Branko Šavija[1], Mira Petronijević[2], Marija Nefovska-Danilović[3]

MODALNA ANALIZA RAMOVSKIH KONSTRUKCIJA PRIMENOM METODE SPEKTRALNIH ELEMENATA

Rezime:

Dinamička analiza ramovskih konstrukcija u frekventnom domenu ima niz prednosti. Za gredne elemente mogu se primeniti spektralni elementi čija je dinamička matrica krutosti frekventno zavisna, dobijena rešavanjem diferencijalne jednačine štapa. U njoj su, pored elastičnog dela, sadržani i inercijalni deo i prigušenje. U radu su prikazane teorijske osnove metode spektralnih elemenata, i primena ove metode u modalnoj analizi ramovskih konstrukcija. Prikazano je poređenje dobijenih rezultata sa rezultatima dobijenim primenom metode konačnih elemenata.

Ključne reči: Frekventni domen, spektralni elementi, modalna analiza

MODAL ANALYSIS OF FRAME STRUCTURES USING SPECTRAL ELEMENT METHOD

Summary:

Dynamic analysis of frame structures can be done with special advantage in the frequency domain. The beam elements can be modeled using spectral elements with frequency dependant dynamic stiffness matrices, satisfying the wave equation. The dynamic stiffness matrices of these elements contain not only elastic but also inertial and damping terms. In this paper the formulation of the spectral element method is briefly presented. Its use in modal analysis of frame structures is then considered. The results obtained are then compared to those obtained using the finite element method.

Key words: Frequency domain, spectral elements, modal analysis

---

[1] dipl. građ.inž, student doktorskih studija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd

[2] dr, dipl.građ.inž, vanredni profesor, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd

[3] Mr, Asistent, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd

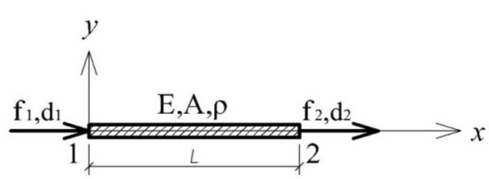
1. UVOD. TEORIJSKE OSNOVE

1.1. UVOD

Za dinamičku analizu ramovskih konstrukcija najčešće se primenjuje metoda konačnih elemenata u vremenskom domenu. Pri tome je najčešće u upotrebi postupak u kome se vrši zamena raspodeljenih masa direktno koncentrisanim masama u čvorovima mreže konačnih elemenata. U praksi se pokazalo da je, u određenim slučajevima, za dobijanje rezultata dovoljne tačnosti, potrebno primeniti veliki broj konačnih elemenata, što smanjuje brzinu i efikasnost proračuna, odnosno povećava utrošak računarskog vremena. Dinamičku jednačinu kretanja MKE moguće je, primenom Fourier-ove transformacije, prevesti iz vremenskog u frekventni domen. Posmatrani problem se rešava u frekventnom domenu i na kraju se, primenom inverzne Fourier-ove transformacije, rezultati proračuna vraćaju iz frekventnog u vremenski domen. Metod konačnih elemenata može se primeniti i u vremenskom i u frekventnom domenu, gde je potrebno formirati matrice prigušenja C, matrice masa M i matrice krutosti K elemenata, odnosno sistema. Međutim, za gredne elemente je moguće formulisati spektralni element, koji ima jednu jedinu dinamičku matricu krutosti, koja je frekventno zavisna, i dobijena iz tačnog rešenja diferencijalne jednačine štapa. Takav element sadrži kontinualno raspodeljenu masu. Dinamička matrica krutosti sadrži, pored elastičnog dela, inercijalni deo i prigušenje. Primenom ovog elementa je moguće modelirati element ramovske konstrukcije konstantnog preseka samo jednim spektralnim elementom, tj. nije potrebna podela elementa konstrukcije na veći broj konačnih elemenata radi postizanja veće tačnosti rešenja. Takođe, uticaj deformacije smicanja i rotacione inercije na odgovor konstrukcije, može se uzeti u obzir primenom spektralnog elementa Timoshenko-ve grede, što je posebno značajno kod pobuda visoke frekvencije, kao i kod konstrukcija čiji je poprečni presek takav da im je odnos *b/h* veliki (zidna platna). U radu su prikazane osnove metode spektralnih elemenata i njihova primena u modalnoj analizi ramovskih konstrukcija.

