35 godina univerziteta u Nišu

XX
Jugoslovensko savetovanje za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku

zbornik radova

naučni skup sa međunarodnim učešćem

15–16.9.2000.
NIŠ

40 godina visokoškolske nastave u Nišu

moNGeometrija 2000

IZDAVAČ:

Jugoslovensko udruženje za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku

Organizacioni odbor XX Jugoslovenskog savetovanja za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku

NAZIV PUBLIKACIJE:

ZBORNIK RADOVA
naučni skup
sa međunarodnim učešćem

Recenzenti:

dr arh. Hranislav Anđelković, r. prof.
dr arh. Miroslav Marković, r. prof.
dr arh. Biserka Marković, r. prof.

Urednik:

dr arh. Hranislav Anđelković, r. prof.

Tehnička obrada:

dr arh. Hranislav Anđelković, r. prof.

ISBN 86-80295-50-7

Tiraž: 100 primeraka

Štampa :
"Copy house", Niš i "Zenit", Niš

IZNALAŽENJE DIREKTNE VEZE IZMEĐU JEDNE REALNE DVOSTRUKE PRAVE I ŽIŽA OPŠTE KOLINEARNIH POLJA

Marija Obradović[1]

Rezime

Teorija Opšte Kolinearnih polja i Teotija žiža (koja se takođe primenjuje na O.K. polja) u ovom radu su povezane jednim konstruktivnim postupkom koji omogućava direktno iznalaženje dvostrukih elemenata (onih koji se preslikavaju sami u sebe) O.K. polja, ako su ova zadata samo sa dva para pridruženih tačaka - žiža (tj. Lagerovim tačkama preslikanih apsolutnih involucija sa beskonačno dalekih pravih ovih polja na nedoglednicama). Konstruktivni postupak dat u radu, zasniva se na rotaciji, odnosno, koristi metode elementarne geometrije, premda obe piolazne teorije počivaju na principima projektivne geometrije. Ovim načinom se rešava problem trećeg stepena, (jer se kao rezultat dobijaju tri dvostruke prave koje u presecima daju i tri ***dvostruke tačke), i to postupno: prvo nalaženjem jedne realne dvostruke prave,*** *a zatim i preostalog para konjugovanih dvostrukih pravih, korišćenjem komplementarnog ugla između nedoglednica. Konkretno je dat primer za pronalaženje samo jedne, realne dvostruke prave.*

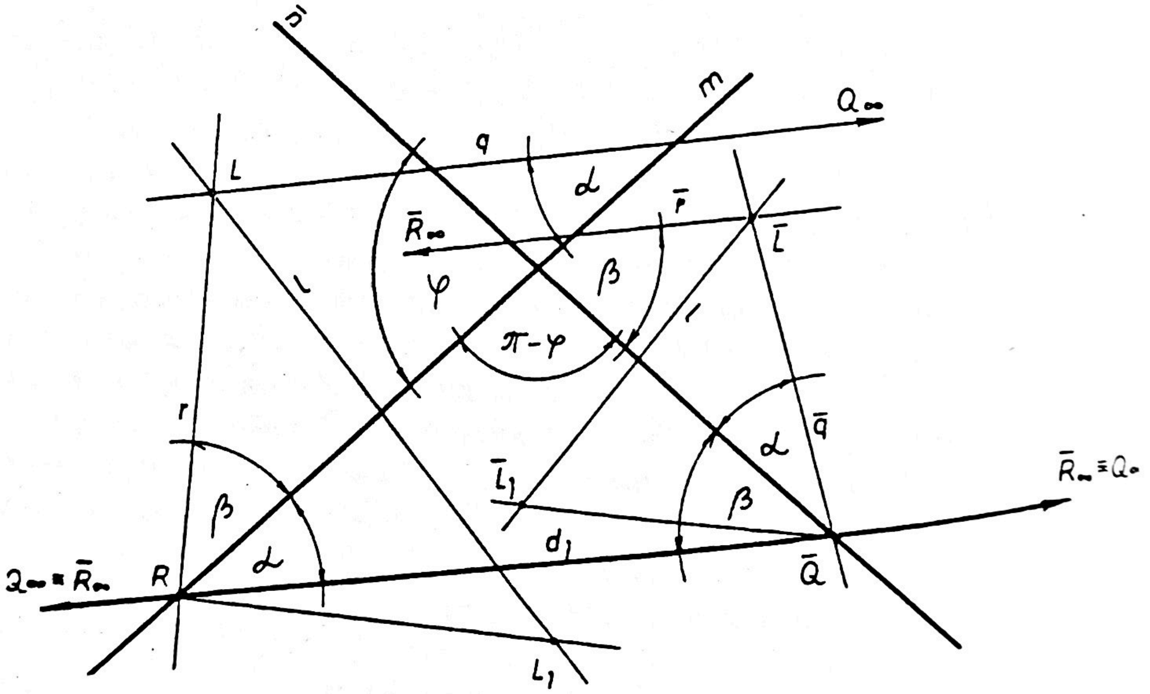
Ključne reči: žiže, nedoglednice, dvostruka prava, ugao, rotacija.

