XXI

Jugoslovensko savetovanje
za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku

zbornik radova

naučni skup
sa međunarodnim učešćem

20.–22.9.2002.
Podgorica

moNGeometrija 2002

IZDAVAČ

Jugoslovensko udruženje
za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku

Organizacioni odbor
XXI Jugoslovenskog savetovanja
za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku

NAZIV PUBLIKACIJE

ZBORNIK RADOVA
naučni skup
sa međunarodnim učešćem

Odbor za recenziju:

dr arh. Hranislav Anćelković, r. prof.
dr arh. Miroslav Marković, r. prof.
dr arh. Biserka Marković, r. prof.

Urednik

dr arh. Hranislav Anćelković, r. prof.

Tehnička obrada:

dr arh. Hranislav Anćelković, r. prof.

ISBN 86-80295-59-0

Tiraž: 100 primeraka

Štampa:
"Copy house" i "Krug", Niš

CRTANJE PRAVILNIH POLIEDARA U JEDNOJ ORTOGONALNOJ PROJEKCIJI

Marija Obradović [1]
Slobodan Mišić [2]

Rezime

Dovoljno je da u samo jednoj ortogonalnoj projekciji poznajemo 3 tačke jedne strane nekog pravilnog poliedra da bi smo mogli da nacrtamo ostatak tela. Kako su strane poliedra identični, pravilni poligoni, oko svakog od njih moguće je opisati krug, identičan ostalima. Na taj način, sa 3 komplanarne tačke ABC, zadata je strana poliedra, bilo da je reč o trouglu, paralelogramu ili petouglu, oko koje će biti opisana elipsa, čiji će centar biti u težištu poligona. Zatim određujemo dva para spregnutih prečnika, koji će biti parovi pridruženih zraka involutornog pramena sa temenom u centru elipse, a ortogonalni par pridruženih zraka biće njene ose. Veličina velike ose elipse odgovaraće prečniku opisanog kruga oko strane poliedra. To će, ujedno, biti i prava u ravni strane ABC, paralelna sa projekcijom ravni, pa ćemo je uzeti za osu rotacije čime ćemo naći pravu veličinu strane poliedra, odnosno njegovu ivicu (na osnovu čega konstruišemo i potrebne visine). Sa malom osom elipse, biće stopljena normala na ravan strane ABC. Postojaće 4 rešenja. Na ovaj način dobijamo aksonometrijsku sliku tela, direktno iz jedne ortogonalne projekcije.

Ključne reč: poliedar, opisani krug, involucija, ose, aksonometrija

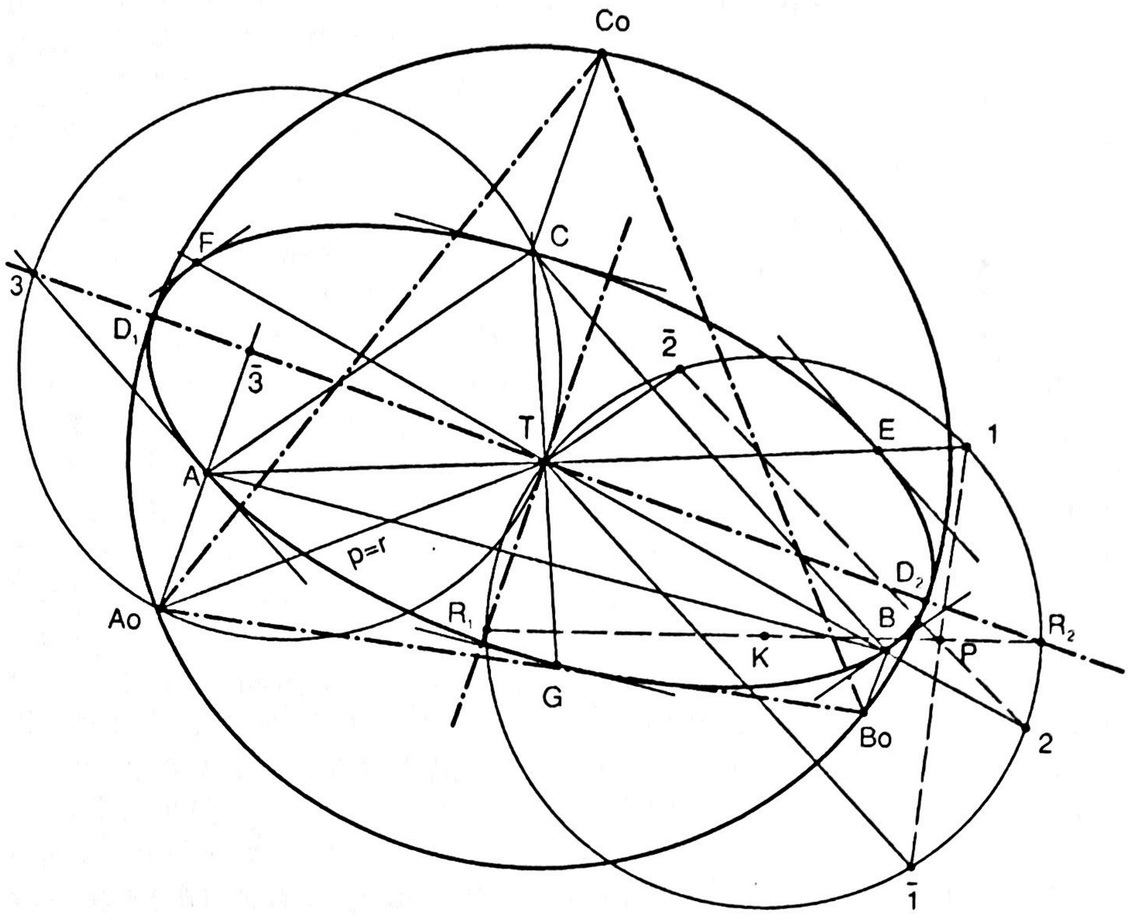
[1] Marija Obradović, magistar, asistent, Građevinski fakultet u Beogradu
[2] Slobodan Mišić, asistent pripravnik, Građevinski fakultet u Beogradu