1.2. DINAMIČKE MATRICE KRUTOSTI SPEKTRALNIH ELEMENATA

1.2.1. Spektralni element dinamički aksijalno napregnutog štapa



Slika 1 - Spektralni element dinamički aksijalno napregnutog štapa sa označenim čvornim stepenima slobode i osnovnim geometrijskim i materijalnim karakteristikama.

Parcijalna diferencijalna jednačina kretanja za dinamički aksijalno napregnut štap može se prikazati u obliku:

$$\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{1}$$

U jednačini je E Young-ov moduo elastičnosti a ρ gustina materijala. Rešavanjem diferencijalne jednačine mogu se odrediti vrednosti talasnog broja k:

$$k_1 = \sqrt{\frac{\rho}{E}\omega^2}\,; k_2 = -\sqrt{\frac{\rho}{E}\omega^2} \tag{2}$$

Jasno je da vrednosti talasnih brojeva zavise od karakteristika štapa i vrednosti kružne frekvencije ω. Rešenje jednačine (1) moguće je iskazati kao linearnu kombinaciju eksponencijalnih funkcija $e^{ik_i x}$:

$$\tilde{u}(x) = \overline{A}e^{ik_1 x} + \overline{B}e^{ik_2 x} \tag{3}$$

U jednačini (3) sa $\tilde{u}$ označena je kompleksna amplituda pomeranja u pravcu lokalne x ose elementa (slika 1), a $\overline{A}$ i $\overline{B}$ su nepoznati koeficijenti.

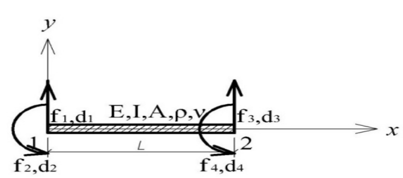
Nepoznate koeficijente iz jednačine (3) moguće je odrediti iz graničnih uslova na krajevima štapa. Na taj način dobija se veza između pomeranja duž elementa i pomeranja u čvorovima elementa. Funkcije oblika (engl. shape functions) su za spektralne elemente frekventno zavisne:

$$\{u\} = \left[N_u\right]\{d\} \tag{4}$$

Matrica funkcija oblika dinamički aksijalno napregnutog spektralnog elementa ima oblik:

$$\left[N_u\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{-e^{ik_1 x}e^{ik_2 L} + e^{ik_2 x}e^{ik_1 L}}{-e^{ik_2 L} + e^{ik_1 L}} & \dfrac{e^{ik_1 x} - e^{ik_2 x}}{-e^{ik_2 L} + e^{ik_1 L}} \end{bmatrix} \tag{5}$$

1.2.2. Spektralni element Euler-Bernoulli-jeve grede



Slika 2 - Spektralni element dinamički napregnute Euler-Bernoulli-jeve grede sa označenim čvornim stepenima slobode i osnovnim geometrijskim i materijalnim karakteristikama.

Parcijalna diferencijalna jednačina kretanja za dinamički napregnut Euler-Bernoulli-jev gredni element:

$$EI\frac{\partial w^4(x,t)}{\partial x^4} = -\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (6)$$

U jednačini je E Young-ov moduo elastičnosti, I moment inercije poprečnog preseka, a ρ gustina materijala. Rešavanjem diferencijalne jednačine mogu se odrediti vrednosti talasnog broja k:

$$k_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\frac{\rho A\omega^2}{EI}};k_{3,4} = \pm i\sqrt[4]{\frac{\rho A\omega^2}{EI}} \quad (7)$$

Vrednosti talasnih brojeva zavise od karakteristika štapa i vrednosti kružne frekvencije ω. Rešenje jednačine (7) moguće je iskazati kao linearnu kombinaciju eksponencijalnih funkcija $e^{ik_i x}$:

$$\tilde{w}(x) = \overline{A}e^{ik_1 x} + \overline{B}e^{ik_2 x} + \overline{C}e^{ik_3 x} + \overline{D}e^{ik_4 x} \quad (8)$$

U jednačini (8) sa $\tilde{w}$ označena je kompleksna amplituda pomeranja u pravcu lokalne x ose elementa (slika 2), a $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ i $\overline{D}$ su nepoznati koeficijenti, koji se mogu odrediti iz graničnih uslova.