Data su dva opšte kolinearna polja (u daljem tekstu: O.K. polja) parovima pridruženih Lagerovih tačaka L, L_1, $\overline{L}$ i $\overline{L}_1$, preslikanih apsolutnih involucija sa beskonačno daleke prave $m_\infty \equiv n_\infty$ ovih polja na nedoglednice m i $\overline{n}$, koje će biti simetrale duži LL_1, odn. $\overline{L}\,\overline{L}_1$, a između kojih je ugao φ ($\varphi \leq \pi$). Lagerove tačke (L, L_1, $\overline{L}$ i $\overline{L}_1$) temena su cirkularnih, involutornih

[1] Marija Obradović, magistar, asistent, Građevinski fakultet u Beogradu

pramenova pravih, korelativnih tačkama preslikane apsolutne involucije na nedoglednicama i nazivaju se žižama O.K. polja, a cirkularni pramenovi u njima su projektivno pridruženi, s tim što su pramenovi pravih (L) i ($\bar{L}$) međusobno identični, a (L_1) i ($\bar{L}_1$) – inverzni. Na taj način će i ugao bilo kojeg zraka cirkularnog pramena (L) prema nedoglednici biti jednak uglu koji njemu pridruženi zrak cirkularnog pramena ($\bar{L}$) zaklapa sa nedoglednicom $\bar{n}$ (*videti magistarski rad prof. dr Aleksandre Jovanović – Zdravković, str 16*).

Tražimo jednu realnu dvostruku pravu ovih polja. Preostale dve, koje mogu biti i konjugovano imaginarne, nije neophodno istovremeno zahtevati, kroz jedinstven konstruktivni zahvat, budući da rešenje ovog problema trećeg stepena, odnosno nalaženje preostalog para konjugovanih dvostrukih pravih, može da se nađe ovom[2], ali i primenom drugih konstrukcija.



Slika 1.

Realna dvostruka prava d_1 je nosač kolokalnog niza projektivno pridruženih tačaka ovih polja. Nedogledi ovog niza, R i $\bar{Q}$, nalaziće se upravo na nedoglednicama *m*, odnosno $\bar{n}$ ovih polja. Ako zrak $\bar{r}$ pramena ($\bar{L}$), koji

[2] Na primer, druge dve dvostruke prave lako ćemo naći, upotrebom komplementarnog ugla ($\pi-\varphi$) između nedoglednica, u konstrukciji o kojoj je reč u ovom radu.

