

ODREĐIVANJE TRAJEKTORIJE KAMENA U TEKUĆOJ VODI

mr Dejana ĐORĐEVIĆ, dipl. građ. inž.
Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu
E-mail: dejana@grf.bg.ac.yu

REZIME

U ovom radu prikazana je metodologija proračuna trajektorije kamena u tekućoj vodi. Analizirani su faktori koji utiču na dužinu trajektorije, odnosno na vreme tonjenja i domet ispuštenog zrna. To su: početna dubina sa koje se kamen ispušta u vodeni tok da slobodno pada, krupnoća kamena, brzina toka (ambijentalnog fluida) i faktor oblika zrna.

Glavne reči: kos hitac, trajektorija, tekuća voda, krupnoća kamena, faktor oblika zrna, koeficijent otpora oblika

1. UVOD

Izgradnja regulacionih i zaštitnih građevina od kamenog nabačaja u rečnom koritu obavlja se u uslovima tekuće vode kontrolisanim istovarom iz plovila projektovane količine kamena zahtevane krupnoće. Prilikom planiranja dinamike izvođenja radova uvek se nastoji da se sa radovima na ugradnji otpočne i da se radovi završe u periodu malih voda, jer je u tom slučaju rastur materijala najmanji. Međutim, ukoliko dođe do iznenadne ugroženosti objekata kao što su, na primer, mostovski stubovi ili podvodni cevovodi, radovi se moraju obaviti u uslovima visokih vodostaja i značajnih brzina toka. Za uspešnu realizaciju tih radova vrlo je važno odrediti potrebnu krupnoću kamena, ali i sagledati način kretanja (brzinu, trajektoriju, domet) ispuštenog kamena u tekućoj vodi, što je veoma značajno sa stanovišta tehnologije ugradnje. Cilj ovog rada je da prikaže metodologiju proračuna trajektorije ispuštenog kamena u tekućoj vodi i da kroz nekoliko brojnih primera pokaže kako se variranjem fizičkih karakteristika kamena (njegove krupnoće i faktora oblika) i početnog uslova (mesta – dubine sa koje se ispušta u vodu) utiče na brzinu tonjenja i domet zrna, što može pomoći projektantima prilikom propisivanja

načina ugradnje i, ako je to moguće, izbora optimalnih hidrološko-hidrauličkih uslova sa stanovišta izvođenja radova.

2. MATEMATIČKI MODEL

Matematički model neometanog tonjenja kamena u tekućoj vodi zasniva se na jednačinama kretanja krutog tela koje se koriste u balistici:

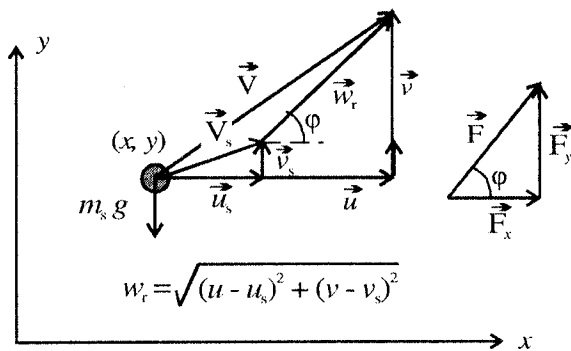
$$\begin{aligned} (m_s + m'_s) \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x \\ (m_s + m'_s) \frac{d^2 y}{dt^2} &= -(m_s - m)g + F_y \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = u_s$$

$$\frac{dy}{dt} = v_s$$

Oznake u prethodnim jednačinama imaju sledeće značenje:

- m_s je masa krutog tela (kamena);
- $m'_s = 1/2 m_s$ je "dodatna masa" krutog tela koja se javlja kao posledica njegovog ubrzanja/usporenja;
- m je istisnuta masa ambijentalnog fluida u kojem se kreće kruto telo;
- x i y su koordinate položaja krutog tela;
- t je vreme;
- g je ubrzanje zemljine teže;
- u_s i v_s su, redom, komponente vektora brzine V_s krutog tela u x i y pravcu, a
- F_x i F_y su komponente sile F koja deluje na kruto telo (slika 1).



