GEORGIJE HAJDIN

Prilog proučavanju tokova sa usputnom promenom proticaja

SABIRNI KANALI SA RAVNOMERNIM PRITICAJEM

— DOKTORSKA DISERTACIJA —

I

BEOGRAD, 1965.

Georgije Hajdin

Prilog proučavanju tokova sa usputnom promenom proticaja

SABIRNI KANALI SA RAVNOMERNIM PRITICAJEM

— doktorska disertacija —

Beograd, 1965.

S A D R Ž A J

Strana

Strana

Drugi deo

REŠAVANJE PRAKTIČNIH ZADATAKA IZ TEČENJA SABIRNIM KANALIMA SA RAVNOMERNIM PRITICAJEM

Strana

Uvod

[illegible] na dnu otvorenog [illegible]

[illegible]

je na jedan deo te obimne [illegible]tike - [illegible] kanale sa ravnomernim priticajem, na što ukazuje drugi deo naslova.

* * *

Osnovne karakteristike ovog rada su u sledećem:

a) [illegible]janja tokom izrade bila su usmerena da se [illegible] do rešenja koja će imati praktičnu primenu, i to ta- [illegible] da se može doći do rešenja dopadljivim postupkom, [illegible] zadatak koji nameće praksa. Praktične potrebe i [illegible]lovile su brojne radove iz problematike koja je predmet [illegible] rada. Od tih radova izvesni su navedeni u priloženom [illegible] literature, i to oni koji su poslužili da se ovim [illegible] pokuša dati daljnji skroman doprinos u proučavanju [illegible].

b) Za radove čija je svrha primena u praksi ne [illegible] se [illegible] uslovi proučavanja tako da se oni pod[illegible] [illegible] preseka, i to od pravougaonih i [illegible] prizmatični kanali nego i oni koji se nizvodno proširuju, [illegible] biti [illegible] izvedeni. Kao uslovi za praktičnu primenu uzeti su: ravnomerni priticaj u kanal, konstantan pad dna i mirno isticanje, što se ne može protumačiti kao ozbiljno ograničenje primene, jer su ti uslovi gotovo uvek i ispunjeni u praktičnim zadacima kojima je ovaj rad namenjen.

c) Hidraulički problemi tečenja kroz otvorena korita (cevi, kanale i reke) gotovo redovno se rešavaju kao linijski problemi. Kao što linijski [illegible] je da se tu radi o [illegible] – jednom dužinom [illegible], [illegible], pa se podrazumeva da su brzine [illegible] u pravcu toka, a to dalje znači da postoji hidrostatičku raspodelu pritiska po poprečnom preseku. Na taj način rešavaju se i zadaci tečenja sa promenljivim proticajem – svi radovi sa ovom praktičnom [illegible] rezultate posmatraju i tokove sa usputnom promenom proticaja kao linijske probleme. Ovo je i opravdano ako se na taj način dobiju prihvatljivi rezultati, jer [illegible] se i [illegible] tokovi ne bi rešavali kao [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] pretpostavke [illegible] je linijskih problema. Za sabirne kanale sa ravnomernim priticajem postoji niz eksperimentalnih radova i njihovi rezultati opravdavaju ovakvo rešavanje problema.

[illegible]

[illegible] kanala u takvom obliku da se [illegible]

[illegible]

[illegible] toka. U ovom radu dato je takvo [illegible]

[illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]

Spisok literatury

- prvi deo -

RAZMATRANJE OSNOVA ZA PROUČAVANJE

1.

Izvodjenje dinamičke jednačine za tokove sa usputnom promenom proticaja

1.1 Dinamička jednačina za konačnu masu

[illegible]

$$\int_V \rho\, dV\, \frac{\overrightarrow{Du}}{Dt} = \int_V \vec{f} \rho\, dV + \int_A \vec{p}_n\, dA \qquad (1-1)$$

V – [illegible]

A – [illegible] V,

ρ – [illegible]

$\vec{u}$ – [illegible]

t – [illegible]

$\overrightarrow{Du}/Dt$ – [illegible]

$\vec{f}$ – [illegible]

$\vec{n}$ – [illegible]

[illegible]

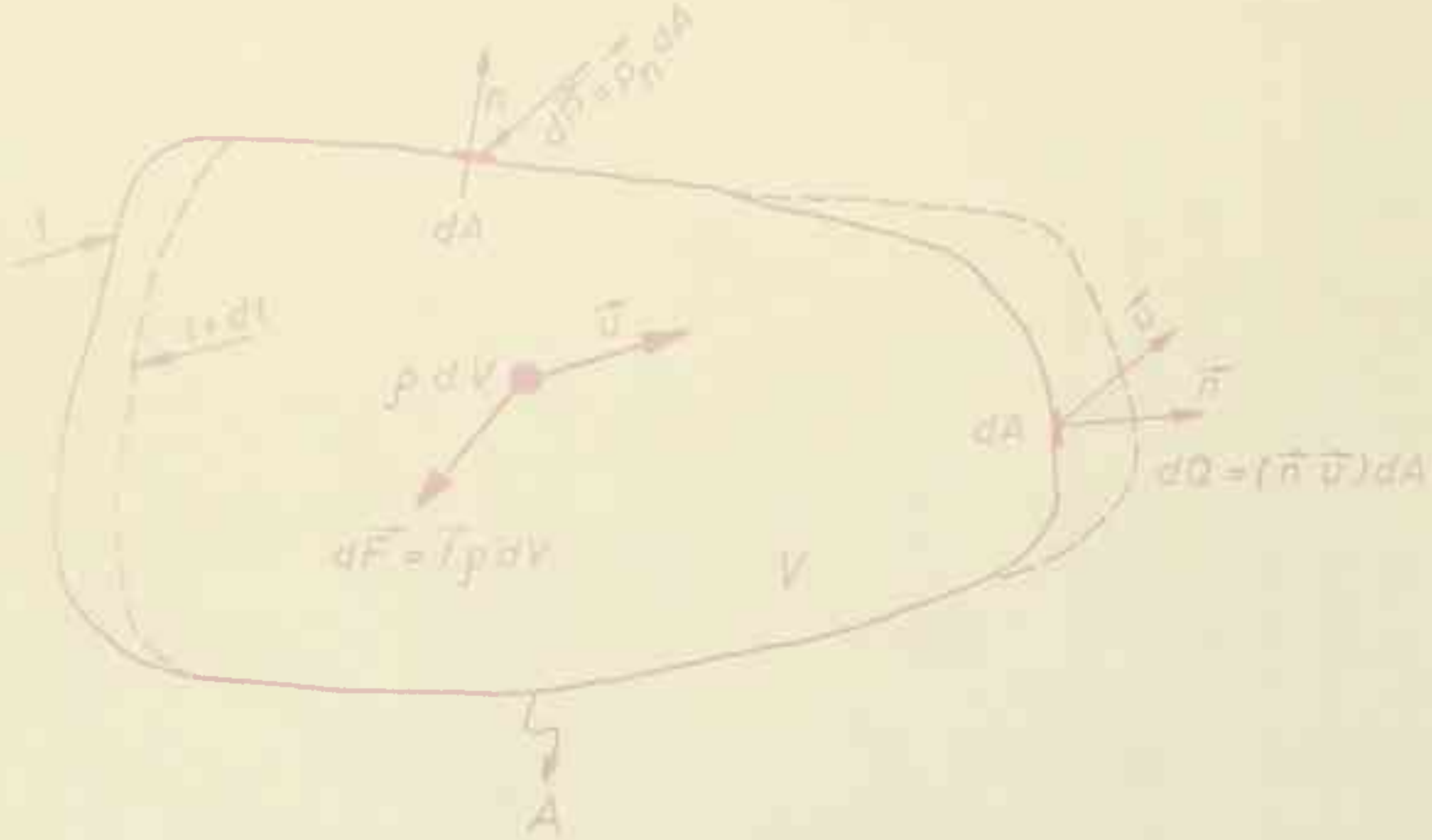
$\vec{p}_n$ – [illegible]

[illegible] $\vec{n}$, [illegible]

[illegible]

dQ – [illegible] $dQ = (\vec{n}\,\vec{u})\,dA$

[illegible]



$\vec{n}$
$d\vec{P} = \vec{p}_n\, dA$
dA
t
$t+dt$
$\vec{u}$
$\rho\, dV$
dA
$\vec{u}$
$\vec{n}$
$dQ = (\vec{n}\,\vec{u})\, dA$
$d\vec{F} = \vec{f}\rho\, dV$
V
A

Slika 1.1

Leva strana je zbir elementarnih proizvoda masa i ubrzanja, od kojih se svaki sabirak odnosi na delić fluida mase $\rho\, dV$, a $\overrightarrow{Du}/Dt$ je njegovo ubrzanje. Desna strana je zbir sila koje deluju na elementarnu masu, i to: prvi član je zapreminska, a drugi površinska. Jednačina, dakle, iskazuje Drugi Njutnov zakon. Ako se napiše:

$$\vec{I} = -\int_V \rho\, dV \,\overrightarrow{\frac{Du}{Dt}} \tag{1-2}$$

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} \rho\, dV \tag{1-3}$$

$$\vec{P} = \int_A \vec{p}_n\, dA \tag{1-4}$$

i izrazu $\vec{I}$ se da naziv "inercijalna sila", osnovna jednačina (1-1) može se svesti na "ravnotezu sila" sa kojom se dalje formalno može postupati kao sa svakom jednačinom statike, jer (1-1 do 4) dozvoljavaju da se napiše:

$$0 = \underset{\text{inercijalna sila}}{\vec{I}} + \underset{\text{zapreminska sila}}{\vec{F}} + \underset{\text{površinska sila}}{\vec{P}} \tag{1-5}$$

Leva strana u (1-1), odnosno (1-4), može se predstaviti na sledeći način:

$$-\vec{I}=\int_V \rho\, dV \frac{D\vec{u}}{Dt}=\int_V \frac{D}{Dt}\rho\vec{u}\, dV-\int_V \vec{u}\frac{D}{Dt}\rho\, dV=\frac{D}{Dt}\int_V \vec{u}\rho\, dV \qquad (1-6)$$

Ovde je najpre koriscen stav o difrenciranju proizvoda. Dalje, izostavljen je član jednak nuli, jer je to integral sabiraka od kojih je svaki ravan nuli, posto se brzina množi sa materijalnim izvodom mase delića, a ovaj je, po samoj definiciji mase, ravan nuli. Na kraju, u preostalom članu, zamenjen je redosled diferenciranja i integrisanja.