Izraz koji definiše polje pomeranja u funkciji čvornih stepeni slobode (pomeranja čvorova-vektora $\{d\}$) i funkcija oblika $[N]$ je:

$$\begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \left[\tilde{N}^e\right]\{d\} \quad (9)$$

Funkcije oblika Euler-Bernoulli-jevog grednog elementa, kao i dinamički aksijalno napregnutog spektralnog elementa, su frekventno zavisne. Zbog toga što kružna frekvencija ω može imati vrednost od 0 do beskonačno, ovako formulisan element ima beskonačno stepeni slobode. Takođe, pošto funkcije oblika predstavljaju tačna rešenja odgovarajućih diferencijalnih jednačina, kao rezultat se dobijaju tačne vrednosti pomeranja i unutračnjih sila duž elementa.

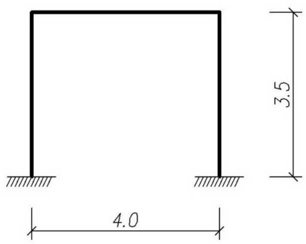
Sličnim postupkom moguće je odrediti dinamičku matricu krutosti Timoshenko-ve grede, koja uzima u obzir uticaj deformacije smicanja i rotacione inercije na odgovor konstrukcije. Dinamička matrica krutosti sistema dobija se postupkom *assembling*-a, koji je poznat u metodi konačnih elemenata.

2.1. PRIMENA METODE SPEKTRALNIH ELEMENATA U MODALNOJ ANALIZI RAMOVSKIH KONSTRUKCIJA

Zbog toga što, za razliku od MKE, metoda spektralnih elemenata uzima u obzir kontinualno raspodeljenu masu, pretpostavlja se da su rešenja dobijena na ovaj način veće tačnosti. Na jednostavnom numeričkom primeru dato je poređenje rezultata dobijenih primenom metode spektralnih elemenata, i primenom MKE. Posmatrani su slučajevi Euler-Bernoulli-jevog i Timoshenko-vog spektralnog grednog elementa.

2.1.1. PRIMER

Posmatra se jednospratni jednobrodni betonski ram, čije su geometrijske karakteristike i karakteristike materijala date na slici.



Karakteristike materijala	
ρ	2400 kg/m^3
E	20 kN/m^2
ν	0,1500

Geometrijske karakteristike			
Stubovi		Grede	
b	20 cm	b	23 cm
d	30 cm	d	40 cm
A	600 cm^2	A	920 cm^2
I	45000 cm4	I	122666,67 cm4

Slika 3 – Geometirjske i materijalne karakteristike rama.

Svojstvene frekvencije rama određene su primenom Euler-Bernoulli-jevog spektralnog grednog elementa, primenog Timoshenko-vog spektralnog grednog elementa, i primenom komercijalnog programskog paketa SAP2000, koji koristi metod konačnih elemenata. Kako metod spektralnih elemenata uzima u obzir kontinualno raspodeljenu masu, moguće je odrediti beskonačan broj sopstvenih frekvencija konstrukcije, za razliku od MKE. Ovde je posmatrano samo prvih šest tonova oscilovanja konstrukcije.