Slika 1. Vektori brzina: \vec{u}_s i \vec{v}_s su komponente vektora brzine krutog tela \vec{V}_s ; \vec{u} i \vec{v} su komponente vektora brzine ambijentalnog fluida (vode) \vec{V} ; \vec{w}_r je relativna brzina toka u odnosu na telo na osnovu koje se računa hidrodinamička sila \vec{F} .

U uslovima tekuće vode F_x i F_y su komponente hidrodinamičke sile. Na slici 1 prikazani su vektori brzina i hidrodinamičke sile.

Intenzitet hidrodinamičke sile računa se prema izrazu:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{2} \rho C_D A |\vec{w}_r|^2 \quad (2)$$

gde je: ρ gustina ambijentalnog fluida (vode); C_D je koeficijent otpora oblika; A je površina projekcije krutog tela (kamena) na ravan upravnu na pravac toka, a w_r relativna brzina toka u odnosu na telo. Komponente hidrodinamičke sile su:

$$\vec{F}_x = |\vec{F}| \cos \varphi \quad \text{i} \quad \vec{F}_y = |\vec{F}| \sin \varphi \quad (3)$$

Kada se izrazi (2) i (3) zamene u (1), nakon sređivanja dobija se sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u_s \\ \frac{dy}{dt} &= v_s \\ \frac{du_s}{dt} &= G_1(x, y, u_s, v_s, t) \\ \frac{dv_s}{dt} &= G_2(x, y, u_s, v_s, t) \end{aligned} \quad (4)$$

Ako se pretpostavi da je telo (kamen) sfernog oblika prečnika d i da pri kretanju nema rotacije, funkcije G_1 i G_2 definisane su sledećim izrazima:

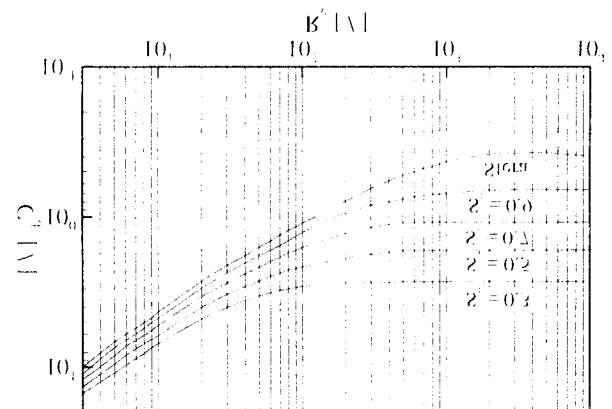
$$\begin{aligned} G_1(x, y, u_s, v_s, t) &= \frac{1}{2} \frac{\rho_r}{d} C_D (u - u_s) w_r \\ G_2(x, y, u_s, v_s, t) &= \frac{2}{3} \left[-(1 - \rho_r)g + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \frac{\rho_r}{d} C_D (v - v_s) w_r \right] \end{aligned} \quad (5)$$

gde je $\rho_r = \rho/\rho_s$. Činjenica da su zrna kamena nepravilnog oblika u proračunima se uzima u obzir tako što se umesto prečnika d u izrazima (5) koristi nominalni prečnik zrna d_n i što se za računanje koeficijenta otpora oblika C_D koristi zavisnost $C_D(Re)$ koja odgovara vrednosti faktora oblika ($S_f = c/\sqrt{ab}$) razmatranog zrna kamena (slika 2). U izrazu za računanje faktora oblika a je najveća, b je srednja, a c najmanja dimenzija zrna kamena.