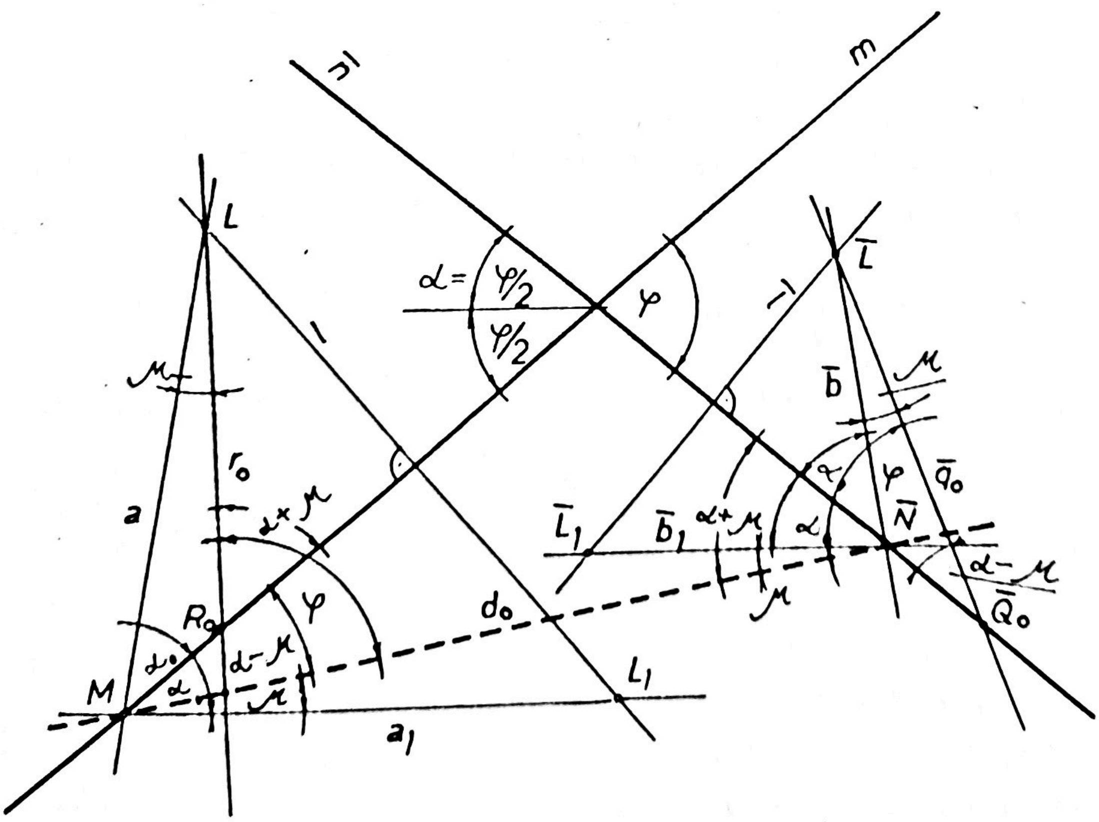
prolazi beskonačno dalekom tačkom $\bar{R}_\infty$ prave d_1 zaklapa sa nedoglednicom $\bar{n}$ ugao β, pod istim uglom će se iz žiže L (odn, L_1) videti i nedogled R, na nedoglednici m, a analogno ovome, pod uglom α, koji zrak q pramena (L) koji prolazi beskonačno dalekom tačkom Q_∞ dvostruke prave d_1, videće se i nedogled $\bar{Q}$ na nedoglednici $\bar{n}$, iz žiža $\bar{L}$ i $\bar{L}_1$. (Skica 1.) *Videti magistarski rad mr Marije Obradović, zaključak 16, str. 56.*

Dakle, pod uglom α, koji dvostruka prava d_1 zaklapa sa nedoglednicom m, videće se nedogled $\bar{Q}$ na nedoglednici $\bar{n}$ iz žiža $\bar{L}$ i $\bar{L}_1$, a pod uglom β koji d_1 zaklapa sa $\bar{n}$, videće se nedogled R iz žiža L i L_1.

Ako sada posmatramo trougao $\Delta R\bar{Q}H$ (pri čemu je H tačka u kojoj se seku nedoglednice m i $\bar{n}$), primetićemo da je:

$$\alpha + \beta + (\pi - \varphi) = \pi$$
$$\alpha + \beta + \pi - \varphi = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \varphi$$

Da bi smo, koristeći se datim postavkama, pronašli dvostruku pravu d_1, postupićemo na sledeći način: (Slika 2.)



Slika 2.

1. Iz žiža L i L_1 povući ćemo prave a i a_1, koje sa nedoglednicom m zaklapaju uglove: α_0 odn. $-\alpha_0=\varphi/2$, tako da se sa nedoglednicom m seku u istoj tački M. Iz žiža $\bar{L}$ i $\bar{L}_1$ povlačimo prave $\bar{b}$ i $\bar{b}_1$ koje sa nedoglednicom $\bar{n}$ zaklapaju isti ugao α_0 odn. $-\alpha_0=\varphi/2$, tako da u preseku sa njom daju tačku $\bar{N}$.

