XXII

Jugoslovensko savetovanje

za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku

zbornik radova

naučni skup

sa međunarodnim učešćem

24.-26. 9. 2004.

Beograd

moNGeometrija 2004

Organizovanje i održavanje skupa su pomogli:

- Ministarstvo nauke i zaštite životne sredine Republike Srbije
- Građevinski fakultet, Beograd
- Saobraćajni fakultet, Beograd
- Šumarski fakultet, Beograd
- Mašinski fakultet, Beograd
- Građevinsko-arhitektonski fakultet, Niš
- Arhitektonski fakultet, Beograd

XXII
Jugoslovensko savetovanje za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku

– Zbornik radova –

naučni skup sa međunarodnim učešćem

Recenzenti:	dr Aleksandar Čučaković dr Jelena Maksić dr Branislav Popkonstantinović
Za izdavača:	dekan, dr Momčilo Miljuš
Glavni i odgovorni urednik:	dr Snežana Pejčić-Tarle
Urednik publikacije:	dr Branislav Popkonstantinović
Tehnički urednik:	Gordana Marjanović
Obrada teksta i korice:	dr Branislav Popkonstantinović
Izdavač:	Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu, Vojvode Stepe 305, telefon: 3096–207 fax: 3096–704 http://www.sf.bg.ac.yu
Štampa:	Izdavačka delatnost Saobraćajnog fakulteta, Beograd telefon: 3091–344; 3091–329 e-mail: izdavacka_delatnost@sf.bg.ac.yu
Tiraž:	100 primeraka

ISBN 86–7395–169–0

KRIVE JAJASTOG OBLIKA U NACRTNOJ GEOMETRIJI

Marija Obradović[1]
Slobodan Mišić[2]

Rezime

Tema ovog rada su krive koje imaju oblik jajeta, a koje se susreću u različitim oblastima Nacrtne geometrije. Načinjen je pokušaj da se ove krive opišu i svrstaju u nekoliko osnovnih tipova, kroz par primera sa objašnjenjima nastanka i načinima konstruktivne obrade. Sam rad nema ambiciju da pokrije sve moguće slučajeve, već daje osnovne karakteristike nekih najtipičnijih. Svrha ovog rada je, kako u pomoći edukaciji studenata i svih kojima je ova tema interesantna, tako i kao moguća osnova za dalja istraživanja.

Ključne reči: jajasta kriva, krug, elipsa, oval, kvadrika, senka

1. Uvod

Ovaj rad je inspirisan brojnim pitanjma studenata i budućih studenata, koji su na testovima i na konsultacijama iz oblasti vezanih za konusne preseke ili senke kruga i lopte davali uvek – slične pogrešne odgovore. Izgleda da naivni posmatrači (a to su svakako srednjoškolci, pa i studenti koji se tek obučavaju Nacrtnoj Geometriji) bivaju iskreno začuđeni činjenicom da među konikama ne postoji nikakva jajasta kriva, a da krug takođe, čak ni u perspektivi, ne baca senku jajastog oblika. Elipsa im, uprkos svim pedagoškim naporima, ne deluje ubedljivo i stiče se utisak da studenti pristaju na "zvaničnu verziju" samo iz dobrog

[1] Marija Obradović, magistar, asistent, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu
[2] Slobodan Mišić, asistent pripravnik, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

Krive jajastog oblika u Nacrtnoj geometriji

Marija Obradović[1]
Slobodan Mišić[2]

Rezime

Tema ovog rada su krive koje imaju oblik jajeta, a koje se susreću u različitim oblastima Nacrtne geometrije. Načinjen je pokušaj da se ove krive opišu i svrstaju u nekoliko osnovnih tipova, kroz par primera sa objašnjenjima nastanka i načinima konstruktivne obrade. Sam rad nema ambiciju da pokrije sve moguće slučajeve, već daje osnovne karakteristike nekih najtipičnijih. Svrha ovog rada je, kako u pomoći edukaciji studenata i svih kojima je ova tema interesantna, tako i kao moguća osnova za dalja istraživanja.
Ključne reči: jajasta kriva, krug, elipsa, oval, kvadrika, senka

1. Uvod

Ovaj rad je inspirisan brojnim pitanjma studenata i budućih studenata, koji su na testovima i na konsultacijama iz oblasti vezanih za konusne preseke ili senke kruga i lopte davali uvek – slične pogrešne odgovore. Izgleda da naivni posmatrači (a to su svakako srednjoškolci, pa i studenti koji se tek obučavaju Nacrtnoj Geometriji) bivaju iskreno začuđeni činjenicom da među konikama ne postoji nikakva jajasta kriva, a da krug takođe, čak ni u perspektivi, ne baca senku jajastog oblika. Elipsa im, uprkos svim

