

Марија НЕФОВСКА-ДАНИЛОВИЋ, Невенка КОЛАРЕВИЋ

**ПРИМЕНА МЕТОДЕ ДИНАМИЧКЕ КРУТОСТИ У
АНАЛИЗИ СЛОБОДНИХ ВИБРАЦИЈА ОТВОРЕНИХ
КРУЖНИХ ЦИЛИНДРИЧНИХ ЉУСКИ**

**APPLICATION OF THE DYNAMIC STIFFNESS METHOD IN THE FREE
VIBRATION ANALYSIS OF OPEN CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS**

**др Марија Нефовска-Даниловић, дипл. грађ. инж.
ванредни професор Грађевинског факултета Универзитета у Београду**

Рођена је 1972. године. Дипломирала је 1997, магистрала 2003. и докторирала 2013. године на Грађевинском факултету у Београду. Ванредни професор је на групи предмета Теорије конструкција. Поља научног рада: динамика конструкција, интеракција тла и конструкције, метод коначних елемената.

**др Невенка Коларевић, дипл. грађ. инж.
доцент Грађевинског факултета Универзитета у Београду**

Рођена је 1981. године. Дипломирала је 2006. и докторирала 2016. године на Грађевинском факултету у Београду. Доцент је на групи предмета Теорије конструкција. Поље научног рада: теорија плоча и љуски.

Резиме

У овом раду приказана је примена методе динамичке крутости у анализи слободних вибрација отворене кружно цилиндричне љуске са специјалним граничним условима. Динамичка матрица крутости, формулисана на основу тачног решења проблема слободних вибрација по Flüge-овој теорији љуски, имплементирана је у за ту сврху написан Matlab програм за одређивање сопствених фреквенција и облика осциловања. У нумеричким примерима је анализирана љуска променљиве дебљине и бачвасти кров. Резултати су упоређени са резултатима комерцијалног програма Abaqus заснованог на методи коначних елемената.

Кључне речи: метода динамичке крутости, слободне вибрације, отворена кружно цилиндрична љуска

Summary

In this paper, the dynamic stiffness method has been applied in the free vibration analysis of open circular cylindrical shells having special boundary conditions. Dynamic stiffness matrix, based on the exact solutions of the free vibration problem according to the Flüge thin shell theory, is formulated and implemented in Matlab code to compute natural frequencies and mode shapes. The results of numerical examples for an open cylindrical shell with stepwise thickness variation, as well as for barrel roof, are presented and compared to the results obtained by using the commercial finite element program Abaqus.

Keywords: dynamic stiffness method, free vibrations, open circular cylindrical shell

1. УВОД

Цилиндричне љуске често се користе у грађевинарству, бродарству, ваздухопловству и др. због повољног односа дебљине и распона као и мо-

гућности премошћавања великих распона без потреба за међуослоцима. Међутим, због тих својих особина, ове витке конструкције могу бити веома осетљиве на динамичке утицаје. Стога је неопходан тачан и поуздан модел за

одређивање њихових динамичких карактеристика, које могу бити у средње и високо фреквентном опсегу.

Велики број истраживача се бавио развојем различитих теорија, као и методама за решавање одговарајућих једначина којима је дефинисан проблем слободних вибрација љуски. Leissa [1] је дао свеобухватан преглед радова који су се бавили овом тематиком до 1973. године. За разлику од затворених љуски, анализа слободних вибрација отворених цилиндричних љуски добила је много мање пажње, из разлога што је врло тешко или чак немогуће добити аналитичко решење у затвореном облику у општем случају.

Сходно томе, истраживачи су се окренули нумеричким методама од којих је метода коначних елемената (МКЕ) најчешће коришћена због могућности за анализу конструкција произвољних геометријских и материјалних карактеристика. Међутим, у динамичкој анализи величина коначног елемента директно је повезана са највишом фреквенцијом од интереса, тј. што је фреквенција виша, величина коначног елемента мора да буде мања да би се добили резултати задовољавајуће тачности. То доводи до робусних модела и продуженог времена прорачуна.