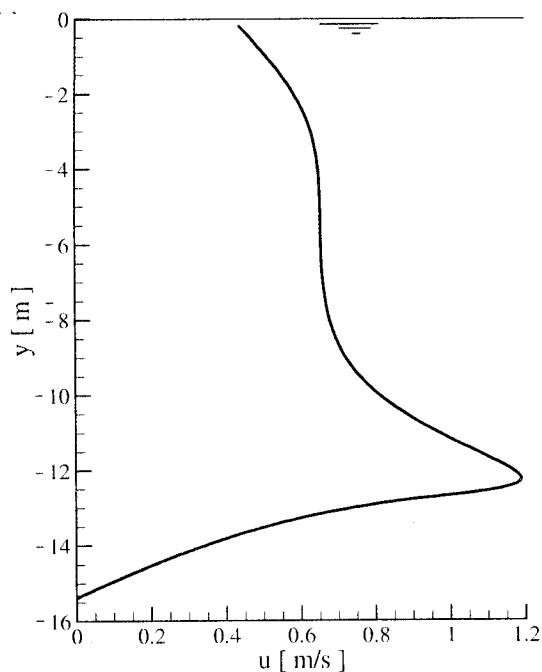
Sistem jednačina (4) se, uz definisan početni uslov:

$$\begin{aligned} x_o &= x(t_o), & y_o &= y(t_o) \\ u_{x_o} &= u_s(x_o, y_o, t_o) \\ v_{x_o} &= v_s(x_o, y_o, t_o) \end{aligned} \quad (6)$$

može rešiti primenom metode Runge-Kuta.



Slika 2. Zavisnost koeficijenta otpora oblika C_D od Reynoldsovog broja i faktora oblika zrna $S_f = c/\sqrt{ab}$ [2]



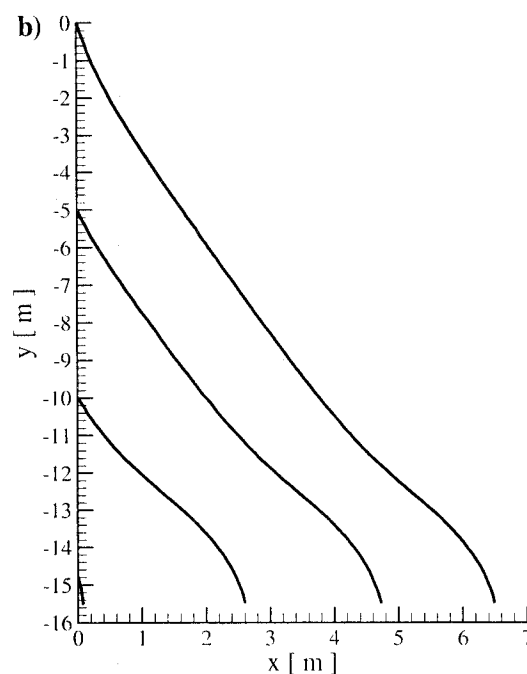
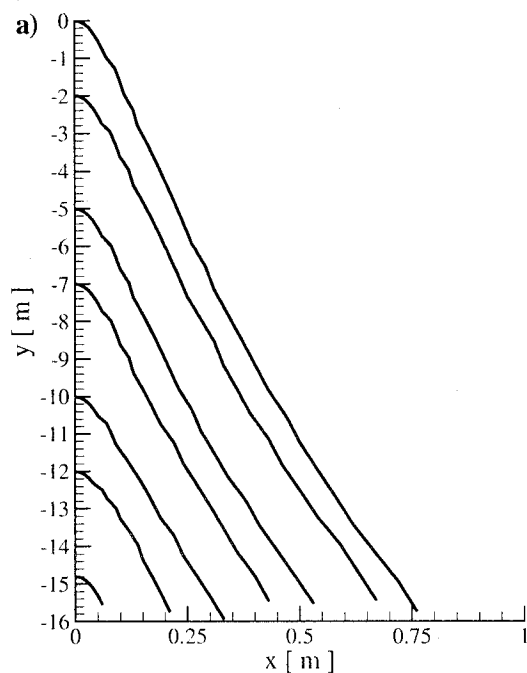
Slika 3. Raspored brzine izmeren na reci Dunav duž vertikale sa najvećom dubinom u profilu 110 m nizvodno od Žeželjevog mosta [3]

* * *

U nastavku će se, najpre, razmotriti idealizovan slučaj neometanog tonjenja zrna kamena sfernog oblika (faktor oblika ima vrednost $S_f = 1$), a potom i neometano tonjenje zrna kamena proizvoljnog oblika (faktor oblika $S_f < 1$). U svim primerima, izuzev onih u kojima je to drugačije naglašeno, smatraće se da se brzina ambijentalnog fluida (vode) duž vertikale menja prema zakonu prikazanom na slici 3.