[1] Marija Obradović, magistar, asistent, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu
[2] Slobodan Mišić, asistent pripravnik, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

pedagoškim naporima, ne deluje ubedljivo i stiče se utisak da studenti pristaju na "zvaničnu verziju" samo iz dobrog vaspitanja. Odakle, zapravo, ideja u glavama onih koji nisu obučeni principima Nacrtne geometrije da takva, jajasta kriva, mora negde da postoji? Kako se zove, gde se pojavljuje? Je li to samo posledica očiglednog iskustva, budući da su, na osnovu sopstvene opservacije, daleko ređe imali prilike da se susretnu sa nekom idealno eliptičkom formom? (Naravno, geometrija odavno poznaje krive jajastog oblika i još u XVI veku neki od najvećih naučnika tadašnje Evrope posvetili su pažnju izučavanju ovih krivih: Dekart, Kepler, Brahe, Kasini...)

Evo pokušaja da se, barem delom, odgovori na ova pitanja.

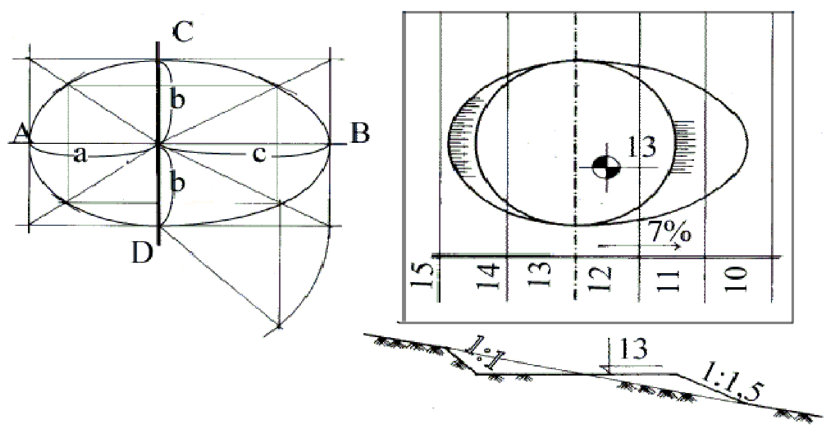
2. Vrste jajastih krivih

Prvo zapažanje od kojeg možemo krenuti u opisivanju jajastih krivih, jeste ta da ih ima više vrsta, kako po geometrijskim svojstvima, tako i po redu i razredu, zato i ne možemo usvojiti jednu od njih za traženu, samosvojnu jajastu krivu, sa sopstvenom jednačinom, konstrukcijom ili imenom. Zajedničko im je to da imaju samo jednu osu simetrije, da su zatvorene, konveksne i kontinualne**.** Neke od njih ćemo u ovom radu pomenuti, sa ciljem da se ova tema približi i specifikuje.

U konstruktivnom smislu, jajastu krivu možemo dobiti na više načina, međutim, cilj ovog rada nije da samo pruži nekolicinu konstrukcija, već i da iste poveže sa teorijom i da ponudi poneki odgovor na pitanje porekla date konstrukcije.

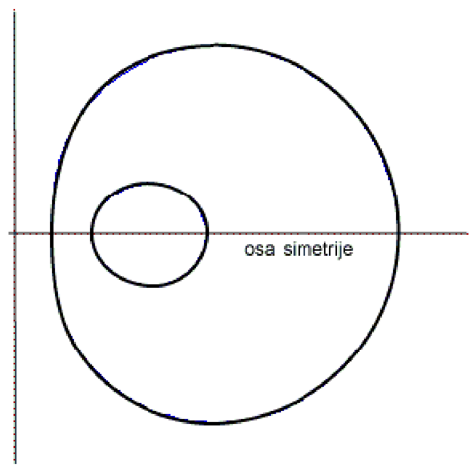
1) Najjednostavnija jajasta kriva (**slika 1**) zapravo i ne zaslužuje posebno ime, jer se ne radi o krivoj posebne geometrije. To je spoj dve polovine različitih elipsi, tj, elipsi kojima je zajednički parametar **b**, odnosno mala osa, dok su im velike poluose različite. Vizuelno, ovakav ravanski lik (da izbegnemo izraz: kriva) može da se nazove jajastim, ali u teoriji ne možemo otići dalje od same elipse, njenih konstrukcija i zakonitosti. U praksi, ovakva kriva bi mogla da se pojavi, na pr. u kotiranoj projekciji, gde bi smo (u nekoj velikoj razmeri, koja zanemaruje širinu kanala) imali plato kružnog oblika na idealnom terenu, dakle kosoj ravni, tako da bi se granica useka i nasipa, tj. izohipsa terena sa odgovarajućom kotom jednakom koti platoa, poklopila sa pravom na kojoj leži zajednička mala osa ovih elipsi, što