Pravilnim poliedrom nazivamo svaki konveksan poliedar čije su strane podudarni pravilni poligoni, a kod kojeg se u svakom temenu sustiče isti broj ivica. Postoji 5 vrsta pravilnih poliedara: tetraedar, kocka, oktaedar, ikosaedar i dodekaedar. Moguće je, poznajući neke opšte karakteristike ovih tela, kao i njihove pojedinačne odlike, nacrtati svaki od njih, koristeći se jednom ortogonalnom projekcijom na određenu, usvojenu ravan (α). Dakle, koordinatni sistem ravni nam nije potreban, već problem rešavamo sintetički.

Dovoljno je da bude poznata ortogonalna projekcija jedne strane nekog pravilnog poliedra na usvojenu ravan (α) da bi smo mogli da nacrtamo čitavo telo. Pri tom nije bitno kakav položaj ravan strane pravilnog poliedra zauzima prema usvojenoj ravni (α). Polazeći od stava iz definicije poliedra, da su sve njegove strane identični, pravilni poligoni, oko svakog od njih moguće je opisati i u njega upisati krug. Ovu osobinu koristićemo za rešavanje problema.

Uzmimo na primer tetraedar ABCD, (sl.1.), čija je projekcija strane ABC na ravan (α) poznata, tako da tačke A_α B_α C_α (u daljem tekstu ABC) formiraju sasvim proizvoljan trougao. Oko ovog trougla, koji je, dakle, projekcija jednakostraničnog trougla, opisani krug videće se kao opisana elipsa, čiji će se centar nalaziti u težištu (T) ovog trougla. S obzirom na to da se sva četri karakteristična centra jednakostraničnog trougla poklapaju (centar opisanog kruga, centar upisanog kruga, ortocentar i težište), koristićemo se konstrukcijom za iznalaženje težišta, jer je jedino ono invarijanta paralelnog projektovanja. Tako je tačka T zapravo projekcija centra kruga opisanog oko jednakostraničnog trougla i u njoj će svakako biti i centar njegove projekcije - elipse (centar krive je takođe invarijanta paralelnog projektovanja).

