

# PROSTORNO OBLIKOVANJE RAMPE ZA NADVIŠENJE SPOLJNE ŠINE

## SUPERELEVATION RAMP DESIGN

UDK: 623.113/.115

Pregledni rad

V. prof. dr Zdenka POPOVIĆ, dipl.građ.inž.<sup>1)</sup>

Luka LAZAREVIĆ, dipl.građ.inž.<sup>2)</sup>

Mr Leposava PUZAVAC, dipl.građ.inž.<sup>3)</sup>

### REZIME

U radu se navode opšti kriterijumi za izvođenje geometrijskog oblika prelazne krivine i rampe za nadvišenje na osnovu kinematičke analize kretanja železničkog vozila. Prema evropskim tehničkim standardima (ENV 13803-1) primenjuje se šest geometrijskih oblika prelaznih krivina na konvencionalnim železničkim prugama i pet oblika rampi za nadvišenje. U Srbiji ne postoje tehnički propisi za projektovanje konvencionalnih železničkih pruga. Zastareli, ali još uvek važeći Pravilnik 314 o održavanju gornjeg stroja železničkih pruga definiše primenu prelazne krivine oblika kubne parabole.

**Ključne reči:** železnička infrastruktura, geometrijsko oblikovanje, prelazna krivina, rampa za nadvišenje, harmonizacija.

### SUMMARY

This paper presents general criteria for deriving a geometric shape for the transition curve and superelevation ramp, based on kinematic analysis of railway vehicle movement. According to European standard (ENV 13803-1) six types of transition curves and five types of superelevation ramps are applied on the conventional railway lines. In Republic of Serbia there are no technical regulations for track alignment design for conventional lines. Obsolete, but still current Regulation 314 for maintenance of track superstructure defines application of cubic parabola as transition curve.

**Key words** – railway infrastructure, track alignment design, transition curve, superelevation ramp, harmonization.

## 1. UVOD

Savremeni pristup geometrijskom oblikovanju trase železničke pruge objedinjuje geometrijski oblik prelazne krivine u situacionom planu i rampe za nadvišenje u uzdužnom profilu u jedinstveni prostorni element trase. U radu se prikazuju geometrijski oblici prelaznih krivina i rampe za nadvišenje, koji su izvedeni na osnovu kinematičke analize kretanja železničkog vozila po prostornoj putanji. Prikazani geometrijski oblici usklađeni su sa zahtevima evropskih standarda, čije je usvajanje u Institutu za standardizaciju Republike Srbije u toku.

Cilj rada je upoznavanje zainteresovane naučne i stručne javnosti sa savremenim pristupom geometrijskom oblikovanju prostorne podužne ose železničke pruge. U

radu se prikazuje postupno matematičko izvođenje geometrijskih oblika prelazne krivine u situacionom planu i prelazne rampe u uzdužnom profilu. Izvedene matematičke formule mogu se jednostavno iskoristiti za izradu novog ili dopunu postojećeg softvera za projektovanje železničkih pruga u Cad – okruženju.

Sve oznake u radu usklađene su sa evropskim normama.

## 2. PRELAZNE KRIVINE

Prelazna krivina je element trase koji povezuje pravac i kružnu krivinu ili dve kružne krivine istog ili različitog poluprečnika, koje mogu biti istog ili suprotnog smera zakrivljenosti.

U slučaju kada prelazna krivina povezuje pravac i kružnu krivinu poluprečnika  $R$ , u situacionom planu u oblasti prelazne krivine menja se zakrivljenost od vrednosti  $1/\infty = 0$ , na početku prelazne krivine, do vrednosti  $1/R$ , na kraju prelazne krivine. U uzdužnom profilu, u oblasti prelazne krivine ostvaruje se promena nadvišenja spoljne šine od  $D_1 = 0$ , na početku prelazne krivine, do  $D_2$  na kraju prelazne krivine. Nadvišenje  $D_2$  odgovara

Adrese autora:

<sup>1)</sup> Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, 11000 Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73.

E-mail: zdenka@grf.rs

<sup>2)</sup> Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, 11000 Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73

<sup>3)</sup> Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, 11000 Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73.

E-mail: leposava@grf.rs

konstantnoj vrednosti nadvišenja spoljne šine u oblasti kružne krivine.

U slučaju dve uzastopne kružne krivine poluprečnika  $R_1$  i  $R_2$ , sa istim ili suprotnim smerom zakrivljenosti, u oblasti prelazne krivine se ostvaruje promena sa zakrivljenosti od  $\pm 1/R_1$  do  $\pm 1/R_2$ . U uzdužnom profilu, u oblasti prelazne krivine ostvaruje se promena nadvišenja spoljne šine od vrednosti  $D_1$ , na početku prelazne krivine, do vrednosti  $D_2$  na kraju prelazne krivine. Nadvišenje  $D_1$  odgovara konstantnoj vrednosti nadvišenja spoljne šine u oblasti kružne krivine poluprečnika  $R_1$ . Nadvišenje  $D_2$  odgovara konstantnoj vrednosti nadvišenja spoljne šine u oblasti kružne krivine poluprečnika  $R_2$ .

Prelazna krivina sa prelaznom rampom čini složen prostorni geometrijski oblik sa jednovremenom promenom zakrivljenosti obe šine u koloseku i promenom vrednosti nadvišenja spoljne šine. Pored toga, obe šine u koloseku prate projektovani nagib nivelete u uzdužnom profilu. Funkcija promene zakrivljenosti odgovara funkciji promene nadvišenja u oblasti tako definisane prostor-ne rampe.

Izostavljanje prelazne krivine na prelasku iz pravca u kružnu krivinu dovodi u opštem slučaju do iznenadnog dejstva centrifugalne sile na početku kružne krivine. Usled toga dolazi do naletanja venca spoljašnjeg točka prve osovine na spoljašnju šinu i naglog trzaja vozila. Konačan rezultat te pojave u putničkom železničkom saobraćaju je neudobnost vožnje, odnosno u teretnom saobraćaju mogućnost oštećenja tereta. Sa aspekta koloseka i vozila, očekivano je oštećenje unutrašnje površine glave spoljašnje šine i venca točkova železničkog vozila u zoni dodira šine i venca točka. Ovi neželjeni efekti su utoliko veći, ukoliko je veća brzina vozila i manji poluprečnik kružne krivine.