znači da bi joj izohipse terena bile paralelne. Usek, sa oštrijim padom kose ravni (1:1) dao bi deo elipse sa manjim parametrom **a**, a nasip sa manjim padom (1:1,5 pa tako i većim intervalom nagiba kose ravni), deo elipse sa većim parametrom **c.**



slika 1

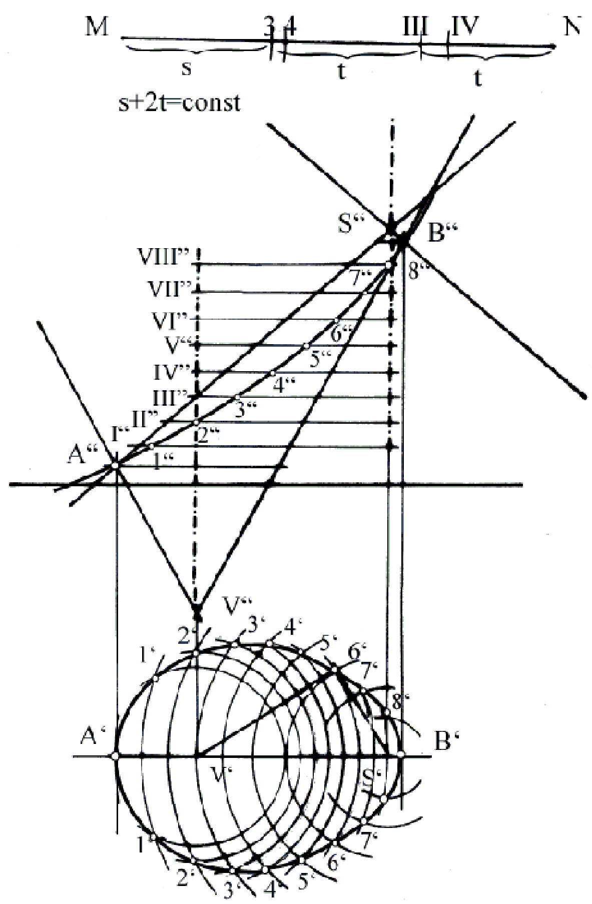
Kartezijanski oval, **slika 2**, kriva je četvrtog stepena, dobila naziv po jednom od najčuvenijih naučnika svoga doba, Renatus Cartesius-u, odnosno - Rene Dekartu (pa se negde još naziva i Dekartovom krivom). Takođe ga je proučavao i Njutn, koji je posvetio pažnju ovom ovalu u svojoj klasifikaciji *kubnih* krivih. Kartezijanski oval je geometrijsko mesto tačaka p, koje zadovoljavaju uslov da im je zbir rastojanja ***s*** od jedne i umnožak rastojanja ***t***, od druge fiksne tačke (žiža) uvek konstantan: ***s + mt = a***. Ako bi ***m*** bilo jednako ***1***, onda bi i ovo bila centralna konika, elipsa. Međutim, i među kartezijanskim ovalima, postoje oni koji izgledaju manje ili više jajoliko. Naučnici koji se bave ovom temom danas (Jirgen Keler, Martin Gardner, Torsten Silke...) došli su do zaključka da najbolje rezultate daje oval čija je jednačina ***s + 2t = a***. Pri tome ni položaj žiža nije zanemarljiv, pa će se tako dobiti šiljastiji vrh, što je jedna od žiža bliža temenu krive. Primer kartezijanskog ovala možemo naći u slučaju prodora dva obrtna konusa



Slika 2

paralelnih osa (**slika3**). Ako njihovu prodornu krivu projektujemo na ravan normalnu na pravce datih osa, dobijamo upravo kartezijanski oval, kao deo dvodelne krive, ali možemo posmatrati samo jednu njenu granu, dovoljnu za analiziranje oblika krive. Parametre možemo podešavati po želji, u izvesnoj meri, pa tako doći i do željene jajaste krive, odnosno ovala sa formulom: $s + 2t = a$, i jednom žižom uz teme krive. (Ovaj rad se neće baviti detaljima takvog postupka, zbog ograničenosti obima). Sama konstrukcija jajaste krive je u ovom slučaju veoma jednostavna i svodi se na presecanje oba konusa snopom paralelnih ravni (I –VIII), koje seku oba konusa po krugovima. U presečnim tačkama (1 – 8) krugova koji se nalaze u istoj ravni, nalaziće se i tačke tražene krive.

