

Милош Лазовић¹, Марија Лазовић Радовановић²

NUMERIČKI POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE STANJA DEFORMACIJA I NAPONA U AB PRESECIMA

Rezime:

U radu je dat predlog jednog numeričkog postupka za određivanje stanja deformacija i napona u armiranobetonskim presecima. Postupak se zasniva na MKE sa korišćenjem "fiber" elemenata. Za predložene veze napona i deformacija u betonu i armaturi prema EC2, razrađen je numerički postupak pomoću koga se u presecima složenog oblika, koji su armirani proizvoljnom armaturom, veoma brzo sa velikom tačnošću određuje stanje dilatacija i napona u betonu i armaturi, za zadato opterećenje. Izlazni rezultati se prikazuju u tabelarnom i grafičkom obliku i kao takvi su veoma pogodni za korišćenje u inženjerskoj praksi.

Ključne reči: deformacije i naponi, "fiber" elementi, numerički postupak

NUMERICAL PROCEDURE FOR DETERMINATION OF STRAIN-STRESS STATE IN RC CROSS SECTIONS

Summary:

The paper proposes a numerical procedure for determining the state of strains and stresses in reinforced concrete sections. The procedure is based on FEM and the use of "fiber" elements. For the proposed relationship of strains and stresses in concrete and reinforcement according to EC2, a numerical procedure has been developed by which the state of stresses and strains in concrete and reinforcement is determined with high accuracy in sections of complex shape, reinforced with optional reinforcement, for a given load. The output results are presented in tabular and graphical form and as such are very suitable for use in engineering practice.

Key words: strains and stresses, "fiber" elements, numerical procedure

¹ Associate professor, Faculty of Civil Engineering University of Belgrade, Republic of Serbia, mmmlazovic@gmail.com

² Assistant professor, Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, Republic of Serbia, e – mail: mlazovic@grf.bg.ac.rs

1. UVOD

Proračuni armiranobetonskih konstrukcija po svojoj prirodi su veoma složeni i sastoje se iz dva dela. U prvom delu vrši se proračun uticaja u konstrukciji za pojedinačna dejstva, a u drugom delu vrši se određivanje potrebnih dimenzija i armature u poprečnim presecima. Ovi proračuni rade se primenom teorije graničnih stanja gde proračunom treba dokazati pouzdanost konstrukcije, odnosno njenu nosivost, funkcionalnost i trajnost u toku eksploatacije. Ovim proračunima se dokazuje da granična stanja neće biti dostignuta, pri kojima konstrukcija ne odgovara propisanim zahtevima. Obično se dokazuju dve grupe graničnih stanja i to: granično stanje nosivosti ULS i granično stanje upotrebljivosti SLS. Ovi proračuni izvode se poštujući odgovarajuće propise. Kod nas, duži niz godina ovi proračuni su rađeni prema pravilniku BAB87 [1].

Nedavno, početkom godine uvedena je obaveza da se ovi proračuni sprovode poštujući Evropske propise EC2 [2]. Razlika je u tome što se sada uvode drugačije proračunske situacije za sve kombinacije opterećenja kojima konstrukcija može biti izložena sa odgovarajućim parcijalnim faktorima sigurnosti. Sa ovako određenim uticajima i sa propisanim naponsko-deformacionim karakteristikama materijala (beton, armatura) vrši se dimenzionisanje poprečnih preseka.