Da bi kriva proizvoljnog geometrijskog oblika mogla da se nazove prelaznom krivinom, ona mora da zadovolji određene uslove:

- u tački koja predstavlja početak prelazne krivine postoji zajednička tangenta na prelaznu krivinu i elementacionog plana koji joj prethodi (pravac ili kružna krivina);

- u tački koja predstavlja kraj prelazne krivine postoji zajednička tangenta na prelaznu i kružnu krivinu koja sledi;

- zakrivljenost prelazne krivine treba da bude jednaka zakrivljenosti kružne krivine u tački njihovog dodira;

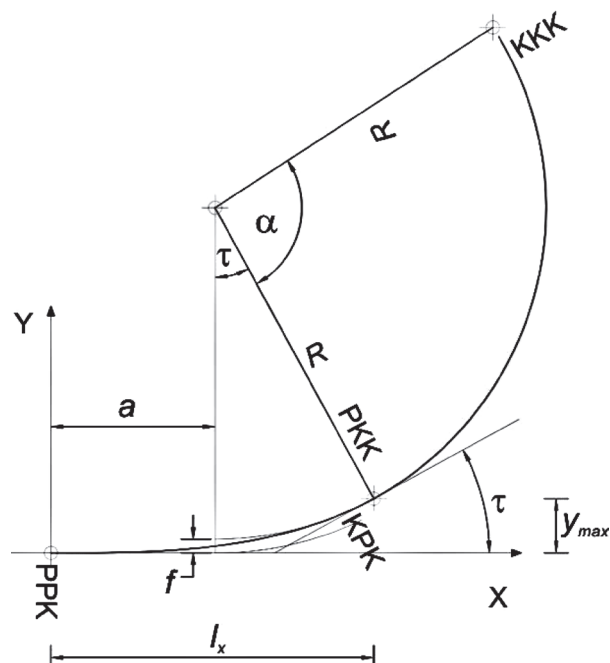
- zakrivljenost prelazne krivine na kraju pravca treba da bude jednaka nuli;

- promena zakrivljenosti duž prelazne krivine treba da odgovara promeni nadvišenja spoljne šine;

- na kraju i/ili početku prelazne krivine postiže se puno nadvišenje koje odgovara poluprečniku kružne krivine za usvojenu maksimalnu vrednost brzine;

- minimalna dužina prelazne krivine izvodi se na osnovu ograničene vitopernosti koloseka na dužini rampe za nadvišenje (planska vitopernost zbog izdizanja spoljne šine + slučajna vitopernost usled propadanja geometrije koloseka u oblasti prelazne krivine tokom eksploataci-

je) kako bi se sprečilo penjanje venca unutrašnjeg točka prednje osovine na glavu unutrašnje šine.



Slika 1. Konstrukcija prelazne krivine koja povezuje pravac i kružnu krivinu

Na slici 1 prikazan je princip konstrukcije prelazne krivine proizvoljnog geometrijskog oblika koja povezuje pravac i kružnu krivinu. Na slici su primenjene sledeće oznake:

- $l_x$  – projekcija prelazne krivine na tangenti pravac,

- $y_{max}$  – upravno rastojanje od tangentsnog pravca do kraja prelazne krivine,

- $a$  – približno polovina projekcije prelazne krivine na tangenti pravac,

- $f$  – odmak krugova, kojim se obezbeđuje neophodan prostor za upisivanje prelazne krivine

- $\tau$  – ugao između tangentsnog pravca i tangente na početak kružne krivine.

U opštem slučaju parametri  $l_x$ ,  $y_{max}$  i  $\tau$  zavise od oblika prelazne krivine, dok se parametri  $f$  i  $a$  mogu odrediti prema formulama (1).

$$f = y_{max} - R(1 - \cos \tau); a = l_x - R \cdot \sin \tau \quad (1)$$

## 2.1. Opšta jednačina prelazne krivine

Ako neka kriva ispunjava sve uslove da bude prelazna krivina, tada za jednačinu zakrivljenosti u proizvoljnoj tački te krive važi:

$$\frac{1}{r} = F(l) \quad (2)$$

U izrazu (2) primenjene su sledeće oznake:

- $l$  – rastojanje od posmatrane tačke do početka krive (mereno duž krive),

- $r$  – poluprečnik prelazne krivine u proizvoljnoj tački.

Za izraz (2) važe sledeći granični uslovi:

$$l = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} = 0 \wedge r = \infty; \quad l = L \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{R} \wedge r = R \quad (3)$$

gde su:

- $L$  – dužina krive,
- $R$  – poluprečnik kružne krivine.

Ako se sa  $\theta$  označi ugao između tangentnog pravca i tangente na proizvoljnu tačku krive, tada važi:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dl} &= \frac{1}{r} = F(l) \\ \theta &= \int F(l) \cdot dl \end{aligned} \quad (4)$$

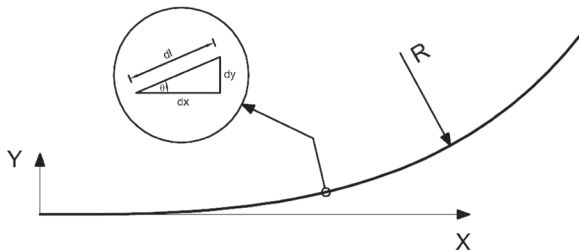
Za izraz (4) važe granični uslovi:

$$l = 0 \Rightarrow \theta = 0; \quad l = L \Rightarrow \theta = \tau \quad (5)$$

Drugi izvod ugla  $\theta$  po promenljivoj  $l$  predstavlja vrednost promene zakrivljenosti u proizvoljnoj tački krive.

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} = \frac{d}{dl} \left( \frac{d\theta}{dl} \right) = \frac{d}{dl} [F(l)] \quad (6)$$

Za potrebe izvođenja jednačine prelazne krivine usvaja se lokalni ortogonalni koordinatni sistem sa koordinatnim početkom u početnoj tački prelazne krivine, apscisnom osom paralelnom sa tangentnim pravcem, a ordinatnom osom upravnom na isti (slika 2).



