ**, **Телеровъ редъ**, или **Телерова Теорема**.

Тай є образацъ у анализи одъ врло велике важности, постои (као што є у **11** § I. Ч. већъ речено), докъ є x неопределѣнъ или општій брой, за **сваку** безъ разлике функцію, служи пакъ пре свега за определьиванѣ премене функціє $f(x)$ збогъ нараштая или умаляя броя x съ **произвольнимъ** броємъ h, а после, осимъ другога, іошъ за развіянѣ функція у редове.

Казато є већъ у пређепоменутомъ § I. Ч., али опетъ споминѣмо: ако $f(x)$ ніє функція алгебрайска раціонална цела, онда є на ню употреблѣный телеровъ редъ безкраянъ, збогъ чега у таковомъ случаю добро валя пазити на нѣгову сбирльивость. Да ли є сбирльивъ показаће по § 121. I. Ч. изразъ

$$D_n = \frac{f_{n-1}(x)\,\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f_n(x)\,\frac{h^n}{n!}}{f_{n-1}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} - f_n(x)\,\frac{h^n}{n!}} = \frac{f_n(x)\,\frac{h^n}{n!}}{1 - \frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}\cdot\frac{h}{n}}$$

тиме, што у случаю сбирљивости истый изразъ при $n = \infty$ мора быти $= 0$.

Найпосле іошъ примећавамо, да ћемо **мы** у будуће телеровъ редъ, гдигодъ узтреба, збогъ веће простоте употреблявати у ономъ првомъ нѣговомъ, іошъ изъ **I. Ч.** познатомъ виду, а и иначе писат’ћемо одяко изъ истогъ узрока место $\frac{d\,f(x)}{dx}$, $\frac{{}^2d\,f(x)}{d^2(x)}$, и т. д. свуда $f_1(x)$, $f_2(x)$, и т. д. коє молимо да се єданпутъ за свагда запамти.

Садъ да видимо горе споменута два употреблѣня телеровогъ реда.

§ 27.

1.) Тражи се премена функціє

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1,$$

збогъ $x - 1$ место x.

Ту є $f_1(x) = 12x^2 - 6x + 2$, $f_2(x) = 24x - 6$, $f_3(x) = 24$, а остали диференціални количници сви $= 0$. Дакле є збогъ $h = -1$ по вопросномъ образцу

$$f(x-1) = f(x) - (12x^2 - 6x + 2).1 + (24x - 6).\frac{1}{2\,!} - 24\cdot\frac{1}{3\,!}$$

$$= f(x) - 12x^2 + 18x - 9,$$

и одтудъ дате функціє тражена премена:

$$f(x-1) - f(x) = -12x^2 + 18x - 9.$$

2.) Шта быва одъ $f(x) = \sin x$, ако у истой узмемо $2x = x + x$ место x?

Збогъ $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = -\sin x$, $f_3(x) = -\cos x$, $f_4(x) = \sin x$, и т. д. (§ 25.), имамо по телеровомъ образцу $f(x + x) = f(2x)$, т. є.

$$\sin 2x = \sin x + \cos x . x - \sin x . \frac{x^2}{2\,!} - \cos x \frac{x^3}{3\,!} + \sin x . \frac{x^4}{4\,!} - ..$$

$$= \sin x . (1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \ldots) + \cos x . (x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots) .$$

Но по I. Ч. § 163. заграђеный чинитель првога члана ніє нико другій но $\cos x$, а заграђеный чинитель другога члана опетъ нико другій но $\sin x$. Дакле съ обзиромъ на то

$$\sin 2x = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x ,$$

каогодъ што смо нашли у тригонометріи на другій начинъ.

3.) Шта добыямо одъ $f(x) = \cos x$, ако место x узмемо $x + y$?

Ту є по § 8. $f_1(x) = - \sin x$, $f_2(x) = - \cos x$, $f_3(x) = \sin x$, $f_4(x) = \cos x$, ... Дакле ако у датой функціи место x узмемо $x + y$, мора быти по телеровомъ образцу $f(x + y)$, т. є.

$$\cos (x + y) = \cos x - \sin x . y - \cos x . \frac{y^2}{2\,!} + \sin x \frac{y^3}{3\,!} + \cos x \frac{y^4}{4\,!}$$

$$- \sin x . \frac{y^5}{5\,!} - \ldots\ldots$$

$$= \cos x . (1 - \frac{y^2}{2\,!} + \frac{y^4}{4\,!} - ..) - \sin x . (y - \frac{y^3}{3\,!} + \frac{y^5}{5\,!} - ..)$$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \text{(I. Ч. § 163.)}$$

каогодъ што смо нашли у тригонометріи.

§ 28.

1.) Тражи се редъ за lx.

По § 25. су диференціални количници одъ $f(y) = ly$, по реду $f_1(y) = \frac{1}{y}$, $f_2(y) = \frac{-1}{y^2}$, $f_3(y) = \frac{2\,!}{y^3}$, $f_4(y) = \frac{3\,!}{y^4}$, и т. д. Мора дакле быти по телеровомъ образцу

$$f(y+z) = ly + \frac{z}{y} - \frac{z^2}{2!\,y^2} + \frac{2!\,z^3}{3!\,y^3} - \frac{3!\,z^4}{4!\,y^4} + \ldots\ldots$$

$$= ly + \frac{z}{y} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{y^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{y^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{z^4}{y^4} + \ldots\ldots,$$

и одтудъ, ако узмемо $y=1$, а $z = x-1$, заогъ $l1 = 0$:

$$lx = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots\ldots,$$

каогодъ што є нађено у I. Ч. § 162.

2.) Иште се редъ за $f(x) = sin\,x$.

По § 25. єсу количници одъ $f(y) = sin\,y$ по реду:

$$f_1(y) = cos\,y\,,\ f_2(y) = -\,sin\,y\,,\ f_3(y) = -\,cos\,y\,,\ f_4(y) = sin\,y, \ldots$$

По телеровомъ образцу мора дакле быти $f(y+z)$, т. є.

$$sin\,(y+z) = sin\,y + cos\,y\,.\,z - sin\,y\,.\,\frac{z^2}{2\,!} - cos\,y\,.\,\frac{z^3}{3\,!} + sin\,y\,.\,\frac{z^4}{4!}$$

$$+\,cos\,y\,.\,\frac{z^5}{5\,!} - \ldots\ldots\ldots,$$

и одтудъ, ако узмемо $y=0$, а z изменемо съ x, збогъ $sin\,0 = 0$, а $cos\,0 = 1$:

$$sin\,x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots\ldots,$$

каогодъ у I. Ч. § 163. на другій начинъ. — Найпосле

3.) Тражи се редъ за $f(x) = \sqrt{x}$.

По § 6. обр. I. имамо одъ $f(y) = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$ диференціалне количнике редомъ $f_1(y) = \frac{1}{2}\cdot y^{-\frac{1}{2}}$, $f_2(y) = -\frac{1}{2^2}\cdot y^{-\frac{3}{2}}$,

$$f_3(y) = \frac{3}{2^3}\cdot y^{-\frac{5}{2}},\ f_4(y) = -\frac{3\,.\,5}{2^4}\cdot y^{-\frac{7}{2}},\ f_5(y) = \frac{3\,.\,5\,.\,7}{2^5} y^{-\frac{9}{2}}, \ldots$$

Мора быти дакле по телеровомъ образцу

$$f(y+z) = (y+z)^{\frac{1}{2}}, \text{ т. є.}$$

$$\sqrt{y+z} = y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} . z - \frac{1}{2^2} \cdot y^{-\frac{3}{2}} . \frac{z^2}{2!} + \frac{1.3}{2^2} \cdot y^{-\frac{5}{2}} . \frac{z^3}{3!} -$$

$$- \frac{1.3.5}{2^4} \cdot y^{-\frac{7}{2}} . \frac{z^4}{4!} + \frac{1.3.5.7}{2^5} \cdot y^{-\frac{9}{2}} . \frac{z^5}{5!} - \dots\dots\dots,$$

одатле пакъ, ако узмемо $y = 1$, а $z = x - 1$:

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2^2.2!}(x-1)^2 + \frac{1.3}{2^3.3!}(x-1)^3 -$$

$$- \frac{1.3.5}{2^4.4!}(x-1)^4 + \frac{1.3.5.7}{2^5.5!}(x-1)^5 - \dots\dots$$

§ 29.

Тражећи телеровимъ образцемъ $f(x+h)$ за известне вредности броя x, догодитће се при деловнимъ и логаритмійскимъ функціяма, и **само** при таковима, да чланови траженога реда, или одма одъ првога, или пакъ одъ каквогъ другогъ надалѣ, постаю за уречену вредность одъ x вида $\frac{a}{o}$, т. є. **безкрайни**. То є знакъ, да се при дотичной $f(x)$ тражена $f(x+h)$ за оно x неможе развити у редъ степена одъ h съ **целимъ положнимъ** изложитељима. При функціама првога рода садржатће у таковомъ случаю захтеваный редъ степене одъ h съ **одречнимъ** изложитељима, — при онима другога рода степене одъ h съ положнимъ деловнимъ изложитељима, а при последньима появлює се трансцендентный брой lh, кои се, каошто смо већъ видили на другомъ месту (I. Ч. § 162.) никако неможе развити у редъ степена одъ h съ целимъ изложитељима. Све то пакъ случитће се и при тима функціяма само онда, ако у деловной функціи именитељ, у ирраціоналной подкореный брой, а у логаритмійской найпосле онай брой, кога се тиче знакъ логаритма: постаю за уречено x равни нулли.

У свакомъ таковомъ случаю дакле издаѥ насъ телеровъ образацъ, и морамо се зато служити за определѣиванѣ реда $f(x+h)$ другимъ, ако млого пута и неудобніимъ простимъ начиномъ. Да пакъ све овде приметћено доиста тако постои, о томе уверитћe насъ довольно слѣдуюћи §§-и.

§ 30.

1.) Тражи се редъ $f(x+h)$ одъ $f(x)=\frac{x}{x-a}$, за $x=a$.

При той ѥ функціи

$$f_1(x) = -\frac{a}{(x-a)^2},\ f_2(x) = \frac{2!\,a}{(x-a)^3},$$

$$f_3(x) = -\frac{3!\,a}{(x-a)^4},\ \text{и т. д.}$$

Имамо дакле по телеровомъ образцу

$$f(x+h)=\frac{x}{x-a}-\frac{a}{(x-a)^2}\cdot h+\frac{2!\,a}{(x-a)^3}\cdot\frac{h^2}{2!}-\frac{3!\,a}{(x-a)^4}\cdot\frac{h^3}{3!}+\ldots.$$

$$=\frac{x}{x-a}-\frac{a}{(x-a)^2}\cdot h+\frac{a}{(x-a)^3}\cdot h^2-\frac{a}{(x-a)^4}\cdot h^3+\ldots,$$

а ако место x узмемо уречену нѣгову вредность a:

$$f(a+h) = \frac{a}{0}-\frac{a}{0}\cdot h+\frac{a}{0}\cdot h^2-\ldots\ldots,$$

изъ чега видимо да $f(x+h)$ за $x=a$ развити у редъ степена одъ h съ **целимъ положнимъ** изложительима **ніѥ могуће.**

И доста, ако у датой функціи узмемо $a+h$ место x, и после далѣ просто поступимо, слѣдуѥ

$$f(a+h)=\frac{a+h}{a+h-a}=\frac{a+h}{h}=\frac{a}{h}+1=ah^{-1}+1,\ \text{т. ѥ.}$$

функція не съ положнимъ, но **одречнимъ** целимъ степеномъ одъ h.

2.) Иште се редъ $f(x+h)$ одъ $f(x) = a\sqrt{x(x-b)}$, за $x = b$.

Ту су диференціални количници редомъ

$$f_1(x) = \frac{a(2x-b)}{2\sqrt{x(x-b)}},\quad f_2(x) = -\frac{ab^2}{4x(x-b)\sqrt{x(x-b)}},$$

и т. д. Збогъ тога по телеровомъ образцу уобште

$$f(x+h) = a\sqrt{x(x-b)} + \frac{a(2x-b)}{2\sqrt{x(x-b)}}\cdot h - \ldots\ldots\ldots,$$

а ако узмемо $x = b$,

$$f(b+h) = 0 + \frac{ab}{0}\cdot h - \ldots\ldots\ldots,$$

за знакъ, да се $f(x+h)$ одъ дате функціє $f(x)$, за $x = b$ неможе представити као редъ степена одъ h съ **целимъ положнимъ** изложительима.

И доиста, ако у $f(x)$ узмемо $b+h$ место x, слѣдуе

$$f(b+h) = a\sqrt{(b+h)h} = ah^{\frac{1}{2}}.\,(b+h)^{\frac{1}{2}}$$

$$= ah^{\frac{1}{2}}.\,\left(b^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2^2}.\cdot\frac{h^2}{2!\,b^{\frac{3}{2}}} + \ldots\ldots\ldots\right),$$

истина као редъ степена одъ h, али не съ **целимъ**, но **деловнимъ** положнимъ изложительима.

Найпосле

3.) Потребна є $f(x+h)$ одъ $f(x) = x + a\,.\,l(x-a)$, за $x = a$.

Ту є

$$f_1(x) = \frac{x}{x-a},\quad f_2(x) = -\frac{a}{(x-a)^2},\quad f_3(x) = \frac{2!\,a}{(x-a)^3},\ \text{и т. д.}$$

Дакле по Телеру

$$f(x+h) = [x + al(x-a)] + \frac{x}{x-a}\cdot h - \frac{a}{(x-a)^2}\cdot\frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots$$

и одтудъ $f(a+h) = (a+al0) + \frac{a}{0}\cdot h - \frac{a}{0}\cdot\frac{h^2}{2!} + \cdots\cdots$

$$= (a - a\infty) + \frac{a}{0}\cdot h - \cdots\cdots\cdots,$$

изъ чега є видити, да се $f(x+h)$ одъ дате функціє неможе развнти у редъ степена одъ h съ целимъ положнимъ изложительима.

И доиста, ако у датой функціи узмемо $a+h$ место x, добыямо $f(x+h) = a + h + lh$, а познато є, да се lh никако неможе изразити као редъ по целимъ положнимъ степенима одъ h.

Іошъ да испытамо поизближе $f(x+h)$ у случаю, гди се $f(x)$ неможе развити у редъ степена' одъ h съ целимъ положнимъ изложительима.

§ 31.

Ако су $f(x)$ и $f(x+h)$ и при **изчезльивомъ** броюh h за какву известну вредность броя $x = \alpha$ **доистне**: онда разлику $f(x+h) - f(x)$ или никако неможемо развити у редъ по h, или пакъ тай редъ може садржати само степене одъ h съ **положнимъ**, иначе целимъ или деловнимъ изложительима. Єръ ако бы допустили да h у томъ реду може стаяти и съ одреченимъ изложительима, онда бы свакій членъ съ таковимъ h за $h = 0$ постао вида $\frac{\alpha}{0}$, и она бы разлика тако была **безкрайна**, коє при горнѣмъ предпоставлѣню, по комъ нѣна вредность за $h = 0$ мора быти такођеръ $= 0$, никако неможе да буде.

Ово предпославши узмимо, да смо на какавъ нибудъ начинъ за $x = \alpha$ нашли разлику $f(x+h) - f(x)$, уређену по растућимъ степенима одъ h,

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = A_1h^{n_1} + A_2h^{n_2} + A_3h^{n_3} + \ldots \quad (1.,$$

тако дакле, да у овоме реду стои

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.$$

У томъ случаю може быти првый изложитель n_1 само $\leqq 1$; єръ ако бы быо > 1, онда бы могли првомъ члану $A_1 h^{n_1}$ предпоставити другій съ h^1, коєга є сачинитель $A = 0$, тако да є после **првый** изложитель опеть не > 1, но $= 1$.

Исто тако можемо доказати, да другій изложитель n_2 неможе быти > 2, но само $\leqq 2$, трећій n_3 не > 3, но само $\leqq 3$, и т. д.

Сматраюћи у горньой єдначини подъ **1.)** брой h као променльивъ, и образуюћи у той єдначини лево и десно редомъ све изводне функціє (диференціалне количнике) по h, имамо обзиромъ на то, да є $f(\alpha)$ по h сталанъ брой: прва изводна функція одъ $x + h$ по h, т. є.

$$\left.\begin{array}{l}
f_1(\alpha+h)_h = n_1 A_1 h^{n_1-1} + n_2 A_2 h^{n_2-1} + n_3 A_3 h^{n_3-1} + \ldots\ldots \\[1ex]
f_2(\alpha+h)_h = n_1^{2|-1} . A_1 h^{n_1-2} + n_2^{2|-1} . A_2 h^{n_2-2} + n_3^{2|-1} . A_3 h^{n_3-2} + \\[1ex]
f_3(\alpha+h)_h = n_1^{3|-1} . A_1 h^{n_1-3} + n_2^{3|-1} . A_2 h^{n_2-3} + n_3^{3|-1} . A_3 h^{n_3-3} + \\[1ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} (3.,$$

при чему є, каошто знамо изъ **I. Ч.**, $n_1^{2|-1} = n_1(n_1 - 1)$, $n_1^{3|-1} = n_1(n_1 - 1)\ (n_1 - 2)$, и т. д.

Поставляюћи садъ у овимъ изразима $h = 0$, добыямо лево по реду $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, ... , т. є. диференціалне количнике одъ $f(x)$ за $x = \alpha$, десно пакъ остає одъ свакога оно, чему су ти количници при $h = 0$ за $x = \alpha$ равни. Но исти изрази показую после ясно:

1.) Ако є $n_1 < 1$, онда по првомъ одъ нъи, было иначе $n_2 \leqq 2$, $n_2 \leqq 3$, и т. д., постає $f_1(\alpha)$ вида $\frac{a}{0} = \infty$; ако є пакъ $n_1 = 1$, онда слѣдує

$$A_1 = f_1(\alpha).$$

2.) Ако є $n_1 = 1$, и притомъ $n_2 < 2$, остали пакъ изложительи односно $\leqq 3$, $\leqq 4$, и т. д., онда збогъ тога што првый чланъ у другомъ изразу, као нулли раванъ одпада, слѣдуе $f_2(\alpha) = \frac{a}{0} = \infty$; напротивъ ако є поредъ $n_1 = 1$ брой $n_2 = 2$, онда быва по истомъ изразу $2\, A_2 = f_2(\alpha)$, тако да є у томъ случаю

$$A_2 = \frac{1}{2\,!}\, f_2(\alpha).$$

3.) Ако є $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, и притомъ $n_3 < 3$, а остали изложительи односно ≤ 4, ≤ 5, и т. д.: онда по трећемъ изразу, зато што првый нѣговъ членъ као нулли равань одпада, постае $f_3(\alpha) = \frac{a}{0} = \infty$; ако є пакъ поредъ $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ изложитель $n_3 = 3$, онда добыямо одъ истога израза $3\,!\; A_3 = f_3(\alpha)$, тако да є тадъ

$$A_3 = \frac{1}{3\,!}\, f_3(\alpha).$$

И т. д., и т. д.

Сабираюћа сва ова докученя видимо: **ако є у разлици $f(x+h) - f(x)$ $f_{n+1}(\alpha)$ првый сачинитель, кои за $x = \alpha$ постае вида $\frac{a}{0} = \infty$; онда су нѣни членови, до заключно $f_n(\alpha)\frac{h^n}{n!}$, сви онаки исти као у телеровомъ образцу, слѣдуюћій пакъ членъ садржи деловный степенъ одъ h, кога изложитель мора лежати између n и $n+1$.**

ж.) Маклореновъ образацъ.

§ 32.

Съ намеромъ да развіемо $f(x)$ у редъ по целимъ положнимъ степенима одъ x, поставимо

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots\ldots$$

Определююћи диференціалне количнике ове єдначине налазимо

$$f_1(x) = C_1 + 2\,C_2 x + 3\,C_3 x^2 + \ldots\ldots$$

$$f_2(x) = 2\,C_2 + 6\,C_3 x + \ldots\ldots\ldots$$

$$f_3(x) = 6\,C_3 x + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Како пакъ одъ x независни сачинительи у горнѣмъ реду мораю важити при свакой вредности тога броя, то є свеєдно съ коіомъ ћемо ій определити. Найпростіє, безъ сумнѣ, урадит'ћемо то съ $x=0$. Съ томъ пакъ слѣдує изъ предходећи єдначина'

$$C_0 = f(\underset{0}{x}),\ C_1 = f_1(\underset{0}{x}),\ C_2 = \frac{1}{2}\cdot f_2(\underset{0}{x}),\ C_3 = \frac{1}{6}\cdot f_3(\underset{0}{x}),\ \text{и т. д.,}$$

При чему количницима придата o означує, да є у истима узето $x=0$.

Поставляюћи дакле ове вредности у горе узетый редъ, имамо

$$f(x) = f(\underset{0}{x}) + f_1(\underset{0}{x})\,x + \frac{1}{2\,!}\cdot f_2(\underset{0}{x})\,x^2 + \frac{1}{3\,!}f_3(\underset{0}{x})\,x^3 + \ldots (1.,$$

образацъ кои є, по нѣговомъ изнашаоцу, познатъ подъ именомъ **простый Маклореновъ** образацъ.

До истогъ образца долазимо такођеръ, ако у телеровомъ образцу узмемо найпре $x=0$, а после заменемо h съ x.

Поставляюћи пакъ у телеровомъ образцу найпре $x=\alpha$, а после $x-\alpha$ место h, слѣдує образацъ

$$f(x) = f(\underset{\alpha}{x}) + f_1(\underset{\alpha}{x})\cdot(x-\alpha) + f_2(\underset{\alpha}{x})\cdot\frac{(x-\alpha)^2}{2\,!} + \ldots (2.,$$

кои се зове **обштій** маклореновъ образацъ, и одъ коєга є онай пређашный само особитый тай случай, кадъ є $\alpha=0$.

Ако притомъ кои одъ диференціалны количника' изпадне ∞, онда є то знакъ, да се дотична функція неможе развити у редъ целы положны степена' одъ x.

Употребимо одма тай образацъ на кою функцію.

§ 33.

1.) Тражи се редъ за $f(x) = \sin x$.

При той є

$$f(x) = \sin x, \quad \text{дакле} \quad f(\underset{0}{x}) = 0$$

$$f_1(x) = \cos x, \quad „ \quad f_1(\underset{0}{x}) = 1$$

$$f_2(x) = -\sin x, \quad „ \quad f_2(\underset{0}{x}) = 0$$

$$f_3(x) = -\cos x, \quad „ \quad f_3(\underset{0}{x}) = -1$$

$$f_4(x) = \sin x, \quad „ \quad f_4(\underset{0}{x}) = 0$$

$$f_5(x) = \cos x, \quad „ \quad f_5(\underset{0}{x}) = 1$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots,$$

и зато по вопросномъ образцу, $f(x)$, т. є.

$$\sin x = x - \frac{x}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots\ldots\ldots,$$

као дояко већъ неколико пута на другій начинъ.

2.) Иште се редъ за $f(x) = lx$.

Ту є

$$f(x) = lx, \quad \text{дакле} \quad f(\underset{0}{x}) = -\infty$$

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \quad „ \quad f_1(\underset{0}{x}) = \frac{1}{0} = \infty$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad „ \quad f_2(\underset{0}{x}) = -\frac{1}{0} = -\infty$$

$$f_3(x) = \frac{2\,!}{x^3}, \quad „ \quad f_3(\underset{0}{x}) = \frac{2\,!}{0} = \infty$$

$$f_4(x) = -\frac{3\,!}{x^4}, \quad „ \quad f_4(\underset{0}{x}) = -\frac{3\,!}{0} = -\infty$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

изъ чега видимо, што већъ знамо, да се lx неможе представити као редъ целы положны степена' одъ x.

3.) Развити $f(x) = \sqrt{1-x}$ у редъ по x.

Ту є

$$f(x) = \sqrt{1-x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; , \text{ дакле } f(\underset{0}{x}) = 1$$

$$f_1(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad . \; . \; . \; , \quad \text{,,} \quad f_1(\underset{0}{x}) = -\frac{1}{2}$$

$$f_2(x) = -\frac{1 \,.\, 1}{2^2} \cdot \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}} \quad . \; , \quad \text{,,} \quad f_2(\underset{0}{x}) = -\frac{1 \,.\, 1}{2^2}$$

$$f_3(x) = -\frac{1 \,.\, 3}{2^3} \cdot \frac{1}{(1-x)^2\sqrt{1-x}} , \quad \text{,,} \quad f_3(\underset{0}{x}) = -\frac{1 \,.\, 3}{2^3}$$

$$f_4(x) = -\frac{1.3.5}{2^4} \cdot \frac{1}{(1-x)^3\sqrt{1-x}} , \quad \text{,,} \quad f_4(\underset{0}{x}) = -\frac{1.3.5}{2^4}$$

. . . .

и зато по маклореновомъ образцу

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{1 \,.\, 3}{2^3} \cdot x^3 - \frac{1.3.5}{2^4} \cdot x^4 - \; . \; . \; . \; .$$

§ 34.

Ако є првый диференціалный количникъ, за развіянѣ у редъ дате функціє, функція деловна или ирраціонална, онда нѣни выши диференціални количници бываю све сложеніи и незгодніи, и збогъ тога є само развіянѣ такове функціє помоћу телеровогъ или маклореновогъ образца доста неудобно. Олакше пролазимо у таковомъ случаю начиномъ, кои ћемо употребити на слѣдуюће примере.

1.) Тражи се редъ за $f(x) = tang\, x$. Поставимо

$$tang\, x = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \; . \; . \; . \; .$$

Ако разсудимо да овай изразъ стои за сваку тангенту, а да є $tang\, 0 = 0$, онда увиђамо да у реду тангенте нема члана безъ x, т. є. да є $C_0 = 0$, тако да имамо само ставити

$$tang\, x = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots\dots \quad (а.$$

Узимаюћи диференціале слѣдує, ако съ dx одма скратимо,

$$\frac{1}{cos^2 x} = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots\dots\dots \quad (б.$$

и одтудъ, ако ослободимо одъ именителя,

$$1 = cos^2 x\,(C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots\dots).$$

Диференціалећи наново, добыямо

$$0 = -2\, sin\, x\, cos\, x\, (C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots) + cos^2 x\,(2C_2 + 6C_3 x + 12C_4 x^2 + \dots\dots\dots),$$

или ако скратимо съ $cos\, x$,

$$0 = -2\, sin\, x\, (C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots) + cos\, x\,(2C_2 + 6C_3 x + 12C_4 x^2 + \dots).$$

Овде садъ место $sin\, x$ и $cos\, x$ нъиове редове узимаюћи, после мложеня свршуюћи и найпосле скраћуюћи слѣдує

$$\begin{array}{lr|r|r|r|r|l}
2C_2 + & 6C_3 & x + 12C_4 & x^2 + 20C_5 & x^3 + 30C_6 & x^4 + 42C_7 & x^5 + \dots\dots = 0, \\
 & -2C_1 & -5C_2 & -9C_3 & -14C_4 & -20C_5 & \\
 & & & +\frac{1}{3}C_1 & +\frac{3}{4}C_2 & +\frac{5}{4}C_3 & \\
 & & & & & -\frac{1}{60}C_1 &
\end{array}$$

и одтудъ

$2C_2 = 0$, ... дакле $C_2 = 0$

$6C_3 - 2C_1 = 0$, ... „ $C_3 = \frac{1}{3}C_1$

$12C_4 - 5C_2 = 0$, ... „ $C_4 = 0$

$20C_5 - 9C_3 + \frac{1}{3}C_1 = 0$, ... даклє $C_5 = \frac{2}{15}C_1$

$30C_6 - 14C_4 + \frac{3}{4}C_2 = 0$, ... „ $C_6 = 0$

$42C_7 - 20C_5 + \frac{5}{4}C_3 - \frac{1}{60}C_1 = 0$ . . . . „ $C_7 = \frac{136}{2520}C_1$

и т. д.; а ако ове вредности метнемо у єдначину б.) и после поставимо $x = 0$, налазимо

$$\frac{1}{cos^2 0} = \frac{1}{1} = 1 = C_1.$$

Све те вредносли пакъ найпосле узете у єдначину а.), даю

$$tang\, x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{136}{2520}x^7 + \ldots\ldots,$$

каогодъ што смо нашли у **I. Ч. § 164.**

2.) Тражи се редъ за $f(x) = arc\,(tang = x)$.

Метнимо

$$arc\,(tang = x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots\ldots$$

Узимаюћи диференціале добыямо

$$\frac{1}{1 + x^2} = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots\ldots\ldots,$$

или збогъ

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + 4C_4 x^3 + \ldots\ldots,$$

и одтудъ по правилу сачинителя'

$$C_1 = 1,\ C_2 = 0,\ C_3 = -\tfrac{1}{3},\ C_4 = 0,\ C_5 = \tfrac{1}{5}, \ldots\ldots;$$

слѣдователно ако ове вредности поставимо у узетый редъ:

$$arc\,(tang = x) = C_0 + x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots,$$

а ако се нато обазремо, да є за $x = 0$ и $arc\,(tang = 0) = 0$, па зато и $C_0 = 0$:

$$arc\,(tang = x) = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots\ldots$$

§ 35.

Завршуюћи овай предметъ да развіємо овимъ истимъ начиномъ іошъ єдну функцію, коя истина неспада у функціє споменуте у пређашнѣмъ §-у, али истый начинъ већма обяснява.

Иште се редъ за

$$f(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots)^n.$$

Поставимо

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a^3x^3 + \ldots)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \ldots$$

Узимаюћи найпре логаритме добыямо

$$nl(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) = l\,(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \ldots);$$

ово пакъ диференціалећи слѣдує

$$\frac{n\,(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots)}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots} = \frac{C_1 + 2Cx + 3C_3x^2 + \ldots}{C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots},$$

и одтудъ, ако одъ именителя ослободимо

$$na_1C_0 + \left.\begin{matrix} na_1C_1 \\ 2na_2C_0 \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} na_1C_2 \\ 2na_2C_1 \\ 3na_3C_0 \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} na_1C_3 \\ 2na_2C_2 \\ 3na_3C_1 \\ 4na_4C_0 \end{matrix}\right| x^3 + \ldots\ldots$$

$$= a_0C_1 + \left.\begin{matrix} 2a_0C_2 \\ a_1C_1 \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} 3a_0C_3 \\ 2a_1C_2 \\ a_2C_1 \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} 4a_0C_4 \\ 3a_1C_3 \\ 2a_2C_2 \\ a_3C_1 \end{matrix}\right| x^4 + \ldots\ldots;$$

а одатле опетъ по правилу сачинителя'

$$a_0C_1=na_1C_0;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{дакле}\quad C_1=n\frac{a_1}{a_0}C_0;$$

$$2a_0C_2+a_1C_1=na_1C_1+2na_2C_0,\ .\ .\quad „\quad C_2=\binom{n}{2}\frac{a_1^2}{a_0^2}C_0+n\frac{a_2}{a_0}C_0;$$

$$3a_0C_3+2a_1C_2+a_2C_1=na_1C_2+2na_2C_1$$
$$+3na_3C_0,\ \text{дакле}\ C_2=\binom{n}{3}\frac{a_1^3}{a_0^3}C_0+n^{2|-1}.\frac{a_2a_1}{a_0^2}C_0$$
$$+n\frac{a_3}{a_0}C_0;$$

и т. д.

Узимаюћи садъ све ове вредности у горню єдначину а.) слѣдує

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)^n=C_0+\binom{n}{1}\frac{a_1}{a_0}C_0x+\left[\binom{n}{2}\frac{a_1^2}{a_0^2}+n\frac{a_2}{a_0}\right]C_0x^2$$
$$+\left[\binom{n}{3}\cdot\frac{a_1^3}{a_0^3}+n^{2|-1}\frac{a_2a_1}{a_0^2}+n\frac{a_2}{a_0}\right]C_0x^3+\ldots\ldots\ldots;$$

Ако се пакъ обазремо нато, да овай изразъ мора важити за сваку вредность одъ x, па и за $x=0$, а за то x слѣдує $C_0=a_0^n$: имамо коначно

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)^n=a_0^n+na_0^{n-1}a_1x+\left[na_0^{n-1}a_2+\binom{n}{2}a_0^{n-2}a_1^2\right]x^2+$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ ;$$

т. є. полиномный образацъ, каошто смо га нашли на другій начинъ у I. Ч. § 20.

Б. Диференціаленъ функція више пременљивы броєва.

а.) Простый диференціалъ функція више пременљивы броєва.

§ 36.

Сваку функцію $v=f(x,y)$ два, међу собомъ независна пременљива броя x и y, можемо на троякій начинъ съ изчезљиво малимъ прираштаима премењивати; т. є.

1.) ако у ньой само x пременимо у $x + dx$, или ако 2.) само y пременимо у $y + dy$, или ако найпосле 3.) у истый махъ x пременимо у $x + dx$ а y у $y + dy$.

У првомъ случаю бытће нѣна изчезльиво мала премена, т. є. нѣнъ диференціалъ,

$$dv = f(x + dx, y) - f(x, y),$$ у другомъ

$$dv = f(x, y + dy) - f(x, y),$$ а у последнѣму

$$dv = f(x + dx, y + dy) - f(x, y).$$

Прва два диференціала вопросне функціє v, т. є. они при коима се само єданъ пременльивый брой меня, а другій остає сталанъ, — зову се **почастни** или **парціални** нѣни диференціали, првый **почастный по** x, а другій **почастный по** y.

Диференціалъ пакъ исте функціє v у трећемъ случаю, т. є. кадъ се оба пременльива броя меняю, зове се **целый** или **тоталный** нѣнъ диференціалъ.

Да бы знали да ли є диференціалъ функціє $v = f(x,y)$ два пременльива броя x и y почастанъ или цео, и у првомъ случаю по коме одъ та два броя узетъ: означићемо одяко целый диференціалъ просто съ dv или $df(x,y)$, почастне диференціале пакъ односно съ dv_x, dv_y или $df(x,y)_x$, $df(x,y)_y$.

§ 37.

У § 214. I. Ч. видили смо, да се $f(x + h, y + k)$ може свагда развити у редъ вида

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + (Mh + Nk) + \frac{1}{2}(Qh^2 + 2PQhk + Rk^2)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

при чему M, N, O, P, ... представляю неке крайне функціє одъ x и y.

Ако изъ те єдначине определимо разлику $f(x + h, y + k) - f(x, y)$, и после место h узмемо dx, а место k

dy, изчезавају у десной части те разлике сви други чланови спрамъ првога, као изчезльиво мали броеви выши редова, и остає $f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$, т. є. **целый диференціалъ** функціє v,

$$dv = M\,dx + N\,dy \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.,$$

при чему M и N єсу неке крайне функціє оба пременльива броя x и y.

Узимаюћи у овомъ изразу да є y сталанъ брой, бытће, збогъ $dy = 0$, $dv = M\,dx$. Но то тадъ ніє ништа друго, него почастный диференціалъ функціє v по x, и зато можемо писати

$$dv_x = M\,dx, \text{ а } M = f_1(x,y)_x.$$

Исто тако бытће, ако у истомъ изразу 1. сматрамо x као сталанъ брой, $dx = 0$, и збогъ тога $dv = N\,dy$, коє опетъ ніє ништа друго, но почастный диференціалъ функціє v по y, тако да у томъ случаю можемо ставити.

$$dv_y = N\,dy, \text{ а } N = f_1(x,y)_y.$$

По обоєму стои дакле

$$dv = dv_x + dv_y, \text{ или } dv = f_1(x,y)_x . dx + f_1(x,y)_y . dy \quad . \; . \; . \; . \quad (2.,$$

т. є. **целый диференціалъ функціє $v = f(x,y)$ два пременльива броя x и y, раванъ є сбиру нѣны почастны диференціала.**

Да се пакъ ово може разпрострети и на функціє више пременльивы броєва него два, увиђа се по себи.

§ 38.

Ова два §а показую довольно, да за диференціаленѣ функція више пременльивы броєва, осимъ савршенога познаваня свію показаны правила за диференціале функція єдногъ пременльивогъ броя, и онога што смо у истимъ §§ма дознали, — далѣ ништа више непотребуємо, до єдногъ само іошъ упражняваня, поредъ приметбе, да є определьиванѣ целогъ диференціала помоћу почастны, у млогомъ случаю удобніє одъ непосреднога, ако збогъ ничега другога, а оно зато што на првый начинъ изнађеный целый диференціалъ добыямо одма уређена по диференціалима променльивы броєва, коє є много пута башъ потребно.

Садъ узмимо кои примеръ.

§ 39.

1.) Тражи се целый диференціалъ функціє $v = sin x \, cos y$.

Ту є $dv_x = cos x \, cos y \, dx$, $dv_y = - sin x \, sin y \, dy$, дакле

$$dv = dv_x + dv_y = cos x \, cos y \, dx - sin x \, sin y \, dy.$$

2.) Потребанъ є целый диференціалъ функціє $v = \frac{x^2}{\sqrt{x-y}}$

Ту є

$$dv_x = \frac{2x\sqrt{x-y} - \frac{x^2}{2\sqrt{x-y}}}{x-y} dx = \frac{4x(x-y) - x^2}{2(x-y)\sqrt{x-y}} dx$$

$$= \frac{3x^2 - 4xy}{2(x-y)\sqrt{x-y}} dx,$$

$$dv_y = \frac{x^2}{2(x-y)\sqrt{x-y}} dy;$$ дакле

$$dv = dv_x + dv_y = \frac{3x^2 - 4xy}{2(x-y)\sqrt{x-y}} dx + \frac{x^2}{2(x-y)\sqrt{x-y}} dy$$

$$= \frac{(3x^2 - 4xy) \, dx + x^2 . dy}{2(x-y)\sqrt{x-y}}.$$

3.) Иште се диференціалъ функціє $v = y^x$.

При той є $dv_x = y^x ly . dx$, а $dv_y = xy^{x-1} . dy$;

дакле целый диференціалъ

$$dv = dv_x + dv_y = y^x ly . dx + xy^{x-1} . dy.$$

4.) Нужданъ є целый диференціалъ функціє

$$v = \frac{x\,ly - sin\,x\,.\,l\,sin\,y}{y\,lx - sin\,y\,.\,l\,sin\,x}.$$

Ту имамо

$$dv_x = \frac{\left[\begin{array}{l}(y\,lx - sin\,y\,.\,l\,sin\,x)\,(ly - cos\,x\,.\,l\,sin\,y)\,dx \\ \quad - (x\,ly - sin\,x\,.\,l\,sin\,y)\left(\frac{y}{x} - sin\,y\,cot\,x\right)\end{array}\right]}{(y\,lx - sin\,y\,.\,l\,sin\,x)^2}$$

$$dv_y = \frac{\left[\begin{array}{l}(ylx - siny\,.\,lsinx)\left(\frac{x}{y} - sinx.coty\right) - (xly - sinx.lsiny). \\ \quad .\,(lx - cos\,y\,.\,l\,sin\,x)\end{array}\right]}{(y\,lx - sin\,y\,.\,l\,sin\,x)^2}\,dy;$$

дакле $dv = dv_x + dv_y$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l}(ylx - siny\,.\,lsinx)\left[(ly - cos\,x\,.\,lsiny)dx + \left(\frac{x}{y} - sinx\,coty\right)dx\right] \\ -(xly - sinx.lsiny).\left[\left(\frac{y}{x} - siny\,cot\,x\right)dx + (lx - cosy.lsinx)dy\right]\end{array}\right\}}{(y\,lx - sin\,y\,.\,lsin\,x)^2}$$

Найпосле

5.) Тражи се целый диференціалъ функціє $v = x\,sin\,(ylz)$

При той имамо $dv_x = sin\,(y\,lz)\,.\,dx$,

$dv_y = x\,cos\,(y\,lz)\,.\,lz\,.\,dy$,

$dv_z = x\,cos\,(ylz)\,.\,y\,.\,\frac{dz}{z}$; дакле траженый целый диференціалъ

$$dv = sin\,(ylz)\,.\,dx + xlz\,.\,cos\,(ylz)\,.\,dy + \frac{xy}{z}\,.\,cos\,(yl\,z)\,.\,dz$$

б.) Айлерово правило за єдностепене функціє.

§ 40.

Ако є $v = f(x, y) = Ax^a y^\alpha + Bx^b y^\beta + Cx^c x^\gamma + \ldots\,.$, и притомъ $a + \alpha = b + \beta = c + \gamma = \ldots = n$, т. є. ако є **функція** v **єдностепена** (хомогена) n. реда, одъ два променљива броя x и y, и мы определимо нѣне почастне диференціалне количнике: добыямо

$$f_1(x\,,\,y)_x = Aa x^{a-1}.\, y^{\alpha} + Bb\, x^{b-1}.\, y^{\beta} + Cc\, x^{c-1}.\, y^{\gamma} + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

$$f_1(x\,,\,y)_y = A\alpha x^{a}.\, y^{\alpha-1} + B\beta x^{b}\, y^{\beta-1} + C\gamma\, x^{c}.\, y^{\gamma-1} + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

Множећи првый количникъ съ x а другій съ y, и после производе сабирајући, слѣдує

$$\begin{aligned} & f_1(x,y)_x \,.\, x + f_1(x,y)_y \,.\, y \\ &= A(a+\alpha)\,x^{a}y^{\alpha} + B(b+\beta)\,x^{b}y^{\beta} + C\,(c+\gamma)\,x^{c}y^{\gamma} + \ldots \\ &= n\,(Ax^{a}y^{\alpha} + B\,x^{b}y^{\beta} + C\,x^{c}y^{\gamma} + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,), \text{ т. є.} \\ & f_1(x\,,y)_x \,.\, x + f_1(x\,,y)_y \,.\, y = nv. \end{aligned}$$

Овай важный образацъ зове се **Айлерово правило за єдностепене функціє**, и служи осимъ другога за испытиванѣ точности целога диференціала функціє два променљива броя, определѣногъ помоћу почастны диференціала; лако є пакъ разпрострети га на єдностепене функціє и произвольно колико више променљивы бровва.

Изъ горнѣи израза видимо уєдно, да су почастни диференціални количници єдностепене функціє опетъ такове функціє, но єдногъ реда ниже.

За подпуно уверенѣ о истинитости вопроснога правила, ево и єданъ пнмеръ.

§ 41.

Имамо єдностепену функцію 2. реда одъ три променљива броя x, y и z,

$$v = f(x\,,y\,,z) = 2x^2 + xy - 3yz + \frac{z^4}{x^2} - \frac{1}{2}\,\frac{y^3}{z}\,.$$

При той є

$$f_1(x, y, z)_x = 4x + y - 2\frac{z^4}{x^3},$$

$$f_1(x, y, z)_y = x - 3z - \frac{3}{2} \cdot \frac{y^2}{z},$$

$$f_1(x, y, z)_z = -3y + 4\frac{z^3}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{z^2};\text{ дакле}$$

$$f_1(x, y, z)_x \cdot x + f_1(x, y, z)_y \cdot y + f_1(x, y, z)_z \cdot z =$$

$$= 4x^2 + 2xy + 2\frac{z^4}{x^2} - 6yz - \frac{y^3}{z}$$

$$= 2\left(2x^2 + xy + \frac{z^4}{x^2} - 3yz - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{d}\right),$$

т. є. доиста $= 2v$.

Само іошъ валя приметити, да исто правило постои іошъ и у томъ случаю, ако се у комъ члану вопросне єдностепене функціє налази какавъ трансцендентный чинитель нулногъ степена. Н. п. и при функціи $v = f(x, y) = x^2 - y^2 \sin\frac{x}{y} + 2xy$, у коіой є $\frac{x}{y}$ нулнога степена, каошто ћемо одма видити.

$$f_1(x, y)_x = 2x - y \cos\frac{x}{y} + 2y,$$

$$f_1(x, y)_y = -2y \sin\frac{x}{y} + x \cos\frac{x}{y} + 2x;\quad\text{дакле}$$

$$f_1(x, y)_x \cdot x + f_1(x, y)_y \cdot y = 2x^2 + 4xy - 2y^2 \sin\frac{x}{y}$$

$$= 2\left(x^2 + 2xy - y^2 \sin\frac{x}{y}\right),\quad\text{доиста}$$

$$= 2v.$$

в.) Выши диференціали функція више пременльивы броєва.

§ 42.

Све што є речено за выше диференціале функція єдногъ пременльивогъ броя, постои и за функціє више пременльивы броєва. Ако є т. є. за $v = f(x, y)$, $dv = Mdx + Ndy$, при чему M и N, каошто смо видили у §-у **17.**, представляю опетъ неке функціє одъ x и y: онда можемо dv, т. є. $Mdx + Ndy$ опетъ диференціалити, тако да притомъ сматрамо dx и dy као сталне броєве, или єданъ одъ нъи као пременльивъ а онай другій сталанъ, или найпосле оба као пременльиве броєве.

За сва слѣдуюћа сматраня выши диференціала уричемо овде єданпутъ за свагда dx и dy као **сталне** броєве.

При томъ предпоставлѣню бытѣе подпуный

$${}^{2}dv = d \,.\, dv = dMdx + dNdy.$$

$$= dx \,.\, dM + dy \,.\, dN \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\alpha$$

или $${}^{2}dv = dx \,.\, df_1(x, y)_x + dy \,.\, df_1(x, y)_y$$

$$= dx \,.\, [f_2(x, y) \,.\, dx + f_2(x; y)_{x,y} \,.\, dy] + dy \,.\, [f_2(x; y) \,.\, dx + f_2(x, y)_y \,.\, dy]$$

$$= f_2(x, y)_x \,.\, d^2x + [f_2(x, y)_{x,y} + f_2(x, y)_{y,x}]\, dx\, dy + f_2(x, y)_y \,.\, d^2y$$

$$= {}^{2}dv_x + ({}^{2}dv_{x,y} + {}^{2}dv_{y,x}) + {}^{2}dv_y \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\beta.$$

Другій диференціалъ функціє v можеао дакле добыти или непосредно по образцу α.), или помоћу почастногъ диференціаленя по образцу β.) Тако н. п. кадъ бы се тражіо другій диференціалъ функціє $v = sin\, x\; cos\, y$, имали бы, збогъ

$$dv = \cos x \cos y\, dx - \sin x \sin y\, dy,$$

непосреднимъ диференціаленѣмъ

$$^2dv = dx \,.\, d \cos x \cos y - dy \,.\, d \sin x \sin y$$

$$= dx \,.\, (-\sin x \cos y\, dx - \cos x \sin y\, dy)$$

$$- dy \,.\, (\cos x \sin y\, dx + \sin x \cos y\, dy)$$

$$= - \sin x \cos y \,.\, d^2x - 2 \cos x \sin y \,.\, dx\, dy - \sin x \cos y \,.\, d^2y);$$

помоћу почастны диференціала пакъ, збогъ

$$dv_x = \cos x \cos y\, dx, \;\; dv_y = - \sin x \sin y\, dy \qquad (\S\ 39.),$$

$$^2dv_x = - \sin x \cos y\, d^2x, \;\; ^2dv_{x,y} = - \sin y \cos x\, dx\, dy,$$

$$^2dv_{y,x} = - \cos x \sin y\, dy\, dx, \;\; ^2dv_y = - \sin x \cos y\, d^2y,$$

дакле по обр. β.)

$$^2dv = - \sin x \cos y \,.\, d^2x - 2 \cos x \sin y \,.\, dx\, dy - \sin x \cos y \,.\, d^2y.$$

г.) Телеровъ и маклореновъ образацъ за функціє два променљива броя.

§ 43.

Нека є $f(x,y)$ убопште нека функція два међу собомъ независна променљива броя x и y.

Поставляюћи у истой $x + h$ место x, бытће по телеровомъ образцу за функціє єдногъ променљивогъ броя, ако нову функцію означимо съ $\varphi(x,y)$:

$$\varphi(x,y) = f(x,y) + f_1(x,y)_x \,.\, h + f_2(x,y)_x \,.\, \frac{h^2}{2!} + f_2(x,y)_x \,.\, \frac{h^3}{3!} + \ldots$$

Узимаюћи овде пакъ $y + k$ место y, и означуюћи нову функцію съ $\psi(x,y)$, добыямо по истомъ правилу

$$\psi(x,y)=\varphi(x,y)+\varphi_1(x,y)_y\cdot k+\varphi_2(x,y)_y\cdot\frac{k^2}{2!}+\varphi_3(x,y)_y\cdot\frac{k^3}{3!}+\dots$$

Како є пакъ

$$\varphi_1(x,y)_y=f_1(x,y)_y+f_2(x,y)_{x,y}\cdot h+f_3(x,y)_{2x,y}\cdot\frac{h^2}{2!}+f_4(x,y)_{3x,y}\cdot\frac{h^3}{3!}$$
$$+\dots\dots$$

$$\varphi_2(x,y)_y=f_2(x,y)_y+f_3(x,y)_{x,2y}\cdot h+f_4(x,y)_{2x,2y}\cdot\frac{h^2}{2!}+\dots\dots$$

$$\varphi_1(x,y)_y=f_3(x,y)_y+f_4(x,y)_{x,3y}\cdot h+f_5(x,y)_{2x,3y}\cdot\frac{h^2}{2!}+\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

то є, ове вредности у $\psi(x,y)$ узимаюћи, ова функція, т. є.

$$\begin{aligned}f(x+h,y+k)=f(x,y)&\\&+[f_1(x,y)_x\cdot h+f_1(x,y)_y\cdot k]\\&+\frac{1}{2!}[f_2(x,y)_x\cdot h^2+2f_2(x,y)_{x,y}\cdot hk+f_2(x,y)_y\cdot k^2]\\&+\frac{1}{3!}[f_3(x,y)_x\cdot h^3+3f_3(x,y)_{2x,y}\cdot h^2k\\&\qquad+3f_3(x,y)_{x,2y}\cdot hk^2+f_3(x,y)_yk^3]\\&+\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{aligned}$$

а то є телеровъ образацъ за функціє два променљива броя, кои пре свега служи за определњиванђ промене такове функціє, збогъ еднодобне промене променљивы броєва у $x+h$ и $y+k$.

§ 44.

Поставляюћи у томъ образцу $x=0$ и $y=0$, и узимаюћи после x место h а y место k, добыямо образацъ

$$f(x,y) = f(\underset{0}{x},y) + [f_1(\underset{0}{x},y)_x \cdot x + f_1(\underset{0}{x},y)_y \cdot y]$$

$$+ \frac{1}{2!}[f_2(\underset{0}{x},y)_x \cdot x^2 + 2f_2(\underset{0}{x},y)_{x,y} \cdot xy + f_2(\underset{0}{x},y)_y \cdot y^2$$

$$+ \frac{1}{3!}[f_3(\underset{0}{x},y)_x \cdot x^3 + 3f_3(\underset{0}{x},y)_{2x,y} \cdot x^2y + 3f_3(\underset{0}{x},y)_{x,2y} \cdot$$

$$xy^2 + f_3(\underset{0}{x},y)_y \cdot y^3]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

у комъ, диференціалнимъ количницима придата 0 показує, да є у истима узето $x = 0$ и $y = 0$, и кои служи за развіянћ функціє два пременљива броя по степенима исты броєва.

Ово очевидно ніє ништа друго, но маклореновъ образацъ за функціє два пременљива броя.

Служећи се тимъ образцемъ за развіянћ н. п. функціє $f(x, y) = xya^{x+y}$ у редъ имамо

$$f(\underset{0}{x},y) = 0,$$

$$f_1(x,y)_x = ya^{x+y}.(1 + x\,la), \quad \text{зато} \quad f_1(\underset{0}{x},y)_x = 0,$$

$$f_1(x,y)_y = xa^{x+y}.(1 + y\,la), \quad " \quad f_1(\underset{0}{x},y)_y = 0,$$

$$f_2(\underset{0}{x},y)_x = ya^{x+y}.\,la\,(2 + x\,la), \quad " \quad f_2(\underset{0}{x},y)_x = 0,$$

$$f_2(\underset{0}{x},y)_y = xa^{x+y}.\,la\,(2 + y\,la), \quad " \quad f_2(\underset{0}{x},y)_y = 0,$$

$$f_2(\underset{0}{x},y)_{x,y} = (1 + x\,la)(1 + y\,la)a^{x+y}, \quad " \quad f_2(\underset{0}{x},y)_{x,y} = 1,$$

$$f_3(\underset{0}{x},y)_x = yl^2aa^{x+y}.(3 + x\,la), \quad " \quad f_3(\underset{0}{x},y)_x = 0,$$

$$f_3(\underset{0}{x},y)_y = xl^2a\,.\,a^{x+y}.(3 + y\,la), \quad " \quad f_3(\underset{0}{x},y)_y = 0,$$

$$f_3(\underset{0}{x},y)_{2x,y} = la\,.\,a^{x+y}.(2 + xla)(1 + yla) \quad " \quad f_3(\underset{0}{x},y)_{2x,y} = 2\,la,$$

$$f_3(\underset{0}{x},y)_{x,2y} = la\,.\,a^{x+y}.(2 + yla)(1 + x\,la), \quad " \quad f_3(\underset{0}{x},y)_{x,2y} = 2\,la,$$

. . . .

и одтудъ видимо лако, да за сачинителѣ вопроснога реда само одъ мешовиты диференціалны количника дате функціє нешто добыямо, а да чисти диференціални количници испадаю сви = о. Пренебрегаваюђи дакле ове при далѣмъ послу, имамо іошъ

$$f_4(x,y)_{3x,y} = l^2a.a^{x+y}.(3+xla)(1+yla), \text{ зато } f_4(x\underset{0}{,}y)_{3x,y} = 3l^2a,$$

$$f_4(x,y)_{x,3y} = l^2a.a^{x+y}.(3+yla)(1+xla), \quad „ \quad f_4(x\underset{0}{,}y)_{x,3y} = 3l^2a,$$

$$f_4(x,y)_{2x,2y} = l^2a.a^{x+y}.(2+xla)(2+yla), \quad „ \quad f_4(x\underset{0}{,}y)_{2x,2y} = 4l^2a,$$

и т. д.

Слѣдователно траженый по горнѣмъ образцу редъ

$$xy\,a^{x+y} = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{3}lax^2y + \tfrac{1}{3}laxy^2 + \tfrac{1}{8}l^2ax^3y + \tfrac{1}{6}l^2ax^2y^2 + \tfrac{1}{8}l^2axy^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ову функцію xya^{x+y} можемо писати и овако: xya^xa^y. Нѣнъ редъ дакле добыли бы просто, т. є. безъ употреблѣня маклореновогъ образца, ако бы за a^x и a^y узели ньнове редове, и те меѓу собомъ, а ньновъ производъ после съ xy помложили. Тай посао оставлямо прилѣжномъ почетнику.

§ 45.

Ако узмемо у функціи $f(x,y)$ § 43. найпре $y+k$ место y, а у новой функціи после $x+h$ место x, добыямо на истый начинъ као тамо,

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + [f_1(x,y)_y k + f_1(x,y)_x h]$$
$$+ \frac{1}{2!}[f_2(x,y)_y k^2 + 2f_2(x,y)_{y,x}.kh + f_2(x,y)_x.h^2]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Уєдначаваюђи пакъ овай изразъ $f(x+h,y+k)$ съ онимъ у поменутомъ §, слѣдує по правилу сачинителя

$$f_2(x,y)_{x,y} = f_2(x,y)_{y,x},\ f_3(x,y)_{2x,y} = f_3(x,y)_{y,2x},$$

и т. д., уобште

$$f_{\alpha+\beta}(x;y)_{\alpha x,\beta y}=f_{\alpha+\beta}(x;y)_{\beta y,\alpha x};$$

изъ чега видимо, да є сасвимъ свеєдно, хоћемо ли неку функцію два пременльива броя x и y найпре α пута по x па онда β пута по y диференціалити, или пакъ найпре β пута по y а после α пута по x. Ево у томъ обзиру и єданъ примеръ.

По §. 42. є за $f(x;y)=sin\,x\,cos\,y$;

$$f_2(x,y)_x=-sin\,x\,cos\,y.$$

Диференціалећи ово наново по y, добыямо

$$f_3(x,y)_{2x,y}=sin\,x\,sin\,y.$$

По § 39. пакъ имамо

$f_1(x,y)_y=-sin\,x\,sin\,y$; дакле ако ово застопце двапутъ диференціалимо по x,

$f_3(x,y)_{y,2x}=sin\,x\,sin\,y$, и тако доиста оно што пре.

§ 46.

По § 35. бр. 2.), стои за $v=f(x,y)$

$$\begin{aligned}dv&=f_1(x,y)_x\cdot dx+f_1(x,y)_y\cdot dy\\&=M\,dx+N\,dy\end{aligned}$$

Диференціалећи M по y, N пакъ по x, добыямо

$$\frac{d\,M_y}{dy}=f_2(x,y)_{x,y},\text{ а }\frac{d\,N_x}{dr}=f_2(x,y)_{y,x}.$$

Но по пређашнѣмъ є §у $f_2(x,y)_{x,y}=f_2(x,y)_{y,x}$; мора дакле быти при функціама два пременльива броя x и y,

$$\frac{d\,M_y}{dy}=\frac{d\,N_x}{dx}.$$

Ово докученѣ служи за увераванѣ о точности изнађеногъ целогъ диференціала какве функціє два променльива броя x и y, или као то датогъ каквогъ израза, састои се пакъ у томъ, да сачинителя одъ dx диференціалимо по y, а сачинителя одъ dy по x, па онда видимо да ли су диференціални количници одтудъ єднаки, каошто по томъ докученю мораю быти, ако є добывеный или датый диференціалъ добаръ.

Тако н. п.

1.) нашли смо у § 39. као целый диференціалъ функціє $v = y^x$

$$dv = y^x ly \,.\, dx + xy^{x-1} . dy.$$

При тому є $M = y^x ly$, а $N = xy^{x-1}$.

Диференціалећи M по y, добыямо количникъ

$$\frac{dM_y}{dy} = ly \cdot xy^{x-1} + \frac{y^x}{y} = y^{x-1} . (x\,ly + 1).$$

Узимаюћи пакъ диференціалъ одъ N по x, слѣдує количникъ

$$\frac{dN_x}{dx} = y^{x-1} + yx^{x-1} . ly = y^{x-1} . (1 + xly).$$

Овай є колитникъ очевидно онакавъ истый као прећашньій, и по тому, на основу горнѣга докученя, у поменутомъ §-у нађеный диференціалъ вопросне функціє исправанъ. — Или

2.) Датъ є изразъ $a^x ly \,.\, dx + yl \sin x \,.\, dy$ као целый диференціалъ неке функціє v два променльива броя x и y, па се пыта да ли є тай диференціалъ исправанъ.

При тому имамо $M = a^x ly$, а $N = yl \sin x$.

Диференціалећи M по y, а N по x, добыямо количнике

$$\frac{dM_y}{dy} = \frac{a^x}{ly} \quad \text{и} \quad \frac{dN_x}{dx} = y \cot x,$$

два различна броя, збогъ чега по горнѣмъ докученю датый изразъ неможе быти целый диференціалъ никакове функціє два променльива броя x и y.

§ 47.

У предходећемъ §-у нађено условіє за точность целога диференціала функціє два променльива броя, може се лако разпрострети и на функціє више променльивы броєва. Показатћемо то само іошъ за функціє три променльива броя.

Нека є $v=f(x,y,z)$ уобште такова нека функція.

По § 37. имамо за такову функцію

$$dv=M.dx+N.dy+O.dz,$$

при чему є

$$M=f_1(x,y,z)_x,\ N=f_1(x,y,z)_y,\ O=f_1(x,y,z)_z.$$

Диференціалећи M єданпутъ по y другипудъ по z, N єданпутъ по x другипутъ по z, O єданпутъ по x другипутъ по y, — добыямо количнике

$$\frac{dM_y}{dy}=f_2(x,y,z)_{x,y} \text{ и } \frac{dM_z}{dz}=f_2(x,y,z)_{x,z},$$

$$\frac{dN_x}{dx}=f_2(x,y,z)_{y,x} \text{ и } \frac{dN_z}{dz}=f_2(x,y,z)_{y,z},$$

$$\frac{dO_x}{dx}=f_2(x,y,z)_{y,x} \text{ и } \frac{dO_y}{dy}=f_2(x,y,z)_{y,z}.$$

Но по § 45. є

$$f_2(x,y,z)_{x,y}=f_2(x,y,z)_{y,x},\ f_2(x,y,z)_{x,z}=f_2(x,y,z)_{z,x},$$
$$f_2(x,y,z)_{y,z}=f_2(x,y,z)_{z,y}.$$

Слѣдователно мора быти при свакой функціи три променльива броя x, y и z,

$$\frac{dM_y}{dy}=\frac{dN_x}{dx},\ \frac{dM_z}{dz}=\frac{dO_x}{dx},\ \frac{dN_z}{dz}=\frac{dO_y}{dy}.$$

д.) Диференціаленъ скривены функція.

§ 48.

Све што смо дояко показали, тицало се само одкривены функція; сада пакъ да видимо іошъ и како се диференціале функціє скривене, т. є. функціє вида

$$f(x, y, z, \ldots) = 0.$$

Пре свега сматраймо такове функціє одъ само два премен҄ива броя, представляюћи ій са $f(x, y) = 0$, предпоставляюћи пакъ, да є притомъ x независно, а y зависно премен҄ивый брой, дакле да є y нека функція одъ x.