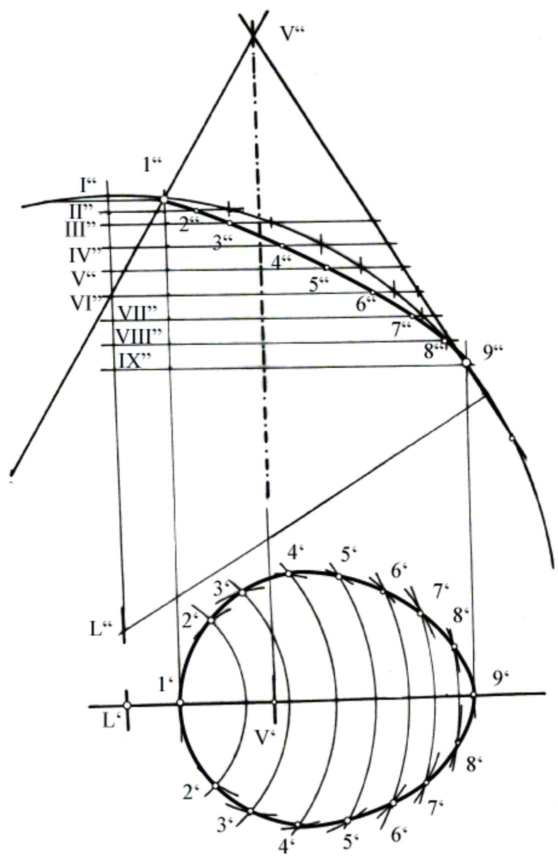
Ravanska kriva (kvartika) nastala projektovanjem prodorne prostorne krive dve kvardike (od kojih barem jedna mora imati eliptički ravni presek) na ravan upravnu zajedničkoj ravni simetrije, najopštiji je slučaj u kojem se mogu susresti jajate krive. Javiće se, dakle, kao dvodelna kriva koja spada u širu familiju dvodelnih ovala poput Kartezijanskog, a kod koje



Slika 3

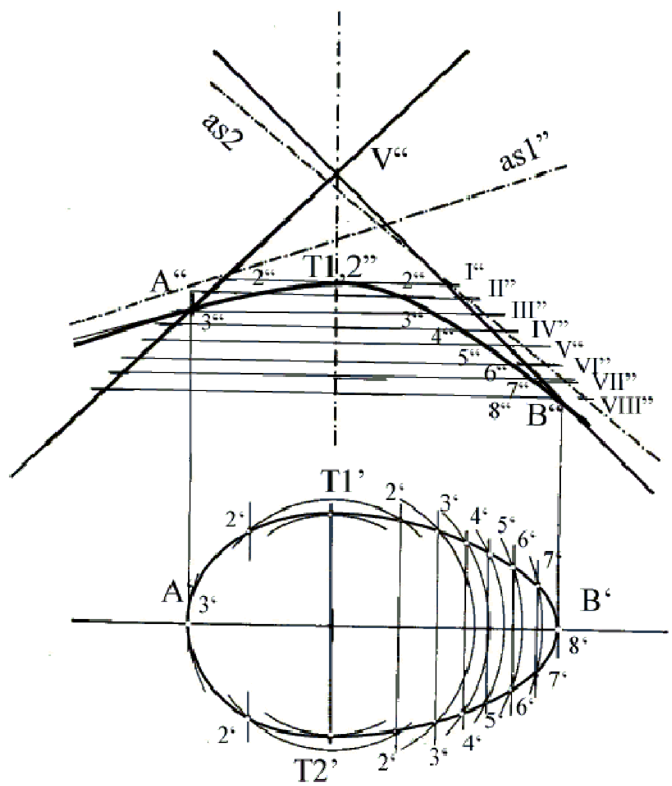
uvek možemo posmatrati i fokusirati se na samo jedan deo. Da bi se dobio željeni oblik, možemo uvesti određene zahteve:

a) kod prodora konusa i lopte (**slika 4**) potrebno je da položaj ovih površi bude veoma blizak tangencijalnom (kada bi se pojavila dvostruka tačka samopresečne krive u mestu dodira), takav da jedna površ "prodire" drugu, kako bi se dobila dvodelna kriva. Projektovanjem ove krive na ravan kružnog preseka konusa, dobijamo jajastu krivu. Konstrukcija same krive zasniva se na identičnom principu prethodnoj konstrukciji: snop paralelnih ravni seče obe površi po krugovima, tako da će se u presečnim tačkama krugova na odgovarajućoj ravni (I –IX) naći tačke tražene krive.