Slika 2. Polazne pretpostavke pri izvođenju jednačine prelazne krivine

Uočavanjem proizvoljnog, beskonačno malog dela krive i uvođenjem oznaka kao na slici 2, mogu se napisati sledeći izrazi:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{dx}{dl} & \sin \theta &= \frac{dy}{dl} \\ dx &= \cos \theta \cdot dl & dy &= \sin \theta \cdot dl \\ x &= \int \cos \theta \cdot dl & y &= \int \sin \theta \cdot dl \end{aligned} \quad (7)$$

Rešavanjem integrala u izrazima (7) po promenljivoj  $\theta$ , dobili bi se izrazi nepodesni za primenu. Zato se uvodi smena po promenljivoj  $l$ , s obzirom na to da je  $\theta = \theta(l)$ . Na taj način se postiže da lokalne koordinate izabrane tačke krive zavise od njenog rastojanja od početka krive.

U cilju lakšeg rešavanja ovih integrala, koristi se Tejlorov razvoj funkcija sinusa i kosinusa u red. Ovi re-

dovi brzo konvergiraju, pa je dovoljan razvoj do drugog ili trećeg člana.

$$\cos \theta = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{\theta^{2 \cdot i}}{(2 \cdot i)!}$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

$$x = \int \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \right) \cdot dl$$

$$x = \int dl - \int \frac{\theta^2}{2!} \cdot dl + \int \frac{\theta^4}{4!} \cdot dl - \dots, \quad \theta = \theta(l)$$

$$\sin \theta = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{\theta^{2 \cdot i + 1}}{(2 \cdot i + 1)!}$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$y = \int \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \right) \cdot dl$$

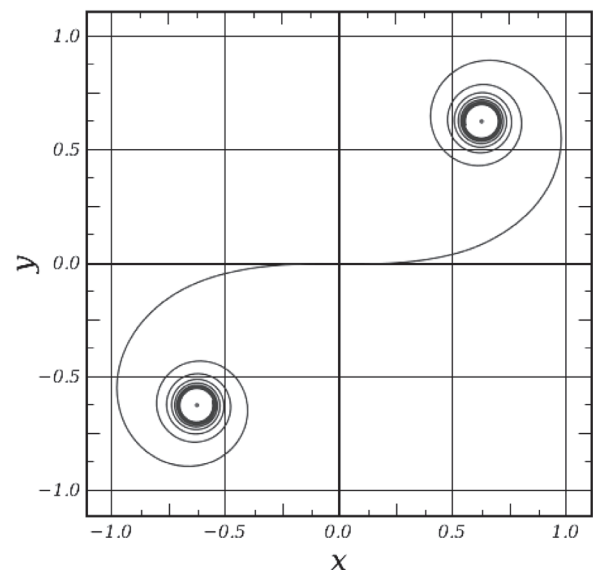
$$y = \int \theta \cdot dl - \int \frac{\theta^3}{3!} \cdot dl + \int \frac{\theta^5}{5!} \cdot dl - \dots, \quad \theta = \theta(l) \quad (8)$$

Uređnim parom jednačina iz izraza (8) definisane su koordinate proizvoljne tačke, koja se nalazi na rastojanju  $l$  od početka krive, u lokalnom koordinatnom sistemu (slika 2).

U evropskim normama ENV 13803-1, preporučuje se korišćenje šest oblika prelaznih krivina: klotoida, kubna parabola (prosta ili popravljena), Blosova kriva, kosinusoida, Šramova kriva i Klajnova kriva (sinusoida).

### 2.1.1. Prelazna krivina oblika klotoide

Prelazna krivina oblika klotoide predstavlja praktičnu primenu Ojlerove dvostrane spirale (slika 3).



Slika 3. Ojlerova dvostrana spirala

Promena zakrivljenosti klotoide je linearna i proporcionalna rastojanju od njenog početka.

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{1}{r} = \frac{l}{R \cdot L}$$

$$\theta = \int \frac{l}{R \cdot L} \cdot dl \quad (9)$$

$$\theta = \frac{l^2}{2 \cdot R \cdot L} + C$$

Upotrebom graničnih uslova se dobija:

$$l = 0, \theta = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\theta = \frac{l^2}{2 \cdot R \cdot L} \quad (10)$$

$$l = L \Rightarrow \theta = \tau = \frac{L}{2 \cdot R}$$

Promena zakrivljenosti određuje se na osnovu izraza:

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} = \frac{d}{dl} \left( \frac{l}{R \cdot L} \right) = \frac{1}{R \cdot L} = \text{const} \quad (11)$$

Koordinate proizvoljne tačke prelazne krivine oblika klotoide, kao i koordinate kraja prelazne krivine određuju se na osnovu izraza (12) i (13).

$$x = \int dl - \int \frac{\theta^2}{2!} \cdot dl + \int \frac{\theta^4}{4!} \cdot dl$$

$$x = l - \frac{1}{2!} \cdot \int \frac{l^4}{4 \cdot R^2 \cdot L^2} \cdot dl + \frac{1}{4!} \cdot \int \frac{l^8}{16 \cdot R^4 \cdot L^4} \cdot dl$$

$$x = l - \frac{1}{8 \cdot R^2 \cdot L^2} \cdot \int l^4 \cdot dl + \frac{1}{384 \cdot R^4 \cdot L^4} \cdot \int l^8 \cdot dl$$

$$x = l - \frac{l^5}{40 \cdot R^2 \cdot L^2} + \frac{l^9}{3456 \cdot R^4 \cdot L^4}$$

$$l = L \Rightarrow l_X = L - \frac{L^3}{40 \cdot R^2} + \frac{L^5}{3456 \cdot R^4} \quad (12)$$

$$y = \int \theta \cdot dl - \int \frac{\theta^3}{3!} \cdot dl + \int \frac{\theta^5}{5!} \cdot dl$$

$$y = \int \frac{l^2}{2 \cdot R \cdot L} \cdot dl - \frac{1}{3!} \cdot \int \frac{l^6}{8 \cdot R^3 \cdot L^3} \cdot dl +$$

$$+ \frac{1}{5!} \cdot \int \frac{l^{10}}{32 \cdot R^5 \cdot L^5} \cdot dl$$

$$y = \frac{1}{2 \cdot R \cdot L} \cdot \int l^2 \cdot dl - \frac{1}{48 \cdot R^3 \cdot L^3} \cdot \int l^6 \cdot dl +$$

$$+ \frac{1}{3840 \cdot R^5 \cdot L^5} \cdot \int l^{10} \cdot dl$$

$$y = \frac{l^3}{6 \cdot R \cdot L} - \frac{l^7}{336 \cdot R^3 \cdot L^3} + \frac{l^{11}}{42240 \cdot R^5 \cdot L^5}$$

$$l = L \Rightarrow y_{\max} = \frac{L^2}{6 \cdot R} - \frac{L^4}{336 \cdot R^3} + \frac{L^6}{42240 \cdot R^5} \quad (13)$$