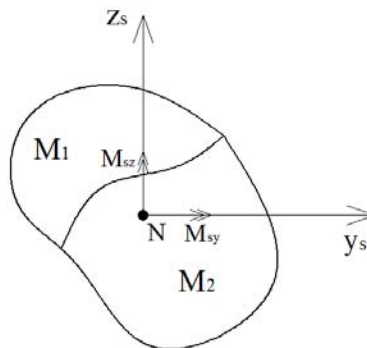
Dimenzionisanje preseka najčešće se radi primenom odgovarajućih teoriskih izraza, korišćenjem tabela ili dijagrama interakcije [3]. U radu se predlaže primena jednog numeričkog postupka za dimenzionisanje armiranobetonskih preseka usled dejstva momenata savijanja sa ili bez normalne sile. Poprečni presek može biti proizvoljnog oblika, a pri proračunu se uzima sva armatura koja postoji u poprečnom preseku. Sam proračun se zasniva na primeni MKE sa upotrebom "fiber" elemenata [4]. Ovi elementi su malih dimenzija u poprečnom preseku i od uticaja prihvataju samo aksijalne sile. Usvaja se da je dužina ovih elemenata jedinična, tako da su pomeranja tačaka ujedno i aksijalne dilatacije u elementima. Pri proračunu se usvaja da poprečni presek i posle deformacije ostaje ravan, što problem svodi na rešavanje tri nepoznata pomeranja, jedno aksijalno i dve rotacije. Pošto su veze napona i deformacija nelinearne, za rešavanje problema koriste se iterativni postupci. Prema opisanom teoriskom postupku MKE, napravljen je paket programa u Excelu [5], pomoću kojih se problemi dimenzionisanja veoma efikasno rešavaju. Izlazni rezultati dobijaju se u obliku tabela i u grafičkom obliku, što korisniku znatno pomaže da pravilno sagleda sliku naponsko-deformacionog stanja u poprečnom preseku i da brzo izvrši korekcije ukoliko su potrebne.

2. PRIKAZ NUMERIČKOG POSTUPKA ZA PRORAČUN SPREGNUTIH PRESEKA

Pri proračunu različitih građevinskih konstrukcija, često se javlja problem proračuna napona i deformacija u poprečnim presecima elemenata koji se sastoje iz dva ili više različitih materijala. Ovo je slučaj kod proračuna armiranobetonskih preseka koji su sastavljeni od dva različita materijala, betona i armature. Ukoliko su oblici poprečnog preseka složeni, tada se najčešće njihove geometrijske karakteristike određuju približno numerički. Ovo se radi tako što se površina poprečnog preseka podeli na veliki broj manjih površina pravilnog geometrijskog oblika, pa se sumiranjem određuju zahtevane geometrijske karakteristike preseka. Nadalje, korišćenjem teorije savijanja štapa, postavljaju se jednačine iz kojih se sračunavaju tražene veličine, napona i deformacija u karakterističnim tačkama poprečnog preseka. Generalno

gledano, ovakvi proračuni su po svojoj prirodi složeni, naročito ako je ponašanje materijala nelinearno, pa se geometrijske karakteristike preseka menjaju u funkciji inteziteta opterećenja.

U radu se predlaže jedan numerički postupak za proračun napona i deformacija u spregnutim poprečnim presecima koji se sastoje iz dva ili više različitih materijala [6]. Ideja je da se sam poprečni presek rešava MKE.



Слика 1 - Spregnuti poprečni presek proizvoljnog oblika

Na slici 1. prikazan je jedan spregnuti poprečni presek proizvoljnog oblika koji se sastoji iz dva različita materijala (M_1 i M_2). U sistemoj liniji nosača, koja je obično u težištu poprečnog preseka, definisan je koordinatni sistem sa osama y_s i z_s . U tako definisanom koordinatnom početku, kao spoljašnje opterećenje u poprečnom preseku deluju normalna sila i momenti savijanja oko dve ose.

Da bi se primenio predloženi numerički postupak, poprečni presek se deli na veliki broj manjih elemenata tj. vrši se diskretizacija kontinuuma na konačne "fiber" elemente.

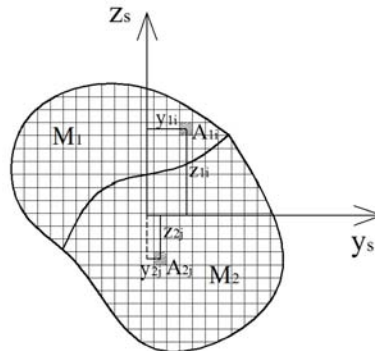
Na slici 2. prikazana je podela poprečnog preseka na konačne elemente. Ova podela se vrši tako da se ona sprovodi posebno za material M_1 , a posebno za material M_2 . Elementarne površine preseka materijala M_1 i M_2 su označene sa A_{1i} i A_{2j} , respektivno, pri čemu je material M_1 podeljen je na n elemenata, dok je material M_2 podeljen na m elemenata.

Ukoliko se poprečni presek razmatra kao deo spregnutog štapa jedinične dužine, tada svaki izdvojeni element ima aksijalnu krutost koja je jednaka:

$$K_{1i} = A_{1i} \cdot E_1 \quad (1)$$

$$K_{2j} = A_{2j} \cdot E_2 \quad (2)$$

U jednačinama (1) i (2) sa E_1 i E_2 označeni su moduli elastičnosti materijala M_1 i M_2 , respektivno.