Spregnute prečnike ove elipse određujemo tako što tačku A prebacimo centralno-simetrično u odnosu na tačku T, pri čemu dobijamo tačku E, odnosno prečnik AE, a poznajući geometriju jednakostraničnog trougla i znajući da je paralelnost pravih takođe invarijanta paralelnog projektovanja, određujemo tangente u tačkama A i E, koje moraju biti paralelne sa BC, pa samim tim i pravac spregnutog prečnika prečniku AE. Na opisani način dobijamo i prečnik BF, kao i pravac njemu spregnutog prečnika paralelan sa AC.



sl.1

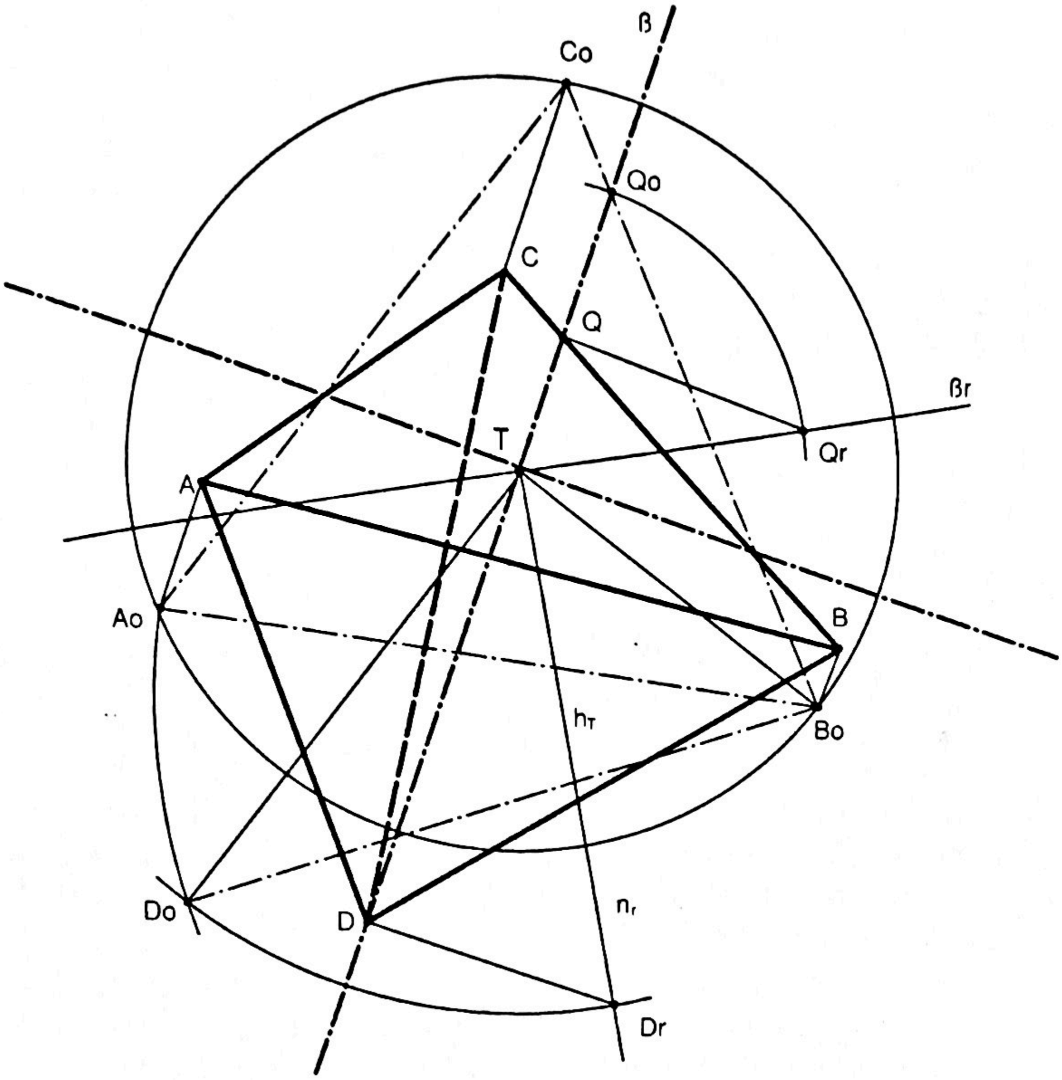
Sada smo dobili dva para pridruženih zraka eliptičke involucije, iz pramena (t) čije je teme u tački T. U tako definisanom involutornom pramenu, pomoću poznatog postupka nadopune involutornih pramenova, određujemo njegov ortogonalni par, koji zapravo predstavlja pravce osa ove elipse.