Нека є премена одъ y збогъ промене одъ x у $x + h$, $y + k$; быт҄ће збогъ тога што $f(x, y) = 0$ постои при свакой вредности одъ x, такођеръ и $f(x + h, y + k) = 0$, па ако одъ ове єдначине прву одузмемо, и $f(x + h, y + k) - f(x, y) = 0$, т. є. $\varDelta f(x, y) = 0$; дакле найпосле ако узмемо $h = dx$ а $k = dy$, и

$$d f(x, y) = 0,$$

то ће рећи: **диференціалъ сваке скривене функціє два премен҄ива броя равапъ є нулли.**

Но по § є 37.

$$d f(x, y) = f_1(x, y)_x . \, dx + f_1(x, y)_y . \, dy,$$

при чему є y сматрано као независно одъ x. Зато ако ову вредность узмемо у пређашный изразъ, стои

$$\left.\begin{aligned} & d f(x, y) = f_1(x, y)_x . \, dx + f_1(x, y)_y . \, dy = 0 \\ \text{и одтудъ} \quad & \frac{dy}{dx} = - \frac{f_1(x, y)_x}{f_1(x, y)_y} \end{aligned}\right\} \ldots . \text{(I.}$$

Изъ тога пакъ видимо, да ћемо првый диференціалный количникъ у изразу $f(x, y) = 0$ скривене функціє y одъ x добыти, ако $f(x, y)$ тако диференціалимо,

као да y независи одъ x, па онда тай диференціалъ метнемо $= 0$, и одтудъ определимо $\frac{dy}{dx}$.

Имамо н. п. скривену функцію y у

$$f(x, y) = x^2 - 3\,x\,ly + y^2 \sin x + a = 0.$$

Диференціалећи ово као да y независи одъ x, налазимо

$$(2x - 3ly + y^2 \cos x)dx - (3\frac{x}{y} - 2y \sin x)dy = 0,$$

одкуда слѣдуе

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3ly + y^2 \cos x}{3\frac{x}{y} - 2y \sin x} = \frac{2xy - 3yly + y^3 \cos x}{3x - 2y^2 \sin x}.$$

§ 49.

Диференціалећи $df(x, y) = 0$ наново, слѣдуе изъ прве єдначине подъ 1.) у пређашнѣмъ §у, на истимъ основима и съ приметбомъ, да є притомъ dx сталанъ брой, dy пакъ збогъ $y = \varphi(x)$ променљивъ:

$$^2d f(x, y) = dx \cdot [f_2(x, y)_x\, dx + f_2(x, y)_{x,y} \cdot dy]$$

$$+ dy \cdot [f_2(x, y)_{y,x} \cdot dx + f_2(x, y)_y \cdot dy]$$

$$+ f_1(x, y)_y \cdot {}^2dy$$

$$= f_2(x, y)_x \cdot d^2x + 2f_2(x, y)_{x,y}\, dx\, dy + f_2(x, y)_y \cdot d^2y$$

$$+ f_1(x, y)_y \cdot {}^2dy = 0,$$ и одтудъ

$$\frac{^2dy}{d^2x} = -\frac{f_2(x, y)_x + 2f_2(x, y)_{x,y} \cdot \frac{dy}{dx} + f_2(x, y)_y \cdot \frac{d^2y}{d^2x}}{f_1(x, y)_y}.$$

Подобнимъ начиномъ можемо садъ лако изнаћи и друге више диференціале и диференціалне количнике скривене функціє.

У примеру преѣашнѣгъ §а имали смо

$$f_1(x,y)_x = 2x - 3ly + y^2 cos\, x,\; f_1(x,y)_y = -3\frac{x}{y} + 2y\, sin\, x.$$

Образуюѣи за тай примеръ све што треба у име другогъ диференціалногъ количника скривене функціє y, имамо

$$f_2(x,y)_x = 2 - y^2 sin\, x\,,$$

$$f_2(x,y)_{x,y} = -\frac{3}{y} + 2y\, cos\, x\,,$$

$$f_2(x;y)_y = 3\frac{x}{y^2} + 2\, sin\, x\,;$$

дакле обзиромъ нато, да є притомъ по преѣашнѣмъ §у

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy - 3y\, ly + y^2 cos\, x}{3x - 2y^2 sin\, x},$$

$$\frac{{}^2dy}{d^2y} = -\Big[(2 - y^2 sinx) - 2\Big(\frac{3}{y} - 2cos\, x\Big)\cdot\frac{2xy - 3y\, ly + y^2 cos\, x}{3x - 2y^2 sin\, x} +$$

$$+ \Big(3\frac{x}{y^2} + 2\, sin\, x\Big)\cdot\frac{(2xy - 3y\, ly + y^2 cos\, x)^2}{(3x - 2y^2 sin\, x)^2}\Big] : \Big(-3\frac{x}{y} + 2y\, sinx\Big)$$

$$= \big[(2 - y^2 sin\, x)y^2(3x - 2y^2 sin\, x)^2 - 2(3 - 2y\, cos\, x)y \times$$

$$\times (2xy - 3yly + y^2 cosx)(3x - 2y^2 sinx) + (3x + 2y^2 sinx)$$

$$\times (2xy - 3y\, ly + y^2 cos\, x)^2\big] : y^2(3x - 2y^2 sin\, x)^3.$$

§ 50.

Ако имамо єдначину $f(x,y,z) = 0$, онда одъ та три променльива броя x, y и z, могу быти найвише два независно променльиви, а треѣій нека функція оба ньи. Нека су независно променльиви броєви x и y. Треѣій променльивый брой z тадъ, као ньиова функція, може се меняти 1. ако се єданъ само одъ она два меня, а другій є притомъ сталанъ, или 2. ако се у истый махъ обадва меняю.

Ако се меня само x, имамо

$$f_1(x, y, z)_x \cdot dx + f_1(x, y, z)_z \cdot dz_x = 0;$$

ако се пакъ меня само y, бытћe

$$f_1(x, y, z)_y \cdot dy + f_1(x, y, z)_z \cdot dz_y = 0.$$

Сабираюћи ова два почастна диференціала, имамо дакле при предпоставлѣной єдначини целый диференціалъ.

$$d\,f(x, y, z) = f_1(x, y, z)_x \cdot dx + f_1(x, y, z)_y \cdot dy$$

$$+ f_1(x, y, z)_z \cdot (dz_x + dz_y) = 0, \qquad \text{или}$$

зато што $dz_x + dz_y$ очевидно ніє ништа друго, но целый диференціалъ броя z као функціє одъ x и y, т. є. $= dz$:

$$d\,f(x, y, z) = f_1(x, y, z)_x \cdot dx + f_1(x, y, z)_y \cdot dy + f_1(x, y, z)_z \cdot dz = 0.$$

Да се и како се сва доякошня докученя могу лако разпрострети уобште на єдначине одъ произволно колико променлыивы броєва, одъ кои є єданъ нека функція свію осталы, а ови меѣу собомъ независни, — као и коимъ бы се начиномъ добыли выши диференціали не само предпостоєће функціє, но и сваке друге подобне: безъ сумнѣ непотребує сада никакова више обяснѣня; али намъ за позднію потребу (при интегралномъ рачуну) остає іошъ слѣдуюће приметити.

§ 51.

Ако се у датой скривеной функціи налази какавъ сталанъ брой, онда се тай при диференціаленю наравно губи, и диференціална єдначина одговара као такова свима онима **особитимъ** єдначинама одъ прве, даваюћи ономъ сталномъ броѣ произволне вредности.

Но место тогъ сталногъ броя може се такоѣеръ и свакій другій, у датой єдначини као чинитель или имeнитель стоєћій сталный брой, изъ диференціалне єдначине лако уклонити тиме, да га у првой одъ други одлучимо, и после нову єдначину диференціалимо.

Тако н. п. ако имамо скривену функцію $x^2 - ay^2 + b = 0$, па место b хоћемо или треба да уклонимо изъ диференціалне єдначине те функціє сталный брой a, делит'ћемо найпре исту функцію са y^2, чимъ добыямо

$$\frac{x^2}{y^2} - a + \frac{b}{y^2} = 0,$$

а дудъ диференціалећи

$$\frac{2x}{y^2}\,dx - \frac{2(x^2+b)}{y^3}\,dy = 0, \text{ или}$$

$$2xy\,dx - 2(x^2+b)\,dy = 0, \text{ и одтудъ}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+b},$$

диференціалну єдначину безъ a.

До ове исте єдначине можемо доћи іошъ и на тай начинъ, да дату функцію, као што є, диференціалимо, изъ добывене диференціалне єдначине a определимо, и после ту нѣгову вредность заменемо у датой єдначини. Тимъ путемъ имали бы

$$2x\,dx - 2\,ay\,dy = 0, \text{ одтудъ}$$

$$a = \frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dy},$$

а съ томъ вредности изъ прве (дате) єдначине

$$x^2 - xy \cdot \frac{dx}{dy} + b = 0, \text{ т. є.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+b} \text{ као пре.}$$

§ 52.

На овай истый начинъ можемо не само єданъ, но коликогодъ хоћемо или треба сталны броєва изъ дате скривене функціє уклонити, па найпосле и све, у име чега треба само да диференціаленѣ онолико пута повторимо, колико онаки броєва истребити желимо или морамо.

Диференпіалећи едначину $xy\,dx-(x^2+b)\,dy=0$ за истребльиванѣ и другогъ сталногъ броя b, слѣдуе

$$y\,d^2x+x\,dx\,dy-2\,x\,dx\,dy-(x^2+b)\,.\,{}^2dy=0\,,\quad \text{т. є.}$$

$$y\,d^2x-x\,dx\,dy-x^2\,.\,{}^2dy-b\,.\,{}^2dy=0\,,$$

и одтудъ

$$b=\frac{y\,d^2x-x\,dx\,dy-x^2\,.\,{}^2dy}{{}^2dy}\,;$$

съ томъ пакъ вредности изъ горнѣ едначине

$$xy\,dx-\frac{x^2\,.\,{}^2dy+y\,.\,d^2x-x\,dx\,dy-x^2\,.\,{}^2dy}{{}^2dy}\,dy=0,\quad \text{т. є.}$$

$$xy\,dx\,.\,{}^2dy-y\,d^2x\,.\,dy+x\,dx\,.\,d^2y=0\,,\quad \text{или}$$

$$\frac{{}^2dy}{d^2x}=\frac{dy}{x\,dx}-\frac{d^2y}{y\,d^2x}\,.$$

B. Употреблѣнѣ диференціалнога рачуна у анализи.

a.) Определьиванѣ правы вредностій функція, появлююћи се подъ видовима $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\,.\,\infty$ и $\infty-\infty$.

§ 53.

Догађа се млого пута. да деловна нека функція за известну какву вредность пременльивога броя, прима видъ $\frac{0}{0}$, премда є при истой вредности тога броя и сама известне, определити се могуће вредности. Тако н. п.

быва функція $v = \frac{a(x^2 - a^2)}{\sqrt{x-a}}$ за $x = a$ очевидно вида $v = \frac{0}{0}$; у ствари є пакъ за то x известно $= 0$, о чему се лако уверавамо, ако броителѣвогъ чинителя доведемо подъ кореный знакъ и скратимо, а после у изразу $v = a \times (x + a)\sqrt{x-a}$ поставимо $x = a$.

Да є ова функція v при непосредной замени одъ x съ a постала вида $\frac{0}{0}$, причиніо є, као што є лако было приметити, заєднички чинитель броителя и именителя $\sqrt{x-a}$, и то ће се за $x = a$ догодити уобште при свакой оной деловной функціи, коє броитель и именитель имаю заєдничкога чинителя $(x - a)$ у некомъ целомъ или деловномъ степену.

Нека є $v \frac{X_1(x - a)^m}{X_2(x - a)^n}$ такова функція, притомъ пакъ X_1 и X_2 неке, чнинителя $(x - a)$ више несадржеће функціє одъ x. Та функція постає очевидно при непосредной замени одъ x съ a вида $\frac{0}{0}$; ако пакъ найпре оногъ чинителя $(x - a)$, кои то причинява, уклонимо, нѣна права вредность може быти уобште или 0, или $\frac{X_1}{X_2}$, или ∞, почемъ буде односно $m \gtreqless n$. Но тога чинителя одкрити и уклонити ніє свагда тако лако као у показаномъ примеру и другимъ подобнима; зато показат'ћемо у слѣдующимъ §§-ма, како се праве вредности функція, скривене у символу $\frac{0}{0}$, лако могу одкрити помоћу диференціалнога рачуна.

§ 54.

У име тога нека є уобште $v = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ такова деловна функція, коя за неку известну вредность $x = a$ постає вида $\frac{0}{0}$.

Узимаюћи у той функціи $x+v$ место x, добыямо по телеровомъ образцу за функціє єдногъ пременљивогъ броя,

$$\frac{f(x+v)}{\varphi(x+v)}=\frac{f(x)+f_1(x)\,v+f_2(x)\cdot\frac{v^2}{2\,!}+\cdots}{\varphi(x)+\varphi_1(x)\,v+\varphi_2(x)\cdot\frac{v^2}{2\,!}+\cdots}\quad\ldots\ldots(\alpha.$$

Узимаюћи овде пакъ за x ону вредность a, бывають $f(x)$ и $\varphi(x)$ свака $=0$, и десна часть може се збогъ тога скратити съ v, тако да ако све то урадимо, слѣдує

$$\frac{f(\underset{a}{x}+v)}{\varphi(\underset{a}{x}+v)}=\frac{f_1(\underset{a}{x})+f_2(\underset{a}{x})\cdot\frac{v}{2!}+f_3(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^2}{3!}+\cdots\cdot}{\varphi_1(\underset{a}{x})+\varphi_2(\underset{a}{x})\cdot\frac{v}{2!}+\varphi_3(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^2}{3!}+\cdots};$$

при чему брой a свуда показує, да є у дотичнимъ функціяма место x узето a.

Найпосле ставляюћи у овомъ последнѣмъ изразу $v=0$, остає тражена вредность дате функціє за $x=a$,

$$\frac{f(\underset{a}{x})}{\varphi(\underset{a}{x})}=\frac{0}{0}=\frac{f_1(\underset{a}{x})}{\varphi_1(\underset{a}{x})}\text{, а то ће рећи:}$$

права вредность деловне функціє $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, коя за $x=a$ постає вида $\frac{0}{0}$, равна є количнику одъ диференціалногъ количника броителя, чрезъ диференціалный количникъ именителя, узимаюћи у тима диференціалнимъ количницима $x=a$.

Ради болѣгъ разумеваня, а уєдно и за упражненѣ, узмимо одма кои примеръ.

§ 55.

1.) Имамо функцію

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{a\,(x^2-a^2)}{\sqrt{x-a}},$$

коя, каошто смо видили у § 53., за $x=a$ постає $\frac{0}{0}$.

При той є функціи диференціалный количникъ броителя

$$f_1(x) = 2ax,$$

а диференціалный количникъ именителя

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-a}};$$

дакле количникъ одъ та два количника

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{2ax}{\frac{1}{2\sqrt{x-a}}} = 4ax\sqrt{x-a},$$

и зато за $x = a$ тражена вредность дате функціє

$$\frac{f\underset{a}{(x)}}{\varphi\underset{a}{(x)}} = \frac{0}{0} = 4a^2.0 = 0,$$

каошто смо већъ дознали у поменутомъ §-у на другій начинъ.

2.) Имамо функцію

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^3 + (la - 2)x^2 - (2la + 1)x + 2}{x^2 - 2(1 - la)x - 4la},$$

коя, каошто лако можемо видити, за $x = 2$ постає $\frac{0}{0}$.

При той є диференціалный количникъ броителя

$$f_1(x) = 3x^2 + 2(la - 2)x - 2la - 1,$$

а диференціалный количникъ именителя

$$\varphi_1(x) = 2x - 2(1 - la);$$

26

дакле количникъ тій диференціалны количника

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{3x^2 + 2(la - 2)x - 2la - 1}{2x - 2(1 - la)},$$

одтудъ пакъ тражена вредность дате функціє за $x = 2$:

$$\frac{f(x)_{2}}{\varphi(x)_{2}} = \frac{0}{0} = \frac{3 . 4 + 2 (la - 2) 2 - 2la - 1}{2 . 2 - 2 (1 - la)}$$

$$= \frac{3 + 2la}{2 + la}.$$

3.) Имамо функцію

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a^{x} . \cos x}{l \sin x . (1 - \sin x)},$$

коя за $x = 90^{0} = \frac{\pi}{2}$, быва $\frac{0}{0}$.

Диференціалный количникъ нѣнога броителя є

$$f_1(x) = a^{x}(la . \cos x - \sin x),$$

диференціалный количникъ именителя пакъ

$$\varphi_1(x) = (1 - \sin x) . \cot x - l \sin x . \cos x;$$

дакле количникъ одъ та два количника

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{a^{x}(la . \cos x - \sin x)}{(1 - \sin x) \cot x - l \sin x . \cos x}.$$

и зато тражена вредность дате функціє за $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{f(x)_{\frac{\pi}{2}}}{\varphi(x)_{\frac{\pi}{2}}} = \frac{0}{0} = \frac{a^{\frac{\pi}{2}} . (la . \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2})}{(1 - \sin \frac{\pi}{2}) \cot \frac{\pi}{2} - l \sin \frac{\pi}{2} . \cos \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{- a^{\frac{\pi}{2}}}{- 0} = \infty.$$

§ 56.

Ако бы се догодило, да се у изразу $\alpha.$) § 54. са $x = a$ потиру не само $f(x)$ и $\varphi(x)$, но тій функція диференціални количници $f_1(x)$ и $\varphi_1(x)$, тако да остає

$$\frac{f(\underset{a}{x}+v)}{\varphi(\underset{a}{x}+v)} = \frac{\underset{2}{f}(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^2}{2!}+\underset{3}{f}(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^3}{3!}+\cdots\cdots}{\underset{2}{\varphi}(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^2}{2!}+\underset{3}{\varphi}(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^3}{3!}+\cdots\cdots},$$

онда, ако найпре скратимо съ $\frac{v^2}{2!}$ и после поставимо $v=0$, слѣдує тражена вредность дате функціє за $x=a$:

$$\frac{f(\underset{a}{x})}{\varphi(\underset{a}{x})}=\frac{0}{0}=\frac{\underset{2}{f}(\underset{a}{x})}{\underset{2}{\varphi}(\underset{a}{x})},$$ то ће рећи:

у томъ є случаю права вредность те функціє равна количнику одъ другогъ диференціалногъ количника броителя, чрезъ другій диференціалный количникъ именителя, узимаюћи у свакомъ за x брой a.

Н. п. имамо функцію

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{a^x(1-\sin x)}{la\,(\cot x-2\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x)},$$

коя, каошто лако можемо видити за $x=\frac{\pi}{0}$ постає $\frac{0}{0}$.

При той є диференціалный количникъ броителя

$$f_1(x)=a^x la\,.\,(1-\sin x)-a^x\cos x,$$

а диференціалный количникъ именителя

$$\varphi_1(x)=la\,(-\operatorname{cosec}^2 x+2\sin x+\cos 2x);$$

дакле количникъ тій количника

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}=\frac{a^x la\,(1-\sin x)-a^x\cos x}{la\,(-\operatorname{cosec}^2 x+2\sin x+\cos 2x)},$$

кои за $x=\frac{\pi}{2}$ постає очевидно такођеръ $\frac{0}{0}$.

Другій є диференціалный количникъ броителя

$$f_2(x) = a^x la\,[la\,(1\ sin\,x) - cos\,x + sin\,x];$$

другій диференціалный количникъ именителя

$$\varphi_2(x) = la\,[-2\,cosec\,x\,.\,cot\,x + 2\,cos\,x - 2\,sin\,2\,x];$$

дакле количникъ тій количника

$$\frac{f_2\,(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{a^x la\,[la\,(1 - sin\,x) - cos\,x + sin\,x]}{la(-2\,cosec\,x\,.\,cot\,x + 2\,cos\,x - 2\,sin\,2x)}$$

$$= \frac{a^x\,[la\,(1 - sin\,x) - cos\,x + sin\,x]}{-2\,cosec\,x\,.\,cot\,x + 2\,cos\,x - 2\,sin\,2\,x},$$

и зато тражена вредность дате функціє за $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{f(x)_{\frac{\pi}{2}}}{\varphi(x)_{\frac{\pi}{2}}} = \frac{0}{0} = \frac{a^{\frac{\pi}{2}}}{-0} = -\infty.$$

§ 57.

Предпоставляюћи далѣ да за $x = a$ изчезавају при деловной функціи $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ редомъ іошъ и други, трећи и т. д. диференціални количници броителя и именителя, — и испытуюћи на истый начинъ као до сада, шта збогъ тога быва съ функціомъ $\frac{f(x)_a}{\varphi(x)_a} = \frac{0}{0}$? долазимо найпосле до тогъ обштегъ докученя: **да є права вредность функціє $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ у случаю, ако $n - 1$ првы количника броителя и именителя за $x = a$ изчезавају, равна количнику одъ n. диференціалногъ количника броителя, чрезъ n. диференціалный количникъ именителя, узимаюћи у истима $x = a$**; т. є. да є

$$\frac{f(x)_a}{\varphi(x)_a} = \frac{0}{0} = \frac{f_n(x)_a}{\varphi_n(x)_a}.$$

§ 58.

Предходећій начинъ одкриваня правы вредностій деловны функція, появлюю̀ћи се подъ видомъ $\frac{0}{0}$, основанъ є на употреблѣню телеровога образца. Собомъ дакле слѣдуе, да се тай начинъ у свима онима случаима неће моћи употребити, у коима насъ и самъ тай образацъ издаѥ.

Ово ће се догодити при свакой оной деловной функціи $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, гди се или самъ броитель, или самъ именитель, или обадва при оной вредности одъ x, коя причинява, да вопросна фрнкція постае $\frac{0}{0}$, неда развити у редъ **целы положны** степена вишка v.

У таковомъ случаю дакле неостае ништа друго, но служити се за определѣиванѣ вопросне вредности, познатимъ изъ § 29. простимъ начиномъ. Т. є. валя у броителю и именителю дотичне деловне функціє узети $x + v$ место x, све рачуне посвршивати, и нову деловну функцію после по могућству скратити, найпосле пакъ іошъ v съ нулломъ заменути.

Тако н. п. ако є вопросна деловна функція $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[5]{1-x^2}}$, бытће за $x = 1$, иста функція $= \frac{0}{0}$, и та ће се нѣна вредность така показати, ма колико пута броителя и именителя диференціалили. Зато, да бы ю одкрили, ставлямо

$$\frac{f(x+v)}{\varphi(x+v)} = \frac{(x+v)\sqrt[3]{1-x-v}}{\sqrt[5]{1-x^2-2xv-v^2}}.$$

То быва за $x = 1$,

$$\frac{f(x_1+v)}{\varphi(x_1+v)} = \frac{(1+v)\sqrt[3]{-v}}{\sqrt[5]{-2v-v^2}} = \frac{(1+v).v^{\frac{1}{3}}}{v^{\frac{1}{5}}.(2-v)^{\frac{1}{5}}} = \frac{(1+v)\,v^{\frac{2}{15}}}{(2-v)^{\frac{1}{5}}}.$$

Одтудъ пакъ, ако узмемо $v = 0$, слѣдує тражена вредньость дате функціє за $x = 1$:

$$\frac{f(\underset{1}{x})}{\varphi(\underset{1}{x})} = \frac{0}{0} = \frac{0}{2^{\frac{1}{5}}} = 0.$$

§ 59.

Догађа се далѣ такођеръ, да нека деловна функція $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ за неку известну вредность броя x прима видъ $\frac{\infty}{\infty}$.

Такову функцію можемо писати, безъ повреде нѣне вредности, овако: $\frac{1}{\varphi(x)} : \frac{1}{f(x)}$. Но тако представлѣна постає за ону вредность одъ x, $\frac{0}{0}$, и може се дакле лако одкрити на єданъ одъ дояко показана два начина. **Вредность дакле деловне функціє $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, за $x = a$ скривену у символу $\frac{\infty}{\infty}$, наћићемо, ако диференціалный количникъ изврнутога именителя разделимо съ диференціалнимъ количникомъ изврнутога бротеля, узевши у свакомъ одъ тіи количника $x = a$.**

Тако н. п. ако є вопросна функція

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1 + tg\,x}{sec\,x},$$

коя за $x = \frac{\pi}{2}$, збогъ $tg\,\frac{\pi}{2} = sec\,\frac{\pi}{2} = \infty$, постає $\frac{\infty}{\infty}$: имамо диференціалный количникъ изврнутога именитиля

$$\frac{d\,\frac{1}{sec\,x}}{dx} = \frac{d\ cos\ x}{dx} = -\,sin\,x,$$

а диференціалный количникъ изврнутога бронтеля

$$\frac{d\dfrac{1}{1+tgx}}{dx}=\frac{-d(1+tg\,x)}{(1+tg\,x)^2.\,dx}=\frac{-\dfrac{1}{cos^2x}}{(1+tgx)^2}=-\frac{1}{cos^2x\,(1+tg\,x)^2}$$

$$=-\frac{1}{cos^2x+2\,sin\,x\,cos\,x+sin^2x}=-\frac{1}{(cos\,x+sin\,x)^2};$$

дакле количникъ тій количника

$$\frac{-\,sin\,x}{-\dfrac{1}{(cos\,x+sin\,x)^2}}=sin\,x\,(cos\,x+sin\,x)^2,$$

и зато тражена вредность горнѣ функціє за $x=\frac{\pi}{2}$

$$\frac{f(x)_{\frac{\pi}{2}}}{\varphi(x)_{\frac{\pi}{2}}}=\frac{\infty}{\infty}=1\,.\,(0+1)^2=1.$$

§ 60.

Коипутъ наилаєимо на производе одъ две функціє, кои за известну вредность променльивога броя примаю неопределѣный видъ $(0\,.\,\infty)$. Тако н. п. постає функція $f(x)=lx\,.\,cot\,.\,(x-1)$ за $x=1$ вида $0\,.\,\infty$.

У таковомъ случаю, да бы у символу $0\,.\,\infty$ скривену вредность вопросне функціє одкрили, изражавамо ову као количникъ одъ оногъ нѣногъ чинителя, кои за дотичну вредность променльивога броя постає $=0$, раздѣлѣнъ съ разломкомъ 1 чрезъ оногъ другогъ чинителя, кои за исту вредность променльивога броя бива $=\infty$; єръ на тай начинъ постає после вопросна функція при той вредности променльивога броя вида $\frac{0}{0}$, кои є сасвимъ у нашой власти. Съ другимъ речма накратко: **у томъ случаю налазимо праву вредность символа $0\,.\,\infty$, ако диференціалный количникъ чинителя кои постає 0, разделимо съ диференціалнимъ количникомъ изврнутогъ оногъ другогъ чинителя, кои бива ∞, узевши у свакомъ одъ тій количника ону вредность променльивога броя, коя то причинява.**

Поступаюћи тако съ горе споменутомъ функціомъ, налазимо

$$\frac{d \,.\, lx}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d \frac{1}{cot\,(x-1)}}{dx} = \frac{d\,tg\,(x-1)}{dx} = \frac{1}{cos^2\,(x-1)};$$

дакле количникъ та два количника

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{cos^2\,(x-1)}} = \frac{cos^2\,(x-1)}{x},$$

и зато тражена вредность вопросне функціє за $x = 1$, скривена у символу $0 \,.\, \infty = \frac{cos^2 (1-1)}{1} = \frac{cos^2\,0}{1} = \frac{1}{1} = 1.$

§ 61.

Найпосле догодитЂе се, да добыємо разлику две функціє истогъ променљивогъ броя, коя за неку вредность тога броя постає неопределЂнога вида $\infty - \infty$.

Да бы у томъ символу скривену вредность функціє $v = f(x) - \varphi(x)$ докучили, ставлямо ако є $\frac{1}{f(x)} = f'(x)$ а $\frac{1}{\varphi(x)} = \varphi'(x)$,

$$v = \frac{1}{f'(x)} - \frac{1}{\varphi'(x)},$$

у комъ виду иста функція при оной вредности променљивога броя, збогъ $f'(x) = \frac{1}{\infty} = 0$ и $\varphi'(x) = \frac{1}{\infty} = 0$, постає већЂ разрешеногa вида $\frac{0}{0}$.

Тако н. п. ако имамо определити вредность разлике $cot\,(x-1) - \frac{1}{lx}$ за $x = 1$, при комъ є x очевидно $\infty - \infty$, — бытће збогъ $\frac{1}{cot\,(x-1)} = tang\,(x-1)$ и $1 : \frac{1}{lx} = lx$;

$$cot\,(x-1) - \frac{1}{lx} = \frac{1}{tang(x-1)} - \frac{1}{lx} = \frac{lx - tg\,(x-1)}{lx\,.\,tg\,(x-1)},$$

у комъ є садъ виду иста разлика за $x = 1$, очевидно $= \frac{0}{0}$.

Бытће дакле зато, што є диференціалный количникъ броителя $\frac{cos^2\,(x-1) - x}{x\,cos^2\,(x-1)}$, а диференціалный количникъ именителя $\frac{tg\,(x-1) + x\,lx}{x\,cos^2\,(x-1)}$: количникъ тіи количника $\frac{cos^2\,(x-1) - x}{tg\,(x-1) + x\,lx}$, дакле за $x = 1$ вредность вопросне разлике

$$\frac{cos^2\,(1-1) - 1}{tg\,(1-1) + 1\,.\,l1} = \frac{1-1}{0+0} = \frac{0}{0},$$

опетъ неопределѣнога вида, тако да збогъ тога морамо узети друге диференціалне количнике броителя и именителя разломка $\frac{lx - tg\,(x-1)}{lx\,.\,tg\,(x-1)}$, или, што є у ствари сведно, али по послу простіє, да поступамо съ $\frac{cos^2\,(x-1) - x}{tg\,(x-1) + x\,lx}$ као съ функціомъ, коя за известно $x = 1$ быва $\frac{0}{0}$.

Имамо дакле далѣ диференціалный количникъ броителя тога разломка $-2\,cos\,(x-1)\,sin\,(x-1) - 1$, а диференціалный количникъ именителя

$$\frac{1}{cos^2(x-1)} + lx + 1 = \frac{1 + (lx+1)\,cos^2(x-1)}{cos^2(x-1)};$$

зато количникъ та два количника

$$-\frac{2\,cos^3\,(x-1)\,sin\,(x-1) - cos^2 x}{1 + (lx+1)\,cos^2(x-1)},$$

а зато опетъ тражена вредность горнѣ разлике за $x = 1$:

$$\frac{-2\,cos^3 0\,.\,sin\,0 - cos^2 0}{1 + (l1 + 1)\,cos^2 0} = \frac{-1}{2} = -\tfrac{1}{2}.$$

б.) Определьиванѣ *максима'* и *минима'* функція.

1.) Максима и минима функція єдногъ временльивогъ броя.

§ 62.

Ако є функція $f(x)$ за неку известну вредность пременльивога броя x у истый махъ већа одъ $f(x-h)$ и $f(x+h)$, или є у истый махъ маня одъ тій свои оближньи вредностій, и h є притомъ некій врло малый, одъ нулле єдва разликуюћи се брой, — онда каже се: $f(x)$ є за ону вредность одъ x у првомъ случаю **максимумъ** (већина), а у другомъ **минимумъ** (маньина), и то ће рећи, да иста функція за оно x постизава у првомъ случаю єдну одъ найвећи, а у другомъ єдну одъ найманьи свои вредностій, коє уобште може имати. Тако н. п. бyва функція $f(x) = x\,(a - x)$ за $x = \frac{a}{2}$ **максимумъ** єръ є съ тимъ x сама $= \frac{a^2}{4}$, а нѣне две оближнѣ вредности

$$\left(\frac{a}{2} - h\right)\left[a - \left(\frac{a}{2} - h\right)\right] = \left(\frac{a}{2} + h\right)\left[a - \left(\frac{a}{2} + h\right)\right] = \frac{a^2}{4} - h^2$$

очевидно и при найманѣмъ броју h обе манѣ одъ нѣ: напротивъ є вредность функціє $f(x) = 1 - 2x + x^2$ за $x = 1$ **найманя** коя може быти, єръ є съ тимъ x сама $= 0$ или потрвена, а нѣне две оближнѣ вредности обе $= h^2$, дакле и при найманѣмъ h веће одъ нулле.

Ово понятіє максимума и минимума функція подпуно сваћајући, увиђамо:

1.) да є нека функція онда **максимумъ**, ако су разлике између сваке нѣне оближнѣ вредности и нѣ саме обе

одречне, а онда **минимумъ**, кадъ су напротивъ те разлике обе **положне**, т. є. **максимумъ**, ако є за неко x $f(x-h)-f(x)$ и $f(x+h)-f(x)$ **одречно**, а **минимумъ** ако є $f(x-h)-f(x)$ и $f(x+h)-f(x)$ **положно**; дакле

2.) да за **максимумъ** вредность дотичне функціє съ постепенимъ увећаванѣмъ или умаляванѣмъ променљивога броя непремено мора донекле растити па онда падати, а за **минимумъ** донекле падати па онда растити, и

3.) да неке функціє по своіой природи могу имати више максима, или више минима, или и максима и минима, међу коима наравно єданъ максимумъ бытѣе найвећій, а єданъ минимумъ найманьій; напротивъ опетъ неке функціє немаю никаквога ни максимума ни минимума, као н. п. $f(x)=\frac{a}{x}$, коя се при постепеномъ увећаваню броя x безъ престанка умалява, а при постепеномъ умаляваню тога броя безъ края увећава. Найвећій одъ свію **односны** (релативны) максима зове се **абсолутный максимумъ**, а найманьій одъ свію минима **абсолутный минимумъ**.

§ 63.

Нека є a такова вредность променљивога броя x, по коіой бы нѣгова нека функція $f(x)$ могла имати максима или минима, ако є то само иначе могуће.

По телеровомъ образцу добыямо разлике између оближнѣи вредностій функціє $f(x)$ и нѣ саме за ону вредность $x=a$,

$$f(\underset{a}{x}-h)-f(\underset{a}{x})=-\underset{1}{f}(\underset{a}{x})\cdot h+\underset{2}{f}(\underset{a}{x})\cdot\frac{h^2}{2!}-\underset{3}{f}(\underset{a}{x})\cdot\frac{h^3}{3!}+\ldots\ldots \quad \text{и}$$

$$f(\underset{a}{x}+h)-f(\underset{a}{x})=+\underset{1}{f}(\underset{a}{x})\cdot h+\underset{2}{f}(\underset{a}{x})\cdot\frac{h^2}{2!}+\underset{3}{f}(\underset{a}{x})\cdot\frac{h^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots$$

Збогъ изчезљиво мале вредности броя h, првый є чланъ сваке одъ ове две разлике већій одъ сбира осталы чланова, и по тому знакъ є прве разлике одречанъ, а друге положанъ. По предходећемъ §-у пакъ треба да су те разлике за максимумъ или минимумъ непремено еднакога знака. Докле се годъ дакле сачинитель првога члана едне и друге разлике, т. е. првый диференціалный количникъ вопросне функціе при оной вредности броя $x = a$ непотире, дотле вредность исте функціе за ту вредность одъ x неможе быти ни максимумъ ни минимумъ. Потре ли се пакъ тай количникъ съ $x = a$, онда зависи све одъ сачинителя другога члана, т. е. одъ другогъ диференціалногъ количника вопросне функціе, кои е, збогъ свагда положнога броя h^2, у обе разлике еданъ истый.

Испадне ли дакле у томъ случаю за $x = a$ другій диференціалный количникъ вопросне функціе **одречанъ**, онда е вредность исте функціе при $x = a$ **максимумъ**; покаже ли се пакъ тай количникъ съ томъ вредности одъ x **положанъ**, онда е при истой вредности одъ x вредность вопросне функціе **минимумъ**.

Ако бы се съ истомъ вредности $x = a$ осимъ првогъ диференціалногъ количника іошъ и другій потрео, али не уедно и трећій, онда вопросна функція, по тому што е тада трећій членъ сваке одъ оне две разлике већій одъ осталы членова, а у свакой другаче означенъ, опетъ неможе быти ни максимумъ ни минимумъ. Ако пакъ исто x потире и тай трећій диференціалный количникъ, онда зависи опетъ све одъ четвртогъ количника, онако као пређе одъ другога, и вопросна ће функція дакле у томъ случаю за $x = a$ быти максимумъ или минимумъ, почемъ тай количникъ съ истимъ x испадне одречанъ или положанъ.

§ 64.

Испытуюћи на овай начинъ и далѣ, долазимо найпосле до слѣдуюћегъ правила за определыванѣ максима и минима функція едногъ претеннљивогъ броя: **Треба вопросну функцію диференціалити и после испытати, кое вредности премениљивога броя нѣнъ првый диференціалный количникъ потиру? т. е. валя после поставити тай количникъ $= 0$ и определити све корене те едначине; за кою одъ тій вредности премениљивога**

броя постає другій диференціалный количникъ вопросне функціє *одречанъ*, при той є иста функція *максимумъ*, — за кою пакъ тай количникъ быва *положанъ*, при той є иста функція *минимумъ*.

Ако коя одъ тій, изъ єдначине $f_1(x) = 0$ нађены вредности броя x потире и другій диференціалный количникъ, онда у смотреню таковы вредности валя пређи на выше диференціалне количнике дотичне функціє, при чему за безпарне важи све оно што о првомъ, а за парне све што о другомъ.

Ако пакъ єдначина $f_1(x) = 0$ недає никакву вредность за x, или показує какво противусловіє, онда вопросна функція нема за никакву вредность тога броя минимума или максимума, осимъ ако є такова, да се нѣне оближнѣ вредности немогу развити у редове съ положнимъ целимъ степенима вишка h, коє ће быти, ако иста вопросна функція ніє цела раціонална; єръ у томъ случаю може се догодити, да оближнѣ вредности дате функціє садрже башъ за оне вредности пременльивога броя степене вишка h съ деловнимъ изложительима, за коє дата функція постає максимумъ или минимумъ, и зато за тай случай валя понаособъ іошъ слѣдуюће приметити: Ако є h^v првый деловный степенъ вишка у оближньимъ функціяма $f(x-h)$ и $f(x+h)$, онда v или є $>$ или є < 1. Ако є $v > 1$, онда су разлике између оближньи функція и вопросне до онога члана сасвимъ онаке исте, као кадъ садрже саме целе степене одъ h, и дакле у томъ случаю за максимумъ или минимумъ іошъ єднако $f_1(x) = 0$; ако є пакъ $v < 1$, онда, по §-у 31., за ону вредность одъ x, за кою вопросна функція быва максимумъ или минимумъ, постає одма првый диференціалный количникъ $f_1(x) = \frac{1}{0}$; и зато валя при испытиваню функція о коима говоримо, $f_1(x)$ не само $= 0$, но и $= \frac{1}{0}$ поставити, па онда (изъ узрока што насъ диференціалный рачунъ у таковомъ случаю издає) у датой $f(x)$ узъ сваку одтудъ нађену вредность одъ x узети єданпутъ $-h$, а другипутъ $+h$, и извидити, да ли тиме образоване оближнѣ вредности $f(x-h)$ и $f(x+h)$ испадаю обе **манѣ** одъ $f(x)$

при узетой вредности одъ x, дакле вопросна функція **максимумъ**. или обе веће одъ $f(x)$ при узетой вредности одъ x, дакле $f(x)$ **минимумъ**.

Све ово обясниt'ће веьма слѣдующи

Примери.

§ 65.

1.) Пыта се за коє вредности броя x постає функція $z = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$ максимумъ или минимумъ?

Диференціалећи ту функцію налазимо

$$\frac{dz}{dx} = x^3 - 2x^2 - x + 2, \quad \text{а}$$

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = 3x^2 - 4x - 1.$$

Поставляюћи пакъ $\frac{dz}{dx} = 0$, слѣдую одтудъ за x вредности $x = -1$, $+1$ и 2.

Съ првомъ одъ тій вредности постає

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = 3 + 4 - 1 = 6.$$

съ другомъ $$\frac{{}^2dz}{d^2x} = 3 - 4 - 1 = -2.$$

съ трећомъ $$\frac{{}^2dz}{d^2x} = 12 - 8 - 1 = 3.$$

Дакле є вопросна функція при $x = 1$ **максимумъ**, а при $x = -1$ и 2 **минимумъ**.

2.) Има ли функція $z = x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ максима или минима, и за коє вредности броя x?

При той є функціи $\frac{dz}{dx} = 2x + 2$, а $\frac{{}^2dz}{d^2x} = 2$, брой **положанъ**, а одъ x **независанъ**, положанъ дакле при свакой вредности одъ x, па и при оной коя слѣдуе изъ єдначине $\frac{dz}{dx} = 2x + 2 = 0$, т. є. при $x = -1$; и по тому вопросна є функція z за $x = 1$ **минимумъ**, а максимума нема никаквога.

3.) Има ли каковы вредностій броя x, за коє бы функція $z = 2x^6 - 15x^4 + 24x^2 - 7$ была максимумъ или минимумъ, и коє су?

Диференціалећи добыямо

$$\frac{dz}{dx} = 12x^5 - 60x^3 + 48x, \text{ а}$$

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = 60x^4 - 180x^2 + 48;$$ поставляюћи пакъ

$\frac{dz}{dx} = 12x^5 - 60x^3 + 48x = x(x^4 - 5x^2 + 4) = 0$, добыямо за x вредности 0, -1, $+1$, -2 и $+2$.

Съ првомъ одъ тій вредностій постає

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = +48,$$

съ другомъ . . . . . $= -72$,

съ трећомъ . . . . . $= -72$,

съ четвртомъ . . . . $= +288$,

съ петомъ . . . . . . $= +288$.

Вопросна є функція дакле при $x = -1$ и $+1$ **максимумъ**, а при $x = 0$, -2 и $+2$ **минимумъ**.

4.) Траже се максима и минима функ. $z = x^4 - x^3 + 2$, и вредности одъ x, за коє иста функція быва єдно или друго.

Ту є $\frac{dz}{dx} = 4x^3 - 3x^2$;

$$\frac{{}^{2}dz}{d^{2}x} = 12x^2 - 6x.$$

Ставляюћи $\frac{dz}{dx} = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3) = 0$, слѣдую за x вредности 0 двапутъ, и $\frac{3}{4}$.

Ова друга вредность $x = \frac{3}{4}$; дає

$$\frac{{}^{2}dz}{d^{2}x} = 12 \,.\, \frac{9}{16} - 6 \,.\, \frac{3}{4} = \frac{27}{4} - \frac{18}{4} = \frac{9}{4};$$

дакле є вопросна функція при томъ x **минимумъ**.

Съ првомъ вредности $x = 0$ пакъ потире се и другій диференціалный количникъ, збогъ чега морамо испытати слѣдуюће выше количнике.

Имамо $\frac{{}^{3}dz}{d^{3}x} = 24x - 6$. Но тай съ $x = 0$ непостає и самъ $= 0$. Зато вопросна функція за $x = 0$ неможе быти ни максимумъ ни минимумъ.

5.) За кое вредности броя x постає функція

$$z = (1 - x)(1 + x^2) - (1 + x)(1 - x^2) - 2x(x - 1) + a$$

максимумъ или минимумъ?

Диференціалећи добыямо

$$\frac{dz}{dx} = -(1+x^2) + 2x(1-x) - (1-x^2) + 2x(1+x) - 2(x-1)$$
$$- 2x$$

$= 0$ самъ по себи. То ће рећи тай є количникъ при свакой вредности променљивога броя раванъ нулли, и зато вопросна функція неможе имати ни максима ни минима. И доиста, ако у њой назначене рачуне свршимо, потиру се сви променљиви чланови међу собомъ, и остає само сталный брой a, кои наравно као такавъ неможе быти ни већій ни мањій.

6.) Извидити имали функція $z = \frac{x-1}{x(x+1)}$ максима или минима, и за кое вредности броя x.

Нѣнъ є првый диференціалный количникъ

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x^2-2x-1}{x^2(x+1)^2}, \text{ а другій}$$

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = -\frac{x^2(x+1)^2 . 2(x-1) - (x^2-2x-1)\left[2x(x+1)^2+2x^2(x+1)\right]}{x^4(x+1)^4}$$

$$= -\frac{2x(x^2-1) - 2(x^2-2x-1)(2x+1)}{x^3(x+1)^3}$$

$$= -\frac{2(x^3-3x^2-3x-1)}{x^3(x+1)^3}.$$

Поставляюћи првый $= 0$, слѣдує $x^2-2x-1=0$, и одтудъ

$$x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Како є пакъ вопросна функція деловна, то треба да узмемо іошъ $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{0}$, т. є. $\frac{dx}{dz} = 0$, одкудъ добыямо $x^2(x+1)^2 = 0$, дакле $x(x+1)=0$, и одтудъ $x=0$ и $=-1$.

Съ првомъ вредности $x = 1+\sqrt{2}$ бyва

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = -\frac{12+8\sqrt{2}}{(7+5\sqrt{2})(20+14\sqrt{2})}$$

одречанъ, и зато вопросна функція при той вредности одъ x **максимумъ.**

Съ другомъ є вредности $x = 1-\sqrt{2}$ другій диференціалный количникъ

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = -\frac{12-8\sqrt{2}}{(7-5\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})},$$

збогъ $5\sqrt{2} > 7$ а $20 > 14\sqrt{2}$, **положанъ**, зато пакъ вопросна функція при той вредности одъ x **минимумъ.**

Съ трећомъ вредности $x = 0$ имамо две ближнѣ вредности

$$\frac{0 - h - 1}{(0 - h)(0 - h + 1)} = \frac{-(h + 1)}{-h(1 - h)} = \frac{h + 1}{h(1 - h)}, \text{ а}$$

$$\frac{0 + h - 1}{(0 + h)(0 + h + 1)} = \frac{h - 1}{h(h + 1)} = \frac{-(1 - h)}{h(h + 1)},$$

т. є. една **положна**, а друга **одречна**, и зато вопросна функція при той вредности одъ x ни максимумъ ни минимумъ.

Найпосле съ $x = -1$ ближнѣ две вредности една

$$\frac{-1 - h - 1}{(-1 - h)(-1 - h + 1)} = \frac{-(2 + h)}{-(1 + h).(-h)} = -\frac{2 + h}{(1 + h)h}$$

одречна, а

друга $\frac{-1 + h - 1}{(-1 + h)(-1 + h + 1)} = \frac{-(2 - h)}{-(1 - h)h} = \frac{2 - h}{(1 - h)h}$ **положна**,

и по тому вопросна функція и при томъ x ни максимумъ ни минимумъ.

7.) Пыта се има ли функція $z = x^{\frac{1}{2}}.(a - x)^{\frac{2}{3}}$ максима или минима, и за кое вредности одъ x?

Ту є

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.(a - x)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}.(a - x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3a - 7x}{6x^{\frac{1}{2}}.(a - x)^{\frac{1}{3}}},$$

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = \frac{-42x^{\frac{1}{2}}.(a - x)^{\frac{1}{3}} - 6(3a - 7x)\left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.(a - x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}.(a - x)^{-\frac{2}{3}}\right]}{36x.(a - x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{-42x^{\frac{1}{2}}.(a - x)^{\frac{1}{3}} - 6(3a - 7x).\left[\frac{(a - x)^{\frac{1}{3}}}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3(a - x)^{\frac{2}{3}}}\right]}{36x.(a - x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{-7x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{3}} - (3a-7x) \cdot \dfrac{3(a-x)-2x}{6x^{\frac{1}{2}} \cdot (a-x)^{\frac{2}{3}}}}{6x \cdot (a-x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{-42x(a-x)-(3a-7x)(3a-5x)}{36x^{\frac{3}{2}} \cdot (a-x)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{7x^2-6ax-9a^2}{36x^{\frac{3}{2}} \cdot (a-x)^{\frac{4}{3}}} \cdot \text{*)}$$

Поставляюћи $\frac{dz}{dx} = 0$, добыямо єдначину

$$3a - 7x = 0, \quad \text{и одтудъ}$$

$$x = \frac{3}{7}a$$

Съ овомъ є вредности другій диференціалный количникъ

$$\frac{d^2z}{d^2x} = \frac{\frac{9}{7}a^2 - \frac{18}{7}a^2 - 9a^2}{36\left(\frac{3}{7}a\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(a - \frac{3}{7}a\right)^{\frac{4}{3}}} = - \frac{72a^2}{7 \cdot 36\left(\frac{3}{7}a\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{4}{7}a\right)^{\frac{4}{3}}}$$

очевидно одречанъ, и зато вопросна функція при той вредности одъ x максимумъ.

Иста є функція ирраціонална. Морамо дакле нѣнъ првый диференціалный количникъ $\frac{dz}{dx}$ іошъ ставити $= \frac{1}{0}$. Одтудъ слѣдуе єдначина

$$6x^{\frac{1}{2}} \cdot (a-x)^{\frac{1}{3}} = 0, \quad \text{а изъ те}$$

$$x = 0 \text{ и } x = a.$$

---

*) При овомъ и пређашнѣмъ примеру ставили смо цео посао другогъ диференціалногъ количника само збогъ тога, да бы болѣ увидили оно што ћемо показати у слѣдуюћемъ §у.

Образуюћи обližнѣ две вредности дате функ. при свакой одъ ове две вредности броя x, имамо при првой

$$(0-h)^{\frac{1}{2}}.(a-0+h)^{\frac{2}{3}}=(-h)^{\frac{1}{2}}.(a+h)^{\frac{2}{3}} \quad \text{єдна } \textbf{мнима},$$

$$\text{a} \quad (0+h)^{\frac{1}{2}}.(a-0-h)^{\frac{2}{3}}=h^{\frac{1}{2}}.(a-h)^{\frac{2}{3}} \quad \text{друга } \textbf{положна}.$$

вопросна функція дакле прелази за то $x=0$ съ мнимога у реелно, то ће рећи: она постизава при той вредности одъ x свою **граничну** вредность.

При другой вредности $x=a$ имамо

$$(a-h)^{\frac{1}{2}}.(a-a+h)^{\frac{2}{3}}=(a-h)^{\frac{1}{2}}.h^{\frac{2}{3}} \quad \text{и}$$

$$(a+h)^{\frac{1}{2}}.(a-a-h)^{\frac{2}{3}}=(a+h)^{\frac{1}{2}}.(-h)^{\frac{2}{3}},$$

т. є. обе облиžнѣ вредности **положне**, и зато вопросна функція при той вредности $x=a$ быва **минимумъ**.

§ 66.

Другій диференціалный количникъ, кои са своимъ знакомъ решава, да ли дата нека функція $z=f(x)$ постає за кою изъ єдначине првогъ диференціалногъ количника нађену вредность променљивогъ броя x максимумъ или минимумъ, испада при деловнимъ и ирраціоналнимъ функціяма понайвише доста сложенъ, и самъ є посао, коимъ до нѣга долазимо, обично доста дангубанъ. Зато ћемо да покажемо, како и на основу чега можемо лакше докучити знакъ тога количника при известной некой вредности променљивога броя, добывену изъ єдначине $\frac{dz}{dx}=0$.

Ако представимо бронтеля и именителя првогъ диференціалногъ количника дате функціє z односно са X_1 и X_2, имамо

$$\frac{{}^2dz}{d^2x}=\frac{d\,\frac{X_1}{X_2}}{dx}=\frac{X_2\,.\,\frac{d\,X_1}{dx}-X_1\,.\,\frac{d\,X_2}{dx}}{X_2^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{d\,X_1}{dx}\right)}{X_2}-\frac{X_1}{X_2}\,.\,\frac{\left(\frac{d\,X_2}{dx}\right)}{X_2}\,.$$

Ако пакъ разсудимо, да мы знакъ тога диференціалногъ количника испытуемо за оне вредности променљивогъ броя, кое првый диференціалный количникъ потиру, т. є. при коима є $\frac{dz}{dx}=\frac{X_1}{X_2}=0$: онда увиђамо, да за такове вредности остаε само

$$\frac{{}^2dz}{d^2x}=\frac{\left(\frac{d\,X_1}{dx}\right)}{X_2}\,,$$

изразъ, кои є и простіи и лакше се добыя, него целый диференціалный количникъ безъ обзири на то.

При функціама дакле о коима говоримо, ніє нуждно направити и испытати цео другій диференціалный количникъ, но само овай простіи изразъ, коме є онъ съ пређашнимъ обзиромъ раванъ, и кои ніє ништа друго, но количникъ одъ диференціалногъ количника броителя првогъ диференціалногъ количника вопросне функціє, и именителя тогъ истогъ диференціалногъ количника.

Тако поступаюћи имали бы при 6. примеру пређашнѣгъ §а, при комъ є

$$\frac{dz}{dx}=\frac{X_1}{X_2}=-\frac{x^2-2x-1}{x^2\,.\,(x+1)^2}\,,$$

за оне вредности броя x, за кое є истый количникъ $=0$, т. є. за $x=1\pm\sqrt{2}$,

$$\frac{{}^2dz}{d^2x}=-\frac{\left[\frac{d\,(x^2-2x-1)}{dx}\right]}{x^2.\,(x+1)^2}=-\frac{2x-2}{x^2.\,(x+1)^2}\,,$$

кои изразъ при $x = 1 + \sqrt{2}$ постаѥ

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = -\frac{2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^3 . (2+\sqrt{2})^2}$$ **одречанъ**,

а при $x = 1 - \sqrt{2}$

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = \frac{2\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})^2 . (2-\sqrt{2})^2}$$ **положанъ**,

каогодъ што смо нашли у поменутомъ §у, али овде очевидно млого простіѥ. —

Съ истомъ, ако не можда съ іошъ већомъ користи можемо употребити ову приметбу и при ирраціоналнимъ функціяма, гди првый диференціалный количникъ свагда мора быти деловна функція.

Тако н. п. имали бы по тому при последнѣмъ примеру прећашнѣгъ §а, за оне вредности броя x, при коима ѥ $\frac{dz}{dx} = 0$, збогъ $\frac{dz}{dx} = \frac{3a - 7x}{6x^{\frac{1}{2}} . (a - x)^{\frac{1}{3}}}$:

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = -\frac{7}{6x^{\frac{1}{2}} . (a - x)^{\frac{1}{3}}},$$

кои за $x = \frac{3}{7}a$ постаѥ $= -\frac{7}{6\left(\frac{3}{7}a\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{4}{7} \cdot a\right)^{\frac{1}{3}}}$ **одречанъ**,

као и тамо, тако да ѥ по тому вопросна функція **минимумъ**, али смо ово дознали очевидно съ млого манѣ труда.

§ 67.

Испытиванѣ максима и минима **скривены** функція быва на основу § 48. сасвимъ на истый начинъ, као и одкривены функція. Т. ѥ. диференціалмо дату скривену функцію по поменутомъ §у, као да ѥданъ премен.ьивый брой одъ другога независи: ставлямо диференціалный количникъ зависногъ променљивогъ броя по независномъ $=0$; определюємо одтудъ помоћу дате функціє вредности променљивы броєва, и испытуємо после какавъ испада съ ньима двугій диференціалный количникъ. За коє є одъ тіи вредностій овай количникъ **одречанъ**, за те є зависный брой, као функція независнога, **максимумъ**, — за коє пакъ тай количникъ испада **положанъ**, за те є истый брой **минимумъ**.

Слѣдуюћій примеръ обяснитће ово больма.

Пыта се, за коє вредности броя x постає одъ нѣга зависный брой y максимумъ или минимумъ, ако є

$$y^2 - 2\,m\,x\,y + x^2 - a^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ (1.$$

Диференціалећи имамо

$$2\,y\,dy - 2\,m\,(y\,dx + x\,dy) + 2\,x\,dx = 0, \quad \text{и одтудъ}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx}.$$

Поставляюћи овай количникъ $=0$, слѣдує

$$my - x = 0, \quad \text{и одтудъ}$$

$$y = \frac{x}{m},$$

а съ овомъ вредности изъ дате єдначине 1).

$$x = \frac{ma}{\pm\sqrt{1-m^2}}, \ \text{дакле} \ y = \frac{a}{\pm\sqrt{1-m^2}} \quad \cdots\cdots (2.$$

Да бы садъ видили, да ли є y, као функція одъ x, при овой нађеной вредности броя x максимумъ или минимумъ, треба намъ другій диференціалный количникъ. Тай є уобште

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = \frac{x\,(1-m^2)\cdot\dfrac{dy}{dx} + y\,(m^2-1),}{(y-mx)^2},$$

за нађену вредность одъ x пакъ, коя првый диференціалный количникъ $\frac{dy}{dx}$ потире,

$$\frac{{}^{2}dy}{d^{2}x} = \frac{y\,(m^{2} - 1)}{(y - mx)^{2}} = -\frac{1}{a\sqrt{1-m^{2}}}.$$

Овай є другій диференціалный количникъ дакле за $x = \frac{m\,a}{+\sqrt{1-m^{2}}}$ **одречанъ**, а за $x = \frac{m\,a}{-\sqrt{1-m^{2}}}$ **положанъ**, и по тому y као функція одъ x за прву вредность **максимумъ**, а за другу **минимумъ**.

Но првый є диференціалный количникъ функція деловна. Морамо га дакле іошъ метнути $= \frac{1}{0}$, одкуда слѣдує $y - mx = 0$, т. є. $y = mx$.

За ово y имамо по датой єдначини 1.)

$$x = \frac{a}{\pm\sqrt{1-m^{2}}}, \text{ дакле } y = \frac{m\,a}{\pm\sqrt{1-m^{2}}} \quad . \; . \; . \; . \quad (3.$$

Да бы садъ дознали є ли y при овомъ x максимумъ или минимумъ, нека є вишакъ броя y, збогъ изчезљивогъ вишка h броя x, k. Имамо за оближнѣ вредности дате функціє съ нађенимъ вредностима одъ x и y

$$k^{2} - 2\,m\,h\,k + 2\,a\,h\sqrt{1-m^{2}} + h^{2} = 0, \quad \text{и одтудъ}$$

$$k = mh \pm \sqrt{(m^{2} - 1)h^{2} - 2\,ah\sqrt{1 - m^{2}}},$$

кои изразъ показує ясно, да є k при $x = \frac{a}{+\sqrt{1-m^{2}}}$ **доистно**, ако є h **одречно**, а **мнимо**, ако є h положно; напротивъ k є при $x = \frac{a}{-\sqrt{1-m^{2}}}$ **мнимо**, ако є h **одречно**, а **доистно**, ако є h **положно**.

Оближнѣ су вредности броя y дакле, за обе вредности броя $x = \frac{a}{\pm\sqrt{1-m^{2}}}$, єдна **доистна**, а друга **мнима**, и по тому y ніє ни за єдно ни за друго x максимумъ или минимумъ, него постизава за обе **граничне** вредности.

§ 68.

Осимъ показаны примера у предходећимъ §§-ма, да разрешимо за упражненѣ у овомъ важномъ предмету, іошъ неколико, колико занимљивы, толико и полезны

Задатака.

1.) **Брой a да се раздели на две части тако, да сбиръ квадрата исты нѣговы частій буде** *найманьій.*

Ставлюћи сбиръ квадрата тражены частій датога броя $= v$, а єдну одъ тіи частій x, бытћe она друга $(a - x)$, а

$$v = x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

Диференціалећи слѣдує

$$\frac{dv}{dx} = 4x - 2a, \frac{{}^{2}dv}{d^2x} = 4;$$

првый диференціалный количникъ пакъ, ставлѣнъ $= 0$, дає $x = \frac{a}{2}$.

Но другій є диференціалный количникъ **сталанъ** брой, а **положанъ**; остає дакле положанъ при свакой вредности броя x, па и при оной, съ коіомъ вопросный сбиръ само може быти максимумъ или минимумъ.

По тому сбиръ v є за $x = \frac{a}{2}$ **минимумъ**, то ће рећи: брой a валя **преполовити**, да бы сбиръ квадрата нѣговы частій быо **найманьій**.

2.) **Разделити брой a на две части тако, да производъ квадрата єдне съ кубомъ друге буде** *найвећій.*

Нека є тай производъ y, а єдна часть броя a нека є x; треба да буде

$$y = x^2 . (a - x)^3 \quad \textbf{максимумъ.}$$

Имамо $\frac{dy}{dx} = 2x.(a-x)^3 - 3x^2.(a-x)^2 = x(a-x)^2.(2a-5x)$.

То ставляюћи $= 0$, слѣдуе $x = 0$, $x = a$ и $x = \frac{2}{5}a$.

Другій є диференціалный количникъ притомъ

$$\frac{{}^{2}dy}{d^2x} = (a-x)^2.(2a-5x) - 2x(a-x)(2a-5x) - 5x(a-x)^2$$

Овай количникъ постає за трећу вредность одъ x, т. є. за $x = \frac{2}{5}a$,

$$\frac{{}^{2}dy}{d^2x} = -2a \cdot \left(\frac{3}{5}a\right)^2$$ **одречанъ**, дакле є y за то x **максимумъ**; то ће рећи, да бы производъ одъ квадрата єдне части броя a, съ кубомъ оне друге нѣгове части быо найвећій, мора быти прва часть $\frac{2}{5}a$, а друга $\frac{3}{5}a$.

Оне друге две вредности за x, т. є. $x = 0$ и $x = a$, очевидно неодговараю задатку.

3.) **Дата є права $\overline{AB}$, и изванъ нѣ имамо две точке P и Q. Да се изнађе у истой правой такова точка M, да сбиръ на ню повучены прави’ изъ P и Q буде** *наймањій*. (Види слику на страни.)