### 2.1.2. Prelazna krivina oblika kubne parabole

Ovaj oblik prelazne krivine se izvodi iz jednačine klotoide (12) usvajanjem prva dva sabirka i uvođenjem sledećih aproksimacija:

$$\cos \theta = 1; \sin \theta = \theta \quad (14)$$

Aproksimacija (14) je opravdana za male vrednosti ugla  $\theta$ .

Izrazima (15) obuhvaćeni su parametri za konstrukciju prelazne krivine oblika proste kubne parabole.

$$x = \int \cos \theta \cdot dl = \int dl = l$$

$$y = \int \sin \theta \cdot dl = \int \theta \cdot dl =$$

$$= \int \frac{l^2}{2 \cdot R \cdot L} \cdot dl = \frac{l^3}{6 \cdot R \cdot L}$$

$$l_X = L - \frac{L^3}{40 \cdot R^2}$$

$$y_{\max} = \frac{L^2}{6 \cdot R}$$

$$\tau = \frac{L}{2 \cdot R} \quad (15)$$

Sa porastom dužine kubne parabole, povećavaće se vrednosti ugla  $\theta$ , tako da usvojena aproksimacija dovodi do neprihvatljivog odstupanja sračunate vrednosti ordinate  $y$  na kraju prelazne i početku kružne krivine. Zato se u praksi, zavisno od dužine prelazne krivine, koristi formula (16) za prostu kubnu parabolu, odnosno formula (19) za popravljenu kubnu parabolu (Heferova kriva).

U jednačini (16) umesto dužine prelazne krivine  $L$  koristi se projekcija dužine prelazne krivine na pravac tangente  $l_X$ , kako bi se povećala sračunata vrednost ordinate.

$$y = \frac{x^3}{6 \cdot R \cdot l_X} \quad (16)$$

Koristeći izraz za maksimalnu vrednost ordinate  $y_{\max}$  iz formula (15) određuje se jednačina za sračunavanje neophodnog odmaka krugova  $f$ :

$$f = \frac{l_X^2}{24 \cdot R} \quad (17)$$

Pravilnik 314 definiše dužinu prelazne krivine oblika proste kubne parabole pri kojoj dolazi do neprihvatljivog odstupanja između ordinate kraja proste kubne parabole i početka kružne krivine prema izrazu (18).

$$L > \sqrt[4]{0.64 \cdot R^3} \quad (18)$$

U tom slučaju koristi se formula popravljene kubne parabole (Heferove krive), prema izrazu (19).

$$y = \frac{x^3}{6 \cdot R \cdot l_X} \cdot \left( 1 + \left( \frac{l_X^2}{2 \cdot R} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (19)$$

Parametri za konstrukciju prelazne krivine oblika popravljene kubne parabole prikazani su formulama (20):

$$l_X = L - \frac{L^3}{40 \cdot R^2}$$

$$y_{\max} = \frac{l_X^2}{6 \cdot R} \cdot \left( 1 + \left( \frac{l_X^2}{2 \cdot R} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\tau = \arctg \left( \frac{3 \cdot y_{\max}}{l_X} \right) \quad f = y_{\max} + R \cdot \cos \tau - R \quad (20)$$

### 2.1.3. Prelazna krivina oblika Blosove krive

Blosova kriva je parabola kod koje se zakrivljenost menja prema sledećoj formuli:

$$\frac{1}{r} = \frac{3 \cdot l^2}{R \cdot L^2} - \frac{2 \cdot l^3}{R \cdot L^3} \quad (21)$$

Na osnovu izraza (21) sledi:

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{1}{r} = \frac{3 \cdot l^2}{R \cdot L^2} - \frac{2 \cdot l^3}{R \cdot L^3}$$

$$\theta = \int \left( \frac{3 \cdot l^2}{R \cdot L^2} - \frac{2 \cdot l^3}{R \cdot L^3} \right) \cdot dl$$

$$\theta = \frac{l^3}{R \cdot L^2} - \frac{l^4}{2 \cdot R \cdot L^3} + C \quad (22)$$

Upotrebom graničnih uslova se dobija:

$$l = 0, \theta = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\theta = \frac{l^3}{R \cdot L^2} - \frac{l^4}{2 \cdot R \cdot L^3}$$

$$l = L \Rightarrow \theta = \tau = \frac{L}{R} - \frac{L}{2 \cdot R} = \frac{L}{2 \cdot R} \quad (23)$$

Promena zakrivljenosti određuje se na snovu izraza:

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} = 6 \cdot l \cdot \frac{L-l}{R \cdot L^3} \quad (24)$$

Koordinate prelazne krivine u lokalnom koordinatnom sistemu (slika 2) određuju se prema izrazima (25) i (26).