Sada će se razmotriti prethodni izraz za ustaljeno tečenje kada unutar mase nema promena, jer jedan delić mase ρdV sa brzinom $\vec{u}$ uvek zamenjuje drugi iste mase i iste brzine. Promene nastaju samo uz graničnu površinu gde masa zauzima, odnosno napušta izvesne elementarne zapremine. Može se napisati da je za ustaljeno tečenje:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \vec{u}\rho\, dV=\int_Q \vec{u}\rho\, dQ=\int_A \vec{u}\rho\,(\vec{n}\,\vec{u})\, dA \qquad (1-7)$$

jer se umesto priraštaja integrala po zapremini, a u jedinici vremena (prvi izraz) može preći na integrisanje po proticaju, a potom i na integrisanje po graničnoj površini. Lako se uvidja da sklarani proizvod $(\vec{n}\,\vec{u})$ ima po-

[illegible]

a t[illegible] masa dobija nove elementarne proizvode. [illegible]

[illegible] utiče [illegible] $(\vec{n}\,\vec{u})$ negativ[illegible]

[illegible] $\vec{n}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] (1-7) [illegible]

jer je za takve uslove i izvedena. Ako je tečenje neu[illegible] [illegible] se samo lokalna promena integrala (parci[illegible] [illegible]), pa se, [illegible]

$$-\vec{I} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \vec{u}\rho\, dV + \int_A \vec{u}\rho\,(\vec{n}\,\vec{u})\, dA$$

[illegible]

[illegible] konačnu masu:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \vec{u}\rho\, dV - \int_A \vec{u}\rho(\vec{n}\,\vec{u})\, dA + \int_V \vec{f}\rho\, dV + \int_A \vec{p}_n\, dA = 0 \qquad (1-9)$$

1.2 Uslovi za uproštavanje prethodne jednačine

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, \vec{u}\, dV = 0 \qquad (1-10)$$

[illegible]

$$\rho = const \qquad (1-11)$$

$$\vec{f} = \vec{g} = const \qquad (1-12)$$

$\vec{g}$ = [illegible]

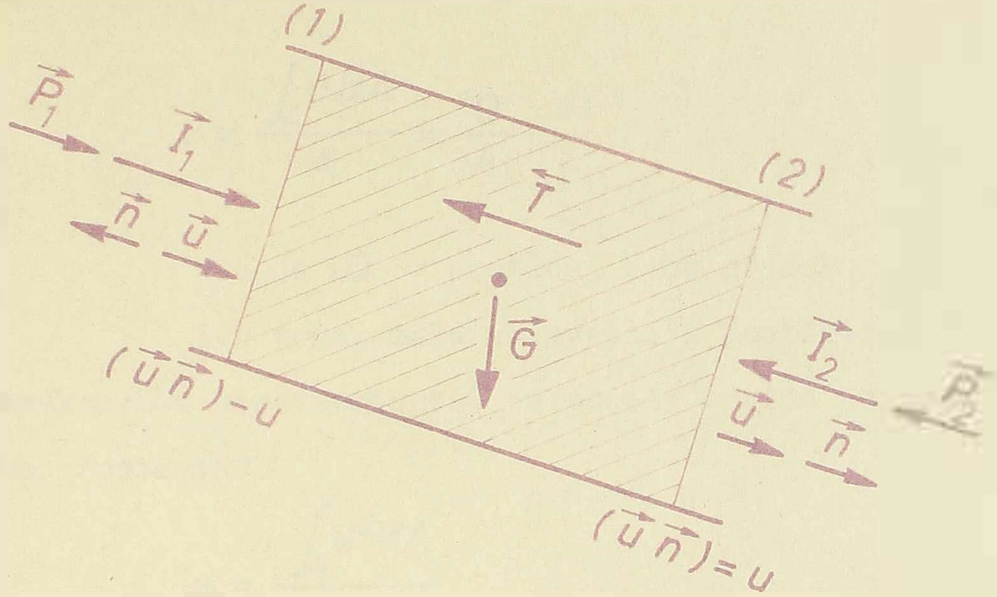
Ovi uslovi, koji su posve opravdani za rešavanje problematike opisane u uvodnim izlaganjima, omogućavaju da se jednačina (1-9) napiše znatno prostije:

$$-\rho\int_A \vec{u}(\vec{n}\,\vec{u})\,dA + \rho\vec{g}V + \int_A \vec{p}_n\,dA = 0 \qquad (1-13)$$

* * *

Daljnje uproštavanje problematike može se postići ako se problem posmatra kao linijski, a prema objašnjenju u uvodnim razmatranjima ovo znači da problema karakteriše pronošenje fluida u jasno odredjenom pravcu - duž struje ili toka. Normalno na ovaj pravac mogu se položiti poprečni preseci toka, pa se pretpostavlja da su brzine normalno usmerene na poprečne preseke, što opet ima za posledicu hidrostatičku raspodelu pritiska po poprečnom preseku.

Na sl. 1-2 prikazan je jedan tok i izdvojena masa fluida izmedju dva poprečna preseka, pa će se odrediti sile na tako izdvojenu masu.



Slika 1.2

Inercijalna sila razdvaja se na dve komponente: $\vec{I}_1$ i $\vec{I}_2$. Za $\vec{I}_1$ može se, prema (1-8), uz uslov ustaljenog tečenja, napisati:

$$\vec{I}_1 = -\rho \int_{A_1} \vec{u}(\vec{n}\,\vec{u})\,dA = \rho\,\vec{u} \int_{A_1} u\,dA$$

Prema tome, sila deluje pravcem i smerom brzine tj. normalno na poprečni presek, a ka masi. Sa utvrdjenim pravcem i smerom mogu se izostaviti vektorske oznake, pa se može napisati:

$$I_1 = \rho \int_{A_1} u_1^2\,dA \qquad (1-14)$$

Uvešće se srednja brzina za presek, označavaće se oznakom V , kao:

$$v = \frac{\int_A u\,dA}{A} = \frac{Q}{A}$$

gde je Q = proticaj kroz presek.

Sem toga, može se uvesti i koeficijent koji karakteriše neravnomernost raspodele brzine po poprečnom preseku:

$$\beta = \frac{\int_A u^2 dA}{v^2 A} \qquad (1-15)$$

Sada se, umesto (1-14), može napisati:

$$I_1 = \beta_1 \rho\, v^2 A = \beta_1 \rho\, Q_1 v_1$$

Kada se sprovede ista analiza za nizvodni presek, dobija se druga komponenta inercijalne sile:

$$I_2 = \beta_2 \rho\, Q_2 v_2$$

koja deluje uzvodnim smerom (opet ka masi), jer je sada $(\vec{n}\,\vec{u}) = \pi$.

O neravnomernosti raspodele brzine po preseku treba voditi računa samo kada je ta činjenica izrazita i kada utiče na praktične rezultate. Za sabirne kanale, kod kojih voda u njih preliva [illegible] sa boka, obično se uzima $\beta = 1$ tj. brzine u podužnom [illegible], a u istom poprečnom preseku, malo se razlikuju. Bočno slivanje prouzrokuje vrtloge sa spiralnim kret[illegible] postiže ravnomernost oticanja nizt kanal. O [illegible] biti još reći u poglavlju 7. Medjutim, kada se u kanal vo[illegible] sliva i sa boka i sa čela na uzvodnom kraju, onda baš ovo čeono slivanje, [illegible]reno nizvodno kanalom, utiče da se na izvesnoj dužini kanala oseća znatna neravnomernost u raspodeli brzina po poprečnom preseku. Od radova iz te problematike pominje se, primera radi, rad čiji [illegible] autori Farney i Markus (lit. 4), gde se empirijskim obrascima za vrednost koeficijenta rešava problem. U takvu problematiku u ovom radu se neće dalje ulaziti, ona će se, u smislu datog naslova, odnositi na ravnomeran proticaj u kanal, odnosno na bočno slivanje u kanal. Iz tog razloga uzimaće se

$$\beta = 1 \tag{1-16}$$

pa će se, umesto datih jednačina za I_1 i I_2 komponente inercijalne sile odredjivati prema

$$I = \rho \, Q \, v \tag{1-17}$$

[illegible]

$$P_1 = p_{o1} \cdot A_1$$

$$P_2 = p_{o2} \cdot A_2$$

[illegible]

$$P = p_o \cdot A \qquad (1-18)$$

[illegible] p_{o1}, p_{o2} i p_o [illegible]

[illegible]

$$Z + \frac{p}{\gamma} = Z_o + \frac{p_o}{\gamma_o} = \Pi \qquad (1-19)$$

gde je Z_0 položajna kota proizvoljne tačke, tj. visinska razlika od tačke do horizontalne ravni za koju je $Z = 0$. Naime, Z je vertikalna osovina sa pozitivnim smerom na gore. U tački odredjenoj sa Z vlada pritisak p. Veličine sa indeksom "o" odnose se na težište.

Oznaka Π predstavlja pijezometarsku kotu, γ – je specifična težina. Nije beskorisno naglasiti da se odnosi na poprečni presek.

Na označenu masu na sl. 1-2 deluju još gravitacioska sila (težina) i sila kojom omotač struje (granična površina izmedju poprečnih preseka) deluje na tečnost, označene G i T.