Слика 2 - Spregnuti poprečni presek proizvoljnog oblika

Jedna od pretpostavki koja se najčešće usvaja kod proračuna grednih nosača jeste pretpostavka da poprečni presek i posle deformacije ostaje ravan. U fizičkom smislu, ovo znači da je na poprečni presek zalepljena jedna apsolutno kruta ploča, te su svi elementi poprečnog preseka prinuđeni da se pomeraju u pravcu upravno na ravan ploče, tako da ostaju u ravni ploče. Na ovaj način, problem proračuna napona i deformacija u spregnutom poprečnom preseku svodi se na problem proračuna pomeranja krute ploče koja je oslonjena na sistem konačnih elemenata. U statičkom smislu, ovi elementi se mogu posmatrati kao prosti štapovi, jer prihvataju opterećenje i pomeraju se samo u pravcima svoje ose.

Pomeranja svih tačaka u težištima konačnih elemenata mogu se prikazati preko tri stepena slobode pomeranja i to: u_0 je pomeranje pola upravno na ravan poprečnog preseka, φ_{0y} je obrtanje oko ose y_0 i φ_{0z} je obrtanje oko ose z_0 .

Pomeranje u pravcu ose štapa može se prikazati u funkciji generalisanih pomeranja pola i koordinata tačke u kojoj se traži pomeranje, tako da se može izraziti na sledeći način:

$$u(y_i, z_i) = u_0 - \varphi_{0y} \cdot z_i + \varphi_{0z} \cdot y_i \quad (3)$$

U matricnom obliku može se prikazati kao:

$$u(y_i, z_i) = [T_{1i}] \cdot [u_0 \ \varphi_{0y} \ \varphi_{0z}] \quad (4)$$

gde je T_{1i} matrica translacije koordinata.

Matrica krutosti svih elemenata za material M_1 dobija se sabiranjem svih matrica krutosti pojedinačnih elemenata, tako da imamo:

$$[K_1^*] = \sum_{i=1}^n [K_{1i}^*] \quad (5)$$

Na sličan način dobija se i matrica krutosti svih elemenata za material M_2 :

$$[K_2^*] = \sum_{j=1}^m [K_{2j}^*] \quad (6)$$

Ukupna matrica krutosti spregnutog preseka jednaka je zbiru matrica krutosti svih materijala (1, 2,...s) od kojih je sastavljen poprečni presek, tako da se može prikazati u sledećem obliku:

$$[K_0^*] = [K_1^*] + [K_2^*] + \dots + [K_s^*] \quad (7)$$

Ako se ovako određena matrica krutosti spregnutog preseka pomnoži sa vektorom pomeranja pola, dobijaju se presečne sile tj. opterećenje koje deluje u poprečnom preseku, a koje je redukovano na izabrani pol:

$$K_0^* \cdot u_0 = Q_0 \quad (8)$$

Jednačinom (8) definisani su uslovi ravnoteže između unutrašnjih sila konačnih elemenata i vektora generalisanih sila usled spoljašnjeg opterećenja Q_0 tj. presečnih sila štapa u razmatranom poprečnom preseku, a koje su redukovane na proizvoljno odabrani pol. Na ovaj način dobija se sistem od tri jednačine sa tri nepoznate veličine koje u stvari predstavljaju generalisana pomeranja pola ($u_0, \varphi_{0y}, \varphi_{0z}$).

Kada su sračunata pomeranja pola, onda se primenom jednačina (3), mogu sračunati i pomeranja svih tačaka u težištima konačnih elemenata za sve materijale.

Pošto je usvojen segment štapa jedinične dužine, onda su sračunata pomeranja brojno jednaka dilatacijama u težištima svih elemenata. Zatim se na osnovu uzvojenih veza dilatacija i napona, za određene vrednosti dilatacija mogu odrediti i vrednosti napona u pojedinačnim elementima.

Kod simetričnih preseka, diskretizacija se vrši na slojevite elemente trapeznog poprečnog preseka. U tom slučaju problem se svodi na određivanje dva nepoznata pomeranja pola.