$$x = \int dl - \int \frac{\theta^2}{2!} \cdot dl$$

$$x = l - \frac{1}{2!} \cdot \int \left( \frac{l^3}{R \cdot L^2} - \frac{l^4}{2 \cdot R \cdot L^3} \right)^2 \cdot dl$$

$$x = l - \frac{l^7}{14 \cdot R^2 \cdot L^4} + \frac{l^8}{16 \cdot R^2 \cdot L^5} - \frac{l^9}{72 \cdot R^2 \cdot L^6}$$

$$l = L \Rightarrow l_X = L - \frac{L^3}{14 \cdot R^2} + \frac{L^3}{16 \cdot R^2} - \frac{L^3}{72 \cdot R^2}$$

$$l_X = L - \frac{23 \cdot L^3}{1008 \cdot R^2} \quad (25)$$

$$y = \int \theta \cdot dl - \int \frac{\theta^3}{3!} \cdot dl$$

$$y = \int \left( \frac{l^3}{R \cdot L^2} - \frac{l^4}{2 \cdot R \cdot L^3} \right) \cdot dl - \frac{1}{3!} \cdot \int \left( \frac{l^3}{R \cdot L^2} - \frac{l^4}{2 \cdot R \cdot L^3} \right)^3 \cdot dl$$

$$y = \frac{l^4}{4 \cdot R \cdot L^2} - \frac{l^5}{10 \cdot R \cdot L^3} - \frac{l^{10}}{60 \cdot R^3 \cdot L^6} + \frac{l^{11}}{44 \cdot R^3 \cdot L^7} - \frac{l^{12}}{96 \cdot R^3 \cdot L^8} + \frac{l^{13}}{624 \cdot R^3 \cdot L^9}$$

$$l = L \Rightarrow y_{\max} = \frac{L^2}{4 \cdot R} - \frac{L^2}{10 \cdot R} - \frac{L^4}{60 \cdot R^3} + \frac{L^4}{44 \cdot R^3} - \frac{L^4}{96 \cdot R^3} + \frac{L^4}{624 \cdot R^3}$$

$$y_{\max} = \frac{3 \cdot L^2}{20 \cdot R} - \frac{63 \cdot L^4}{22880 \cdot R^3} \quad (26)$$

### 2.1.4. Prelazna krivina oblika kosinusoide

Zakrivljenost prelazne krivine se menja po kosinusnom zakonu:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - \cos \left( \frac{\pi \cdot l}{L} \right)}{2 \cdot R} \quad (27)$$

Na osnovu izraza (27) određuje se ugao  $\theta$  između tangentnog pravca i tangente na proizvoljnu tačku prelazne krive oblika kosinusoide:

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{1}{r} = \frac{1 - \cos \left( \frac{\pi \cdot l}{L} \right)}{2 \cdot R}$$

$$\theta = \int \frac{1 - \cos \left( \frac{\pi \cdot l}{L} \right)}{2 \cdot R} \cdot dl$$

$$\theta = \frac{1}{2 \cdot R} \cdot \int dl - \frac{1}{2 \cdot R} \cdot \int \cos \left( \frac{\pi \cdot l}{L} \right) \cdot dl$$

$$\theta = \frac{l}{2 \cdot R} - \frac{L}{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot \sin \left( \frac{\pi \cdot l}{L} \right) + C \quad (28)$$

Upotrebom graničnih uslova se dobija:

$$l = 0, \theta = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\theta = \frac{l}{2 \cdot R} - \frac{L}{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot \sin \left( \frac{\pi \cdot l}{L} \right)$$

$$l = L \Rightarrow \theta = \tau = \frac{L}{2 \cdot R} - \frac{L}{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot \sin \pi = \frac{L}{2 \cdot R} \quad (29)$$

Promena zakrivljenosti je nelinearna i određuje se prema izrazu:

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} = \frac{\pi}{2 \cdot R \cdot L} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{L}\right) \quad (30)$$

Upotrebom prva dva člana Tejlorovog reda u proračunu, dobijaju se koordinate proizvoljne tačke prelazne krivine u lokalnom kooordinatnom sistemu (slika 2) prema izrazima (31) i (32).

$$\begin{aligned} x &= \int dl - \int \frac{\theta^2}{2!} \cdot dl \\ x &= l - \frac{1}{2!} \cdot \int \left( \frac{l}{2 \cdot R} - \frac{L}{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{L}\right) \right)^2 \cdot dl \\ x &= l - \frac{L^2 \cdot l}{16 \cdot \pi^2 \cdot R^2} - \frac{l^3}{24 \cdot R^2} - \frac{L^2 \cdot l}{4 \cdot \pi^2 \cdot R^2} \cdot \\ &\quad \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{L}\right) + \frac{L^3}{4 \cdot \pi^3 \cdot R^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{L}\right) + \\ &\quad + \frac{L^3}{32 \cdot \pi^3 \cdot R^2} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) \\ l = L \Rightarrow l_X &= L - \frac{L^3}{48 \cdot \pi^2 \cdot R^2} \cdot (2 \cdot \pi^2 - 9) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} y &= \int \theta \cdot dl - \int \frac{\theta^3}{3!} \cdot dl \\ y &= \int \left( \frac{l}{2 \cdot R} - \frac{L}{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{L}\right) \right) \cdot dl - \\ &\quad - \frac{1}{3!} \cdot \int \left( \frac{l}{2 \cdot R} - \frac{L}{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{L}\right) \right)^3 \cdot dl \\ y &= -\frac{L^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot R} - \frac{L^2 \cdot l^2}{64 \cdot \pi^2 \cdot R^3} - \frac{l^4}{192 \cdot R^3} + \\ &\quad + \frac{l^2}{4 \cdot R} + \frac{7 \cdot L^4}{64 \cdot \pi^4 \cdot R^3} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{L}\right) - \\ &\quad - \frac{L^2 \cdot l^2}{16 \cdot \pi^2 \cdot R^3} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{L}\right) + \frac{L^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot R} \cdot \\ &\quad \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{L}\right) + \frac{L^4}{128 \cdot \pi^4 \cdot R^3} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) + \\ &\quad + \frac{L^4}{576 \cdot \pi^4} \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) + \\ &\quad + \frac{L^3 \cdot l}{8 \cdot \pi^3 \cdot R^3} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{L}\right) + \\ &\quad + \frac{L^3 \cdot l}{64 \cdot \pi^3 \cdot R^3} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) \\ l = L \Rightarrow y_{\max} &= \frac{L^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot R} \cdot (\pi^2 - 4) - \\ &\quad - \frac{L^4}{1152 \cdot \pi^4 \cdot R^3} \cdot (6 \cdot \pi^4 - 54 \cdot \pi^2 + 119) \end{aligned} \quad (32)$$

### 2.1.5 Prelazna krivina oblika Šramove krive

Zakrivljenost Šramove krive je definisana izrazom (33).