1.3. Jednačina za tokove sa usputnim povećanjem pro[illegible]

[illegible]

A = [illegible]

Q = [illegible]

v = [illegible] $v = Q/A$

W = [illegible]

W_0 = [illegible] W , [illegible]

= [illegible]

Z_0 = [illegible]

P_0 = [illegible]

Π = [illegible]

vezane su za [illegible] [illegible]

[illegible]

Slika 13

no [illegible]nje funkcije su isključivo od

L = položaj preseka, meren po osovini toka

Navedena konstatacija omogućava da se uvek pišu totalni priraštaji, slično za elementarni priraštaj dL presek se poveća za dA, proticaj za dQ itd.

Jednačina kontinuiteta odmah se iskoristi, jer se piše proticaj dQ, a proticaji pre, odnosno posle njegovog primanja su Q i $Q+dQ$.

Na slici 1-3 upisane su sve sile koje deluju na prikazani elementarni deo toka, a u smeru tečenja. To su:

a) Komponenta sile težine

$$-\rho g\left(A+\frac{1}{2}A\right)dZ_o \tag{1-20}$$

b/ Sile pritiska, prema (1-13)

Zbir sile pritiska na uzvodni presek i komponente sile pritiska na omotač toka izmedju preseka je:

$$p_o\,(A+dA) \tag{1-21}$$

Ovo je napisano na osnovu sledeće prihvatljive pretpostavke: Pošto se pritisak u težištu p_o ne menja mnogo kroz rastojanje dL, za delovanje pritiska preko omotača toka može se uzeti stanje na uzvodnom preseku.

$$dZ + \frac{dp}{\gamma} + \frac{1}{gA}\, d(Qv) - \frac{1}{gA} W_1\, dQ + \frac{\tau_0 O}{A}\, dL = 0$$

$R = A/O$

$$d\left(h + \frac{v^2}{2g}\right) + \frac{1}{gA}(v - W_1)\, dQ + \frac{\tau_0}{\gamma R}\, dL = 0$$

* * *

To je jednadžba koja se dobija kada se poznati oblik Bernoullijeve jednadžbe (za strujanje idealnog fluida) prenosi na strujnu cijev i tome doda i utjecaj trenja. Dakle, predstavlja ona u jedinici izražena ono s praktičnim mjerama Bernoullijevom formulom.

Takav rezultat je jedino moguć, jer se Bernoullijeva jednadžba dobiva izvodi iz dinamičke jednadžbe za elementarnu masu, koja se potom integrira po strujnici, i potom prelazi na struju. Dakle je naša dinamička jednadžba za konačnu masu po toku svedena na linijski problem. Jednadžba za elementarnu i za konačnu masu su izražavanje istog osnovnog principa, Newtonovog zakona. Zato je namjerno uzet naziv "dinamička jednadžba za konačnu masu", a izbjegavali se se nazivi "stav o promjeni količine kretanja" ili "o impulsu", jer se bi time ova dva varijante istog Newtonovog zakona podvrgli raznim imenima, kojih bi naglasili da se radi o primjeni istog stvari i da se samo jednom oko piše u diferencijalnom, a drugi put u konačnom obliku, a kontinuitet je jedan i drugi stvari na koje treba za praktične sprovode.

Jednadžba (1-1), kao što se vidi može se uzeti za početak za tokove korištenja dinamičke jednadžbe, naročito, kada se radi o naglašenoj promjeni protjecanja, zato da [illegible] od [illegible], jer se [illegible] tako [illegible] do [illegible] načina (1-24).

* * *

Jednačina (1-23) može se formalno shvatiti [illegible] Bernulijeva, ali tako da se član koji unosi usp[illegible] promenu proticaja shvati kao dodatna potrebna ener[illegible] da se proticaj uključi u primarni tok. Kada je taj čl[illegible] veći od člana koji donosi trenje, može se čla[illegible] trenja zanemariti. Tako se problematika svodi na [illegible] fluid, što je i opravdano, jer se proces odvi[illegible] [illegible] [illegible]lnih uticaja koji[illegible] [illegible] trenja. Ako je ovaj rad [illegible] [illegible] [illegible] slučajeve gde je priticaj intenzivan, navedena pretpostavka je na mestu. U praksi se najčešće tako rešava problematika i dobijaju se zadovoljavajući rezultati. Većina radova, u priloženom spisku literature usvaja takodje navedenu pretpostavku, dok samo neki autori uvode razmatranje i trenje, ali korekcije usled toga ispa[illegible] vrlo male, upravo znatno manje od svih onih odstupanja izmedju uzetih pretpostavki i stvarnog stanja stvari, [illegible] [illegible]lični zadatak neminovno unosi. [illegible] nje trenja zaista ima opravdanja i rad Liggetta (lit. 13

[illegible]

* * *

[illegible]

[illegible]

$$W_v > v$$

[illegible]

[illegible]

$$W_v < v$$

[illegible]

$$W_v < 0$$

[illegible]

$$W_v = v \qquad (1-29)$$

[illegible] dQ [illegible]

[illegible]

$$W_y = 0$$

[illegible]

$$d\left(\Pi + \frac{v^2}{2g}\right) + \frac{v}{gA}\, dQ = 0$$

[illegible]

1.4 Jednačina za tokove sa usputnim smanjenjem proticaja

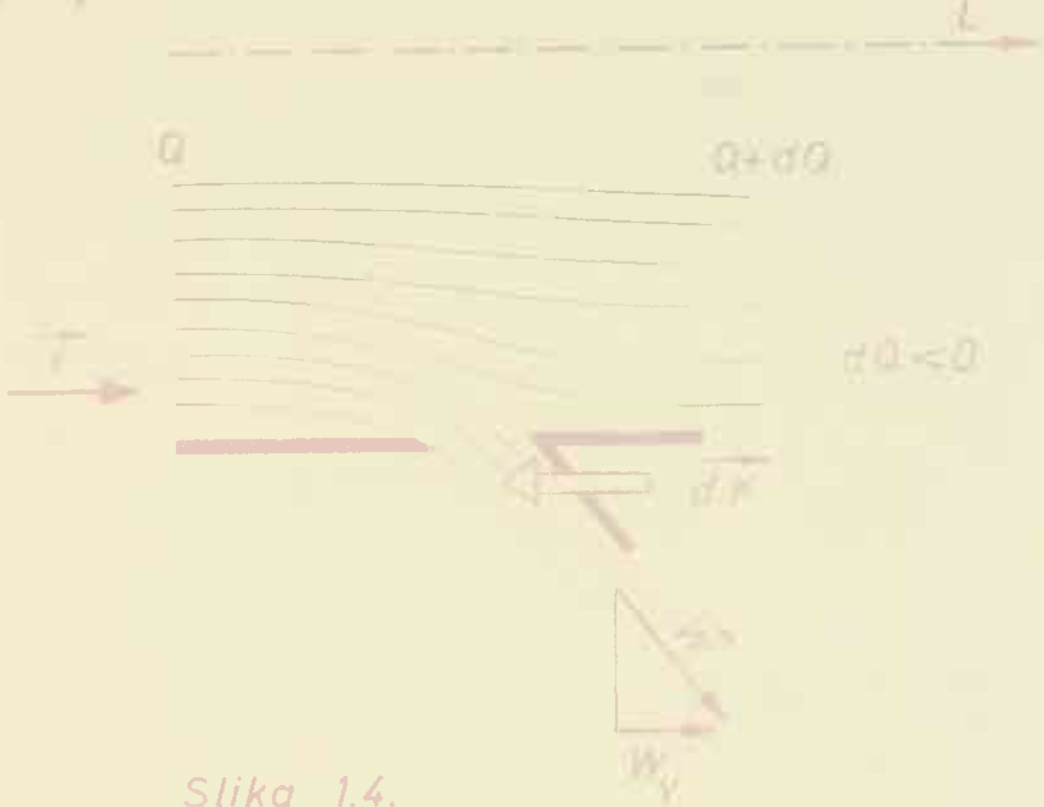
[illegible] $-dQ$ [illegible] $-dQ > 0$ [illegible]

[illegible]

$$d\left(\Pi + \frac{v^2}{2g}\right) + \frac{\tau}{\gamma R}\, dL = 0$$

[illegible]

ρW_y .



Slika 1.4.

[illegible] dK [illegible]

[illegible]

$$dK = \rho\,(v - W_y)(-dQ)$$

[illegible] $\rho(-dQ)$ [illegible]

[illegible] od v na W_y , a dK [illegible]

[illegible]

[illegible] $-dK$ [illegible]

$$-\rho\, Q\, dv = -\gamma A\, d\left(\frac{v^2}{2g}\right) \qquad (1\text{-}34)$$

[illegible] $-A\gamma$ [illegible] $d\left(\frac{v^2}{2g}\right)$

[illegible]

[illegible] ri~no položena otvora [illegible]

2.

Neke napomene o primeni dimenzionalne analize u hidrauličkoj problematici

Korišćenjem metode dimenzionalne analize mogu se sve veličine iz razmatranja zameniti odgovarajućim bezdimenzionalnim veličinama da bi se olakšala proučavanja, jer se na taj način dobija sledeće:

- smanjuje se broj veličina u razmatranju
- uvedenim bezdimenzionalnim veličinama mogu se unapred odrediti krajnje granice njihovih numeričkih vrednosti
- numeričke vrednosti bezdimenzionalnih veličina ne odnose se na pojedinačni slučaj, nego imaju opštu vrednost - za sve slučajeve na koje se proučavanja odnose.

Iz ovoga je jasno da se ne radi o zahvatu formalne prirode, nego o smišljenom postupku da bi se analiza učinila i lakšom i preglednijom. Ukoliko se problem želi poveriti eksperimentalnom proučavanju, onda je primena dimenzionalne analize prosto neminovna, kako u sastavljanju programa istraživanja, tako i u prikazivanju rezultata.