3. TRAJEKTORIJE ZRNA KAMENA SFERNOG OBLIKA

Analiziraće se dva slučaja neometanog tonjenja kamena sfernog oblika. Prvi se odnosi na krupnije zrno prečnika $d = 0.60$ m, a drugi na zrno deset puta manjeg prečnika $d = 0.06$ m. Variranjem početne dubine y_0 sa koje se kamen izabrane krupnoće ispušta u tekuću vodu, dobijene su familije trajektorija prikazane na slici 4. Kao što se i moglo očekivati, rastojanje x mereno u pravcu glavnog toka od mesta ispuštanja do mesta na kojem kamen pada na dno (domet kamena) smanjuje se sa povećanjem početne dubine y_0 . Posmatranjem trajektorija kamena takođe se zaključuje da bi, u slučaju ugradnje krupnijih frakcija kamena, sa gledišta sigurnosti



Slika 4. Trajektorije kamenih lopti prečnika a) $d = 0.60$ m i b) $d = 0.06$ m za raspored brzine prikazan na slici 3

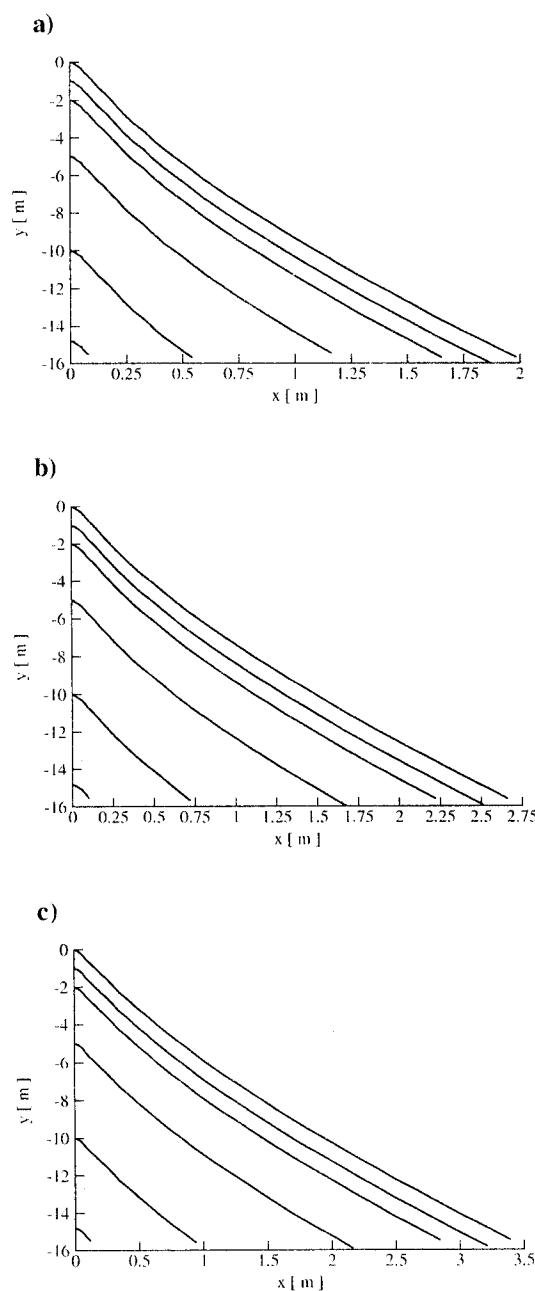
objekata izgrađenih u rečnom koritu (mostovskih stubova i podvodnih cevovoda) bilo najpovoljnije ako bi se kameni materijal umesto masovnog istovara iz plovila sa dubine $0 \leq y_0 \leq h_g$ kontrolisano spuštao grabilicom do mesta ugradnje. (Veličina h_g je gaz plovila i u slučaju barži ne prelazi vrednost od 2.5 m.) Isti zaključak važi i za sitnije frakcije kamena, s tim što je spuštanje grabilice do mesta ugradnje ovde bitno i zbog smanjenja rastura materijala.