Спустимо изъ точкій P и Q управне $\overline{Pa} = p_1$ и $\overline{Qb} = p_2$ на дату праву $\overline{AB}$. Быт’ће, збогъ тога што є положай исты точкій према правой $\overline{AB}$ утврђенъ, обе те управне p_1 и p_2, заєдно съ ньновимъ међусобнимъ разстоянѣмъ $\overline{ab} = \alpha$, познате. Ставимо іошъ одстоянѣ вопросне точке M одъ a, $= x$. Быт’ће

$$\overline{PM} = \sqrt{p_1^2 + x^2}, \quad \overline{QM} = \sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2},$$

дакле вопросный сбиръ

$$y = \overline{PM} + \overline{QM} = \sqrt{p_1^2 + x^2} + \sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2}.$$

Диференціалећи имамо садъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{p_1^2 + x^2}} - \frac{\alpha - x}{\sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2}} = \frac{x}{\overline{PM}} - \frac{\alpha - x}{\overline{QM}}$$

$$= \frac{\overline{aM}}{\overline{PM}} - \frac{\overline{bM}}{\overline{QM}}.$$

Ставляюћи ово $= 0$, слѣдуе

$$\frac{\overline{aM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{bM}}{\overline{QM}},$$

изъ чега видимо, да вопросный сбиръ y само тако може быти минимумъ, ако су троугли PaM и QbM подобни; да ли є пакъ и притомъ, показат'ће другій диференціалный количникъ. Тай є

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{\sqrt{p_1^2 + x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{p_1^2 + x^2}}}{p_1^2 + x^2} + \frac{\sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2} - \frac{(\alpha - x)^2}{\sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2}}}{p_2^2 + (\alpha - x)^2}$$

$$= \frac{p_1^2}{(p_1^2 + x)^2 \sqrt{p_1^2 + x^2}} + \frac{p_2^2}{[p_2^2 + (\alpha - x)^2] . \sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2}},$$

и испада съ вредности $x = \frac{\alpha p_1}{p_1 + p_2}$, коя слѣдуе изъ єдначине $\frac{dy}{dx} = 0$, очевидно **положанъ**. Слѣдователно y є за то x доиста **минимумъ**.

Горнѣ докученѣ, да троугли PaM и QbM мораю быти подобни, дакле **угли** PMa и QMb **равни**, подае за налазакъ вопросне точке M слѣдуюћій простый стройный начинъ: продужити валя єдну одъ управни', н. п. $\overline{Qb}$, па онда, одсекавъ $\overline{bq} = \overline{bQ}$, точку q саставити съ P; пресекъ те праве qP съ датомъ правомъ $\overline{AB}$ быт'ће тражена точка M, єръ на тай начинъ постае $< QMb = qMb = PMa$. (Слика на страни.)

4.) **Преко условлѣне точке M између кракова датога угла AOB, положити єдну праву $\overline{PQ}$ тако, да одсеченый троугалъ OPQ буде найманьій.** (Види слику на страни.)

Повуцимо изъ M праву $\overline{MC} \parallel \overline{OB}$, а $\overline{MD} \perp \overline{OA}$; бытће праве $\overline{MD}$ и $\overline{OC}$ известне и сталне. Нека є ради краткоће $\overline{OC} = a$, $\overline{MD} = b$, садржай вопроснога троугла $OPQ = y$, найпосле $\overline{CP} = x$.

Троугли су CPM и OPQ подобни, а садржай првога равань є $\frac{1}{2} bx$. Има се дакле

$$y : \tfrac{1}{2} bx = \overline{OP}^2 : \overline{CP}^2 = (\overline{OC} + \overline{CP})^2 : \overline{CP}^2$$

$$= (a + x)^2 : x^2, \text{ и одтудъ слѣдує}$$

$$y = \frac{b}{2} \cdot \frac{(a + x)^2}{x}.$$

Диференціалећи садъ ову єдначину добыямо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2} \cdot \frac{2x(a + x) - (a + x)^2}{x^2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{x^2 - a^2}{x^2};$$

то пакъ ставлѣно $= 0$, дає $x = \pm a$.

Другій є диференціалный количникъ

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = \frac{b}{2} \cdot \frac{2x^3 - 2x(x^2 - a^2)}{x^4} = \frac{a^2 b}{x^3},$$

кои съ $x = + a$ испада **положанъ.**

Вопросный є дакле троугалъ **найманьій** и као такавъ $= 2ab$, ако є $x = a$.

За ону другу вредность $x = - a$ показує се истый троугалъ као *максимумъ*; но то неможе быти, єръ бы тай максимумъ быо $y = \frac{b}{2} \cdot \frac{(a - a)^2}{-2a} = 0$, т. є. маньій одъ нађеного минимума. Смисао тога максимума извидити, оставлямо прилѣжномъ ученику.

5.) **Дато є окружіє полупречника** r. **Да се извади одъ истога толико парче** ACB, **како бы садржай купе (конуса), коя ће добыти остатакъ окружія за површіє, быо найвећій.** (Види слику на страни.)

Нека є лукъ ADB, кои ће образоватя периферію основице вопросне купе, $= x$; быт'ће полупречникъ исте основице $= \frac{x}{2\pi}$. Како ће пакъ полупречникъ r датога окружія быти страна (ивица) тражене купе, то ове высина мора быти

$$= \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{4r^2\pi - x^2}.$$

Представляюћи дакле купе садржай, кои мора быти максимумъ, съ y, имамо

$$y = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{4r^2\pi - x^2} = \frac{1}{24} \cdot \frac{x^2}{\pi^2} \cdot \sqrt{4r^2\pi - x^2}.$$

Ово диференціалећи слѣдує

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{24\pi^2} \cdot \left[2x\sqrt{4r^2\pi^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{4r^2\pi^2 - x^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \cdot \frac{8r^2\pi^2 x - 3x^3}{\sqrt{4r^2\pi^2 - x^2}}.$$

Тай количникъ пакъ ставлѣнъ $= 0$, дає єдначину

$$x\,(8r^2\pi^2 - 3x^2) = 0,$$ изъ коє слѣдує

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = 2r\pi \,.\, \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Прва одъ овы вредностій, као задатку неодговарајућа, одпада, друга пакъ дає другій диференціалный количникъ (обзиромъ на § 66.)

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = \frac{8r^2\pi^2 - 9x^2}{\sqrt{4r^2\pi^2 - x^2}} = \frac{8r^2\pi^2 - 24r^2\pi^2}{\sqrt{4r^2\pi^2 - 4r^2\pi^2 \cdot \frac{2}{3}}},$$

очевидно одречанъ, тако дакле, да є y за то x **максимумъ.**

6.) **Изнаћи купу окружне основице, коя є при датомъ површію найвећега садржая.**

Означуюћи полупречникъ вопросне купе съ x, высину са z, а познато површіє съ a^2: мора быти

$$a^2 = 2\pi x \cdot \tfrac{1}{2} \sqrt{x^2 + z^2} = \pi x \sqrt{x^2 + z^2},$$

одкуда слѣдує

$$z = \frac{1}{\pi x} \cdot \sqrt{a^4 - \pi^2 x^4}\ ,$$

тако да садъ имамо садржай купе, кои треба да буде максимумъ, представляюћи га съ y;

$$y = \frac{1}{3} x^2 \pi \cdot \frac{1}{\pi x} \sqrt{a^4 - \pi^2 x^4} = \frac{1}{3} x \sqrt{a^4 - \pi^2 x^4}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{a^4 x^2 - \pi^2 x^6}.$$

Диференціалећи быва

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^4 x - 3\pi^2 x^5}{\sqrt{a^4 x^2 - \pi^2 x^4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^4 x - 3\pi^2 x^5}{3y}.$$

Ово пакъ поставлѣно $= 0$, дає $x = 0$ и $x = \frac{a}{\sqrt{\pi\sqrt{3}}}$.

Прва вредность $x = 0$ одпада, єръ незадоволява задатакъ; съ другомъ пакъ постає другій диференціалный количникъ (обзиромъ на § 66.)

$$\frac{^2dy}{d^2x} = \frac{1}{9} \cdot \frac{a^4 - 15\pi^2 x^4}{y} = \frac{a^4 - 5a^4}{9y},$$

одречанъ, такавъ дакле да є вопросна купа y, при той вредности нѣнога полупречника x, каошто се захтевало, **найвећа**.

2.) Максима и минима функція два пременльива броя.

§ 69.

Ако є $v = f(x, y)$ уобште нека функція два, међу собомъ независна броя x и y, па хоћемо испытати, за коє вредности тій броєва иста функція постає максимумъ или минимумъ, има се приметити слѣдуюће.

§ 70.

Уобште є, ако у датой фунцкіи прелази x у $x + h$ а y у $y + k$, замењуюћи $f(x + h, y + k)$ ради краткоће съ V, по § 37.

$$V - v = \left(\frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k\right) + \ldots\ldots$$

Ако ће пакъ дата функція v за какве вредности броєва x и y постати максимумъ или минимумъ, мораю быти нѣне оближнѣ вредности при тима вредностима пременльивы броєва, у првомъ случаю све манѣ, а у другомъ све веће одъ нѣ. Тій нѣны оближньи вредностій има свега четири, т. є.

$$V_1 = f(x - h, y + k) \text{ са } V_2 = f(x + h, y + k) \text{ и}$$

$$V_3 = f(x - h, y - k) \text{ са } V_4 = f(x + h, y - k),$$

при чему h и k єсу изчезльиви броєви.

За максимумъ дакле мораю быти све четири функціє V_1, V_2, V_3 и V_4 манѣ, а за минимумъ све четири веће одъ v; а то ће наравно онда быти, ако се покажу разлике $V_1 - v$, $V_2 - v$, $V_3 - v$ и $V_4 - v$ при дотичнимъ вредностима пременльивы броєва x и y, у првомъ случаю све четири **одречне**, а у другомъ случаю све заедно **положне**.

Како су пакъ те разлике по горнѣмъ образцу

$$V_1 - v = \left[- \frac{dv}{dx} \cdot h + \frac{dv}{dy} \cdot k\right] + \ldots\ldots$$

$$V_2 - v = \left[+ \frac{dv}{dx} \cdot h + \frac{dv}{dy} \cdot k\right] + \ldots\ldots$$

$$V_3 - v = \left[- \frac{dv}{dx} \cdot h - \frac{dv}{dy} \cdot k\right] + \ldots\ldots$$

$$V_4 - v = \left[+ \frac{dv}{dx} \cdot h - \frac{dv}{dy} \cdot k\right] + \ldots\ldots,$$

и сваке знакъ, при изчезљиво малимъ броєвима h и k, зависи одъ првога члана, а ти су први чланови свагда разно означени: то є лако увидити, да вопросна **функція** v **неможе никако быти ни максимумъ ни минимумъ, докле годъ се сваке првый чланъ, съ истимъ вредностима одъ** x **и** y, **непотру**; а то опетъ очевидно ніє могуће иначе, него ако є свакій одъ почастны првы диференціалны количника функціє v, при тима вредностима одъ x и y, за себе раванъ нулли, т. є. само ако є

$$\frac{dv}{dx} = 0 \text{ и уєдно } \frac{dv}{dy} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.$$

§ 71.

Догоди ли се то пакъ, онда могућность максима и минима функціє v зависи одъ знака дрвги чланова оны разлика, као сада найвећи одъ осталы.

У томъ случаю стоє те разлике овако:

$$V_1 - v = \frac{1}{2}\left[\frac{{}^2dv}{d^2x} \cdot h^2 - 2\,\frac{{}^2dv}{dxdy} \cdot hk + \frac{{}^2dv}{d^2y} \cdot k^2\right] + \ldots\ldots$$

$$V_2 - v = \frac{1}{2}\left[\frac{{}^2dv}{d^2x} \cdot h^2 + 2\,\frac{{}^2dv}{dxdy} \cdot hk + \frac{{}^2dv}{d^2y} \cdot k^2\right] + \ldots\ldots$$

$$V_3 - v = \frac{1}{2}\left[\frac{{}^2dv}{d^2x} \cdot h^2 + 2\,\frac{{}^2dv}{dxdy} \cdot hk + \frac{{}^2dv}{d^2y} \cdot k^2\right] + \ldots\ldots$$

$$V_4 - v = \frac{1}{2}\left[\frac{{}^2dv}{d^2x} \cdot h^2 - 2\,\frac{{}^2dv}{dxdy} \cdot hk + \frac{{}^2dv}{d^2y} \cdot k^2\right] + \ldots\ldots$$

Други су чланови дакле у томъ случаю свега само двояки, т. є.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\overset{2}{d}v}{d^2x}\cdot h^2 \pm 2\,\frac{\overset{2}{d}v}{dx\,dy}\cdot hk + \frac{\overset{2}{d}v}{d^2y}\cdot k^2\right],$$

н по тому вопросна функція v у истомъ случаю, за дотичне вредности броєва x и y, быт’ће максимумъ или минимумъ, почемъ тай двоякій изразъ за исте вредности одъ x и y, испадне одречанъ или положанъ.

§ 72.

Да бы сада лакше могли увидити, подъ коимъ условіяма може быти єдно, и подъ коимъ друго, то заменимо найпре, ради краткоће, $\frac{\overset{2}{d}v}{d^2x}$ съ m, $\frac{\overset{2}{d}v}{dx\,dy}$ съ n, а $\frac{\overset{2}{d}v}{d^2y}$ съ p, па онда додаймо ономъ двоякомъ изразу решаваюћегъ другогъ члана и одузмимо одъ нѣга єданпутъ $\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{m}\cdot k^2$, а другипутъ $\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{p}\cdot h^2$ Быт’ће

$$\frac{1}{2}(mh^2 \pm 2\,n\,hk + p\,k^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{m}\cdot k^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{m}\cdot k^2$$

$$= \frac{1}{2}\,m\,(h \pm \frac{n}{m}\,k)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{mp-n^2}{m}\cdot k^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;(\alpha.,$$

или

$$\frac{1}{2}(mh^2 \pm 2\,n\,hk + p\,k^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{p}\cdot h^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{p}\,h^2$$

$$= \frac{1}{2}\,p\,(k \pm \frac{n}{p}\,h)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{mp-n^2}{p}\cdot h^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;(\beta.,$$

изъ чега опетъ видимо, да знакъ другога члана зависи само одъ m, p, и разлике $mp - n^2$, єръ $(h \pm \frac{n}{m}\,k)^2$ и k^2, или $(k \pm \frac{n}{p}\,h)^2$ и h^2, на нѣга, као свагда положни броєви, никако невліяю.

То приметивши увиђамо лако

изъ $\alpha.$): решаваюћій изразъ испада **одречанъ**, и зато вопросна функція **максимумъ**, ако є за дотичне вредности одъ x и y, m **одречно**, и притомъ $mp - n^2 = 0$ или такођеръ **одречно**; напротивъ истый изразъ бытћe **положанъ**, и зато вопросна функція **минимумъ**, ако є m **положно**, и притомъ $mp - n^2 = 0$ или такођеръ **положно**; —

изъ $\beta.$): решаваюћій изразъ бытћe **одречанъ**, и зато вопросна функція **максимумъ**, ако є p **одречно** и притомъ $mp - n^2 = 0$ или такођеръ **одречно**, напротивъ истый изразъ бытћe **положанъ**, и збогъ тога вопросна функція **минимумъ**, ако є p **положно**, и заєдно $mp - n^2 = 0$ или такођеръ **положно**. Или, ако оба та докученя у єдно сведемо: функція v бытћe за **оне** вредности броєва x и y, нађене изъ єдначина' нѣны првы почастны диференціалны количнака', **максимумъ**, съ коима испадаю нѣни чисти други почастни диференціални количници m и p **одречни**, и притомъ производъ тій количника, mp или $=$ или $>$ одъ квадрата n^2, мешовитогъ другогъ почастногъ диференціалногъ количника n; напротивъ функція v бытћe за **оне** вредности одъ x и y, добывене изъ поменуты єдначина', **минимумъ**, при коима нѣни чисти почастни други диференціални количници m и p испадаю **положни**, и уєдно є производъ тій количника, mp или $=$ или $>$ одъ n^2, т. є. одъ квадрата мешавитогъ другогъ почастногъ диференціалногъ количника n.

§ 73.

По свему тому дакле, ако имамо испытати, да ли дата нека функція $v = f(x, y)$, два променљива броя x и y, постає за какове вредности тій броєва максимумъ или минимумъ? треба исту функцію по свакомъ променљивомъ брою почастно диференціалити, свакій нѣнъ првый почастный диференціалный количникъ метнути $= 0$, и изъ тій єдначина' после изнаћи све вредности броєва x и y; направивши затимъ све друге почастне нѣне диференціалне количнике, валя сваку спрегу нађены тій вредности одъ x и y у исте поставити, па видити, съ коіомъ постаю чисти други диференціалници количници обадва одречни, или обадва положни, а поредъ тога іошъ ньиовъ производъ $>$ или $=$ квадрату мешавитогъ другогъ диференціалногъ количника? За сваку ону спрегу одъ x и y, при коіой су поредъ овогъ последнѣгъ условія чисти други количници **одречни**, бытћe вопросна функція **максимумъ**; напротивъ за сваку ону спрегу, гди поредъ истога условія ти количници испадаю **положни**, бытћe вопросна функція **минимумъ**.

§ 74.

Осимъ тога приметити валя іошъ:

1.) *У* случаю, ако су први почастни диференціални количници функціє целе, па ньиове єдначине недаю никакве вредности променлъивы броєва, или показую каково противусловіє, — онда вопросна функція непостає низакакве вредности тій броєва максимумъ или минимумъ.

2.) *У* случаю пакъ, ако су поменути количници функціє деловне, па ньиове єдначине недаю никакве вредности променлъивы броєва, — онда, изъ исты узрока као при функціяма єдногъ само променлъивогъ броя (§ 64), треба сваків одъ тій количника поставити іошъ и $= \frac{1}{0}$, или што є свеєдно, именителя свакогъ одъ ньи $= 0$, па видити, недаю ли те єдначине какве вредности за променлъиве броєве? Добыю ли се одтудъ какове вредности тій броєва, онда є вопросна функція за оне ньиове спреге максимумъ или минимумъ, съ коима испадаю нѣне оближнѣ вредности односно све одречне, или све положне. Недобыю ли се пакъ ни одтудъ вредности променлъивы броєва, или покажули и те єдначине каково противусловіє, — онда вопросна функція нема никаква максимума или минимума. — Найпосле

3.) *У* случаю, ако се съ нађенимъ вредностима променлъивы броєва изъ єдначина' првы почастны диференціалны количника потру и други чланови решавајући разлика' $V_1 - v$, $V_2 - v$, $V_3 - v$ и $V_4 - v$, — онда требало бы испытиванѣ максимума и минимума предузети помоћу слѣдуюћи чланова исты разлика. Но како су выши диференціални количници вопросне функціє, изъ кои се ти чланови са́стоє, што далѣ то све сложеніи, и збогъ тога испытиванѣ посредствомъ нъи све теже: то є у таковомъ случаю найболѣ служити се самимъ ближньимъ вредностима дате функціє при онимъ, друге чланове разлика потирућимъ вредностима променљивы броєва, — видити т. є. какве испадаю ближнѣ вредности съ тима вредностима, да ли све одречне, или све положне, или єдне́ одречне а друге положне? да бы после могли казати: у првомъ є случаю вопросна функція максимумъ, у другомъ минимумъ, а у трећемъ неможе быти ни єдно, ни друго.

Садъ да узмемо, колико за болѣ обяснѣнѣ свега дояко изложенога, толико и ради нуждног упражненя у томъ важномъ предмету, іошъ и неколико

Задатака.

§ 75.

1.) **Разделити брой a на три части тако, да производъ разлика' између нѣга и сваке нѣгове части буде максимумъ.**

Означуюћи єдну часть датога броя a съ x, другу съ y, бытће трећа $(a-x-y)$, а разлике између нѣга и тій частій $(a-x)$, $(a-y)$ и $(x+y)$. Дакле ако производъ овы разлика', кои треба да буде максимумъ, назовемо z, имамо

$$z=(a-x)(a-y)(x+y)=x^2(y-a)+x(y-a)^2-ay(y-a).$$

Поступаюћи садъ по упутству предходећи §§-а, добыямо

$$\frac{dz}{dx}=2x(y-a)+(y-a)^2,$$

$$\frac{dz}{dy}=x^2+2x(y-a)-a(2y-a);$$

ти количници, поставлѣни свакій $= 0$, даю єдначине

$$2x + y - a = 0$$

$$x^2 + 2(y - a)x - a(2y - a) = 0;$$

изъ овы пакъ слѣдує само єдна, задатку одговараюћа спрега, $y = \frac{1}{3}a$ съ $x = \frac{1}{3}a$

Далѣ имамо

$$\frac{\overset{2}{d}z}{d^2x} = 2(y-a), \quad \frac{\overset{2}{d}z}{d^2y} = 2x - 2a, \quad \frac{\overset{2}{d}z}{dx\,dy} = 2x + 2(y - a),$$

и ти количници постаю за нађено x и y, односно $= -\frac{4}{3}a, -\frac{4}{3}a$ и $-\frac{2}{3}a$; дакле прва два оба одречни, и нъиовъ производъ $\frac{16}{9}a^2 > \frac{4}{9}a^2$ квадрата трећега. Слѣдователно функція z є за $x = y = \frac{1}{3}a$ **максимумъ**, а то ће рећи: датый брой a быт'ће по условію задатка раздѣлѣнъ, ако су све три нѣгове части **єднаке**.

Тако исто морао бы се делити брой a на три части, кадъ бы се искало, да производъ сбирова одъ две и две части, или сбиръ производа сваке две и две буде максимумъ, о чему нека се почетникъ увери самъ.

2.) **Разделити брой a на три части x, y и $(a - x - y)$ тако, да сбиръ количника' одъ треће $a - x - y$ са свакомъ одъ првы, буде минимумъ.**

Означуюћи вопросный сбиръ са z, имамо

$$z = \frac{a - x - y}{x} + \frac{a - x - y}{y};$$

и то треба да буде минимумъ. Да видимо може ли быти.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{y-a}{x^2}-\frac{1}{y}=\frac{y^2-ay-x^2}{x^2y},$$

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{1}{x}+\frac{x-a}{y^2}=\frac{x^2-ax-y^2}{xy^2}.$$

Ти количници ставлѣни свакій $=0$, даю єдначине $y^2-ay-x^2=0$ и $x^2-ax-y^2=0$, изъ кои слѣдує $x=y=0$.

То исто налазимо, и ако ставимо

$$\frac{y^2-ay-x^2}{x^2y}=\frac{1}{0} \text{ и } \frac{x^2-ax-y^2}{xy^2}=\frac{1}{0}.$$

Но те вредности задатку неодговараю, а друге недобыямо; зато функція z нема ни максима ни минима, а то ће рећи: датый брой a никако неможе се делити по условію.

3.) **Построити троугалъ, кой є при датой периферіи** ***найвећегъ*** **садржая.**

Означуюћи съ $2S$ дату периферію (сбиръ страна) троугла, а съ x, y и $2S-x-y$ нѣгове стране, имамо познатимъ начиномъ вопросный нѣговъ садржай, кой да буде максимумъ,

$$z=\sqrt{S(S-x)(S-y)(x+y-S)}; \text{ и одтудъ}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{S(S-y)(2S-2x-y)}{2z}, \quad \frac{dz}{dy}=\frac{S(S-x)(2S-2y-x)}{2z}.$$

Ови количници, поставлѣни свакій $=0$, даю само

$$2S-2x-y=0 \text{ и } 2S-2y-x=0,$$

као задатку одговараюће єдначине за x и y. Изъ тій пакъ слѣдує $x=y$, дакле $2S-3x=0$, и одтудъ $x=\frac{1}{3}\cdot 2S$.

Слѣдователно вопросный троугалъ, да бы могао быти максимумъ, мора быти **равностранъ.** Да ли є пакъ то и као такавъ, показатђе слѣдуюђи други диференціални количници:

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{S^2}{z},\ \frac{{}^2dz}{d^2y} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{S^2}{z} \text{ и } \frac{{}^2dz}{dx\,dy} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{S^2}{z}.$$

Ти бываю за нађене вредности одъ x и y, односно $= -\frac{3}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{\sqrt{3}}$ и $-\frac{3}{2\sqrt{3}}$. Како є пакъ поредъ одречна прва два іошъ ньиовъ производъ $3 >$ одъ квадрата $\frac{3}{4}$ трећега, то є z при тима вредностима одъ x и y **максимумъ**, и по тому: троугалъ дате периферіє бытђе **найвећега** садржая, ако є **равностранъ.**

4.) **Какавъ мора быти правый параллелопипедъ, да бы скупно нѣгово површіє при известной запремини было** ***найманѣ?***

Представляюђи съ x, y и z размере вопроснога параллелопипеда при условлѣной нѣговой запремини c^3, имамо нѣгово површіє, коє треба да буде минимумъ,

$v = 2\,xy + 2\,xz + 2\,yz$, или збогъ $xyz = c^3$,

т. є. $z = \frac{c^3}{xy}$:

$$v = 2\,(xy + \frac{c^3}{x} + \frac{c^3}{y}).$$

Овай изразъ дає

$$\frac{dv}{dx} = 2\,(y - \frac{c^3}{x^2}) \text{ и } \frac{dv}{dy} = 2\,(x - \frac{c^3}{y^2});$$

изъ овы количника пакъ, поставлѣны свакій $= 0$, слѣдує $x^2y = xy^2 = c^3$, т. є. $x = y = c$, а съ тима іошъ и $z = \frac{c^3}{xy} = c$.

Ако ће дакле површіє вопросногa параллелопипеда быти минимумъ, мора истый быти коцка.

Далѣ имамо друге диференціалне количнике за нађене вредности одъ x, y и z,

$$\frac{{}^{2}dv}{d^{2}x} = \frac{4\,c^{3}}{x^{3}} = 4\,,\ \frac{{}^{2}dv}{d^{2}y} = \frac{4\,c^{3}}{y^{3}} = 4\,,\ \frac{{}^{2}dv}{dx\,dy} = 2\ ;\ \text{и}$$

одтудъ видимо, да су оба прва положни, и ньовъ производъ 16 > одъ квадрата 4 трећега, дакле да є при нађенимъ размерама параллелопипеда, нѣгово површіє доиста *найманѣ*.

в.) Определьиванѣ абсолутны максима̓ и минима̓, и граничны вредностій функція.

§ 76.

Абсолутный максимумъ, или абсолутный минимумъ неке функціє (§ 62), или є єданъ одъ релативны максима или релативны минима, или є пакъ **гранична** вредность дотичне функціє, т. є. такова вредность, гди иста функція прелази изъ доистногa у мнимо. Ако смо дакле изнашли сваколика максима и минима, и све граничне вредности неке функціє, онда међу тима налази се непремено и нѣнъ абсолутный максимумъ и абсолутный минимумъ.

Определьиванѣ односны максима и минима видили смо у предходећимъ §§-ма; остає само іошъ да покажемо истраживанѣ **граничны** вредностій.

§ 77.

Дата нека функція $f(x)$ постизава по предходећему за $x = \alpha$ тако свою граничну вредность, ако є при той вредности променльивогa броя єдна нѣна обližня вредность доистна, а она друга мнима, свеєдно коя єдно а коя друго. Како су пакъ $f(x-h)$ и $f(x+h)$ у случаю ако се за $x=\alpha$ могу развити у редове съ целимъ **положнимъ** степенима броя h, каошто смо већъ видили пре, свагда обе доистне, — то дакле редови исты функція, ако ће $f(x)$ да постигне за $x=\alpha$ свою граничну вредность, мораю за $x=\infty$ непремено садржатя чланове съ деловнимъ изложитељима одъ h. И то є довољно за увиђанѣ, да ћемо све вредности $x=\alpha$ пременљивога броя, при коима вопросна функція постизава граничне вредности изнаћи: ако на основу пређе споменутога §а поставимо $f_1(x)=\frac{1}{0}$; $f_2(x)=\frac{1}{0}$; и т. д., изъ тій єдначина' све вредности одъ x определимо, и после оближнѣ функціє дате функціє са свакомъ одъ њи испытамо у томъ обзиру, да ли испадаю єдна доистна а друга мнима? за коє x то буде, при томе постає $f(x)$ **гранична** вредность.

Овай посао показат'ће подробніє примери слѣдуюћегъ.

§ 78.

1.) Има ли функція $v=f(x)=(1-x)\,.\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{3}{2}}$ граничны вредностій, и за коє вредности броя x?

При той су $f_1(x)=\frac{dv}{dx}=-\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}$

$$f_2(x)=\frac{{}^2dv}{d^2x}=-\frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_3(x)=\frac{{}^3dv}{d^3x}=-\frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{3}{2}};$$

. . . .

Ставляюћи ове количнике редомъ свакій $=\frac{1}{0}$, видимо, да єдначина одъ првога недає никакву вредность за x, а да єдначине одъ осталы све само $x=1$ показую. Дата функція дакле само при овоме x могла бы постићи свою граничну вредность. — Да видимо какве се показую оближнѣ вредности дате функціє при томе x.

$$f(1-h) = [1-(1-h)].\sqrt{1-(1-h)} = h.\sqrt{h}\,;$$

$$f(1+h) = [1-(1+h)].\sqrt{1-(1+h)} = -h.\sqrt{-h}\,;$$

прва є доистна, а друга мнима; дакле вредность вопросне функціє при $x=1$ доиста гранична вредность, и та є $f(x)=v=0$.

2.) За коє вредности одъ x постизава функція

$f(x)=\frac{a+x}{\sqrt{a-x}}$ граничне вредности?

$$f_1(x)=\frac{3a-x}{2(a-x)\sqrt{a-x}}\,,\quad f_2(x)=\frac{7a-x}{4(a-x)^2.\sqrt{a-x}}\,,$$

. . . .

Ови количници, каогодъ и сви слѣдуюћи, поставлѣни $=\frac{1}{0}$; даю само єдну вредность $x=a$. Дата функція дакле само при той вредности могла бы постићи свою граничну вредность.

Оближнѣ нѣне вредности съ тимъ x єсу

$$f(a-h)=\frac{a+a-h}{\sqrt{a-(a-h)}}=\frac{2a-h}{\sqrt{h}}\,,$$

$$\text{и}\quad f(a+h)=\frac{a+a+h}{\sqrt{a-(a+h)}}=\frac{2a+h}{\sqrt{-h}}:$$

дакле єдна доистна а друга мнима, и зато є вредность дате функціє за $x=a$ доистна гранична вредность. Та є

$$f(x)=\frac{2a}{0}=\infty.$$

3.) За кое вредности одъ x быва вредность функціє

$$f(x) = a^2 - x^2 + (ax - x^2)^{\frac{5}{2}} \quad \text{гранична вредность?}$$

$$f_1(x) = -2x - \frac{5}{2}(ax - x^2)^{\frac{3}{2}}.(a - 2x)$$

$$f_2(x) = -2 - \frac{5.3}{2^2}.(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}.(a - 2x)^2 - 5(ax - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$f_3(x) = \frac{5.3.1}{2^3}.(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}.(a - 2x)^3 - 5.3.(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}.(a - 2x)$$

и т. д., при чему є лако приметити, да ће сви слѣдуюћи количници садржати некій **одречный** степенъ одъ $(ax - x^2)$.

Ставляюћи ове количнике редомъ $= \frac{1}{0}$, недобыямо одъ єдначине првога и другога никакву вредность за x, трећа єдначина пакъ и све остале даю само єдну вредность $x = a$.

Съ томъ вредности быва

$$f(a - h) = a^2 - (a - h)^2 + [a(a - h) - (a - h)^2]^{\frac{5}{2}}$$

$$= 2ah - h^2 + (ah - h^2)^{\frac{5}{2}} \quad \textbf{доистна}, \text{ а}$$

$$f(a + h) = -2ah - h^2 + (-ah - h^2)^{\frac{5}{2}} \quad \text{очевидно } \textbf{мнима}.$$

По тому вредность дате функціє при $x = a$ гранична є вредность, и као такова $= 0$.

Као последнѣ употреблѣнѣ диференціалнога рачуна у анализи, да покажемо іошъ и

г.) Определьиванѣ вредностій функція, за вредности пременльивога броя $= \infty$.

§ 79.

То є при већой части функція врло лакъ посао, ако приметимо слѣдуюће:

Кадъ є x безкрайно, онда є $\frac{1}{x}$ изчезльиво мало или 0. Ако дакле имамо изнаћи вредность функціє $f(x)$ за $x = \infty$, треба само место x узети $\frac{1}{z}$, и нову функцію помоћу маклореновогъ образца (или и просто) развити у редъ степена одъ z, па онда іошъ поставити $z = 0$; што остане быт'ће тражена вредность $f(x)$ за $x = \infty$.

Ово безъ сумнѣ непотребує никаква даля обясненя; но има доста случаєва, гди се съ тимъ начиномъ неможе изаћи на край, и гди се дакле чему другомъ досетити валя.

То ће быти, кадгодъ се у дотичной функціи буду налазили логаритми; у комъ случаю пре свега валя уклонити логаритамъ. Како то быва, неможе се уобште рећи, но показат'ћемо на єдномъ примеру.

Ако тражимо вредность функціє $v = \frac{1 - lx}{(x - 1)^n}$ за $x = \infty$, можемо за уклоненѣ логаритма ставити $lx = z$, дакле $x = e^z$. Тадъ быва

$$v = \frac{1 - z}{(e^z - 1)^n} = \frac{1 - z}{\left(z + \frac{z^2}{2\,!} + \frac{z^3}{3\,!} + \ldots\right)^n}$$

$$= \frac{1 - z}{z^n \left(1 + \frac{z}{2\,!} + \frac{z^2}{3\,!} + \ldots\right)^n}$$

$$= \frac{1}{z^n . \left(1 + \frac{z}{2\,!} + \ldots\right)^n} - \frac{1}{z^{n-1} . \left(1 + \frac{z}{2\,!} + \ldots\right)^n}$$

$$= \frac{1}{z^{n-1} . \left(1 + \frac{z}{2\,!} + \ldots\right)^n} . \left(\frac{1}{z} - 1\right) .$$

Ставляюћи овде пакъ $z = l\,(x = \infty) = \infty$, постає овай изразъ очевидно (збогъ $\frac{1}{z} = \frac{1}{\infty} = 0$), при **положномъ** брою n,

$$= - \frac{1}{\infty} = -0, \text{ а при } \textbf{одречномъ } n$$

$$= -\infty;$$

и по тому вопросна є функція за $x = \infty$ равна 0, ако є n положно, а $= -\infty$, ако є n одречно.

* * *

КНЬИГА II.

ИНТЕГРАЛНЫЙ РАЧУНЪ.

А. Интеграленѣ функція єдногъ пременльивогъ броя.

а) Понятія.

§ 80.

Ако є $\varphi(x)\,dx$ нека дата диференціална функція по x, па се тражи основна функція, т. є. она функція $f(x)$, одъ кое диференціаленѣмъ та дата постає: онда посао, коимъ добыямо основну функцію $f(x)$, зове се **интеграленѣ** дате функціє, а сама основна функція $f(x)$ притомъ, нѣнъ **интегралъ**.

Да се дата диференціална функція има интегралити, означуе се предпоставлѣнимъ іой знакомъ $\int$, тако да пишемо, и по предходећему треба да є $\int\varphi(x)\,dx = f(x)$ (читай интегралъ функціє φ одъ x пута dx, раванъ є функціи f одъ x).

Интеграленѣ є дакле противный рачунъ диференціаленю, и знаци се $\int$ и d зато, кадъ се као налажући састану, узаямно поричу и поништаваю.

§ 81.

По горнѣмъ понятію треба да є $df(x) = \varphi(x)\,dx$, т. є. диференціалъ тражене функціє (интеграла) раванъ датой диференціалной функціи, а у § 4. видили смо, да се при диференціаленю стални броєви губе, и да є збогъ тога диференціалъ свію функція єдногъ истогъ променльивогъ броя, коє се међу собомъ само съ некимъ сталнимъ броємъ разликую, єданъ истый.

Лако є дакле увидити, да обратно **интегралъ сваке дате диференціалне функціє има безбройно млого вредностій, коє се међу собомъ све само съ некимъ, іошъ непознатимъ сталнимъ броєвима разликую, и да є зато свакій интегралъ уобште, т. є. до известногъ одкрића принадлежећегъ му сталнога броя, неопределѣнъ.**

Интегралъ, кои тай непознатый сталный брой іошъ садржи, зове се **подпуный** или **обштій**, интегралъ напротивъ, у комъ є истый брой већъ приміо неку известну вредность, зове се **особитый.**

Обштій интегралъ дакле добыямо, ако изнађеномъ особитомъ интегралу додамо іошъ некій непознатый сталный брой.

Овай сталный брой представля се обично съ писмомъ C, као почетнимъ писмомъ речи constans, одкрива се пакъ у известнимъ случаєвима изъ саме природе дотичнога предмета. Тако н. п. ако є обштій $\int\frac{dx}{x} = lx + C$, а изъ природе тичућегъ се предмета зна се, да истый $\int$ за $x = \alpha$ быва $= a$, имамо обзиромъ нато, $a = l\alpha + C$, одкуда слѣдує $C = a - l\alpha$, а съ томъ вредности после **особитый** $\int\frac{dx}{x} = lx + a - l\alpha = l\frac{x}{\alpha} + a$.

§ 82.

Да свакій обштій интегралъ доиста мора садржати некій іошъ непознатый сталный брой, и да съ тога после што у предходећемъ §-у поглавито рекосмо, доиста све онако постои, — увере̄вамо се іошъ и на слѣдуюћій начинъ.

Ако є $\int \varphi(x)\,dx = f(x)$, имамо по §-у 80. $f_1(x) = \varphi(x)$, дакле $f_2(x) = \varphi_1(x)$, $f_3(x) = \varphi_2(x)$, и т. д., и зато по простомъ маклореновомъ правилу (§ 32.), ако место одъ x више независећегъ, т. є. по нѣму сталнога броя $f(\underset{0}{x})$ узмемо C,

$$\int \varphi(x)dx = f(x) = C + \varphi(\underset{0}{x}).x + \varphi_{1}(\underset{0}{x}).\frac{x^2}{2!} + \varphi_{2}(\underset{0}{x}).\frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

изразъ, кои съ неизвестнимъ, по x сталнимъ броємъ C, горе речено подпуно потврђуе.

Да є пакъ десна часть истога израза доиста общта вредность траженога интеграла, увиђамо съ места, чимъ образуємо прву нѣгову функцію; єръ тадъ слѣдуе обзиромъ нато, да є C по x стално,

$$f_1(x) = \varphi(\underset{0}{x}) + \varphi_1(\underset{0}{x}) \cdot x + \varphi_2(\underset{0}{x}) \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots, \text{ т. є. } f_1(x) = \varphi(x),$$

каошто по понятію интеграла треба да буде, єръ десна часть ове єдначине по поменутомъ маклореновомъ обрасцу ніє нико другій, но $\varphi(x)$.

Осимъ пређашнѣга потврђеня увиђамо изъ дотичнога израза іошъ и то, да и како можемо представити интегралъ сваке диференціалне функціє у виду безкрайнога реда степена одъ x или $(x-a)$ (§ 32.). Да ће пакъ тай редъ быти краянъ, ако є $\varphi(x)$ у вопроснομъ интегралу функція алгебрайска раціонална цела, безъ сумнѣ непотребує нарочнога доказа.

§ 83.

По роду дате функціє, као диференціалъ, разликуємо и разне родове интеграла. Имамо т. є. просте и выше интеграле.

Ако є дата диференціална функція првый или простый диференціалъ, онда є тражена функція нѣнъ првый или простый интегралъ; ако є пакъ она функція другій, трећій, и т. д. диференціалъ, онда є тражена функція односно нѣнъ другій, трећій, и т. д. интегралъ. По себи пакъ разуме се, да выше интеграле истимъ путемъ морамо тражити, као и выше диференціале; каогодъ што смо т. є. другій, трећій, и остале выше диференціале добыли єданпутъ, двапутъ и односно више пута повторенимъ диференціаленѣмъ, тако исто налазимо другій, трећій, и остале выше интеграле єданпутъ, двапутъ, и дотично више пута повторенимъ интеграленѣмъ. Уобште, ако є ${}^{n}d f(x) = \varphi(x)\, d^{n}x$, т. є. $\varphi(x)\, d^{n}x$ n-ный диференціалъ функціє $f(x)$, онда є обратно $f(x) = {}^{n}\!\!\int \varphi(x)\, d^{n}x$, т. є. функція $f(x)$ n-ный интегралъ функціє $\varphi(x)\, d^{n}x$, и добыямо є интеграленћи ову последню застопце n пута.

§ 84.

При интеграленю сваке дате диференціалне функціє старамо се пре свега, да нѣнъ интегралъ, или непосредно или после некогъ нѣногъ преображая добыємо у виду крайне функціє. Ово на жалость при већой части интеграла ніє могуће, али гдигодъ се може, ту служе, поредъ другогъ доякошнѣгъ знаня, ниже слѣдуюћа **основна правила и образци**. Што се пакъ тиче начина, како се дате диференціалне функціє, где мора быти, за употреблѣнѣ тій правила и образаца удешаваю, то є лако увидити, да се о тому немогу поставити никакова общта правила. Ту служи понайвише само собствено промотренѣ и оштроуміє, и све што се у томъ обзиру може урадити, састои се у упућиваню съ разрешенѣмъ неколико, таково удешаванѣ изискуюћи интеграла. Мы ћемо то урадити мало касніє при поставляню помоћны образаца.

б.) Основна правила и образци.

§ 85.

1.) Простимъ извртанѣмъ правила II. и III. §-а 4. слѣдує

$$\text{I.)}\quad \int A\varphi(x)\,dx = A\int\varphi(x)\,dx \quad \text{и}$$

$$\text{II.)}\quad \int[f(x)\,dx \pm \varphi(x)\,dx \pm \ldots] = \int f(x)\,dx \pm \int\varphi(x)\,dx \pm \ldots$$

Првый одъ ова израза показує, да **при интеграленю функціє, коя є снабдевена съ каквимъ сталнимъ чинителѣмъ, овога одма као чинителя и интеграла предъ интегралный знакъ извадити можемо и валя.**

По другомъ є пакъ изразу **интегралъ алгебрайскогъ сбира више диференціалны функція раванъ алгебрайскомъ сбиру интеграла поєдины тій функція.**

2.) Интегралећи правило IV. поменутога §-а, и определяваюћи после $\int\varphi(x)\,df(x)$, слѣдує

$$\text{III.)}\quad \int\varphi(x)\,df(x) = \varphi(x)\,f(x) - \int f(x)\,d\varphi(x),$$

изразъ, кои садржи **правило такозваногъ почастногъ интеграленя.**

3.) Ако у $\int f(x)\,dx$ узмемо место x произвольну неку функцію $\varphi(z)$, коя x више несадржи, добыямо

$$\text{IV.)}\quad \int f(x)\,dx = \int f[x=\varphi(z)]\,.\,d\varphi(z) = \int\{f[x=\varphi(z)]\,.\,\varphi_1(z)\}\,.\,dz,$$

изразъ, у комъ є садржано **правило интеграленя заменомъ.**

4.) Пошто є $d\,alf(x) = a\,.\,\frac{df(x)}{f(x)}$, мора быти обратно

$$\text{V.)}\quad \int a\,.\,\frac{df(x)}{f(x)} = a\,.\,lf(x),$$

то ће рећи: ако є **при датой деловной диференціалной функціи, немотрећи на сталне чинителѣ, броитель ди-**

ференціалъ именителя, онда е траженый интегралъ природный логаритамъ именителя, съ надлежнимъ обзиромъ на оне чинителѣ.

§ 86.

Простимъ извртанѣмъ образаца §§ 6. — 14. слѣдую

1.) $$\int x^{n}.\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

2.) $$\int a^{x}.\, dx = \frac{a^{x}}{la}$$

3.) $$\int e^{x}.\, dx = e^{x}$$

4.) $$\int \frac{dx}{x} = lx$$

5.) $$\int sin\, x\, .\, dx = -\, cos\, x$$
$$= sin\, v\, .\, x$$

6.) $$\int cos\, x\, .\, dx = sin\, x$$
$$= -\, cos\, v\, .\, x$$

7.) $$\int \frac{dx}{cos^{2}x} = tang\, x$$

8.) $$\int \frac{dx}{sin^{2}x} = -\, cot\, x$$

9.) $$\int \frac{sin\, x\, .\, dx}{cos^{2}x} = sec\, x$$

10.) $$\int \frac{cos\, x\, .\, dx}{sin^{2}x} = -\, cosec\, x$$

11.) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = arc\,(sin = x) = -\, arc\,(cos = x)$$

12.) $$\int \frac{dx}{1+x^{2}} = arc(tang = x) = -\, arc(cot = x)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, .\, l\, \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

13.) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-1}} = arc(sec = x) = -\, arc(cosec = x)$$

14.) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^{2}}} = arc\,(sin\, v. = x) = -\, arc\,(cos\, v. = x)$$

15.) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^{2}}} = l(x+\sqrt{1+x^{2}}) = -\, l(x-\sqrt{1+x^{2}})$$

16.) $$\int \frac{dx}{1-x^{2}} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x}\, .$$

За ове образце имамо іошъ приметити: 1.) да свакомъ одъ ньи за подпуный интегралъ валя іошъ придати некій сталный брой; 2.) да сви стоє тако исто, ако место x узмемо ма какву функцію, и 3.) да ако за неке одъ ньи и имамо више вредностій, ове зато немораю быти безусловно єднаке, но могу се међу собомъ разликовати съ каквимъ сталнимъ броемъ.

в.) Помоћни образци.

§ 87.

1.) Ставимо у име определяваня $\int (a+bx)^n \,.\, dx$, было n ма какавъ брой, $a+bx=z$. Бытће $dx=\frac{dz}{b}$, а $\int (a+bx)^n .\, dx=\frac{1}{b}\int z^n .\, dz=\frac{z^{n+1}}{b(n+1)}$ (1. обр. пређ. §-а), или ако садъ повратимо место z горню нѣгову вредность,

$$17.)\quad \int (a+bx)^n .\, dx=\frac{(a+bx)^{n+1}}{b\,(n+1)}.$$

2.) На истый начинъ налазимо и $\int x^{n-1}\,dx\,.(a+bx^n)^m$, при комъ є $x^{n-1}\,dx$, немотрећи на сталне чинителѣ b и n, диференціалъ одъ $a+bx^n$, броєви m и n притомъ были какви му драго.

Поставляюћи т. є. $a+bx^n=z$, слѣдує $x^{n-1}\,dx=\frac{dz}{bn}$, и зато вопросный $\int x^{n-1}\,dx\,.(a+bx^n)^m=\frac{1}{bn}\int z^m\,dz=\frac{z^{m+1}}{bn(m+1)}$, или ако повратимо вредность одъ z,

$$18.)\quad \int x^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^m=\frac{(a+bx^n)^{m+1}}{bn\,(m+1)}.$$

Поставляюћи овде $n=1$, и изменююћи m съ n, слѣдує сасвимъ просто пређашный интегралъ.

3.) Диференціалећи $a+bx^n$ добыямо $bn \,.\, x^{n-1}.\, dx$, тако да стои

$$Ax^{n-1}.\, dx = \frac{A}{bn} \cdot d\,(a+bx^n);$$

и да збогъ тога по V. правилу § 85. можемо рећи:

$$19.)\quad \int \frac{A\,x^{n-1}.\, dx}{a+bx^n} = \frac{A}{bn} \cdot l\,(a+bx^n).$$

§ 88.

Требаю намъ интеграли $\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm bx^2}}$ и $\int \frac{dx}{a \pm bx^2}$.

Ту опажамо лако, да є првый съ горньимъ знакомъ у именителю найвећма наликъ на 15., а съ дольнимъ знакомъ на 11. интегралъ §а 86.; другій є пакъ найвећма наликъ на 12., съ горньимъ знакомъ, а на 16. съ дольнимъ. На те дакле интеграле трудимо се свести ій, и получуємо то слѣдућимъ путемъ. Вадимо у именителю a као заєдничкога чинителя, и ставлямо после $\frac{b}{a}x^2 = z^2$, т. є. $x = z\sqrt{\frac{a}{b}}$, дакле $dx = dz \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$. Тиме є изразъ

$$\frac{dx}{\sqrt{a \pm bx^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a}.\sqrt{1 \pm \frac{b}{a}x^2}} = \frac{dz}{\sqrt{b}.\sqrt{1 \pm z^2}}$$

очевидно сведенъ на найпре споменута два образца, а

$$\frac{dx}{a \pm bx^2} = \frac{dx}{a\left(1 \pm \frac{b}{a}x^2\right)} = \frac{dz}{\sqrt{ab}\,.\,(1 \pm z^2)}$$

на 12. и 16., тако да є сада сасвимъ просто по 15. и 11. образцу

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot l\,(z+\sqrt{1+z^2}),$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot arc\,(sin=z)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot arc\,(cos=z)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\ arc\,(tang=\frac{z}{\sqrt{1-z^2)}}\,^{*}),$$

а по 12. и 16. образцу

$$\int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\int\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\cdot arc\,(tang=z)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\cdot l\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}},$$

$$\int\frac{dx}{a-bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\cdot\int\frac{dz}{1-z^2}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\cdot l\,\frac{1+z}{1-z}.$$

Збогъ тога, ако повратимо вредность $z=x\sqrt{\frac{a}{b}}$,

20.) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\left[l\,(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2})-l\sqrt{a}\right]$$ или

$$=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot l\left(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx}\right),$$ ако $-\frac{l\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

прибронмо одма неизвестномъ сталномъ брою C, —

---

*) Кадъ є $\sin=z$, онда є $\cos=\sqrt{1-\sin^2}=\sqrt{1-z^2}$, и зато $\text{tang}=\frac{\sin}{\cos}=\frac{z}{\sqrt{1-z^3}}$.

$$21.)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\, arc\,(sin = x\sqrt{\frac{b}{a}})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot arc\,(cos = x\sqrt{\frac{b}{a}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}}\, arc\,(tang = \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a-bx^2}}),$$

$$22.)\quad \int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot arc\,(tang = x\sqrt{\frac{b}{a}})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \cdot l\, \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{-b}},\ a$$

$$23.)\quad \int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \cdot l\, \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}.$$

§ 89.

1.) За интеграле $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx\pm cx^2}}$ и $\int \frac{dx}{a+bx\pm cx^2}$ ставлямо односно $x \pm \frac{b}{2c} = z$, т. є. $x = z \mp \frac{b}{2c}$, чимъ постае $a+bx\pm cx^2 = \left(a \mp \frac{b^2}{4c}\right) \pm cz^2$, а $dx = dz$, тако да є после

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)+cz^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{\left(a+\frac{b^2}{4c}\right)-cz^2}},$$

$$\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=\int\frac{dz}{\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)+cz^2},$$

$$\int\frac{dx}{a+bx-cx^2}=\int\frac{dz}{\left(a+\frac{b^2}{4c}\right)-cz^2},$$

првый очевидно сведенъ на онай подъ 20. (пређ. §), другій на 21., трећій на 22., а четвртый на 23.

Заменюючи дакле у овимъ образцима a съ $\left(a\pm\frac{b^2}{4c}\right)$, b са c, а x са z, слѣдуе

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot l\left[2cz+\sqrt{(4ac-b^2)+4c^2z^2}\right.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot arc\left(sin=\frac{2cz}{\sqrt{4ac+b^2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot arc\left(cos=\frac{2cz}{\sqrt{4ac+b^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot arc\left(tang=\frac{2cz}{\sqrt{(4ac+b^2)-4c^2z^2}}\right),$$

$$\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\cdot arc\left(tang=\frac{2cz}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\cdot l\,\frac{\sqrt{b^2-4ac}-2cz}{\sqrt{b^2-4ac}+2cz},$$

$$\int\frac{dx}{a+bx-cx^2}=\frac{1}{\sqrt{4ac+b^2}}\cdot l\,\frac{\sqrt{4ac+b^2}+2cz}{\sqrt{4ac+b^2}-2cz},$$

или ако место z узмемо надлежно $x\pm\frac{b}{2c}$,

$$24.)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \,.\, l\,(2cx+b+2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \,.\, l\left(\frac{2cx+b}{2\sqrt{c}} + \sqrt{a+bx+cx^2}\right),$$

$$25.)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, arc\left(sin = \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}}\, arc\left(cos = \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\, arc\left(tang = \frac{2cx-b}{2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx-cx^2}}\right),$$

$$26.)\quad \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \,.\, arc\left(tang = \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \,.\, l\,\frac{\sqrt{b^2-4ac}-(2cx+b)}{\sqrt{b^2-4ac}+(2cx+b)},$$

$$27.)\quad \int \frac{dx}{a+bx-cx^2} = \frac{1}{\sqrt{4ac+b^2}} \,.\, l\,\frac{\sqrt{4ac+b^2}+(2cx-b)}{\sqrt{4ac+b^2}-(2cx-b)}.$$

Одъ две вредности 26. интеграла стои прва за случай ако є $4ac > b^2$, а друга при $4ac < b^2$. Ако бы пакъ случайно было $4\,ac = b^2$, постаю оба израза безкрайни, за знакъ, да вопросный интегралъ у томъ случаю ніє трансцендентанъ. Ево одма увереня: кадъ є $b^2 = 4\,ac$, онда є $b = 2\sqrt{ac}$, а $a+bx+cx^2 = a+2\sqrt{ac}\,.\,x+cx^2 = (\sqrt{a}+x\sqrt{c})^2$, и зато у томъ случаю

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{a}+x\sqrt{c})^2} = -\frac{1}{\sqrt{c}\,.\,(\sqrt{a}+x\sqrt{c})}$$

доиста алгебрайска функція.

2.) Узимаюћи у обр. 24. $-\frac{1}{x}$ место x, дакле $\frac{dx}{x^2}$ место dx, и изменюю́ћи после c съ α, $-b$ са β, а a са γ, слѣдує

$$28.)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot l \left[\frac{2\sqrt{\alpha}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x} - (2\alpha+\beta x)\right].$$

Истимъ начиномъ добыямо изъ образца 25.

$$29.)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{-\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot arc \left(sin = \frac{\beta x - 2\alpha}{x\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}\right).$$

§ 90.

1.) Ако бы, съ намеромъ да изнађемо $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$, у образцима 24. и 25. узели $c = 0$, добыли бы нуллу; али тай интегралъ, каошто ћемо одма видити, и ніє трансцендентанъ, но алгебрайскій.

По образцу 17. § 87. имамо просто $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \int (a+bx)^{-\frac{1}{2}}.dx = \frac{2}{b}(a+bx)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{b}\cdot\sqrt{a+bx}$. На истый добыямо $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx}} = -\frac{2}{b}\sqrt{a-bx}$, тако да садъ уобште стои.

$$30.)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a \pm bx}} = \pm\frac{2}{b}\sqrt{a \pm bx}.$$

2.) Поставляюћи далѣ у горньимъ образцима подъ 28. и 29., за $\int \frac{dx}{x\sqrt{\beta x+\gamma x^2}}$, $\alpha = 0$, постаю обе вредности истога интеграла безкрайне, за знакъ да тай интегралъ ніє трансцендентанъ, но алгебрайскій. И доиста ако у предходећемъ 30. интегралу узмемо $-\frac{1}{x}$, γ и $-\beta$ место x, a и b, слѣдує као алгебрайскій

$$31.)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{\pm\beta x+\gamma x^2}} = \mp \frac{2}{\beta x}\cdot\sqrt{\pm\beta x+\gamma x^2}$$

3.) Ако є $f(x) = a + bx \pm cx^2$, имамо $l f(x) = l(a+bx\pm cx^2)$, а $d\, l\, f(x) = \frac{b \pm 2cx}{f(x)}\,dx = \frac{b\,dx}{f(x)} \pm \frac{2cx\,.\,dx}{f(x)}$. Одтудъ пакъ слѣдує $\frac{x\,dx}{f(x)} = \pm \frac{d\,l\,f(x)}{2c} \mp \frac{b\,dx}{2c\,f(x)}$, и зато

$$\int\frac{x\,dx}{f(x)} = \pm\frac{l\,f(x)}{2c} \mp \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{f(x)}, \text{ т. є.}$$

$$32.)\quad \int\frac{x\,dx}{a+bx\pm cx^2} = \pm\frac{l(a+bx\pm cx^2)}{2c} \mp \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{a+bx\pm cx^2},$$

образацъ, съ коимъ интегралъ лево, као вопросный, доводимо на познате подъ 26. и 27.

Садъ смо, очевидно, у станю изнаћи и интегралъ функціє вида

$$\frac{(a\pm bx)\,dx}{\alpha+\beta x\pm\gamma x^2}.$$

6.) Найпосле ако имамо изнаћи $\int\frac{ax^m\,dx}{(\alpha+\beta x)^n}$, ставлямо $\alpha+\beta x = z$, дакле $x = \frac{z-\alpha}{\beta}$, $x^m = \frac{(z-\alpha)^m}{\beta^m}$, а $dx = \frac{dz}{\beta}$.

Тимъ быва вопросный, по реду

$$33.)\quad \int\frac{ax^m\,dx}{(\alpha+\beta x)^n} = \frac{a}{\beta^{m+1}}\int\frac{(z-\alpha)^m dz}{z^n},$$

и добыямо га дакле у случаю ако є m **цео положанъ** брой, развіяюћи найпре $(z-\alpha)^m$ по биномномъ правилу, и делећи после све чланове тога степена са z^n, єръ тадъ смо га свели на интегралъ алгебрайскогъ сбира самы диференціалны монома, кои се сада лако налази помоћу правила I. и II. § 85. и 1. обр. § 86. — Да пакъ найпосле іошъ валя повратити горню вреднестъ за z, разуме се по себи.

За особитый случай да є $m = 0$, слѣдує изъ предходећегъ образца

$$34.)\ \int \frac{a\,dx}{(\alpha+\beta x)^n} = \frac{a}{\beta}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{a}{\beta\,(n-1)(\alpha+\beta x)^{n-1}}.$$

Особиты примера за упражняванѣ у употребляваню овы образаца неузимамо овде зато никаковы, еръ ћемо ій доцніє врло често и на найразличитіи начинъ употребљавати.

г.) Интеграленѣ алгебрайски функція целы раціоналны

§ 91.

Диференціалне функціє алгебрайске раціоналне целе све су вида

$$ax^a\,dx + bx^\beta\,dx + cx^\gamma\,dx + \ldots, \ldots\ldots\ldots,$$

и ништа ніє лакше сада интегралити, но такову функцію по правилама I и II. § 85. и образцу 1. § 86. По тима имамо съ места

$$\int (ax^a dx + bx^\beta dx + cx^\gamma dx + ..) = a\int x^a dx + b\int x^\beta dx + c\int x^7 dx + ..$$

$$= \frac{ax^{a+1}}{a+1} + \frac{bx^{\beta+1}}{\beta+1} + \frac{cx^{\gamma+1}}{\gamma+1} + \cdot\cdot + C.$$

Н. п. $\int (1 - 2x + 3x^2 - 7x^6)\,dx = x - x^2 + x^3 - x^7 + C.$

Неимајући ништа више о томъ послу рећи, приступамо одма къ

д.) Интеграленю алгебрайски деловны функція.

§ 92.

Осимъ дояко већъ показаны оны образаца, кои се тичу таковы функція, имамо о нъиовомъ интеграленю іошъ слѣдујуће приметити.

Дата диференціална деловна функція или є чиста или нечиста. Ако є нечиста добыямо, простомъ деобомъ броителя чрезъ именителя, место нѣ алгебрайскій сбиръ одъ єдне целе функціє и єдне деловне чисте; после чега имамо нѣнъ интегралъ по § 85. раванъ алгебрайскомъ сбиру интеграла те две функціє. Како пакъ интеграленѣ оне целе функціє неподлежи сада никаквой више тешкоћи, то є дакле притомъ само іошъ до тога стало, да видимо, како се налази интегралъ оне деловне чисте функціє, ако т. є. ніє случайно такова, да є нѣнъ интегралъ у єдномъ одъ пређе споменуты образаца већъ разрешенъ. Представимо ю съ $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Начинъ, коимъ изтражуємо интегралъ такове функціє, састои се уобште у томе, да є по упутству I. Ч. разлажемо у почастне разломке, и после ове интегралимо; при чему наравно валя разликовати понаособъ све могуће случаєве у смотреню рода именителѣвы чинителя. Подробніє дѣйствую о томе слѣдуюћи §§-и.

§ 93.

Ако се именитель $\varphi(x)$ састои изъ самы **доистны неєднаки** чинителя, онда є свакій вида $\frac{a}{\alpha+\beta x}$, и у томъ се дакле случаю вопросный $\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dc$ састои изъ сбира самы интеграла вида $\int\frac{a\,dx}{a+\beta x}$, кои се лако налазе образцемъ 19. у § 87.

Ово и у знацима изражено, стои за поменутый случай

$$\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx=\int\frac{a_1\,dx}{\alpha_1+\beta_1 x}+\int\frac{a_2\,dx}{\alpha_2+\beta_2 x}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{a_1}{\beta_1}\cdot l\,(\alpha_1+\beta_1 x)+\frac{a_2}{\beta_2}\cdot l\,(\alpha_2+\beta_2 x)+\cdots\cdot$$

Н. п. ако є вопросна деловна функція

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{1+2x^2}{2+3x-3x^2-2x^3}=\frac{1+2x^2}{(1-x)(2+x)(1+2x)},$$

коя се по § 107. I. Ч. састои изъ почастны разломака

$$\frac{1}{3(1-x)},\ \frac{-1}{2+x}\ \text{и}\ \frac{1}{3(1+2x)},\text{— имамо}$$

$$\int\frac{(1+2x^2)\,dx}{2+3x-3x^2-2x^3}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{1-x}-\int\frac{dx}{2+x}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{1+2x}$$

$$=-\frac{1}{3}l(1-x)-l(2+x)+\frac{1}{3}l(1+2x)+C.$$

§ 94.

Ако именитељ $\varphi(x)$ има и **прости мнимы**, дакле **квадратны доистны, нееднаки** чинителя вида $(x-m)^2+n^2$, онда у интегралу вопросне функціє $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ добыямо, осимъ интеграла пређашнћга вида, іошъ и овога: $\int\frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}$.