* * *

Dimenzionalna analiza zasnovana je vrlo prostom rasudjivanju koje je u sledećem. Dimenzije moraju imati uticaj na medjusobne veze veličina uzetih u razmatranje, pa se analizom samih dimenzija može doprineti u utvrdjivanju zavisnosti, a kako dimenzionalnih uslova može biti onoliko koliko ima osnovnih dimenzija u datoj problematici, a ovih opet ima toliko koliko ima osnovnih veličina, lako se prihvata osnovna teorema dimenzionalne analize: "Razmatranje m dimenzionalnih veličina zamenjuje se sa razmatranjem $m-n$ bezdimenzionalnih, a n je broj osnovnih veličina dotične problematike". U hidrauličkoj problematici, i uopste u problemima Mehanike, broj osnovnih veličina, ili broj osnovnih dimenzija, je tri. Ostale veličine i njima pripadajuće dimenzije su onda izvedene od veličina koje su uzete kao osnovne. Treba dodati da dimenzionalna analiza koristi slobodu izbora dimenzionalnog sistema i za osnovne veličine uzima baš one koje nameće sama problematika. U hidraulička razmatranja već su uvedene izvesne standardne bezdimenzionalne veličine - brojevi: Rejnoldsov, Frudov, Košijev i Veberov broj, i razmatranje je pogodno svesti na takve, već uobičajene veličine. One su medjutim obrazovane prema dimenzionalnom sistemu u kome su jedinice: karakteristična dužina, karakteristična brzina i gustina tečnosti. Pod pojmom "karakteristična" podrazumeva se dužina i brzina koje karakterišu problem - na primer: prečnik cevi i srednja brzina proticanja, ili dužina broda i brzina njegovog kretanja. Neka neki problem simbolično prikazuje funkcija:

$$\varphi = \varphi(\rho, \mu, E, \delta, g, ko_1, ko_2 \dots ko_n) \qquad (2-1)$$

gde prvih pet veličina karakterišu fizičke osobine tečnosti. To su:

ρ = gustina
μ = viskoznost
E = modul elastičnosti
δ = kapilarna konstanta
g = gravitaciono ubrzanje (zamenjuje specifičnu težinu γ, jer je $\gamma = \rho g$)

$ko_1 \dots ko_n$ označavaju simbolično granične i početne uslove datog problema, pa oni mogu biti: niz dužina: L_0, L_1, $L_2 \dots$ niz brzina: v_0, v_1, $v_2 \dots$ proticaji: Q_1, Q_2, ... vremena: t_1, $t_2 \dots$ karakteristike drugog materijala u dodiru sa posmatranom tečnosti - na primer: μ_1 (viskoznost drugog fluida koji se graniči sa posmatranim), ρ_1 (gustina materijala koga tečnost pronosi), E_1, E_2 (elastičnost čvrstih zidova) itd.

I na kraju, φ je veličina koja se istražuje.

Primenom dimenzionalne analize funkcija (2-1) zamenjuje se sledećom:

$$C_\varphi = C_\varphi\left(\frac{\mu}{\rho\, v_0 L_0}, \frac{E}{\rho_0 v_0^2}, \frac{\delta}{\rho\, L_0 v_0^2}, \frac{g L_0}{v_0^2}, Ko_1 \ldots\ldots Ko_{n-2}\right) \qquad (2\text{-}2)$$

gde su ispale veličine uzete kao jedinice dimenzionalnog sistema: gustina ρ, jedna dužina L_0 i jedna brzina v_0 (to su malo pre nazvane karakteristična dužina i brzina), Broj veličina smanjio se, na taj način, za tri, što je u skladu sa napisanom teoremom. Sada se ostali konturni uslovi, sem dve karakteristične veličine, jednostavno zamene sa odgovarajućim bezdimenzionalnim veličinama: $Ko_1 \ldots\ldots Ko_{n-2}$, i tih uslova ima u (1-2) dva manje nego u (1-1). Gustina je, kako je rečeno, ispala iz razmatranja, a ostale fizičke osobine fluida zamenjene su standardnim brojevima:

Rejnoldsov broj (Reynolds/

$$Re = \frac{\rho\, L_0 v_0}{\mu} \qquad (2\text{-}3)$$

Košijev broj (Cauchy)

$$Ca = \frac{\rho\, v_0^2}{E} \qquad (2\text{-}4)$$

Veberov broj (Weber)

$$We = \frac{\rho_0 L_0 v_0^2}{\delta} \qquad (2\text{-}5)$$

Frudov broj (Froude)

$$Fr = \frac{v_o^2}{g\,l_o} \qquad (2-6)$$

I na kraju, C_φ u (1-2) je bezdimenzionalna zamena za u (1-1). Uvodjenjem brojeva datih u izrazima (2-3 do -6) i pisanjem jednim simbolom Ko svih konturnih uslova, funkcija (1-2) glasi:

$$C_\varphi = C_\varphi \left(Re, Ca, We, Fr \ldots\ldots Ko \right) \qquad (2-7)$$

U hidrauličkim istraživanjima, samo u izuzetnim slučajevima, kada su uticaji stišljivosti i kapilarnosti izraziti, uzimaju se u obzir Ca i We. U pretežnom delu problematike oni se izostavljaju. Dalje i Re se uvodi samo tamo gde je to zaista i nužno, odnosno gde se nikako ne mogu izostaviti uticaji viskoznosti. Najčešće se, umesto (2-7), razmatra uprošćena funkcija:

$$C_\varphi = C_\varphi \left(Fr \ldots\ldots\ldots Ko \right) \qquad (2-8)$$

*   *   *

Hidraulička proučavanja najčešće se usmere na problematiku pronošenja tečnosti, što znači da se utvrdjuje propusna moć objekta, vrlo često se ne ulazi u dejstvo tečnosti na čvrste konture, u analizu opterećenja na konstrukciju. Tome se prilazi tek onda kada bi te sile imale dominantan uticaj na statičko simenzionisanje. Praktična hidraulika svodi se na utvrdjivanje zavisnosti izmedju propusne moći i raspoložive visine koja omogućava tečenje.

Naime, aktivna sila je sila težine čija je mera visinska razlika uzvodnog i nizvodnog kraja proučavanog objekta. Veličina φ koja ulazi u (2-1) može se shvatiti kao neka visinska razlika (razlika pijezometarskih kota, razlika energetskih kota ili sl.) i simbolično će se označiti kao Z, pa se C_φ u (2-2) može prikazati, i prikazuje se u praktičnim hidrauličkim obrascima, kao:

$$C = \frac{Z}{v_o^2/g}$$

Funkcija (2-2) svodi se onda na:

$$\frac{Z}{v_o^2/2g} = C_Z = C_Z\left(Re, Ca, We, Fr \ldots\ldots Ko\right) \qquad (2-9)$$

Ovde je nužna, u cilju otklanjanja eventualne zabune, sledeća napomena: Ranije, u poglavlju 1., Z je bio simbol za položajnu kotu, a ovde se upotrebljava kao visinska razlika.

Ovde je obavljeno deljenje $\frac{v_0^2}{g}$ sa 2 da bi se dobio uobičajeni način izražavanja u hidraulici.

Izraz (2-9) ima opšti karakter i da se navede nekoliko njegovih posebnih slučajeva, najčešće primenjivanih u hidraulici. To su:

a/ Isticanje:

$$v_0 = C_V \sqrt{2gZ}$$

gde je koeficijent brzine $C_V = \sqrt{\frac{1}{C_Z}}$

b/ Lokalni gubitak

$$Z_{izg} = \xi \frac{v^2}{2g}$$

Ovde je Z izgubljena visina Z_{izg}, a koeficijent lokalnog gubitka $\xi = C_Z$.

c/ Gubici usled trenja (Darsi-Vajsbahova, odnosno Šezijeva formula)

$$Z_{izg} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

Ovde je Z opet Z_{izg}, a $C_Z = \lambda L/D$, jer je proporcionalan sa rastojanjem L, a se, radi dimenzionalne homogenosti, stavlja u imenitelj neka karakteristična dužina. To je prečnik cevi D, a kod nekružnih poprečnih preseka - hidraulički radijus R.

d/ Ravanski problem prelivanja

$$q = m H \sqrt{2g H}$$

Ovde je $Z = H$ visina prelivnog mlaza, a brzina v_o se zamenjuje proticajem po jedinici dužine q podeljenim sa nekom dužinom – opet sa prelivnim mlazom H, tj.

$$v_o = \frac{q}{H}$$

Koeficijent prelivanja m jednak je:

$$m = \sqrt{\frac{1}{C_Z}}$$

Iz izloženog se vidi da se izraz (2-9) može nazvati "opšta struktura formula Praktične hidraulike", jer su sve empirijske formule praktičnog karaktera njeni posebni slučajevi.