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{R} \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^2, \quad 0 \leq l \leq \frac{L}{2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{2}{R} \cdot \left(1 - \frac{l}{L}\right)^2, \quad \frac{L}{2} \leq l \leq L \quad (33)$$

Za deo prelazne krivine  $0 \leq l \leq L/2$  ugao  $\theta$  se određuje sledećim izrazom:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dl} &= \frac{1}{r} = \frac{2}{R} \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^2 \\ \theta &= \int \frac{2}{R} \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^2 \cdot dl \quad \theta = \frac{2 \cdot l^3}{3 \cdot R \cdot L^2} + C \end{aligned} \quad (34)$$

Upotrebom graničnih uslova se dobija:

$$\begin{aligned} l = 0, \theta = 0 &\Rightarrow C = 0 \\ \theta &= \frac{2 \cdot l^3}{3 \cdot R \cdot L^2} \quad l = \frac{L}{2} \Rightarrow \theta = \frac{L}{12 \cdot R} \end{aligned} \quad (35)$$

Promena zakrivljenosti se određuje prema izrazu:

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} = \frac{4 \cdot l}{R \cdot L^2} \quad (36)$$

Za jednačinu apscise primenjena su prva dva člana Tejlorovog razvoja, a za jednačinu ordinate samo prvi član. Na ovaj način olakšava se proračun pri postavljanju graničnih uslova.

$$\begin{aligned} x &= \int dl - \int \frac{\theta^2}{2!} \cdot dl \quad x = l - \frac{1}{2!} \cdot \int \left( \frac{2 \cdot l^3}{3 \cdot R \cdot L^2} \right)^2 \cdot dl \\ x &= l - \frac{l^7}{31.5 \cdot R^2 \cdot L^4} \quad l = \frac{L}{2} \Rightarrow l_{X1} = \frac{L}{2} - \frac{L^3}{4032 \cdot R^2} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} y &= \int \theta \cdot dl \quad y = \int \frac{2 \cdot l^3}{3 \cdot R \cdot L^2} \cdot dl \\ y &= \frac{l^4}{6 \cdot R \cdot L^2} \quad l = \frac{L}{2} \Rightarrow y_{\max 1} = \frac{L^2}{96 \cdot R} \end{aligned} \quad (38)$$

Za deo prelazne krivine  $L/2 \leq l \leq L$  ugao  $\theta$  se određuje sledećim izrazom:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dl} &= \frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{2}{R} \cdot \left(1 - \frac{l}{L}\right)^2 \\ \theta &= \int \left( \frac{1}{R} - \frac{2}{R} \cdot \left(1 - \frac{l}{L}\right)^2 \right) \cdot dl \\ \theta &= \frac{1}{R} \cdot \int dl - \frac{2}{R \cdot L^2} \cdot \int (L^2 - 2 \cdot l \cdot L + l^2) \cdot dl \\ \theta &= -\frac{l}{R} + \frac{2 \cdot l^2}{R \cdot L} - \frac{2 \cdot l^3}{3 \cdot R \cdot L^2} + C \end{aligned} \quad (39)$$

Upotrebom graničnih uslova se dobija:

$$l = \frac{L}{2} \dot{\epsilon} = \frac{L}{12 \cdot R} \Rightarrow C = \frac{L}{6 \cdot R}$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{L}{6 \cdot R} - \frac{l}{R} + \frac{2 \cdot l^2}{R \cdot L} - \frac{2 \cdot l^3}{3 \cdot R \cdot L^2}$$

$$l = L \Rightarrow \dot{\epsilon} = \hat{\delta} = \frac{L}{2 \cdot R} \quad (40)$$

Promena zakrivljenosti se određuje izrazom:

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} = \frac{4}{R \cdot L^2} \cdot (L-l) \quad (41)$$

Pravouglo koordinate prelazne krivine određuju se prema izrazima (42) i (43).

$$x = \int dl - \int \frac{\theta^2}{2!} \cdot dl$$

$$x = l - \frac{1}{2!} \cdot \int \left( \frac{L}{6 \cdot R} - \frac{l}{R} + \frac{2 \cdot l^2}{R \cdot L} - \frac{2 \cdot l^3}{3 \cdot R \cdot L^2} \right)^2 \cdot dl$$

$$x = l - \frac{L^2 \cdot l}{72 \cdot R^2} + \frac{L \cdot l^2}{12 \cdot R^2} - \frac{5 \cdot l^3}{18 \cdot R^2} + \frac{19 \cdot l^4}{36 \cdot R^2 \cdot L} -$$

$$- \frac{8 \cdot l^5}{15 \cdot R^2 \cdot L^2} + \frac{2 \cdot l^6}{9 \cdot R^2 \cdot L^3} - \frac{2 \cdot l^7}{63 \cdot R^2 \cdot L^4} + C_x$$

$$l = \frac{L}{2} \Rightarrow l_{X2} = \frac{L}{2} - \frac{13 \cdot L^3}{10080 \cdot R^2} + C_x$$

$$l_{X1} = l_{X2} \Rightarrow C_x = \frac{L^3}{960 \cdot R^2}$$

$$x = l - \frac{L^2 \cdot l}{72 \cdot R^2} + \frac{L \cdot l^2}{12 \cdot R^2} - \frac{5 \cdot l^3}{18 \cdot R^2} +$$

$$+ \frac{19 \cdot l^4}{36 \cdot R^2 \cdot L} - \frac{8 \cdot l^5}{15 \cdot R^2 \cdot L^2} + \frac{2 \cdot l^6}{9 \cdot R^2 \cdot L^3} -$$

$$- \frac{2 \cdot l^7}{63 \cdot R^2 \cdot L^4} + \frac{L^3}{960 \cdot R^2}$$

$$l = L \Rightarrow l_X = L - \frac{451 \cdot L^3}{20160 \cdot R^2} \quad (42)$$

$$y = \int \theta \cdot dl$$

$$y = \int \left( \frac{L}{6 \cdot R} - \frac{l}{R} + \frac{2 \cdot l^2}{R \cdot L} - \frac{2 \cdot l^3}{3 \cdot R \cdot L^2} \right) \cdot dl$$

$$y = \frac{L \cdot l}{6 \cdot R} - \frac{l^2}{2 \cdot R} + \frac{2 \cdot l^3}{3 \cdot R \cdot L} - \frac{l^4}{6 \cdot R \cdot L^2} + C_y$$