Овакавъ интегралъ добыямо лако, поставляюћи $x-m=z$, єръ тиме быва $x=m+z$, $dx=dz$, и зато

$$\int\frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}=\int\frac{[(a+bm)+bz]\,dz}{n^2+z^2}=\int\frac{(a+bm)\,dz}{n^2+z^2}+$$

$$+\int\frac{bz\,dz}{n^2+z^2}$$

$$=(a+bm)\int\frac{dz}{n^2+z^2}+b\int\frac{z\,dz}{n^2+z^2},$$

тако да после првый одъ ова два интеграла десно можемо изнаћи по образцу 22. § 88., а другій по мало пре споменутомъ 19. образцу § 87. — Подвргаваюћи ій тима образцима налазимо

$$(a+bm)\int\frac{dz}{n^2+z^2}=\frac{a+bm}{n}\cdot arc\,(tang=\frac{z}{n})\text{, а}$$

$$b\int\frac{z\,dz}{n^2+z^2}=\frac{b}{2}\cdot l\,(n^2+z^2)\text{, и зато}$$

$$\int\frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}=\frac{a+bm}{n}\cdot arc\,(tang=\frac{z}{n})+\frac{b}{2}\cdot l\,(n^2+z^2),$$

или, ако повратимо место z нѣгову вредность $x-z$, свакій интегралъ у вопросномъ случаю, вида

$$\int\frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}=\frac{a+bm}{n}\cdot arc\left(tang=\frac{x-m}{n}\right)+b\,.\,l\sqrt{(x-m)^2+n^2}.$$

Н. п. ако є вопросна деловна функція

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{x^2+x-1}{x^3-4x^2+9x-10}=\frac{x^2+x-1}{(x-2)[x-(1+2\sqrt{-1})].[x-(1-2\sqrt{-1})]}$$

$$=\frac{x^2+x-1}{(x-2)(x^2-2x+5)}=\frac{x^2+x-1}{(x-2)\,[(x-1)^2+4]},$$

коя се, по 109. §-у I. Ч., састои изъ доистны почастны разломака $\frac{1}{x-2}$ и $\frac{3}{x^2-2x+5}=\frac{3}{(x-1)^2+4}$, — имамо по горнѣму, збогъ $a=1$, $b=0$, $m=1$, $n=2$ при интегралу другогъ почастногъ разломка,

$$\int\frac{(x^2+x-1)\,dx}{x^3-4x^2+9x-10}=\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}$$

$$=l\,(x-2)+\frac{3}{2}\,arc\left(tang=\frac{x-1}{2}\right)+C.$$

На истый начинъ као овде $\int\frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}$, определяю се, обзиромъ на §§ 194. — 198. I. Ч., и интеграли вида $\int\frac{dx}{x^n\pm a^n}$ и $\int\frac{x^m\,dx}{x^n\pm a^n}$, ако су броеви m и n *цели положни.*

§ 95.

Ако именитель $\varphi(x)$ има **еднаки простыи доистны** чинителя, онда вопросный интегралъ садржаћe и интеграле вида $\int \frac{a dx}{(\alpha+\beta x)^n}$, кое лако разрешавамо образцемъ 17. § 87.

По томъ е образцу свакій таковый

$$\int \frac{a dx}{(\alpha+\beta x)^n} = \frac{a}{b(n-1)(\alpha+\beta)^{n-1}} + C.$$

Н. п. ако е вопросна деловна функція.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x^2-x+2}{x^2.(x-1)(2x+1)^2},$$

коя се састои изъ почастны разломака $-\frac{2}{x^2}, \frac{7}{x}, \frac{1}{3(x-1)}$, $-\frac{8}{(2x+1)^2}$ и $\frac{-44}{3(2x+1)}$, — имамо

$$\int \frac{(2x^2-x+2)dx}{x^2.(x-1)(2x+1)^2} = -2\int \frac{dx}{x^2} + 7\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$-8\int \frac{dx}{(2x+1)^2} - \frac{44}{3}\int \frac{dx}{2x+1}.$$

Првый одъ десны интеграла определюе се по обр. 1., а другій обр. 4. § 86., — трећій и последный по обр. 19. § 87., а четвртый пређе поменутимъ образцемъ 17. истога §-а.

Поступаюћи съ ньима по тима образцима, слѣдуе

$$\int \frac{(2x^2-x+2)dx}{x^2(x-1)(2x+1)^2} = \frac{2}{x} + 7lx + \frac{1}{3}l(x-1) + \frac{4}{2x+1}{}^{*)}$$

$$-\frac{22}{3}l(2x+1)$$

---

*) Узимаюћи у горнѣмъ образцу за $\int \frac{dx}{(2x+1)^2}$, $a=1$, $\alpha=1$, $\beta=2$, $n=2$, быва $\int \frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2(1-2)(1+2x)^{2-1}} = -\frac{1}{2(1+2x)}$.

§ 96.

Найпосле ако именитель $\varphi(x)$ има и **єднаки** просты **мнимы**, дакле **єднаки квадратны доистны** чинителя, онда наилазимо іошъ на интеграле вида $\int\frac{(a+bx)dx}{[(x-m)^2+n^2]^{\text{г}}}$.

Свакій таковый интегралъ доводи се, истомъ заменомъ као у § 94., на интегралъ вида

$$\int\frac{(\alpha+bz)\,dz}{(z^2+n^2)^{\text{г}}}=\alpha\int\frac{dz}{(z^2+n^2)^{\text{г}}}+b\int\frac{zdz}{(z^2+n^2)^{\text{г}}}.$$

Последный одъ ова два интеграла може се лако изнаћи по обр. 18. § 97.; како се пакъ добыя онай првый, то ћемо видити текъ доцніє.

е.) Интеграленѣ алгебрайски ирраціоналны функція.

§ 97.

Осимъ дотичны образаца у §§-а 86. — 90., имамо іошъ приметити уобште, да се интеграленѣ ирраціоналны диференціалны функція сматра као већъ готовъ посао, ако смо само у станю дати имъ видъ раціоналанъ. Съ тога бытће задатакъ слѣдуюћи §§-а показати, како се то постизава у некимъ случаєвима, єръ да се за то немогу поставити обшта правила, разуме се лако по себи.

§ 98.

1.) Ако се у датой диференціалной функціи, поредъ раціоналны израза налази само ирраціоналный овакавъ: $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$, — онда валя ставити $a+bx=z^n$, дакле $x=\frac{z^n-a}{b}$, а $dx=\frac{nz^{n-1}\,dz}{b}$, па ће нова функція, тиме добывена, быти раціонална.

Н. п. ако имамо $\int(2x^2 - x + 2)\,dx\,\sqrt[5]{1-2x}$, па поставимо $1 - 2x = z^5$, — постає $x = \frac{1 - z^5}{2}$, $dx = -\frac{5}{2} z^4 dz$, $2x^2 - x + 2 = \frac{1}{2}(4 - z^5 + z^{10})$, дакле $\int(2x^2 - x + 2)\,dx\,\sqrt[5]{1-2x}$ $= -\frac{5}{4}\int(4 - z^5 + z^{10})\,z^5\,dz = -\frac{5}{4}\int(4z^5 - z^{10} + z^{15})\,dz$ **раціоналанъ**, и по правилама I. и II. § 85. и обр. 1. § 86. равань $-\frac{5}{4} z^6\left(\frac{2}{3} - \frac{z^5}{11} + \frac{z^{10}}{16}\right) = -\frac{5}{2112} z^6(352 - 48z^5 + 33z^{10})$, — а ако іошъ повратимо вредность $z = (1 - 2x)^{\frac{1}{5}}$,

$$\int(2x^2 - x + 2)\,dx \cdot \sqrt[5]{1-2x} = -\frac{5}{2112}(1 - 2x)\left[352 - 48(1 - 2x) + 33(1 - 2x)^2\right]\sqrt[5]{1-2x}.$$

2.) Ако пакъ у датой функціи имамо осимъ $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ іошъ и $(a+bx)^{\frac{r}{s}}$, онда треба метнути $a + bx = z^{ns}$, дакле $x = \frac{z^{ns} - a}{b}$, а $dx = \frac{ns}{b} \cdot z^{ns-1}.\,dz$, и тиме бытће опетъ нова функція раціонална.

Н. п. за $\int\frac{\sqrt{x} - 2x\sqrt[3]{x}}{2x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}\,dx$ стављамо $x = z^6$, дакле $dx = 6z^5 dz$, $\sqrt{x} = z^3$, $\sqrt[3]{x} = z^2$, а $\sqrt[3]{x^2} = z^4$, чимъ быва вопросный.

$$\int\frac{\sqrt{x} - 2x\sqrt[3]{x}}{2x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}\,dx = -6\int\frac{2z^9 - z^4}{2z^5 + 1}\,dz$$

очевидно раціоналанъ.

Овай новый интегралъ израђенъ, показує се равань $\int\left(z^4 - \frac{2z^4}{2z^5 + 1}\right)dz = \frac{z^5}{5} - \frac{1}{5}\,l\,(2z^5 + 1)$, и зато ако заменемо и после вредность $z = \sqrt[6]{x}$ повратимо:

$$\int\frac{\sqrt{x} - 2x\sqrt[3]{x}}{2x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}\,dx = \frac{6}{5}\left[l\,(2\sqrt[6]{x^5} + 1) - \sqrt[6]{x^5}\right] + C.$$

§ 99.

Поступаюћи по овимъ упутствама добыямо сасвимъ лако

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{b}\cdot\sqrt{a+bx}\text{, каогодъ у § 90. подъ 30.,}$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{b^2}\cdot\left[\frac{1}{3}(a+bx)-a\right]\cdot\sqrt{a+bx}$$

$$=-\frac{2}{3b^2}(2a-bx)\cdot\sqrt{a+bx},$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{b^3}\left[\frac{1}{5}(a+bx)^2-\frac{2}{3}a(a+bx)+a^2\right]\cdot\sqrt{a+bx}$$

$$=\frac{2}{15b^3}(8a^2-4abx+3b^2x^2)\cdot\sqrt{a+bx},$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot l\,\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}.$$

Како є пакъ $\sqrt{a+bx}=\frac{a+bx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{a}{\sqrt{a+bx}}+\frac{bx}{\sqrt{a+bx}}$, а $x\sqrt{a+bx}=\frac{ax+bx^2}{\sqrt{a+bx}}=\frac{ax}{\sqrt{a+bx}}+\frac{bx^2}{\sqrt{a+bx}}$, то можемо садъ, каошто є лако увидити, сасвимъ просто определити и интеграле $\int dx\sqrt{a+bx}$ и $\int x\sqrt{a+bx}$.

§ 100.

1.) Ако се у датой диференціалной функціи наоди произвольный, н. п. $\sqrt[m]{\left(\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}\right)^n}$, постаћe раціонална, чимъ ставимо $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}=z^n$.

Н. п. ако є $\int \left[x-(2+x)\sqrt[3]{\frac{2-x}{1+2x}}\right]dx$; морамо ставити $\frac{2-x}{1+2x}=z^3$, дакле $x=\frac{2-z^3}{1+2z^3}$, а $dx=9\,\frac{z^2dz}{(1+2z^3)^2}$; тиме постає

$$\int\left[x-(2+x)\sqrt[3]{\frac{2-x}{1+2x}}\right].\,dx=9\int\frac{z^2dz\,(2-4z-z^3-3z^4)}{(1+2z^3)^3}$$

$$=9\int\frac{(2z^2-4z^3-z^5-3z^6)\,dz}{(1+2z^3)^3},$$

очевидно раціоналанъ. Разрешавамо га на тай начинъ, да найпре разложимо $1+2z^3$ по I. Ч. § 104. у просте чинителѣ, после деловну функцію $\frac{2z^2-4z^3-z^5-3z^6}{(1+2z^3)^2}$ познатимъ начиномъ у почастне разломке, а далѣ поступамо по § 96.; после свега тога пакъ враћамо за z нѣгову горню вредность $\sqrt[3]{\frac{2-x}{1+2x}}$.

2.) Ако се пакъ налазе више корена одъ $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}$, н. п. $\sqrt[m]{\left(\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}\right)^n}$ и $\sqrt[r]{\left(\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}\right)^s}$, онда преводимо дату функцію у другу раціоналну тиме, што мећемо $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}=z^{mr}$.

Н. п. ако имамо интегралити функцію

$$\frac{x\sqrt[3]{(1+x)^2}.\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}.\sqrt[3]{(1-x)^2}-\sqrt[3]{(1+x)}.\sqrt[6]{(1-x)^5}}\,dx,$$

делимо найпре броителя и именителя, да бы ю довели на споменутый случай, са $\sqrt{(1-x)}.\sqrt[3]{(1-x)^2}$. Тиме быва одъ нѣ

$$\frac{x\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}}\,dx.$$ Садъ ставлямо $\frac{1+x}{1-x}=z^6$,

дакле $x=\frac{z^6-1}{z^6+1}$; а $dx=\frac{12z^5dz}{(z^6+1)^2}$; чимъ постаѥ вопросный интегралъ $=\int\frac{(z^{12}+z^{11}+z^{10}+z^9+z^8+z^7)\,dz}{(z^6+1)^3}$, очевидно раціоналанъ.

Како пакъ треба далѣ поступати, за цело садъ више ніѥ потребно толковати.

3.) У стаию смо садъ интегралити и такове функціѥ, коѥ садрже више корена одъ $a+bx^n$ или одъ $\frac{a+bx^n}{\alpha+\beta x^n}$, н. п. $(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$ и $(a+bx)^{\frac{t}{u}}$ или $\left(\frac{a+bx^n}{\alpha+\beta x^n}\right)^{\frac{r}{s}}$ и $\left(\frac{a+bx^n}{\alpha+\beta x^n}\right)^{\frac{t}{u}}$, — само ако поредъ тога имаю іошъ заѥдничкога чинителя x^{n-1}; ѥръ прелазе у томъ случаю съ места у пређе толковане подъ 1. и 2., чимъ само метнемо $x^n=z$.

§ 101.

Ако дата диференціална функція осимъ $\sqrt{a+bx+cx^2}$ несадржи никакавъ другій **ирраціоналный** брой, али тай ѥданъ макаръ и вишепута, — онда можемо ѥ превести у раціоналну функцію на ѥданъ одъ слѣдуюћа три начина.

1.) Ставлямо $\sqrt{a+bx+cx^2}=x\sqrt{c}+z$. дакле $x=\frac{z^2-a}{b-2z\sqrt{c}}$, а $dx=-2\frac{z^2\sqrt{c}-bz+a\sqrt{c}}{(b-2z\sqrt{c})^2}dz$, чимъ постаѥ дата функція раціонална, и може се после интегралити по некомъ одъ доякошньи §§-а.

Овако поступа се нарочно у случаю, кадъ ѥ c положанъ брой.

2.) Меćемо $\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{a}+xz$, дакле $x=\frac{b-2z\sqrt{a}}{z^2-c}$, а $dx=2\,\frac{z^2\sqrt{a}-bz-c\sqrt{a}}{(z^2-c)^2}dz$.

Овай начинъ употреблява се, кадъ є број a положанъ. — Найпосле

3.) Разлажемо найпре $a+bx+cx^2$ у корене чинителѣ (Ч. I. § 104.); притомъ налазимо $x=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}=\alpha$ и $x=-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}=\beta$, тако да є после $a+bx+cx^2=c\,.\,(x+\alpha)(x+\beta)$; — затимъ ставлямо $(x+\alpha)(x+\beta)=(\alpha+x)^2\,.\,z^2$, дакле $\sqrt{a+bx+cx^2}=(\alpha+x)\,.\,z\sqrt{c}$, $x=\frac{\beta-\alpha z^2}{z^2-1}$, а $dx=\frac{2(\alpha-\beta)zdz}{(z^2-1)}$. Съ овимъ x постає $\sqrt{a+bz+cx^2}=-\frac{(\alpha-\beta)\,z^2}{z^2-1}$, а съ овомъ вредности и наћеномъ за dx, вопросный интегралъ раціоналанъ.

Овай трећій начинъ може се употребити, быо број c положанъ или одречанъ, само ако су броєви α и β притомъ доистни.

Приметити само іошъ валя, да бы при првомъ начину рачунъ нешто простіи быо, кадъ бы пре свега извукли $\sqrt{c}$ као заедничкогъ чинителя, и после бы метнули $\frac{b}{c}=m$, а $\frac{a}{c}=n$; єръ тиме имали бы место $\sqrt{a+bx+cx^2}\,.\,\sqrt{n+mx+x^2}$, а то треба ставити само $=x+z$. — Подобно быо бы при другомъ начину рачунъ простіи, кадъ бы $\sqrt{a}$ као заедничкогъ чинителя извадили, и после $\frac{b}{a}=p$, а $\frac{c}{a}=q$ поставили; єръ тиме бы место $\sqrt{a+bx+cx^2}$ имали $\sqrt{1+px+qx^2}$, коє после валя поставити само $=1+xz$.

Напослѣдку по себи разуме се, да ћемо овимъ истимъ начинима вопросну цѣль iошъ и у томъ случаю постићи, ако се буде налазiо $\sqrt{a+bx+cx^2}$ у другомъ каквомъ степену.

§ 102.

1.) Ако се у датой функцiи налази поредъ $\sqrt{a+bx}$ iошъ и $\sqrt{\alpha+\beta x}$, ставлямо $\sqrt{a+bx} = z\sqrt{\alpha+\beta x}$, дакле $a+bx = z^2(\alpha+\beta x)$, $x = \frac{\alpha z^2 - a}{b-\beta z^2}$, а $dx = \frac{2(\alpha b - a\beta)z\,dz}{(b-\beta z^2)^2}$.

Тиме бываю, каошто видимо, броєви x и dx, изражени чрезъ z и dz, рацiоналпи, али се после зато место $\sqrt{a+bx}$ налази $z\sqrt{\alpha+\beta x}$, осимъ што $\sqrt{\alpha+\beta x}$ може стаяти више пута.

Заменюючи затимъ x съ нѣговомъ вредности, израженомъ чрезъ z, постає $\sqrt{\alpha+\beta x} = \frac{\sqrt{\alpha b - a\beta}}{\sqrt{b-\beta z^2}}$, чимъ є вопросный интегралъ, збогъ у нѣму налазећегъ се $\sqrt{b-\beta z^2}$, сведенъ на случай прећашнѣгъ §-а.

Тако н. п. ако є вопросна функцiя $\frac{(x-1)\sqrt{x+1}-x}{(x+1)\sqrt{x-1}+x} \times$ $\times\, dx$, ставляюћи $\sqrt{x+1} = z\sqrt{x-1}$, дакле $x = \frac{z^2+1}{z^2-1}$, $x-1 = \frac{2}{z^2-1}$, $x+1 = \frac{2z^2}{z^2-1}$, а $dx = -\frac{4z\,dz}{(z^2-1)^2}$, — имамо нову функцiю одъ z:

$$-4\,\frac{2z^2\sqrt{2}-z(z^2+1)\sqrt{z^2-1}}{(z^2-1)^2.[2z^2.\sqrt{2}+(z^2+1)\sqrt{z^2-1}]}.dz,$$

коя збогъ $\sqrt{z^2-1}$, подлежи предходећемъ §-у.

Ставляюћи дакле, по тога §-а 3. упутству, $z^2 - 1 = (z+1)(z-1) = (z-1)^2 . v^2$, т. є. $z = \frac{v^2+1}{v^2-1}$; $z^2 = \frac{(v^2+1)^2}{(v^2-1)^2}$,

$z^2 + 1 = 2\frac{v^4+1}{(v^2-1)^2}$; $z^2 - 1 = 4\frac{v^2}{(v^2-1)^2}$; а $dz = -4\frac{v\,dv}{(v^2-1)^2}$; — добыямо нову функцію одъ v,

$$\frac{(v^2-1)(v^4-1)^2 . \sqrt{2} - 2v(v^8-1)}{v^3 . [(v^4-1)(v^2+1)\sqrt{2} + 2v(v^4+1)} . dv,$$

коя є раціонална, и моћи се зато лако интегралити по доякошнъимъ §§-ма.

2.) Ако се пакъ у датой диференціалной функціи налазе квадратни корени одъ разны функція другога степена, онда се наилази на интегралъ функціе

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}},$$

гди $f(x)$ представля какву нибудъ алгебрайску функцію, — кои се врло тешко, и у већой части случаєва никако неможе ураціоналити.

Такови интеграли називаю се **елиптични трансценденти**, а занимали су се съ нъима найзнатніи аналитици, и одъ старіи*), и одъ млађи. Али како се о нъима уобште іошъ врло мало зна, а у особите случаєве упуштаюћи се морали бы прекорачити границе овога дела: то се морамо за сада задовольити само съ овомъ напоменомъ.

---

*) Одъ овы нарочито Айлеръ, Лагранжъ и Лежандръ, а одъ новіи особито Якоби и Абелъ. — Лежандръ назива елиптичнимъ трансцендентима све интеграле садржане у

$$\int \frac{A + B\sin^2 z}{C + D\sin^2 z} . \frac{dz}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 z}},$$

кои се добыя известнимъ некимъ преображенѣмъ горнѣга.

ж.) Интеграленѣ израза $x^m . dx (a + bx^n)^{\frac{r}{s}}$.

§ 103.

Докъ є при изразу $x^m . dx (a + bx^n)^v$ изложитель v положанъ или одречанъ цео брой, дотле интеграленѣ истога израза, ма какви поредъ тога были изложительи m и n, неподлежи никаквой тешкоћи. Єръ, ако при положномъ изложителю v развіємо $(a + bx^n)^v$ по биномномъ правилу, и све чланове тога степена после помложимо са $x^m dx$, имамо место вопросногa интеграла интегралъ алгебрайскогъ сбира самы монома, кои є, каошто знамо, лако разрешенъ. Ако є пакъ изложитель v одречанъ, онда валя само датый изразъ разложити у почастне разломке, и после далѣ по § 95. поступати.

Изъ тій узрока говоритћемо овде о интограленю израза $x^m . dx (a + bx^n)^v$ само у томъ случаю, ако є биномъ $(a + bx^n)^v$ ирраціоналанъ, т. є. ако є изложитель v чистый разломакъ $\frac{r}{s}$.

§ 104.

Осимъ у она два особита случая, гди є или $m = o$ а $n = 1$, или є $x^m dx$ диференціалъ одъ x^n, кое смо у § 87. већъ разрешили подъ образцима 17. и 18., може се вопросный интегралъ іошъ у два случая определити као раціоналанъ. Кадъ и како? видитћемо, докъ се овде найпре уверимо, да при томъ послу изложителѣ m и n можемо предпоставити као целе, иначе или положне или одречне, єръ се други случаєви у томъ обзиру сви даю свести на тай єданъ.

Найпре узмимо да є m положанъ или одречанъ разломакъ $\frac{\alpha}{\beta}$, т. є $m = \pm \frac{\alpha}{\beta}$, а n положанъ разломакъ $\frac{\gamma}{\delta}$; дакле вопросный изразъ вида $x^{\pm\frac{\alpha}{\beta}} . dx\left(a+bx^{\frac{\gamma}{\delta}}\right)^{\frac{r}{s}}$.

Поставляюћи $x = z^{\beta\delta}$, быва $x^{\pm\frac{a}{\beta}} = z^{\pm a\delta}$; $x^{\frac{\gamma}{\delta}} = z^{\beta\gamma}$; $dx = \beta\delta . z^{\beta\delta-1} . dz$, а съ тима вредностима

$$\int x^{\pm\frac{a}{\beta}} . dx \left(a + bx^{\frac{\gamma}{\delta}}\right)^{\frac{r}{s}} = \beta\delta \int z^{\delta(\beta \pm a)-1} . dz \left(a + bz^{\beta\gamma}\right)^{\frac{r}{s}},$$

у комъ су изложительи одъ z очевидно цели броеви, првый положанъ или одречанъ, а другій положанъ.

Сада нека є, поредъ пређашнѣга m изложитель $n = -\frac{\gamma}{\delta}$; т. є. одречанъ разломакъ.

Ставляюћи у томъ случаю найпре $x = \frac{1}{z}$, быва $x^{\pm\frac{a}{\beta}} = z^{\pm\frac{a}{\beta}}$, $x^{-\frac{\gamma}{\delta}} = z^{\frac{\gamma}{\delta}}$, $dx = -\frac{dz}{z^2}$; чимъ є вопросный

$$\int x^{\pm\frac{a}{\beta}} . dx \left(a + bx^{-\frac{\gamma}{\delta}}\right)^{\frac{r}{s}} = -\int z^{-\frac{2\beta \pm a}{\beta}} dz \left(a + bz^{\frac{\gamma}{\delta}}\right)^{\frac{r}{s}}$$

очевидно сведенъ на пређашнѣй случай, дакле посредно опетъ на онай са целимъ изложительима, тако да сада основано можемо предпоставити изложителѣ m и n у испытати имаюћемъ се интегралу израза $x^m dx (a + bx^n)^{\frac{r}{s}}$, као целе броеве.

§ 105.

1.) Узмимо $a + bx^n = z^s$. Постає $x = b^{-\frac{1}{n}} . (z^s - a)^{\frac{1}{n}}$, $x^m = b^{-\frac{m}{n}} . (z^s - a)^{\frac{m}{n}}$, $dx = \frac{sb^{-\frac{1}{n}}}{n} . z^{s-1} . dz (z^s - a)^{\frac{1}{n}-1}$, а съ тима вредностима

$$\int x^m dx (a + bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}} . \int z^{r+s-1} . dz (z^s - a)^{\frac{m+1}{n}-1},$$

изъ чега є видити, да ће новый интегралъ быти раціоналанъ, ако є случайно $\frac{m+1}{n}$ цео, положанъ или одречанъ брой, и моћи ће се у томъ случаю лако определити єднимъ одъ споменута два начина у § 103.

Н. п. ако є датый изразъ $x^3dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, имамо $m=3$, $n=2$, $a+bx^n=2-x^2=z^2$, $r=1$, $s=2$, $a=2$, $b=-1$, дакле вопросный интегралъ по горнѣмъ образцу,

$$\int x^3dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}}=\int z^2dz\,(z^2-2) \text{ раціоналанъ,}$$

а то зато што є $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2=$ цео брой. Израђенъ є $=\frac{z^5}{5}-\frac{2z^3}{3}$, тако да ако повратимо вредность $z=\sqrt{2-x^2}$, имамо

$$\int x^3\,dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}}=(2-x^2)\left[\frac{1}{5}(2-x^2)-\frac{2}{3}\right]\cdot\sqrt{2-x^2}+C.$$

2.) Извуцимо x^n као заєдничкогъ чинителя бинома $(a+bx^n)$, и поставимо затимъ $ax^{-n}+b=z^s$. Быт'ће $x=a^{\frac{1}{n}}.(z^s-b)^{-\frac{1}{n}}$, $x^{m+\frac{nr}{s}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}.(z^s-b)^{-\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}$, $dx=-\frac{s}{n}\times$ $\times a^{\frac{1}{n}}.(z^s-b)^{-\frac{n+1}{n}}.z^{s-1}.dz$, а съ тима вредностима вопросный

$$\int x^m dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=\int x^{m+\frac{nr}{s}}.dx\,(ax^{-n}+b)^{\frac{r}{s}}$$

$$=-\frac{s}{n}.a^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}}\int z^{r+s-1}.dz\,(z^s-b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}\right)-1}.$$

Овай интегралъ, очевидно, быт'ће раціоналанъ, ако є случайно $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$ цео брой, и моћи ће се разрешити по єдномъ одъ споменута два начина у § 103.

Н. п. ако є датый изразъ

$$\frac{dx}{x^2.\sqrt{2-x^2}}=x^{-2}.dx\,(2-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

имамо после извлаченя броя x^2, као заєдничкога чинителя бинома $2-x^2$, $m=-2$, $n=2$, $2x^{-2}-1=z^2$, $a=2$, $b=-1$, $r=-1$, $s=2$, дакле вопросный интегралъ по горнѣмъ образцу

$$\int\frac{dx}{x^2.\sqrt{2-x^2}}=-\frac{1}{2}\int dz=-\frac{1}{2}z,$$ раціоналанъ,

зато што є $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=\frac{-2+1}{2}-\frac{1}{2}=-1$ цѣо брой.

Враћаюћи вредность $z=\sqrt{2x^{-2}-1}=\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}$, имамо коначно

$$\int\frac{dx}{x^2.\sqrt{2-x^2}}=-\frac{\sqrt{2-x^2}}{2x}.$$

§ 106.

За упражненѣ испытаймо, спадаюли

$$\int\frac{dx}{x^3.\sqrt[3]{1+x^3}} \text{ и } \int\frac{dx\sqrt{1+2x}}{x}$$

у кои одъ изложена два особита случая?

При првомъ є $m=-3$, $n=3$, $r=-1$, $s=3$, $\frac{m+1}{n}=\frac{-3+1}{3}=-\frac{2}{3}$, збогъ чега се тай интегралъ по првомъ начину предходећегъ §а неможе разрешити, али га, збогъ $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1$, можемо по횐номъ другомъ. По тога начина обштемъ образцу, обзиромъ на то да є $a=1$ и $b=1$, слѣдуе

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{1+x^3}} = -\int z\,dz = -\frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} + C.$$

При другомъ є интегралу $m = -1,\ n = 1,\ r = 1,\ s = 2$, дакле $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{1} = 0$, а $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, збогъ чега истый интегралъ можемо добыти по првомъ начину, никако пакъ по другомъ. Общтій образацъ првога начина дає, збогъ $a = 1$ и $b = 2$,

$$\int\frac{dx\sqrt{1+2x}}{x} = 2\int\frac{z^2\,dz}{z^2--1} = 2\int\left(dz + \frac{dz}{z^2-1}\right) = 2\left(z - \int\frac{dz}{1-z^2}\right)$$

$$= 2z - l\,\frac{1+z}{1-z} = 2\sqrt{1+2x} - l\,\frac{1+\sqrt{1+2x}}{1-\sqrt{1+2x}} + C.$$

§ 107.

Помоћу овы §§-а, у § 103. споменуты образаца §-а 95. и дотичны упутства за интеграленѣ ирраціоналны функція, у станю смо врло млого интеграла вопроснога ирраціоналногъ вида на прекій начинъ превести у раціоналне, и као такове у крайной форми определити; али несравнѣно више случаєва остаю, гди то или никако ніє могуће, или само са врло великимъ трудомъ. Тога ради поставит’ћемо у слѣдуюћему, нарочно за такове случаєве, іошъ неколико образаца, съ коима вопросный интегралъ доводимо на друге истога вида, али у коима изложитель m, или изложитель $\frac{r}{s}$, или обадва бываю све простіи, докъ се найпосле недође до таквогъ интеграла, кои є или већъ познатъ, или се може изнаћи на єданъ одъ дояко познати начина’.

§ 108.

1.) Очевидно є $x^m . dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = x^{m-n+1} . x^{n-1} . dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$.

Ставляюћи у III. правилу § 85., по комъ є

$$\int \varphi(x)\, d\, f(x) = \varphi(x)\, f(x) - \int f(x)\, d\, \varphi(x)\,,$$

$\varphi(x) = x^{m-n+1}$, а $d\, f(x) = x^{n-1}.\, dx\, (a + bx^n)^{\frac{r}{s}}$, слѣдує збогъ

$$f(x) = \int x^{n-1}\, dx\, (a + bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{bn\,(r+s)} \cdot (a + bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$$ (§ 87. обр. 18.), а $d\varphi(x) = (m - n + 1)\, x^{m-n}.\, dx$, —

$$\int x^m.dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{bn\,(r+s)} \cdot x^{m-n+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$$

$$- \frac{s(m-n+1)}{bn\,(r+s)} \int x^{m-n}\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1} \quad \ldots \quad (\alpha.,$$

или збогъ $x^{m-n}.\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1} = x^{m-n}.\, dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}.\, (a+bx^n) =$ $ax^{m-n}.\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} + bx^m.\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$;

$$\int x^m\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{bn(r+s)} \cdot x^{m-n+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$$

$$- \frac{as\,(m-n+1)}{bn\,(r+s)} \int x^{m-n}.\, dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$$

$$- \frac{s\,(m-n+1)}{n\,(r+s)} \int x^m\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}},$$

найпосле ако надлежно скратимо,

$$\int x^m.\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{b\,[nr + s(m+1)]}\, x^{m-n+1}.\, (a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$$

$$- \frac{as\,(m-n+1)}{b\,[nr+s(m+1)]} \cdot \int x^{m-n}.\, dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} \quad \ldots \quad (\text{I}.$$

2.) Изъ овогъ образца последный интегралъ определяюћи слѣдує

$$\int x^{m-n}.\, dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{x^{m-n+1}.\, (a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}}{a\,(m-n+1)}$$

$$- \frac{b\,[nr+s(m+1)]}{as\,(m-n+1)} \int x^m\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}},$$

а одтудъ опетъ, ако место m узмемо $m+n$,

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=\frac{x^{m+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}}{a(m+1)}$$

$$-\frac{b[nr+s(m+n+1)]}{as(m+1)}\int x^{m+n}.\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}\;\ldots\ldots\;(\mathrm{II}.$$

3.) Горный образацъ α.), ако у нѣму найпре узмемо $\frac{r}{s}-1$ место $\frac{r}{s}$, а $m+n$ место m, и после определимо $\int x^m\,dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$, — дає

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=\frac{x^{m+1}.a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{m+1}$$

$$-\frac{bnr}{s(m+1)}.\int x^{m+n}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}-1}\;\ldots\;(\beta.$$

Одовудъ пакъ, изражаваюћи bx^{m+n} овако: $x^m.bx^n=$ $=x^m.[(a+bx^n)-a]=x^m.(a+bx^n)-ax^m$, добыямо

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=\frac{x^{m+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{m+1}$$

$$-\frac{nr}{s(m+1)}\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$$

$$+\frac{anr}{s(m+1)}.\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}-1},$$

а ако надлѐжно скратимо,

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=\frac{s\,x^{m-1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{s(m+1)+nr}$$

$$+\frac{anr}{s(m+1)+nr}.\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}-1}\;\ldots\;(\mathrm{III}.$$

4.) Найпосле ако изъ овогъ образца определимо десный интегралъ и после изменимо $\frac{r}{s}$ са $\frac{r}{s}+1$, слѣдує

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=-\frac{s\,x^{m+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}}{an(r+s)}$$

$$+\frac{s(m+n+1)+nr}{an(r+s)}\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}\;\ldots\;(\mathrm{IV}.$$

§ 109.

Одъ изнаћены овы образаца служи I. за умаляванѣ положногъ, а II. за увећаванѣ одречногъ изложителя m, кадъ є изложитель $\frac{r}{s}$ у обзиру на крайнѣй интегралъ сходанъ; — III. є за умаляванѣ положногъ, а IV. за увећаванѣ одречногъ изложителя $\frac{r}{s}$, у случаю ако є изложитель m за крайнѣй интегралъ удесанъ.

Ако треба изложителя m умалявати, и уєдно изложителя $\frac{r}{s}$ увећавати, или обратно овога умалявати а онога увећавати, могу у многимъ случаєвима врло добро послужити споредни горнѣи образци подъ α.) и β.).

Догодитће се при употребляваню вопросны образаца, да именителѣи у десной части постаю равни нулли, и зато дотичный образацъ неупотребанъ; но на срећу се то башъ при таковимъ случаєвима появлює, гди се вопросный интегралъ другимъ некимъ пречимъ путемъ лако доводи или на интегралъ монома, или на интегралъ раціоналногъ каквогъ разломка, тако дакле да оне образце и непотребуємо.

За упражненѣ у употребляваню исты образаца узмимо одма неколико

Примера.

§ 110.

1.) $\int x^5 . dx \, (2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = ?$

Ако у образцу I. метнемо $m = 5$, $n = 2$, $r = 1$, $s = 2$, $a = 2$, $b = -1$, слѣдує

$$\int x^5 . dx \, (2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{7} x^4 . (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{7} \int x^3 \, dx \, (2 - x^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Са $m = 3$ поредъ исты други вредностій, добыямо

$$\int x^3\,dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{5}x^2(2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}\int x\,dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Како є пакъ $x\,dx$, безъ обзира на сталногъ чинитеља, диференціалъ одъ x^2, то є по образцу 18. § 87.

$$\int x\,dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Заменююћи дакле све по реду добыямо

$$\int x^5 dx(2-x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{7}x^4(2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{35}x^2(2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{32}{105}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -(15x^4 - 24x^2 - 32).(2-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2.) $\int \frac{dx}{x^4.\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}.\,dx\,(2+x^2)^{-\frac{1}{2}} = ?$

Образацъ II., узимаюћи у нѣму $m = -4$, $n = 2$, $r = -1$, $s = 2$, $a = b = 1$, — дає

$$\int x^{-4}.\,dx\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}x^{-3}.(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\int x^{-2}.\,dx(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Са $m = -2$ пакъ, поредъ исты други вредностій, налазимо

$$\int x^{-2}.\,dx\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x^{-1}.(1+x^2)^{\frac{1}{2}},$$

и зато ако надлежно заменемо, вопросный

$$\int x^{-4}\,dx.(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}x^{-3}.(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-1}.(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x}\right)\sqrt{1+x^2}$$

$$= -\frac{1}{3x^3}(1-2x^2)\sqrt{1+x^2} + C.$$

3.) $\int \frac{dx\,(1+x)^{\frac{5}{2}}}{x} = \int x^{-1}\,dx\,(1+x)^{\frac{5}{2}} = ?$

По III. образцу, ако у истомъ ставимо $m = -1$, $n = 1$, $a = b = 1$, $r = 5$, $s = 2$, — слѣдує

$$\int x^{-1}\,dx\,(1+x)^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + \int x^{-1}\,dx\,(1+x)^{\frac{3}{2}}.$$

По томъ истомъ, са $r = 3$ поредъ прећашньи други вредностій

$$\int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + \int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{\frac{1}{2}}.$$

И опетъ по нѣму са $r = 1$,

$$\int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{\frac{1}{2}} = 2\,(1+x)^{\frac{1}{2}} + \int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Како є пакъ по § 99.

$$\int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = l\,\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1},$$

то є, ако уредно заменемо, вопросный

$$\int \frac{dx\,(1+x)^{\frac{5}{2}}}{x} = \frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + 2(1+x)^{\frac{1}{2}} + l\,\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= 2\left[\frac{1}{5}(1+x)^2 + \frac{1}{3}(1+x) + 1\right].\sqrt{1+x} + l\,\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

4.) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(2-x)^3}} = \int x^2\,dx\,(2-x)^{-\frac{3}{2}} = ?$

По образцу IV., узимаюћи $m = 2$, $n = 1$, $r = -3$, $s = 2$, $a = 2$, $b = -1$, имамо

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(2-x)^3}} = x^3\,(2-x)^{-\frac{1}{2}} - 5\int x^2.\,dx\,(2-x)^{-\frac{1}{2}},$$

а овай є последный интегралъ по § 99. $= -2\left[\frac{1}{5}(2-x)^2 - \frac{4}{3}(2-x) + 4\right] \cdot \sqrt{2-x}$; дакле ако ову нѣгову вредность заменемо, вопросный

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(2-x)^3}} = \frac{x^3}{\sqrt{2-x}} + 10\left[\frac{1}{5}(2-x)^2 - \frac{4}{3}(2-x) + 4\right] \cdot \times$$

$$\times \sqrt{2-x} + C.$$

§ 111.

Осимъ овы примера употребитћемо образце § 108. іошъ на разрешенѣ често появлююћи се интеграла

$$\int dx\sqrt{a \pm bx^2},\quad \int \frac{x^m.\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int \frac{x^m.\,dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{и} \quad \int \frac{x^m.\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

за свако **цело**, положно или одречно m.

1.) Ако у образцу III. поменутога §-а узмемо $m = 0$, $n = 2$, $\frac{r}{s} = \frac{1}{2}$, добыямо

$$\int dx\,(a+bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,x\,(a+bx^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}};$$

ако пакъ место последнѣгъ интеграла узмемо нѣгову вредность по 20. образцу § 88., истый

35.) $$\int dx\,(a+bx^2)^{\frac{1}{2}} = \int dx\sqrt{a+bx^2} = \frac{1}{2}\,x\sqrt{a+bx^2}$$

$$+ \frac{a}{2\sqrt{b}}\,l\,(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}) + C.$$

На истый начинъ

$$\int dx\,(a-bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,x\,(a-bx^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}},$$

или ако место последнѣгъ интеграла метнемо нѣгову вредность по 21. образцу пређе поменутога §-а,

$$36.)\quad \int dx\sqrt{a-bx^2}=\frac{1}{2}\,x\sqrt{a-bx^2}$$

$$+\frac{a}{2\sqrt{b}}\;arc\left(sin=x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+C.$$

2.) Ставляюћи у образцу I. $n=2$, $r=-1$, $s=2$, $a=1$, $b=-1$, слѣдує уобште

$$\int\frac{x^m.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-1}.\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}.\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

ту пакъ узимаюћи место m найпре по реду све безпарне, а после све парне броєве, добыямо подпуный

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C,$$

$$\int\frac{x^3.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^2}{3}\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2.1}{3.1}\right)\cdot\sqrt{1-x^2}+C,$$

$$\int\frac{x^5.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^4}{5}\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{4}{5}\int\frac{x^3.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\left(\frac{x^4}{5}+\frac{4.1}{5.3}\,x^2+\frac{4.2.1}{5.3.1}\right)\sqrt{1-x^2}+C,$$

$$\int\frac{x^7.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^6}{7}\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{6}{7}\int\frac{x^5.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\left(\frac{x^6}{7}+\frac{6.1}{7.5}\,x^4+\frac{6.4.1}{7.5.3}\,x^2+\frac{6.4.2.1}{7.5.3.1}\right)\sqrt{1-x^2}+C,$$

. . . .

$$\int \frac{x^2.\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\, arc\,(sin = x) + C;$$

$$\int \frac{x^4.\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^3}{4}\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{4}\int\frac{x^2.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{x^3}{4} + \frac{3.1}{4.2}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{3.1}{4.2}\, arc\,(sin = x) + C;$$

$$\int \frac{x^6.\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^5}{6}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{6}\int\frac{x^4.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{x^5}{6} + \frac{5.1}{6.4}x^3 + \frac{5.3.1}{6.4.2}x\right)\sqrt{1-x^2}$$

$$+ \frac{5.3.1}{6.4.2}\, arc\,(sin = x) + C;$$

. . . .

3.) Обзирући се нато. да є образацъ II. нарочно за одречногъ изложителя m, узимаюћи т. є. у истомъ образцу одма таково m, стои

$$\int\frac{dx\,.\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{x^m} = -\frac{(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}}{a\,(m-1)\,x^{m-1}}$$

$$+\frac{b\,[nr - s\,(m-n-1)]}{as\,(m-1)}\int\frac{dx\,.\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{x^{m-n}}\ldots(v.)$$

тако да ако метнемо $n = 2$, $r = -1$, $s = 2$, $a = 1$, $b = -1$, имамо уобште подпуный

$$\int\frac{dx}{x^m.\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{x^{m-2}.\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Овай интегралъ, каошто се лако увиђа, излази найпосле на $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$; зато да пре свега другога изнађемо тай.

Образацъ 28. § 89., ако ставимо $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -$, дае

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = l\left(\frac{2\sqrt{1-x^2}-2}{x}\right) = l\frac{(-2).(1-\sqrt{1-x^2})}{x}$$

$$= l\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + l(-2) = l\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

(ако т. є. $l(-2)$ прибронмо сталномъ брою C)

$$= -l\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}} = -l\frac{x(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= -l\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = -lX,$$

ако т. є. ради краткоће у далѣмъ послу ставимо

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = X.$$

Садъ узмимо у горнѣмъ образцу m найпре по реду = безпарнимъ, а после парнимъ броевима. Слѣдуе

$$\int \frac{dx}{x^3.\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\,lX + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^5.\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{4x^4}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^3.\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{1}{4x^4} + \frac{3.1}{4.3\,x^2}\right)\sqrt{1-x^2} - \frac{3.1}{4.2}\,lX + C,$$

$$\int\frac{dx}{x^7.\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{6x^6}.\sqrt{1-x^2}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x^5.\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\left(\frac{1}{6x^6}+\frac{5.1}{6.4.x^4}+\frac{5.3.1}{6.4.2.x^2}\right).\sqrt{1-x^2}$$

$$-\frac{5.3.1}{6.4.2}\,lX+C;$$

. . . .

$$\int\frac{dx}{x^2.\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{1.x}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^4.\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{3.x^3}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2.\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\left(\frac{1}{3x^3}+\frac{2}{3.1.x}\right)\sqrt{1-x^2}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^6.\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{5.x^5}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\left(\frac{1}{5x^5}+\frac{4}{5.3.x^3}+\frac{4.2}{5.3.1.x}\right).\sqrt{1-x^2}+C,$$

. . . .

4.) **У**зимаюћи у свима предходећимъ образцима подъ 2. и 3. место x, $\frac{1}{x}$, дакле место dx, $-\frac{dx}{x^2}$, — добыямо по реду

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^4.\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{1}{3x^3}+\frac{2.1}{3.1.x}\right)\sqrt{x^2-1}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^6.\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{1}{5x^5}+\frac{4.1}{5.3.x^3}+\frac{4.2.1}{5.3.1.x}\right)\sqrt{x^2-1}+C,$$

. . . .

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-arc\left(sin=\frac{1}{x}\right)$$

$$\int\frac{dx}{x^3.\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2x^2}.\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}arc\left(sin=\frac{1}{x}\right)+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^5.\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{3\,.\,1}{4.2\,.\,x^2}\right)\sqrt{x^2-1}-\frac{3.1}{4.2}arc\left(sin=\frac{1}{x}\right)+C,$$

. . . .

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=l\,(x+\sqrt{x^2-1})+C,$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\,l\,(x+\sqrt{x^2-1})+C,$$

. . . .

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}+C,$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2.1}{3.1}\right)\sqrt{x^2-1}+C,$$

. . . .

5.) Найпосле, збогъ $\frac{x^m.\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=x^m.dx(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}=x^{m-\frac{1}{2}}\times$ $\times\,dx(2a-x)^{-\frac{1}{2}}$, слѣдуе изъ образца I., ставляюћи у истомъ $2a$ место a, $b=-1$, $m-\frac{1}{2}$ место $m, n=1, r=-1, s=2,$ —

$$\int\frac{x^m.\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{1}{m}x^{m-\frac{1}{2}}.\sqrt{2a-x}+\frac{a(2m-1)}{m}\int\frac{x^{m-1}\,.\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}\,..\quad(a.$$

Подобно изъ образца *v.*)

$$\int\frac{dx}{x^m.\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a(2m-1)x^m}$$

$$+\frac{m-1}{a(2m-1)}\int\frac{dx}{x^{m-1}.\sqrt{2ax-x^2}}\;.\;.\;.\;.\;.\quad(b.,$$

два образца, съ коима доводимо вопросне интеграле постепено на друге истога рода, съ маньимъ изложителѣмъ m, докъ првый найпосле на

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = arc\,(sin\,.\,v = \frac{x}{a}) \quad \text{(обр. 14. § 86.)}$$

$$= C - arc\,(sin = \frac{a - x}{a})\ {}^{*)}, \text{ или}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\sqrt{2ax - x^2} + a \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

$$= -\sqrt{2ax - x^2} - arc\,(sin = \frac{a - x}{a})\ {}^{**)}, \text{— а дру-}$$

гій на $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = arc\,(sin\,v = \frac{x}{a})$, или

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{1}{ax} \sqrt{2ax - x^2}$$

(§ 90. обр. 31.).

з.) Неколико образаца за интеграле функція са $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}}$.

§ 112.

Место прекогъ интеграленя функція, коє садрже $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}}$, пробитачніє є у млогимъ случаєвима изнаћи вопросный интегралъ помоћу таковы образаца, съ

---

*) $arc\,(sin\,.\,v = \frac{x}{a}) = arc\,(cos = 1 - \frac{x}{a}) = 90^0 - arc\,(sin = 1 - \frac{x}{a})$
$= C - arc\,(sin = \frac{a - x}{a})$

**) ставляюћи у a.) $m = 1$.

коима га постепено доводимо на друге, већъ познате интеграле. Зато ћемо у слѣдуюћимъ §§-ма неколико тога свойства образаца поставити, и одма на друге, іошъ потребне интеграле употребити.

§ 113.

Образци III. и IV. § 108., ставляюћи $m=0$, $n=2$, и $c+x$ место x, даю

$$\int dx\,.\,[(a+bc^2)+2bcx+bx^2]^{\frac{r}{s}}$$

$$=\frac{s}{s+2r}\cdot(c+x)\cdot\,[(a+bc^2)+2bcx+bx^2]^{\frac{r}{s}}$$

$$+\frac{2ar}{s+2r}\int dx\ [(a+bc^2)+2bcx+bx^2]^{\frac{r}{s}-1}$$

и $\int dx\,.\,[(a+bc^2)+2bcx+bx^2]^{\frac{r}{s}}$

$$=-\frac{s}{2a(r+s)}\cdot(c+x)\cdot[(a+bc^2)+2bcx+bx^2]^{\frac{r}{s}+1}$$

$$+\frac{2r+3s}{2a(r+s)}\int dx\ [(a+bc^2)+2bcx+bx^2]^{\frac{r}{s}+1};$$

одавде пакъ, ставляюћи $a+bc^2=\alpha$, $2bc=\beta$ и $b=\gamma$, т. є. $a=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\gamma}$, $b=\gamma$ и $c=\frac{\beta}{2\gamma}$, — слѣдує

$$\int dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}}=\frac{(\beta+2\gamma x)\,s}{2\gamma\,(s+2r)}\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}}$$

$$+\frac{(4\alpha\gamma-\beta^2)r}{2\gamma\,(2r+s)}\cdot\int dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}-1}\ \ .\ .\ (A.$$

и $$\int dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}}=-\frac{(\beta+2\gamma x)\,s}{(4\alpha\gamma-\beta^2)(r+s)}\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}+1}$$

$$+\frac{2\gamma\,(2r+3s)}{(4\alpha\gamma-\beta^2)(r+s)}\cdot\int dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}+1},$$

или место овогъ последнѣгъ образца, узевши у призренѣ да истый, каогодъ и онай IV., одъ кога є добывенъ, стои нарочно за одречногъ изложителя $\frac{r}{s}$, другій

$$\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}}}=\frac{(\beta+2\gamma x)\,s}{(4\alpha\gamma-\beta^2)(r-s)(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}-1}}$$

$$+\frac{2(2r-3s)}{(4\alpha\gamma-\beta^2)(r-s)}\cdot\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}-1}}\ldots(B.$$

§ 114.

1.) Изъ горнѣгъ образца A.), ако узмемо $\frac{r}{s}=\frac{1}{2}$, слѣдує

$$\int dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{\beta+2\gamma x}{4\gamma}(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{8\gamma}\int dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

т. є.

$$\int dx\sqrt{\alpha+\beta x\pm\gamma x^2}=\frac{\beta\pm2\gamma x}{\pm4\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x\pm\gamma x^2}$$

$$+\frac{\pm4\alpha\gamma-\beta^2}{\pm8\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x\pm\gamma x^2}},$$

и дакле, ако место последнѣгъ интеграла узмемо нѣгове вредности по образцима 24. и 25. § 89.,

37.) $$\int dx\cdot\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{\beta+2\gamma x}{4\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

$$+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}}\,l\left[2\gamma x+\beta+2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}\right]$$

$$38.)\ \int dx\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}=\frac{2\gamma x-\beta}{4\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

$$+\frac{4\alpha\gamma+\beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}}.\,arc\left(sin=\frac{2\gamma x-\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}\right)$$

2.) Съ $\alpha=0$, $\beta=2a$ и $\gamma=1$; добыямо изъ предходећа два образца

$$39.)\ \int dx\sqrt{2ax+x^2}=\frac{1}{2}(a+x)\sqrt{2ax+x^2}-\frac{a^2}{2}\,l\,(x+a$$

$$+\sqrt{2ax+x^2})+C$$

$$40.)\ \int dx\sqrt{2ax-x^2}=\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}$$

$$+\frac{a^2}{2}\,arc\left(sin=\frac{x-a}{a}\right)+C.$$

3.) Ако у триному $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ узмемо $x=y-\frac{\beta}{2\gamma}$ $=\frac{2\gamma y-\beta}{2\gamma}$; прелази по теоріи выши єдначина (I. Ч.) истый триномъ у биномъ вида $a+by^2$, при чему є $a=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\gamma}$, а $b=\gamma$.

Пошто є пакъ при той замени іошъ $dx=dy$, то слѣдує

$$41.)\ \int x^m.\,dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}}=\int\left(y-\frac{\beta}{2\gamma}\right)^m.\,dy\,(a+by^2)^{\frac{r}{s}}$$

$$=(-1)^m.\int\left(\frac{\beta}{2\gamma}-y\right)^m.\,dy\,(a+by^2)^{\frac{r}{s}}.$$

При овоме имамо приметити: ако є m **цео положанъ** брой, онда се десный интегралъ састои изъ $m+1$ интеграла, вида $\int Ay^r.\,dy\,(a+by^2)^{\frac{r}{s}}$, коє можемо определити по пређашньимъ §§-ма. Шта више, и іошъ обштіи $\int x^{q}.\, dx\, (a+\beta x^{k}+\gamma x^{2k})^{\frac{r}{s}}$ може се условно на тай истый начинъ изнаћи, єръ чимъ метнемо $x^{k}=z$, прелази у $\frac{1}{k}\int z^{\frac{m+1}{k}}\cdot dz\,(\alpha+\beta z+\gamma z^{2})^{\frac{r}{s}}$, т. є. у пређашный, тако да нѣгово решенѣ после, ако є само $\frac{m+1}{k}$ цео положанъ брой, неподлежи никаквой даљой теготи.

4.) Изъ пређашнѣгъ 41. интеграла, чимъ метнемо $m=1$, а $\frac{r}{s}=\frac{1}{2}$, постає

$$\int xdx\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^{2}}=-\int\left(\frac{\beta}{2\gamma}-y\right).dy.(a+by^{2})^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{\beta}{2\gamma}\int dy.(a+by^{2})^{\frac{1}{2}}+\int ydy.(a+by^{2})^{\frac{1}{2}},$$

узимаюћи пакъ место ова два интеграла десно нњиове односне вредности по обр. 35. § 111. и обр. 18. § 87., слѣдує

$$\int xdx.\sqrt{a+\beta x+\gamma x^{2}}=-\frac{\beta}{4\gamma}[y\sqrt{a+by^{2}}+\frac{a}{\sqrt{b}}\,l\,(y\sqrt{b}+$$

$$+\sqrt{a+by^{2}})]+\frac{1}{3}(ab+y^{2}).\frac{\sqrt{a+by^{2}}}{b}.$$

Найпосле повративши место y и $a+by^{2}$ нньиове односне вредности $y=x+\frac{\beta}{2\gamma}=\frac{2\gamma x+\beta}{2\gamma}$ и $\alpha+\beta x+\gamma x^{2}$, остає

42.) $$\int xdx.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^{2}}=-\frac{\beta}{8\gamma^{2}}.[(\beta+2\gamma x)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^{2}}$$

$$+\frac{4\alpha\gamma-\beta^{2}}{2\sqrt{\gamma}}\,l\,(\beta+2\gamma x+2\sqrt{\gamma}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^{2}})$$

$$+\frac{3}{\gamma}(\alpha+\beta x+\gamma x^{2})^{\frac{3}{2}}+C.$$

§ 115.

Тражећи диференціалъ израза $x^{n-1}.\sqrt{a+\beta x+\gamma x^2}$, добыямо га $= (n-1)\,x^{n-2}.\,dx\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\frac{x^{n-1}.\,(\beta+2\gamma x)\,dx}{2\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$

$$=\frac{(n-1)\,\alpha x^{n-2}.\,dx+(n-\tfrac{1}{2})\,\beta x^{n-1}.\,dx+n\gamma x^n.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}.$$

Одтудъ слѣдуе

$$\frac{x^n.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=d\,.\,x^{n-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-\frac{(n-\frac{1}{2})\,\beta}{n\gamma}.\frac{x^{n-1}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

$$-\frac{(n-1)\alpha}{n\gamma}.\frac{x^{n-2}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

и дакле

$$\int\frac{x^n.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{n\gamma}.\,x^{n-1}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-\frac{(n-\frac{1}{2})\,\beta}{n\gamma}\times$$

$$\times\int\frac{x^{n-1}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}-\frac{(n-1)\,\alpha}{n\gamma}\int\frac{x^{n-2}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}\ \ldots(C.,$$

образацъ за умаляванѣ положногъ изложителя n, дакле за доводенѣ вопросногъ интеграла на друге простіє истога рода.

Ставляюћи пакъ у овомъ образцу $n+2$ место n, и изражаваюћи после последнѣій интегралъ десно, добыямо, ако одма сматрамо n као одречно, подобанъ образацъ за увећаванѣ одречногъ изложителя

$$\int\frac{dx}{x^n.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=-\frac{1}{(n-1)\,\alpha}.\frac{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x^{n-1}}$$

$$-\frac{(n-\frac{3}{2})\,\beta}{(n-1)\,\alpha}\int\frac{dx}{x^{n-1}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

$$-\frac{(n-2)\,\gamma}{(n-1)\,\alpha}\int\frac{dx}{x^{n-2}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}\ \ldots(D.$$

Ако є n **цео положанъ** брой, онда се вопросный интегралъ образца $C.$) доводи на $\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$ и $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$, а интегралъ предстоећегъ образца $D.$) на $\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$ и $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$, кои су већъ познати.

Пошто є пакъ найпосле $x^n.\,dx\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$

$$=\frac{x^n dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{\alpha x^n dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+\frac{\beta x^{n+1}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

$$+\frac{\gamma x^{n+2}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$ а $$\frac{dx\,.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x^n}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\,.\,dx}{x^n\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{\alpha dx}{x^n.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+\frac{\beta dx}{x^{n-1}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

$$+\frac{\gamma dx}{x^{n-2}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

то є лако увидити, како съ истимъ образцима можемо безъ далѣ теготе изнаћи и интеграле ова два израза, ако є n **цео положанъ** брой.

и.) Интеграленѣ неки трансцендентны функцїя.

1.) $\int\psi(x)\,.\,l^n x\,.\,dx.$

§ 116.

1.) Ако є при датой диференціалной функціи $\psi(x).\,l^n x\,.\,dx$ функція $\psi(x)$ алгебрайска и такова, да $\int\psi(x)\,dx$ можемо определити на ма кои одъ дояко познаты начина, онда изтражуемо $\int \psi(x) . l^n x . dx$ почастно, т. є. помоћу III. основногъ правила § 85., на тай начинъ, да у томе метнемо $\varphi(x) = l^n x$, а $df(x) = \psi(x)\, dx$, чимъ бива

$$\int \psi(x) . l^n x . dx = l^n x . \int \psi(x)\, dx - n \int \Big[l^{n-1} x . dx . \frac{\int \psi(x)\, dx}{x} \Big],$$

или ако ради краткоће заменемо $\int \psi(x)\, dx$ съ $\phi(x)$,

$$\int \psi(x) . l^n x . dx = l^n x . \phi(x) - n \int l^{n-1} x dx . \frac{\phi(x)}{x}$$

$$= l^n x . \phi(x) - n \int l^{n-1} . F(x)\, dx \quad . \; . \; . \; . \quad (\alpha.,$$

при чему $F(x)$ стои место $\frac{\phi(x)}{x}$.

Съ овимъ образцемъ доводи се вопросный интегралъ постепено на простіє истога рода, докъ найпосле, ако є n **цео положанъ** брой, на $\int V(x)\, dx$, у коме $V(x)$ представля неку алгебрайску функцію одъ x.

2.) Ако изъ тога образца определимо десный интегралъ, и после место n узмемо $n+1$, притомъ пакъ n одма одречно, слѣдуе другій подобный образацъ

$$\int \frac{F(x)\, dx}{l^n x} = - \frac{\phi(x)}{(n-1) l^{n-1} x} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\psi(x)\, dx}{l^{n-1} x} \quad . \; . \; . \; . \quad (\beta.,$$

при комъ є, по горньимъ заменама, $\phi(x) = x F(x)$, а

$$\psi(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} = \phi_1(x).$$

§ 117.

Примери. 1.) Тражи се $\int x^m . dx . l^n x$.

Ставлямо у горнѣмъ образцу $\alpha.)$ $\psi(x) = x^m$; $\phi(x) = \int \psi(x)\, dx = \int x^m . dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$; дакле $\frac{\phi(x)}{x} = F(x) = \frac{x^m}{m+1}$;

па добыямо

$$\int x^m . dx . l^n x = \frac{x^{m+1} . l^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1} \cdot \int x^m dx . l^{n-1} x ,$$

или ако овде место n узмемо редомъ $n-1$, $n-2$, $n-3$, и т. д., и притомъ свагда новый интегралъ у предходеѣему заменемо,

$$\int x^m dx\, l^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left[l^n x - \frac{n}{m+1} l^{n-1} x + \frac{n^{2|-1}}{(m+1)^2} \cdot l^{n-2} x \right.$$

$$\left. - \frac{n^{3|-1}}{(m+1)^3} \cdot l^{n-3} x + \ldots \right] + C. \quad \ldots . (\gamma.$$

Овай редъ бытѣе **краянъ**, само ако є n **цео положанъ** брой, иначе тече, по увиѣавномъ закону, у безкрайность.

2.) За $\int \frac{x^m . dx}{l^n x}$ ставлямо у образцу β.) $F(x) = x^m$, $\phi(x) = x . F(x) = x . x^m = x^{m+1}$, $\psi(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} = \phi_1(x) = (m+1)\, x^m$, тако да є по томе после вопросный

$$\int \frac{x^m dx}{l^n x} = - \frac{x^{m+1}}{(n-1) l^{n-1} x} + \frac{m+1}{n-1} \cdot \int \frac{x^m dx}{l^{n-1} x} .$$

Ако пакъ овде, као мало пре, место n узмемо редомъ $n-1$, $n-2$, $n-3$, . . . , и притомъ опетъ свагда последнѣй интегралъ заменемо у предходеѣемъ, добыямо найпосле

$$\int \frac{x^m . dx}{l^n x} = - \frac{x^{m+1}}{n-1} \cdot \left[\frac{1}{l^{n-1} x} + \frac{m+1}{(n-2)\, l^{n-2} x} + \frac{(m+1)^2}{(n-2)^{2|-1} . l^{n-3} x} \right.$$

$$\left. + \frac{(m+1)^3}{(n-2)^{3|-1} . l^{n-4} x} + \ldots \right]$$

$$+ \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)\,!} \cdot \int \frac{x^m . dx}{lx} + C \ldots (\delta.$$

тако да овай интегралъ само іошъ зависи одъ $\int \frac{x^m . dx}{lx}$.