Poređenjem trajektorija krupnijeg (slika 4a) i sitnijeg kamena (slika 4b) uočava se da je putanja sitnijih zrna znatno duža – zrno sporije pada, što se i moglo očekivati s obzirom na činjenicu da su zrna lakša i da, shodno tome, pružaju manji otpor sili toka. U konkretnom slučaju, kamene lopte prečnika $d = 0.06$ m padaju na dno na osam do devet puta većoj udaljenosti od lopti deset puta većeg prečnika ($d = 0.60$ m).

U narednom primeru analiziraće se uticaj brzine ambijentalnog fluida na trajektoriju kamena prečnika $d = 0.60$ m. Smatraće se da je dubina toka jednaka dubini vertikale prikazane na slici 3 i da iznosi 15.6 m. Umesto izmerenog rasporeda brzine sa slike 3, usvojiće se uniforman raspored brzine $u(y) = u_0$, $v(y) = 0$. Razmotriće se tri slučaja: $u_0 = \{1.5; 2.0; 2.5\}$ m/s. Rezultati proračuna trajektorija kamena dobijeni variranjem početne dubine y_0 za navedene tri vrednosti brzine toka prikazani su na slici 5. Kao što se i moglo očekivati, za kamen iste krupnoće povećanje brzine ambijentalnog fluida uslovljava povećanje dužine trajektorije, odnosno dometa kamena. Ovo je posledica činjenice da se sa porastom brzine toka pri istoj težini kamena povećava hidrodinamička sila toka.

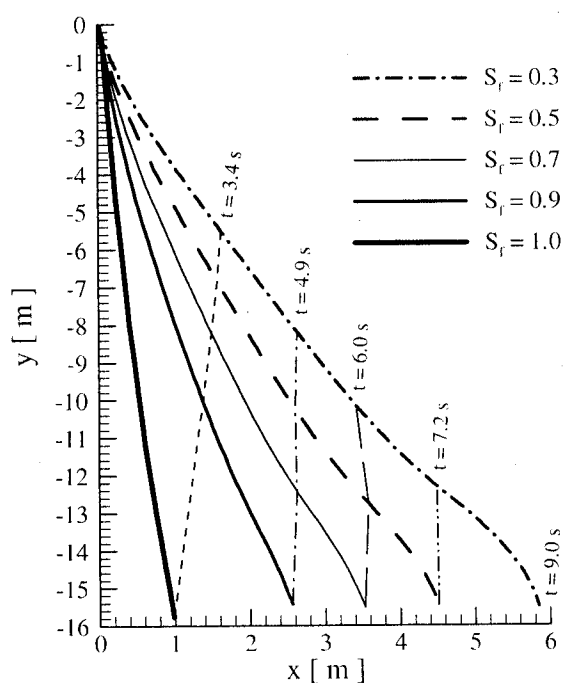
4. TRAJEKTORIJE ZRNA KAMENA NEPRAVILNOG OBLIKA

Zrna prirodnog kamena su nepravilnog oblika. Faktor oblika ($S_f = c/\sqrt{ab}$) ovakvih zrna uvek je manji od jedan i, kao što se vidi na slici 2, u prelaznom i turbulentnom režimu značajno utiče na vrednosti koeficijenta otpora oblika C_D . Stoga će se u nastavku razmotriti uticaj ovog faktora na trajektoriju kamena konstantnog nominalnog prečnika d_n . Namera je da se utvrdi kolika se greška čini u proceni trajektorije i dometa kamena usvajanjem zrna idealizovanog, sfernog oblika.



Slika 5. Trajektorije kamene lopte prečnika $d = 0.60$ m za: a) $u_0 = 1.5$ m/s, b) $u_0 = 2.0$ m/s i c) $u_0 = 2.5$ m/s

U narednim primerima usvojiće se vrednost nominalnog prečnika $d_n = 0.40$ m. Proračun je sproveden za svih pet vrednosti faktora oblika: $S_f = \{1.0; 0.9; 0.7; 0.5; 0.3\}$ sa slike 2. I ovoga puta varirana je početna



Slika 6: Trajektorije kamena nominalnog prečnika $d_n = 0.40$ m za različite vrednosti faktora oblika i odgovarajuće izohrone

dubina sa koje se ispušta kamen, ali su zbog preglednosti i radi lakšeg poređenja na istom dijagramu prikazane samo trajektorije za slučaj kada se kamen ispušta sa površine vodenog ogledala (slika 6).