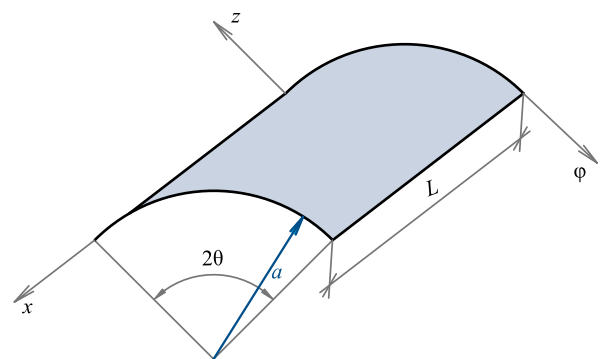
Метода динамичке крутости (МДК) се у последње време све чешће користи као алтернатива МКЕ у анализи слободних вибрација. Основна идеја ове методе је да се споји тачност аналитичких метода и флексибилност МКЕ. Динамичка матрица крутости елемента је одређена на основу тачног решења једначина кретања у фреквентном домену, па су на такав начин формулисана матрице крутости фреквентно зависне и садрже, поред крутости, и масу и пригушење. Дискретизација домена је сведена на минимум и условљена је само променом геометријских и материјалних карактеристика. Глобална динамичка матрица крутости се формира на начин сличан као у МКЕ, са тим што су дводимензионални елементи спојени дуж контура, а не у чворовима. До сада су формулисана динамичка матрице крутости за линијске елементе [2-8], правоугаоне плоче за вибрације у равни и попречне вибрације [8-27] и кружно цилиндричне љуске [27-34].

У овом раду је приказано одређивање динамичке матрице крутости сегмента кружно цилиндричне љуске по Flügge-овој теорији за случај слободно ослоњених закривљених контура. Применом спектралне декомпозиције, проблем слободних вибрација је трансформисан из временског у фреквентни домен, у ком је решење усвојено у облику Fourier-овог реда. Успостав-

љањем везе између вектора сила и вектора померања на правим контурама љуске, формулисана је динамичка матрица крутости која је имплементирана у Matlab програм [35] за одређивање сопствених фреквенција и облика осциловања. У нумеричким примерима су одређене сопствене фреквенције сегмента кружно цилиндричне љуске са скоковитом променом дебљине, као и бачвастог крова, и резултати су упоређени са резултатима програма Abaqus [36].

2. ФОРМУЛАЦИЈА ПРОБЛЕМА

На Слици 1 је приказан сегмент кружно цилиндричне љуске дужине L , угла 2θ , полупречника a и дебљине h .



Слика 1. Геометрија и координатни систем сегмента кружно цилиндричне љуске

Померања произвољне тачке љуске (x, φ, z) у произвољном тренутку времена t , према Flügge-овој теорији танких љуски, могу се написати као:

$$\begin{aligned} u^z(x, \varphi, z, t) &= u(x, \varphi, t) + z \cdot \psi_\varphi(x, \varphi, t) \\ v^z(x, \varphi, z, t) &= v(x, \varphi, t) + z \cdot \psi_x(x, \varphi, t) \\ w^z(x, \varphi, z, t) &= w(x, \varphi, t) \end{aligned} \quad (1)$$

где су са $u(x, \varphi, t)$, $v(x, \varphi, t)$ и $w(x, \varphi, t)$ означена компонентална померања тачака средње површи љуске у правцу полупречника, тангенте на паралелни круг и нормале, док је обртање нормале средње површи око осе x , односно око осе φ , дато следећим изразима:

$$\begin{aligned} \psi_x(x, \varphi, t) &= \frac{v(x, \varphi, t)}{a} - \frac{1}{a} \frac{\partial w(x, \varphi, t)}{\partial \varphi} \\ \psi_\varphi(x, \varphi, t) &= -\frac{\partial w(x, \varphi, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (2)$$

Проблем слободних вибрација према Flügge-овој теорији дефинисан је системом од три парцијалне диференцијалне једначине (3) које су