slika 4

b) Kod prodora konusa i na pr. hiperboličkog cilindra (**slika 5**), takođe se javlja u projekciji na ravan kružnog preseka konusa – jajasta kriva, uz uslov identičan prethodnom slučaju. Ovde možemo dobiti i izduženije oblike krive. Konstrukcija se, takođe, zasniva na presecanju snopom paralelnih ravni koje seku konus po krugovima, a cilindar po paralelnim izvodnicama, tako da će se u preseku kruga sa parom izvodnica koje leže u istoj ravni (I –VIII) naći i tražene tačke (1-8) ove krive.



slika 5

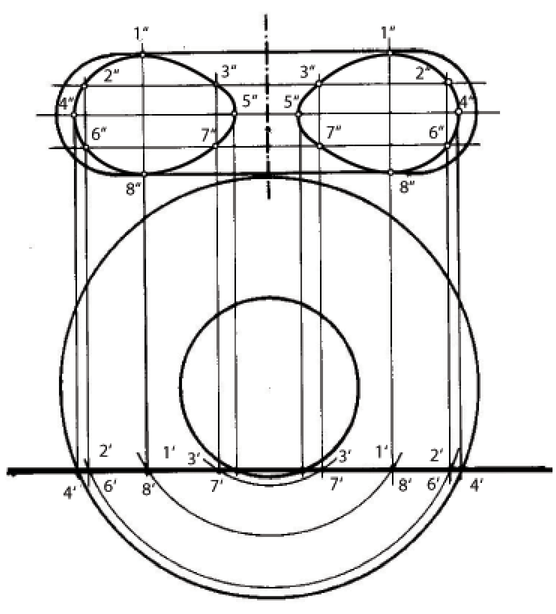
Navedenih primera bi moglo biti zaista mnogo, s obzirom na to da bi međusobni prodori dve kvadrike u velikom broju slučajeva, pod određenim uslovima (navedeni uzajamni položaj blizak tangencijalnom...) mogli da daju dvodelnu prodornu krivu, koja bi, projektovana na ravan jednog od kružnih preseka (ukoliko postoje) mogla dati i jajoliku krivu. Na taj način, može se izvesti zaključak da: od **55** mogućih kombinacija tipova realnih kvadrika, u **48** slučajeva postoji mogućnost da prilikom njihovog prodora nastane takva kriva koju bi smo zatim, odgovarajućim uglom projektovanja, mogli videti kao «jajastu krivu», dok takva mogućnost ne postoji u **7** slučajeva, kod

Tabela 1.

Realne kvadrike	konus (obrtni i kosi)	Cilin-dar (obrtni, kosi)	Parabo-lički cilindar	Hiperbo-lički cilindar	lopta	Elip soi d	Eliptič-ki parab oloid	Obrtni hiper-boloid	Dvog-rani hiper-boloid	Hip. par.
konus (obrtni, kosi)	+									
Cilindar (obrtni, kosi)	+	+								
Parabolički cilindar	+	+	-							
Hiperbolički cilindar	+	+	-	-						
Lopta	+	+	+	+	-					
Elipsoid	+	+	+	+	+	+				
Eliptički paraboloid	+	+	+	+	+	+	+			
Obrtni hiperboloid	+	+	+	+	+	+	+	+		
Dvograni hiperboloid	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
Hiperbolički paraboloid	+	+	-	-	+	+	+	+	+	-

uzajamnih prodora onih kvadrika od kojih ni jedna ne može imati za ravni presek zatvorenu krivu, kao na pr. hiperbolički paraboloid i hiperbolički cilindar... Kao i u slučaju: lopta-lopta (prodorna kriva će svakako biti krug. (Pogledati pregled u tabeli datoj u gornjem tekstu).