Овай последный може се представити у простiемъ виду тиме, да узмемо $x^{m+1} = z$, дакле $x^m = \frac{dz}{m+1}$, а $lx = \frac{lz}{m+1}$, после чега стои $\int \frac{x^m . dx}{lx} = \int \frac{dz}{lz}$, или ако iошъ метнемо $lz = y$, т. є. $e^y = z$:

$$\int \frac{x^m . dx}{lx} = \int \frac{e^y . dy}{y} = \int e^y . \frac{dy}{y} .$$

О овомъ интегралу говоритћемо доцнiє; овде само толико споминѣмо, да є обично познатъ подъ именомъ **интегралный логаритамъ.**

$$2.) \quad \int F(x)\, a^x . dx .$$

§ 118.

Ако у III. основномъ правилу, § 85., узмемо $df(x) = a^x . dx$, $\varphi(x) = F(x)$, дакле $f(x) = \int a^x dx = \frac{a^x}{la}$, $d\varphi(x) = dF(x) = F_1(x)\, dx$, бывa по истомъ правилу

$$\int F(x)\, a^x\, dx = \frac{a^x . F(x)}{la} - \frac{1}{la} \int F_1(x)\, a^x\, dx \cdots\cdots (s.$$

На истый начинъ слѣдуе далѣ

$$\int F_1(x)\, a^x\, dx = \frac{a^x . F_1(x)}{la} - \frac{1}{la} \int F_2(x)\, a^x\, dx ,$$

$$\int F_2(x)\, a^x\, dx = \frac{a^x . F_2(x)}{la} - \frac{1}{la} \int F_3(x)\, a^x\, dx ,$$

. . . .

Дакле ако надлежно, съ трага напредъ, заменемо,

$$\int F(x)\, a^x\, dx = \frac{a^x}{la} \Big[F(x) - \frac{F_1(x)}{la} + \frac{F_2(x)}{l^2 a} - \frac{F_3(x)}{l^3 a} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} F_{n-1}(x)}{l^{n-1} a} \Big] + \frac{(-1)^n}{l^n a} \int F_n(x)\, a^x\, dx \ldots . \; (\varepsilon.$$

при чему $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... представляю изводне функціє одъ $F(x)$, и вопросный интегралъ зависи найпосле одъ $\int F_n(x)\, a^x\, dx$, на тай начинъ, да ће быти **краянъ**, ако се єдна одъ тій изводны функція появи као по x сталанъ брой.

§ 119.

Примери.

1.) Тражи се $\int x^n . a^x . dx$.

Ту є $F(x) = x^n$, дакле $F_1(x) = nx^{n-1}$, $F_2(x) = n^{2|-1} . x^{n-2}$, $F_3(x) = n^{3|-1} . x^{n-3}$ . . . . ., и зато по нађеномъ образцу, ако є n цео положанъ брой,

$$\int x^n a^x dx = \frac{a^x}{la}\Big[x^n - \frac{nx^{n-1}}{la} + \frac{n^{2|-1} . x^{n-2}}{l^2 a} - \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(-1)^n . n!}{l^n a}\Big] + C \ldots\ldots\ldots (\zeta.$$

2.) Пыта се чему є раванъ $\int \frac{a^x dx}{x^n}$?

Извртаюћи образацъ *s*.) у прећашнѣмъ §-у, добыямо

$$\int F_1(x)\, a^x\, dx = a^x . F(x) - la \int F(x)\, a^x\, dx .$$

Ставляюћи ту $F(x) = x^n$, дакле $F_1(x) = nx^{n-1}$, стои

$$\int x^{n-1} . a^x dx = \frac{a^x . x^n}{n} - \frac{la}{n} \int x^n . a^x . dx ;$$

а ако іошъ узмемо $-n+1$ место n,

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)\, x^{n-1}} + \frac{la}{n-1} \int \frac{a^x dx}{x^{n-1}} \ldots\ldots\ldots (t.$$

Овде пакъ за n редомъ $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... узимаюћи, и притомъ свагда последньій интегралъ у предходећемъ заменюююћи, слѣдує

$$\int\frac{a^x\,dx}{x^n}=-\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}\cdot\left[1+\frac{la}{n-2}x+\frac{l^2a}{(n-2)^{2|-1}}\cdot x^2+\right.$$

$$\left.+\frac{l^3a}{(n-2)^{3|-1}}\cdot x^3+\cdot\cdot\frac{l^{n-2}a}{(n-2)!}x^{n-2}\right]+\frac{l^{n-1}a}{(n-1)!}\int\frac{a^x\,dx}{x}+C\ldots(\eta.$$

Далѣ се овай интегралъ неможе свести по томе, што горньій образацъ $t.$) за $n=1$ недає никакву вредность. Остає дакле іошъ зависимъ одъ интегралногъ логаритма $\int\frac{a^x\,dx}{x}$, кои ћемо текъ доцніє изтражити.

3.) Ако є у оба изнађена интеграла брой n разломакъ, онда су ньиови редови безкрайни.

Тако н. п. ако у последнѣмъ образцу $\eta.$) ставимо $n=\frac{1}{2}$, слѣдуе

$$\int\frac{a^x\,dx}{\sqrt{x}}=2a^x.\sqrt{x}\,(1-\frac{2}{1.3}xla+\frac{4}{1.3.5}\cdot x^2\,l^2a-\frac{8}{1.3.5.7.}x^3la^3$$

$$+\cdot\cdot\cdot\cdot)+C;$$

ако пакъ у ономе подъ $\zeta.$) метнемо $n=-\frac{1}{2}$, добыямо

$$\int\frac{a^x.dx}{\sqrt{x}}=\frac{a^x}{la\sqrt{x}}(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{xla}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1.3}{x^2l^2a}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1.3.5}{x^3la^3}+\cdot\cdot)+C.$$

з.) Интеграленѣ диференціалны кружны (гоніометрійски) функція.

§ 120.

а.) Ако у образцима 5—8. §-а 86. узмемо nx место x, дакле ndx место dx, слѣдую нови ови :

1.) $\int sin\,nx.\,dx=-\frac{1}{n}cos\,nx$ | 2.) $\int cos\,nx.\,dx=\frac{1}{n}sin\,nx$

3.) $\int \frac{dx}{cos^2 \, nx} = \frac{1}{n} \, tang \, nx$ | 4.) $\int \frac{dx}{sin^2 \, nx} = -\frac{1}{n} \, cot \, nx$

коима свакомъ треба іошъ додати произвольный сталный брой C.

б.) Пошто е $sin x \, . \, cos \, x \, . \, dx = sinx \, . \, d \, sinx$

$$= - cos \, x \, . \, d \, cos \, x$$

$$= \frac{1}{4} \, sin \, 2x \, . \, d \, 2x = - \frac{1}{4} \, d \, cos \, 2x \, ,$$

$$tang \, x \, . \, dx = \frac{sin \, x \, . \, dx}{cos \, x} = - \frac{d \, cos \, x}{cos \, x} \, ,$$

$$cot \, x \, . \, dx = \frac{cos \, x \, . \, dx}{sin \, x} = \frac{d \, sin \, x}{sin \, x} \, ,$$

$$\frac{dx}{sin \, x \, . \, cos \, x} = \frac{dx}{cos \, x} : sin \, x = \frac{dx}{cos^2 x} : \frac{sin \, x}{cos \, x} = \frac{d \, tang \, x}{tang \, x} \, ,$$

и зато $cosec \, x \, . \, dx = \frac{dx}{sin \, x} = \frac{d \, \frac{1}{2} \, x}{sin \, \frac{1}{2} \, x \, . \, cos \, \frac{1}{2} \, x} = \frac{d \, tang \, \frac{1}{2} \, x}{tang \, \frac{1}{2} \, x} \, ,$

и зато $sec \, x \, . \, dx = \frac{dx}{cos \, x} = - \frac{d \, (90^0 - x)}{sin(90^0 - x)} = - \frac{d \, tg \, \frac{1}{2} \, (90^0 - x)}{tang \, \frac{1}{2} \, (90^0 - x)}$

$$= - \frac{dtg(45^0 - \frac{1}{2}x)}{tang(45^0 - \frac{1}{2}x)} \, ;$$

то мора быти обратно

5.) $\int sin \, x \, cos \, x \, dx = \int sin \, x \, . \, d \, sin \, x = \frac{1}{2} \, sin^2 x$

$$= - \int cos \, x . \, d \, cos \, x = - \frac{1}{2} \, sos^2 x$$

$$= - \frac{1}{4} \int d \, cos \, 2x = - \frac{1}{4} \, cos \, 2x \, .$$

$$6.)\quad \int tang\, x\,.\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\,l\cos x$$

$$= l\,\frac{1}{\cos x} = l\sec x\,,$$

$$7.)\quad \int \cot x\,.\,dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = l\sin x$$

$$= -\,l\,\frac{1}{\sin x} = -\,l\,cosec\,x\,,$$

$$8.)\quad \int \frac{dx}{\sin x\,.\,\cos x} = \int \frac{d\,tang\,x}{tg\,x} = l\,tang\,x$$

$$= -\,l\,\frac{1}{tg\,x} = -\,l\cot x\,,$$

$$9.)\quad \int cosec\,x.dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\,tg\,\frac{1}{2}x}{tg\,\frac{1}{2}x} = l\,tang\,\tfrac{1}{2}x$$

$$= -\,l\cot\tfrac{1}{2}x\,,$$

$$10.)\quad \int \sec x\,.\,dx = \int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{d\,tg\,(45^0 - \frac{1}{2}x)}{tg\,(45^0 - \frac{1}{2}x)}$$

$$= -\,l\,tg(45^0 - \tfrac{1}{2}x)$$

$$= l\cot(45^0 - \tfrac{1}{2}x)$$

$$= l\,tg\,[90^0 - (45^0 - \tfrac{1}{2}x)] = l\,tg(45^0 + \tfrac{1}{2}x)\,, -$$

и свима овима образцима валя іошъ придати прорзвольный стагный брой C.

§ 121.

По тригон. § 23. имамо

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\,.\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha\,.\,\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\,.$$

Мора быти дакле, ако узмемо $\alpha = mx$, $\beta = nx$, са dx помложимо, а съ 2 разделимо, па онда помоћу предходећегъ §-а интегралимо:

11.) $$\int \sin mx.\cos nx.dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

12.) $$\int \cos mx.\cos nx.dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

13.) $$\int \sin mx.\sin nx.dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C.$$

§ 122.

Ако є n цео положанъ брой, онда по I. Ч. § 191. имамо за **парно** n

$$\sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n} \cdot \left[\cos nx - \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x - \ldots\right]$$

а за **безпарно** n

$$\sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n} \cdot \left[\sin nx - \binom{n}{1}\sin(n-2)x + \binom{n}{2}\sin(n-4)x - \ldots\right]$$

По исте **Ч.** § 190. пакъ стои за ма какво цело положно n

$$\cos^n x = \cos nx + \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x + \ldots.$$

Ако дакле сва три ова образца съ dx помложимо и после интегралимо, слѣдуе за **парно** n

14.) $$\int \sin^n x.dx = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n} \cdot \left[\int \cos nx.dx - \binom{n}{1}\int \cos(n-2)x.dx\right.$$

$$\left. + \binom{n}{2}\int \cos(n-4)x.dx - \ldots\right],$$

за **безпарно** n

15.) $$\int sin^n x\,.\,dx = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n}\cdot[\int sin\,nx.dx - \binom{n}{1}\int sin(n-2)x.dx$$

$$+\binom{n}{2}\int sin\,(n-4)\,x\,.\,dx - \ldots];$$

за обое n

16.) $$\int cos^n x\,.\,dx = \int cos\;nx\,.\,dx + \binom{n}{1}\int cos\;(n-2)\,x\,.\,dx$$

$$+\binom{n}{2}\int cos\,(n-4)\,x\,.\,dx + \ldots,$$

съ коимъ образцима сведени су вопросни интеграли на оне § 120.

Тако н. п. имамо по првомъ

$$\int sin^4\,x\,.\,dx = \frac{(-1)^2}{2^4}\cdot[2\int cos\,4x\,.\,dx - 8\int cos\;2x\,.\,dx + 6\int dx]$$

$$= \frac{1}{2^4}\left[\frac{1}{2}\,sin\,4x - 4\,sin\,2x + 6x\right] + C.\ (\S\ 120.\ \text{обр. } 2.),$$

по другомъ

$$\int sin^3\,x\,.\,dx = \frac{-1}{2^3}\cdot\int sin3x.dx - 3\int sin\,x.dx + 3\int sin\,(-x)\;dx$$

$$-\int sin(-3x)dx]\ (\S 120.\ \text{обр. } 1.)$$

$$= -\frac{1}{2^3}\cdot[-\frac{2}{3}\;cos\;3x + 6\;cos\;x]$$

$$= \frac{1}{2^3}\,[\frac{2}{3}\;cos\;3x - 6\;cos\;x] + C;$$

по трећемъ

$$\int cos^3x.dx = \int cos3x.dx + 3\int cos\,x.dx + 3\int cos\,x.dx + \int cos3x.dx$$

$$= \frac{2}{3}\;sin\;3x + 6\;sin\;x + C.$$

§ 123.

Ставимо $sin\,x = z$. Бытће $cos\,x = \sqrt{1-z^2}$, $cos\,x . dx = dz$, дакле $dx = \frac{dz}{cos\,x} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$; и по свему

$$\int sin^m x . cos^n x . dx = \int z^m . (1-z^2)^{\frac{n}{2}} . \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int z^m . dz \, (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

чимъ є вопросный тай трансцендентный интегралъ сведенъ на онай алгебрайскій, кои смо сматрали у §§-ма **103 — 111**.

Ставляюћи дакле у образцима I — IV. § 108. $x = z$, $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, $\frac{r}{s} = \frac{n-1}{2}$, слѣдує по реду

$$\int sin^m x . cos^n x . dx = -\frac{z^{m-1} . (1-z^2)^{\frac{n+1}{2}}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int z^{m-2} . dz \, (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= \frac{z^{m+1} . (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int z^m . dz (1-z^2)^{\frac{n-3}{2}}$$

$$= \frac{z^{m+1} . (1-z^2)^{\frac{n+1}{2}}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int z^{m+2} . dz (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= -\frac{z^{m+1} . (1-z^2)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int z^m . dz (1-z^2)^{\frac{n+1}{2}},$$

а ако повратимо за z, $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ и $dz . (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ньнове горнѣ вредности $sin\,x$, $cos\,x$ и dx, —

$$\text{I.)} \int sin^m x . cos^n x . dx = -\frac{sin^{m-1} x . cos^{n+1} x}{m+n}$$

$$+ \frac{m-1}{m+1} \int sin^{m-2} x . cos^n x . dx$$

образацъ за постепено умалѧванѣ положногъ изложителя m;

$$\text{II.)} \int \sin^m x . \cos^n x . dx = \frac{\sin^{m+1} x . \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x . \cos^{n-2} x . dx;$$

за постепено умалѧванѣ положногъ изложителя n;

$$\text{III.)} \int \frac{\cos^n x . dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1) \sin^{m-1} x} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\cos^n x . dx}{\sin^{m-2} x};$$

за постепено умалѧванѣ одречногъ изложителя m; и

$$\text{IV.)} \int \frac{\sin^m x . dx}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1) \cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\sin^n x . dx}{\cos^{n-2} x},$$

за постепено умалѧванѣ одречногъ изложителя n.

§ 124.

Ако узмемо у III. n, а у IV. m одречно, добыямо далѣ

$$\text{V.)} \int \frac{dx}{\sin^m x . \cos^n x} = -\frac{1}{(m-1) \sin^{m-1} x . \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x . \cos^n x},$$

за умалѧванѣ изложителя m, и

$$\text{VI.)} \int \frac{dx}{\sin^m x . \cos^n x} = \frac{1}{(n-1) \sin^{m-1} x . \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m x . \cos^{n-2} x},$$

за умалѧванѣ изложителя n.

Ако пакъ у I. и III. ставимо $n = 0$, а у II. и IV. $m = 0$, добыямо

$$\text{VII.)} \quad \int \sin^m x \,.\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \,.\, \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \,.\, dx$$

$$\text{VIII.)} \quad \int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1) \sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}$$

$$\text{IX.)} \quad \int \cos^n x \,.\, dx = \frac{\sin x \,.\, \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \,.\, dx \,.$$

$$\text{X.)} \quad \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

§ 125.

Ако су m и n цели броєви, долазимо найпосле, повторенимъ по потреби употребляванѣмъ

образца I. при парномъ n на $\int \cos^n x \,.\, dx$;
" II. " " n " $\int \sin^n x \,.\, dx$;
" III. " " m " $\int \cos^n x \,.\, dx$,
" IV. " " n " $\int \sin^m x \,.\, dx$,
" V. " " m " $\int \frac{dx}{\cos^n x}$;
" VI. " " n " $\int \frac{dx}{\sin^m x}$, и опетъ

образца I. при безпарномъ n на $\int \sin x \,.\, \cos^n x \,.\, dx$,
" II. " " n " $\int \cos x \,.\, \sin^m x \,.\, dx$,
" III. " " m " $\int \frac{\cos^n x \,.\, dx}{\sin x}$,
" IV. " " n " $\int \frac{\sin^m x \,.\, dx}{\cos x}$;
" V. " " m " $\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos^n x}$,
" IV. " " n " $\int \frac{dx}{\sin^m x \,.\, \cos x}$.

Одъ овы є крайньи интеграла

$$\int \cos^n x . \sin x . dx = -\int \cos^n x . d\cos x = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C,$$

$$\int \sin^m x . \cos x . dx = \int \sin^m x . d\sin x = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + C;$$

$\int \sin^m x . dx$ и $\int \cos^n x . dx$ подлеже далѣмъ употреблѣню образаца VII. и IX., и долази се првимъ, по парномъ или безпарномъ m, на $\int dx = x + C$ или $\int \sin x . dx = -\cos x + C$, другимъ пакъ, по парномъ или безпарномъ n, на $\int dx = x + C$ или $\int \cos x . dx = \sin x + C$; $\int \frac{dx}{\sin^m x}$ и $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ подлеже далѣмъ употреблѣню образаца VIII. и X., и свршаваю се, првый, по парномъ или безпарномъ m, съ $\int dx = x + C$ или $\int \frac{dx}{\sin x} = l\,tg \frac{x}{2} + C$ (обр. 9. 120.), а другій, по парномъ или безпарномъ n, са $\int dx = x + C$ или $\int \frac{dx}{\cos x} = l\,tang\,(45^0 + \frac{x}{2}) + C$ (обр. 10. § 120.)

Образацъ I. дає съ $n = -1$,

$$\int \frac{\sin^m x . dx}{\cos x} = -\frac{\sin^{m-1} x}{m-1} + \int \frac{\sin^{m-2} x . dx}{\cos x},$$

а образацъ II. съ $m = 1$,

$$\int \frac{\cos^n x . dx}{\sin x} = \frac{\cos^{n-1} x}{n-1} + \int \frac{\cos^{n-2} x . dx}{\sin x}.$$

Првый одъ ова два интеграла излази, по парномъ или безпарномъ m, на $\int \frac{dx}{\cos x}$ или $\int \frac{\sin x . dx}{\cos x} = \int tang\, x . dx$, а другій, по парномъ или безпарномъ n, на $\int \frac{dx}{\sin x}$ или $\int \frac{\cos x . dx}{\sin x} = \int cot\, x . dx$, — све сами веѣъ познати интеграли.

На истый начинъ добыямо вайпосле изъ образаца V. и VI.,

$$\int\frac{dx}{sin^m x\,.\,cos\,x}=-\frac{1}{(m-1)\,sin^{m-1}x}+\int\frac{dx}{sin^{m-2}x\,.\,cos\,x}\ \text{и}$$

$$\int\frac{dx}{sin\,x\,.\,cos^n x}=\frac{1}{(n-1)\,cos^{n-1}x}+\int\frac{dx}{sin\,x\,.\,cos^{n-1}x},$$

одъ коя два интеграла опетъ свршава се првый, по парномъ или безпарномъ m, са $\int\frac{dx}{cos\,x}$ или $\int\frac{dx}{sin\,x\,.\,cos\,x}$, а другій, по парномъ или безпарномъ n, са $\int\frac{dx}{sin\,x}$ или $\int\frac{dx}{sin\,x\,.\,cos\,x}$, дакле обадва опетъ са веђъ познатимъ интегралима. —

Ако су изложительи m и n. у образцима о коима говорисмо, разломци, онда се $\int sin^m x\,.\,cos^n x\,.\,dx$, неколико само случаєва изузимаюђи, неможе више изнађи точно, но само іошъ приближно, помоћу безкрайны редова, о комъ начину говоритћемо доцніє.

§ 126.

Осимъ предходећега, имамо о вопроснимъ образцима §§ 123. и 124., іошъ слѣдуюђе приметити:

1.) Ако бы у комъ одъ нъи, при некимъ вредностима броєва m и n, именитель постао нулла, и они сами дакле неупотребителни, онда є вопросный интегралъ или веђъ на другій начинъ изнађенъ, или се та незгода може обићи другимъ редомъ употребляваня самы тій образаца.

2.) Ако є єданъ само одъ изложителя m и n у $\int sin^m x\,.\,cos^n x\,.\,dx$ **безпарный** брой, обадва пакъ положни броєви, онда намъ образци § 123. нетребаю, єръ се у таковомъ случаю вопросный интегралъ може добыти на другій, простіи, изъ слѣдуюђи примера увиђавный начинъ.

Потребуемо $\int \sin^3x \,.\, \cos^2x \,.\, dx$. Разлажемо чинителя съ **безпарнимъ** изложителѣмъ, $\sin^3x$, у два чинителя $\sin x \,.\, \sin^2x = \sin x \,.\, (1 - \cos^2x)$. Тимъ постає вопросный

$$\int \sin^3x \,.\, \cos^2x \,.\, dx = \int \sin x \,.\, dx \,.\, (1 - \cos^2x) \cos^2x$$

$$= \int \cos^2x \,.\, d(-\cos x) \,.\, (1 - \cos^2x)$$

$$= \int \cos^2x \,.\, d\cos x \,(\cos^2x - 1)$$

$$= \int \cos^4x \,.\, d\cos x - \int \cos^2x \,.\, d\cos x$$

$$= \frac{\cos^5x}{5} - \frac{\cos^3x}{3} = \cos^3x\left(\frac{\cos^2x}{5} - \frac{1}{3}\right) + C.$$

Или тражи се $\int \sin^6x.\cos^5x.dx$. Разлажемо чинителя съ безпарнимъ изложителѣмъ, $\cos^5x$, у два чинителя $\cos x \,.\, \cos^4x = \cos x \,.\, (1 - \sin^2x)^2$. Тимъ постає вопросный интегралъ

$$\int \sin^6x \,.\, \cos^5x \,.\, dx = \int \sin^6x \,.\, \cos x \, dx \,(1 - \sin^2x)^2$$

$$= \int \sin^6x \,.\, d\sin x \,(1 - \sin^2x)^2$$

$$= \int \sin^6x \,.\, d\sin x \,(1 - 2\sin^2x + \sin^4x)$$

$$= \int \sin^6x \,.\, d\sin x - 2\int \sin^8x \,.\, d\sin x$$

$$+ \int \sin^{10}x \,.\, d\sin x$$

$$= \frac{1}{7}\sin^7x - \frac{2}{9}\sin^9x + \frac{1}{11}\sin^{11}x$$

$$= \sin^7x\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{9}\sin^2x + \frac{1}{11}\sin^4x\right) + C.$$

Или иште се $\int \sin^3x \,.\, \cos^5x \,.\, dx$, у комъ су **обадва** изложителя броєви безпарни. Ту разлажемо чинителя $\sin^3x$ съ **маньимъ** изложителѣмъ у два чинителя $\sin x \,.\, \sin^2x = \sin x \,.\, (1 - \cos^2x)$, и поступамо далѣ као горе.

§ 127.

α.) Ако у III. основномъ правилу узмемо редомъ $\varphi(x) = arc(\sin = x)$, $arc(\cos = x)$, $arc(tang = x)$, $arc(cot = x)$, и притомъ свакій путь $dfx = dx$, добыямо по томъ истомъ реду

17.) $\int arc\,(sin = x) \,.\, dx = x \,.\, arc\,(sin = x) - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= x \,.\, arc\,(sin = x) + \sqrt{1-x^2}$ (§ 111. подъ 2.)

18.) $\int arc\,(cos = x) \,.\, dx = x \,.\, arc\; cos = x) - \sqrt{1-x^2}$

19.) $\int arc\,(tang = x) \,.\, dx = x \,.\, arc\,(tang = x) - l\sqrt{1+x^2}$

20.) $\int arc\,(cot = x) \,.\, dx = x \,.\, arc\,(cot = x) + l\sqrt{1+x^2}.$

β.) Ако пакъ у истомъ правилу узмемо єданпутъ $\varphi(x) = e^{mx}$, $df(x) = sin\, nx \,.\, dx$, а другипутъ $\varphi(x) = sin\, nx$, $df(x) = e^{mx} \,.\, dx$, слѣдує

$$\int e^{mx} \,.\, sin\, nx \,.\, dx = -\frac{1}{n} e^{mx} \,.\, cos\, nx + \frac{m}{n} \int e^{mx} \,.\, cos\, nx \,.\, dx$$ и

$$\int e^{mx} \,.\, sin\, nx \,.\, dx = \frac{1}{m} e^{mx} \,.\, sin\, nx - \frac{n}{m} \int e^{mx} \,.\, cos\, nx \,.\, dx,$$

одтудъ пакъ

21.) $\int e^{mx} \,.\, cos\, nx \,.\, dx = \frac{n \,.\, sin\, nx + m\, cos\, nx}{m^2+n^2} \,.\, e^{mx}.$

На истый начинъ налазимо іошъ одъ $e^{mx} \,.\, cos\, nx \,.\, dx$,

22.) $\int e^{mx} \,.\, sin\, nx \,.\, dx = \frac{m \,.\, sin\, nx - n \,.\, cos\, nx}{m^2+n^2} \,.\, e^{mx}.$

§ 128.

Каогодъ што смо при интеграленю ирраціоналны алгебрайски функція гледали, да ій сходномъ заменомъ преведемо у раціоналне, тако исто морамо се у многимъ случаєвима при овима гоніометрійскима трудити, да ій таковомъ заменомъ преобразимо у алгебрайске, и тиме или интеграленѣ олакшамо, или башъ текъ могућнимъ учинимо. Но каогодъ при онима за усавршаванѣ, тако исто при овима за алгебраисанѣ немогу се поставити никаква обшта правила, него могу само упутити примери. Толико єдино може се рећи, да се та цѣль овде понайвише постизава изменомъ єдне или друге, у датой диференціалной функціи находеће се (гоніометрійске) функціє, съ другимъ каквимъ пременљивимъ броємъ. Тиме наилазимо после найобичніє на ирраціоналне, а само редко на раціоналне, у нашой власти лежеће алгебрайске функціє.

Тако н. п. ако изнаћи имамо $\int \frac{dx}{a+b\,cos\,x}$, ставлямо или $cos\,x = z$, или $sin\,x = u$, и добыямо тиме при првой замени

$$\int \frac{dx}{a+b\,cos\,x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot arc\left(cos = \frac{b+a\,cos\,x}{a+b\,cos\,x}\right),$$

а при другой

$$\int \frac{dx}{a+b cos\,x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-.a^2}} \cdot l\,\frac{b+a\,cos\,x+sin\,x\,.\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\,cos\,x}.$$

і.) Интеграленѣ помоћу безкрайны редова.

§ 129.

Кадъ свакій покушай, добыти интегралъ дате какове диференціалне функціє у крайной форми изда, остає само іошъ єдна могућность уобште разрешити га, узевши у помоћь безкрайне редове; само што тако добывене интегралне вредности, каошто се по себи лако разуме, немогу быти точне, но само приближне, али свакояко то точніє, штогодъ су добывени за њи редови сбирљивіи.

За ту цѣль служи пре свега образацъ § 82., са коимъ добыямо $\int\varphi(x)dx$ у виду безкрайнога реда. Но лакши є на свакій начинъ цео посао, ако дату функцію іошъ пре интеграленя преобразимо у такавъ редъ. зато што тадъ имамо изтраживати саме мономне интеграле.

Пошто є то развіянѣ у редове већъ познато изъ прве части, то можемо съ места предузети разне, далѣ поучавајуће примере.

§ 130.

1.) Ако тражимо $\int\frac{dx}{a+x}$, имамо (простомъ деобомъ броителя 1 чрезъ именителя $a+x$)

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\ldots\ldots\ldots;$$

бытће дакле вопросный

$$\int\frac{dx}{a+x}=\int\left(\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\ldots\ldots\right)dx$$

$$=\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^4+.+C,$$

изражен, каошто се види, безкрайнимъ редомъ растући степена одъ x.

Ако пакъ пишемо $\frac{1}{x+a}$ место $\frac{1}{a+x}$; и поступамо далѣ као горе, слѣдуе іошъ истый

$$\int\frac{dx}{a+x}=\int\frac{dx}{x+a}$$

$$=lx+\frac{a}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{a}{x}\right)^4+\ldots+C.$$

као редъ падаюћи степена одъ x.

По §-а 87. образцу 18. добыямо точно овай $\int\frac{dx}{a+x}=l(a+x)$.

Можемо дакле ставити, служећи се првимъ редомъ,

$$l\,(a+x)=\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3-\ldots\ldots+C,$$

служећи се пакъ другимъ редомъ,

$$l\,(x+a)=lx+\frac{a}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3-\ldots+C.$$

Узимаюћи у првой одъ ове две еднaчине $x=0$, слѣдуе $C=la$, тако да после стои

$$l\,(a+x)=la+\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3-\ldots.,$$

и одтудъ, ако la пренесемо у леву часть, $l\,(a+x)-la$ $l\,\frac{a+x}{a}$, т. е.

$$l\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3-\ldots\ldots,$$

познатый редъ изъ I. Ч. § 162.

Ако пакъ при другой еднaчини пренесемо lx, добыямо

$$l\,(1+\frac{a}{x})=\frac{a}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3-\ldots+C,$$

одкуда, ставляюћи $x=\infty$, слѣдуе $C=l1=0$, и тиме другій іошъ редъ за

$$l\,(a+x)=lx+\frac{a}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3-\ldots\ldots$$

Првый сабира се то нагліе, штогодъ е x манѣ, другій пакъ то брже, штогодъ е x веће.

2.) У име $\int\frac{x^m.dx}{a^n+x^n}$ имамо

$$\frac{x^m}{a^n+x^n}=\frac{x^m}{a^n}-\frac{x^{m+n}}{a^{2n}}+\frac{x^{m+2n}}{a^{3n}}-\ldots\ldots,$$

или $$\frac{x^m}{x^n+a^n}=x^{m-n}-a^n.x^{m-2n}+a^{2n}.x^{m-3n}-\ldots\ldots;$$

дакле є по првомъ реду

$$\int\frac{x^m.dx}{a^n+x^n}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)a^n}-\frac{x^{m+1+n}}{(m+1+n)a^{2n}}$$

$$+\frac{x^{m+1+2n}}{(m+1+2n)a^{3n}}-\ldots\ldots+C,$$

а по другомъ реду

$$\int\frac{x^m.dx}{a^n+x^n}=\frac{1}{(m+1-n)x^{n-(m+1)}}-\frac{a^n}{(m+1-2n)x^{2n-(m+1)}}$$

$$+\frac{a^{2n}}{(m+1-3n)x^{3n-(m+1)}}-\ldots+C.$$

Ако є $m+1=rn$, т. є. неко вишестручно n, онда у овомъ последнѣмъ реду постає именитель $m+1-rn=0$, и зато дотичный членъ ∞. То насъ несме збунити, єръ є истый членъ у такомъ случаю пре интеграленя быо $\pm a^{(r-1)n}.\frac{dx}{x}$, и зато нѣговъ интегралъ $\pm a^{(r-1)n}.lx$. Появи ли се дакле таково што, онда место сумнителнога члана треба поставити одма ову последню нѣгову вредность.

Ако при горньимъ редовима за $\int\frac{x^m.dx}{a^n+x^n}$ узмемо $m=0$, $n=2$, $a=1$, слѣдує по првомъ

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\ldots+C,$$ а по другомъ

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{1.x}+\frac{1}{3.x^3}-\frac{1}{5.x^5}+\ldots\ldots+C.$$

Како є пакъ по обр. 12. § 86. точно $\int\frac{dx}{1+x^2} = arc\,(tang = x)$, то имамо по првомъ

$$arc\,(tang = x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots + C,$$

а по другомъ

$$arc\,(tang = x) = -\frac{1}{1\,.\,x} + \frac{1}{3\,.\,x^3} - \frac{1}{5\,.\,x^5} + \ldots + C.$$

Ставляюћи у првой одъ ове две єдначине $x = 0$, слѣдує $C = 0$, и зато

$$arc\,(tang = x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots\ldots;$$

познатый редъ изъ I. Ч. § 165.

Узимаюћи пакъ у другой єдначини $x = \infty$; добыямо збогъ

$$arc\,(tang = \infty) = \frac{\pi}{2},\ C = \frac{\pi}{2},\ \text{и зато}$$

$$arc\,(tang = x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1\,.\,x} + \frac{1}{3\,.\,x^3} - \frac{1}{5\,.\,x^5} + \ldots\ldots$$

Првый є одъ ова два реда за лукъ тангенте тимъ сбирльивіи, па и употребителніи, штогодъ є x манѣ, другій пакъ то сбирльивіи и способніи за употреблѣнѣ, штогодъ є x веће.

3.) За $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ имамо по биномномъ образцу

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1.3}{2.4}\,x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,x^6 + \ldots\ldots,$$

и зато

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^4}{7} + \ldots + C.$$

Овай истый интегралъ нађенъ е у 11. образцу § 86. точно $= arc\,(sin = x)$. Слѣдуе дакле

$$arc\,(sin - x) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + C.$$

Пошто пакъ овай редъ мора да стои за лукъ свакогъ синуса, па и $sin = 0$, а за тай е $arc\,(sin = 0) = 0$, то слѣдуе $C = 0$, и зато коначно

$$arc\,(sin = x) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots,$$

сасвимъ онако, каошто смо га нашли у § 165. I. Ч.

4.) У име $\int dx\sqrt{2ax - x^2}$ имамо опетъ по биномномъ образцу

$$\sqrt{2ax - x^2} = (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a}\,.\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2a}\cdot\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\left(\frac{x}{2a}\right)^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\left(\frac{x}{2a}\right)^3 - \ldots\right]$$

$$= \sqrt{2a}\,.\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{4a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}}}{8a^3} - \ldots\right).$$

Мора быти дакле траженый

$$\int dx\sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{2a}\left(\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}}}{4a^2} - \ldots\right)$$

$$= 2x\sqrt{2ax}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2a} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{x^2}{4a^2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{8a^3} - \ldots\right) + C.$$

На истый начинъ налазимо

5.) $$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}\Big(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2a}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{4a^2}$$

$$+\frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{8a^3}+\ldots\ldots\Big)+C;$$

6.) $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots.+C;$$

7.) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=lx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{x^4}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{x^6}$$

$$-\ldots.+C.$$

Поставляюћи пакъ за овай истый интегралъ найпре $x=1+z$, дакле $dx=dz$, а $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2z+z^2}$, налазимо іошъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{dz}{\sqrt{2z+z^2}}=\sqrt{2z}\cdot\Big(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^2}{4}$$

$$-\frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^3}{8}+\ldots.\Big)$$

$$=\sqrt{2(x-1)}\cdot\Big[1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{x-1}{2}\Big)+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\Big(\frac{x-1}{2}\Big)^2$$

$$-\frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\Big(\frac{x-1}{2}\Big)^3+..\Big]+C.$$

8.) У име $\int x^m.\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$; имамо

$$(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{r}{s}}.\Big(1+\frac{b}{a}x^n\Big)^{\frac{r}{s}}$$

$$=a^{\frac{r}{s}}\cdot\Big[1+\frac{r}{s}\cdot\Big(\frac{b}{a}\Big)x^n+\frac{r^{2|-s}}{2s}\cdot\Big(\frac{b}{a}\Big)^2\cdot x^{2n}$$

$$+\frac{r^{3|-s}}{2.3.s}\cdot\Big(\frac{b}{a}\Big)^3\cdot x^{3n}+\ldots\ldots\Big],$$

или

$$x^{m}.\,dx\,(a+bx^{n})^{\frac{r}{s}}=x^{m+\frac{nr}{s}}.\,dx(b+ax^{-n})^{\frac{r}{s}}$$

$$=x^{m+\frac{nr}{s}}.\,dx\,.\,b^{\frac{r}{s}}(1+\frac{a}{b}\,x^{-n})^{\frac{r}{s}}$$

$$=x^{m+\frac{nr}{s}}.\,dx\cdot b^{\frac{r}{s}}\cdot[1+\frac{r}{s}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)x^{-n}$$

$$+\frac{r^{2|-s}}{2!\,s^{2}}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2}x^{-2n}+\ldots\ldots].$$

Дакле є по првомъ изразу као редъ растући степена' одъ x

$$\int x^{m}.\,dx\,(a+bx^{n})^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{r}{s}}\cdot\Big[\frac{x^{m+1}}{(m+1)}+\frac{r}{s}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)\frac{x^{(m+1)+n}}{(m+1)+n}$$

$$+\frac{r^{2|-s}}{2!\,s^{2}}\left(\frac{b}{a}\right)^{2}\cdot\frac{x^{(m+1)+2n}}{(m+1)+2n}+\frac{r^{3|-s}}{3!\,s^{3}}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{3}\cdot\frac{x^{(m+1)+3n}}{(m+1)+3n}$$

$$+\cdot\ldots\ldots\Big]+C.$$

а по другомъ, као редъ падаюћи степена' одъ x,

$$\int x^{m}.\,dx\,(a+bx^{n})^{\frac{r}{s}}=b^{\frac{r}{s}}\cdot\Big[\frac{s\,x^{m+1+\frac{nr}{s}}}{nr+s\,(m+1)}+r\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{x^{m+1+\frac{nr}{s}-n}}{nr+s(m+1-n)}$$

$$+\frac{r^{2|-s}}{2s}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2}\cdot\frac{x^{m+1+\frac{nr}{s}-2n}}{nr+s(m+1-2n)}$$

$$+\cdot\ldots\ldots\cdot\Big]+C.$$

9.) За $\int f(x)a^{x}.\,dx$. узмимо место a^{x} нѣговъ, изъ **I. Ч.** § **161.** познатый редъ. Слѣдує съ места уобште вопросный

$$\int f(x)\,a^{x}.\,dx=\int f(x)\,dx+la\int f(x)\,x\,dx+\frac{l^{2}a}{2\,!}\int f(x)x^{2}.\,dx+\ldots$$

Ако є $f(x)$ н. п. x^n, добыямо одтудъ

$$\alpha.)\quad \int x^n.\,a^x.\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{la}{n+2}x^{n+2} + \frac{l^2a}{2!(n+3)}x^{n+3} + \,.\,.\, + C,$$

Ако є пакъ $f(x) = \frac{1}{x}$, налазимо

$$\beta.)\quad \int a^x.\frac{dx}{x} = lx + la\,.\,x + \frac{l^2a}{2!}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{l^3a}{3!}\cdot\frac{x^3}{3} + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, + C,$$

коє ніє ништа друго, но у § 117. и 119. споменутый **интегралный логаритамъ.**

Ставляюћи у овомъ образцу $a^x = z$, слѣдуе збогъ $x = \frac{lz}{la}$, $dx = \frac{dz}{z\,la}$, а $lx = {}^2lz - {}^2la = llz - lla$, $\int \frac{z\,dz}{z\,la} \times \times \frac{la}{lz}$, т. є. найпосле

$$\gamma.)\quad \int\frac{dz}{lz} = {}^2lz + lz + \frac{1}{2}\cdot\frac{l^2z}{2\,!} + \frac{1}{3}\cdot\frac{l^3z}{3\,!} + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, + C.$$

§ 131.

Осимъ начина коимъ налазимо интеграле помоћу безкрайны редова, увиђамо изъ предходећегъ §-а іошъ, како се неке функціє могу интеграленѣмъ развити у безкрайне редове, и то є у истомъ, поредъ главне намере, безъ сумнѣ тако ясно показано, да бы, спрамъ граница овога дела, права дангуба была, говорити іошъ и далѣ што о томе послу. То напоминюћи завршуємо вопросный предметъ съ томъ іошъ важномъ приметбомъ: како при интеграленю съ безкрайнимъ редовима ніє непремено нуждно, да дата диференціална функція буде изражена као редъ самы монома по x; довольно є, ако место нѣ изнађемо само редъ таковы чланова, коє смо у станю интегралити помоћу доякошньи упутства. Примери слѣдуюћегъ §-а обяснитћe то већма.

§ 132.

1.) Тражи се $\int\frac{dx\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

У име тога имамо по биномномъ правилу

$$\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}=(1-\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2x^2-\frac{1.1}{2.4}\cdot\varepsilon^4x^4$$
$$-\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\varepsilon^6x^6-\ldots,$$

и зато

$$\int\frac{dx.\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\int\Big(1-\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2x^2-\frac{1.1}{2.4}\cdot\varepsilon^4x^4$$
$$-\frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6x^6-\ldots\ldots\Big)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\varepsilon^2\int\frac{x^2.dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4\int\frac{x^4.dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$-\frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6\int\frac{x^6.dx}{\sqrt{1-x^2}}-\ldots\ldots+C.$$

Тимъ начиномъ дакле сведенъ є вопросный интегралъ на онай $\int\frac{x^n.dx}{\sqrt{1-x^2}}$, и може се садъ лако далѣ израдити по §-у 111.

Поступаюћи по томъ §-у, налазимо найпосле

$$\int\frac{dx\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=A+\frac{1}{2}\varepsilon^2\Big(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}A\Big)$$
$$+\frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4.\Big[\Big(\frac{x^3}{4}+\frac{3.1}{4.2}x\Big)\sqrt{1-x^2}-\frac{3.1}{4.2}A\Big]$$
$$+\frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6.\Big[\Big(\frac{x^5}{6}+\frac{5.1}{6.4}x^3+\frac{5.3.1}{6.4.2}x\Big)\sqrt{1-x^2}$$
$$-\frac{5.3.1}{6.4.2}A\Big]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+C,$$

при чему є $A = arc\,(sin = x)$,

2.) Иште се $\int\frac{dx}{\sqrt{(a+x)(1-x^2)}}$.

У име тога можемо рећи

$$\frac{1}{\sqrt{(a+x)(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(a+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left[1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{1.3}{2.4}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2-\ldots\ldots\right],$$

дакле

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a+x)(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2a\sqrt{a}}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,a^2\sqrt{a}}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \ldots\ldots + C,$$

изражен самим већ познатим интегралима.

3.) Подобно можемо при $\int\frac{dx}{\sqrt{(a-x)\,.\,(2ax-x^2)}}$ рећи:

$$\frac{1}{\sqrt{(a-x)\,(2ax-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}},$$ чимъ га доводимо на интеграле вида $\int\frac{A\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, кои су дояко већъ изнађени.

Далый посао за овай примеръ оставлямъ прилѣжномъ момъ ученику, и споминѣмъ само іошъ, да сви садъ показани интеграли принадлеже елиптичнимъ трансцендентима.

к.) Определѣни интеграли, или интеграленѣ међу известнимъ границама.

§ 133.

У §§-ма 81. и 82. уверили смо се, да свакій интегралъ, **као обштій**, мора садржати некій, іошъ непознатый сталный брой C; у првомъ одъ та два §-а пакъ наговестили смо, како се тай сталный брой одкрива тиме, што є по самой природи дотичнога задатка, позната вредность вопроснога интеграла, при известной некой вредности пременльивога броя. Ако є т. є. уобште $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$, а изъ природе задатка зна се, да є за $x = a$ вредность тога интеграла $= A$, онда имамо $A = \varphi(a) + C$, и одтудъ $C = A - \varphi(a)$, тако да после стои, као **особитый** интегралъ, $\int f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a) + A$.

Томе придаємо садъ іошъ слѣдуюће:

1.) Пошто є брой C одъ x независанъ, то онъ задржава свою, по природнимъ условіяма задатка за $x = a$ добывену вредность $A - \varphi(a)$, за сваку другу вредность броя x дотле, докъ се коіомъ одъ ньи ненаруши настaвность функція $f(x)$ или $\varphi(x)$. Буде ли н. п. ова последня функція како за $x = \alpha$, тако и за $x = \beta$ равна $\frac{1}{0}$, али се то съ ньомъ иначе ни за какву другу, између та два броя α и β лежећу вредность одъ x недогађа, и $x = a$ притомъ лежи између α и β: онда брой C, безъ сваке сумнѣ, задржава за свако друго, између $x = \alpha$ и $x = \beta$ лежеће x ону вредность, кою є добыо за $x = a$, али може врло лако постати друге вредности за другу какву, изванъ тій граница' лежећу вредность одъ x, и то: другу за доистне вредности тога броя до α, а опетъ другу за такове нѣгове вредности одъ β на выше, ако є т. є. $\alpha < \beta$. — О томе уверитћемо се врло често доцніе, при употребляваню инфинитезималногъ рачуна у аналитичной геометріи.

2.) Ако є вредность обштегъ каквогъ интеграла за $x = a$ по самой природи задатка равна нулли, или треба да є толика, онда каже се: дотичный **интегралъ започинѣ** са $x = a$, и C є притомъ очевидно такођеръ $= 0$. Изъ горнѣга пакъ увиђа се, да тако изнађена особита вредность тогъ интеграла само дотле постои, докъ се каквомъ наставномъ вредности броя x до a, или одъ a далѣ, непоремети наставность функціє $f(x)$ или $\varphi(x)$.

3.) Ако се у особитомъ, са $x = a$ започинюћемъ интегралу узме место x іошъ и друга известна вредность b, онда є вредность истога интеграла подпуно определѣна, и престає дакле быти функція одъ x. Такавъ се интегралъ после зове **определѣнъ**, и каже се о нѣму, да **започинѣ са** $x = a$, **а престає са** $x = b$, **или узетъ є одъ** $x = a$ **до** $x = b$, **или определѣнъ є међу границама** $x = a$ и $x = b$.

Обично помишля се притомъ брой $b > a$, али може быти и $< a$, но на свакій начинъ мора се наодити међу онимъ наставнимъ вредностима броя x до a или одъ a далѣ, за коє брой C задржава єдну исту вредность, иначе бы вредность интеграла по горнѣму лако могла быти погрешна.

§ 134.

Ако є $\varphi(x)$ интеграленѣмъ добывена особита вредность за $\int f(x) \cdot dx$, онда є по предходећему

1.) $\varphi(x) + C$ **подпуный**, **обштій** или **неопределѣный** $\int$,

2.) $\varphi(x) - \varphi(a)$ са a **започинюћій** интегралъ, а

3.) $\varphi(b) - \varphi(a)$ **определѣный** интегралъ **међу границама** $x = a$ **и** $x = b$.

Првый представля се просто са $\int f(x)\,dx$, другій са $\int_a f(x)\,dx$ или $\int_a^x f(x)\,dx$, а трећій са $\int_a^b f(x)\,dx$, тако дакле, да є

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C, \int_a f(x)dx = \int_a^x f(x)dx = \varphi(x) - \varphi(a),$$

а $\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$, али ова два последня подъ горе изреченимъ условіяма, а трећій нарочно само дотле те вредности, докъ $f(x)$ ни за $x = a$, ни за $x = b$, а іошъ манѣ за кою другу средню вредность одъ x непостає $\frac{1}{0}$, или другогъ каквогъ, нѣну наставность нарушаваюћегъ вида. —

Особита свойства определѣны интеграла, као я ньиова велика важность по томе, што при употребляваню интегралногъ рачуна съ таковимъ, т. є. међу известнимъ границама узетимъ интегралима посла имамо, — изискую, да ій посматрамо нешто поизближе.

§ 135.

Ако є $\int f(x)\,dx = \varphi(x)$, дакле по понятію интеграла $\varphi_1(x) = f(x)$, онда є изчезльиво мала премена функціє $\varphi(x)$ збогъ изчезльиво мале премене dx броя x, $d\varphi(x) = \varphi_1(x)\,dx = f(x)\,dx$. Дакле, ако место x узмемо найпре a, а после редомъ $a + dx$, $a + 2dx$, $a + 3dx$, ... докъ найпосле b, добыямо очевидно редомъ найпре

$\varphi(a)$, као прву слѣдуюћу вредность

$\varphi(a) + \underset{a}{f(x)}\,.\,dx$, као другу

$\varphi(a) + \underset{a}{f(x)}\,.\,dx + \underset{a+dx}{f(x)}\,.\,dx$, као трећу

$\varphi(a) + \underset{a}{f(x)}\,.\,dx + \underset{a+dx}{f(x)}\,.\,dx + \underset{a+2dx}{f(x)}\,.\,dx$,

. . . ., докъ найпосле

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \underset{a}{f(x)}.dx + \underset{a+dx}{f(x)}.dx + \underset{a+2dx}{f(x)}.dx + \ldots + \underset{b-2dx}{f(x)}.dx$$

$+ \underset{b-dx}{f(x)}.dx$, тако да є затимъ

$$\varphi(b)-\varphi(a)=[\underset{a}{f(x)}+\underset{a+dx}{f(x)}+\underset{a+2dx}{f(x)}+\cdots+\underset{b-2dx}{f(x)}+\underset{b-dx}{f(x)}].dx$$

$$=[\underset{a+\mu dx}{\Sigma f(x)}].dx \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\alpha.,$$ т. є.

$\varphi(b)-\varphi(a)$ равно алгебрайскомъ сбиру свію изчезљиво малы премена' функціє $\varphi(x)$, коє є она наставно претрпила одъ $x=a$ до $x=b$.

Тиме є оправдано употребляванѣ сбирнога знака $\int$, (**S**, почетно писме речи сумма, сбиръ) за определѣне интеграле. Пошто є пакъ притомъ брой b сасвимъ обштій или произволянъ, па се зато може заменути и са x, то су оправдани уєдно и остали изрази подъ 1. и 2. у предходећемъ §-у, докъ подъ речи **интегралъ** разумемо **сбиръ диференціала**.

О основаности докученя подъ α). увериће насъ подпуно слѣдуюћій

§ 136.

Ако є $a<b$, и помислимо разлику $b-a$ поделѣну на безбройно много єднаки частій, представляюћи сваку са dx, онда є сбиръ безбройно многи производа' $f(x)\,dx$ за сваку поєдину наставну (т. є. са dx разликуюћу се) вредность броя x, одъ $x=a$ до $x=b$, нико друго но $\int_a^b f(x)\,dx$, т. є. $\varphi(b)-\varphi(a)$, ако є интеграленѣмъ наћена вредность $\varphi(x)$; али то стои само дотле, докъ функція $f(x)$ за ниєдну одъ тій вредностій измећу a и b непостає $\frac{1}{0}$, или каквогъ другогъ вида, съ коимъ се нѣна наставность нарушава. Ево зашто.

Пошто є $\varphi_1(x)=f(x)$, то є $\varphi_2(x)=f_1(x)$, $\varphi_3(x)=f_2(x)$, и т. д., и зато по телеровомъ образцу за функція єдногъ променљивогъ броя (§ 26.):

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=f(x)h+f_1(x)\frac{h^2}{2\,!}+f_2(x)\cdot\frac{h^3}{3\,!}+\;.\;.\;.\;.\;.\; (\beta.$$

Узимаюћи овде $h = dx = \frac{b - a}{n}$, а притомъ n као безкрайно великій целый брой, — поставляюћи затимъ за x найпре a, а после редомъ $a + dx$, $a + 2dx$, $a + 3dx$, ... докъ найпосле $a + (n - 1)\,dx = b - dx$, — добыямо по реду

$$\varphi(a + dx) - \varphi(a) = f(x)_{a}\,dx + f_1(x)_{a} \cdot \frac{d^2x}{2\,!} + f_2(x)_{a} \cdot \frac{d^3x}{3\,!} + \cdots\cdots$$

$$\varphi(a + 2dx) - \varphi(a + dx) = f(x)_{a+dx} \cdot dx + f_1(x)_{a+dx} \cdot \frac{d^2x}{2\,!} + f_2(x)_{a+dx} \cdot \frac{d^3x}{3\,!} + \cdots$$

$$\varphi(a + 3dx) - \varphi(a + 2dx) = f(x)_{a+2dx} \cdot dx + f_1(x)_{a+2dx} \cdot \frac{d^2x}{2\,!}$$

$$+ f_2(x)_{a+2dx} \cdot \frac{d^3x}{3\,!} + \cdots\cdots\cdots$$

. . . .

$$\varphi(b) - \varphi[a + (n - 1)\,dx = b - dx]$$

$$= f(x)_{b-dx} \cdot dx + f_1(x)_{b-dx} \cdot \frac{d^2x}{2\,!} + f_2(x)_{b-dx} \cdot \frac{d^3x}{3\,!} + \cdots\cdots,$$

а ако све ове єдначине саберемо:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \Sigma f(x)_{a+\mu dx} \cdot dx + \Sigma f_1(x)_{a+\mu dx} \cdot \frac{d^2x}{2\,!}$$

$$+ \Sigma f_2(x)_{a+\mu dx} \cdot \frac{d^3x}{3\,!} + \cdots\cdots \quad (\gamma.$$

при чему $\Sigma f(x)_{a+\mu dx} \cdot dx$ представля сбиръ $f(x)_{a}\,dx + f(x)_{a+dx} \cdot dx + f(x)_{a+2dx} \cdot dx + \cdots\cdots$; $\Sigma f_1(x)_{a+\mu dx} \cdot \frac{d^2x}{2\,!}$ сбиръ $f_1(x)_{a} \cdot \frac{d^2x}{2\,!} + f_1(x)_{a+dx} \cdot \frac{d^2x}{2\,!} + f_1(x)_{a+2dx} \cdot \frac{d^2x}{2\,!} + \cdots\cdots$, и т. д., на тай начинъ, да место μ валя редомъ узимати 0, 1, 2, ... $(n - 1)$.

Обзируђи се пакъ при той єдначини γ) на то, да є dx изчезљиво малый брой, те да зато сви чланови десногa реда съ другимъ започевши спрамъ првому, као изчезљиво мали выши редова изчезаваю, — остає намъ само

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{a+\mu dx} f(x)\,.\,dx\;.\;.\;.\;.\;.\quad(\delta.,$$

чимъ є, незаборављаюђи ко є $\sum\limits_{a+\mu dx} f(x)\,.\,dx$, докученђ подъ α) сасвимъ обистинђно.

§ 137.

Ако су α, β и γ између a и b лежеђе вредности, а интеграленђмъ добыли смо $\int f(x)\,dx=\varphi(x)$, онда є

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx=\varphi(\alpha)-\varphi(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha),$$

$$\int_\beta^\gamma f(x)\,dx=\varphi(\gamma)-\varphi(\beta),$$

$\int_\gamma^b f(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(\gamma)$, а ако све ове єдначине саберемо

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx+\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_\beta^\gamma f(x)\,dx+\int_\gamma^b f(x)dx=\varphi(b)-\varphi(a)$$
$$=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Изъ овога види се, како определђный $\int_a^b f(x)\,dx$ можемо добыти такођеръ и на тай начинъ, да између a и b узмемо произвольно колико средньи вредностій α, β, γ, . . λ, па онда определимо редомъ $\int_a^\alpha$, $\int_\alpha^\beta$, $\int_\beta^\gamma$, ... $\int_\lambda^b$, и све те интеграле саберемо; овай сбиръ т. є. бытђе траженый $\int_a^b$.

§ 138.

Ако є $f(x)$ за сваку наставну вредность броя x одъ $x=a$ до $x=b$ положна, а $\underset{g}{\varphi(x)}$ и $\underset{k}{\varphi(x)}$ представляю прва найвећу, а друга найманю вредность функціє $\varphi(x)$, коє она прима за оне наставне вредности броя x, онда є, каошто се лако увиђа,

$$[\underset{a}{\varphi(x)}\cdot\underset{a}{f(x)}+\underset{a+dx}{\varphi(x)}\cdot\underset{a+dx}{f(x)}+\underset{a+2dx}{\varphi(x)}\cdot\underset{a+2dx}{f(x)}+\dots\dots+\underset{b-dx}{\varphi(x)}\cdot\underset{b-dx}{f(x)}]\,dx$$

$$=\Sigma[\underset{a+\mu dx}{\varphi(x)}\cdot\underset{a+\mu dx}{f(x)}\cdot dx]<\{[\underset{g}{\varphi(x)}\cdot\underset{a}{f(x)}+\underset{g}{\varphi(x)}\cdot\underset{a+dx}{f(x)}+\dots+\underset{g}{\varphi(x)}\cdot\underset{b-dx}{f(x)}]dx$$

$$=\underset{g}{\varphi(x)}[\underset{a}{f(x)}+\underset{a+dx}{f(x)}+\underset{a+2dx}{f(x)}+\dots+\underset{b-dx}{f(x)}]dx$$

$$=\underset{g}{\varphi(x)}\cdot\Sigma[\underset{a+\mu dx}{f(x)}\cdot dx]\},\ \text{а}$$

$$>\{[\underset{k}{\varphi(x)}\cdot\underset{a}{f(x)}+\underset{k}{\varphi(x)}\cdot\underset{a+dx}{f(x)}+\dots+\underset{k}{\varphi(x)}\cdot\underset{b-dx}{f(x)}]dx$$

$$=\underset{k}{\varphi(x)}[\underset{a}{f(x)}+\underset{a+dx}{f(x)}+\underset{a+2dx}{f(x)}+\dots+\underset{b-dx}{f(x)}]dx$$

$$=\underset{k}{\varphi(x)}\cdot\Sigma[\underset{a+\mu dx}{f(x)}\cdot dx]\}.$$

Но ово по § 136. ништа друго незначи, него да є

$$\int_a^b\varphi(x)\cdot f(x)\,dx<\underset{g}{\varphi(x)}\cdot\int_a^b f(x)\,dx,\quad\text{а}$$

$$>\underset{k}{\varphi(x)}\cdot\int_a^b f(x)\,dx.$$

Вредность определѣногъ $\int_a^b\varphi(x)f(x)\,dx$ лежи дакле у вопросномъ случаю међу границама $\underset{g}{\varphi(x)}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$ и $\underset{k}{\varphi(x)}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$, маня є т. є одъ прве, а већа одъ друге.

§ 139.

1.) Ако у образцу $\beta.$; § 136. замислимо само врло велико n, а не безкрайно, дакле место h узмемо не изчезљиво dx, но само врло малый брой $\delta = \frac{b-a}{n}$, — и ако после заменемо x редомъ съ a, $a+\delta$, $a+2\delta$, $a+3\delta$, ... докъ найпосле съ $a+(n-1)\delta = b-\delta$, — добыямо истимъ путемъ као тамо:

$$\int_a^b f(x)dx = \delta . \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f(x)} + \frac{\delta^2}{2\,!} . \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f_1(x)} + \frac{\delta^3}{3\,!} . \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f_2(x)} + \ . \ . \ . \qquad (m.;$$

пренебрегаваюћи овде пакъ све чланове съ вышимъ степенима одъ δ, остаѥ за **приближну** вредность вопросного интеграла, образацъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \delta . \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f(x)} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (\mathrm{I.},$$

у комъ ѥ, као што знамо изъ помеиутога §-а,

$$\underset{a+\mu\delta}{\Sigma f(x)} = \underset{a}{f(x)} + \underset{a+\delta}{f_1(x)} + \underset{a+2\delta}{f_2(x)} + \ldots + \underset{a+(n-1)\delta=b-\delta}{f(x)},$$

а притомъ опетъ по горнѣму $\delta = \frac{b-a}{n}$.

2.) Пошто ѥ $\int f_1(x)\,dx = f(x)$, $\int f_2(x)\,dx = f_1(x)$, и т. д., то ѥ истимъ начиномъ као горе **приближный** $\int_a^b f_1(x)\,dx$, т. ѥ.

$$f(b) - f(a) = \delta . \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f_1(x)}, \ \text{a}$$

$$f_1(b) - f_1(a) = \delta . \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f_2(x)},$$

и зато, ако ове вредности узмемо у ѥдначину m, притомъ пакъ опетъ выше степене одъ δ пренебрегнемо, за **приближну** вредность вопросного интеграла другій образацъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \delta . \Big\{ \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f(x)} + \frac{1}{2}\,[f(b) - f(a)] \Big\} \ldots \quad (\mathrm{II.},$$

3.) Узимаюћи найпосле у овомъ образцу $f_1(x)$ и $f_2(x)$ место $f(x)$, добыямо изъ истогъ узрока као мало пре

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f_1(x)\,dx=\delta.\Big\{\underset{a+\mu\delta}{\Sigma f_1(x)}+\frac{1}{2}[f_1(b)-f_1(a)]\Big\}$$

$$f_1(b)-f_1(a)=\int_a^b f_2(x)\,dx=\delta.\Big\{\underset{a+\mu\delta}{\Sigma f_2(x)}+\frac{1}{2}[f_2(b)-f_2(a)]\Big\}.$$

Слѣдуюће пакъ одавде вредности за $\underset{a+\mu\delta}{\Sigma f_1(x)}$ и $\underset{a+\mu\delta}{\Sigma f_2(x)}$ у єдначини m заменююћи, и притомъ чланове са δ^3 и вышимъ нѣговимъ степенима пренебрегаваюћи, добыямо за **приближну** вредность вопроснога интеграла трећій образацъ

$$\int_a^b f(x)=\delta\Big\{\underset{a+\mu\delta}{\Sigma f(x)}+\frac{1}{2}[f(b)-f(a)]\Big\}-\frac{\delta^2}{12}[f_1(b)-f_1(a)].\ \text{III.}$$

Нађена ова три образца служе, каошто при свакомъ наговестисмо, за **приближно** израчунаванѣ вредности $\int_a^b f(x)dx$, у случаю, гди обштій интегралъ немамо, или га неможемо изнаћи, или га найпосле нећемо тражити (можда збогъ врло тешкога посла, кои намъ задає), — а природа дотичнога задатка приближне вредности допушта. Лако є пакъ увидити, да ће тако добывене вредности быти све точніє, штогодъ є n већій, дакле $\delta=\dfrac{b-a}{n}$ маньій брой, и штогодъ се вредности одъ $f(x)$ при замењиваню броя x съ a, $a+\delta$, $a+2\delta$, . . . споріє увећаваю или умаляваю. — За образацъ II. можемо нарочно іошъ приметити, како при нѣговомъ употребляваню неморамо имати функцію $f(x)$, ако само знамо или имамо $n+1$ нѣны вредностій $\underset{a}{f(x)}$, $\underset{a+\delta}{f(x)}$, $\underset{a+2\delta}{f(x)}$, ... $\underset{b}{f(x)}$.