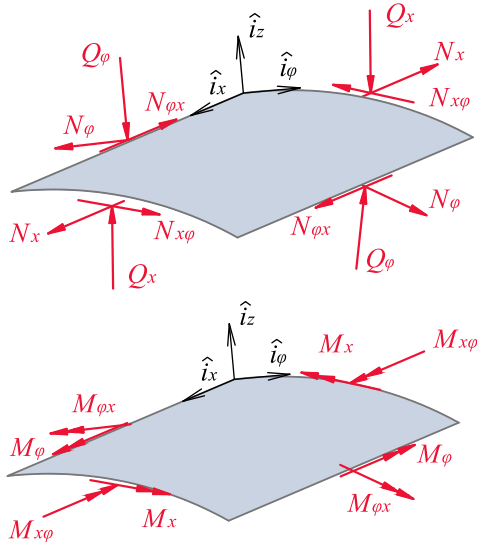
$$\begin{bmatrix} \partial_x^2 + a_1 \partial_\varphi^2 + a_2 \partial_t^2 & a_3 \partial_x \partial_\varphi & a_4 \partial_x + a_5 \partial_x^3 + a_6 \partial_x \partial_\varphi^2 \\ a_3 \partial_x \partial_\varphi & a_7 \partial_\varphi^2 + a_8 \partial_x^2 + a_2 \partial_t^2 & a_7 \partial_\varphi + a_9 \partial_x^2 \partial_\varphi \\ a_4 \partial_x + a_5 \partial_x^3 + a_6 \partial_x \partial_\varphi^2 & a_7 \partial_\varphi + a_9 \partial_x^2 \partial_\varphi & k(\partial_x^4 + 2a_7 \partial_x^2 \partial_\varphi^2 + a_7^2 \partial_\varphi^4) \\ & & + a_7 - a_2 \partial_t^2 + 2a_{10} \partial_\varphi^2 + a_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x, \varphi, t) \\ v(x, \varphi, t) \\ w(x, \varphi, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1-\nu}{2a^2} \left(1 + \frac{K}{Da^2}\right) & a_2 &= -\frac{\rho h}{D} & a_3 &= \frac{1+\nu}{2a} & a_4 &= \frac{\nu}{a} & a_5 &= -\frac{K}{Da} \\ a_6 &= \frac{1-\nu}{2a^3} \frac{K}{D} & a_7 &= \frac{1}{a^2} & a_8 &= \frac{1-\nu}{2} \left(1 + \frac{3K}{Da^2}\right) & a_9 &= \frac{3-\nu}{2} \frac{K}{Da^2} & a_{10} &= \frac{K}{Da^4} \end{aligned} \quad (4)$$

записане у матричном облику, где је $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_\varphi = \partial/\partial \varphi$, $\partial_t = \partial/\partial t$ и $k = h^2/12$, док су изрази за коефицијенте $a_1 \rightarrow a_{10}$ дати једначином (4). У једначини (4) коришћене су следеће ознаке:

ν је Poisson-ов коефицијент, $K = Eh^3/12(1-\nu^2)$ је крутост на савијање љуске, $D = Eh/(1-\nu^2)$ је крутост „у равни“ љуске, E је модул еластичности и ρ је густина материјала.

Изрази за пресечне силе у функцији померања су дате једначином (5), док је конвенција о позитивним пресечним силама дата на Слици 2.



Слика 2. Конвенција о позитивним пресечним силама

2.1 Поступак решавања проблема

Како би се елиминисала временска координата, решење система једначина (3) је претпостављено у облику датом изразом (6), где је са ω озна-

$$\begin{aligned} N_x &= D \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{a} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right] - \frac{K}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ N_\varphi &= D \left[\frac{1}{a} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{K}{a^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) \\ N_{x\varphi} &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{K(1-\nu)}{2a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \\ N_{\varphi x} &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{K(1-\nu)}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \\ M_x &= -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ M_\varphi &= -K \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ M_{x\varphi} &= -\frac{K(1-\nu)}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ M_{\varphi x} &= -\frac{K(1-\nu)}{2a} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\ Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} \\ Q_\varphi &= \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u(x, \varphi, t) &= \hat{u}(x, \varphi) e^{i\omega t} \\ v(x, \varphi, t) &= \hat{v}(x, \varphi) e^{i\omega t} \\ w(x, \varphi, t) &= \hat{w}(x, \varphi) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \partial_x^2 + a_1 \partial_\varphi^2 - a_2 \omega^2 & a_3 \partial_x \partial_\varphi & a_4 \partial_x + a_5 \partial_x^3 + a_6 \partial_x \partial_\varphi^2 \\ a_3 \partial_x \partial_\varphi & a_7 \partial_\varphi^2 + a_8 \partial_x^2 - a_2 \omega^2 & a_7 \partial_\varphi + a_9 \partial_x^2 \partial_\varphi \\ a_4 \partial_x + a_5 \partial_x^3 + a_6 \partial_x \partial_\varphi^2 & a_7 \partial_\varphi + a_9 \partial_x^2 \partial_\varphi & k(\partial_x^4 + 2a_7 \partial_x^2 \partial_\varphi^2 + a_7^2 \partial_\varphi^4) + a_7 + a_2 \omega^2 + 2a_{10} \partial_\varphi^2 + a_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}(x, \varphi) \\ \hat{v}(x, \varphi) \\ \hat{w}(x, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