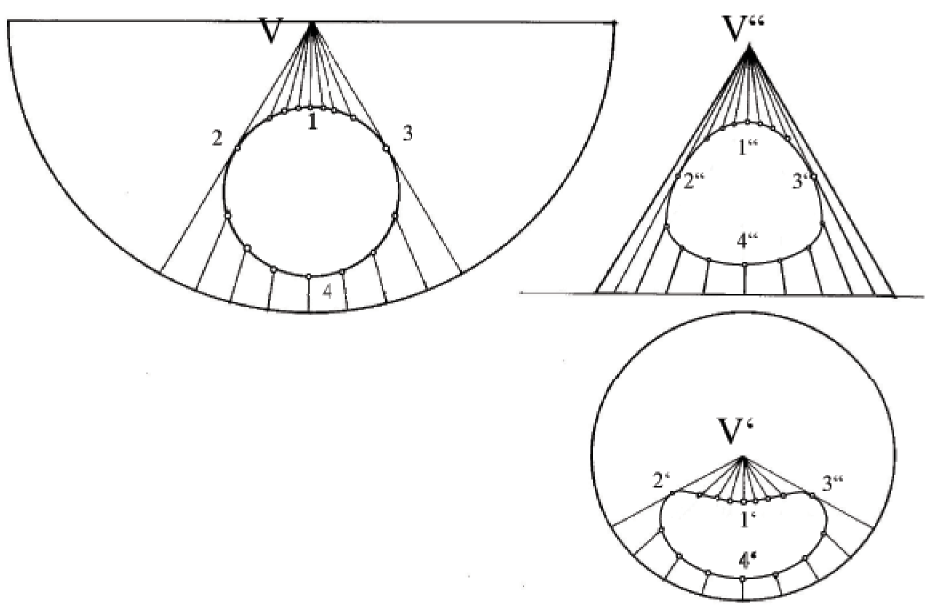
Ako se vratimo na slučaj a), možemo ga praktično prevesti na slučaj senke kruga ili lopte iz tačkastog izvora na sfernu površ. Tada studentsko pitanje ne zvuči više besmisleno: senka kruga jeste (tj. može biti) jajasta kriva, ali ne po ravni, već po sferi. Takođe i u slučaju prodora cilindra i lopte. Tada bi se radilo o senci kruga pri paralelnom osvetljenju na sfernu površ. Kako smo se odavno složili da je Galilej bio u pravu, ispada da naši studenti znaju instinktivno (?) šta se dešava sa senkom kruga, odnosno lopte, po površini Zemlje... Jedino što nisu uzeli u obzir jesu dimenzije kruga, idealizovani prostor i apstraktna strana geometrije. Ili, ako damo za pravo Rimanu, onda i ravni presek konusa možemo da posmatramo iz drugog ugla: tada je elipsa samo specijalni slučaj jajste krive.



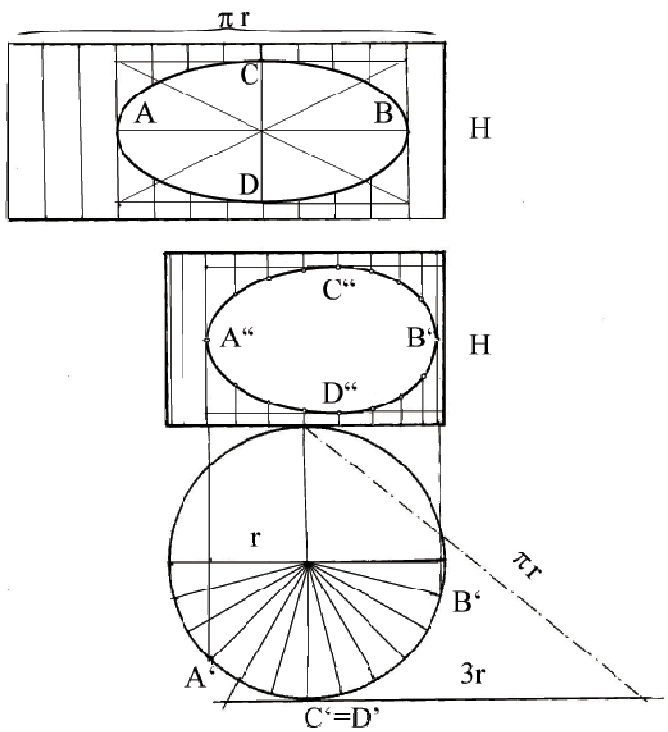
slika 6

2) Kasinijevi ovali, odn. Persejeve krive, na **slici 6**, nastaju kao ravni preseci torusa. Takođe su to dvodelne krive, a da bi smo dobili utisak jajaste krive, ponovo treba da biramo ravan blisku tangencijalnoj, samo ovog puta tangencijalnoj sa unutrašnje strane torusa, paralelnu njegovoj osovini.

3) Prilikom katadiopterskih projekcija, možemo tražiti sliku kruga, ili elipse projektovanu na površ koja nije ravan, na pr. u slučaju paraboličnog ogledala. Ovaj slučaj se praktično može svesti na tačku 1. s obzirom na to da svetlosni zraci koji prolaze krugom (elipsom) i žižom ogledala formiraju konus, čiji je vrh upravo žiža.