Ako se učini ista aproksimacija kojom se sa (2-7) prešlo na (2-8), izraz (2-9) zamenjuje se sa:

$$\frac{Z}{v_o^2/2g} = C_Z = C_Z \left(Fr \, \ldots\ldots \, Ko \right) \qquad (2\text{-}1o)$$

* * *

Korisno je još dodati napomenu o Frudovom broju Fr koji unosi u razmatranje uticaj težine u izrazima (2-7 do -1o). On ulazi samo kod tečenja sa slobodnom povrčinom, dok kod tečenja pod pritiskom ne ulazi, iako u oba slučaja tečnost ima svoju težinu. Kod tečenja pod pritiskom, granična površina tečenja je nametnuta čvrsta površina (zid cevi, na primer), a sila težine, upravo gravitaciono ubrzanje, nema bitan uticaj na stvaranje strujne slike, jer se uticaj težine može zameniti ekvivalentnim pritiskom. Najbolji primer je tečenje u cevi, gde se nagib prema horizontali može menjati što znači da se menja uticaj sile težine, a strujna slika ostaje ista, ako se zadrže iste razlike pijezometarskih kota. Računanje pijezometarskih i energetskih kota, merodavnih za postizanje odredjenog proticaja, je identično, bez obzira na nagib same cevi. Nasuprot tome, menjanje nagiba kanala menja slobodnu površinu tečnosti, a time se bitno menja strujna slika. Kanal se očigledno ne može hidraulički računati bez uvodjenja težine u račun, odnosno bez uvodjenja pada dna kanala. Medjutim, leva strana u (2-9 i -lo), po svom obliku, potpuno je ista kao i Frudov broj. To može da stvori zabunu, jer su pomenuti izrazi namenjeni bilo kom hidrauličkom problemu, pa i tečenju u cevima, pa, na prvi pogled izgleda da je to protivrečno navedenoj konstataciji. Objašnjenje je u sledećom: Bezdimenzionalnu veličinu $C_Z = \frac{2gZ}{v_0^2}$ treba shvatiti kao meru sile potrebnu za kretanje, a ona je izražena odgovarajućom silom težine, što ne znači da je baš sila težine jedina moguća sila koja će to obaviti. Sa druge strane, ako je reč o tečenju u kanalima, može se izbeći Fr jer je:

$$Fr\, C_Z = \frac{v_o^2}{g L_o} \cdot \frac{2gZ}{v_o^2} = 2\,\frac{Z}{L_o}$$

pa se umesto: C_Z i Fr, mogu uzeti C_Z i $\frac{Z}{L_o}$ i na taj način uzet je posredno u razmatranje i Fr. Medjutim, to se retko primenjuje, jer je Fr pokazatelj stanja tečenja u kanalu, pa ga treba zadržati i prikazati neposredno, a ne posredno. Kod tečenja pod pritiskom, naprotiv, nema razloga za uvodjenjem Frudovog broja.

* * *

Primena dimenzionalne analize u Hidraulici, uostalom kao i svugde, ne sme da bude stvar formalnosti, nego se moraju smišljenim postupkom izabrati bezdimenzionalne veličine i to tako da se njima što bolje izražava problem.

* * *

Može se naići da se dimenzionalnoj analizi primenjuju i ona uproštavanja problema koja nisu postignuta njenom primenom, nego su posledica primena jednačina. Naime, svaka jednačina, kao usvojeni uslov, smanjuje broj veličina u razmatranju za jednu. I dalje, svaki drugi uslov, preko koga se često prećutno prodje doprinosi u istom smislu. Ovo se ovde navodi, jer su vrlo česte zabune usled prebrzog zaključivanja pri upotrebi bezdimenzionalnih parametara.

Često puta problematika se izražava isključivo preko kinematskih veličina, pa se, umesto materijalnih karakteristika, tečnosti: ρ , γ , μ , E i δ , uvode u razmatranja njihove kinematske zamene:

$\gamma/\rho = g$ (gravitaciono ubrzanje)

$\mu/\rho = \nu$ (kinematski koeficijent viskoznosti)

$E/\rho = C$ (brzina zvuka)

δ/ρ (kinematski koeficijent kapilarnosti)

Taj način već je primenjen, jer se već specifična težina γ zamenjivala sa g , a ovde je sproveden i na ostale karakteristike.

Ovakvim zamenama, broj veličina se smanjio za jedan, jer se ne pojavljuje gustina pa se od dimenzionalne analize može očekivati smanjenje veličina za dve. Uostalom, kinematsko prikazivanje je dvodimenzionalno, odnosno sa dve osnovne veličine.

* * *

Sve izloženo u ovom poglavlju dato je iz razloga da se kasnije koristi pri rešavanju postavljenog zadatka. Tako će se kasnije izvodjenja i zaključci iz njih moći podvrći sigurnim kriterijumima.

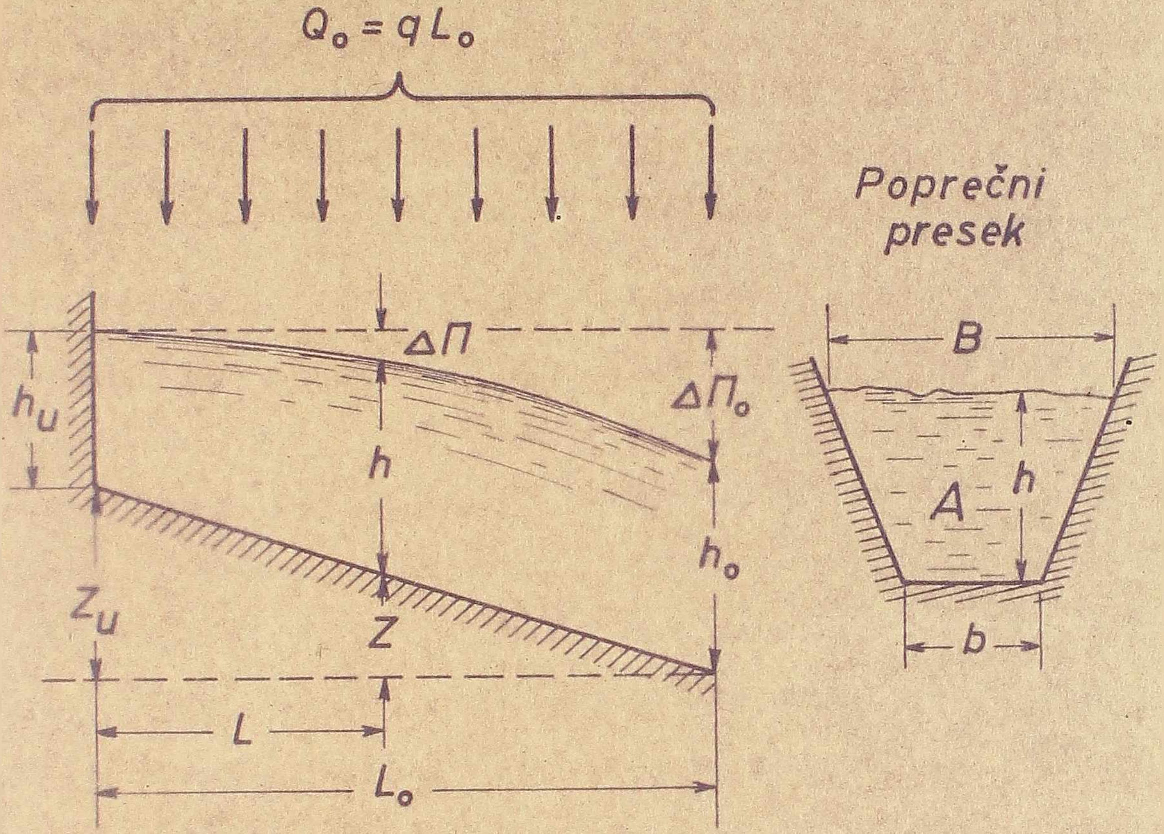
3.

Osnove za proučavanje sabirnih kanala sa ravnomernim priticajem

3.1. Oznake

(vidi sliku 3.1.)

Dužina sabirnog kanala	L_o
Rastojanje od uzvodnog kraja kanala. . . .	L
Kota dna (računata od kote dna na nizvodnom kraju)	Z
Dubina	h
Pijezometarska kota.	Π $\Pi = Z + h$
Razlika pijezometarskih kota uzvodnog i proizvoljnog preseka	$\Delta\Pi$
Širina dna	b
Širina slobodne površine vode.	B
Poprečni proticajni presek	A
Proticaj	Q $Q = qL$
Proticaj u kanal, po jedinici dužine . . .	q
Srednja brzina u preseku	V $V = Q/A$
Frudov broj.	F $F = \frac{Q^2 B}{gA^3}$
Statički momenat preseka (u odnosu na nivo vode)	S



Slika 3.1.

* * *

Kada se veličine odnose na nizvodni kraj kanala, nose još i indeks "o" – na primer:

dubina na nizvodnom kraju. . . . . h_o

poprečni proticajni presek na nizvodnom kraju. . . . . A_o

itd.

Indeks "u" opet ukazuje da se radi o veličini na uzvodnom kraju kanala.

* * *

[illegible] Z [illegible]

[illegible] glavlje 2) [illegible]

[illegible] Medjutim, [illegible]

[illegible]

a karakteristična visinska razlika biće $\Delta\Pi_o$ [illegible] sl.

[illegible] Fr , [illegible]

brojevi (Re, Ca, We) označavali sa dva slova. [illegible]

[illegible] F .

Novim, ovde uvedenim pojmovima date su se i nove oznake.

3.2. Uslovi proučavanja

I. Proticaj na uzvodnom kraju kanala ravan je nuli i priticanje je ravnomerno, što se može napisati:

$$Q = qL \qquad Q_o = qL_o \tag{3-1}$$

II. Pad dna je konstantan, tj.:

$$I = \frac{Z_u}{L_o} = const \tag{3-2}$$

$$Z = Z_u\left(1 - \frac{L}{L_o}\right) \tag{3-3}$$

III. Nagibi bokova kanala ne menjaju se dužinom kanala, pa se ostvaruje:

$$\frac{h}{B-b} = const \tag{3-4}$$

IV. Razmatraju se kanali pravougaonog, trapeznog i trougaonog poprečnog preseka. Trapezni i pravougaoni kanali imaju istu širinu dna duž kanala, ili im se širina dna nizvodnim smerom postepeno povećava u linearnoj zavisnosti, pa je:

$$b = b_u + (b_o - b_u)\frac{L}{L_o} \tag{3-5}$$

Kanali kod kojih je širina dna konstantna, tj.

$$b = b_o = b_u = const$$

nazivaće se prizmatični kanali. Tu ulaze i trougaoni kanali, jer je kod njih b = const = 0.