$$l = \frac{L}{2} \Rightarrow y_{\max 2} = \frac{L^2}{32 \cdot R} + C_y$$

$$y_{\max 1} = y_{\max 2} \Rightarrow C_y = -\frac{L^2}{48 \cdot R}$$

$$y = \frac{L \cdot l}{6 \cdot R} - \frac{l^2}{2 \cdot R} + \frac{2 \cdot l^3}{3 \cdot R \cdot L} - \frac{l^4}{6 \cdot R \cdot L^2} - \frac{L^2}{48 \cdot R}$$

$$l = L \Rightarrow y_{\max} = \frac{7 \cdot L^2}{48 \cdot R} \quad (43)$$

#### 2.1.6. Prelazna krivina oblika Klajnovne krive (sinuso-ida)

Zakrivljenost prelazne krivine se menja po sinusnom zakonu:

$$\frac{1}{r} = \frac{2 \cdot \pi \cdot l - L \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right)}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot L} \quad (44)$$

Na osnovu izraza (44) sledi:

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{1}{r} = \frac{2 \cdot \pi \cdot l - L \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right)}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot L}$$

$$\theta = \int \frac{2 \cdot \pi \cdot l - L \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right)}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot L} \cdot dl$$

$$\theta = \frac{1}{R \cdot L} \cdot \int l \cdot dl - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot \int \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) \cdot dl$$

$$\theta = \frac{l^2}{2 \cdot R \cdot L} + \frac{L}{4 \cdot \pi^2 \cdot R} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) + C \quad (45)$$

Upotrebom graničnih uslova dobija se izraz za ugao  $\tau$ :

$$l = 0, \theta = 0 \Rightarrow \frac{L}{4 \cdot \pi^2 \cdot R} \cdot \cos 0 + C = 0$$

$$\Rightarrow C = -\frac{L}{4 \cdot \pi^2 \cdot R}$$

$$\theta = \frac{l^2}{2 \cdot R \cdot L} + \frac{L}{4 \cdot \pi^2 \cdot R} \cdot \left[ \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) - 1 \right]$$

$$l = L \Rightarrow \theta = \tau = \frac{L}{2 \cdot R} \quad (46)$$

Promena zakrivljenosti Klajnovne krive se određuje na osnovu sledećeg izraza:

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} = \frac{1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right)}{R \cdot L} \quad (47)$$

Primenom prva dva člana Tejlorovog reda određuju se pravougle koordinate prelazne krivine oblika sinusoide u lokalnom koordinatnom sistemu (slika 2), prema izrazima (48) i (49).

$$x = \int dl - \int \frac{\theta^2}{2!} \cdot dl \quad x = l - \frac{1}{2!} \cdot \int \left( \frac{l^2}{2 \cdot R \cdot L} + \frac{L}{4 \cdot \pi^2 \cdot R} \cdot \left[ \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) - 1 \right] \right)^2 \cdot dl$$

$$x = l - \frac{l^5}{40 \cdot R^2 \cdot L^2} + \frac{l^3}{24 \cdot \pi^2 \cdot R^2} - \frac{3 \cdot L^2 \cdot l}{64 \cdot \pi^4 \cdot R^2} - \frac{L^2 \cdot l}{16 \cdot \pi^4 \cdot R^2} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) - \frac{L \cdot l^2}{16 \cdot \pi^3 \cdot R^2} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right)$$

$$+ \frac{L^3}{16 \cdot \pi^5 \cdot R^2} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) - \frac{L^3}{256 \cdot \pi^5 \cdot R^2} \cdot \sin\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) \quad l = L \Rightarrow l_x = L - \frac{L^3}{960 \cdot \pi^4 \cdot R^2} \cdot (24 \cdot \pi^4 - 40 \cdot \pi^2 + 105) \quad (48)$$

$$y = \int \theta \cdot dl - \int \frac{\theta^3}{3!} \cdot dl$$

$$y = \int \left( \frac{l^2}{2 \cdot R \cdot L} + \frac{L}{4 \cdot \pi^2 \cdot R} \cdot \left[ \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) - 1 \right] \right) \cdot dl - \frac{1}{3!} \int \left( \frac{l^2}{2 \cdot R \cdot L} + \frac{L}{4 \cdot \pi^2 \cdot R} \cdot \left[ \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) - 1 \right] \right)^3 \cdot dl$$

$$y = \frac{l^3}{6 \cdot R \cdot L} + \frac{l^5}{160 \cdot \pi^2 \cdot R^3 \cdot L} - \frac{l^7}{336 \cdot R^3 \cdot L^3} - \frac{L \cdot l}{4 \cdot \pi^2 \cdot R} + \frac{5 \cdot L^3 \cdot l}{768 \cdot \pi^6 \cdot R^3} - \frac{L \cdot l^3}{128 \cdot \pi^4 \cdot R^3} + \frac{L^3 \cdot l}{16 \cdot \pi^6 \cdot R^3} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) - \frac{L \cdot l^3}{32 \cdot \pi^4 \cdot R^3} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) - \frac{L^3 \cdot l}{1024 \cdot \pi^6 \cdot R^3} \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) + \frac{L^2}{8 \cdot \pi^3 \cdot R} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) - \frac{37 \cdot L^2}{1024 \cdot \pi^7 \cdot R^3} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) - \frac{L^2 \cdot l^2}{16 \cdot \pi^5 \cdot R^3} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) - \frac{L^4}{64 \cdot \pi^3 \cdot R^3} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) + \frac{5 \cdot L^4}{4096 \cdot \pi^7 \cdot R^3} \cdot \sin\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) - \frac{L^2 \cdot l^2}{512 \cdot \pi^5 \cdot R^3} \cdot \sin\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) + \frac{L^4}{9216 \cdot \pi^7 \cdot R^3} \cdot \sin\left(\frac{6 \cdot \pi \cdot l}{L}\right)$$

$$l = L \Rightarrow y_{\max} = \frac{L^2}{12 \cdot \pi^2 \cdot R} \cdot (2 \cdot \pi^2 - 3) - \frac{L^4}{107520 \cdot \pi^6 \cdot R^3} \cdot (320 \cdot \pi^6 - 672 \cdot \pi^4 + 4200 \cdot \pi^2 - 7315) \quad (49)$$

## 2.2. Uporedna analiza geometrijskih oblika prelaznih krivina

Prikazani geometrijski oblici prelaznih krivina međusobno se porede i analiziraju sa aspekta praktične primenljivosti. Za potrebe uporedne analize, vrednosti minimalnog poluprečnika kružne krivine  $R_{\min}$ , nadvišenja spoljne šine  $D$  i dužine prelazne krivine  $L$  računata su prema formulama (50), (51) i (52).