Veličinu velike ose elipse (a), dalje, možemo naći iznalaženjem dvostrukih tačaka D_1 i D_2 na hiperboličkom involutornom nizu na ovoj osi, kao nosaču, koristeći se potencijom čija je vrednost jednaka poluprečniku kruga (k). Veličina male ose nije nam potrebna za samo rešenje problema.

Osu (a) elipse možemo potom usvojiti za osu rotacije oko koje trougao ABC rotira dok ne dođe u položaj paralelan sa ravni projektovanja (α). Tada će se oko njega opisani krug (k) videti u pravoj veličini, a prečnik će mu biti upravo duž D_1D_2. Ako je osa (a) paralelna sa ravni (α), onda će pravac male ose (b) biti pravac normale na ravan trougla ABC, odnosno pravac zračne ravni (β), normalne na ravan (α). Kako se rotacija svake tačke oko ose rotacije odvija po krugu koji leži u ravni normalnoj na osu rotacije, tako ćemo i krugove rotacije tačaka A, B i C oko ose (a) videti zračno, po pravcima paralelnim sa malom osom elipse (b). U preseku ovih zraka sa krugom (k), dobićemo tačke A_0, B_0 i C_0, temena jednakostraničnog trougla, koji će se sada videti u pravoj veličini. Ivica tetraedra na ovaj način postaje poznata ($i=A_0B_0=B_0C_0=C_0A_0$), a takođe i visina tetraedra, posle primene poznate konstrukcije (bazirane na obaranju pravouglog trougla čija je hipotenuza ivica tetraedra AD, a katete: TA i TD, odnosno sama visina tetraedra).

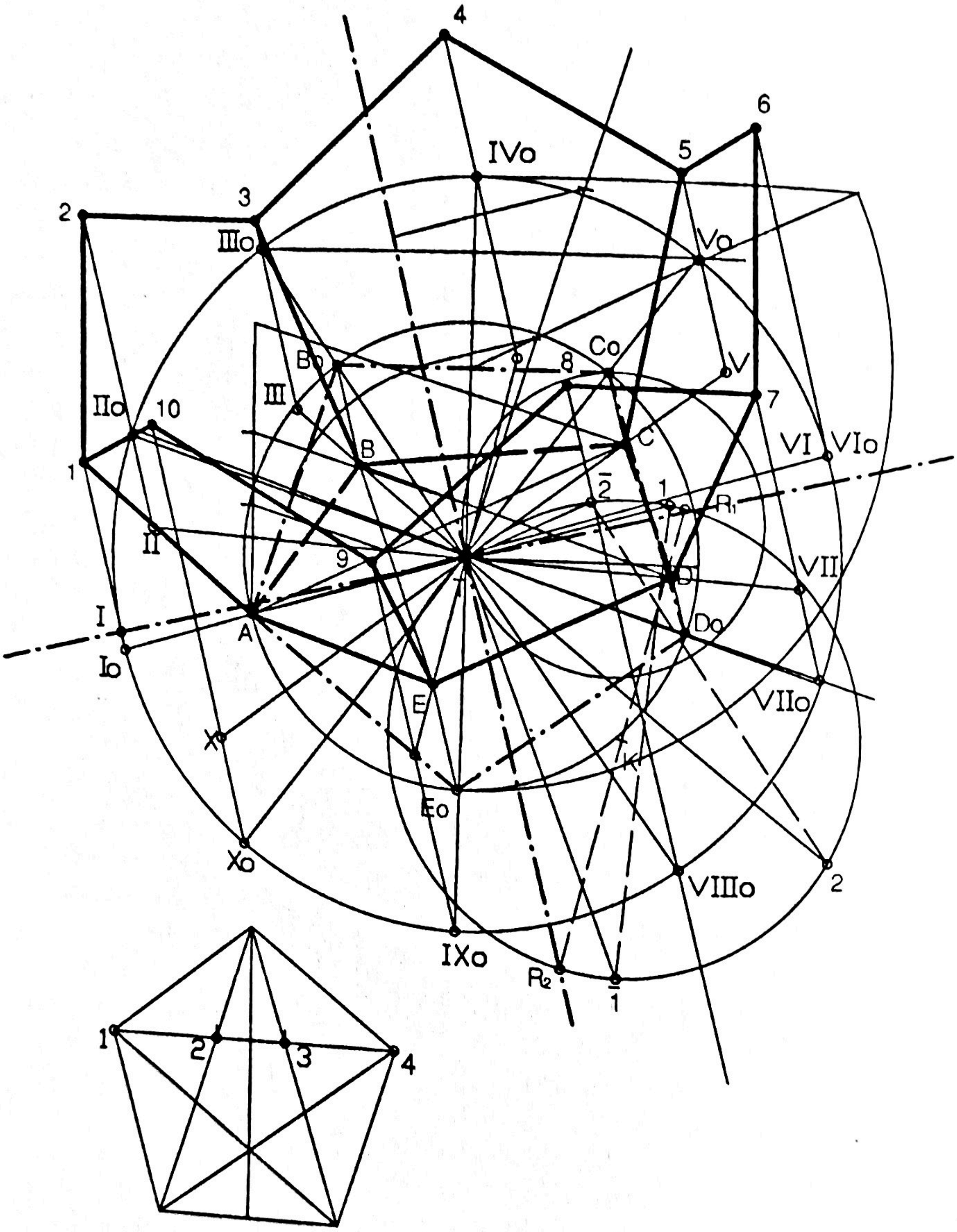
Budući da se visina tetraedra nalazi na normali na ravan trougla ABC, povučenoj iz težišta (T), teme D visine TD nalaziće se na pravcu male ose (b) elipse. Pojaviće se četri rešenja, u zavisnosti od uslova zadatka: da li je teme A iznad ili ispod ose (a), ili nekog od temena, odnosno da li je teme D sa jedne ili druge strane ravni trougla ABC (kao i kod ostalih zadataka sličnog tipa).