2. Spajanjem tačaka M i $\bar{N}$, dobijamo spojnicu d_0, koja sa pravama a_1 (L,M) i $\bar{b}_1$ ($\bar{L}_1$ $\bar{N}$) zaklapa uglove μ:

$a_1 // \bar{b}_1$ s obzirom da je $\angle a_1m=\alpha_0=\varphi/2$, i $\angle \bar{b}_1\bar{n}=\alpha_0=\varphi/2$,

ugao između nedoglednica je : $\angle m\bar{n}=\pi-\varphi$

$\alpha_0+\alpha_0=\varphi$ odn. $\varphi/2+\varphi/2+\pi-\varphi+X=2\pi \Rightarrow X=\pi$

$\angle d_0a_1=\mu$ i $\angle d_0\bar{b}_1=\mu$, kao uglovi s paralelnim kracima.

3. Ukoliko je $\angle d_0m=\alpha_0-\mu$, a $\angle d_0\bar{n}=\alpha_0+\mu$, iz žiže L povlačimo pravu r_0 koja sa a zaklapa ugao μ, tako da r_0 sa m obrazuje ugao $\alpha_0+\mu$:

$$\alpha_0-\mu+\alpha_0+\mu=2\alpha_0=2\varphi/2=\varphi$$

Iz $\bar{L}$ povlačimo pravu $\bar{q}_0$, koja sa $\bar{b}$ ($\bar{L}$ $\bar{N}$) zaklapa takođe ugao μ, odn. sa $\bar{n}$ ugao $\alpha_0-\mu$:

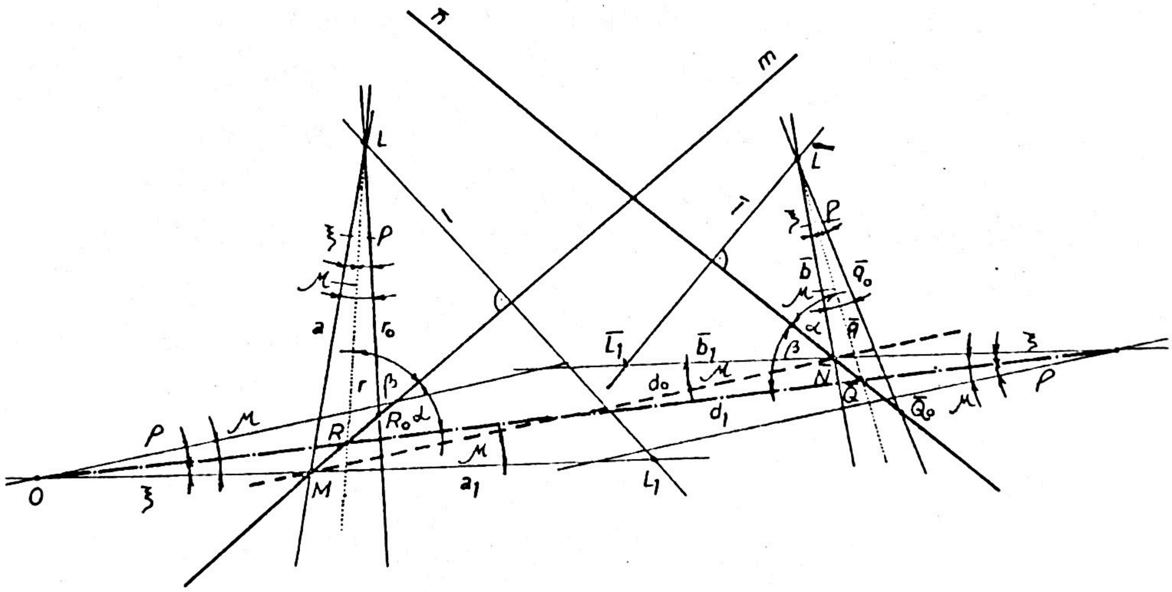
$$\alpha_0+\mu+\alpha_0-\mu=2\alpha_0=2\varphi/2=\varphi$$

dakle, koja sa d_0 zaklapa takođe ugao φ, pa možemo uvideti da će i prave $\bar{b}$ i $\bar{b}_1$ biti zarotirane za ugao μ.