Pošto su veze napona i dilatacija u betonu i armaturi nelinearne i pošto se usvaja da beton može prihvatiti samo napone pritiska, postavljeni problem je nelinearan i ne može se rešiti u jednom koraku.

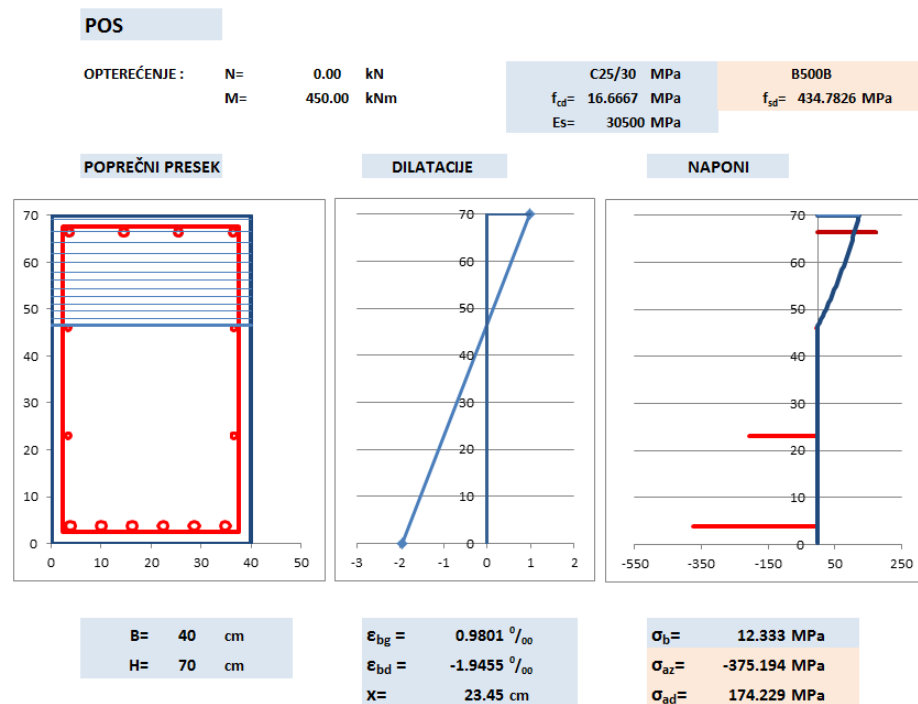
U radu se predlaže kombinovani iterativni postupak koji se sastoji iz dva ciklusa iteracija. U prvom ciklusu iteracije se vrše dok se približno ne odredi neutralna osa (isključivanje zona zatezanja u betonu). U drugom cilusu iteracija primenjuje se Newton-Rapson-ov iterativni postupak za rešavanje materijalno nelinearnog problema. Sa početnim tangentnim vrednostima materijala određuje se tangentna matrica krutosti. Zatim se na osnovu zadatog opterećenja određuju vrednosti dilatacija u betonu i armaturi. Na osnovu zadatih veza dilatacija i napona u materijalima betonu i armaturi određujemo napone. Na osnovu ovih napona određuju se unutrašnje sile u elementima i u čitavom preseku. Zbirno, ove sile su manje od nanetog opterećenja, pa u sledećoj iteraciji opisani postupak se ponavlja sa neuravnoteženim opterećenjem. Ovaj postupak se u iteracijama ponavlja sve dok razlika između nanetih spoljašnjih sila i unutrašnjih sila ne bude manja od unapred propisane vrednosti. Može se reći da ovaj postupak relativno brzo konvergira i da je u oba ciklusa potrebno uraditi oko 10 iteracija.

3. BROJNI PRIMERI

Kao ilustracija za prikaz predloženog numeričkog postupka urađen je proračun naponsko-deformacionijskih stanja u dva karakteristična poprečna preseka.

3.1 PRIMER 1

U ovom primeru (slika 3.) za zadato opterećenje, moment savijanja od $M_x=450$ kNm i za zadatu armaturu prema skici, izvršen je proračun deformacija i napona u betonu i armaturi. Treba napomenuti da su ovim proračunom obuhvaćene sve šipke armature koje postoje u poprečnom preseku. Najčešće se preseci računaju samo sa glavnom nosećom armaturom. Ova aproksimacija često dovodi do greške u proračunu koja je reda veličine od 10% do 40%. Prema EC2 [1], dozvoljene su znatno veće dilatacije u armaturi (do 45 promila), za granično stanje nosivosti. Međutim, sa ovim dilatacijama ovi preseci ne prolaze u SLS-u, po pitanju širine otvora prslina.