§ 140.

Узмимо баръ єданъ примеръ за обяснѣнѣ употребляваня тій образаца.

Тражи се $\int_{a}^{a+\omega}\frac{dx}{x}$, т. є. $l(a+\omega) - la = l\,\frac{a+\omega}{a}$.

Ту є $f(x) = \frac{1}{x}$, $b = a+\omega$, $\delta = \frac{b-a}{n} = \frac{\omega}{n}$. Имамо дакле $f_1(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f_2(x) = \frac{2}{x^3}$, $\underset{a}{f(x)} = \frac{1}{a}$; $\underset{a+\delta}{f(x)} = \frac{n}{na+\omega}$, $\underset{a+2\delta}{f(x)} = \frac{n}{na+2\omega}$, $\underset{a+3\delta}{f(x)} = \frac{n}{na+3\omega}$, . . $\underset{a+(n-1)\delta}{f(x)} = \frac{n}{na+(n-1)\omega}$, $\underset{a+\omega}{f(x)} = \frac{1}{a+\omega}$, и зато

по образцу I.

$$l\,\frac{a+\omega}{a} = \int_{a}^{a+\omega}\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\omega}{n}\left[\frac{1}{a} + \frac{n}{na+\omega} + \frac{n}{na+2\omega} + \frac{n}{na+3\omega} + .. + \frac{n}{na+(n-1)\omega}\right]$$

$$= \omega.\left[\frac{1}{na} + \frac{1}{na+\omega} + \frac{1}{na+2\omega} + \frac{1}{na+3\omega} + .. + \frac{n}{na+(n-1)\omega}\right],$$

по образцу II.

$$l\,\frac{a+\omega}{a} = \int_{a}^{a+\omega}\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\omega}{n}\left[\frac{1}{a} + \frac{n}{na+\omega} + \frac{n}{na+2\omega} + .. + \frac{n}{na+(n-1)\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+\omega} - \frac{1}{a}\right)\right]$$

$$= \omega.\left[\frac{1}{na} + \frac{1}{na+\omega} + \frac{1}{na+2\omega} + .. + \frac{1}{na+(n-1)\omega}\right] - \frac{\omega^2}{2na(a+\omega)},$$

найпосле по образцу III.

$$l\,\frac{a+\omega}{a} = \int_{a}^{a+\omega}\frac{dx}{x}$$

$$= \omega.\left[\frac{1}{na} + \frac{1}{na+\omega} + \frac{1}{na+2\omega} + \ldots + \frac{1}{na+(n-1)\omega}\right]$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{\omega^2}{na\,(a+\omega)} - \frac{1}{12}\cdot\frac{\omega^3(2a+\omega)}{a^2(a+\omega)^2}.$$

Узмимо садъ за упражненѣ у изтраживаню определѣны интеграла’

Неколико примера.

§ 141.

1.) Тражи се $\int_0^a \frac{x^m . dx}{\sqrt{ax-x^2}}$.

Ако узмемо у образцу *a.*) подъ 5., § 111. a место $2a$, слѣдуе уобште

$$\int \frac{x^m . dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{1}{m} x^{m-\frac{1}{2}} . \sqrt{a-x} + \frac{a(2m-1)}{2m} \int \frac{x^{m-1} . dx}{\sqrt{ax-x^2}} .$$

Примећавајући овде пакъ, како првый чланъ десне части постае и за $x=0$ и за $x=a$ раванъ нулли, можемо одма ставити

$$\int_0^a \frac{x^m . dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{a(2m-1)}{2m} . \int_0^a \frac{x^{m-1} . dx}{\sqrt{ax-x^2}} \;\ldots\ldots\; (\alpha.,$$

и имамо у томе образацъ, коимъ доводимо вопросный интегралъ на друге ниже истога рода, и одма га тако и одкривамо. Ево:

Обзиромъ на то, да є по 14. обр. § 86. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = arc\,(sin\, v . = \frac{2}{a} x)$, и зато $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = arc\,(sin\, v . = 2) - arc\,(sin\, v . = 0) = \pi - 0 = \pi$, — добыямо изъ нађенога образца α.), ставляюћи у истомъ по реду $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^a \frac{x\, dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{a}{2} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{a}{2} \pi ,$$

$$\int_0^a \frac{x^2 . dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{3}{4} a \int_0^a \frac{x\, dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{1.3}{2.4} a^2 . \pi ,$$

$$\int_0^a \frac{x^3 . dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{5}{6} a \int_0^a \frac{x^2 . dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{1.3.5}{2.4.6} a^3 . \pi ,$$

и т. д. докъ найпосле

$$\int_0^a \frac{x^m.\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,.\,.\,(2m-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,2m}\,a^m.\,\pi\,.$$

2.) Пыта се за интегралъ

$$\tau=-\int_0^a \frac{r\,dx}{2\sqrt{g(a-x)(2rx-x^2)}}=-\frac{r}{2\sqrt{g}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)(2r-x)}}$$

$$=-\frac{r}{2\sqrt{g}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2r-x}}\,.$$

По биномномъ правилу добыямо

$$\frac{1}{\sqrt{2r-x}}=(2r-x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2r}}\cdot\left(1-\frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2r}}\cdot\left[1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2r}\right)+\frac{1.3}{2.4}\cdot\left(\frac{x}{2r}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\left(\frac{x}{2r}\right)^3+\,.\,.\,,\right];$$

зато є, ако ову вредность у вопросномъ интегралу узмемо и онда мложенѣ са $\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$ свршимо,

$$\tau=-\frac{r}{2\sqrt{2rg}}\cdot\left[\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2r}\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4r^2}\int_0^a \frac{x^2.\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}+\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\right].$$

Но ови су интеграли сви већъ познати изъ предходећегъ примера. Узимаюћи дакле нъиове у томе нађене вредности, слѣдуе, ако уедно брой π извадимо као заедничкогъ чинителя, коначно траженый интегралъ

$$\tau=-\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{r}{2g}}\cdot\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{2r}\right)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{2r}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{2r}\right)^3+\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\right].$$

3.) Потребанъ є $\int_0^a \frac{dx.\sqrt{a^4-c^2x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}$.

Извлачећи найпре у броителю a^4, а у именителю a^2 као заедничкога чинителя, и ставлхюћи после ради краткоће $\frac{c^2}{a^2}=\alpha^2$, а $\frac{x^2}{a^2}=z^2$, постаѥ уобште

$$\int\frac{dx.\sqrt{a^4-c^2x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}=a\int\frac{dz\sqrt{1-\alpha^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}=a\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}(1-\alpha^2z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=a\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}(1-\frac{1}{2}\alpha^2z^2-\frac{1.1}{2^2.2!}\alpha^4z^4-$$

$$-\frac{1.3}{2^3.3!}\alpha^6z^6-\frac{1.3.5}{2^4.4!}\alpha^8z^8-..)$$

$$=a\Big[\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}-\frac{1}{2}\alpha^2\int\frac{z^2.dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$-\frac{1.1}{2^2.2!}\alpha^4\int\frac{z^4.dz}{\sqrt{1-z^2}}-\frac{1.3}{2^3.3!}\alpha^6\int\frac{z^6.dz}{\sqrt{1-z^2}}-.\Big].$$

По 11. обр. § 86. є $\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=arc\,(sin=z)$, а по § 111. имамо

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{z^2.dz}{\sqrt{1-z^2}}&=-\frac{z}{2}\sqrt{1-z^2}+\frac{1}{2}arc\,(sin=z),\\ \int\frac{z^4.dz}{\sqrt{1-z^2}}&=-\Big(\frac{z^3}{4}+\frac{3.1}{4.2}z\Big)\sqrt{1-z^2}+\frac{3.1}{4.2}arc\,(sin=z),\\ \int\frac{z^6.dz}{\sqrt{1-z^2}}&=-\Big(\frac{z^5}{6}+\frac{5.1}{6.4}z^3+\frac{5.3.1}{6.4.2}z\Big)\sqrt{1-z^2}+\frac{5.3.1}{6.4.2}arc(sin\ \ z)\end{aligned}\right\}t.$$

. . . .

Бытће дакле, ако повратимо вредность $z=\frac{x}{a}$, збогъ $arc\,(sin=\frac{a}{a}=1)=\frac{\pi}{2}$, а $arc\,(sin=0)=0$, —

$$\int_{x=0}^{x=a} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=a} \frac{z^2 \,.\, dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=a} \frac{z^4 \,.\, dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{3.1}{4.2} \,.\, \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=a} \frac{z^6 \,.\, dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{5\,.\,3\,.\,1}{6\,.\,4\,.\,2} \,.\, \frac{\pi}{2}$$

. . . .

и зато съ овимъ вредностима, ако ій у предходећемъ изразу вопросного интеграла заменемо, и уєдно $\frac{\pi}{2}$ као заєдничкога чинителя извучемо, истый

$$\int_0^a \frac{dx\sqrt{a^4 - c^2\,x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = a\,.\,\frac{\pi}{2}\,.\,\Big[1 - \frac{1}{1}\Big(\frac{1}{2}\,.\,\frac{c}{a}\Big)^2 - \frac{1}{3}\Big(\frac{1.3}{2.4}\,.\,\frac{c^2}{a^2}\Big)^2$$

$$- \frac{1}{5}\Big(\frac{1.3.5}{2.4.6}\,.\,\frac{c^3}{a^3}\Big)^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\Big].$$

4.) Ако горнѣ интеграле подъ $t.$) узмемо међу границама $z = 0$ и $z = 1$, добыямо прво зато, што е $arc\,(sin = 1)$ $\frac{\pi}{2}$, а $arc\,(sin = 0) = 0$, — друго пакъ зато што у свакомъ одъ ньи првый членъ како за $z = 0$ тако и за $z = 1$ изчезава:

$$\int_0^1 \frac{z^2\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2}\,arc\,(sin = 1) = \frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^1 \frac{z^4\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{3.1}{4.2}\,arc\,(sin = 1) = \frac{3.1}{4.2}\,.\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{z^6\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{5.3.1}{6.4.2}\,arc\,(sin = 1) = \frac{5.3.1}{6.4.2}\,.\,\frac{\pi}{2}$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{z^{2n}.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\;\;.\;.\;.\;.\;(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;2n}\,.$$

Подобно слѣдую изъ интеграла съ безпарнимъ степенима одъ x у § 111. подъ 2., изменююћи само x са z:

$$\int_0^1 \frac{z\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = 1\,;$$

$$\int_0^1 \frac{z^3\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2}{3}\,,$$

$$\int_0^1 \frac{z^5\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2.4}{1.3}\,,$$

$$\int_0^1 \frac{z^7\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2.4.6}{1.3.5}\,,$$

. . . .

докъ найпосле

$$\int_0^1 \frac{z^{2n+1}.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\ldots\,2n}{3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,(2n+1)}$$

Делећи горный интегралъ за парне степене одъ z са овимъ за безпарне, добыямо

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{z^{2n}\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{z^{2n+1}.\,dz}{\sqrt{1-z^2}}} = \frac{\pi}{2}\,.\,\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-1)\,.\,3.5.7.9\ldots(2n+1)}{2.4.6.8\ldots\ldots\ldots\ldots2n\,.\,2.4.6.8\ldots\ldots2n}\,.$$

$$= \frac{\pi}{2}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\ldots\ldots(2n-1)\,(2n-1)\,.\,(2n+1)}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots2n\,.\,2n}\,.$$

Помишляюћи n врло велико, увиђамо лако, да ће се еданъ интегралъ одъ другогъ тимъ манѣ разликовати, штогодъ є исто n веће, и да међу ньима найпосле, ако є n безкрайно, готово никакве разлике више нема, дакле да за таково n поуздано можемо ставити

$$1 = \frac{\pi}{2}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\ldots\ldots\ldots\text{у безкрайность}}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\ldots\ldots\ldots\text{у безкрайность}}\,;$$

но одтудъ тадъ слѣдуе

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\ldots\ldots}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\ldots\ldots}\,;$$ већъ познатый

Валисевъ изразъ (Ч. I. § 180.), да израчунаванѣ броя π.

л) Вышии интеграли.

§ 142.

Ако место првогъ диференціала функціє y променљивога броя x имамо некій нѣнъ вышій диференціалъ, н. п. n. диференціалъ, онда є иста функціа у односу на тай датый или познатый диференціалъ уобште **вышій**, а у известномъ томъ случаю n. интегралъ, и добыямо є изъ истогъ диференціала интегралећи га застопце n пута, каошто є то већъ наговешћено у § 84.

Да бы ово бољма разумели, а уєдно іошъ и нешто друго притомъ увидили, узмимо найпре да є

$$ {}^2dy = f(x)\, d^2x. $$

У томъ случаю имамо

$$ \frac{{}^2dy}{dx} = f(x)\, dx\,, $$ или пошто є dx сталанъ брой,

$$ d\,\frac{dy}{dx} = f(x)\, dx. $$ Дакле є

$$ \frac{dy}{dx} = \int f(x)\, dx + C_1\,, $$ а

$$ dy = dx \,.\! \int f(x)\, dx + C_1\, dx\,, $$ и зато

$$ y = {}^2\!\!\int f(x)\, d^2x = \int dx \int f(x)\, dx + \int C_1\, dx + C_2 $$

$$ = \int dx \int f(x)\, dx + C_1 x + C_2\,. $$

Подобно имамо, ако є ${}^3dy = \varphi(x)\, d^3x$,

$$ \frac{{}^3dy}{d^2x} = d\,\frac{{}^2dy}{d^2x} = \varphi(x)\, dx\,, $$ тако да є

$$ \frac{{}^2dy}{d^2x} = \int \varphi(x)\, dx + C_1\,, $$

$\frac{{}^2dy}{dx} = d\,\frac{dy}{dx} = dx\,.\int \varphi(x)\,dx + C_1\,dx$, одтудъ после

$\frac{dy}{dx} = \int dx \int \varphi(x)\,dx + C_1 x + C_2$, а

$dy = dx\,.\int dx \int \varphi(x)\,dx + C_1 x dx + C_2 dx$, и зато

коначно $y = {}^3\!\int \varphi(x)\,d^3x = \int dx \int dx \int \varphi(x)\,dx + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$, или ако $\frac{1}{2} C_1$ са $\mathfrak{C}_1$ изменемо

$$y = {}^3\!\int \varphi(x)\,d^3x = \int dx \int dx \int \varphi(x)\,dx + \mathfrak{C}_1 + C_2 x + C_3.$$

Овимъ є горнѢ изреченѢ безъ сумнѢ подпуно потврђено; али се одтудъ увиђа іошъ и то: да у вопросну функцію улазе онолико сталны, непознаты броєва, колико смо пута интегралили.

Да узмемо іошъ и кои примеръ.

1.) Тражи се y изъ ${}^3dy = \sin x\,.\,d^3x$.

Ту имамо $\frac{{}^3dy}{d^2x} = d\,\frac{{}^2dy}{d^2x} = \sin x\,.\,dx = -\,d \cos x$; зато є

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = -\cos x + C_1, \quad \text{а}$$

$$\frac{{}^2dy}{dx} = d\,\frac{dy}{dx} = -\cos x\,.\,dx + C_1 dx$$

$$= -\,d \sin x + C_1 dx, \quad \text{тако да}$$

слѢдує
$$\frac{dy}{dx} = -\sin x + C_1 x + C_2, \quad \text{и одтудъ}$$

$$dy = -\sin x\,.\,dx + C_1 x dx + C_2 dx$$

$$= d \cos x + C_1 x dx + C_2 dx, \quad \text{а}$$

$$y = {}^3\!\int \sin x . d^3x = \cos x + \tfrac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$= \cos x + \mathfrak{C}_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

2.) Пыта се y изъ ${}^{4}dy = \frac{d^4x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\frac{{}^{4}dy}{d^3x} = d\,\frac{{}^{3}dy}{d^3x} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$ зато

$$\frac{{}^{3}dy}{d^3x} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,(sin = x) + C_1 \quad (\S\,86.);$$ одтудъ

$$\frac{{}^{3}dy}{d^2x} = d\,\frac{{}^{2}dy}{d^2x} = arc\,(sin = x)\,.\,dx + C_1dx\,,$$ зато

$$\frac{{}^{2}dy}{d^2x} = \int arc\,(sin = x)\,dx + C_1x + C_2$$

$$= x\,.\,arc\,(sin = x) + \sqrt{1-x^2} + C_1x + C_2 \quad (\S\,127.);$$ одатле

$$\frac{{}^{2}dy}{dx} = d\,\frac{dy}{dx} = xdx.arc\,(sin = x) + dx\,.\sqrt{1-x^2} + C_1xdx + C_2dx$$

зато

$$\frac{dy}{dx} = \int xdx\,.\,arc\,(sin = x) + \int dx\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\,C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$= \frac{x^2}{2}\,arc\,(sin = x) + \tfrac{3}{4}\,x\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{4}\,arc\,(sin = x)$$

$$- \tfrac{1}{2}\,arc\,(sin = \sqrt{1-x^2}) + \tfrac{1}{2}\,C_1\,x^2 + C_2x + C_3$$

(III. осн. прав. § 85.; найпре $1-x^2=z^2$, после § 111.); одтудъ

$$dy = \tfrac{1}{2}\,x^2.\,dx\,.\,arc\,(sin = x) + \tfrac{3}{4}\,x\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{4}\,dx\,.\,arc\,(sin = x)$$

$$- \tfrac{1}{2}\,dx\,.\,arc\,(sin = \sqrt{1-x^2}) + \tfrac{1}{2}\,C_1x^2dx + C_2xdx + C_3dx,$$

и зато

$$y = {}^{4}\!\int \frac{d^4x}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2}\int x^2 . dx \,.\, arc\,(sin = x) + \tfrac{3}{4}\int x\sqrt{1-x^2}$$

$$- \tfrac{1}{4}\int dx\; arc\,(sin = x) - \tfrac{1}{2}\int dx \,.\, arc\,(sin = \sqrt{1-x^2})$$

$$+ \tfrac{1}{6}\, C_1 x^3 + \tfrac{1}{2}\, C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

$$= \frac{x}{12}(2x^2 - 3) \,.\, arc\,(sin = x) + \frac{1}{36}(11x^2 + 4) \,.\, \sqrt{1-x^2}$$

$$- \tfrac{1}{2}\, x\; arc\,(sin = \sqrt{1-x^2}) + \mathfrak{C}_1 x^3 + \mathfrak{C}_2 x^2 + \mathfrak{C}_3 x + \mathfrak{C}_4$$

(III. осн. прав. и § 111.; обр. 18. § 87.; § 127.; $1 - x^2 = z^2$, после § 111.).

§ 143.

Безъ обзира на сталне броеве имамо

$${}^{2}\!\int \psi(x) d^2x = \int dx \int \psi(x)\, dx\,,$$

или ако у III. основномъ правилу § 85. узмемо $d\,f(x) = dx$, а $\varphi(x) = \int \psi(x)\, dx$, дакле $f(x) = x$, а $d\varphi(x) = \psi(x) dx$:

$${}^{2}\!\int \psi(x)\, d^2x = x \int \psi(x)\, dx - \int x \,.\, \psi(x)\, dx.$$

Одтудъ слѣдуе

$${}^{3}\!\int \psi(x)\, d^3x = \int dx \,.\, {}^{2}\!\int \psi(x)\, d^2x = \int x dx \int \psi(x)\, dx$$

$$- \int dx \int x\psi(x)\, dx.$$

Поставляюћи пакъ у истомъ III. правилу еданпутъ $df(x) = xdx$, $\varphi(x) = \int \psi(x)\, dx$, а другій путъ $df(x) = dx$, $\varphi(x) = \int x\psi(x)\, dx$, слѣдуе

$$\int x dx \int \psi(x)\, dx = \tfrac{1}{2}\, x^2 . \int \psi(x)\, dx - \tfrac{1}{2}\int x^2 \psi(x)\, dx\,, \quad \text{а}$$

$$\int dx \int x\psi(x)\,dx = x\int x\psi(x)\,dx - \int x^2\psi(x)\,dx,$$

тако да є после съ тима вредностима

$$^3\int\psi(x)\,d^3x = \frac{1}{2!}\,[x^2.\int\psi(x)\,dx - 2x.\int x\psi(x)\,dx + \int x^2.\,\psi(x)\,dx].$$

Истимъ путемъ добыямо далѣ

$$^4\int\psi(x)\,d^4x = \frac{1}{3!}\,[x^3.\int\psi(x)dx - 3x^2.\int x\psi(x)dx + 3x.\int x^2\psi(x)\,dx$$

$$- \int x^3\psi(x)\,dx],$$

$$^5\int\psi(x)\,d^5x = \frac{1}{4!}\,[x^4.\int\psi(x)dx - 4x^3.\int x\psi(x)dx + 6x^2.\int x^2\psi(x)\,dx$$

$$- 4x.\int x^3\psi(x)\,dx + \int x^4\psi(x)\,dx],$$

и т. д. докъ найпосле уобште

$$^n\int\psi(x)\,d^nx = \frac{1}{(n-1)!}\,[x^{n-1}.\int\psi(x)\,dx - \binom{n-1}{1}x^{n-2}.\int x\psi(x)\,dx$$

$$+ \binom{n-1}{2}x^{n-3}.\int x^2\psi(x)\,dx - \ldots \pm \int x^{n-1}\psi(x)\,dx],$$

или ако iошъ сви n сталны броєва, кои при постепеномъ интегралению єданъ по єданъ овамо улазе, и одъ кои є свакiй съ другимъ некимъ степеномъ одъ x снабдеванъ, неизоставимо,

$$^n\int\psi(x)\,d^nx = \frac{1}{(n-1)!}\,[x^{n-1}.\int\psi(x)\,dx - \binom{n-1}{1}x^{n-2}.\int x\psi(x)\,dx$$

$$+ \ldots \pm \int x^{n-1}\psi(x)\,dx] + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots$$

$$+ C_{n-1}x + C_n,$$

образацъ, помоћу кога можемо свакiй вышiй интегралъ свести на саме просте интеграле. Тако н. п. имали бы по истомъ образцу

$$^3\!\int\frac{d^3x}{x^3}=\frac{1}{2!}\left[x^2.\int\frac{dx}{x^3}-2x.\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x}\right]+C_1x^2+C_2x+C_3$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2.\frac{1}{-2x^2}-2x.\frac{1}{-x}+lx\right]+C_1x^2+C_2x+C_3$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}lx+C_1x^2+C_2x+C_3$$

$$=\frac{1}{2}lx+C_1x^2+C_2x+\left(C=C_3+\frac{3}{4}\right).$$

§ 144.

Садъ смо у станю определити границе мећу коима лежи сбиръ пренебрегнуты чланова маклореновогъ и телеровогъ образца, кое є у анализи и при нѣномъ употребляваню одъ врло велике важности.

Узимаюћи одъ общтегъ маклореновогъ образца (§ 32.) само n прafы членова, и означуюћи сбиръ осталы съ X, слѣдує изъ истога образца

$$X=f(x)-f(\underset{\alpha}{x})-f_1(\underset{\alpha}{x}).(x-\alpha)-f_2(\underset{\alpha}{x}).\frac{(x-\alpha)^2}{2!}-f_3(\underset{\alpha}{x})\frac{(x-\alpha)^3}{3!}$$

$$-\ldots-f_{n-1}(\underset{\alpha}{x})\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!},$$

изразъ, кои очевидно за $x=\alpha$ постає $=0$, збогъ чега можемо по §у 133. сбиръ X сматрати као интегралъ кои започинѣ съ $x=\alpha$.

Диференціалећи истый изразъ n пута застопце, налазимо

$$^n dX=f_n(x)\,d^nx;$$

интегралећи пакъ ово по предходећемъ §у мећу границама α и x, слѣдує

$$X = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int_a^x f_n(x)\,dx - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \int_a^x x f_n(x)\,dx$$

$$+ \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} \cdot \int_a^x \frac{x^2}{2!} f_n(x)\,dx - \,.\,.$$

$$\pm \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} \cdot \int_a^x \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \cdot f_n(x)\,dx \mp \ldots \pm \int_a^x \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f_n(x)\,dx\,.$$

Но пошто є при определѣномъ међу известнимъ границала интегралу сасвимъ свеєдно, кои є променљивый брой пре тога стаяо, то можемо у интегралима сбира X узети место x ма какавъ другій променљивый брой, н. п. z. Поступаюћи тако добыямо

$$X = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int_a^x f_n(z)\,dz - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \int_a^x z f_n(z)\,dz$$

$$+ \frac{x^{n-3}}{(n-2)!} \cdot \int_a^x \frac{z^2}{2!} \cdot f_n(z)\,dz - \,.\,.$$

$$\pm \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} \cdot \int_a^x \frac{z^{r-1}}{(r-1)!} \cdot f_n(z)\,dz \mp \,.\,. \pm \int_a^x \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f_n(z)\,dz\,.$$

Али є по прећашнѣмъ §у

$${}^2\!\int_a^x f_n(z)\,d^2z = x \int_a^x f_n(z)\,dz - \int_a^x z f_n(z)\,dz$$

$$= \int_a^x x \cdot f_n(z)\,dz - \int_a^x z f_n(z)\,dz = \int_a^x (x-z) \cdot f_n(z)\,dz,$$

$${}^3\!\int_a^x f_n(z)\,d^3z = \frac{x^2}{2!} \cdot \int_a^x f_n(z)\,dz - x \int_a^x z f_n(z)\,dz + \int_a^x \frac{z^2}{2!} \cdot f_n(z)\,dz$$

$$= \int_a^x \frac{x^2}{2!} \cdot f_n(z)\,dz - \int_a^x xz \cdot f_n(z)\,dz + \int_a^x \frac{z^2}{2!} \cdot f_n(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2!} \cdot \int_a^x (x^2 - 2xz + z^2) \cdot f_n(z)dz. = \frac{1}{2!} \int_a^x (x-z)^2 \cdot f_n(z)dz,$$

$${}^4\!\int_\alpha^x f_n(z)d^4z = \frac{x^3}{3!}\cdot\int_\alpha^x f_n(z)dz - \frac{x^2}{2!}\cdot\int_\alpha^x z f_n(z)dz + x\int_\alpha^x \frac{z^2}{2!}\cdot f_n(z)\,dz$$

$$-\int_\alpha^x \frac{z^3}{3!}\cdot f_n(z)\,dz$$

$$= \int_\alpha^x \frac{x^2}{3!}\cdot f_n(z)\,dz - \int_\alpha^x \frac{x^2 z}{2!}\cdot f_n(z)\,dz + \int_\alpha^x \frac{xz^2}{2!}\,f_n(z)\,dz$$

$$-\int_\alpha^x \frac{z^3}{3!}\cdot f_n(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{3!}\cdot\int_\alpha^x (x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3)\cdot f_n(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{3!}\cdot\int_\alpha^x (x-z)^3\cdot f_n(z)\,dz\,,$$

и т. д., те зато найпосле

$$X = {}^n\!\int_\alpha^x f_n(z)\,d^nz = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\int_\alpha^x (x-z)^{n-1}\cdot f_n(z)\,dz.$$

Примѣћаваюћи сада іошъ, да є $(x-z)^{n-1}$ за све вредности броя z одъ α па до x єдногъ истогъ знака, т. є. при положнимъ вредностима одъ z свагда положно, а при одречнимъ вредностима истога броя свагда одречно, и да у последнѣмъ случаю можемо тражити $-X$, тако да є тадъ $(x-z)^{n-1}$ опетъ свагда положно: увиђамо да су тражене границе сбира X при обштемъ маклореновомъ образцу по § 138.

$$\frac{\underset{g}{f_n(z)}}{(n-1)!}\cdot\int_\alpha^x (x-z)^{n-1}\cdot dz \quad \text{и} \quad \frac{\underset{k}{f_n(z)}}{(n-1)!}\cdot\int_\alpha^x (x-z)^{n-1}\cdot dz\,,$$

гди $\underset{g}{f_n(z)}$ и $\underset{k}{f_n(z)}$ представляю односно найвећу и найманю вредность функціє $f_n(z)$, коє она прима одъ $z=\alpha$

до $z = x$. Пошто є пакъ найпосле $\int (x-z)^{n-1}.\, dz = -\frac{(x-z)^n}{n} + C$, дакле $\int_\alpha^x (x-z)^{n-1}.\, dz = \frac{(x-\alpha)^n}{n}$, то су вопросне границе сбира X,

$$f_n(\underset{g}{x}) \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \quad \text{и} \quad f_n(\underset{k}{x}) \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!}.$$

По тому, ако $f_n(\underset{\mu x}{x})$ представля међу $f_n(\underset{k}{x})$ и $f_n(\underset{k}{x})$ лежећу вредность функціє $f_n(x)$, коя одговара сбиру X пренебрегнуты членова, треба обштій маклореновъ образацъ писати овако:

$$f(x) = f(\underset{\alpha}{x}) + f_1(\underset{\alpha}{x}) \cdot (x-\alpha) + f_2(\underset{\alpha}{x}) \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + f_3(\underset{\alpha}{x}) \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!}$$

$$+ \cdots + f_{n-1}(\underset{\alpha}{x}) \cdot \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(\underset{\mu x}{x}) \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!},$$

при чему μ, каошто се изъ предходећегъ рада увиђа, представля некій чистъ разломакъ.

При простомъ є маклореновомъ образцу $\alpha = 0$, и зато истый образацъ сада, са сбиромъ X пренебрегнуты членова одъ $(n+1)$. на далѣ, овакавъ:

$$f(x) = f(\underset{0}{x}) + f_1(\underset{0}{x}) \cdot x + f_2(\underset{0}{x}) \cdot \frac{x^2}{2!} + f_3(\underset{0}{x}) \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdot$$

$$+ f_{n-1}(\underset{0}{x}) \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(\underset{\mu x}{x}) \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Изъ пређашньи граница обштегъ маклореновогъ образца слѣдую границе сбира X за телеровъ образацъ, ако место x узмемо найпре $\alpha + h$, али после опетъ изменемо α съ x. Тако поступаюћи показуе се телеровъ образацъ са сбиромъ X членова одъ $(n+1)$.. на далѣ овако:

$$f(x+h) - f(x) = f_1(x)\,h + f_2(x)\frac{h^2}{2\,!} + f_3(x)\frac{h^3}{3\,!} + \ldots$$

$$+ f_{n-1}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)\,!} + f_n(x)_{x+\mu h}\cdot\frac{h^n}{n!},$$

гди μ важи што и пре.

§ 145.

Ако є $\int f(x) = \varphi(x)$, онда постає телеровъ образацъ са допуномъ X вида

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx = f(x)\,h + f_1(x)\frac{h^2}{2\,!} + f_2(x)\frac{h^3}{3!} + \ldots.$$

$$+ f_{n-2}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + f_{n-1}(x)_{x+\mu h}\cdot\frac{h^n}{n!}.$$

Узимаюћи овде a место x, а $b - a$ место h, слѣдуе

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\underset{a}{x})\cdot\frac{b-a}{1} + f_1(\underset{a}{x})\cdot\frac{(b-a)^2}{2!} + f_2(\underset{a}{x})\cdot\frac{(b-a)^3}{3!}$$

$$+ \ldots + f_{n-2}(\underset{a}{x})\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + f_{n-1}(x)_{a+\mu(b-a)}\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Ставляюћи пакъ у пређашнѣмъ образцу найпре $-h$ место h, а после b место x и $b - a$ место h, добыямо іошъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\underset{b}{x})\cdot\frac{b-a}{1} - f_1(\underset{b}{x})\cdot\frac{(b-a)^2}{2!} + f_2(\underset{b}{x})\cdot\frac{(b-a)^3}{3!}$$

$$- \ldots \pm f_{n-2}(\underset{b}{x})\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \mp f_{n-1}(x)_{b-\mu(b-a)}\cdot\frac{(b-a)^n}{n!},$$

при коя два образца вреди μ што и дояко, тако да сачинитель одъ $\frac{(b-a)^n}{n!}$ лежи свагда између найманѣ и найвеће вредности одъ $f_{n-1}(x)$, коє ова функція прима, кадъ место x узмемо наставно све вредности одъ a до b.

Б. Интеграленѣ функцiя више променльивы броева.

а) Интеграли почастны диференцiала.

§ 146.

Ако є v нека функцiя два међу собомъ независна променльива броя x и y, и нѣнъ є почастный другiй диференцiалный количникъ $\frac{\overset{2}{d}v}{dx\,.\,dy}=z$ познатъ, онда можемо исту функцiю v изъ овогъ количника, поредъ свега тога што се у нѣму налазе два променльива броя, ипакъ по онимъ истимъ, дояко показанимъ правилама за интеграленѣ функцiя само єдногъ променльивогъ броя изнаћи; єръ се тай количникъ, каошто знамо, добыя, сматраюћи при диференцiаленю вопросне функцiє найпре само єданъ, па онда и онай другiй променльивый брой као такова, збогъ чега обратно при интеграленю сасвимъ наравно такођеръ найпре само єданъ, па онда и онай другiй одъ тiй броєва као променлъива узети валя, а то очевидно нинашта друго неизлазн, већъ на повторено интеграленѣ функцiє само єдногъ променльивогъ броя.

У таковомъ є случаю съ другимъ речма

$$\frac{\overset{2}{d}v}{dy}=d\,\frac{dv}{dy}=zdx,\quad \text{и зато}$$

$$\frac{dv}{dy}=\int zdx+Y,$$

при чему Y представля неку iошъ непознату функцiю само одъ y. Одтудъ пакъ слѣдує

$$dv=dy\,.\int zdx+Ydy\,,$$

и зато вопросна функцiя

$$v=\int dy\int zdx+\int Ydy+X,$$

гди X стои место неке iошъ непознате функцiє само одъ x.

Тако є н. п. у случаю ако є $\frac{{}^{2}dv}{dx\,.\,dy}=\frac{2}{\sqrt{x^2-y^2}}$,

$$\frac{{}^{2}dv}{dy}=d\,\frac{dv}{dy}=\frac{2dx}{\sqrt{x^2-y^2}}=2\,\frac{dx}{x}\cdot\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=2\,\frac{dx}{x}\cdot\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{1.3}{2^2.2!}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^4\right.$$

$$\left.+\frac{1.3.5}{2^3.3!}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^6+\ldots\right];$$ дакле

$$\frac{dv}{dy}=2\left[\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}y^2.\int\frac{dx}{x^3}+\frac{1.3}{2^2.2!}y^4.\int\frac{dx}{x^5}+\frac{1.3.5}{2^3.3!}y^6.\int\frac{dx}{x^7}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots\right]$$

$$=2lx-\left(\frac{1}{2}\right).\frac{y^2}{x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1.3}{2^2.2!}\right).\frac{y^4}{x^4}-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3.5}{2^3.3!}\right)\frac{y^6}{x^6}$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5.7}{2^4.4!}\right)\frac{y^8}{x^8}-\ldots\ldots+Y,$$ и одтудъ

$$dv=2lx\,.\,dy-\frac{1}{2x^2}.y^2dy-\frac{1}{2}.\frac{1.3}{2^2.2!\,x^4}.y^4dy-\frac{1}{3}.\frac{1.3.5}{2^3.3!\,x^6}y^6dy$$

$$-\ldots\ldots+Ydy,$$ а зато опетъ

$$v=2ylx-\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)\frac{y^3}{x^2}-\frac{1}{5}.\left(\frac{1}{2}.\frac{1.3}{2^2.2!}\right)\frac{y^5}{x^4}-\frac{1}{7}.\left(\frac{1}{3}.\frac{1.3.5}{2^3.3!}\right)\frac{y^7}{x^6}$$

$$-\frac{1}{9}.\left(\frac{1}{4}.\frac{1.3.5.7}{2^4.4!}\right)\frac{y^9}{x^8}-\ldots+\int Ydy+X.$$

Како треба поступати ако є датый почастный диференціалный количникъ вышега степена, н. п. $\frac{{}^{3}dv}{dx.dy.dz}=t$, или $\frac{{}^{4}dv}{dw.dx.dy.dz}=u$ и т. д., увиђа се сада безъ сумнѣ по себи, и зато ћемо само іошъ да приметимо како се изразъ $\int dy \int zdx$ зове **двострукій** интегралъ, изразъ $\int dz \int dy \int tdx$ **тространкій** интегралъ, и подобно далѣ.

б) Интеграли подпуны просты диференціала или диференціалны количника.

§ 147.

Место изъ каквогъ почастногъ диференціала или диференціалногъ количника функціє више пременльивы броєва, може се иста функція тражити изъ некогъ нѣногъ подпуногъ диференціала или диференціалногъ количника, и тай є посао, каошто ћемо одма видити већъ тежій одъ пређашнѣга.

Узмимо найпре да се тражи функція два пременльива броя изъ датогъ нѣногъ подпуногъ другогъ диференціала.

Тай є по § 37., ако се тиче функціє $v = f(x, y)$,

$$dv = f_1(x, y)_x . dx + f_1(x, y)_y . dy, \quad \text{или простіє}$$

$$= Mdx + Ndy \quad \ldots\ldots, \ldots (1.,$$

гди, каошто се лако увиђа а и већъ знамо одъ пре, M и N представляю опетъ неке функціє одъ x и y, тако да є свагда (§ 46.)

$$\frac{dM_y}{dy} = \frac{dN_x}{dx} \quad \ldots\ldots (2.$$

Тражи ли се дакле функція v изъ горнѣгъ израза подъ 1., то имамо обзиромъ на то, да є $M = f_1(x, y)_x = \frac{dv_x}{dx}$,

$$v = \int Mdx + Y \quad \ldots\ldots (3.,$$

гди Y представля неку функцію само броя y.

Да бы пакъ ту функцію одкрили, то валя приметити, да є $\frac{dv_y}{dy} = N$, збогъ чега, ако пређашню єдначину подъ 3. по y диференціалимо и притомъ ставимо ради краткоће

$$\int Mdx = z \quad \ldots\ldots (4.,$$ слѣдує

$$\frac{dv_y}{dy} = N = \frac{dz_y}{dy} + \frac{dY}{dy},$$ и одтудъ

$$dY = Ndy - \left(\frac{dz_y}{dy}\right) dy,$$ тако да є после

$$Y = \int Ndy - \int \left(\frac{dz_y}{dy}\right) dy$$

и зато по горньой єдначини подъ 3. функція

$$v = z + \int \left(N - \frac{dz_y}{dy}\right) dy \quad \ldots\ldots (I.,$$

чему за подпуну обштость само іошъ валя придати сталный брой C.

Овай изразъ бытће безъ сумнѣ подпуно определѣнъ, ако разлика $N - \left(\frac{dz_y}{dy}\right)$ несадржи више брой x, но само іошъ y, или є сталанъ брой. Да пакъ, у случаю ако є датый диференціалъ функціє v као подпуный исправанъ, броя x у истой разлици никако више неможе быти, ево увереня.

Ставимо $N - \frac{dz_y}{dy} = P$. Бытће ако по x диференціалимо

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{dN_x}{dx} - \frac{{}^2dz}{dy.dx}.$$

Но по § 45. є

$$\frac{{}^2dz}{dy.dx} = \frac{{}^2dz}{dx.dy} = \frac{d\left(\frac{dz_x}{dx}\right)}{dy},$$

и зато ако место $\frac{dz_x}{dx}$ узмемо нѣгову изъ єдначине подъ 4. слѣдуюћу вредность M,

$$\frac{{}^2dz}{dy\,.\,dx} = \frac{dM_y}{dy},$$

а збогъ тога обзиромъ на єдначину подъ 2.

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{dN_x}{dx} - \frac{dM_y}{dy} = 0,$$

кое є знакъ, да вопросна разлика $P = N - \frac{dz_y}{dy}$ несадржи брой x. Она є дакле, па зато и Y или какавъ безусловно сталный брой, или пакъ само іошъ нека функція одъ y.

Сасвимъ истимъ путемъ налазимо, полазећи горе одъ N место одъ M,

$$v = w + \int\left[M - \frac{dw_x}{dx}\right] \cdot dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II.,$$

при чему є $w = \int Ndy + X$, и овде опетъ X или некій безусловно сталный брой, или пакъ нека функція само одъ x.

§ 148.

Примери. 1.) $dv = \frac{dx + dy}{x + y}$.

Ту є $M = N = \frac{1}{x+y}, z = \int M dx = \int \frac{dx}{x+y} = l\,(x+y),$ $\frac{dz_y}{dy} = \frac{dy}{x+y}$, зато по образцу I. тражена функція

$$v = l\,(x+y) + \int\left(\frac{dy}{x+y} - \frac{dy}{x+y}\right) dy + C.$$

$$= l\,(x+y) + C.$$

2.) $dv = y^x . ly . dx + xy^{x-1} . dy.$

При томъ є $M = y^x . ly, N = xy^{x-1}, z = \int M dx = \int y^x . ly . dx = y^x, dz_y = xy^{x-1} . dy$, зато по поменутомъ образцу тражена функція

$$v = y^x + \int (xy^{x-1} - xy^{x-1})\, dy + C$$

$$= y^x + C \quad \text{(види § 46.)}.$$

3.) $dv = \cos x . \cos y . dx - \sin x . \sin y . dy.$

Ту є $M = \cos x \cos y, N = -\sin x \sin y, z = \int M dx = \int \cos x . \cos y . dx = \cos y . \int \cos x . dx = \cos y . \sin y, dz_y = -\sin y \sin x . dy$, дакле

$$v = \sin x \cos y + \int (-\sin x \sin y + \sin x \sin y) + C$$

$$= \sin x \cos y + C \quad \text{(види § 39.)}$$

§ 149.

Ако имамо изнаћи функцію $v = f(x, y, z)$ три променльива броя x y и z изъ датогъ нѣногъ подпуногъ диференціала

$$dv = Mdx + Ndy + Odz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.,$$

при комъ по § 47. $M = f_1(x, y, z)_x, N = f_1(x, y, z)_y$ и $O = f_1(x, y, z)_z$ представляю такове функціє иста три броя x, y, и z, да є свагда

$$\frac{dM_y}{dy} = \frac{dN_x}{dx}, \frac{dM_z}{dz} = \frac{dO_x}{dx}, \frac{dN_z}{dz} = \frac{dO_y}{dy} \quad \ldots\ldots \quad (2.,$$

онда поступамо овако:

Сматраюћи у изразу подъ 1. єданъ одъ променльивы броєва, н. п. z као стална, и поставляюћи после ради краткоће

$$Mdx + Ndy = du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.,$$

добыямо интеграленѣмъ истога израза подъ 1.

$$v = u + Z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.,$$

гди Z представля неку функцію само іошъ одъ z.

Узимаюћій далѣ подпуный диференціалъ овогъ последнѣгъ израза, слѣдує

$$dv = Mdx + Ndy + du_x + du_y + du_z + dZ \; . \; . \; . \; . \; (5.,$$

и одтудъ, сматраюћи све по два и два променльива броя као сталне,

$$Mdx = du_x, \; Ndy = du_y, \; Odz = du_z + dZ, \quad \text{или}$$

$$M = \frac{du_x}{dx}, \; N = \frac{du_y}{dy}, \; O = \frac{du_z}{dz} + \frac{dZ}{dz} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6.,$$

Последный одъ ова три израза дає

$$dZ = \left(O - \frac{du_z}{dz}\right) dz, \quad \text{а ово опетъ}$$

$$Z = \int\left(O - \frac{du_z}{dz}\right) dz;$$

одкуда увиђамо, да ћемо ову функцію Z лако моћи изнаћи по предходећимъ §§-ма, ако разлика $O - \frac{du_z}{dz}$ несадржи никакавъ другій променльивый брой, осимъ z. Да ово пакъ, у случаю да є датый диференціалъ функціє v као подпуный исправанъ, доиста постои, ево увереня:

Нека є ради краткоће $O - \frac{du_z}{dz} = P$. Бытће

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{dO_x}{dx} - \frac{\overset{2}{d}u}{dz\,.\,dx} = \frac{dO_x}{dx} - \frac{d\left(\frac{du_x}{dz}\right)}{dz},$$

$$\frac{dP_y}{dy} = \frac{dO_y}{dy} - \frac{\overset{2}{d}u}{dz\,.\,dy} = \frac{dO_y}{dy} - \frac{d\left(\frac{du_y}{dz}\right)}{dz},$$

или ако место последньи чланова у оба израза узмемо ньиове вредности по изразу подъ 6.,

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{dO_x}{dx} - \frac{dM_z}{dz}, \text{ а } \frac{dP_y}{dy} = \frac{dO_y}{dy} - \frac{dN_z}{dz},$$

т. є. обзиромъ на изразе подъ 2.)

$\frac{dP_x}{dx} = 0$ и $\frac{dP_y}{dy} = 0$ за знакъ: да є P по x и y стално, и дакле као таково или какавъ безусловно сталный брой, или пакъ само іошъ нека функція одъ z.

На основу тога имамо садъ коначно по єдначини подъ 4.)

$$v = u + \int\left(O - \frac{du_z}{dz}\right) bz,$$

за кое валя найпре изнаћи u по предходећимъ §§-ма изъ израза подъ 3.

§ 150.

Примеръ. Датъ є $dv = sin(y\,lz).dx + xlz.cos(y\,lz).dy + xy.cos(y\,lz).dz$.

Ту є $M = sin(y\,lz)$, $N = x\,lz.cos(y\,lz)$, $O = xy.cos(y\,lz)$, дакле

$$du = sin(y\,lz)\,dx + x\,lz.cos(y\,lz)\,dy,$$

$$u = \int[sin(y\,lz).dx + x\,lz.cos(y\,lz)\,dy]$$

$$= w + \int\left[x\,lz.cos(y\,lz) - \frac{dw_y}{dy}\right]dy, \text{ или збогъ}$$

$$w = \int sin(y\,lz)\,dx = sin(y\,lz)\,x, \text{ а } \frac{dw_y}{dy} = x\,lz.cos(y\,lz):$$

$$u = x\,sin(y\,lz) + \int[x\,lz.cos(y\,lz) - x\,lz.cos(ylz)]\,dy$$

$$= x\,sin(y\,lz).$$

Слѣдователно $\frac{du_1}{dz} = \frac{xy}{z} \cdot cos\,(y\,lz)$, и зато по последнѣмъ изразу пређашнѣга §-а

$$v = x\,.\,sin\,(y\,lz) + \int\left[\frac{xy}{z} \cdot cos\,(y\,lz) - \frac{xy}{z} \cdot cos\,(y\,lz)\right] dz$$

$$= x\,.\,cos\,(y\,lz) + C\,.$$

(Види § 39. примеръ 5.).

Приметба. Пошто се овай начинъ интеграленя подпуны диференціала само дотле може употребити, докъ є датый диференціалъ као подпуный исправанъ, то дакле пре свега нѣгову исправность испытати валя.

в.) Интеграли єдностепены диференціалны функція првога реда.

§ 151.

Ако є $dv = Mdx + Ndy + Odz + \dots\dots$, и притомъ M, N, O и т. д. представляю єдностепене функціє произвольно коликога, али све єдногъ истогъ степена, н. п. n., онда є v єдностепена функція $(n+1)$ степена, и по показаномъ у § 40. свойству таковы функція

$$(n+1)\,v = Mx + Ny + Oz + \dots\dots,$$

одкуда слѣдує

$$v = \int(Mdx + Ndy + Odz + \dots\dots)$$

$$= \frac{Mx + Ny + Oz + \dots\dots}{n+1} + C\,.$$

Интеграленѣ є дакле таковы диференціалны єдностепены функція првога реда врло просто, каошто ће то потврдити и слѣдуюћи у

§ 152.

Примери.

1.) Имамо $dv = (4x + y - 2\frac{z^4}{x^3})\,dx + (x - 3z - \frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{z})\,dy$

$$- (3y - 4\frac{z^3}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{z^2})\,dz\,.$$

Ту су диференціални сачннительи єдностепене функціє првога степена, и слѣдує по горнѣму

$$v = \frac{1}{2}\left[\left(4x + y - 2\frac{z^4}{x^3}\right)x + \left(x - 3z - \frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{z}\right)y - \left(3y - 4\frac{z^3}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{z^2}\right)z\right]$$

$$= 2x^2 + xy + 2\frac{z^4}{x^2} - 3yz - \frac{y^3}{z} + C.$$

(Види § 41.)

2.) $dv = (3x^2 + 2ay^2)\,dx + (4axy + 3by^2)\,dy\,.$

Ту є $n = 2$, т. є. диференціални су количници єдностепене функціє другогъ степена, и зато по горнѣму

$$v = \frac{1}{3}[(3x^2 + 2ay^2)\,x + (4axy + 3by^2)\,y]$$

$$= x^3 + 2axy + by^3 + C\,.$$

3.) $dv = (2x - y\cos\frac{x}{y} + 2y)dx + (2x - 2y.\sin\frac{x}{y} + x\cos\frac{x}{y})\,dy\,.$

Ту є $n = 1$, зато по горнѣму

$$v = \frac{1}{2}[(2x - y\cos\frac{x}{y} + 2y)x + (2x - 2y\sin\frac{x}{y} + x\cos\frac{x}{y})\,y]$$

$$= x^2 - 2xy - y^2.\sin\frac{x}{y} + C\,.$$

(Види § 41.)

§ 153.

За овако интеграленѣ едностепены функція имамо іошъ приметити

1.) Показаный, изъ особиты свойства таковы функція подаюћи се начинъ служи само дотле, докъ є датый диференціалъ, као подпуный, исправанъ, збогъ чега испытиванѣ нѣгове исправности свему предходити мора;

2.) Ако є $n = -1$, онда истый начинъ неможемо употребити, єръ се по нѣму наилази на едначину вида $0 = 0$, за знакъ, да траженый интегралъ ніє алгебрайскій. У таковомъ дакле случаю неостаѥ ништа друго, но тражити вопросный интегралъ на обичный начинъ;

3.) Показаный начинъ найпосле важи на основу § 41. іошъ и за такове едностепене функціє, у коима се налазе и трансцендентни чланови, али само ако су ови одъ нулнога степена, као у последнѣмъ примеру, кои ову приметбу подпуно потврђує.

г.) Интеграленѣ диференціалны едначина'.

§ 154.

Место диференціалногъ каквогъ количника неке функціє, датогъ као дояко у виду одкривене функціє променльивы, међу собомъ независны броєва, добыямо често само неку едначину тіи броєва и нъиовы диференціалны количника, изъ кое основну едначину или функцію изнаћи треба.

Такова дата едначина зове се **диференціална едначина**, и као такова опетъ одъ 1., 2., ... уобште n реда, пошто у нъой налазећи се найвышій диференціалный количникъ буде 1., 2., ... уобште n.

У слѣдуюћимъ §§-ма показат'ћемо само интеграленѣ диференціалны едначина' првога реда одъ два променльива броя.

1.) Интеграленѣ диференціалны єдначина' 1. реда, и по $\frac{dy}{dx}$ одъ 1. степена.

§ 155.

Диференціална єдначина првога реда одъ два променльива броя по $\frac{dy}{dx}$ одъ првогъ степена обштега є вида.

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0,$$

и може се свагда свести на видъ

$$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

гди P и Q представляю убоште неке функціє одъ x и y, чега ради узиматѣемо при далѣмъ сматраню дату диференціалну єдначину свагда у томъ веѣъ сведеномъ виду.

Преображаванѣ єдначине $f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ у сведену $Pdx + Qdy = 0$ увиђа се свагда врло лако по себи, збогъ чега ніє потребно поставити за то нарочна правила. Тако н. п. ако є дата диференціална єдначина

$$(y^2 - x) + (x^2 - y)\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

нетреба ништа друго радити, осимъ помложити є са dx, пакъ прелази у сведену

$$(y^2 - x)\,dx + (x^2 - y)\,dy = 0\,.$$

При томе преображаваню могуѣе є, да се добыю такове функціє P и Q, да є $Pdx + Qdy$ подпуный диференціалъ неке функціє $F(x, y)$, кое ѣе се, каошто знамо, по томе познати, што ѣе быти $\frac{dP_y}{dy} = \frac{dQ_x}{dx}$, т. є. диференціалный количникъ функціє P по y раванъ диференціалномъ количнику функціє Q по x. У таковомъ случаю належимо помоћу дојакошньи §§-а лако ту $F(x, y) = C$, т. є. равну некомъ сталномъ броју.

Чешће пакъ догађа се, да лева часть сведене єдначине, као у горнѣмъ примеру, нiє подпуный диференціалъ. У таковимъ случаєвима кушамо єднимъ одъ слѣдуюћи начина', неможе ли се сведена єдначина далѣ дотерати тако, да є после можемо интегралити у виду крайне функціє.

α.) *Одлучаванѣ пременљивы броєва.*

§ 156.

Цѣль овога начина састои се у томе, да одъ єдначине $Fdx + Qdy = 0$ направимо другу $Xdx + Ydy = 0$, гди X и Y нису више као пре P и Q функціє оба пременљива броја, но X само функція одъ x, а Y само функція одъ y; тако дакле, да є затимъ савъ посао сведенъ на интегралѣнѣ функція єдногъ пременљивогъ броја, по коме бы просто слѣдовала вопросна функція

$$v = \int Xdx + \int Ydy = C.$$

Како у име тога валя поступати, неможе се у обште рећи, но нiє ни потребно, єръ гдигодъ є таково одлучаванѣ могуће, увиђа се начинъ коимъ га постизавамо, лако по себи.

Тако н. п. ако бы была сведена єдначина вида

$$XY\,dx + X_1\,Y_1\,dy = 0,$$

гди єдно или друго или оба X, или єдно или друго или оба Y могу быти и деловне функціє, но прве само по x, а друге само по y, — треба само разделити са YX_1, па ћемо имати єдначину.

$$\frac{X}{X_1}dx+\frac{Y_1}{Y}dy=0$$

са одлученимъ променльивимъ броєвима.

Нека є сведена єдначина $ydx+xdy=0$. Слѣдує деобомъ чрезъ xy

$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$, и одтудъ

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dy}{y}=lx+ly=lxy=c,$$

т. є. тражена основна функція

$$xy=e^{c}=C.$$

Подобно добыямо одъ сведене єдначине

$$x^2y^2.dx+(y+1)\sqrt{x}.dy=0$$

деобомъ чрезъ $y^2.\sqrt{x}$ єдначину съ одлученимъ променльивимъ броєвима

$$x^{\frac{3}{2}}.dx+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0,$$

и одтудъ интеграленћмъ основну функцію

$$\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+ly-\frac{1}{y}=C.$$

β.) *Изтраживанћ интегралећегъ чинителя.*

§ 157.

Ако дату диференціалну єдначину у сведеномъ виду немогнемо интегралити по предходећемъ начину, онда може быти да ћемо є моћи, ако ю найпре помложимо са некимъ чинителѣмъ z, кои є уобште нека функція одъ x и y. Тай дакле чинитель z мора быти тога свойства, да съ ньимъ постане $Pz \,.\, dx + Qz \,.\, dy = 0$ подпуный диференціалъ, или што є свеєдно, да буде

$$\frac{d\,(Pz)_y}{dy} = \frac{d\,(Qz)_x}{dx}.$$

Да пакъ такавъ чипитель доиста постои, уверавамо се лако на слѣдуюћій начинъ.

§ 158.

Ако постои доиста нека функція $f(x, y) = C$ као интегралъ єдначине $Pdx + Qdy = 0$, онда збогъ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$$

$$\left[\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_x}{dx}\right] dx + \left[\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_y}{dy}\right] dy = 0\,,$$

а одтудъ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left[\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_x}{dx}\right]}{\left[\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_y}{dy}\right]}\,,\; -$$

мора быти непремено

$$\frac{\left[\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_x}{dx}\right]}{\left[\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_y}{dy}\right]} = \frac{P}{Q} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\alpha.,$$

а то, осимъ ако є $\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_x}{dx} = P$, а $\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_y}{dy} = Q$, т. є. осимъ ако є єдначина $Pdx + Qdy = 0$ подпуный диференціалъ, може быти само тако, да є $\varphi(x, y)\, P = \frac{d\,f\,(x\,,\,y)_x}{dx}$

а $\varphi(x,y)\,Q = \frac{d\,f(x,y)_{\mathrm{y}}}{dy}$; и по томе свака диференціална єдначина првога реда одъ два променльива броя, коя ніє подпуный диференціалъ какве єдначине $f(x,y) = C$, има доиста свагда єднога чинителя $\varphi(x,y)$, кои ю таковимъ чини. Тай чинитель зове се **интегралећій чинитель** диференціалне функціє, и може быти уобште нека функція исты променльивы броєва x и y.

Напослѣдку лако се іошъ увиђа, да свака неподпуна диференціална єдначина нема само єдногъ интегралећегъ чинителя, но безбройно много ньи. Єръ, ако є z єданъ такавъ чинитель неподпуне єдначине $Pdx + Qdy = 0$, онда є $Pz\,.\,dx + Qz\,.\,dy = d\,f(x,y)$ подпуный диференціалъ, па съ тога и єдначина $Pzv\,.\,dx + Qzv\,.\,dy = v\,.\,df(x,y)$, кою добыямо ако ону помложимо са ма каквомъ функціомъ $v = \psi[f(x,y)]$, подпуный диференціалъ зато, што є $v\,.\,d\,f(x,y)$ очевидно подпуный диференціалъ. Свакій дакле производъ одъ интегралећегъ чинителя z са ма каквомъ функціомъ $\psi[f(x,y)]$ преводи дату диференціалну єдначину у подпуну; пошто пакъ функція одъ $f(x,y)$ може быти безбройно много, то дакле свака диференціална єдначина има доиста безбройно много интегралећи чинителя.

§ 159.

Ако є z интегралећій чинитель єдначинә $Pdx + Qdy = 0$. онда, каошто рекосмо горе у § 157., мора быти

$$\frac{d\,(Pz)_{\mathrm{y}}}{dy} = \frac{d\,(Qz)_{\mathrm{x}}}{dx},$$

или, ако ове изразе развіємо,

$$P\,.\,\frac{dz_{\mathrm{y}}}{dy} + z\,.\,\frac{dP_{\mathrm{y}}}{dy} = Q\,.\,\frac{dz_{\mathrm{x}}}{dx} + z\,.\,\frac{dQ_{\mathrm{x}}}{dx}, \text{ и одтудъ}$$

$$z\,.\left(\frac{dP_{\mathrm{y}}}{dy} - \frac{dQ_{\mathrm{x}}}{dx}\right) = Q\,\frac{dz_{\mathrm{x}}}{dx} - P\,.\,\frac{dz_{\mathrm{y}}}{dy}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(m.$$

Изъ ове єдначине добыли бы z, кадъ бы уобште были у станю разрешити ю. Но тай є посао, зато што z зависи осимъ одъ два пременльива броя x и y іошъ и одъ своя два іошъ непозната диференціална количника по x и y, обично тежи одъ интеграленя саме дате диференціалне єдначине, збогъ чега таквога чинителя z понайвише само срећнимъ покушаима изнаћи можемо. Дояко поне у станю смо изнаћи га известнимъ путемъ само у два особита случая, т. є. 1. ако истый чинитель z треба да буде функція само єдногъ одъ она два пременльива броя, или 2. ако є дата диференціална єдначина єдностепена буди кога реда. Како пакъ притомъ поступамо, показатће слѣдуюћи §§-и.

§ 160.

Урецимо да єдначина $Pdx + Qdy = o$ постає интегральива, ако є помложимо са некомъ функціомъ z само одъ x.

У томъ є случаю очевидно $\frac{dz_y}{dy} = o$, и єдначина $m.$) пређашнѣга §-а, изъ коє валя тражити z, претвара се у простію ову,

$$z \cdot \left(\frac{dP_y}{dy} - \frac{dQ_x}{dx}\right) = Q \cdot \frac{dz_x}{dx},$$

одъ коє после слѣдує

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{Q} \cdot \left(\frac{d\,P_y}{dy} - \frac{d\,Q_x}{dx}\right) dx.$$

Пошто є лева часть ове єдначине интегральива, то мора быти а десна, што при предпостави, да є z функція само одъ x, и што дакле $\frac{d\,P_y}{dy} - \frac{d\,Q_x}{dx}$ несме садржати y, доиста и постои.

Ставимо $\frac{1}{Q}\cdot\left(\frac{d P_{\text{y}}}{dy} - \frac{d Q_{\text{x}}}{dx}\right) = X$; бытће

$$\frac{dz}{z} = X dx \text{ ...... } (p., \text{ и одтудъ}$$

$$lz = \int X dx, \text{ т. є.}$$

$$z = e^{\int \mathrm{X}\, \mathrm{dx}} \text{ .... } (\mathrm{I}.$$

На истый начинъ добыли бы за случай да z треба да буде нека функція само одъ y;

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{P}\cdot\left(\frac{d Q_{\text{x}}}{dx} - \frac{d P_{\text{y}}}{dy}\right) dy = Y dy \text{ . . . } (q.,$$

и одтудъ $z = e^{\int \mathrm{Y}\, \mathrm{dy}}$ .... (II.