Spojnica d_0 tako simulira dvostruku pravu, s tim što njeni preseci (tačke R_{01} i $\bar{Q}_{01}$) sa zracima r_0 i $\bar{q}_0$, koji sa njom zaklapaju željene uglove φ, a sa nedoglednicama m i $\bar{n}$ željene uglove: $\alpha_1=\alpha_0-\mu$ i $\beta_1=\alpha_0-\mu$, - nisu na nedoglednicama. To znači da je potrebno zarotirati zrake r_0 i $\bar{q}_0$ za neki ugao ρ, odnosno prave a i $\bar{b}$ za ugao ξ, jer će prava r (LR) deliti ugao μ, između pravih a i r_0, na $\rho+\xi$. Dakle, ako je $\rho+\xi=\mu$, tačka R će se nalaziti u području između tačaka M i R_0 (tačke preseka prave r_0 i nedoglednice m); za to vreme, analogno, tačka $\bar{Q}$ će se nalaziti u području između tačaka $\bar{N}$ i $\bar{Q}_0$ (tačke preseka prave $\bar{q}_0$ i nedoglednice $\bar{n}$), a spojnica $\bar{L}\ \bar{Q}$ deliće ugao μ između pravih $\bar{b}$ i $\bar{q}_0$ na $\xi + \rho$. Tako ćemo dobiti zajedničko rešenje prethodna dva zahteva:

1. $\angle d_1 m = \alpha = \angle\ \bar{q}\ \bar{n}$; $\angle d_1 \bar{n} = \beta = \angle rm$ i
2. $R \in m$ i $\bar{Q} \in \bar{n}$.

Koji je to ugao ξ za koji treba zarotirati zrake a odnosno $\bar{b}$ da bi smo dobili željene prave r i $\bar{q}$ koje na nedoglednicama daju nedoglede R i $\bar{Q}$? Predpostavimo da već imamo gotovo rešenje. (Slika 3.)



Slika 3.

4. Kroz nedogled R na nedoglednici m, koji bi nastao u preseku zraka r (LR) i nedoglednice m, prolazi dvostruka prava d_1 i zaklapa sa pravom a_1 ugao ξ, za koji je, takođe zarotirana i prava a (LM), da bi došla u položaj r (LR). Dakle. Ugao ξ je ugao između pravih a i r. Prave a_1 i d_1 seku se u tački O.

5. Iz tačke O, preseka pravih a_1 i d_1 , postavićemo pravu s, koja sa a_1 zaklapa ugao μ (u smeru ka R_0), tj. ugao identičan uglu između pravih a i r_0. Tražeći podudarnosti pojedinih likova, koje će nas dovesti do rešenja, pogledajmo uvećanu situaciju u okolini nedogleda R, na slici 4:

6. Zarotiraćemo, ca centrom rotacije u tački R, tačku M, do položaja M_R, kada će se tačka ponovo naći na pravoj a_1. Za isti ugao $(\pi - 2\alpha_0)$ zarotiraćemo i tačku R_0, do položaja R_{0R}. S obzirom na to da je:

$\angle ROM = \xi$ i $\angle RLM = \xi$ - polazna predpostavka

$\angle RMM_R = \alpha_0$ i $\angle RM_RM = \alpha_0$ – kao nalegli uglovi jednakokrakog trougla.