Слика 3 – Dijagram napona i dilatacija u poprečnom preseku

3.2 PRIMER 2

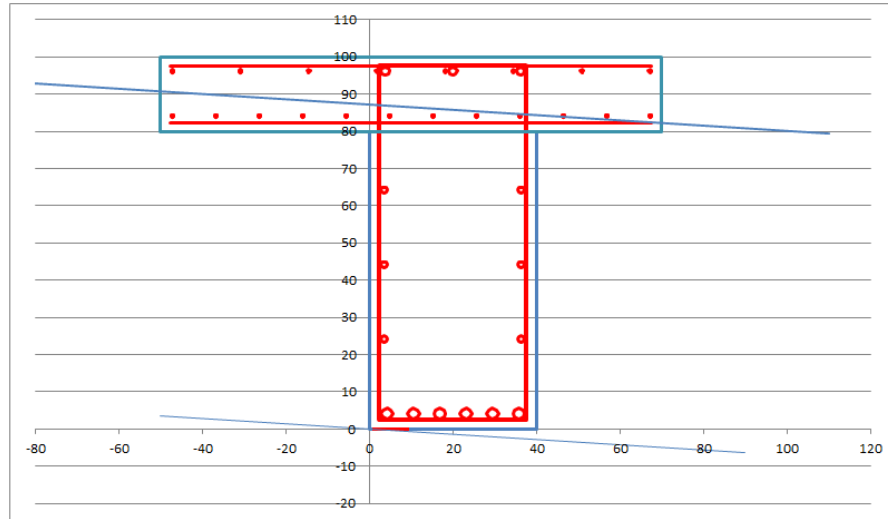
U ovom primeru prikazani su rezultati proračuna jednog nesimetričnog T preseka, koji je opterećen samo momentom savijanja oko jedne ose. Usled nesimetrije poprečnog preseka dolazi do kosog savijanja. Na slici 4. je prikazan položaj neutralne ose. Pored toga prikazane su i vrednosti dilatacija i napona u betonu i armaturi u svim karakterističnim tačkama.

POS

OPTEREĆENJE : N= 0.00 kN
Mx= 1900.00 kNm
My= 0.00 kNm

C25/30 MPa
 f_{ct} = 16.6667 MPa
Es= 30500 MPa

B500B
 f_{sd} = 434.7826 MPa



B= 40 cm
H= 80 cm

ϵ_{bg} = 2.9054 ‰
 ϵ_{bd} = -14.1698 ‰
 χ = 17.82 cm

σ_b = 16.667 MPa
 σ_{az} = -443.030 MPa
 σ_{ad} = 398.089 MPa

Slika 4 - Dijagram napona i dilatacija u T poprečnom preseku

4. ЗАКЉУЧАК

Prema prikazanom numeričkom postupku u Excelu je napravljen čitav paket programa kojima se uspošno rešavaju problem određivanja stanja napona i deformacija u složenim poprečnim presecima, koji se sastoje iz više jednostavnih (trapeznih) preseka. Ovim programima uspešno se rešavaju problemi pravog, kao i problemi kosog savijanja. Unos armature je jednostavan po redovima ili pojedinačno. Sam rad je interaktivan, tako da se korekcije u poprečnom preseku i potrebnoj armaturi veoma brzo sprovode, sve do postizanja željenih rezultata. Nadamo se da će ovi programi značajno pomoći inženjerima naročito pri dimenzionisanju preseka na koso savijanje ili dimenzionisanju preseka složenog oblika.

LITERATURA

- [1] Pravilnik o tehničkim normativima za beton i armirani beton, BAB '87, 1987.
- [2] Standardization, E.C.f. Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. 2004.

- [3] Marinković S, Pečić N. Teorija betonskih konstrukcija, Akademska misao, 2. izdanje, 2021.
- [4] Lazović Radovanović M., Nosivost spregnutih stubova od kružnih šupljih čeličnih profila ispunjenih betonom, doktorska disertacija, Beograd, 2018.
- [5] Advanced Excel Tutorial, 2020.
- [6] Eurocode. Design of Composite Steel and Concrete Structures - Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings, Eurocode 4. 2004.