чена кружна фреквенција, док $\hat{u}(x, \varphi)$, $\hat{v}(x, \varphi)$ и $\hat{w}(x, \varphi)$ представљају амплитуде компоненталних померања у фреквентном домену.

Заменом израза (6) у (3) добија се једначина (7).

Опште решење проблема слободних вибрација за произвољне граничне услове не постоји. У раду ће бити приказано решење за једну од шест комбинација граничних услова када је могуће применити Levy-јев тип решења у облику једноструког тригонометријског реда. Изабрана комбинација, са слободно ослоњеним закривљеним контурама, приказана је на Слици 3. Гранични услови на друге две (праве) контуре могу бити произвољни.

Решење система једначина (7) које а priori задовољава граничне услове на контурама $x = 0$ и $x = L$ је усвојено у следећем облику:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m(\varphi) \cos(\beta_m x) \\ \hat{v}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_m(\varphi) \sin(\beta_m x) \\ \hat{w}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m(\varphi) \sin(\beta_m x) \end{aligned} \quad (8)$$

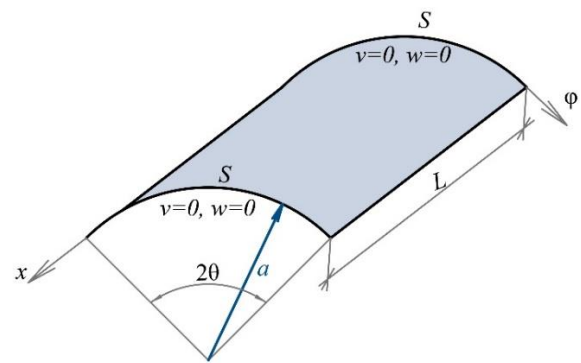
где је $\beta_m = m\pi / L$, m је цео број, док $U_m(\varphi)$, $V_m(\varphi)$ и $W_m(\varphi)$ представљају непознате функције координате φ које су одређене из услова задовољења једначине (7) и дате су следећом једначином:

$$\begin{aligned} U_m(\varphi) &= \sum_{i=1}^8 \delta_{i,m} C_{i,m} e^{r_{i,m} \varphi} \\ V_m(\varphi) &= \sum_{i=1}^8 \gamma_{i,m} C_{i,m} e^{r_{i,m} \varphi} \\ W_m(\varphi) &= \sum_{i=1}^8 C_{i,m} e^{r_{i,m} \varphi} \end{aligned} \quad (9)$$

У једначини (9), $r_{i,m}$, $i=1, \dots, 8$, су корени одговарајуће карактеристичне једначине, $\delta_{i,m}$ и $\gamma_{i,m}$, $i=1, \dots, 8$, представљају односе амплитуде ради-

јалног, односно тангенцијалног, и померања у правцу нормале, док су $C_{i,m}$, $i=1, \dots, 8$, интеграционе константе.

Изрази за пресечне силе се добијају заменом једначина (8) у једначине (5). У раду је приказано решење за случај $m \geq 1$.



Слика 3. Сегмент кружне цилиндричне љуске са слободно ослоњеним закривљеним контурама

2.2 Динамичка матрица крутости

Вектор померања $\hat{\mathbf{q}}_m$ и вектор сила $\hat{\mathbf{Q}}_m$ за m -ти хармоник садрже амплитуде померања и ротације, односно сила и момената, на контурама љуске $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\theta$:

$$\hat{\mathbf{q}}_m = \begin{bmatrix} V_m(0) \\ U_m(0) \\ W_m(0) \\ \Psi_{xm}(0) \\ V_m(2\theta) \\ U_m(2\theta) \\ W_m(2\theta) \\ \Psi_{xm}(2\theta) \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{Q}}_m = \begin{bmatrix} -\hat{N}_{\varphi m}(0) \\ -\hat{N}_{\varphi xm}(0) \\ -\hat{Q}_{\varphi m}(0) \\ -\hat{M}_{\varphi m}(0) \\ \hat{N}_{\varphi m}(2\theta) \\ \hat{N}_{\varphi xm}(2\theta) \\ \hat{Q}_{\varphi m}(2\theta) \\ \hat{M}_{\varphi m}(2\theta) \end{bmatrix} \quad (10)$$