Єдначине $p.$) и $q.$) показатће да ли є z функція само x или само одъ y, и тиме хоће ли се моћи дата єдначина интегралити по образцима I. и II.

§ 161.

Примеръ. Нека буде дата єдначина

$$dy + My\ dx = Ndx,$$

гди M и N представляю неке функціє само одъ x *).

Та єдначина сведена на нулу дає

$$dy + (My - N)\, dx = 0.$$

При ньой є дакле $P = My - N$, а $Q = 1$; пошто пакъ M и N садрже само x а никако y, то є

---

*) Ова єдначина принадлежи такозванимъ линеарнимъ єдначинама.

$$\frac{1}{Q}.\left(\frac{d P_y}{dy}-\frac{d Q_x}{dx}\right)=M, \text{ и зато}$$

$$z=e^{\int M\,dx}$$

Мложећи дакле дату єдначину са овимъ чинителѣмъ добыямо

$$e^{\int M dx}.\ dy+(My-N)\,e^{\int M\,dx}.\ dx=0,$$

єдначину т. є., кое є лева часть, каошто се лако уверавамо, подпуный диференціалъ, и кою дакле можемо интегралити по § 147.

Поступаюћи по упутству тога §-а налазимо

$$w=\int e^{\int M dx}.\ dy=y.e^{\int M\,dx},\ \frac{dw}{dx}=y\,M\,e^{\int M\,dx},$$

$$(My-N)\,e^{\int M\,dx}-\frac{dw}{dx}=-N\,e^{\int M\,dx},$$

и зато траженый интегралъ

$$y\,e^{\int M\,dx}-\int N e^{\int M\,dx}.\ dx=C,\quad \text{или}$$

$$y=e^{-\int M\,dx}.\left[\int N e^{\int M\,dx}.\ dx+C\right].$$

§ 162.

Узмимо да є дата диференціална єдначина $Pdx+Qdy=0$ єдностепена, т. є. да су P и Q єдностепене функціє m. реда одъ x и y.

Ако є притомъ z интегралећій чинитель, и као такавъ єдностепена функція одъ x и y n. реда, онда є подпуный диференціалъ $Pz.dx+Qz.dy=dv$ єдностепена функція $(m+n)$. реда, и зато траженый интегралъ по § 151. едностепена функція $(m+n+1)$. реда, тако да є по истомъ §-у

$$Pz \, . \, x + Qz \, . \, y = (m+n+1) \, v \, .$$

Делећи подпуный диференціалъ тражене функціє v са овомъ едначиномъ слѣдує

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{Px + Qy} = \frac{dv}{m+n+1} \, .$$

Пошто є пакъ десна часть ове едначине интеграљива, то мора быти и лева; но броитељ леве части ніє нико другій него дата диференціална едначина; зато чинитељ кои є ту едначину учиніо интеграљивомъ ніє нико другій, но $\frac{1}{Px+Qy}$.

§ 163.

Примери. 1. Дата є едностепена едначина другога реда.

$$y^2 . \, dx + xy\,(dx + dy) + x^2\,dy = 0 \, .$$

При той є $P = y^2 + yx = y\,(x+y), Q = x^2 + xy = x\,(x+y)$, дакле нѣнъ интегралећій чинитељ $\frac{1}{Px+Qy} = \frac{1}{2xy\,(x+y)}$, и зато множећи є съ нъимъ

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \text{подпуный диференціалъ.}$$

Интегралећи ову едначину слѣдує

$lx + ly = l\,xy = c = le^c$, и одтудъ

$$xy = e^c = C \, .$$

2.) Дата є едностепена єдначина такођеръ другога реда

$$y^2 . dx - xy . dy + x^2 . dy = 0.$$

Ту є $P = y^2$, $Q = x^2 - xy$, дакле нѣнъ интегралећій чинитель

$$\frac{1}{Px + Qy} = \frac{1}{xy^2 + x^2y - xy^2} = \frac{1}{x^2y}, \text{ и зато}$$

$$\frac{y\,dx}{x^2} + \frac{x-y}{xy} . dy = \frac{y\,dx}{x^2} + \frac{dy}{y} - \frac{dy}{x} = 0,$$

коя є, каошто се лако можемо уверити, подпуный диференціалъ.

Интегралећи садъ ову єдначину добыямо

$$-\frac{y}{x} + ly - \frac{y}{x} = -2\frac{y}{x} + ly = C.$$

γ. Уводенѣ новы променльивы броєва.

§ 164.

Издаду ли оба пређашня начина, онда кушамо іошъ неможемо ли учинити дату єдначину интегральивомъ тиме, да нове променльиве броєве уведемо.

Тако н. п. ако бы имали у § 161. сматрану єдначину

$$dy + Mydx = Ndx,$$

гди M и N представляю функціє само одъ x, па бы ставили

$$y = vz, \text{ дакле } \frac{dy}{dx} = z . \frac{dv_x}{dx} + v . \frac{dz_x}{dx},$$

добыли бы єдначину

$$z . \frac{dv_x}{dx} + v . \frac{dz_x}{dx} + Mvz = N,$$

у коіой, да бы ю свели на простіи видъ, можемо са еднимъ одъ новы променльивы броева располагати по вольи.

Ставляюћи н. п. $\frac{dz_x}{dx} + Mz = 0$, прелази пређашня едначина у нову $z . \frac{dv_x}{dx} = N$. и мы после изъ ове две едначине налазимо врло лако броеве v и z, па дакле и y.

Изъ прве одъ ньи слѣдуе просто

$$\frac{dz_x}{z} + Mdx = 0,$$ и одтудъ интеграленѣмъ

$$lz + \int Mdx = c,$$ а

$$z = \frac{e^c}{e^{\int \mathrm{Mdx}}} = e^c . e^{-\int \mathrm{Mdx}} = C . e^{-\int \mathrm{Mdx}}.$$

Поставляюћи пакъ ову вредность у ону другу едначину добыямо

$$dv = \frac{N}{C . e^{-\int \mathrm{Mdx}}} . dx,$$ и одатле

$$v = \frac{1}{C} . \int Ne^{\int \mathrm{Mdx}} . dx + C_1.$$

Бытће дакле

$$y = vz = e^{-\int \mathrm{Mdx}} . \int Ne^{\int \mathrm{Mdx}} . dx + C_1 . Ce^{-\int \mathrm{Mdx}}$$

$$= e^{-\int \mathrm{Mdx}} . [\int Ne^{\int \mathrm{Mdx}} . dx + \mathfrak{C}]$$

каогодъ у § 161.

§ 165.

Ако су у едначини $Pdx + Qdy = 0$ функціе P и Q едностепене n. реда, па поставимо $y = xz$, дакле $dy = zdx + xdz$, постаю исте функціе P и Q односно вида $x^n . f(z)$ и $x^n . \varphi(z)$, тако да после место дате едначине имамо нову

$$f(z)\,dx + \varphi(z)\,.\,(zdx + xdz) = 0,$$ или

$$f(x) + \varphi(z)\,.\,\left(z + x\,.\,\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$ или

$$[f(z) + \varphi(z)\,z]\,dx + x\,.\,\varphi(z)\,dz = 0\,;$$ или

$$\frac{dx}{x} + \frac{\varphi(z)}{f(z) + z\,.\,\varphi(z)}\,.\,dz = 0,$$ и одтуда

$$lx + \int \frac{\varphi(z)dz}{f(z) + z\varphi(z)} = c,$$

Тако н. п. ако имамо єдностепену єдначину првога реда

$$xdx + ydx = nydx\,,$$ или што є свеєдно

$$(x - ny)\,dx + ydy = 0\,,$$ па ставимо $y = xz$, слѣдуе

$$(1 - nz + z^2)\,dx + xz\,.\,dz = 0\,,$$ или

$$\frac{dx}{x} + \frac{zdz}{1 - nz + z^2} = 0\,,$$ и одтудъ

$$lx + \int \frac{zdz}{1 - nz + z^2} = c\,,$$

изразъ, кои далѣ лако можемо израдити или помоћу обр. 32. § 190., или по упутству §§а 92. — 96.

§ 166.

Узмимо іошъ, подъ именомъ Рикати-ове (Riccati) познату єдначину

$$dy + by^2.\,dx = ax^m.\,dx$$

1. Ако є при той $m = 0$, добыямо одма єдначину съ одлученимъ променљивимъ броєвима

$$\frac{dy}{by^2 - a} + dx = 0, \text{ и одтудъ}$$

$$\int \frac{dy}{by^2 - a} + x = c,$$ изразъ, кога далѣ изра-ђенѣ неподлежи никаквой више тешкоћи.

2. Ако пакъ m ніє нула, онда треба метнути

$$y = z^r, \text{ дакле } dy = rz^{r-1}. dz.$$

Тиме преображава се дата єдначина у нову

$$r . z^{r-1}. dz + (bz^{2r} - ax^m)\, dx = 0.$$

Ова єдначина постає єдностепена, ако є $m = -2$, а поставимо $r = -1$. Ніє ли пакъ $m = -2$, онда є горня замена безуспешна.

3. Поставляюћи $y = \alpha x^p + zx^q$, прелази дата єдначина у нову

$$x^q. dz + (qx^{q-1} + 2\alpha bx^{p+q} + bx^{2q}. z)\, zdx$$

$$+ (p\alpha x^{p-1} + \alpha^2 bx^{2p} - ax^m)\, dx = 0.$$

Узимаюћи ту $p - 1 = 2p$, $p\alpha + b\alpha^2 = 0$, и $q + 2\alpha b = 0$, дакле $p = -1$, $\alpha = \frac{1}{b}$; $q = -2$, и зато $y = \frac{z}{x^2} + \frac{1}{bx}$: добыямо єдначину

$$dz + b\,\frac{z^2}{x^2}\, dx - ax^{m+2}. dx = 0,$$

коя постає єдностепена, ако є $m = -2$.

У случаю ако бы было $m = -4$, можемо променльиве броєве одлучити, и по томе Рикати-ову єдначину можемо интегралити, ако є m или -2, или -4.

2.) Интеграленѣ диф. єдначина' првога реда, по $\frac{dy}{dx}$ одъ выши степена'.

§ 167.

Диференціална єдначина првога реда одъ два променльива броя x и y съ вышимъ степенима количника $\frac{dy}{dx}$, обштега є вида

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n} + V_1\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + V_2\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \cdot\cdot + V_{n-1}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) + V_n = 0,$$

гди V_1, V_2, ... V_n; представляю уобште неке функціє одъ x и y.

Разрешаваюћи ту єдначину по $\frac{dy}{dx}$, и означаваюћи нѣне корене, кои ће уобште быти неке функціє одъ x и y, по реду са ω_1, ω_2, ... ω_n, добыли бы n диференціалны єдначина' првога степена

$$\frac{dy}{dx} - \omega_1 = 0,\ \frac{dy}{dx} - \omega_2 = 0,\ \ldots\ \frac{dy}{dx} - \omega_n = 0,$$

кое бы се лако могле интегралити по упутствама предходећи §§а, нађени пакъ одъ нѣи интеграли были бы свакій, каогодъ и свакій производъ одъ произвольно колико нѣи, єдна вредность траженога интеграла дате диференціалне єдначине.

Али пошто налазакъ тій интеграла зависи одъ решеня выше єдначине, а то є, каошто знамо, само у врло малимъ границама уобште (т. є. алгебрайскимъ путемъ) могуће, то ће се наговешћеный начинъ такођеръ само врло редко моћи употребити, и зато показат'ћемо у слѣдуюћимъ §§ма, како у особитимъ некимъ случаєвима можемо иначе до цѣли доћи, но найпре да узмемо за веће нѣгово обясненѣ баръ овай єданъ примеръ.

Дата є єдначина $d^2y + dy\,.\,dx - \frac{3}{4}\,d^2x = 0$, или што є свеєдно,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{3}{4} = 0.$$

Разрешаваюћи є по $\frac{dy}{dx}$ налазимо да є $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$ и $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}$, одтудъ $dy=\frac{1}{2}\,dx$ и $dy=-\frac{3}{2}\,dx$, а одатле опеть $y=\frac{1}{2}x+c_1$ и $y=-\frac{3}{2}x+c_2$.

Траженый є дакле интегралъ дате диференціалне єдначине или

$$y-\tfrac{1}{2}x-c_1=0,\quad \text{или}\quad y+\tfrac{3}{2}x-c_2=0,\ \text{а може быти и}$$

$$(y^2-\tfrac{1}{2}x-c_1)\cdot(y+\tfrac{3}{2}x-c_2)=$$

$$y^2+(x-c_1-c_2)\,y+c_1\,c_2-\tfrac{1}{2}(3c_1-c_2)\,x-\tfrac{3}{4}x^2=0,$$

єръ ако ову єдначину диференціалимо, слѣдуе

$$(y+\tfrac{3}{2}x-c_2)\cdot(dy-\tfrac{1}{2}dx)+(y-\tfrac{1}{2}x-c_1)\cdot(dy+\tfrac{3}{2}dx)=$$

$$(2y+x-c_1-c_2)\,dy+(y-\tfrac{3}{2}x-\tfrac{3}{2}c_1+\tfrac{1}{2}c_2)\,dx=0,$$

и одтудъ

$$dy=-\frac{y-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2}{2y+x-c_1-c_2}\cdot dx\,;$$

а ако овде іошъ место y узмемо нѣгове две горнѣ вредности,

$$dy=\tfrac{1}{2}\,dx\quad \text{и}\quad dy=-\tfrac{3}{2}\,dx\,;$$

кои изрази, каошто смо видили, дату диференціалну єдначину подпуно задоволявају.

§ 168.

Ако су у датой диференціалной єдначини сачинительи V_1; V_2; ... V_n сви стални броєви, онда су по свойству сачинителя сваке выше єдначине (I. Ч. § 37.) и вредности одъ $\frac{dy}{dx}$ такођеръ стални броєви, и дата се єдначина збогъ тога врло лако може интегралити.

Єръ представляюћи те сталне вредности одъ $\frac{dy}{dx}$ съ α, т. є. ставляюћи $\frac{dy}{dx} = \alpha$, слѣдує $dy = \alpha dx$, дакле $y = \alpha x + c$, а $\alpha = \frac{y - c}{x}$, тако да само треба метнути у дату єдначину ову вредность место $\frac{dy}{dx} = \alpha$, те да бы имали траженый исте єдначине интегралъ.

Тако н. п. нека є опетъ дата єдначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{3}{4} = 0.$$

Имамо поставляюћи место $\frac{dy}{dx}$ горню вредность одъ α,

$$\left(\frac{y - c}{x}\right)^2 + \frac{y - c}{x} - \frac{3}{4} = 0, \text{ или}$$

$$(y - c)^2 + (y - c)\, x - \frac{3}{4}\, x^2 = 0,$$

као траженый интегралъ те єдначине, о чему се лако уверавамо тиме, што изъ добывеногa израза, разрешаваюћи га по $(y - c)$, слѣдує $y - c = -\frac{1}{2}\, x \pm x$, т. є. $y = \frac{1}{2}\, x + c$ и $y = -\frac{3}{2}\, x + c$, каогодъ што смо нашли у предходећемъ §у.

§ 169.

Ако су сачинительи $V_1, V_2, \ldots V_n$ дате диференціалне єдначине функціє само єдногъ променльивога броя, н. п. одъ x, па пошто смо поставили $\frac{dy}{dx} = v$ приметимо, да исту єдначину лакше можемо разрешити по x него по v, — онда ћемо тражити єдначину $x = f(v)$, определит'ћемо изъ горнѣ замене y, и истребит'ћемо изъ єдначина $x = f(v)$ и $y = \int v dx = vx - \int x dv = vx - \int f(v)\, dv$ [III. основно правило § 85.] брой v, па ћемо тако имати траженый интегралъ дате єдначине.

Тако н. п. ако є дата єдначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a\left(\frac{dy}{dx}\right) - x = 0,$$

и метнемо $\frac{dy}{dx} = v$, слѣдує

$$v^2 + av - x = 0,$$

єдначина, коя се лакше разрешава по x него по v.

Разрешаваюћи є добыямо $x = v^2 + av$; како є пакъ $y = vx - \int (v^2 - av)\,dv = vx - \frac{v^3}{3} - \frac{av^2}{2} + c$, то слѣдує истребльиванѣмъ броя v изъ овы єдначина за x и y, као траженый интегралъ дате диференціалне єдначине

$$6y + (3 + a)\cdot\left[a^2 + 3x + (x + a)^2\cdot\sqrt{1 + \frac{4x}{a^2}}\right] - c = 0.$$

§ 170.

Ако су сачинительи $V_1, V_2, \ldots V_n$ функціє оба пременльива броя x и y, али се єданъ одъ овы броєва, н. п. x налази само у првомъ степену: онда ћемо, пошто смо ставили $\frac{dy}{dx} = v$, дату єдначину разрешити по x, и єдначину $x = f(y, v)$ диференціалити. Нека є тако добывена нова диференціална єдначина $dx = Tdy + Udv$, гди T и U представляю неке функціє одъ y и v.

Изъ те єдначине добыямо после, збогъ $dy = vdx$,

$$(Tv - 1)\,dx + Udv = 0.$$

Садъ, ако се ова єдначина може интегралити, онда, интегралећи ю, добыямо єдну єдначину по x и v, съ коіомъ можемо истребити изъ дате єдначине брой $v = \frac{dy}{dx}$, и у добывеной новой єдначини имамо после траженый интегралъ дате диференціалне єдначине.

Н. п. ако є дата єдначина $y dx - x \sqrt{d^2x + d^2y} = 0$, имамо, ставляюћи $\frac{dy}{dx} = v$,

$$y = x \sqrt{1+v^2}, \text{ дакле } dy = dx \,.\, \sqrt{1+v^2} + \frac{xvdv}{\sqrt{1+v^2}},$$

или збогъ $dy = vdx$,

$$(v - \sqrt{1+v^2})\, dx - \frac{xvdv}{\sqrt{1+v^2}} = 0, \text{ или}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{vdv}{(v - \sqrt{1+v^2}) \,.\, \sqrt{1+v^2}} = 0,$$

или, ако помложимо бронтеля и именителя другога члана са $v + \sqrt{1+v^2}$,

$$\frac{dx}{x} - \frac{v\,(v + \sqrt{1+v^2})\, dx}{\sqrt{1+v^2}} = 0, \text{ или}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{v^2 dv}{\sqrt{1+v^2}} - vdv = 0, -$$

и одтудъ интеграленѣмъ

$$lx - \tfrac{1}{2}\, v \,.\, \sqrt{1+v^2} + \tfrac{1}{2}\, l\,(v + \sqrt{1+v^2}) - \tfrac{1}{2}\, v^2 + C = 0,$$

єдначина одъ x и v, изъ коє садъ помоћу дате єдначине валя истребити брой v.

У име тога имамо изъ дате єдначине (пошто смо y определили и $\frac{dy}{dx} = v$ поставили) $v = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$, та пакъ вредность поставлѣна у пређашню єдначину дає

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x^2} \cdot \sqrt{y^2 - x^2} + \frac{1}{2}\, l\,(y + \sqrt{y^2 - x^2}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2 - x^2}{x^2} + C = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\, l\,(y + \sqrt{y^2 - x^2}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2 - x^2 + y\sqrt{y^2 - x^2}}{x^2} + C = 0,$$

као траженый интегралъ дате єдначине.

§ 171.

Ако сачинительи дате єдначине садрже x и y само у првимъ степенима, онда є вида

$$y = x\,f(v) + \varphi(v),$$

гди є $v = \frac{dy}{dx}$, и може се интегралити по § 161. или 164.

У особитомъ случаю, гди бы была $f(v) = v$, дакле дата єдначина вида

$$y = xv + \varphi(v),$$

добыямо диференціалећи $dy = vdx + xdv + d\varphi(v)$, или збогъ $dy = vdx$,

$$xdv + d\varphi(v) = 0, \quad \text{т. є.}$$

$$xdv + \varphi_1(v)\,dv = [x + \varphi_1(v)]\,dv = 0.$$

Ова єдначина постои са $x + \varphi_1(v) = 0$, каогодъ и са $dv = 0$; но ова последня єдначина дае $v = c$, дакле $dy = cdx$, и зато ако ову вредность узмемо у датой єдначнни,

$$y = cx + \varphi(c) = cx + c_1,$$

каò траженый интегралъ. Притомъ само іошъ валя приметити, да брой c_1 ніє произволно сталанъ, него вредность одъ $\varphi(v)$, ако се место v узме c, и зато ће быти болѣ да пишемо као траженый интегралъ

$$y = cx + \varphi(\underset{c}{v}).$$

Нека є н. п. дата єдначина $ydx - xdy - a\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$, или $y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) - a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$, или ако ставимо $\frac{dy}{dx} = v$,

$$y - xv - a\sqrt{1 + v^2} = 0.$$

Изъ те єдначине слѣдує $y = xv + a\sqrt{1+a^2}$, а ако диференціалимо,

$$dy = vdx + xdv + \frac{avdv}{\sqrt{1+v^2}}\text{, или збогъ } dy=vdx,$$

$$xdv + \frac{avdv}{\sqrt{1+v^2}} = 0\text{, или}$$

$$\left(x + \frac{av}{\sqrt{1+v^2}}\right) dv = 0.$$

Ова єдначина дає $x + \frac{av}{\sqrt{1+v^2}} = 0$ и $dv = 0$, а изъ последнч одъ ове две слѣдує $v = c$.

Ставляюћи садъ ово v у дату єдначину добыямо као траженый нѣнъ интегралъ

$$y = cx + a\sqrt{1+c^2}.$$

§ 172.

Ако су сачинительи дате єдначине єдностепене функціє одъ x и y, ставлямо $y = xz$, дакле $dy = zdx + xdz$. Тиме губи се брой x, и остає єдначина само по z и v, ако подъ v разумемо све єднако количникъ $\frac{dy}{dx}$.

Пошто є по преѣашнѣой замени $\frac{dy}{dx} = v = z + x\frac{dz}{dx}$, то є

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{v-z}\text{, и одтудъ}$$

$$lx = \int \frac{dz}{v-z} \quad . \; . \; . \; . \; (\alpha.$$

Разломакъ $\frac{dz}{v-z}$ можемо безъ повреде нѣгове вредности писати и овако: $\frac{d(z-v)}{z-v} + \frac{dv}{z-v}$; но тадъ є іошъ

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(z-v)}{z-v} + \frac{dv}{z-v}, \text{ а}$$

$$lx = l(z-v) + \int \frac{dz}{z-v} \ldots . (\beta.$$

Са изразомъ α.) служитћемо се, ако є лакше изразити v чрезъ z, а другій β.) употребитћемо кадъ се лакше изражава z чрезъ v. У првомъ случаю добытћемо x као функцію одъ z, а у другомъ као функцію одъ v.

Истреблюючи после у првомъ случаю изъ єдначина $y = xz$ и $x = f(z)$ брой z, а у другомъ случаю изъ єдначина $y = xz = x\varphi(v)$ и $x = \psi(v)$ брой v, — добыямо траженый интегралъ.

Н. п. решаваюћи на овай начинъ єдначину прећашнѣга §а, коя є по x и y єдностепена, т. є. єдначину $xdy - ydx - x\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$, или

$$xv - y - x\sqrt{1+v^2} = 0,$$

гди v значи $\frac{dy}{dx}$, ставлямо $y = xz$, чимъ слѣдує

$$v - z = \sqrt{1+v^2}.$$

Пошто є пакъ овде очевидно лакше изразити z чрезъ v, него обратно, то имамо далѣ по образцу β.) збогъ $z - v = (v - \sqrt{1+v^2}) - v = -\sqrt{1+v^2}$,

$$lx = -l\sqrt{1+v^2} + \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$= -l\sqrt{1+v^2} + l\left[v + \sqrt{1+v^2}\right] + lC$$

$$= l\,\frac{C(v+\sqrt{1+v^2})}{\sqrt{1+v^2}}, \text{ и одтуда}$$

$$x = \frac{C(v+\sqrt{1+v^2})}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Съ овомъ садъ вредности броя x слѣдує изъ єдначине $y = xz$, збогъ $z = v - \sqrt{1 + v^2}$,

$$y = \frac{C(v + \sqrt{1+v^2})}{\sqrt{1+v^2}} \cdot (v - \sqrt{1+v^2}) = -\frac{C}{\sqrt{1+v^2}}.$$

За истребльиванѣ броя v имамо изъ ове последнѣ єдначине $\sqrt{1+v^2} = -\frac{C}{y}$, а $v = \frac{\sqrt{C^2 - y^2}}{y}$; та пакъ вредность, заменута у горнѣмъ изразу за x, дає као траженый интегралъ вопросне диференціалне єдначине

$$x = C - \sqrt{C^2 - y^2}, \text{ или } x^2 + y^2 = 2Cx.$$

3.) Особени разрешци диф. єдначина' првога реда.

§ 173.

Знамо изъ § 81. и 82., да свакій обштій интегралъ садржи некій, іошъ непознатый сталанъ брой, и да дајући томе броју произвольне вредности, добыямо безбройно млого тога интеграла **особиты** вредностій, кое смо назвали **особитимъ** интегралима, и кое све дотичной диференціалной єдначини подпуно одговараю. Но добыяю се често и такове функціє, кое некой диференціалной єдначини такођеръ подпуно одговараю, безъ да су нѣни особити интеграли, т. є. безъ да се изъ обштегъ нѣногъ интеграла могу произвести на пређеспоменутый начинъ. Свака такова функція, коя датой некой диференціалной єдначини подпуно одговара, а ніє нѣнъ особитый интегралъ, зове се **особеный разрешакъ** исте диференціалне єдначине.

Тако н. п. нашли смо у § 171. $y = cx + a\sqrt{1 + c^2}$ као обштій интегралъ диференціалне єдначине $ydx - xdy - a\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$; но добыямо такођеръ изъ єдначине

$x + \frac{av}{\sqrt{1+v^2}} = 0$ (види споменутый §) вредности $v = \pm\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ и $\sqrt{1+v^2} = \mp\frac{a}{\sqrt{a^2-v^2}}$, кое поставлѣне у дату диференціалну єдначину (подъ видомъ $y - xv - a\sqrt{1+v^2} = 0$, где є $v = \frac{dy}{dx}$), даю єдначину

$$y = \pm\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pm x^2 \mp a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mp\sqrt{a^2-x^2};$$

или

$$y^2 + x^2 = a^2,$$

коя истой диференціалной єдначини подпуно одговара, безъ да се икаквомъ вредности броя c може добыти изъ нѣногъ обштегъ интеграла $y = cx + a\sqrt{1+c^2}$.

Та є дакле єдначина $y^2 + x^2 = a^2$ **особеный разрешакъ** оне диференціалне єдначине.

§ 174.

За болѣ сваћанѣ особены разрешкова диференціалны єдначина' узмимо, да смо решенѣмъ некога задатка наишли на єдначину

$$v.\left(\frac{dv}{dy} - 1\right) = 0,$$

при коіой є очевидно, да постои како при $\frac{dv}{dy} - 1 = 0$, тако и при $v = 0$.

Уведимо у ту єдначину новый променльивый брой x на тай начинъ, да метнемо $v = \sqrt{x^2+y^2-a^2}$. Бытће

$dv = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$, а нова єдначина

$$\sqrt{x^2+y^2-a^2}.\left(\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} - dy\right) = 0.$$

Докъ ову єдначину оставимо у томъ нѣномъ виду, дотле види се ясно, да ю како $\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0$, тако и $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}-dy=0$ задоволяваю, и да вредность броя x, коя слѣдує изъ првогъ израза, уобште независи одъ нѣгове вредности, кою бы добыли изъ интегралѣногъ другогъ израза. Свршимо ли пакъ мложенѣ у левой части, онда добыя иста єдначина видъ

$$x\,dx+y\,dy-dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0,$$

гди се неможе ни познати више, да є и $\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ нѣнъ чинитель, єрь ово исто добыямо и само одъ другогъ чинителя, ако га ставимо $=0$, и ослободимо одъ именителя.

Ако дакле ту диференціалну єдначину интегралимо, добытћемо као нѣнъ интегралъ само оно што дає нѣнъ другій чинитель, а првогъ чинителя одтудъ, зато што одъ оногъ другога независи, никако неможемо наћи.

Тай изгублѣный чинитель, кога морамо на другій начинъ тражити, оно є, што смо горе разумели подъ функціомъ, коя вопросну диференціалну єдначину задоволява, а ніє нѣнъ особитый интегралъ, и што смо зато назвали нѣнимъ **особенимъ разрешкомъ**.

§ 175.

Нека є дата диференціална єдначина првога реда, коя иначе по $\frac{dy}{dx}$ може быти и одъ вышега степена,

$$U=f(x,y,\frac{dy}{dx})=0\,;$$

нѣнъ подпуный или обштій интегралъ нека є

$$V=\varphi(x,y,c)=0\,,$$

гди c представля интеграленѣмъ добывеный сталный брой; найпосле изъ тогъ интеграла произведена диференціална єдначина буди

$$W=\left(\frac{dV_x}{dx}\right)dx+\left(\frac{dV_y}{dy}\right)dy=0.$$

Ако подпуный интегралъ $V=0$ несадржи брой c само као алгебрайскій сабиракъ, онда ће тога броя c быти безъ сваке сумнѣ и у диференціалной єдначини $W=0$, и по томе диференціална єдначина $U=0$, у коіой га нема, постає у томъ случаю текъ ако се брой c изъ єдначина $V=0$ и $W=0$ истреби. Осимъ тога лако є іошъ увидити, да ће послѣдакъ тога истребльиваня быти истый, ма брой c небыо сталанъ, него као и x и y премеильивъ.

Зато узмимо да є изъ єдначине $V=0$ добывена диференціална єдначина, сматраюћи c као пременльивъ брой,

$$W_1=\left(\frac{dV_x}{dx}\right)dx+\left(\frac{dV_y}{dy}\right)dy+\left(\frac{dV_c}{dc}\right)dc=0.$$

Ово W_1 быт'ће само тако равно W, или што є свеєдно W остає само тако непроменѣно, ако є

$$\left(\frac{dV_c}{dc}\right)dc=0.$$

Исключуюћи дакле случай гди є $\left(\frac{dV_c}{dc}\right)dc$ збогъ тога $=0$, што є c сталанъ брой, быт'ће све изъ те єдначине добывене вредности броя c као функціє одъ x и y тога свойства, да заменуте у єдначини $W=0$ даю єдначине, кое єдначину $U=0$ подпуно задоволяваю. Пошто пакъ єдначина $W=0$ после несадржи никакавъ више произвольно сталанъ брой, и дакле такова свойства постає, да се изъ подпуногъ интеграла, коій само сталне вредности броя c допушта, никако неможе добыти: то є свака, са онимъ, изъ єдначине $\frac{dV_c}{dc}=0$

добивенимъ вредностима одъ c поставша єдначина $W=0$, уобште само **особеный разрешакъ** дате диференціалне єдначине.

И садъ є ясно, коимъ се начиномъ тій особени разрешци какве диференціалне єдначине налазе. Треба т. є. нађеный обштій интегралъ $V=\varphi(x,y,c)=0$ по c интегралити, и тай диференціалъ поставити равань нули. Одтудъ добывене вредности броя c поставлѣне у обштемъ интегралу, датћe тражене особене разрешкове вопросне диференціалне єдначине.

§ 176.

Примеръ. Дата є диференціална єдначина $ydx - x\,dy - a\sqrt{d^2x+d^2y}=0$.

Као нѣнъ обштій интегралъ нашли смо у § 171. $y=cx+a\sqrt{1+c^2}$.

Диференціалећи ову єдначину по c добыямо, ако одма разделимо са dc,

$$x+\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}=0, \text{ одкуда слѣдує}$$

$$c=\pm\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

а съ томъ вредности, збогъ $\sqrt{1+c^2}=-\frac{ac}{x}=\mp\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$, ставляюћи є у обштій интегралъ,

$$y=\pm\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mp\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\mp\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\mp\sqrt{a^2-x^2},$$

или $y^2+x^2=a^2$, као особеный разрешакъ дате єдначине.

§ 177.

Ако є сталный брой c у нађеномъ обштемъ интегралу $V=\varphi(x,y,c)=0$ дате какве диференціалне єдначине само у првомъ степену, онда $\frac{dV_c}{dc} = 0$ несадржи више c, и ова є єдначина збогъ тога сама особитый єданъ интегралъ оне дате диференціалне єдначине, о чему се лако можемо уверити на слѣдуюћій начинъ.

Нека су S и T функціє одъ x и y; бытъе у вопросномъ случаю

$$V = S + Tc = 0, \text{ и зато}$$

$$W = dS + c\,dT = 0, \text{ а ако изъ ове две}$$

єдначине уклонимо c,

$$U = T\,dS - S\,dT = 0.$$

У томъ дакле случаю єдначина $\frac{dV_c}{dc} = T = 0$, зато што є и $dT = 0$, єдначину $U = 0$ подпуно задоволява.

Пошто пакъ найпосле изъ єдначине $V = 0$ слѣдуе $T = -\frac{S}{c}$, а ово постає $= 0$ за $c = \infty$, то є дакле $T = 0$ особита вредность интеграла одъ $U = 0$ за $c = \infty$, т. є. особитый интегралъ те єдначине.

У § 172. н. п. нашли смо као подпуный интегралъ диференціалне єдначине $x\,dy - y\,dx - x\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$, єдначину

$$x^2 + y^2 = 2\,Cx.$$

Диференціалећи ову єдначину по C слѣдуе $x = 0$, као особитый интегралъ оне диференціалне єдначине при $C = \infty$.

И доиста, ако у подпуномъ интегралу, кои можемо писати и овако: $x = \frac{x^2 + y^2}{2C}$, ставимо $C = \infty$, слѣдуе $x = 0$.

§ 178.

Ако є найпосле нађеный обштій интегралъ дате какве диференціалне єдначине вида $f(x, y) = c$, т. є. ако є у нѣму сталный брой c одлученъ, онда се са докученимъ правиломъ § 175. нидочега неможе доћи, по томе, што изъ єдначине $V = f(x, y) - c = 0$ слѣдуе $\frac{d\,V_c}{dc} = -1$, єдначина сасвимъ независна одъ броя c, коєга бы се вредности одтуда имале определити.

Како у томъ случаю валя поступати, научит'ће насъ слѣдуюће сматранѣ.

Ако изъ єдначине $V = \varphi(x, y, c) = 0$ изнађемо $c = f(x, y)$, и после ту вредность поставимо у ню исту, добыямо изразъ $0 = 0$ за знакъ, да єдначина са заменутимъ c постои за сваку вредность броя x и сваку вредность броя y. Изъ тога узрока морају быти и диференціали те єдначине по x и по y сваків по себи равањ нули, мора быти

$$dV_x = 0 \quad \text{као и} \quad d\,V_y = 0, \quad \text{или што є свеєдно}$$

$$\frac{d\,V_x}{dx} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\,V_y}{dy} = 0.$$

Пошто є пакъ, ако ради краткоће задржимо c место $f(x, y)$, и притомъ іошъ представимо са $\left[\frac{d\,V_x}{dx}\right]$ диференціалный количникъ одъ V по x само одъ оны членова съ x; кои нису у c, подобно са $\left[\frac{d\,V_y}{dy}\right]$ диференціалный количникъ одъ V по y само одъ чланова съ y, кои су изванъ c, —

$$\frac{d\,V_x}{dx} = \left[\frac{d\,X_x}{dx}\right] + \left(\frac{d\,V_c}{dc_x}\right) \cdot \left(\frac{dc_x}{dx}\right), \text{ а}$$

$$\frac{d\,V_y}{dy} = \left[\frac{d\,V_y}{dy}\right] + \left(\frac{d\,V_c}{dc_y}\right) \cdot \left(\frac{dc_y}{dy}\right),$$

и ти изрази по пређашньой приметби мораю быти свакій $=0$: то слѣдуе

$$\left(\frac{dc_x}{dx}\right)=-\left[\frac{dV_x}{dx}\right]:\left(\frac{dV_c}{dc_x}\right) \text{ и}$$

$$\left(\frac{dc_y}{dy}\right)=-\left[\frac{dV_y}{dy}\right]:\left(\frac{dV_c}{dc_y}\right).$$

Пошто смо найпосле нашли, да за свакій особеный разрешакъ мора быти $\frac{dV_c}{dc}=0$, то є ясно, да пређашньи изрази за свакій особеный разрешакъ мораю быти безкрайни. Но каогодъ што дата диференціална єдначина немора непремено имати за сваку изъ $\frac{dV_c}{dc}=0$ слѣдуюћу вредность броя c особены разрешкова, тако исто немораю быти ни све оне вредности, за коє постаю количници $\frac{dc_x}{dx}$ и $\frac{dc_y}{dy}$ безкрайни, особени разрешци.

§ 179.

Изъ овога подає се дакле за истраживанѣ особены разрешкова какве дате диференціалне єдначине, у коє подпуномъ интегралу стои сталный брой c одлученъ, слѣдуюће правило:

Треба определити изъ подпуногъ интеграла $c=f(x,y)$ вопросне диференціалне єдначине, $\frac{dc_x}{dx}$ и $\frac{dc_y}{dy}$, и извидити, могу ли именительи тіи количника постати равни нули, дакле они сами безкрайни? ако то буде, онда су они именительи, свакій $=0$, тражени особени разрешци вопросне диференціалне єдначине.

Н. п. нека є дата єдначина $\left[\, dy=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}\right.$.

Нѣнъ є подпуный интегралъ $c = -y + \sqrt{x^2+y^2-a^2}$,

и зато $$\frac{dc_y}{dy} = -1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}-y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}},$$

а $$\frac{dc_x}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}.$$

Оба ова количника имаю єдногъ истогъ именителя, кои може быти 0, ако є $x^2+y^2=a^2$. Они дакле постаю безкрайни при $x^2+y^2-a^2=0$, и зато є ова єдначина особеный разрешакъ оне диференціалне єдначине.

* * *

КНЬИГА III.

ВАРІЯЦІОНЫЙ РАЧУНЪ.

А. Развіянѣ функція одъ безкрайны редова у безкрайне редове.

§ 180.

Често появлює се потреба, да неку функцію $V=f(v, w, y, \ldots)$, коя є уобште или основна, и као такова или одкривена или скривена, или є диференціална, или пакъ некій интегралъ, али у коіой су $v, w, y, \ldots$ безкрайни редови истогъ променльивогъ броя, н. п. x, развіємо у безкрайный редъ целы положны степена тога броя x.

Тай посао ніє новъ, єръ є по Маклореновомъ образцу (§ 32.) уобште, т. є. была функція V каква му драго,

$$V=\underset{0}{V}+\underset{0}{V_1}\cdot x+\underset{0}{V_2}\cdot\frac{x^2}{2!}+\underset{0}{V_3}\cdot\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots,$$

гди $\underset{0}{V}$ представля исту функцію V пошто у нъой изменимо x са нуломъ, а $\underset{0}{V_1}, \underset{0}{V_2}, \underset{0}{V_3}, \ldots$ єсу по реду нѣне изводне функціє, у коима є такођеръ x изменуто съ 0. Али колико збогъ тога, што се исти сачинительи вопроснога реда V могу добыти іошъ и на другій, лакшій начинъ, толико и зато, што упознаваюћи се са тимъ другимъ начиномъ докучуемо іошъ и друге важне поуке — заниматћемо се у слѣдуюћимъ §§ма съ истимъ посломъ нешто изближе.

§ 181.

Представляюћи са ${}^{n}\partial V$ уобште оно, што остає одъ n. изводне функціє одъ V, т. є. одъ V_n, пошто место x узмемо 0, и пишући место ${}^{1}\partial V$ простіє само ∂V, имамо по Маклорену редъ

$$V = {}^{0}\partial V + \partial V . x + {}^{2}\partial V \cdot \frac{x^2}{2!} + {}^{3}\partial V . \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

Нека є садъ $v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$ уобште некій датый или тражећи се редъ целы степена одъ x, и притомъ сачинительи $a_0, a_1, a_2, \ldots$ сасвимъ произвольне, но x несадржеће функціє.

Ставляюћи у томъ реду $x = 0$, слѣдує $\underset{0}{v} = a_0$; образуюћи пакъ по реду нѣгове изводне функціє, и узимаюћи у свакой такођеръ $x = 0$, добыямо по реду

$$\begin{array}{c|c|l} \underset{0}{v}_1 = a_1 & \underset{0}{v}_3 = 3!\, a_3 & \text{уобште } \underset{0}{v}_n = n!\, a_n; \\ \underset{0}{v}_2 = 2!\, a_2 & \ldots\ldots\ldots & \text{а одатле} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|l} a_1 = \underset{0}{v}_1 = \partial v & a_3 = \frac{1}{3!} \cdot \underset{0}{v}_3 = \frac{1}{3!} \cdot {}^{3}\partial v & \\ a_2 = \frac{1}{2!} \cdot \underset{0}{v}_2 = \frac{1}{2!} \cdot {}^{2}\partial v & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{уобште} \end{array}$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot \underset{0}{v}_n = \frac{1}{n!} \cdot {}^{n}\partial v .$$

Редъ v дакле можемо безъ икакве повреде писати и овако

$$v = {}^{0}\partial v + \partial v . x + {}^{2}\partial v . \frac{x^2}{2!} + {}^{3}\partial v \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots + {}^{n}\partial v . \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

гди є ${}^{n}\partial v = n!\,a_n$, т. є. оно што одъ v_n (n. изводне функціє истога реда v) остає, ако место x узмемо нулу. И ово постои изъ исты узрока и за свакій другій редъ целы степена одъ x.

Символъ ${}^{n}\partial v$ или ${}^{n}\partial V$ изговаратћемо у будуће: n. изводъ одъ v или одъ V.

§ 182.

Изъ предходећегъ §а можемо извести слѣдујуће важне истине.

Нека су $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$ два безкрайна реда целы степена одъ x, а сачинительи у истимъ редовима функціє єдногъ истогъ променљивогъ броя y, или исты променљивы броєва $y, z, \ldots\ldots$

Пошто ${}^{r}\partial u$ и ${}^{r}\partial v$ представляю по пређашнѣмъ §у оно што остає одъ u_r и v_r (т. є. одъ r. изводны функція одъ u и v), кадъ се у нъима узме 0 место x; пошто є далѣ свеєдно, хоће ли се нека функція найпре диференціалити по x, па после диференціалити или интегралити по $y, z, \ldots$, или ће се тай посао извршити противнимъ редомъ; и пошто є найпосле свеєдно, да ли ћемо у диференціалѣной функціи по x найпре узети 0 место x, па онда є текъ диференціалити или интегралити по $y, z, \ldots$, или ћемо и то учинити противнимъ редомъ: то є очевидно, да ако є

1.) $v = (u_n)_z = \dfrac{{}^{n}du}{d^{n}z}$, слѣдує ${}^{r}\partial v = \dfrac{{}^{n}d\,({}^{r}\partial u)}{d^{n}z}$,

2.) $v = (u_{m+n})_{my,\,nz} = \dfrac{{}^{m+n}du}{d^{m}y\,.\,d^{n}z}$, „ ${}^{r}\partial v = \dfrac{{}^{m+n}d\,({}^{r}\partial u)}{d^{m}y\,.\,d^{n}z}$,

3.) $v = \int_{a}^{b} u\,dz$, „ ${}^{r}\partial v = \int_{a}^{b} \partial u\,.\,dz$, и

4.) $v = \int_{y'}^{y''} \Big(\int_{z'}^{z''} u\,dz\Big)\,dy$, „ ${}^{r}\partial v = \int_{y'}^{y''} \Big(\int_{z'}^{z''} {}^{r}\partial u.dz\Big)\,dy$, а то ће съ другимъ речима рећи, да є при истямъ предпоставама, по реду

$$\text{I.)}\quad {}^{r}\partial\left(\frac{{}^{n}du}{d^{n}z}\right)=\frac{{}^{n}d\,({}^{r}\partial u)}{d^{n}z},$$

$$\text{II.)}\quad {}^{r}\partial\left(\frac{{}^{m+n}du}{d^{m}y\,.\,d^{n}z}\right)=\frac{{}^{m+n}d\,({}^{r}\partial u)}{d^{m}y\,.\,d^{n}z},$$

$$\text{III.)}\quad {}^{r}\partial\,(\int_{a}^{b}udz)=\int_{a}^{b}{}^{r}\partial u\,.\,dz,\quad \text{и}$$

$$\text{IV.)}\quad {}^{r}\partial\left[\int_{y_{,}}^{y''}(\int_{z_{,}}^{z''}udz)\,dy\right]=\int_{y_{,}}^{y''}(\int_{z_{,}}^{z''}{}^{r}\partial u\,.\,dz)\,dy,$$

гди заграђени изрази лево представляю односно v, а цели леви изрази сачинителѣ одъ $\frac{x^{r}}{r!}$ у редовима дотичнога v; и гди дакле десни изрази показую како се ти сачинительи добыяю изъ єдноимены сачинителя ${}^{r}\partial u$ дотичнога реда u.

За образце III. и IV. имамо само іоштъ приметити, да они стоє тако, само докъ границе, међу коима се узимаю интеграли, несадрже и саме x, да се пакъ съ места меняю, чимъ бы и те границе были какве функціє одъ x. Место првогъ одъ ньи добыямо у томъ случаю

$${}^{r}\partial\,(\int_{a}^{b}udz)=\int_{a}^{b}{}^{r}\partial u\,.\,dz+(\underset{b}{u}\,.\,{}^{r}\partial b-\underset{a}{u}\,.\,{}^{r}\partial a),$$

о чему се лако уверавамо интеграломъ $\int_{a}^{b}udz=y$, ако помислимо, да смо у истомъ свудъ гдигодъ има x, дакле у u, a, b и y место x узели $x+h$, да смо све те броєве (по телеровомъ или маклореновомъ образцу) развили у редове по h, и после смо лево и десно задржали само чланове съ h у првомъ степену; єръ тиме слѣдує, да є при оной предпостави за b и a

$$\partial\int_a^b u dz = \int_a^b \partial u \,.\, dz + (\underset{b}{u} \,.\, \partial b - \underset{a}{u} \,.\, \partial a),$$

те зато и горньій образацъ каошто є поставлѣнъ.

Садъ приступимо къ самомъ развіяню функція одъ редова у редове·

§ 183.

Ако є $V = f(v)$, и притомъ $v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, имамо по Маклорену, обзиромъ на § 181.,

$$V = {}^0\partial V + \partial V \,.\, x + {}^2\partial V \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V \,.\, \frac{x^3}{3!} + \dots\,,$$

а у име сачинителя овога реда осимъ

$$V = f(v)$$

іошъ изводне функціє одъ V по v као функціи одъ x,

$$V_1 = f_1(v) \,.\, v_1,$$

$$V_2 = f_2(v) \,.\, v_1^2 + f_1(v) \,.\, v_2,$$

$$V_3 = f_3(v) \,.\, v_1^3 + 3f_2(v) \,.\, v_1 v_2 + f_1(v) \,.\, v_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\,,$$

и одтудъ, ако изменемо x са 0,

$${}^0\partial V = f(\underset{x=0}{v}),$$

$$\partial V = f_1(\underset{x=0}{v}) \,.\, \partial v_1,$$

$${}^2\partial V = f_2(\underset{x=0}{v}) \,.\, \partial^2 v + f_1(\underset{x=0}{v}) \,.\, {}^2\partial v,$$

$${}^3\partial V = f_3(\underset{x=0}{v}) \,.\, \partial^3 v + 3f_2(\underset{x=0}{v}) \,.\, \partial u \partial v + f_1(\underset{x=0}{v}) \,.\, {}^3\partial v,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Пошто пакъ у изводнимъ функціяма одъ v, кадъ место x метнемо 0, гдигодъ се появи v, остає само првый чланъ $a_0 = {}^0\partial v$ тога реда, то ћемо дакле по свему тому сачинителѣ вопроснога реда функціє V добыти, ако исту функцію као функцію одъ v (съ обзиромъ на то, да є v функція одъ x) застопце по x диференціалимо, у изводнимъ функціяма одъ $f(v)$ — диференціалнимъ количницима — место v узмемо само нѣговъ првый чланъ, и іошъ знакъ d изменимо са знакомъ ∂.

Н. п. имамо развити $V = v^m$, где є $v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots .$, у безкрайный редъ.

Ту є ${}^0\partial V = v^m$, $\partial V = m \,.\, v^{m-1} \,.\, \partial v$,

$${}^2\partial V = m\,(m-1) \,.\, v^{m-2} \,.\, \partial^2 v\, m \,.\, v^{m-1} \,.\, {}^2\partial v,$$

$${}^3\partial V = m\,(m-1)\,(m-2) \,.\, v^{m-3} \,.\, {}^3\partial v + 3m(m-1) \,.\, v^{m-2} \,.\, \partial v \,.\, {}^2\partial v + m v^{m-1} \,.\, \partial v$$

. . . . , т. є.

$${}^0\partial V = a_0^m,\ \partial V = m a_0^{m-1} \,.\, a_1,\ {}^2\partial V = m^{2\lfloor -1} \,.\, a_0^{m-2} \,.\, a_1^2 + m a_0^{m-1} \,.\, 2!\, a_2,$$

$${}^3\partial V = m^{3\lfloor -1} \,.\, a_0^{m-3} \,.\, a_1^3 + 3 m^{2\lfloor -1} \,.\, a_0^{m-2} \,.\, a_1 \,.\, 2!\, a_2 + m a_0^{m-1} \,.\, 3!\, a_3,$$

. . . . ;

дакле ако заменемо ове вредности у реду

$$V = {}^0\partial V + \partial V \,.\, x + {}^2\partial V \,.\, \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots,$$

слѣдує траженый редъ функціє

$$V = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)^m$$

$$= a_0^m + m a_0^m \,.\, a_1 \,.\, x + \left(m a_0^{m-1} \,.\, a_2 + \frac{m}{2!}^{2\lfloor -1} \,.\, a_0^{m-2} \,.\, a_1^2\right) x^2$$

$$+ \left(m a_0^{m-1} \,.\, a_3 + m^{2\lfloor -1} \,.\, a_0^{m-2} \,.\, a_1 a_2 + \frac{m^{3\lfloor -1}}{3!}\, a_0^{m-3} \,.\, a_1^3\right) x^3 + \ldots,$$

а то є полиномный образацъ, каошто смо га нашли у І. Ч. на другій начинъ.

§ 184.

Ако є пакъ $V=f(u,v)$, и притомъ $u=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots$, а $v=\gamma_0+\gamma_1x+\gamma_2x^2+\dots$, имамо

$$V={}^0\partial V+\partial V.x+{}^2\partial V.\frac{x^2}{2!}+\dots\dots,$$

а у име сачинителя ${}^0\partial V,\ \partial V,\ {}^2\partial V,\dots$, диференціалећи $V=f(u,v)$ застопце по u и v као функціє одъ x,

$${}^0dV=V=f(u,v)$$

$$dV=(V_1)_u.du+(V_1)_v.dv$$

$${}^2dV=(V_2)_u.d^2u+2\,(V_2)_{u,v}.dudv+(V_2)_v.d^2v$$

$$+(V_1)_u.{}^2du+(V_1)_v.{}^2dv$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

одкуда, ако метнемо 0 место x, слѣдуе

$${}^0\partial V=\underset{x=0}{V}=f(c_0;\gamma_0)$$

$$\partial V=(V_1)_u.\partial u+(V_1)_v.\partial v$$

$${}^2\partial V=(V_2)_u.\partial^2u+2\,(V_2)_{u,v}.\partial u\partial v+(V_2)_v.\partial^2v$$

$$+(V_1)_u.{}^2\partial u+(V_1)_v.{}^2\partial v$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

съ приметбомъ, да у изводнимъ функціяма V_1, $V_2,\dots$, гдигодъ стои просто u и просто v, треба узети или разумети само прве чланове тій редова, т. є. ${}^0\partial u$ и ${}^0\partial v$, изъ истогъ узрока као у прећашнѣмъ §-у.

Сачинителѣ дакле вопросногa реда функціє $V=f(u,v)$ добыт'ћемо, ако исту функцію по u и v (дакле посредно по x) застопце диференціалимо, у диференціалнимъ сачинительима место простога u и простога v узмемо само прве чланове ${}^0\partial u$ и ${}^0\partial v$ тій редова, и іошъ знакъ d изменимо са знакомъ ∂.

§ 185.

У случаю ако є функція $V=f(u,v)={}^0\partial V+\partial V.x+{}^2V.\frac{x^2}{2!}+\ldots$ за сваку вредность броя x равна нулли, онда по § 9. I. Ч. мора быти и свакій нѣнъ сачинитель ${}^0\partial V, \partial V, {}^2\partial V, \ldots$ за себе $=0$, и єдначине одъ горньи израза, поставлѣны $=0$, показую зависность сачинителя ${}^0\partial u, \partial u, {}^2\partial u, \ldots$ одъ сачинителя ${}^0\partial v, \partial v, {}^2\partial v, \ldots$, или обратно, па дакле и начинъ како бы се добыли єдни изъ други у случаю, ако є редъ v као функція реда u, или овай као функція онога задатъ скривеномъ функціомъ $V=f(u,v)=0$.

Слѣдоватно, ако су у $V=f(u,v)$ редови u и v єданъ одъ другогъ зависни, и та є ньина зависность задата єдначиномъ $\varphi(u,v)=0$, онда сачинительи ${}^0\partial V, \partial V, {}^2\partial V, \ldots$ реда V остаю каошто смо ій горе нашли, а сачинительи ${}^0\partial v, \partial v, {}^2\partial v, \ldots$ у ньима добыт'ће се изражени посредомъ сачинителя ${}^0\partial u, \partial u, {}^2\partial u, \ldots$ изъ постоєћи збогъ $\varphi(u,v)=0$ єдначина ${}^0\partial\varphi(u,v)=0$, $\partial\varphi(u,v)=0$, ${}^2\partial\varphi(u,v)=0, \ldots$, коихъ пакъ леве части налазимо по упутству § 184.

§ 186.

Ако є найпосле $V=f(u,v,w)$, т. є. функція три реда $u=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$, $v=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots$, $w=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots$, имамо

$$V = {}^{0}\partial V + \partial V \,.\, x + {}^{2}\partial V \,.\, \frac{x^2}{2!} + \,.\,.\,.\,.\,.$$

$$dV = (V_1)_{u} \,.\, du + (V_1)_{v} \,.\, dv + (V_1)_{w} \,.\, dw \,,$$

$$\begin{aligned} {}^{2}dV = {} & (V_2)_{u} \,.\, d^2u + (V_2)_{v} \,.\, d^2v + (V_2)_{w} \,.\, d^2w, \\ & + 2\,(V_2)_{u,v} \,.\, dudv + 2\,(V_2)_{u,w} \,.\, dudw + 2\,(V_2)_{v,w} \,.\, dvdw \\ & + (V_1)_{u} \,.\, {}^{2}du + (V_1)_{v} \,.\, {}^{2}dv + (V_1)_{w} \,.\, {}^{2}dw \,, \end{aligned}$$

. . . . ,

и одтудъ изменомъ одъ x са 0,

$${}^{0}\partial V = V = f(u, v, w)$$

$$\partial V = (V_1)_{u} \partial u + (V_1)_{v} \,.\, \partial v + (V_1)_{w} \,.\, \partial w$$

$$\begin{aligned} {}^{2}\partial V = {} & (V_2)_{u} \,.\, \partial^2 u + (V_2)_{v} \,.\, \partial^2 v + (V_2)_{w} \,.\, \partial^2 w + 2\,(V_2)_{u,v} \,.\, \partial u \partial v \\ & + 2\,(V_2)_{u,w} \,.\, \partial u \partial w + 2\,(V_2)_{v,w} \,.\, \partial v \partial w \\ & + (V_1)_{u} \,.\, {}^{2}\partial u + (V_1)_{v} \,.\, {}^{2}\partial v + (V_1)_{w} \,.\, {}^{2}\partial w \end{aligned}$$

. . . . ,

гди у изводнимъ функціяма одъ V место простога u, v и w треба свуда узети само прве членове ${}^{0}\partial u$, ${}^{0}\partial v$, ${}^{0}\partial w$ тій редова.

Осимъ начина за истраживанѣ сачинителя увиђа се іошъ лако

1.) да ако є у вопросномъ случаю $V = 0$, мора быти такођеръ и ${}^{0}\partial V = 0$, $\partial V = 0$, ${}^{2}\partial V = 0, \ldots$, коє єдначине садрже међусобну зависность сачинителя редова u, v и w тако, да можемо оне ма коєга одъ тій редова изразити посредомъ сачинителя остала два реда, у случаю: ако бы онай єданъ редъ бьо задатъ єдначиномъ $V = 0$ као скривена функція друга два реда. Исто тако

2.) ако є осимъ $V = f(u,v,w) = 0$ іошъ и $W = \varphi(u,v,w) = 0$, мора быти ${}^0\partial V = 0$, $\partial V = 0$, ${}^2\partial V = 0, \ldots$ и ${}^0\partial W = 0$, $\partial W = 0$, ${}^2\partial W = 0, \ldots$, тако, да по тима єдначинама можемо лако изразити сачинителѣ ма коя два одъ редова u, v и w чрезъ сачинителѣ трећега реда, у случаю: ако бы прва два реда были задати као скривене функціє трећега, єдначинама $V = 0$ и $W = 0$.

§ 187.

Редови u, v и w у вопросу предходећегъ §а могу быти

1.) међусобно сасвимъ независни, и у томе су случаю и сачинительи свакогъ одъ ньи независни одъ сачинителя остала два реда; или

) између редова u, v и w постои єдначина $\varphi(u,v,w) = 0$, и у томъ су случаю по првой приметби пређашнѣга §а сачинительи єдногъ одъ ньи зависни одъ сачинителя друга два реда, посредомъ єдначина ${}^0\partial\varphi(u,v,w) = 0$, $\partial\varphi(u,v,w) = 0$, ${}^2\partial\varphi(u,v,w) = 0, \ldots$ збогъ чега можемо изразити сачинителѣ одъ V чрезъ сачинителѣ само та два реда; или

3.) између редова u, v, и w постоє две єдначине $\varphi(u,v,w) = 0$ и $\psi(u,v,w) = 0$, у комъ случаю по 2. приметби истога §а зависе сачинительи два одъ тій редова одъ сачинителя оногъ трећегъ реда, посредомъ єдначина ${}^0\partial\varphi(u,v,w) = 0$, $\partial\varphi(u,v,x) = 0$, ${}^2\partial\varphi(u,v,w) = 0, \ldots$, и можемо дакле изразити сачинителѣ одъ V чрезъ сачинителѣ само тогъ трећегъ реда. Осимъ тога

4.) могу быти два одъ тій редова, н. п. v и w, или изводне функціє (диференціални количници), или интеграли оногъ трећега, и то по єдномъ или по више променльивы броєва r, s, t, ... У томе су случаю сачинительи она два прва реда исте изводне функціє или исти интеграли одъ сачинителя трећега реда, по онимъ истимъ променльивимъ броєвима r, s, t, ..., онако каошто показую дотични образци § 181. Найпосле

5.) у пређе споменутимъ случаевима може быти V функція само два реда v и w, или башъ и само єднога w. Тадъ зависе она два реда или тай єданъ одъ трећегъ реда u, збогъ чега се сачинительи одъ V могу сви изразити чрезъ сачинителѣ тога реда u.

§ 188.

Садъ смо у станю развити V као функцію одъ ма колико и каквы редова у редъ целы степена заєдничкогъ ньиовогъ премельивогъ броя x, на слѣдуюћій начинъ:

Напишемо редъ

$$V = {}^0\partial V + \partial V \,.\, x + {}^2\partial V \cdot \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V \,.\, \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots ;$$

диференціалимо V као функцію дотичны редова застопце по x; у нађенимъ тимъ диференціалима изменюємо знакъ d знакомъ ∂, а одъ оны редова, гди се прости покажу, задржимо само ньиове прве чланове, па онда заменемо све те изразе место сачинителя ${}^0\partial V$, ∂V, ${}^2\partial V$, ... у горнѣмъ реду за V.

И тай начинъ остає истый, были редови $u, v, w, \ldots$ у функціи V међу собомъ независни, или были єдни неке изводне функціє или интеграли одъ други, или была найпосле нека ньиова међусобна зависность задата єдначинама $\varphi(u, v, w, \ldots) = 0$, $\psi(u, v, w, \ldots) = 0, \ldots$

Примера ради узмимо да є $V = f\left(u, v. \int u dz, \frac{dv}{dz}\right)$. Заменююћи ради краткоће $\int u dz$ са s, а $\frac{dv}{dz}$ са t, имамо

$${}^0\partial V = V$$

$$\partial V = (V_1)_n \cdot \partial u + (V_1)_v \cdot \partial v + (V_1)_s \cdot \partial s + (V_1)_t \cdot \partial t$$

$${}^2\partial V = (V_2)_u \cdot \partial^2 u + (V_2)_v \cdot \partial^2 v + (V_2)_s \cdot \partial^2 s + (V_2)_t \cdot \partial^2 t + 2(V_2)_{u,v} \cdot \partial u \partial v$$
$$+ 2(V_2)_{u,s} \cdot \partial u \partial s + 2(V_2)_{u,t} \cdot \partial u \partial t + 2(V_2)_{v,s} \cdot \partial v \partial s$$

$$+2(V_2)_{v,t}\cdot\partial v\partial t+2(V_2)_{s,t}\cdot\partial s\partial t+(V_1)_u\cdot{}^2\partial u$$

$$+(V_1)_v\cdot{}^2\partial v+(V_1)_s\cdot{}^2\partial s+(V_1)_t\cdot{}^2\partial t$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

гди 1.) у изводнимъ функціяма место простога u, v, s, и t валя узети само прве чланове тій редова. 2.) место ∂t и ∂s треба по § 181. узети $\frac{d(\partial v)}{dz}$ и $\frac{d(\int\partial u.dz)}{dz}$.