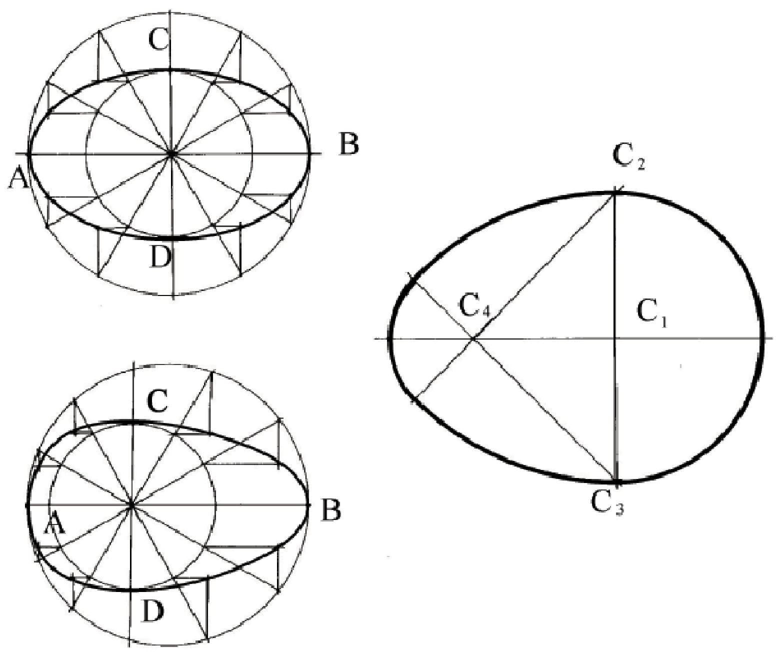
slika 7



slika 8

4) Jajastu krivu možemo dobiti i na sledeći način: Ako na mreži omotača konusa nacrtamo krug, zatim sklopimo mrežu i dobijemo (obrtni) konus i najzad, omotač projektujemo na ravan na pr. paralelnu osi konusa, a normalnu na ravan simetrije određenu osovinom konusa i centrom kruga - dobijamo krivu jajastog oblika**. (Slika 7**.) Ako bismo na omotaču cilindra nacrtali krug, ne bi smo dobili tako dobar rezultat kao kada bi umesto njega nacrtali elipsu (manje velike ose nego što je poluobim cilindra), zatim sklopili omotač, pa ga projektovali na izabranu ravan paralelnu izvodnicama cilindra, takođe dobijamo jajastu krivu. (**Slika 8**) Sada je, međutim, uslov za dobijanje jajaste krive da ovaj cilindar ne posmatramo zracima paralelnim ravni koja

prolazi osovinom cilindra i izvodnicom na kojoj je mala osa elipse, već treba da cilindar zarotiramo oko sopstvene ose za određeni ugao u odnosu na takvu ravan (na pr. 15°). Tada ćemo na projekcijskoj ravni dobiti željenu jajastu krivu.

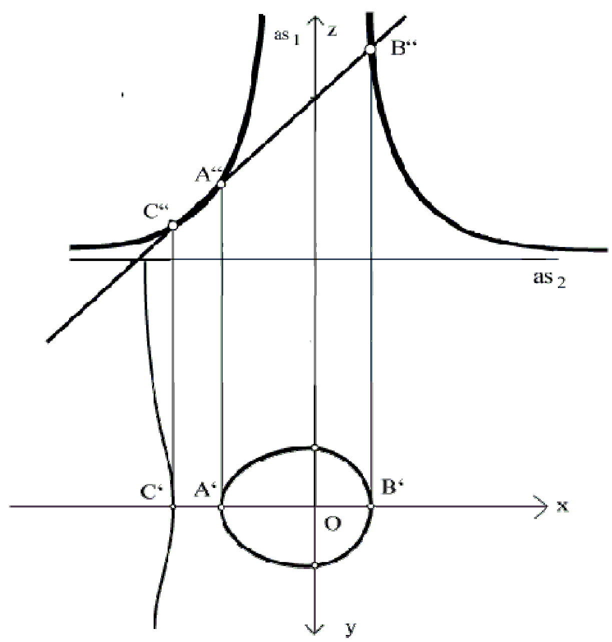


slika 9

5) Poznata konstrukcija elipse, na **slici 9**, može biti transponovana u konstrukciju upravo jajaste krive, ovoga puta trećeg stepena kako je to i izveo nemački matematičar Fritz Hugelschaffer. Tragajući za primenom ove konstrukcije, možemo doći do zaključka da je u pitanju ravni presek konoida, i to takvog, da mu je jedna vodilja elipsa, druga vodilja prava paralelna njenoj maloj osi, a direktrisna ravan normalna na ovu pravu. Takav konoid nije Plikerov, iako sadrži slične elemente. Njegova dvostruka prava ne seče elipsu u jednoj tački, već joj je paralelna, a konoid koji se dobija pri tom, biće dvograni. Zbog