где је:

$$\hat{Q}_{\varphi}(x, \theta) = \hat{Q}_{\varphi}(x, \theta) + \left. \frac{\partial \hat{M}_{\varphi x}(x, \varphi)}{\partial x} \right|_{\varphi=\theta}$$

Коришћењем једначина (9-10), као и везе између померања и пресечних сила, једначина (5), дефинисане су матрице \mathbf{D}_m и \mathbf{F}_m :

$$\hat{\mathbf{q}}_m = \mathbf{D}_m \begin{pmatrix} C_{1,m} \\ C_{2,m} \\ C_{3,m} \\ C_{4,m} \\ C_{5,m} \\ C_{6,m} \\ C_{7,m} \\ C_{8,m} \end{pmatrix}_{8 \times 1} \quad \hat{\mathbf{Q}}_m = \mathbf{F}_m \begin{pmatrix} C_{1,m} \\ C_{2,m} \\ C_{3,m} \\ C_{4,m} \\ C_{5,m} \\ C_{6,m} \\ C_{7,m} \\ C_{8,m} \end{pmatrix}_{8 \times 1} \quad (11)$$

(a)

Тачна динамичка матрица крутости \mathbf{K}_{Dm} реда 8 за m -ти хармоник добија се елиминисањем вектора интеграционих константи из једначина (11):

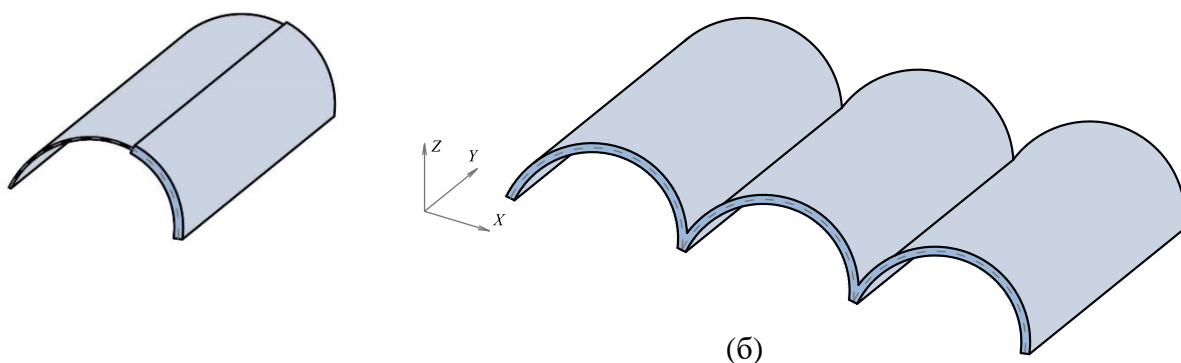
$$\hat{\mathbf{Q}}_m = \mathbf{K}_{Dm} \hat{\mathbf{q}}_m \Rightarrow \mathbf{K}_{Dm} = \mathbf{F}_m (\mathbf{D}_m)^{-1} \quad (12)$$

3. ФОРМИРАЊЕ ГЛОБАЛНЕ ДИНАМИЧКЕ МАТРИЦЕ КРУТОСТИ И ГРАНИЧНИ УСЛОВИ

Глобална динамичка матрица крутости система се формира на сличан начин као у МКЕ, само што су љуске међусобно повезане дуж правих контура, а не у чворовима мреже. Примери система који могу да се реше применом изведене динамичке матрице крутости дати су на Слици 4.

Када је одређена динамичка матрица крутости система, гранични услови се аплицирају брисањем врста и колона које одговарају спреченим померањима. У нумеричким примерима су коришћени следећи гранични услови:

- Слободна контура (F): сви степени слободе су различити од нуле;



Слика 4. Сегмент кружне цилиндричне љуске променљиве дебљине (а) и бачвасти кров (б)

- Слободно ослоњена контура (S): $v = 0$ и $w = 0$;
- Укљештена контура (C): $u = v = w = \psi_x = 0$.

4. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕРИ

Применом MATLAB програма, заснованог на изведеној динамичкој матрици крутости, одређене су сопствене фреквенције и облици осциловања сегмента кружне цилиндричне љуске. Добијени резултати су упоређени са доступним резултатима из литературе или, у случају да они нису доступни, са резултатима комерцијалног програма Abaqus заснованог на методи коначних елемената. У свим нумеричким примерима Poisson-ов коефицијент је 0.3.

Пример 1. У оквиру овог примера је приказана примена методе динамичке крутости у анализи слободних вибрација сегмента кружне цилиндричне љуске са скоковитом променом дебљине. Првих шест сопствених фреквенција у Hz за различите комбинације граничних услова на правим контурама дате су у Табели 1.

Пример 2. У овом примеру су одређене сопствене фреквенције бачвастиг крова приказаног на Слици 4б. Сва три сегмента имају исте геометријске и материјалне карактеристике: $a = 2$ m, $L = 3$ m, $h = 0.02$ m, $2\theta = 180^\circ$, $E = 210$ GPa. Да би се извршила анализа слободних вибрација прво је потребно трансформисати динамичку матрицу крутости из локалног у глобални координатни систем приказан на Слици 4б. Одговарајућа матрица трансформације дата је једначином (13), док су компоненте вектора померања које се трансформишу при преласку из локалног у глобални координатни систем дате на Слици 5.

Табела 1. Првих шест сопствених фреквенција у Hz за сегмент љуске променљиве дебљине :
 $a = 2 \text{ m}$, $L = 3 \text{ m}$, $h_1 = 0.02 \text{ m}$, $2\theta_1 = 90^\circ$, $h_2 = 0.04 \text{ m}$, $2\theta_2 = 90^\circ$, $E = 210 \text{ GPa}$

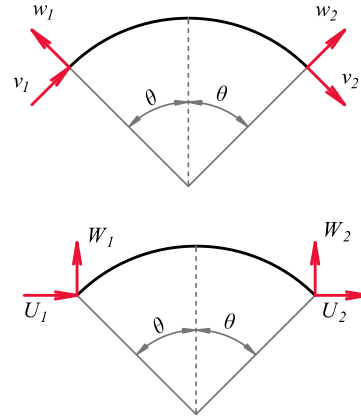
Тон	ГУ	ДМК 1 елемент	Abaqus 7560 S4R KE
1	FF	26.3	26.192
3		39.2	38.922
2		59.9	59.578
4		68.1	68.096
5		80.0	80.102
6		89.1	89.011
1	FS	26.3	26.192
3		59.9	59.578
2		68.0	68.006
4		80.1	80.116
5		90.4	90.375
6		100.9	100.39
1	SS	69.8	69.902
3		78.4	78.455
2		93.7	93.701
4		97.4	97.403
5		117.5	117.59
6		129.8	129.83

Када је одређена матрица трансформације, динамичка матрица крутости у глобалном координатном систему може да се одреди на основу следећег израза:

$$\mathbf{K}_{Dm}^G = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{K}_{Dm} \cdot (\mathbf{T}^*)^T \quad (14)$$

У Табели 2 је дато првих шест сопствених фреквенција у Hz за случај F и S граничних услова на правим контурама. Резултати су добијени применом методе динамичке крутости, где је

конструкција моделирана коришћењем три елемента, као и коришћењем програма Abaqus. У табели са * су означене дупле сопствене фреквенције.



Слика 5. Компоненте вектора померања у локалном и глобалном координатном систему

7. ЗАКЉУЧЦИ

У овом раду приказана је примена методе динамичке крутости у анализи слободних вибрација отворених кружних цилиндричних љуски са слободно ослоњеним закривљеним контурама према Flügge-овој теорији танких љуски. Динамичка матрица крутости, која повезује вектор сила и померања на правим контурама, изведена је на основу тачног решења проблема слободних вибрација. Кроз нумеричке примере приказано је одлично поклапање резултата добијених применом приказаног поступка и резултата комерцијалног програма Abaqus, при чему

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ \Psi_{y,1} \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ \Psi_{y,2} \end{bmatrix}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{8 \times 8} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ u_1 \\ w_1 \\ \Psi_{x,1} \\ v_2 \\ u_2 \\ w_2 \\ \Psi_{x,2} \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (13)$$