* * *

Navedeni uslovi gotovo uvek se i ostvaruju u praktičnoj problematici koja je predmet ovog rada.

3.3. Bezdimenzionalne veličine

a/ Za rastojanje od uzvodnog kraja uniformnog kanala:

$$X = \frac{L}{L_o} \qquad (3-6)$$

b/ Za poprečni proticajni presek:

$$Y = \frac{A}{A_o} \qquad (3-7)$$

c/ Za ukupan proticaj (Froude broj na nizvodnom kraju kanala)

$$F_o = \frac{Q_o^2\, B_o}{g\, A_o^3} = \frac{v_o^2 B_o}{g\, A_o} \qquad (3-8)$$

d/ Za oblik nizvodnog preseka:

$$M = \frac{b_o}{B_o} \qquad (3-9)$$

pravougaonik	trapez	trougao
$M = 1$	$1 > M > 0$	$M = 0$

e/ Za sužavanje kanala

$$1 - N = \frac{b_u}{b_o} \qquad (3\text{-}10)$$

Pri $N = 0$ kanal je prizmatičan.

f/ Za pad dna:

$$\Gamma = \frac{Z_u}{A_o / B_o} \qquad (3\text{-}11)$$

Uvodjenjem bezdimenzionalnih veličina, umesto funkcije:

$$A = A(L) \qquad (3\text{-}12)$$

proučavaće se funkcija:

$$Y = Y(X) \qquad (3\text{-}13)$$

sa parametrima

$$F, \; M, \; N \; \text{i} \; F_o$$

Ovaj zaključak biće kasnije (odeljak 3.6) razmotren sa stanovišta dimenzionalne analize. Naime, pokazaće se da veličine napisane pod (3-13) odredjuju problem i da se sve ostale veličine, ako se napišu u bezdimenzionalnom obliku, mogu napisati preko: X, Y, F_o, M, N i Γ. Radi lakšeg kasnijeg izlaganja napisaće se još niz bezdimenzionalnih veličina i odmah će se napisati i njihove veze sa prethodnim veličinama.

* * *

Proticaj se može izraziti sa:

$$\frac{Q}{Q_o} = \frac{L}{L_o} = X \tag{3-14}$$

Ovo je napisano prema (3-1) i (3-6)

* * *

Na isti način, prema (3-3), kota dna izražena bezdimenzionalno je:

$$\frac{Z}{Z_u} = 1 - X \tag{3-15}$$

* * *

Širina dna, u odnosu na širinu dna na nizvodnom kraju, može se označavati posebnom oznakom:

$$\beta = \frac{b}{b_o} \tag{3-16}$$

ali je to veličina koja je izvedena iz X i uvedenog parametra N, jer se, iz (3-5) i (3-14) dobija:

$$\beta = 1 - N + NX \tag{3-17}$$

Širina slobodne vodene površine, bezdimenzionalno će se pisati kao:

$$\text{Б} = \frac{B}{B_o} \qquad (3\text{-}18)$$

I ova veličina se može izraziti preko X, Y uvedenih parametara M i N, jer je površina preseka A jednaka:

$$A = \frac{1}{2} h (B + b) \qquad (3\text{-}19)$$

Nizvodni presek je:

$$A_o = \frac{1}{2} h_o (B_o + b_o) \qquad (3\text{-}2o)$$

Deljenjem (3-19) sa (3-2o) uz korišćenje (3-4) dobija se:

$$\frac{A}{A_o} = \frac{B^2 - b^2}{B_o^2 - b_o^2} = \frac{\left(\frac{B}{B_o}\right)^2 - \left(\frac{b}{b_o}\right)^2 \left(\frac{b_o}{b_o}\right)^2}{1 - \left(\frac{b}{b_o}\right)^2}$$

ili, prema (3-7), (3-9), (3-16) i (3-18) :

$$Y = \frac{\text{Б}^2 - \beta^2 M^2}{1 - M^2} \qquad (3\text{-}21)$$

pa je:

$$\sigma = \sqrt{Y(1-M^2) + \beta^2 M^2} \qquad (3-22)$$

ili, zamenom β prema (3-17) dobija se σ izraženo preko promenljivih X i Y i izabranih parametara M i N –

$$\sigma = \sqrt{Y(1-M^2) + M^2(1-N+NX)^2} \qquad (3-23)$$

* * *

Dubina će se izražavati preko bezdimenzionalne veličine:

$$\Omega = \frac{h}{A_o / B_o} \qquad (3-24)$$

Delenje sa A_o / B_o pokazaće se kao pogodno, jer se ista veličina pojavljuje i kod Frudovog broja, a iz istog razloga uvedena je i kod Γ – vidi (3-8) i (3-11).

Jednačina (3-19) dovodi se na ovaj oblik:

$$\frac{A}{A_o} = \frac{1}{2} \, \frac{h \, B_o}{A_o} \left[\frac{B}{B_o} + \frac{b}{b_o} \cdot \frac{b_o}{b_o} \right]$$

što se, korišćenjem (3-7), (3-24), (3-18), (3-16) i (3-9), preobličava u:

$$Y = \frac{1}{2}\,\Omega\,(Б + M\beta) \qquad (3\text{-}25)$$

Eliminacijom Y iz sistema jednačina (3-25) i (3-21) može se Ω izraziti eksplicitno kao:

$$\Omega = \frac{2}{1-M^2}\,(Б - M\beta) \qquad (3\text{-}26)$$

i na kraju, isključivo preko: X , Y , M i N :

$$\Omega = \frac{2}{1-M^2}\left[\sqrt{Y(1-M^2)+M^2(1-N+NX)^2} - M(1-N+NX)\right] \qquad (3\text{-}27)$$

što se dobilo zamenom $Б$ i β u (3-26), odgovarajućim izrazima: (3-23) i (3-17).

Treba napomenuti da se napisani izrazi za Ω ne mogu koristiti za pravougaoni kanal, gde je $M=1$ i $Б=\beta$ jer tada (3-26) daje neodredjen izraz, odnosno nulu podeljenu sa nulom, Medjutim, sa $M=1$ i $Б=\beta$ (3-25) daje:

$$\Omega = \frac{Y}{Б} = \frac{Y}{\beta} \qquad (3\text{-}28)$$

$$\Omega = \frac{Y}{(1-N+NX)} \qquad (3\text{-}29)$$

* * *

Frudov broj u proizvoljnom preseku dat je sa:

$$F = \frac{Q^2 B}{g\, A^3} \tag{3-30}$$

što se može napisati kao:

$$F = \frac{Q_o^2\, B_o}{g\, A_o^3}\left(\frac{Q}{Q_o}\right)^2\left(\frac{B}{B_o}\right)\left(\frac{A_o}{A}\right)^3$$

ili, preko uvedenih bezdimenzionalnih veličina, a obzirom na (3-7), (3-8), (3-14) i (3-18),

$$F = F_o\,\frac{X^2 Б}{Y^3} \tag{3-31}$$

odnosno zamenom $Б$ prema (3-23):

$$F = F_o\,\frac{X^2\sqrt{Y(1-M^2)+M^2(1-N+NX)^2}}{Y^3} \tag{3-32}$$

* * *

Iz ispisanih jednačina vidi se da je β funkcija samo od X, dok su $Б$ i Ω funkcije od X i Y. U daljnjim izlaganjima koristiće se izvodi ovih funkcija pa će oni odmah napisati. Iz (3-17) vidi se da je:

$$\frac{\partial \beta}{\partial X} = N \tag{3-33}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial Y} = 0 \tag{3-34}$$

Parcijalnim diferenciranjem po X, odnosno Y, jednačine (3-23) uz korišćenje (3-17) dobija se:

$$\frac{\partial Б}{\partial X} = \frac{M^2 N(1-N+NX)}{Б} = \frac{M^2 N \beta}{Б} \tag{3-35}$$

$$\frac{\partial Б}{\partial Y} = \frac{1-M^2}{2Б} \tag{3-36}$$

Izvedeni parcijalni izvodi mogu poslužiti za dobijanje još i izvoda veličine Ω.

Iz (3-26) dobija se:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{2}{1-M^2}\left(\frac{\partial Б}{\partial X} - M\frac{\partial \beta}{\partial X}\right) = \frac{2MN}{1-M^2}\left(\frac{M\beta}{Б} - 1\right) \tag{3-37}$$

Napisani rezultat može se izraziti preko same diferencirane veličine Ω, jer se korišćenjem izraza (3-26) dobija:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = -MN\frac{\Omega}{Б} \tag{3-38}$$

(3-26) daje i:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{2}{1-M^2} \quad \frac{\partial Б}{\partial Y} = \frac{1}{Б} \tag{3-39}$$

Ako se želi da su ispisani parcijalni izvodi izraza isključivo preko X, Y, M i N može se svuda β, odnosno $Б$, zameniti desnom stranom (3-17), odnosno (3-25). Tako će se i postupiti kasnije kada se za to ukaže potreba.