Da bi smo dobili jedno rešenje za tačku D, (sl.2.), zračnu ravan (β) koja se vidi stopljeno sa osom (b), rotiraćemo oko same ose (b) do pložaja paralelnog sa ravni (α), kada ćemo ravan (β) videti u pravoj veličini. Duž TQ, po kojoj ova ravan seče trougao ABC, sada će se videti u pravoj veličini (TQ_0) koju prenosimo iz rotirane ravni trougla $A_0B_0C_0$ na krug rotacije tačke Q. Tako dobijamo zračni položaj ravni trougla ABC, (ravan β_r), na osnovu čega povlačimo normalu (n_β^R) na ravan (β) iz tačke T, koja će se sada videti u pravoj veličini, pa na nju



sl.2.

možemo da nanesemo visinu tetraedra (h) i da odredimo tačku D_r. Vratićemo tačku D_r na osu (b) upravnim zrakom kruga rotacije i zatim spojiti temena i odrediti vidljivost, shodno prethodno definisanim uslovima zadatka.



sl.3.

Na ovaj način, nacrtali smo tetraedar bez korišćenja susedne neposredne ortogonalne projekcije. Primenom opisanog konstruktivnog postupka možemo nacrtati bilo koji pravilan poliedar, znajući mu vrstu i tri poznate tačke iste strane, projektovane na izabranu ravan (α).

U prilogu je dat primer za iscrtavanje dodekaedra, odnosno jedne njegove polovine. (sl.3.) Dakle, možemo dobiti sliku pravilnog poliedra odmah u aksonometriji bez prethodnog pozivanja na ijednu neposredno vezanu ortogonalnu projekciju.

Primenom ovog konstruktivnog postupka možemo nacrtati i sliku bilo kojeg nepravilnog poliedra ukoliko bi smo, uz poznate tri komplanarne tačke bazisa poznavali i koordinate tačaka van ravni ABC. Ovaj rad je, međutim, fokusiran na pravilne poliedre kao specijalne slučajeve poliedarskih površi, iz tog razloga što su oni u potpunosti zadati najmanjim brojem elemenata (tačaka) u odnosu na ostale poliedre.

Umesto opisanog može se koristiti i upisani krug u trougao s tim što bi smo u tom slučaju operisali diralištima umesto temenima trougla, što je dualno.

LITERATURA:

1. Anagnosti P.: Nacrtna geometrija, Naučna knjiga, Beograd 1984.
2. Gagić Lj.: Nacrtna geometrija, Akademska misao, Beograd 1999.
3. Niče V.: Uvod u sintetičku geometriju, Školska knjiga, Zagreb 1956.
4. Sbutega V.: Sintetička geometrija I, Skripta za poslediplomske studije, Arhitektonski fakultet, Beograd, 1986.
5. Platonic solids - www.mathacademy.com / prime 1997-2002.
6. Regular polihedra - www.geom.umn.edu / docs oct. 1995.