$RM = RM_R$ – kao kraci jednakokrakog trougla

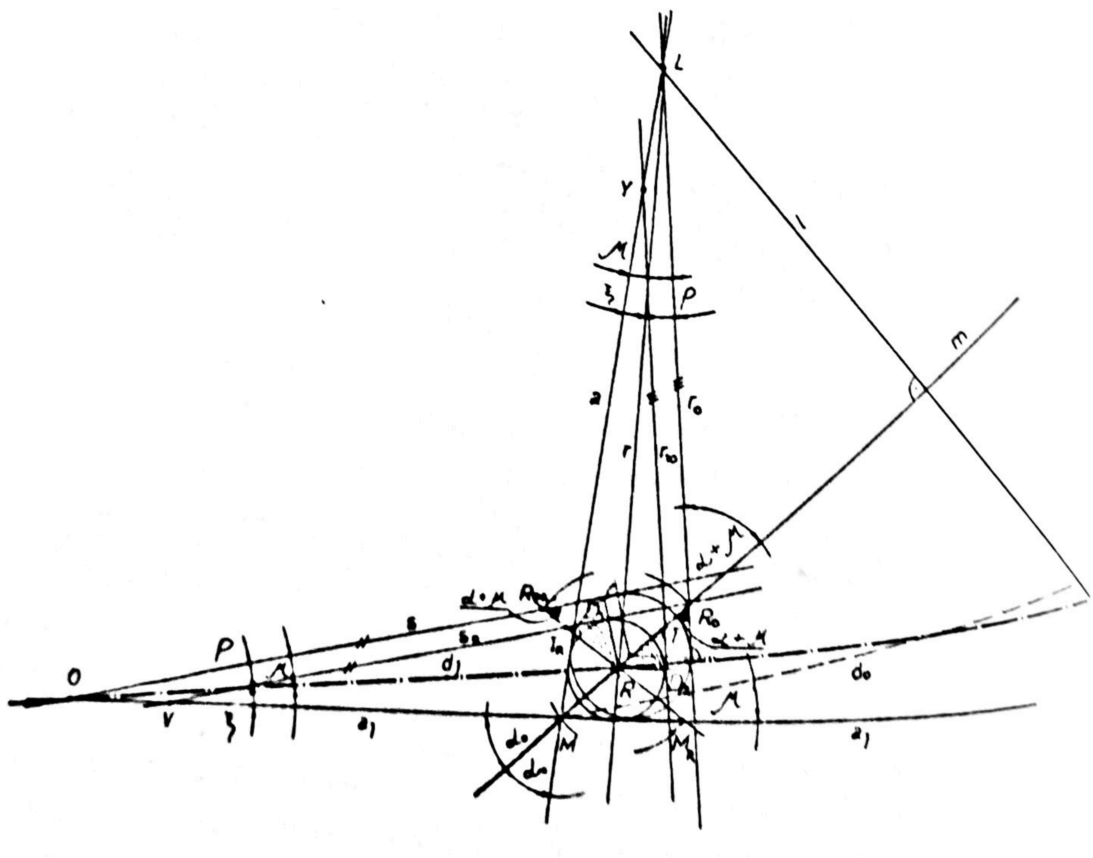
$\Delta ROM_R \cong \Delta RLM$

Odatle proističe zaključak da R_{OR} pripada pravoj s, jer:

$OR \cong LR$, $\mu - \xi = \rho$, što je ugao između pravih d_1 i s, kao i između uglova r i r_0, a $\angle RR_0L = \pi - (\alpha + \mu)$, dok je:

$\angle OR_{OR}R = \pi - \mu - \alpha$ što je identično, tako da je:

$$\left.\begin{array}{l} OR \cong LR \\ \rho = \rho \\ \pi - \mu - \alpha = \pi - \mu - \alpha \end{array}\right\} \Delta ORR_{OR} \cong \Delta LRR_0$$



slika 4.

Dakle, R_{OR} se mora nalaziti na pravoj s, jer su tačke R_0 i R_{OR} temena podudarnih trouglova, $\Delta ORR_{OR} \cong \Delta LRR_0$ pri čemu je OR_{OR} duž na pravoj s.

Znajući navedeno, želimo da dođemo do onih elemenata, koji će nam omogućiti da tačno odredimo položaj dvostruke prave d_1, ne znajući ni ugao ξ, niti položaj tačke R.

(Sve što radimo u polju $\{P\}$, analogno ponavljamo i u polju $\{\overline{P}\}$, tako da će dvostruka prava d_1, sa pravom $\overline{b}_I$ zaklapati ugao ξ i seći će je u tački $\overline{U}$, itd.)

7. Sa nedogledom R kao centrom, naći ćemo krug koji tangira prave a i a_1, što je moguće, jer je nedogledníca m, na kojoj se nedogled R i nalazi, simetrala ugla između a i a_I, i deli ga na dva puta $\alpha_0 = \varphi/2$.

8. Ovaj krug (k_0), sa centrom u R, tangiraćemo novom pravom s_0, koja sa pravom a_1 zaklapa ugao μ, a koja je paralelna sa pravom s (uglovi s paralelnim kracima). Prava s_0 seče pravu a u tački V. Ova će prava seći duž M_RR_{0R} u tački T_R.