3.4. Jednačina tečenja

Prepisuje se ranije izvedena jednačina za tečenje sa usputnim proticajem usmerenim normalno na sabirni provodnik, odnosno jednačina (1-1):

$$d\left(\Pi + \frac{v^2}{2g}\right) + \frac{V}{gA}\, dQ \qquad (3-4o)$$

Kod kanala pogodnije je zameniti pijezometarsku kotu Π sa zbirom iz kote dna i dubine vode (vidi sl. 3 -1)

$$\Pi = Z + h \qquad (3-41)$$

Napisane jednačine (3-4o i -41) i zamena V sa Q/A dovode do:

$$d\left(Z + h + \frac{Q^2}{2gA^2}\right) + \frac{Q}{gA^2}\, dQ = 0 \qquad (3-42)$$

Delenjem sa A/B_o napisana jednačina može se prikazati u ovom obliku:

$$d\left[\frac{Z_u}{A_o/B_o}\,\frac{Z}{Z_u}+\frac{h}{A_o/B_o}+\frac{1}{2}\,\frac{Q_o^2 B_o}{gA_o^3}\left(\frac{Q}{Q_o}\right)^2\left(\frac{A_o}{A}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{Q_o^2 B_o}{gA_o^3}\left(\frac{A_o}{A}\right)^2\frac{Q}{Q_o}\,d\left(\frac{Q}{Q_o}\right)=0$$

Čime je svedena da su u njoj uvedene bezdimenzionalne veličine, a zamenom odgovarajućih članova prema (3-11), (3-10), (3-24), (3-8), (3-7) i (3-14) dobija se:

$$d\left[\Gamma(1-X)+\Omega+\frac{1}{2}\,F_o\,\frac{X^2}{Y^2}\right]+F_o\,\frac{X}{Y^2}\,dX=0 \qquad (3\text{-}43)$$

Prethodna jednačina dovodi se na;

$$\left(-\Gamma+\frac{\partial\Omega}{\partial X}+2F_o\,\frac{X}{Y^2}\right)dX+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Y}-F_o\,\frac{X^2}{Y^3}\right)dY=0$$

ili

$$\frac{dY}{dX}=\frac{\Gamma-2F_o\,\dfrac{X}{Y^2}-\dfrac{\partial\Omega}{\partial X}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial Y}-F_o\dfrac{X^2}{Y^3}} \qquad (3\text{-}44)$$

Parcijalni izvodi veličina Ω zamenjuju se prema (3-37) i (3-39), u kojima se opet Б i β zamene prema (3-17) i (3-23) pa se dobija diferencijalna jednačina u koju ulaze samo: X i Y, i konstantne vrednosti: Γ, F_o, M i N :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\Gamma - 2F_o \frac{X}{Y^2} + \frac{2MN}{1-M^2}\left[1 - \frac{(1-N+NX)M}{\sqrt{Y(1-M^2)+M^2(1-N+NX)^2}}\right]}{\frac{1}{\sqrt{Y(1-M^2)+M^2(1-N+NX)^2}} - F_o \frac{X^2}{Y^3}} \qquad (3-45)$$

Uz ovu jednačinu ide i granični uslov:

Za $X=1$, $Y=1$, tj. $Y(1)=1$

(3-45) definiše ranije napisanu funkciju (3-15).

* * *

Za pravougaoni kanal, $M=0$ poslednji član u brojitelju desne strane prethodne jednačine je nula podeljena sa nulom. To se može izbeći ako se umesto (3-37) uzme (3-33) sa daljnjom smenom prema (3-29). Tako, sa pravougaoni kanal prethodna jednačina postaje:

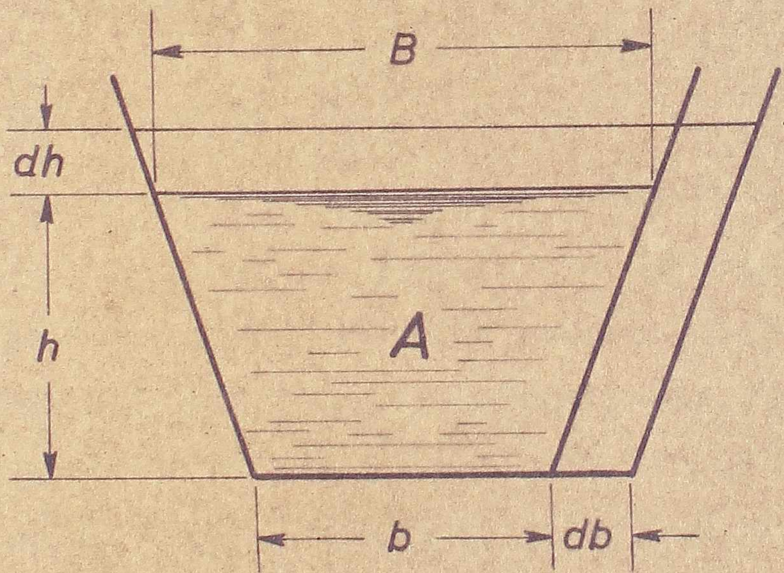
$$\frac{dY}{dX} = \frac{\Gamma - 2F_o \frac{X}{Y^2} + N \frac{Y}{(1-N+NX)^2}}{\frac{1}{1-N+NX} - F_o \frac{X^2}{Y^3}} \qquad (3-46)$$

* * *

Sada će se početna jednačina (3-42) dovesti na nešto drukčiji oblik koji će se takodje koristiti u kasnijim izlaganjima. Množenjem (3-42) sa $A\gamma$ (γ = specifična težina) ista jednačina postaje:

$$\gamma A\,dZ + \gamma A\,dh + \rho\,d(Qv) = 0 \qquad (3-47)$$

Čime je jednačina dovedena da izražava elementarne sile, i to redom kojim su članovi napisani: sila težine, sila pritiska i inercijalna sila.



Slika 3.2.

Iz sl. 3-2 vidi se da je elementarni priraštaj statičkog momenta (u odnosu na slobodnu površinu vode) poprečnog preseka:

$$dS = A\,dh + B\,dh\,\frac{1}{2}\,dh + \frac{1}{2}\,h^2 db \qquad (3\text{-}48)$$

Srednji član je zanemarljiv kao beskonačno mala veličina višega reda. Ako se detaljnije izvodjenje ograniči na prizmatične kanale, tj. $N = 0$, odnosno b = const., može se napisati da je:

$$dS = A\,dh \qquad (3\text{-}49)$$

pa se (3-47) svodi na:

$$A\,dZ + d\left(S + \frac{Q^2}{gA}\right) \qquad (3\text{-}50)$$

Ovim se pokazuje da se težini tečnosti izmedju dva beskonačno bliska poprečna preseka toka (preciznije rečeno: komponenti, u pravcu toka, sile težine) suprostavlja priraštaj zbira sile pritiska i inercijalne sile, a ovaj zbir se može shvatiti kao "sila u preseku". Ovakvo stanje je samo kod prizmatičnih kanala, a za taj slučaj je i napisana jednačina (3-5o). Naime tu, nema sile pritiska sa dna i bokova kanala pa se sila pritiska pojavljuje samo na poprečnom preseku i baš to i omogućava svodjenje problema na jednačinu (3-5o).

Uvodjenjem bezdimenzionalne veličine na statički moment:

$$\Psi = \frac{S}{A_o^2/B_o} \tag{3-51}$$

jednačina (3-5o) dovodi se na bezdimenzionalni oblik na isti način kao što se na (3-42) prešlo na (3-45), samo se ovde deli sa A_o^2/B_o :

$$\Gamma Y\, dX = d\left(\Psi + F_o \frac{X^2}{Y}\right) \tag{3-52}$$

(3-49) i (3-51) daju:

$$d\Psi = \frac{dS}{A_o^2/B_o} = \frac{A}{A_o}\, d\left(\frac{h}{A_o B_o}\right) = Y\, d\Omega \tag{3-53}$$

Za pisanje prethodnog [illegible] je [illegible] prema (3-7) i (3-24), a daljnje transformacije koristiće i:

$$d\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial Y}\, dY = \frac{dY}{\mathcal{B}} = \frac{dY}{\sqrt{Y(1-M^2)+M^2}} \tag{3-54}$$

što se dobilo iz (3-39) i (3-[illegible]), za uslov prizmatičnog kanala, tj. $N=0$. Isti uslov [illegible] je, prema (3-38) i do

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = 0$$

što je takodje iskorišćeno pri pisanju (3-54).

Na kraju, iz (3-53) i (3-54) dobija se integrabilan izraz za ψ, odnosno

$$\psi = \int_0^Y \frac{Y\,dY}{\sqrt{Y(1-M^2)+M^2}} \tag{3-55}$$

U prethodnom izraz M ima parameterski karakter pa rešenje integrala daje:

$$\psi = \frac{2}{3}\,\frac{1}{(1-M^2)^2}\left\{\left[Y(1-M^2)+M^2\right]^{3/2} - M^3\right\} - 2\,\frac{M^2}{1-M^2}\left(\sqrt{Y(1-M^2)+M^2} - M\right) \tag{3-56}$$

Za pravougaoni kanal napisano rešenje dovodi opet do nule podeljene sa nulom. Medjutim, tada, sa $M=1$ (3-55) daje neposredno:

$$\psi = \frac{1}{2}\,Y^2 \qquad \text{za} \qquad M=1 \tag{3-57}$$

Za trougaoni kanal $M=0$ rešenje je takodje vrlo prosto:

$$\psi = \frac{2}{3}\,Y^{3/2} \qquad \text{za} \qquad M=0 \tag{3-58}$$

Za trapezni kanal, $0<M<1$ izraz (5-56) nije najjednostavniji i za to će se kasnije, prilikom praktičnog korišćenja ovog izvodjenja, dati i tablica za vrednostina za ψ .