Табела 2. Првих шест сопствених фреквенција у Hz за бачvasti кров са три сегмента истих геометријских и материјалних карактеристика:

$$a = 2 \text{ m}, L = 3 \text{ m}, h = 0.02 \text{ m}, \\ 2\theta = 180^\circ, E = 210 \text{ GPa}$$

Тон	ГУ	ДМК 3 елемента	Abaqus 22680 S4R KE
1	FFFF	26.26	26.173*
3		59.90	59.576*
2		64.70	64.774
4		64.82	64.872
5		65.21	65.260
6		67.30	67.371
1	SSSS	66.68	66.757
3		66.70	66.778
2		69.54	69.632
4		70.35	70.432
5		71.65	71.752
6		71.82	71.925

је број елемената у методи динамичке крутости минималан, па је стога и време прорачуна знатно краће.

ЗАХВАЛНИЦА

Аутори се захваљују Министартву просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије на финансијској подршци у оквиру пројеката TR-36046.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. W. Leissa, *Vibration of shells*, Washington, D.C.: US Government Printing Office, 1973.

[2] J. F. Doyle, *Wave propagation in structures*, New York: Springer-Verlag, 1997.

[3] J. R. Banerjee, Dynamic stiffness formulation for structural elements: A general approach, *Computers & Structures* 63 (1) (1997) 101–103.

[4] J. R. Banerjee, Development of an exact dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of a twisted Timoshenko beam, *Journal of Sound and Vibration* 270 (1-2) (2004) 379-401.

[5] J. R. Banerjee, Free vibration analysis of a twisted beam using the dynamic stiffness method, *International Journal of Solids and Structures* 38 (38–39) (2001) 6703–22.

[6] J. R. Banerjee, Free vibration of sandwich beams using the dynamic stiffness method, *Computers & Structures* 81 (18–19) (2003) 1915–22.

[7] J. B. Casimir, C. Duforet and T. Vinh, Dynamic behaviour of structures in large frequency range by

continuous element methods, *Journal of Sound and Vibration*, 267 (5) (2003) 1085–1106.

[8] U. Lee, *Spectral element method in structural dynamics*, Singapore 129809: John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 2009. U. Lee, J. Kim, A. Y. T. Leung. The spectral element method in structural dynamics. *Shock and Vibration Digest*, 32, 2000, 451-465.

[9] S. Kevorkian and M. Pascal, An accurate method for free vibration analysis of structures with application to plates, *Journal of Sound and Vibration* 246 (5) (2001) 795-814.

[10] J. B. Casimir, S. Kevorkian and T. Vinh, The dynamic stiffness matrix of two-dimensional elements: application to Kirchhoff's plate continuous elements, *Journal of Sound and Vibration* 287 (32) (2005) 571-589.

[11] M. Boscolo, J. R. Banerjee, Dynamic stiffness method for exact inplane free vibration analysis of plates and plate assemblies, *Journal of Sound and Vibration* 330 (12) (2011) 2928-2936.

[12] M. Boscolo, J. R. Banerjee, Dynamic stiffness elements and their applications for plates using first order shear deformation theory, *Computers & Structures* 89 (3-4) (2011) 395-410.

[13] M. Boscolo, J. R. Banerjee, Dynamic stiffness formulation for composite Mindlin plates for exact modal analysis of structures. Part I: Theory, *Computers & Structures* 96-97 (2012) 61–73.

[14] M. Boscolo, J. R. Banerjee, Dynamic stiffness formulation for composite Mindlin plates for exact modal analysis of structures. Part II: Results and application, *Computers & Structures* 96-97 (2012) 74–83.

[15] A. Pagani, M. Boscolo, E. Carrera, J. R. Banerjee, Exact dynamic stiffness elements based on one-dimensional higher-order theories for free vibration analysis of solid and thin-walled structures, *Journal of Sound and Vibration* 332 (23) (2013) 6104–6127.

[16] F. A. Fazzolari, M. Boscolo, J. R. Banerjee, An exact dynamic stiffness element using a higher order shear deformation theory for free vibration analysis of composite plate assemblies, *Composite Structures* 96 (2013) 262-278.

[17] M. Boscolo, J. R. Banerjee, Layer-wise dynamic stiffness solution for free vibration analysis of laminated composite plates, *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014) 200–227.