ograničenosti obima rada nećemo zalaziti u detalje njegovog konstruisanja

6) Najzad, tu je i konstrukcija data na **slici 9, desno**, gde je jajasti ravni lik dobijen nastavljanjem kružnih lukova jedan na drugog: prvi je polukrug sa centrom C_1, na koji se nadovezuju simetrično sa obe strane, dve osmine kruga: poluprečnika dvostruko većeg (2r), a čiji su centri C_2 i C_3 u krajnjim tačkama prethodnog polukruga**,** a zatim se na njih nadovezuje još jedan luk, četvrtina kruga, sa centrom C_4 u preseku poluprečnika prethodnih lukova, pod uglom og 45^o u odnosu na osu krive, a sa poluprečnikom $2r\text{-}r\sqrt{2}$. Ova konstrukcija može biti interesantna za praktičnu primenu u dizajnerskim delatnostima, jer je najjednostavnija za precizno iscrtavanje, a ne zahteva komplikovanu geometrijsku konstrukciju kakva se sreće u većini ostalih slučajeva, niti egzaktnu matematičku formulu.



slika 10

7) Jajaste krive možemo dobiti i ravnim presecima određenih rotacionih površi. Kako ovakvih primera ima suviše da bi bili posebno obrađivani i navođeni u jednom radu, ovde dajemo samo jednu krajnje pojednostavljenu skicu preseka rotacionog hiperboličkog levka i ravni, koji će u projekcionoj ravni normalnoj na osu rotacije dati jajastu krivu (**slika 10**).

Na ovaj način, nadamo se da smo barem delimično dali odgovor na pitanja o tome gde se pojavljuju jajaste krive. Naravno, postoji još čitav niz primera i slučajeva koji nisu u direktnoj vezi sa Nacrtnom geometrijom, kao što su razni grafovi matematičkih funkcija koji mogu dati interesantne jajaste krive, pa čak i nizove takvih krivih. Tu je još i par konstrukcija, poput Gardnerove, koja je veoma slična iscrtavanju elipse pomoću konca i čioda, samo što sada imamo tri čiode, odnosno, tri žiže. Ovde ih, međutim, ne iznosimo, budući da nemaju veći značaj u teoriji Nacrtne geometrije, već jedino mogu poslužiti kao zanimljivost, s obzirom na to da u kompjuterskoj eri ni elipsu više ne konstruišemo uz pomoć čioda, osim radi zabave.

Literatura:

Anagnosti P. : *Nacrtna Geometrija*, Naučna knjiga, Beograd 1984.
Dovniković L. : *Zapisi iz teorije krivih i površi*, skripta za poslediplomske studije, Beograd 1986.
Gagić Lj. : *Nacrtna geometrija* . Naučna knjiga, Beograd, 1988.
Sbutega V. Živanović S. : *Sintetička geometrija III*, skripta za studente postdiplomskih studija, Arhitektonski fakultet, Beograd 1986.
Internet literatura:
Chickscope project at the Beckman Institute (>Eggmath)
(pins-and-string constructions, Cassini ovals, Cartesian ovals)
Nick C. Thomas
Eggs with path curves
Torsten Sillke
Egg shaped curves
Jurgen Koller, Egg Curves, ovals http://www.mathematische-basteleien.de/eggcurves.htm 2000.
Maxwell
Trifocal curves - meloid, apioid
Eric W. Weisstein Surface, 1996.
http://164.8.13.169/Enciklopedija/math/math/s/s873.htm

The egg shaped curves in Descriptive Geometry

Marija Obradović[3]
Slobodan Mišić[4]

Resume

The subject of this paper are curves that have the shape of a hen's egg, and which can be found in various fields of Descriptive Geometry. The paper attempts to describe and classify some of them in several elementary types, through a few examples with explanations of origin and methods of constructive procedures. The paper itself has no ambition to elaborate all the possible cases of the egg shaped curves, but gives the main characteristics of some the most typical. The purpose of this paper is not only the education of students or anyone who may find it interesting, butthe foundation for further explorations as well.

Key words: egg shaped curves, circle, ellipse, oval, quadric, shadow

[3]Marija Obradović, Msc, assistant, Faculty of Civil Engeneering, Belgrade
[4] Slobodan Mišić, assistant, Faculty of Civil Engeneering, Belgrade.