Tabela 1 - Sopstvene frekvencije rama određene primenom metode spektralnih elemenata.

ton	**Spektralni element**		**Spektralni element**		**Razlika (%)**
	Euler-Bernoulli		Timoshenko		
	f (Hz)	ω(rad/s)	f (Hz)	ω(rad/s)	
1	9,31	58,50	9,21	57,87	1,07
2	37,16	233,48	36,44	228,96	1,94
3	69,60	437,31	67,03	421,16	3,69
4	70,99	446,04	67,94	426,88	4,30
5	122,23	767,99	117,09	735,70	4,21
6	173,43	1089,69	165,77	1041,56	4,42

Iz rezultata prikazanih u tabeli 1 može se zaključiti da postoje određene razlike u rezultatima dobijenim primenom Euler-Bernoulli-jevog i Timoshenko-vog grednog elementa, iako je u pitanju konstrukcija kod koje poprečni preseci elemenata nisu takvi da je odnos b/h veliki. Jasno je da se ove razlike, u procentualnom smislu, povećavaju sa porastom frekvencije.

Kako konačni element u programu SAP2000 uzima u obzir uticaj deformacije smicanja, razumljivo je da je veće slaganje pokazao sa rezultatima dobijenim primenom spektralnog elementa zasnovanog na Timoshenko-voj teoriji. U tabeli 2 dato je poređenje rezultata.

Tabela 2 – Poređenje rezultata dobijenih primenom metode spektralnih elemenata i MKE.

ton	**Spektralni element**		**Konačni elementi (0,01m)**	**Razlika (%)**	
	EB f (Hz)	T f (Hz)	SAP2000 f (Hz)	EB/SAP2000	T/SAP2000
1	9,31	9,21	9,12	2,04	0,98
2	37,16	36,44	36,21	2,56	0,63
3	69,60	67,03	66,68	4,20	0,52
4	70,99	67,94	67,52	4,89	0,62
5	122,23	117,09	116,91	4,35	0,15
6	173,43	165,77	165,81	4,39	0,02

Progušćenjem mreže konačnih elemenata mogu se dobiti rezultati koji su približni onima dobijenim primenom metode spektralnih elemenata. Međutim, ovo ima određenu cenu. Naime, posmatran je jednostavan ram, koji se modelira sa svega 3 spektralna gredna elementa. Nasuprot tome, ako se posmatraju rezultati dobijeni primenom MKE (mreža od 0,01m), upotrebljeno je čak 1100 konačnih elemenata. Da je u pitanju složenija i veća konstrukcija, ovaj broj bio bi i značajno veći. Ovu činjenicu treba prihvatiti sa rezervom: naime, već sa konačnim elementima dužine od 1m dobija se dobro poklapanje (u smislu inženjerske tačnosti) dobijenih rezultata za niže tonove, konkretno za prvih 5 tonova. Poznato je da na dinamički odgovor konstrukcije najviše utiču niži tonovi, tako da je ovo, inženjerski, sasvim zadovoljavajuće. Ovo, međutim, nije dovoljno kada se rešavaju neki specijalni problemi, gde su pobude više frekvencije nego što je to uobičajeno kod građevinskih konstrukcija. Sa porastom frekvencije oscilovanja, trebalo bi upotrebiti sve više i više konačnih elemenata za postizanje odgovarajuće tačnosti. Sve ovo nam govori o očiglednim prednostima primene metode spektralnih elemenata, posebno uz korišćenje Timoshenko-vog grednog elementa.

LITERATURA

[1] B. Šavija, „*Dinamička analiza ramovskih konstrukcija u frekventnom domenu primenom metode spektralnih elemenata“,* Diplomski rad, Građevinski fakultet u Beogradu, 2009., Beograd

[2] D. Penava, *„Vibration analysis of frame structures using spectral element method“*, Magistarski rad, Građevinski fakultet u Beogradu, 2008., Beograd

[3] M. Petronijević, G. Schmid, „*Metode linearne dinamičke analize sistema tlo-objekat“*, Izgradnja, 2008., Beograd

[4] M. Nefovska-Danilović*, „Matlab program za dinamičku analizu ramovskih konstrukcija u frekventnom domenu, primenom metode spektralnih elemenata“,* Beograd

[5] T. Black, *„Spectral analysis of bars, beams, and Levy plates“*, Magistarski rad, 2005. Blacksburg, Virginia