3.5. Prikazivanje problema u obliku elementarnog hidrauličkog obrasca za isticanje

Od velikog praktičnog značaja je odredjivanje denivelacije u sabirnom kanalu, označene kao $\Delta \Pi_o$ na sl. 3-1., jer to bi značilo da se za izabrani nizvodni poprečni presek odmah zna i njegov visinski smeštaj. Iz sl. 3-1 može se pročitati:

$$\Delta \Pi_o = h_u + Z_u - h_o \tag{3-59}$$

Deljenjem prethodne jednačine sa A_o / B_o dobijaju se bezdimenzionalne veličine, prema (3-11) i (3-24):

$$\frac{\Delta \Pi_o}{A_o / B_o} = \Omega_u + \Gamma - \Omega_o \tag{3-6o}$$

Daljnim deljenjem sa

$$\frac{v_o^2 B_o}{g A_o} = F_o$$

dobija se:

$$K = \frac{\Delta \Pi}{v_o^2/g} = \frac{\Omega_u - \Gamma - \Omega_o}{F_o} \qquad (3-61)$$

Iz (3-26) za nizvodni presek, sa $\dot{Y} = X = 1$ dobija se:

$$\Omega_o = \frac{2}{1+M}$$

tj.

$$\Omega_o = \Omega_o(M) \quad . \qquad (3-62)$$

Ista jednačina za uzvodni presek, sa $X = 0$ i $Y = Y_u$ pokazuje da je:

$$\Omega_u = \Omega_u(Y_u, M, N) \qquad (3-63)$$

Dalje, kako rešenje diferencijalne jednačine (3-45) daje, izmedju ostalog, i $Y(0)$ odnosno Y_u kao

$$Y_u = Y_u(\Gamma, F_o, M, N)$$

što znači da je:

$$\Gamma = \Gamma(Y_u, F_o, M, N) \qquad (3-64)$$

Ako se dobijeno pod (3-62 do -64) iskoristi u (3-61), ispada da se može napisati funkcija:

$$\frac{\Delta \Pi_o}{v_o^2/g} = K = K(Y_u\, , F_o\, , M, N)$$

tj.

$$K = K\left(\frac{A_u}{A_o}, F_o\, , M, N\right) \qquad (3-65)$$

Poznavanje napisane funkcije (3-65) omogućilo bi direktno odredjivanje

$$\Delta \Pi_o = K\, \frac{v_o^2}{g} \qquad (3-66)$$

tj. problem bi se sveo na elementarno računanje potrebne denivelacije $\Delta \Pi_o$ za odredjenu brzinsku visinu $v_o^2/2g$. Inače, prema elementarnoj hidraulici napisalo bi se:

$$\Delta \Pi_o = \frac{v_o^2}{2g}\,(1+\xi) \qquad (3-67)$$

tj.

$$v_o = C_v \sqrt{2g\, \Delta \Pi_o} \qquad (3-68)$$

gde je ξ koeficijent gubitka [illegible], a C_v koeficijent brzine. Uporedjenjem (3-66) sa (3-67), odnosno (3-68) lako se uvidja da su:

$$\xi = 2K - 1 \qquad (3-69)$$

$$C_v = \sqrt{\frac{1}{2K}} \qquad (3-7o)$$

Na ovaj način problem bi se sveo na odredjivanje brzine oticanja iz sabirnog kanala u funkciji raspoložive denivelacije u kanalu, odnosno kao elementarni zadatak hidraulike. U poglavlju 6. daće se odrediće se funkcionalna veza (3-65) i tako dobiti mogućnost za neposredno odredjivanje primarnih dimenzija sabirnog kanala.

3.6. Provera uvedenih bezdimenzionalnih odnosa sa stanovišta dimenzionalne analize

Problem tečenja u sabirnom kanalu je rešen ako je odredjena funkcija

$$A = A\,(L) \tag{3-71}$$

tj. ako je poznat poprečni presek u funkciji rastojanja. Konturni uslovi, simbolično napisani kao: ko_1, ko_2 ... u izrazu (2-1) su sledeći:

a) Širina dna u funkciji rastojanja:

$$b = b\,(L)$$

Što se sa širenjem po linearnom zakonu zamenjuje sa:

$$b_o\,,\ b_u\,,\ L_o \tag{3-72}$$

b) Kota dna u funkciji rastojanja:

$$Z = Z\,(L)$$

Ako je pad konstantan, ovo odredjuju dve veličine:

$$Z_u\,,\ L_o \tag{3-73}$$

c) Elementi nizvodnog preseka:

$$b_o\,,\ A_o\,,\ m_1\,,\ m_2\,,\ Q \tag{3-74}$$

Dubina h je potpuno odredjena sa 4 navedene veliči- na.

Ako se nagibi bokova ne menjaju duž kanala, što je redovan slučaj u praksi, onda m_1 i m_2 zajedno sa veličinama pod (3-72) potpuno odredjuju geometrijske karakteristike celog sabirnog kanala. Uslov ravnomernog priticanja dozvoljava da je sa Q i L_o potpuno odredjeno priticanje, pa ne treba uzimati nikakve veličine više.

Zanemariće se uticati viskoznosti, u odnosu na inercijalne, što se može opravdati kod ovakvog problema, a što je već objašnjeno u poglavlju 1. Dalje, kod ovakvih problema tečnost se može smatrati nestišljivom, a može se izostaviti i uticaj kapilarnosti kao zanemarljiv. Ovo govori o izostavljanju: $\mathcal{M}$, E i δ iz funkcije (2-1), pa ostaju konturni uslovi navedeni od (3-72 do -74) i od materijalnih karakteristika: ρ i γ . Problem se svodi na kinematsko izražavanje, pa će se u razmatranje uvesti g , umesto ρ i γ ali u tom slučaju dimenzionalna analiza smanjuje broj veličina za dve, kako je napomenuto u pretposlednjem pasusu teksta poglavlja 2. Posle ovog objašnjenja može se izraz (3-71) napisati odredjenije kao:

$$A = A(L, L_o, A_o, b_o, m_1, m_2, b_u, Z_u, Q_o, g) \qquad (3-75)$$

tj. u razmatranje ulazi 11 veličina, a posle primene dimenzionalne analize treba očekivati 2 manje.

Medjutim, kada se problem analizira kao linijski, što je pretpostavljeno pri izvodjenju jednačine tečenja u kanalu, u poglavlju 1, mogu se od geometrijskih veličina dve uzeti kao jedinice: jedna kao mera rastojanja (uzeće se L_o), a druga kao mera toka na datom rastojanju (uzeće se A_o). Ovo je u skladu sa razmatranjima pri kraju poglavlja 2., gde je skrenuta pažnja da usvajanje jedne odredjene zakonitosti znači i smanjenje za jedan broj veličina uzetih u razmatranje. Primenom dimenzionalne analize prethodno se ne bi moglo postići, jer dve geometrijske veličine ne mogu biti jedinice sistema. Dalje, ako se prihvati rešavanje problema kao linijskog, od svih elemenata poprečnog preseka ulaze samo dva: poprečni presek i dubina, kako se vidi iz jednačine (3-42). Ovo bi značilo da sem A_o , treba još samo jedna veličina za odredjivanje nizvodnog preseka, tj. svega jedna umesto tri napisane: b_o , m_1 i m_2 . Sve pobrojano govori o tome da, sem smanjenja usled primene dimenzionalne analize, ovde treba očekivati još i smanjenje za tri veličine, pa će ukupno smanjenje biti pet veličina, odnosno (3-75) zameniće funkcionalna veza sa 6 bezdimenzionalnih veličina:

$$\frac{A}{A_o} = \frac{A}{A_o}\left(\frac{L}{L_o}, C_1, C_2, C_3, C_4\right) \qquad (3-76)$$

gde su: C_1 , C_2 , C_3 i C_4 bezdimenzionalne karakteristike, i to:

C_1 = za oblik nizvodnog preseka

C_2 = za promenu širine dna

C_3 = za pad dna (ili visinsku razliku kota dna na uzvodnom i nizvodnom kraju)

C_4 = za proticaj

Prepisaće se ranije napisana funkcija (3-13):

$$Y = Y(X, M, N, \Gamma, F_o)$$

pa kako je $Y=A/A_o$ a $X=L/L_o$ uporedjenje (3-11) i (3-76) pokazuju da su:

$$\left.\begin{array}{ll} C_1 = M & C_2 = N \\ C_3 = \Gamma & C_4 = \Gamma \end{array}\right\} \qquad (3-77)$$

Ovo uporedjenje pokazuje da je ranije izvodjenje problematike sa bezdimenzionalnim veličinama potpuno ispravno sa stanovišta dimenzionalne analize.

* * *

U prethodnom odeljku (3.5). izvodjenje je dovelo do funkcije (3-56) i objašnjeno je da je na taj način problem sveo na elementarni hidraulički zadatak. Sa stanovišta dimenzionalne analize (3-65) može se protumačiti kao jedan slučaj opšte hidrauličke zakonitosti kada se u razmatranje uzimaju samo inercijalni i gravitacioni uticaji, odnosno kao primer za ranije napisanu funkciju (2-1o). Naime, K je tamošnji C_Z, dok A_u/A_o, M i N odredjuju ono što je tamo simbolično napisano kao Ko, a tamo i ovde ulazi još i Frudov broj.

Da su pri pisanju (3-65) u obzir ušle sve veličine, lako se pokazuje. Pre svega funkcija (3-76) za uzvodni presek, gde je $L/L_o = 1$ daje:

$$\frac{A_u}{A_o} = \frac{A_u}{A_o}\left(C_1, C_2, C_3, C_4\right) \qquad (3-78)$$

Ako se u razmatranje uvede još i K, onda je jedan parametar suvišan, jer prethodni izraz sadrži, kako je ranije dokazano, sve potrebne parametre. Prema tome sve je ispravno ako se, uvodjenjem K, izostavi C_3, pa se može napisati, umesto (3-78)

$$\frac{A_u}{A_o} = \frac{A_u}{A_o}\left(C_1, C_2, K, C_4\right)$$

Izražavanje eksplicitno po K dovodi do:

$$K = K\left(\frac{A_u}{A_o}, C_1, C_2, C_4\right)$$

Ako se C_1, C_2 i C_4 zamene, prema (3-77) dobija se:

$$K = K\left(\frac{A_u}{A_o}, M, N, F_o\right) \qquad (3\text{-}79)$$

Ovim postupkom iz razmatranja izostavljeni C_3 je ustvari Γ, a to je učinjeno namerno, da bi ova procena bila u skladu sa ranijim izvodjenjem, gde je korišćenje (3-64) eliminisan takodje Γ iz (3-61) i dobilo se (3-65). Dobijene (3-79) identične je sa (3-65), čime je potvrdjeno da je ranije izvodjenje u skladu sa dimenzionalnom analizom.