Isti krug tangiraće i prava r_{10}, koja sa a zaklapa ugao μ, a paralelna je sa r_0 i koja seče pravu a u tački Y. Ova prava će seći nedoglednicu m u tački T.

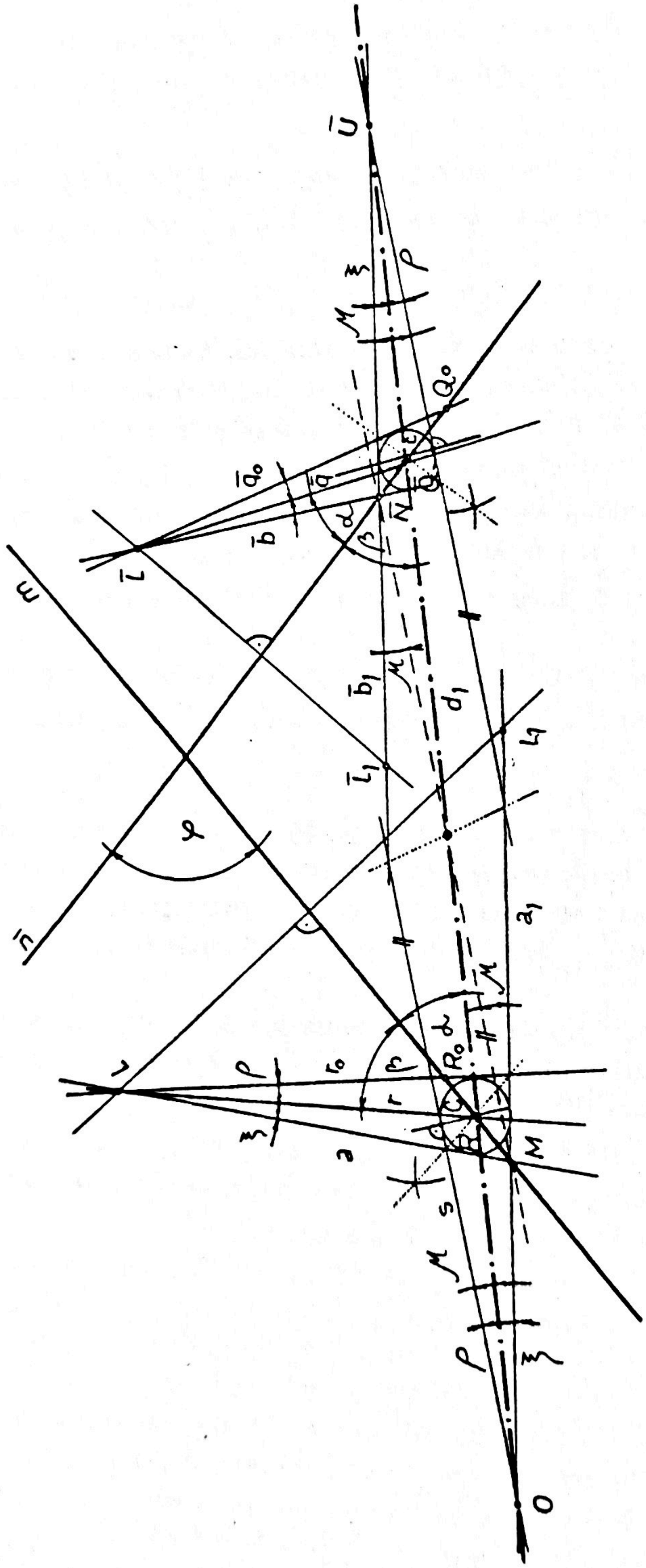
9. Uočićemo četvorougao opisan oko ovog kruga. Njegovi uglovi su podudarni uglovima četvorougla koji bi obrazovale prave a, a_I, s i r_0. Treba dokazati da je i povećanje njegovih ivica srazmerno, tj, da su ovi četvorouglovi slični (homotetični), odnosno, da je i u četvorougao između pravih a, a_I, s i r_0 moguće upisati krug.

Dirałište D_1 prave s_0 i kruga k_0, sa samom pravom s_0 i duži RR_{0R}, na kojoj će se nalaziti tačka T_R, obrazuje pravougli trougao, čiji je još jedan poznati ugao: $\alpha + \mu$, a naspramna kateta RD_1 (poluprečnik kruga).