[18] J. R. Banerjee, S. O. Papkov, X. Liu, D. Kennedy, Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case, *Journal of Sound and Vibration* 342 (2015) 177–199.

[19] O. Ghorbel, J. B. Casimir, L. Hammami, I. Tawfiq, M. Haddar, Dynamic stiffness formulation for free

- orthotropic plates, *Journal of Sound and Vibration* 346 (2015) 361–375.
- [20] M. Nefovska-Danilovic, M. Petronijevic, In-plane free vibration and response analysis of isotropic rectangular plates using the dynamic stiffness method, *Computers & Structures* 152 (2015) 82-95.
- [21] N. Kolarevic, M. Nefovska-Danilovic, M. Petronijevic, Dynamic stiffness elements for free vibration analysis of rectangular Mindlin plate assemblies, *Journal of Sound and Vibration* 359 (2015) 84-106.
- [22] N. Kolarevic, M. Marjanović, M. Nefovska-Danilovic, M. Petronijevic, Free vibration analysis of plate assemblies using the dynamic stiffness method based on the higher order shear deformation theory, *Journal of Sound and Vibration* 364 (2016) 110-132.
- [23] M. Marjanović, N. Kolarevic, M. Nefovska-Danilovic, M. Petronijevic, Free vibration study of sandwich plates using a family of novel shear deformable dynamic stiffness elements: limitations and comparison with the finite element solutions, *Thin-Walled Structures* 107 (2016) 678-694.
- [24] M. Nefovska-Danilovic, N. Kolarevic, M. Marjanović, M. Petronijevic, Shear deformable dynamic stiffness elements for a free vibration analysis of composite plate assemblies – Part I: theory, *Composite Structures* 159 (2017) 728-744.
- [25] M. Marjanović, N. Kolarevic, M. Nefovska-Danilovic, M. Petronijevic, Shear deformable dynamic stiffness elements for a free vibration analysis of composite plate assemblies – Part II: numerical examples, *Composite Structures* 159 (2017) 183-196.
- [26] E. Damjanović, M. Marjanović, M. Nefovska-Danilovic, Free vibration analysis of stiffened and cracked laminated composite plate assemblies using shear-deformable dynamic stiffness elements, *Composite Structures* 180 (2017) 723–740.
- [27] N. Kolarević, “Vibrations and buckling of plates and shells using dynamic stiffness method,” Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, Belgrade, Serbia, 2016, Ph.D. thesis.
- [28] R. S. Langley, A dynamic stiffness technique for the vibration analysis of stiffened shell structures, *Journal of Sound and Vibration* 156 (3) (1992) 521–540.
- [29] A. Y. Leung, W. E. Zou, Dynamic stiffness analysis of circular cylindrical shells, *International Society of Offshore and Polar Engineers* (1993).
- [30] A. Leung, N. Kwok, Dynamic stiffness analysis of toroidal shells, *Thin-Walled Structures* 21 (1) (1995) 43–64.
- [31] J. B. Casimir, M. C. Nguyen, I. Tawfiq, Thick shells of revolution: Derivation of the dynamic stiffness matrix of continuous elements and application to a tested cylinder, *Computers & Structures* 85 (23-24) (2007) 1845-1857.
- [32] T. I. Thinh, M. C. Nguyen, Dynamic stiffness matrix of continuous element for vibration of thick cross-ply laminated composite cylindrical shells, *Composite Structures* 98 (2013) 93–102.
- [33] D. Tounsi, J. B. Casimir, S. Abid, I. Tawfiq, M. Haddar, Dynamic stiffness formulation and response analysis of stiffened shells, *Computers & Structures* 132 (2014) 75-83.
- [34] F. A. Fazzolari, A refined dynamic stiffness element for free vibration analysis of cross-ply laminated composite cylindrical and spherical shallow shells, *Composites Part B: Engineering* 62 (2014) 143–158.
- [35] Matlab, MathWorks Inc. The Language of Technical Computing, MATLAB 2011b, 2011.
- [36] Abaqus, User’s manual. Version 6.9, Providence, RI, USA: DS SIMULIA Corp, 2009.
- [37] C. Czaderski, R. Steiger, M. Howald, S. Olia, A. Gülzow, P. Niemz. Versuche und Berechnungen an allseitig gelagerten 3-schichtigen Brettsperrholzplatten. *Holz als Roh- und Werkstoff*, 65, 2007, 383-402