Prvo što se uočava je da se pri istom rasporedu brzine sa smanjenjem faktora oblika povećava dužina trajektorije, a shodno tome i dometa kamena. Drugim rečima, što je kamen više spljošten, to je mesto na kojem doseže dno udaljenije od mesta ispuštanja. U konkretnom slučaju, ukoliko je faktor oblika kamena $S_f = 0.3$, a u proračunima se pretpostavi da je zrno sfernog oblika, dobija se šest puta manji dometa. To praktično znači da bi kamen ovih fizičkih karakteristika bio deponovan na pogrešnom mestu, čitavih 5 m nizvodno od projektovanog mesta ugradnje.

Duža trajektorija, odnosno veći dometa kamena sa manjom vrednošću faktora oblika znači i sporije

tonjenje zrna (slika 6), što je bitno sa gledišta dinamike ugrađivanja. Tako, na primer, 3.4 s od trenutka ispuštanja zrno sfernog oblika pada na dno, dok se zrno sa faktorom oblika $S_f = 0.3$ nalazi tek 5.6 m ispod površine vode i na udaljenosti od oko 1.7 m u pravcu glavnog toka od mesta ispuštanja. Spljošteno zrno ($S_f = 0.3$) doseže dno tek po isteku 9.0 s od trenutka ispuštanja.

ZAKLJUČCI

Analiza trajektorija kamena u tekućoj vodi pokazala je da su vreme tonjenja i dometa kamena kraći što je oblik zrna bliži sfernom obliku, to jest što je faktor oblika S_f bliži jedinici. Ovakvi rezultati su posledica uvedene pretpostavke da prilikom tonjenja nema rotacije zrna, što drugim rečima znači da se površina projekcije kamena na ravan upravnu na pravac toka ne menja tokom njegovog kretanja. Ova pretpostavka je ispunjena samo u slučaju zrna sfernog oblika, tako da prikazane razlike u proceni dometa i brzine tonjenja kamena nepravilnog oblika u odnosu na kamen sfernog oblika treba shvatiti kao kvalitativne pokazatelje uticaja faktora oblika na način kretanja zrna u tekućoj vodi. Imajući ovo u vidu zaključuje se da prikazana metodologija proračuna može, kao što je nagovešteno u uvodu, da pomogne projektantima prilikom izbora optimalnih hidrološko-hidrauličkih uslova sa stanovišta izvođenja radova, kao i prilikom propisivanja načina ugradnje kamena u regulacione i zaštitne građevine u rečnom koritu.

LITERATURA

- [1] *Elaborat za sanaciju objekta podvodnog prelaza gasovoda ispod Dunava u Novom Sadu*, NIS-Inženjering, Novi Sad, 2001.
- [2] Garde, R.J., Ranga Raju, G., *Mechanics of sediment transportation*, Wiley Eastern, Ltd. New Delhi, 1977.
- [3] Varga, S., Kovač, Z., *Hidrološko-hidraulička i psamološka studija reke Dunav u Novom Sadu*, Institut za vodoprivredu "Jaroslav Černi", Beograd 2001.

DETERMINATION OF A STONE PARTICLE TRAJECTORY IN THE FLOWING WATER

by

Dejana ĐORĐEVIĆ, M.Sc., B.Civ.E.
Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade

Summary

Trajectory of a stone particle released into the flowing water is determined. The length of the particle trajectory, i.e. the duration of sinking and the distance traveled by the released particle, is analysed in terms of the parameters considered: the initial depth at which the stone particle is released into the flowing water, the

particle diameter, the flow velocity and the shape factor.

Key words: oblique throw, trajectory, flowing water, stone particle diameter, shape factor, drag coefficient

Redigovano 18.09.2002.