Dirałište D_2 prave r_{10} i kruga k_0, sa samom pravom r_{10} i duži RT (na nedoglednici), takođe obrazuje pravougli trougao, sa jednim uglom $\alpha + \mu$ i naspramnom katetom RD_2 (poluprečnikom kruga k_0).

Trouglovi RD_1T_R i RD_2T su podudarni, pa su tako i duži RT_R i RT podudarne. To znači i da su duži T_RR_{0R} ($T_RR_{0R}=RR_{0R}-RT_R$) i TR_0 ($TR_0=RR_0-TR_0$) jednake.

10. Četvorougli OVT_RR_{0R} i $LYTR_0$ su, na osnovu ovoga, takođe podudarni: uglovi su im jednaki, što proizilazi iz dokaza da su $\Delta ORR_{0R} \cong \Delta LRR_0$ i polazne postavke da je $s_0 // s$ i $r_{10} // r_0$, što će dati uglove s paralelnim kracima. Ako je uz to i $T_RR_{0R}=TR_0$ i $OR_{0R}=LR_0$, dokazujemo podudarnost ovih



slika 5.

četvorouglova, a iz nje izvlačimo zaključak da je duž $OV \cong LY$. To znači da trouglove, sa temenima u V i Y, opisane oko kruga k_0 proporcionalno povećavamo za isti odnos: $LM/YM = OM_R/UM_R = c$, tako da će i četvorougli, nastali ukrštanjem ovih parova podudarnih trouglova, biti – slični (homotetični), pa ako je moguće upisati krug (k_0) u jedan, moguće je upisati krug (k) i u drugi.

11. Na taj način, upisivanjem kruga k, koji će dodirivati prave a, a_1 i r_0, a čiji će centar biti negde na nedoglednici m, (ne obavezno u R) i postavljanjem tangente s na taj krug, koja će sa pravom a_1 zaklapati ugao μ, dobijamo tačku preseka O, pravih a_1 i s, kroz koju sigurno prolazi dvostruka, realna prava d_1. (Slika 5.)

Ako sve navedeno ponovimo i u polju $\{\overline{P}\}$, za prave $\overline{b}$, $\overline{b}_1$ i $\overline{q}_0$, a zatim dobijeni krug tangiramo pravom $\overline{t}_0$, u preseku pravih $\overline{t}_0$ i $\overline{b}_1$ dobićemo tačku $\overline{U}$ u polju $\{\overline{P}\}$ koja će takođe pripadati dvostrukoj, realnoj pravoj d_1.

12. Spajanjem tačaka O i $\overline{U}$, dobijamo dvostruku realnu pravu d_1.
(Analogno opisanom postupku, moguće je naći i dvostruke prave d_2 i d_3, ukoliko su realne, polazeći od ugla između nedoglednica $\pi - \varphi$).

ZAKLJUČAK: Ugao izmedju zraka r (LR) i nedoglednice m iznosiće $\alpha_0 + \xi = \beta$; ugao između dvostruke prave d_1 i nedoglednice $\overline{n}$ iznosuće $\alpha_0 + \mu - \rho = \alpha_0 + \xi = \beta$.

Ugao između dvostruke prave d_1 i nedoglednice m iznosiće $\alpha_0 - \mu + \rho = \alpha_0 - \xi = \alpha$, a ugao između zraka $\overline{q}_0$ i nedoglednice $\overline{n}$ iznosiće $\alpha_0 - \xi = \alpha$.

$$\alpha_0 + \xi = \alpha_0 - \xi = \alpha_0 + \alpha_0 = 2\alpha_0 = 2\varphi/2 = \varphi. \Rightarrow \alpha + \beta = \varphi.$$

Na ovaj način smo dokazali polaznu postavku, tj. da je d_1 zaista dvostruka prava ovih O.K. polja.

Literatura:

1. Grujić N.: Doktorski rad; Arhitektonski fakultet, Beograd 1974
2. Zdravković-Jovanović A.: Magistarski rad, Arhitektonski fakultet, Beograd 1977
3. Zdravković-Jovanović A.: Doktorski rad, Arhitektonski fakultet, Beograd 1985.
4. Obradović M.: Magistarski rad, arhitektonski fakultet, Beograd 1995.