§ 189.

Задатакъ развіяня функція одъ редова у безкрайне редове, сваћенъ у најпространіємъ смислу бьо бы каошто слѣдуе:

Имамо V као функцію одъ u, v, ... и іошъ одъ u' v', ... Место u', v', ... узимамо найпре редове целы степена одъ x, у коима су сачинители ${}^0\partial u'$, $\partial u'$, ${}^2\partial u'$, ..., ${}^0\partial v'$, $\partial v'$, ${}^2\partial v'$, ... неке функціє одъ u, v, ... После пакъ заменюємо u, v, ..., гдигодъ се налазе, было као одкривене или као скривене функціє (у сачинительима редова u', v', ...), такођеръ са редовима целы степена одъ x. И тадъ пыта се, како ћемо добыти сачинителѣ реда, у коій тиме прелази вопросна функція V.

Тай задатакъ разрешит'ћемо одма на двоякій начинъ.

§ 190.

Прво решенѣ. Помислимо да смо у V заменули u', v', ... са редовима каошто горе рекосмо. Тиме прелази већъ V у редъ степена одъ x, коій истина ніє онай траженый, али насъ, каошто ћемо видити, води къ томъ правомъ. Нѣгове сачинителѣ налазимо по § 189., означаваюћи ій са ${}^0\partial' V$, $\partial' V$, ${}^2\partial' V$, ...,

$$ {}^{0}\partial' V = V $$

$$ \partial' V = (V_1)_{u'} \,.\, \partial u' + (V_1)_{v'} \,.\, \partial v' + \dots $$

$$ {}^{2}\partial' V = (V_2)_{u'} \,.\, \partial^2 u' + (V_2)_{v'} \,.\, \partial^2 v' + \dots $$

$$ + 2\,(V_2)_{u',v'} \,.\, \partial u' \,.\, \partial v' + \dots $$

$$ + (V_1)_{u'} \,.\, {}^{2}\partial u' + (V_1)_{v'} \,.\, {}^{2}\partial v' + \dots $$

$$ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, $$

гди како у V тако и у свима нѣговимъ изводнимъ функціяма место простога u', v', . . . треба разумети само прве чланове ${}^{0}\partial u'$, ${}^{0}\partial v'$, . . . тій редова.

Редъ дакле, добывеный после замене одъ u', v', . . съ редовима по x, представляюћи га са V', быт'ће

$$ V' = {}^{0}\partial' V + \partial' V \,.\, x + {}^{2}\partial' V \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^{3}\partial' V \,.\, \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (1., $$

а траженый редъ треба да буде

$$ V = {}^{0}\partial V + \partial V \,.\, x + {}^{2}\partial V \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^{3}\partial V \,.\, \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (2. $$

Овай последнѣй редъ, каошто є лако увидити, да быт'ћемо изъ првога V', а́ко у томъ место u, v, ... гдигодъ стоє (было одкривено или скривено) узмемо ньиове редове по x, т. є.

$$ u = {}^{0}\partial u + \partial u \,.\, x + {}^{2}\partial u \,.\, \frac{x^2}{2!} + \dots, $$

$$ v = {}^{0}\partial v + \partial v \,.\, x + {}^{2}\partial v \,.\, \frac{x^2}{2!} + \dots, $$

$$ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, $$

и ако после V', у име сачинителя реда V, ніеданпутъ, єданпутъ, двапутъ, . . . застоще диференціалимо, па онда место x поставимо о.

Ради краткоће узмимо да є V осимъ одъ $u', v', \ldots$ функція само іошъ одъ u и v. Бытће, поступаюћи као-што рекосмо,

$$ {}^0\partial V = {}^0\partial' V = [V = f(u, v, u', v', \ldots] \quad . \, . \, (3., $$

где место $u', v', \ldots$ треба разумети само ньиове прве чланове ${}^0\partial u', {}^0\partial v'$, а место u и v после такођеръ само прве чланове ${}^0\partial u$ и ${}^0\partial v$. Далѣ

$$ \partial V = \partial' V + (V_1)_{\mathrm{u}} . \partial u + (V_1)_{\mathrm{v}} . \partial v \quad . \, . \, (4., $$

где съ $\partial' V$ представлямо последакъ одъ dV (т. є. одъ dV' после изменутога u и v съ ньиовимъ редовима), по одлученомъ x, пошто смо место x узели о; съ $(V_1)_{\mathrm{u}}$ и $(V_1)_{\mathrm{v}}$ пакъ означуємо послѣдке истога dV по ономъ x, коє се налази у сачинительима одъ V', такођеръ после изменутогъ x съ о.

Узимаюћи одъ предстоєће єдначине подъ 4.) лево и десно изводне функціє по x, и изменююћи после x съ о, слѣдує

$$ {}^2\partial V = \partial\,(\partial' V) + \partial\,[(V_1)_{\mathrm{u}} . \partial u] + \partial\,[(V_1)_{\mathrm{v}} . \partial v] \quad . \, . \, (5., $$

где є изъ увиђавны узрока

$$ \left. \begin{aligned} \partial\,[(V_1)_{\mathrm{u}} . \partial u] &= \partial\,(V_1)_{\mathrm{u}} . \partial u + (V_1)_{\mathrm{u}} . {}^2\partial u \\ \partial\,[(V_1)_{\mathrm{v}} . \partial v] &= \partial\,(V_1)_{\mathrm{v}} . \partial v + (V_1)_{\mathrm{v}} . {}^2\partial v \end{aligned} \right\} \quad . \, . \, (6. $$

Ставляюћи пакъ у истой єдначини подъ 4.) $\partial' V$ место V добыямо

$$ \partial\,(\partial' V) = {}^2\partial' V + \frac{d\,(\partial' V)}{du} . \partial u + \frac{d\,(\partial' V)}{dv} . \partial v \quad . \, . \, (7., $$

а ако опетъ тамо метнемо найпре $(V_1)_{\mathrm{u}}$ а после $(V_1)_{\mathrm{v}}$ место V,

$$ \left. \begin{aligned} \partial\,(V_1)_{\mathrm{u}} &= \partial'(V_1)_{\mathrm{u}} + (V_2)_{\mathrm{u}} . \partial u + (V_2)_{\mathrm{u,v}} . \partial v \\ \partial(V_1)_{\mathrm{v}} &= \partial'(V_1)_{\mathrm{u}} + (V_2)_{\mathrm{u,v}} . \partial u + (V_2)_{\mathrm{v}} . \partial v \end{aligned} \right\} \quad . \, . \, (8., $$

гди є по § 181.

$$\partial'(V_1)_{\mathrm{u}} = \frac{d\,(\partial' V)}{du}\,, \text{ а } \partial'(V_1)_{\mathrm{v}} = \frac{d\,(\partial' V)}{dv}\,.\;.\;.\;.\;(9.$$

Збогъ свега тога є дакле, ако ове вредности єдну у другой, и све у єдначини 5. заменемо,

$$\left.\begin{aligned} {}^{2}\partial V = {}^{2}\partial' V + 2\,\frac{d\,(\partial' V)}{du}\cdot \partial u + 2\,\frac{d\,(\partial' V)}{dv}\cdot \partial v \\ + (V_1)_{\mathrm{u}}\cdot {}^{2}\partial u + (V_1)_{\mathrm{v}}\cdot {}^{2}\partial v + (V_2)_{\mathrm{u}}\cdot \partial^2 u \\ + 2\,(V_2)_{\mathrm{u,v}}\cdot \partial u \partial v + (V_2)_{\mathrm{v}}\cdot \partial^2 v \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(10.$$

На истый начинъ можемо изъ овогъ израза извести ${}^{3}\partial V$, одтудъ опетъ ${}^{4}\partial V$, и т. д. Само се притомъ несме заборавити, да у свима изразима одъ 3. до 10. место свакогъ простогъ u', v', . . ., гдигодъ се у сачинительима находе, валя узети само прве чланове ${}^{0}\partial u'$, ${}^{0}\partial v'$, ... уведены за u', v', . . . редова, каогодъ што се после опетъ место свакогъ простогъ u и v има метнути ${}^{0}\partial$ и ${}^{0}\partial v$.

Ово решенѣ можемо употребити и у случаю, гди су $\partial' V$, ${}^{2}\partial' V$, . . . функціє само одъ u и v, или осимъ u и v іошъ и одъ произвольно колико више редова w, y, . . .

§ 191.

Друго решенѣ. Прече и лакше можемо изнаћи чинителѣ реда V изъ сачинителя реда V' (єдначине подъ 2. и 1.) на тай начинъ, да у овима помислимо место u и v поставлѣне ньиове редове; што є тиме постало развіено є у редове по x, и све є найпосле урећено по степенима одъ x.

Пошто су сачинительи ${}^{0}\partial' V$, $\partial' V$, ... функціє одъ u и v, слѣдує, да ако се у тима сачинительима место u и v поставе ньиови редови, свакій одъ ньи прелази за себе у редъ степена одъ x, коій уобште представлямо чрезъ

$$ {}^{0}\partial_1({}^{n}\partial' V) + \partial_1({}^{n}\partial' V) \cdot x + {}^{2}\partial_1({}^{n}\partial' V) \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots ; $$

сачинителѣ пакъ свакогъ таквогъ реда добыт'ћемо по § 183. изменююћи тамошнѣ ∂ са саданьимъ ∂_1, а тамошнѣ V са овдашньимъ ${}^{n}\partial' V$.

На основу ове приметбе можемо садъ настоєће друго решенѣ сасвимъ уобште изложити овако:

Представляюћи редъ V' (єдначину прећашнѣгъ §а подъ 1.) символомъ

$$ V' = S\left[{}^{\alpha}\partial' V \cdot \frac{x^{\alpha}}{\alpha!}\right] \quad \ldots\ldots (3.', $$

(кои значи: V' є сбиръ членова вида ${}^{\alpha}\partial' V \cdot \frac{x^{\alpha}}{\alpha!}$,) можемо одма рећи, да є

$$ V = S\left[{}^{a}\partial_1({}^{\alpha}\partial' V) \cdot \frac{x^{a}}{a!} \cdot \frac{x^{\alpha}}{\alpha!}\right] \quad \ldots\ldots (4.', $$

у комъ изразу, да бы добыли V, треба метнути найпре место α по реду све целе положне броєве $0, 1, 2, \ldots$ у ∞, па онда валя све тако добывене членове (кои ће быти безбройно пута безбройно) у єданъ сабрати.

Ставляюћи $a + \alpha = \varepsilon$, прелази ова єдначина подъ 4.', збогъ $\frac{\varepsilon!}{a!\,\alpha!} = \frac{(a+\alpha)}{a!\,\alpha!} = \binom{a+\alpha}{a} = \binom{a+\alpha}{\alpha} = \binom{\varepsilon}{a} = \binom{\varepsilon}{\alpha}$, у слѣдуюћу

$$ V = S\left[\binom{\varepsilon}{a} \cdot {}^{a}\partial_1({}^{a}\partial' V) \cdot \frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon!}\right] \quad \ldots\ldots (5.', $$

по коіой дакле за V треба метнути место ε по реду све броєве $0, 1, 2, \ldots$ у ∞, и уза свако ε за a и α опетъ оне целе положне броєве одъ 0 до ∞, кои є сбиръ $a + \alpha = \varepsilon$, па онда све тако добывене вредности валя іошъ скупити у сбиръ S.

Сравненѣ ове єдначине 4.', съ ономъ подъ 2.) у прећашнѣмъ §у, коя по овде уведеномъ начину писана овако изгледа

$$V = S\left[{}^{\varepsilon}\partial V \cdot \frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon!}\right],$$

показує, да нъиови поєдини, са x^{ε} снабдевени чланови мораю быти єднаки, дакле да мора быти

$$^{n}\partial V = S\left[\binom{n}{a} \cdot {}^{a}\partial_1({}^{\alpha}\partial' V\right] \;.\;.\;.\;.\; (6.',$$

гди a и α примаю све целе положне бройне вредности 0, 1, 2, ... до ∞, коихъ є сбиръ $= n$, а $\binom{n}{a}$ представля комбинаторный брой $\frac{n^{a|-1}}{a!}$, — и гди найпосле знакъ S налаже, да се све тако добывени изрази саберу у єданъ.

Ставляюћи дакле ту место n по реду броєве 0, 1, 2, ..., добыямо

$$^{0}\partial V = {}^{0}\partial_1({}^{0}\partial' V) = \underset{x=0}{V},$$

$$\partial V = {}^{0}\partial_1(\partial' V) + \partial_1({}^{0}\partial' V) = {}^{0}\partial V + \partial_1(\partial' V),$$

$$^{2}\partial V = {}^{0}\partial_1({}^{2}\partial' V) + 2\partial_1(\partial' V) + {}^{2}\partial_1({}^{0}\partial' V);$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;;$$

кои се изрази подпуно слажу съ онима у предходећемъ §у, чимъ истражимо вредности чланова у десной части по § 183., изменюющи тамо ∂ лево съ ∂_1, а V десно по реду съ $^{0}\partial' V$, $\partial' V$, $^{2}\partial' V$, . . .

§ 192.

Као особитый, за употребленѣ важный случай обясненѣногъ у § 190. обштегъ задатка преображавана у редове, споминѣмо само іошъ тай, гди су ${}^0\partial u'$ ${}^0\partial v'$, … $\partial u'$, $\partial v'$, .. ${}^2\partial u'$, ${}^2\partial v'$, …, функціє само одъ u, коій редъ иначе у V, па дакле и у ${}^0\partial' V$, $\partial' V$, ${}^2\partial' V$, … може налазити се или неналазити, и гди є найпосле место свакогъ простогъ u узетъ редъ ${}^0\partial u' + \partial u \,.\, x + {}^2\partial u \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots$

У томъ є случаю (види изразе §а 190.)

$$1.)\quad {}^0\partial V = {}^0\partial' V = [V = f(u, u', v', \ldots)]$$

$$2.)\quad \partial V = \partial' V + (V_1)_u \,.\, \partial u, \quad \text{и притомъ}$$

$$\partial' V = \partial V - (V_1)_u \,.\, \partial u,$$

$$3.)\quad {}^2\partial V = {}^2\partial' V + 2\,\frac{d\,(\partial' V)}{du} \,.\, \partial u + (V_2)_u \cdot \partial^2 u + (V_1)_u\, {}^2\partial u,$$

. . . . ,

гди подъ свакимъ u', v', … треба разумети само ${}^0\partial u'$, ${}^0\partial v'$, …, и у тима опетъ подъ u само ${}^0\partial u$.

Заврщуюћи съ овимъ предстоећій предметъ, морамо іошъ приметити, да при употребляваню докученя предходећи §§-а, у свакомъ особитомъ случаю, гди бы редъ V съ некимъ членомъ прекинули, изъ узрока што є тай редъ свуда добывенъ на основу Маклореновогъ образца, іошъ и границе, међу коима леже пренебрегнути чланови, по § 138. узети треба.

Б. Варіяціоный рачунъ.

§ 193.

Ако є у докученяма прећашньи §§-а при нарочномъ ньиовомъ употребляваню брой x изчезљиво малый, онда є разлика између редова u, v, V, ... и ньиовы првы чланова такођеръ изчезљиво мала, и тада зову се чланови тій разлика $u - {}^0\partial u$, $v - {}^0\partial v$, $V - {}^0\partial V$, ... (кои су сви снабдевени съ некимъ степеномъ одъ x, и одъ коихъ є свакій спрамъ предходећему опетъ изчезљиво малый), пошто се помложе по реду съ 1!, 2!, 3!, . . . — **варіяціє или премене одъ u, v, V, . . .**

Предходећи §§и дакле, поредъ решеня задатка коій имъ є быо цѣлъ, садрже уєдно и **варіяціоный рачунъ** по нѣговой суштини; но у слѣдуюћему упознат'ћемо се іошъ и съ нѣговимъ обичнимъ видомъ.

§ 194.

Ако u, или v, или V, . . . по себи, или зависно, прелази у редъ целы степена одъ x, коій представлямо односно са

$$ {}^{0}\partial u + \partial u \,.\, x + {}^{2}\partial u \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^{3}\partial u \cdot \frac{x^3}{3!} + \;.\;.\;.\;. $$

$$ {}^{0}\partial v + \partial v \,.\, x + {}^{2}\partial v \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^{3}\partial v \cdot \frac{x^3}{3!} + \;.\;.\;.\;. $$

$$ {}^{0}\partial V + \partial V.\, x + {}^{2}\partial V.\, \frac{x^2}{2!} + {}^{3}\partial V \cdot \frac{x^2}{3!} + \;.\;.\;.\;. $$

. . . . ,

и ако є (или се помисли) притомъ x изчезљиво мало, тако дакле, да се ${}^{0}\partial u$, ${}^{0}\partial v$, ${}^{0}\partial V$, . . . односно одъ u, v, V, ... , неразликую: онда се производи ${}^{n}\partial u \,.\, x^{n}$, ${}^{n}\partial v \,.\, x^{n}$. ${}^{n}\partial V \,.\, x^{n}$, ... зову n. **варіяціє или премене**, односно одъ u, v, V, . . . , и означую се простіє са ${}^{n}\delta u$, ${}^{n}\delta v$, ${}^{n}\delta V$, . . . ; разлика пакъ $u - {}^{0}\delta u$, или $v - {}^{0}\delta v$, или $V - {}^{0}\delta V$, ... назива се **цела или скупна варіяція** одъ u, или V, ...

§ 195.

Изъ огъ понятія варіяціє слѣдує обзиромъ на § 181. съ места, да є

I.) $x \,.\, \partial V = \delta V$, а уобште $x \,.\, {}^{n}\partial V = {}^{n}\delta V$,

II.) $V = {}^{0}\delta V + \delta V + \frac{1}{2!}\, {}^{2}\delta V + \frac{1}{3!} \,.\, {}^{3}\delta V + \ldots\ldots$

III.) $${}^{n}\delta (V_{n})_{t} = \frac{{}^{n}d\,({}^{m}\delta V)}{d^{n}t}, \quad {}^{r}\delta (V_{m+n})_{my,nz} = \frac{{}^{m+n}d\,({}^{r}\delta V)}{d^{n}y \,.\, d^{n}z},$$

IV.) $\delta \int_{a}^{b} V dz = \int_{a}^{b} \delta V \,.\, dz$, и т. д.,

тако дакле, да послѣдке §§а 182. до 192. валя само помложити съ x, x^{2}, x^{3}, . . . и тамошньій знакъ ∂ заменути са δ, да бы добыли дотичне изразе варіяція, и да тамо докучена практична правила за истраживанѣ сачинителя постоє сасвимъ онако и за определьиванѣ варіяція δV, ${}^{2}\delta V$, ...

Притомъ валя іошъ приметити, да є ясніє и удобніє оставити варіяціє одъ u или V у виду ${}^{n}\partial u \,.\, x^{n}$ или ${}^{n}\partial V . x^{n}$, место што ій означуємо са ${}^{n}\delta u$ и ${}^{n}\delta V$, и то зато, што се **крайни** изрази ${}^{n}\partial u$ и ${}^{n}\partial V$ онако неспояваю са изчезльиво малимъ броємъ x, него одма падаю у очи као крайни сачинительи тогъ изчезльивогъ броя.

Придржаваюћи се ове приметбе можемо броєве ${}^{n}\partial u$ и ${}^{n}\partial V$ назвати **варіяціонимъ сачинительима** (подобно диференціалнимъ сачинительима), и показаный подъ $\mathcal{A}$.) обштій начинъ развіяня у редове заслужує тадъ съ пунимъ правомъ име варіяціонога рачуна.

§ 496.

Примеръ. Нека є $U = f(u, v, w, x, y, z)$, и притомъ $v = \varphi(u)$, $w = \psi(u)$, $x = \frac{dv}{du}$, $y = \frac{{}^{2}dv}{d^{2}u}$, а $z = \frac{dw}{du}$. Осимъ тога нека є іошъ $V = \int_{a}^{b} U du.$

Ако у томъ случаю прелазе v и w у редове $v+\delta v+\frac{1}{2!}\cdot{}^2\delta v+\frac{1}{3!}\cdot{}^3\delta v+\ldots$ и $w+{}^0\delta w+\frac{1}{2!}\cdot{}^2\delta w+\frac{1}{3!}, {}^3\delta w+\ldots..$, онда прелази и V у безкрайный редъ, кои ћемо представити са

$$V+\delta V+\frac{1}{2!}\,{}^2\delta V+\frac{1}{3!}\,{}^3\delta V+\ldots,$$

па ако треба да се изрази и δV варіяціяма δv, δw, ${}^2\delta v$, ${}^2\delta w$, $\ldots$, онда ће быти

1.) $\delta V=\int_a^b \delta U\,.\,du$, а

2.) $\delta U=(U_1)_v\cdot\delta v+(U_1)_w\cdot\delta w+(U_1)_x\cdot\delta x+(U_1)_y\cdot\delta y+(U_1)_z\cdot\delta z$,

при чему є

$$\delta x=\delta(v_1)_{\text{ц}}=\frac{d\,.\,\delta u}{du},\ \delta y=\delta(v_2)_u=\frac{{}^2d\,.\,\delta u}{d^2u},\ \text{а}\ \delta z=\delta(w_1)=\frac{{}^2d.\delta w}{d^2u},$$

и зато ако ове вредности заменемо у предходећой єдначини подъ **2.**), и после узмемо то δU у прву єдначину,

3.) $$\delta V=\int_a^b\Big[(U_1)_v\cdot\delta v+(U_1)_w\cdot\delta w+(U_1)_x\cdot\Big(\frac{d\,.\,\delta u}{du}\Big)+$$

$$+(U_1)_y\cdot\Big(\frac{{}^2d\,.\,\delta v}{d^2u}\Big)+(U_1)_z\cdot\Big(\frac{d\,.\,\delta w}{du}\Big)\,.\,du$$

и тай се интегралъ има узети по свему u, коє се налази у заграђеномъ чинителю одкривено или скривено.

Осимъ тога іошъ валя приметити, да се притомъ варіяціє одъ v и w сматраю као познате, и да по томе єдначина 3.) показує само зависность варіяціє δV одъ тій варіяція δv и δw.

Найпосле како бы се добыле и друге варіяціє одъ V изражене варіяціяма δv и δw, кадъ бы тако быле одъ потребе, разуме се сада већъ ямачно безъ нарочнога казиваня, каогодъ и да се изразъ за δV може по потреби разно преображавати.

В. Найобштія теорія о максимуму и минимуму.

§ 197.

Ако є V функція произвольны пременльиваца, коя или садржи или несадржи и диференціалны количника или интегр. кои одъ тій броєва, была она иначе познатогъ или іошъ непознатогъ вида; и ако далѣ $\underset{x}{V}$ преставля исту, на произвольный, али свагда познатый начинъ **пременльивану** (варирану) функцію, т. є. оно у шта се претвара V, ако место єдногъ или место више одъ оны пременльивы броєва, или найпосле место свію ньи узмемо безкрайне редове, одъ кои свакій започинѣ съ дотичнимъ пременльивцемъ: онда намъ дає $\underset{x}{V}$ са єданпутъ положнимъ, а другипутъ одречнимъ x, две оближнѣ вредности одъ V, коє представлямо обе редомъ

$$\underset{x}{V} = V + \partial V . x + {}^2\partial V . \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V . \frac{x^3}{3!} + \dots..$$

Садъ да извидимо, подъ коимъ ће условама быти функціа V у односу на те нѣне оближнѣ вредности **максимумъ**, а подъ коима **минимумъ**, рећи ће одъ обе те вредности већа, или одъ обе маня.

§ 198.

Да ли є функція V већа или є маня одъ нѣны оближньи вредностій $\underset{x}{V}$, показує разлика $\underset{x}{V} - V$. Како є пакъ та разлика

$$\underset{x}{V} - V = \partial V . x + {}^2\partial V . \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V . \frac{x^3}{3!} + \dots ,$$

при предпостави, да є x изчезльиво малый брой, збогъ $\partial V . x >$ одъ сбира свію осталы нѣны чланова, при положномъ x положна, а при одречномъ x одречна, дакле оближнѣ вредности функціє V противнога знака, то иста функція V неможе быти ни одъ обе маня ни одъ обе већа, докле годъ ніє $\partial V . x = 0$, т. є. $\partial V = 0$, и по томе є

$$1.)\quad \partial V = 0$$

єдна услова, да бы функція V могла быти максимумъ или минимумъ.

Да ли є пакъ функція V поредъ те услове уобште максимумъ или минимумъ и понаособъ шта, зависи после очевидно одъ другогъ члана ${}^2\partial V . \frac{x^2}{2!}$, као тада найвећега. и зато у обзиру знака разлике $\underset{x}{V} - V$ решаваюћега. Но $\frac{x^2}{2!}$ є, было x положно или одречно, свагда положанъ брой, и зато знакъ разлике $V - \underset{x}{V}$ зависи тада само одъ знака ${}^2\partial V$.

Ако є дакле поредъ горнѣ услове ${}^2\partial V$ за нађене вредности изъ єдначине $\partial V = 0$ **положанъ**, онда є функція V одъ обе оближнѣ вредности $\underset{x}{V}$ маня, дакле **минимумъ**, а ако є напротивъ ${}^2\partial V$ **одречанъ**, онда є функція V одъ обе оближнѣ вредности $\underset{x}{V}$ **већа**, дакле **максимумъ**.

Покаже ли се поредъ $\partial V = 0$, са одтудъ нађенимъ вредностима, іошъ и ${}^2\partial V = 0$, онда V, изъ исты узрока као пређе, опетъ неможе быти ни максимумъ ни минимумъ, доклегодъ ніє съ онимъ истимъ вредностима уєдно и ${}^3\partial V$, и тадъ поредъ тога решава ${}^4\partial V$ на истый начинъ као пре ${}^2\partial V$, да ли є V при коіой одъ оны вредностій максимумъ или минимумъ, или ніє.

И т. д., и т. д.

§ 199.

Пошто є пакъ редъ $\underset{x}{V} - V = \partial V . x + {}^2\partial V . \frac{x^2}{2!} + \ldots .$ добывенъ помоћу маклореновогъ образаца, то є могуће, да функціа V башъ за оне вредности променљивы нѣны броєва постає максимумъ или минимумъ, при коима онай образацъ више непостои зато, што съ нъима или ∂V, или ${}^2\partial V$, или ${}^3\partial V$, ... постаю вида $\frac{1}{0}$.

Непостане ли дакле притомъ већъ $\partial V = \frac{1}{0}$, онда є іошъ єднако

$$\underset{x}{V} - V = \partial V : x + \ldots\ldots,$$

и зато іошъ єднако $\partial V = 0$ услова за максимумъ или минимумъ.

Но како є могуће, да вредности променљивы броєва, коє преводе V у максимумъ или минимумъ, башъ онима принадлеже, коє већъ ∂V показую у виду $\frac{1}{0}$, то є, да ій небы промашили, нуждно, поставити іошъ

$$2.)\quad \text{и}\quad \partial V = \frac{1}{0},\quad \text{т. є.}\quad \frac{1}{\partial V} = 0,$$

и изнаћи іошъ и одтудъ вредности променљивы броєва; но за те морамо тадъ (зато што маклореновъ образацъ, па дакле и горный редъ разлике $\underset{x}{V} - V$ издає) разлику $\underset{x}{V} - V$ претворити другимъ (изъ I. кнь. познатимъ простимъ) путемъ у редъ, да бы могли извидити, меня ли она поредице съ x свой знакъ за нађене вредности променљиваца, или га неменя. У првомъ случаю функція V за исте вредности ніє ни максимумъ ни минимумъ; у другомъ пакъ случаю бытће V максимумъ, ако разлика $\underset{x}{V} - V$ остає при оба x (и положномъ и одречномъ) одречна, а минимумъ, ако є иста разлика при оба x положна.

§ 200.

Каошто видимо ово є истраживанѣ подобно показаномъ у I. кньизи. Сва є разлика само у томе, што овде вопросну функцію V по x пременюємо, а тамо дифеAfter the opening fragment, renціалимо, и што смо іой овде дали сасвимъ неограниченый смисао. Извести пакъ изъ предходећегъ сматраня начинъ, по комъ валя практично поступати при истраживаню максимума и минимума, излишно є по томе, што се по себи увиђа. Приметит'ћемо само іошъ, да при томъ истраживаню найтежій посао задає далѣ поступанѣ са єдначиномъ $\partial V = 0$ ради нѣнога решеня; збогъ чега, колико да бы ясніє увидили ту тешкоћу, толико и да бы се научили укланяти ю, сматрат'ћемо іошъ слѣдуюће особите случаєве.

§ 201.

1.) Ако є $V = f(u)$ и притомъ $u = r + x$, онда є

$$\partial V = f_1(u) \,.\, \partial u = f_1(u),$$

єрь є $du_x = d(r + x)_x = 1$, и зато $\partial u = 1$, а ${}^2\partial u = {}^3\partial u = .. = 0$.

У томъ дакле случаю прелази $\partial V = 0$ у $V_1 = 0$, а то є задатакъ §§ 62. — 64., кога се решенѣ, каошто видимо, съ овимъ овде подпуно слаже.

2.) Ако є $V = f(u, v)$, онда є

$$\partial V = (V_1)_u \,.\, \partial u + (V_1)_v \,.\, \partial v.$$

Садъ ако су притомъ u и v међусобно независни броєви, онда и ∂u и ∂v єданъ одъ другогъ независе, и єдначина $\partial V = 0$ дели се на друге две

$$(V_1)_u = 0 \quad \text{и} \quad (V_1)_v = 0$$

по томе, што постои како при $\partial u = 0$ и свакомъ ∂v, тако и при $\partial v = 0$ и свакомъ ∂u.

И тако се ово подпуно слаже съ онимъ, што смо дознали на другій начинъ у § 70.

Зависе ли пакъ броеви u и v єданъ одъ другога посредомъ єдначине $\varphi(u, v) = 0$, онда є и $\partial\varphi(u. v) = 0$, т. є. и

$$\varphi_1(u, v)_u . du + \varphi_1(u, v)_v . dv = 0,$$

коя єдначина садржи зависность између du и dv.

Истреблюю́ћи dv изъ ове єдначине и оне $\partial V = (V_1)_u . du + (V_1)_v . dv = 0$, добыямо нову

$$(V_1)_u . \varphi_1(u, v)_v - (V_1)_v . \varphi_1(u, v)_u = 0,$$

коя у спрези са $\varphi(u, v) = 0$ дає оне вредности одъ u и v, по коима у вопросномъ случаю функція V може быти максимумъ или минимумъ. Дали є пакъ V съ нњима доиста єдно или друго, и коє? показатће своимъ знакомъ разлика $\underset{x}{V} - V$, чимъ се у нњой поставе нађене спреге одъ u и v. —

Међусобна зависность броєва u и v може быти дата такођеръ и таковомъ єдначиномъ $\varphi(u, v) = \alpha$, коя показує, да є $\varphi(u, v)$ при свима спрегама броєва u и v равна истомъ некомъ **сталномъ** брою α.

У томъ є случаю $\underset{x}{\varphi}(u, v) - \varphi(u, v) = 0$, и зато іошъ єднако $\partial\varphi(u, v) . x + \ldots = 0$, т. є. $\partial\varphi(u, v) = 0$ каогодъ у првомъ случаю овога §а; збогъ чега оно цепанѣ єдначине $\partial V = 0$ на $(V_1)_u = 0$ и $(V_1)_v = 0$ постои каогодъ тамо.

§ 202.

Ако є $V = f(u, v, z)$ и притомъ $z = \dfrac{dv}{du}$; и ако $\underset{x}{V}$ постає одтудъ изменњиванѣмъ броя v съ подпуномъ нѣговомъ пременомъ по x, т. є. редомъ $v + \partial v . x + {}^2\partial v . \dfrac{x^2}{2!} + \ldots$, збогъ чега тадъ и место количника $\dfrac{dv}{du} = (v_1)_u$ морамо узети редъ $(v_1)_u + \dfrac{d . \partial v}{du} . x + \dfrac{{}^2d . \partial v}{d^2u} . \dfrac{x^2}{2!} + \ldots$: онда имамо

$$\partial V = (V_1)_v . \partial v + (V_1)_z . \frac{d\partial v}{du} \quad \ldots\ldots (1.$$

Садъ ако ће єдначина $\partial V = 0$ да постои за сваку произвольну функцію одъ u, коя бы се узела место ∂v, онда цепа се $\partial V = 0$ опетъ на друге две єдначине

$$2.)\quad (V_1)_{v} = 0 \quad \text{и} \quad (V_1)_{z} = 0$$

по томе, што ∂v може садржати какавъ сталный број, коіи се у $\frac{d\,.\,\partial v}{du}$ више неће находити, и што дакле вредности одъ ∂v и $\frac{d\,.\,\partial v}{du}$ остаю међу собомъ независне тако, да поредъ произвольногъ ∂v постои $\frac{d\,.\,\partial v}{du} = 0$, и узъ произвольногъ $\frac{d\,.\,\partial v}{du}$ опетъ $\partial v = 0$.

Ако ће пакъ єдначина $\partial V = 0$ да непостои при свакомъ ∂v, т. є. да функція V небуде максимумъ или минимумъ спрамъ сваке V_x, него само спрамъ оне, коя за сваку другу вредность одъ u постає друга, но така, да є

или само $\partial v = 0$, а не и $\frac{d\,.\,\partial v}{du} = 0$,

или само $\frac{d\,.\,\partial v}{dv} = 0$, а не и $\partial v = 0$:

онда єдначина $\partial V = 0$ прелази у првомъ случаю у

$$3.)\quad (V_1)_{z} = 0,$$

а у другомъ случаю у

$$4.)\quad (V_1)_{v} = 0.$$

§ 203.

Ако є $V = \int_a^b U du$, и притомъ U нека одъ оны у предходећемъ §у изброєны функція; и єсу ли далѣ обližнѣ вредности одъ V_1, спрамъ коихъ оно треба да буде максимумъ или минимумъ, оваковe:

$$V_x = \int_a^b U_x \,.\, du,$$

гди $\underset{x}{U}$ представля оно што одъ функціє U быва, ако у ньой место v. z, . . . узмемо ньиове премене по x, т. є. $v + \partial v \,.\, x + {}^{2}\partial v \,.\, \frac{x^2}{2!} + \ldots$, и т. д., — онда налазимо

$$\partial V = \int_a^b \partial U \,.\, du$$

одъ прилике на онакавъ начинъ као у примеру § 196.

За болѣ обяснен́ѣ овога и што ћемо іошъ рећи, задржимо функцію U као у споменутомъ примеру, т. є. нека є функція $U = f(u, v, w, r, s. t)$, а притомъ $v = \varphi(u)$, $w = \psi(u)$, $r = \frac{dv}{du}$, $s = \frac{{}^{2}dv}{d^2u}$, $t = \frac{dv}{du}$. Быт'ће

$$\partial V = \int_a^b \Big[(U_1)_v \,.\, \partial v + (U_1)_w \,.\, \partial w + (U_1)_r \cdot \Big(\frac{d\partial v}{du}\Big) + (U_1)_s \cdot \Big(\frac{{}^{2}d \,.\, \partial v}{d^2u}\Big)$$

$$+ (U_1)_t \cdot \Big(\frac{d\partial w}{du}\Big)\Big] \,.\, du.$$

Да бы могли єдначину $\partial V = o$ далѣ израђивати и разрешити, морамо найпре нѣнъ интегралъ почастнимъ интеграленѣмъ дотле преображавати, докъ неостану подъ интегралнимъ знакомъ само чланови съ простимъ ∂v, ∂w, . . . , а ніеданъ више са $\frac{d \,.\, \partial v}{du}$, $\frac{{}^{2}d\partial v}{d^2u}$, $\frac{d\partial w}{du}$, ...

Тако поступаюћи добыямо

$$\partial V = \Big\{\Big[(U_1)_r - \frac{d(U_1)_s}{du}\Big] \,.\, \partial v + (U_1)_s \cdot \Big(\frac{d\partial v}{du}\Big) + (U_1)_t \cdot \Big(\frac{d\partial w}{du}\Big)\Big\}_a^b$$

$$+ \int_a^b \Big\{\Big[(U_1)_v - \frac{d(U_1)_r}{du} + \frac{{}^{2}d(U_1)_s}{d^2u}\Big] \cdot \partial v$$

$$+ \Big[(U_1)_w - \frac{d(U_1)_t}{du}\Big] \partial w\Big\} \,du,$$

и текъ сада можемо рећи, да єдначина $\partial V = 0$, коя за максимумъ и минимумъ треба да постои, уобште неможе постояти, ако ніє свакій одъ нѣна два члана за себе $= 0$, по томе, што првый чланъ несадржи више *u* (єръ се место *u* већъ узело *a* и *b*), а у другомъ члану тога броя іошъ има.

Єдначина $\partial V = 0$ дакле дели се на друге две, одъ коихъ се свака опетъ, по особитимъ околностима свакогъ особитогъ задатка, наново цепа и далѣ.

Одъ другогъ члана добыяю се диференціалне єдначине, коє се іошъ мораю интегралити. Те се єдначине зову **обште єдначине** максимума и минимума.

Єдначине пакъ одъ првогъ члана зову се **граничне єдначине**, и служе узъ друге услове задатка за изстраживанѣ сталны броєва, кои се увлаче интеграленѣмъ оны прві.

§ 204.

За болѣ увиђанѣ овы потврђеня о єдначини $\partial V = 0$ у вопросномъ случаю, узмимо єданъ примеръ. *)

Нека є функція

$$V = \int_a^b U du = \int_a^b du \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2} = \int_a^b du \cdot \sqrt{1 + (v_1)_u^2}\,.$$

Ту є $U = \sqrt{1 + (v_1)_u^2}$, дакле $\partial U = \frac{(v_1)_u}{\sqrt{1 + (v_1)_u^2}} \cdot \left(\frac{d\partial v}{du}\right)$, и зато

$$\partial V = \int_a^b \partial U \,.\, du\,,$$

или ако почастно интегралимо по образцу $\int y dz = yz - \int z dy$, ставляюћи у истоме $y = \frac{(v_1)_u}{\sqrt{1 + (v_1)_u^2}}$ а $dz = \left(\frac{d\partial v}{du}\right) du = d\partial v$,

---

*) Примера за само истраживанѣ максимума и минимума како за предстоєћій случай, тако и за последный у § 202. и оне што ћемо іошъ споменути у слѣдуюћимъ §§ма, имат'ћемо доцніє у аналитичной геометріи.

$$\partial V = \left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}}\cdot\partial v\right]_a^b - \int_a^b y_1\cdot\partial v\cdot du$$

$$= \left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}}\cdot\partial v\right]_{u=b} - \left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}}\cdot\partial v\right]_{u=a} - \int_a^b y_1\partial v\cdot du\,;$$

при чему є $y_1 = \frac{dy}{du}$.

Єдначина одъ прва два одкривена члана дає збогъ независногъ ∂v съ $u = b$ одъ ∂v съ $u = a$ граничне єдначине

$$\left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}}\right]_{u=b} = 0 \quad \text{и} \quad \left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}}\right]_{u=a} = 0,$$

а обе ове

$$(v_1)_u = 0.$$

Другій пакъ членъ дає обшту єдначину максимума и минимума

$$d\left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}}\right] = 0,$$ дакле ако интегралимо

$$\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}} =$$ сталномъ некомъ брою c.

Како пакъ овай количникъ неможе быти иначе сталанъ, него само ако му є и бройтель и именитель сталанъ, то слѣдує

$$(v_1)_u = \frac{dv}{du} = C,$$ дакле

$$dv = C du,$$

а ако ову єдначину интегралимо

$$v = Cu + \mathfrak{C}.$$

Но преће наћосмо да є $(v_1)_u = 0$. Слѣдує дакле $C = 0$, и зато

$$v = \mathfrak{C}.$$

§ 205.

Ако є пакъ функція V као у § 203., т. є. $V=\int_a^b Udu$, али притомъ нѣне оближнѣ вредности, спрамъ коихъ она треба да буде максимумъ или минимумъ, оваkове

$$V_x=\int_{a_x}^{b_x} U_x du\,,$$

онда по приметби § 182. састои се ∂V осимъ чланова каошто смо ій видили у горе споменутомъ §у, іошъ и изъ чланова

$$U_{u=b}\,.\,\partial b - U_{u=a}\,.\,\partial a.$$

Пошто пакъ ови чланови принадлеже онимъ одкривенима, т. є. онима изванъ интегралнога знака; то остає обшта єдначина одъ $\partial V=0$ сасвимъ онако као у § 203., напротивъ гранична єдначина садржаће іошъ чланове $U_{u=b}\,.\,\partial b - U_{u=a}\,.\,\partial a$.

§ 206.

Найпосле ако функція U садржи u, v и w, и іошъ диференціалны количника одъ v и w по u, произвольно до кога реда, па є опетъ

$$V=\int_a^b Udu, \quad а \quad V_x=\int_a^b U_x du\,,$$

и притомъ v и w єдно одъ другога зависно по диференціалной єдначини

$$W=\varphi\,[u, v, w, (v_1)_u, (w_1)_u; (v_2)_u, (w_2)_u, \ldots]=0:$$

онда є пре свега

$$1.)\quad \partial V = \int_a^b \Big[(U_1)_v \cdot \partial v + (U_1)_w \cdot \partial w + (U_1)_{v_1} \cdot \Big(\frac{d\partial v}{du}\Big)$$

$$+ (U_1)_{w_1} \cdot \Big(\frac{d\partial w}{du}\Big) + (U_1)_{v_1} \cdot \Big(\frac{{}^2d\partial v}{d^2u}\Big)$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \Big] \cdot du +$$ алгебрайскій сбиръ ослобођены одъ интегралногъ знака чланова.

И садъ треба изъ єдначине $\partial V = 0$, пошто збогъ $W = 0$ w одъ v (или обратно), па дакле и ∂w одъ ∂v зависи, да истребимо ∂w, да бы добыли ону єдначину, коя се текъ, поводомъ произвольнога ∂v на друге цепа.

У име тога имамо изъ $W = 0$ єдначину

$$(W_1)_u \cdot \partial v + (W_1)_w \cdot \partial w + (W_1)_{v_1} \cdot \Big(\frac{d\partial v}{du}\Big) + \cdot \cdot \cdot \cdot = 0,$$

морамо пакъ за удействованѣ истребльиваня употребити такозваный **начинъ мложителя**, коій ніє никакавъ другій но познатый изъ алгебре Безуовъ начинъ, съ изменама коє ћемо одма видити.

Мложимо найпре єдначину

$$2.)\quad W = 0$$

съ некомъ іошъ непознатомъ функціомъ r одъ u, додаємо rW, коє є $= 0$, функціи U, те образуємо $U + rW$, и поставлямо после овай сбиръ место U у изрразу за ∂V тако да имамо

$$\partial V = \int_a^b (\partial U + r . \partial W) . du.$$

Затимъ определюємо функцію r тако, да у ∂V сачинитель одъ ∂w буде $= 0$, дакле изъ єдначине

$$3.)\quad \frac{d(U + rW)}{dw} - \frac{d\Big[\frac{d(U + rW)}{d w_1}\Big]}{du} + \cdot \cdot \cdot \cdot = 0.$$

Ова є єдначина у обзиру на r диференціална, коя, кадъ бы v и w были познати броєви, могла бы се интегралити и дала бы тако r поредъ некогъ броя произвольны сталника'.

Ове сталнике можемо себи представити тако определѣне, да и одъ одкривены чланова у ∂V сви они одпадаю, кои су снабдевени са $\underset{a}{\partial w}$, $\underset{b}{\partial w}$, $\frac{d\partial w}{\underset{a}{du}}$, $\frac{d\partial w}{\underset{b}{du}}$, ..., дакле тако, да сачинителѣ тій чланова ставимо $= 0$, и те єдначине употребимо за определьиванѣ функціє r.

Пошто се пакъ тада у ∂V само іошъ произвольно ∂v налази, то ћe се изъ єдначине $\partial V = 0$ добыти поредъ граничны єдначина (како испадну) као општа єдначина

$$4)\quad \frac{d\,(U + rW)}{dv} - \frac{d\left[\frac{d\,(U + sW)}{d\,v_1}\right.}{du} + \ldots\ldots = 0,$$

и єдначине 2., 3. и 4. єсу три диференціалне єдначине по v, w и r, коє интегралѣне даю ове функціє одъ u заедно съ увлачећимъ се сталницима.

Найпосле ове сталнике налазимо изъ свію осталы єдначина', пошто се у ньима узму место u границе b и a.

§ 207.

Овай описаный начинъ може се лако распрострети и на сложеніє случаєве, гди V осимъ v и w садржи іошъ и друге променльивце y, z, ..., и гди су поредъ $W = 0$ задате іошъ и друге условне єдначине $X = 0$, $Y = 0$, ... У такомъ случаю треба у ∂V узети $U + rW + sX + tY + \ldots$ место U.

Истый начинъ употребит'ћемо найпосле и у случаю, гди обликнѣ функціє одъ V треба да буду $\underset{x}{V} = \int_{\underset{x}{a}}^{\underset{x}{b}} \underset{x}{U}\,du$

тако, да границе a и b нису задате, него се мораю изнаћи такове, да V постане максимумъ или минимумъ.

Завршуюћи овай предметъ (и съ њимъ целу ову II. часть) примѣћавамо іошъ, да се єви они задатци зову **изопериметрійски**, гдигодъ V ніє основна функція него некій интегралъ, или є такова функція, у коіой се появлює єданъ или више интеграла.

Погрешке.

На стр.	у врсти	треба	место
7.	5. одозго	dx	ax
12.	7. одоздо	$sin\,z$	$sin\,.\,z$
14.	2. одозго	l^2x	lx^2
„	5. „	у именителю додати чинителя x^3l^2x	
15.	2. „	III'''	III''
„	3. „	$X^{x^2}.$	$X^{x^2}..$
16.	5. одоздо	у броителю $\pm\sqrt{x^2-1}$	$\mp\sqrt{x^2-1}$
17.	4. „	$\sqrt{1-x^2}+x$	$\sqrt{1-x^2}+1$
18.	2. одозго	$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}$
20.	3. „	$-l^2a$	$-la$
„	10. „	$a^{\sin v.}$	$a^{\sin x}$
21.	1. „	у именнтелю sin^2	sin
„	6. одоздо	у броителю додати чинителя la	
24.	16. „	на краю нетреба точка	
27.	2. „	пременљивъ	сталанъ
23.	8. „	$\frac{{}^3dx}{d^3x}$	$\frac{{}^3dx}{d^2x}$
29.	7. одозго	$d\,\frac{\cos lx}{x}\,.\,dx=$	$d\,\frac{\cos lx}{x}=$
„	3. „	$\frac{\cos lx}{x}\,.\,{}^2dx$	$\frac{\cos lx}{x}\,.\,dx$
31.	11. „	$a^x.\,l^2a\,.\,d^2x$	$a^x.\,la^2.\,d^2x$
33.	6. „	$(1-x^2)^2$	$(1-x)^2$
„	4. и 5. одоздо	$x^2.\,l^2x$	$x^2.\,lx^2$
37.	3. одозго	збогъ	заогъ
38.	3. „	$\frac{1.3}{2^3}$	$\frac{1.3}{2^2}$
„	6. „	$\frac{1}{2}(x-1)$ и $+$	$\frac{1}{2}(x-1)^2$ и $\perp$
„	10. „	деловнимъ, ирраціоналнимъ и	деловнимъ и

На стр.	у врсти	треба	место
39.	5. одоздо	доиста	доста
40.	3. „	$\frac{a}{x-a}$	$\frac{x}{x-a}$
41.	2. одозго	$a + a\infty$	$a - a\infty$
43.	13. „	Сабирајући	Сабирајућа
44.	3. „	$6\,C_3$	$6\,C_3x$
45.	10. одоздо	$\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x}{3!}$
49.	12. одозго	a_3x^3	a^3x^3
„	16. „	у бројтелю $2\,C_2\,x$	$2Cx$
52.	16. „	на крају нетреба точка	
54.	4. „	на крају нетреба dx	
„	5. „	„ „ треба dx	
„	9. „	$dy]$	$dx]$
„	2. одоздо	Cx^cy^γ	Cx^cx^γ
56.	7. одозго	$\frac{y^3}{z}$	$\frac{y^3}{d}$
57.	7. „	§ 37.	§ 17.
„	5. одоздо	можемо	можеао
„	10. „	оба пута $f_2(x, y)_{y,x}$	$f_2(x, y)$
59.	6. одозго	φ_3	φ_1
60.	2. „	$y^2]$	y^2
„	3. „	на крају треба $\times$	.
„	4. „	$\times xy^2$	xy
„	2.—8. одоздо	нетреба о у првимъ	символима
61.	11. одозго	xy	$\frac{1}{2}\,xy$
62.	4. одоздо	$\frac{dN_x}{dx}$	$\frac{dN_x}{dr}$
„	8. „	§ 37.	§ 35.
63.	1. „	y	ly
„	11. „	количникъ	колитникъ
„	12. „	$xy^{x-1}.\,ly$	$yx^{x-1}.\,ly$
64.	7. „	$f_2(x,y,z)_{z,x}$	$f_2(x,y,z)_{y,z}$
67.	10., 11., 12., 14. и 15. одозго	$y^3 cos\,x$	$y^2 cos\,x$
„	15. одоздо	$y\,(3x -$	$y^2(3x -$
69.	6. одозго	одтудъ	дудъ
71.	3. „	чинителя $(x-a)$ доведемо	чинителя доведемо

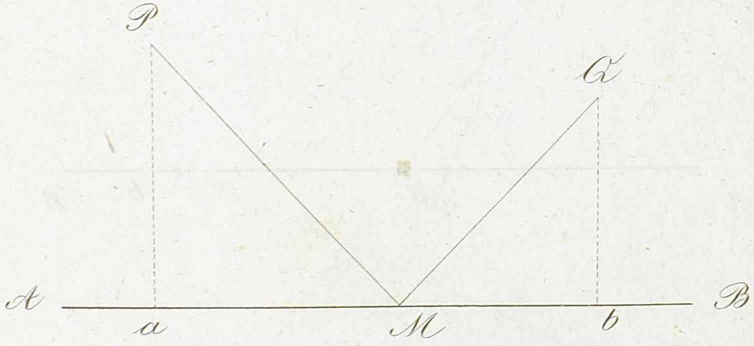
На стр.	у врсти	треба	место
71.	13. одозго	$v = ——$	v ——
72.	10. одоздо	диференціал-	сиференціал-
74.	3. одозго	$2 + 2la$	$2 + la$
75.	8. одоздо	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{0}$
76.	6. одозго	$-\cos x] + \sin x \,.\, a^x$	$-\cos x + \sin x]$
„	„ „	$2 \operatorname{cosec}^2 x$	$-2 \operatorname{cosec} x$
77.	1. одоздо	$2 + v$	$2 - v$
81.	1. одоздо	$-\cos^2(x - 1)$	$-\cos^2 x$
84.	5. „	диференціалити	диференціалитн
„	6. „	променльивогъ	претенльивогъ
89.	7. одозго	погрешанъ е иза $=$ знакъ —	
93.	10. „	обзира	обзири
96.	1. одоздо	оба x	обе
99.	11. „	$(p_1^2 + x^2)$	$(p_1^2 + x)^2$
100.	3. „	у именителю $-a$	$-2a$
101.	13. „	оба пута $\sqrt{4r^2\pi^2 - x^2}$	$\sqrt{4r^2\pi - x^2}$
102.	9. „	$\sqrt{a^4x^2 - \pi^2x^6}$	$\sqrt{a^4x^2 - \pi^2x^4}$
104.	10. одозго	непотре	непотру
„	7. одоздо	други	дврги
106.	4. и 5. одозго	положно	такођеръ одречно
„	10. „	положно	такођеръ одречно
107.	1. „	диференціални	диференціалници
113.	6. „	$x = \alpha$	$x = \infty$
„	6. одоздо	$= \frac{3}{8}$	$= -\frac{3}{8}$
„	7. „	$= \frac{3}{4}$	$= -\frac{3}{4}$
115.	3. одозго	$+\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$
„	4. „	$+\frac{5.3}{2^2}$	$-\frac{5.8}{2^2}$
„	5. „	$-\frac{5.3^2}{2}$	$-5\,.\,3$
127.	1. у приметби	$\sqrt{1 - z^2}$	$\sqrt{1 - z^3}$
129.	7. одозго	на краю]	
131.	5. „	$-\frac{2\alpha + \beta x}{x}$	$-(2\alpha + \beta x)$
„	10. одоздо	На истый начинъ	
133.	3. одозго	z^n	z^2

На стр.	у врсти	треба	место
135.	4. одозго	$\frac{2}{3(1+2x)}$	$\frac{1}{3(1+2x)}$
136.	4. „	$x-m$	$x-z$
137.	7. „	$(\alpha+\beta x)^{n-1}$	$(\alpha+\beta)^{n-1}$
139.	7. одоздо	на краю нетреба точка	
140.	1. „	z^m	z^n
„	5. „	$\int x dx\sqrt{a+bx}$	$\int x\sqrt{a+bx}$
143.	6. одозго	$-\alpha$	α
„	7. „	$-\beta$	β
„	10. „	bx	bz
145.	9. одозго	функція	функпія
„	3. у приметби	интеграле	пнтеграле
146.	14. одозго	интеграленю	интограленю
147.	9. „	$z^{\mp\frac{a}{\beta}}$	$z^{\pm\frac{a}{\beta}}$
149.	9. одоздо	спадаю ли	спадаюли
150.	1. одозго	$\frac{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}{x^2}$	$\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}$
151.	11. одоздо	$(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$	$(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$
152.	6. одозго	$x^{m+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$	$x^{m+1}.a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$
„	6. одоздо	sx^{m+1}	sx^{m-1}
154.	9. одозго	$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$(2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$
159.	5. „	$\gamma=-1,$	$\gamma=-,$
„	7. „	$l\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$	$l\ {}^{1}-\sqrt{\frac{1-x^2}{\cdot\, x}}$
160.	8. „	$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
165.	1. „	$-\gamma x^2$	$+\gamma x^2$
166.	2. „	α	a
„	4. „	$z^{\frac{q+1}{k}-1}$	$z^{\frac{m+1}{n}}$
„	5. „	$\frac{q+1}{k}$	$\frac{m+1}{k}$
167.	5. „	$\frac{dx^{n-1}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{n\gamma}$	$d.x^{n-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$
175.	6. одоздо	сталный	статный
„	7. „	произволь-	прорзволь-

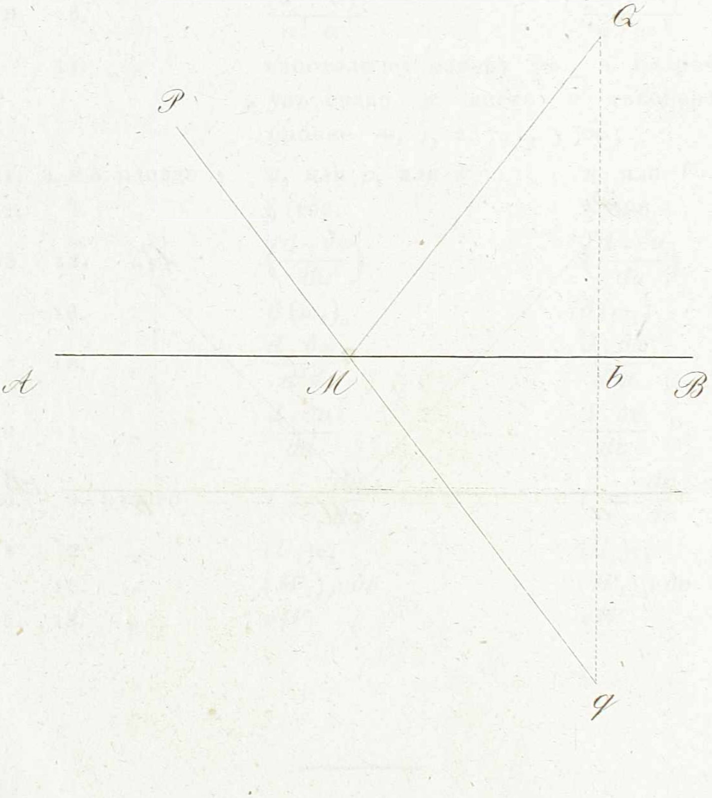
На стр.	у врети	треба	место
178.	1. „	$\frac{m-1}{m+n}$	$\frac{m-1}{m+1}$
179.	9. одозго	$\int\frac{sin^m x\,.\,dx}{cos^{n-2}x}$	$\int\frac{sin^n x\,.\,dx}{cos^{n-2}x}$
181.	7. одоздо	$m = -1$	$m = 1$
184.	3. одозго	$x\,.\,arc\,(cos$	$x\,.\,arc\,cos$
190.	3. „	$arc\,(sin = x)$	$arc\,(sin - x)$
194.	3. одоздо	5 . 1	5 1
199.	3. „	функцію	функція
201.	3. одозго	првога	првому
204.	8. „	вредность	вредноск
„	10. „	$\int_a^b f(x)\,dx =$	$\int_a^b f(x) =$
205.	9. „	$\frac{1}{na+(n-1)\omega}$	$\frac{n}{na+(n-1)\omega}$
205.	1. одоздо у нм.	$n^2a^2(a+\omega)^2$	$a^2(a+\omega)^2$
209.	9. „	$arc\,(sin = 1) =$	
210.	1. „	за	да
217.	8. „	$(n-3)\,!$	$(n-2)\,!$
219.	5. одозго	$f_n(x)_g$ и $f_n(x)_k$	$f_n(x)_k$ и $f_n(x)_k$
220.	5. „	$\int f(x)\,dx =$	$\int f(x) =$
226.	9. „	$cos\,y\,.\,sin\,x$	$cos\,y\,.\,sin\,y$
227.	2. одоздо	$d\left(\frac{du_x}{dx}\right)$	$d\left(\frac{dn_x}{dz}\right)$
„	1. „	$d\left(\frac{du_y}{dy}\right)$	$d\left(\frac{du_y}{dz}\right)$
228.	10. одозго	dz	bz
233.	14. „	Pdz	Fdx
235.	10. одоздо	$\frac{P}{Q}$ и	
237.	3. „	и десна	а десна
251.	7. одозго	последнѣ	последнч
254.	2. „	$\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2-v^2}}$
„	3. „	$v =$	$a =$
259.	2. одоздо	V_x	X_x

На стр.	у врсти	треба	место
268.	13. одозго	$\partial^2 v + m \,.\, v^{m-1} \,.\, {}^2\partial v$	$\partial^2 v\, m.v^{m-1} \,.\, {}^2\partial v$
„	14. „ на краю	${}^3\partial v$	∂v
268.	4. одоздо	$ma_0^{m-1} \,.\, a_1 \,.\, x$	$ma_0^{m} \,.\, a_1\, x$
„	4. „	$\frac{m^{2\vert-1}}{2\,!}$	$\frac{m_{2\vert-1}}{2\,!}$
270.	9. одозго	${}^2\partial V$	${}^2 V$
273.	3. одоздо	$(V_1)_u \,.\, \partial u$	$(V_1)_n \,.\, \partial u$
277.	14. „	${}^0\partial u$	${}^0\partial$
278.	8. „	$\frac{(a+\alpha)\,!}{a\,!\ \alpha\,!}$	$\frac{(a+\alpha)}{a\,!\,\alpha\,!}$
„	11. „	изостале су између ∞, и па речи: а узъ свако α место a такођеръ све броеве 0, 1, 2, ... у ∞,	
281.	4. и 5. одоздо	u, или v, или V,	u, или V
282.	4. „	§ 196.	§ 496.
283.	13. „	$\left(\frac{d \,.\, \delta v}{du}\right)$	$\left(\frac{d \,.\, \delta u}{du}\right)$
„	16. „	$\delta\,(\omega_1)_u$	$\delta\,(\omega_1)$
„	16. „	$\frac{d \,.\, \delta\omega}{d^2 u}$	$\frac{{}^2 d \,.\, \delta\omega}{d^2 u}$
289	11. „	$\frac{d \,.\, \partial v}{du}$	$\frac{d \,.\, \partial v}{dv}$
290.	9. одозго	$t = \frac{dw}{du}$	$t = \frac{dv}{du}$
294.	2. „	$(U_1)_{v_2}$	$(U_1)_{v_1}$
„	12. „	$(W_1)_v \,.\, \partial v$	$(W_1)_u \,.\, \partial v$
295.	13. „	rW	sW

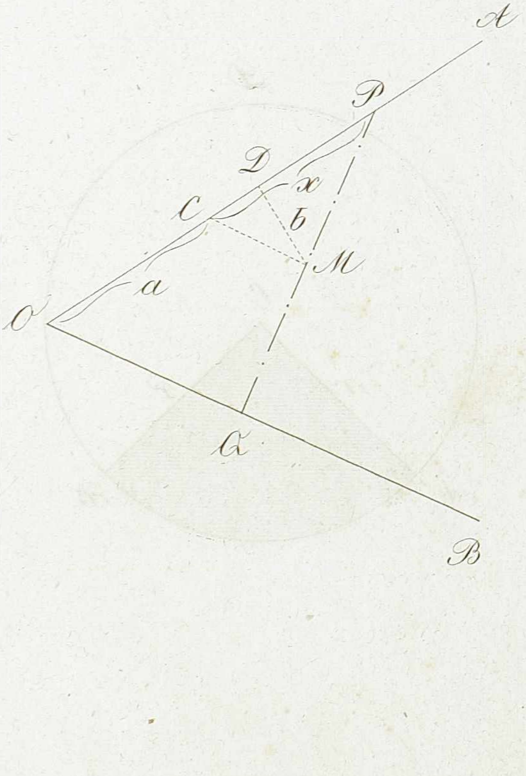
къ страни 98.



къ страни 99.



къ страни 100.



къ страни 101.