Uporedna analiza se zasniva na sledećim poznatim polaznim stavovima:

– minimalnom poluprečniku kružne krivine odgovara maksimalna vrednost nadvišenja i prelazna krivina maksimalne dužine,

$$R_{\min} = \frac{V_{\max}^2}{4.6} \quad , \quad V \leq 120 \frac{km}{h}$$

$$R_{\min} = \frac{V_{\max}^2}{4.8} \quad , \quad V > 120 \frac{km}{h} \quad (50)$$

$$D = 7.1 \cdot \frac{V_{\max}^2}{R} \quad , \quad V \leq 120 \frac{km}{h}$$

$$D = 6.5 \cdot \frac{V_{\max}^2}{R} \quad , \quad V > 120 \frac{km}{h} \quad (51)$$

$$L = \frac{10 \cdot V_{\max} \cdot D}{1000} \quad (52)$$



– sa povećanjem vrednosti poluprečnika kružne krivine, potrebno nadvišenje se smanjuje, kao i potrebna dužina prelazne krivine.

### 2.2.1. Uporedna analiza prelaznih krivina oblika klotoide i kubne parabole

U tački 2.1.1 prikazan je egzaktni matematički postupak za izvođenje parametara klotoide. Suprotno tome, u tački 2.1.2 parametri prelazne krivine oblika kubne parabole se izvode iz jednačine klotoide, uvođenjem inženjerskih pojednostavljenja (videti formulu 14). Posledica takvog pristupa je odstupanje položaja kraja prelazne krivine u odnosu na početak kružne krivine, prilikom obeležavanja trase na terenu. Odstupanje raste sa porastom dužine prelazne krivine. Dakle, do najvećeg odstupanja dolazi u slučaju minimalnog poluprečnika kružne krivine.

Da bi se eliminisalo pomenuto nepoklapanje i obezbedio kontinuitet zakrivljenosti, vršene su korekcije formula, tako da se koriste formule proste (16) i popravljene kubne parabole (19).

Pored toga, odstupanje na kraju proste kubne parabole ima skokovitu promenu, usled činjenice da se u proračunu ordinata kubne parabole (videti formulu 16) usvaja da je projekcija njene dužine na pravac tangente jednaka njenoj stvarnoj dužini. U ovom slučaju neće važiti uobičajena formula za proračun ugla  $\theta$ , odnosno ugla  $\tau$  na kraju kubne parabole, jer bi došlo do značajnog odstupanja zakrivljenosti u odnosu na početak kružne krivine. Na osnovu geometrijskih analiza primenjuje se sledeća formula za određivanje ugla  $\tau$ :

$$\tau = \arctg\left(\frac{l_x}{2 \cdot R}\right) \quad (53)$$

Međutim, i dalje će postojati značajno odstupanje na kraju proste kubne parabole za dužine prelaznih krivina prema formuli (18). U tom slučaju proračun i obeležavanje se vrše prema formulama (19) i (20).

U tabeli 1 je prikazano odstupanje ordinate kraja kubne parabole u odnosu na početak kružne krivine za

Tabela 1. Oправданost primene Heferove krive

	R [M]	l [M]	$\Delta y$ [CM]	$\sqrt[4]{0.64 \cdot R^3}$ [m]	Heferova kriva
$V_{max} = 80 \text{ km/h}$	300	120	17.148	64.47	✓
	400	90	2.366	80.00	✓
	500	75	0.589	94.57	
	600	60	0.140	108.43	
$V_{max} = 100 \text{ km/h}$	500	140	7.032	94.57	✓
	600	120	2.223*	108.43	✓
	700	100	0.679	121.72	
	800	90	0.299	134.54	

$\Delta y$  – odstupanje kraja proste kubne parabole od početka kružne krivine  
 ✓ – primenjuje se Heferova kriva

različite vrednosti poluprečnika za dve različite vrednosti maksimalne brzine kretanja šinskog vozila, kako bi se numerički ilustrovala potreba za primenom popravljene kubne parabole oblika Heferove krive.

Tabela 2. Poređenje maksimalnih ordinata  $y_{max}$  i uglova  $\tau$  za prostu i popravljenu kubnu parabolu

	R [M]	L [M]	prosta		popravljena	
			$\tau$ [rad]	$y_{max}$ [m]	$\tau$ [rad]	$y_{max}$ [m]
$V_{max} = 80 \text{ km/h}$	300	120	0.197	7.936	0.208	8.413
	400	90	0.112	3.366	0.114	3.430
	500	75	0.075	1.873	0.075	1.889
	600	60	0.050	1.000	0.050	1.003
$V_{max} = 100 \text{ km/h}$	500	140	0.139	6.508	0.143	6.699
	600	120	0.100	3.992	0.101	4.052
	700	100	0.071	2.379	0.072	2.397
	800	90	0.056	1.686	0.056	1.694

Iz table 2 se može uočiti da su vrednosti ugla  $\tau$  manje kod proste kubne parabole, a isto važi i za maksimalnu ordinatu. Sa stanovišta inženjerske primene, ovo ukazuje da primena proste kubne parabole omogućuje bolje uklapanje kružne krivine u tangentni poligon, na osnovu manjeg rastojanja između temena i sredine kružne krivine.

### 2.2.2. Uporedna analiza prelaznih krivina oblika klotoide i ostalih geometrijskih oblika

Da bi se moglo napraviti međusobno poređenje klotoide, Blosove krive, kosinusoide, Šramove krive i sinusoida, u narednim tabelama su za različite vrednosti dužina prelazne krivine i poluprečnika kružne krivine, u zavisnosti od brzine vozila, sračunate vrednosti odgovarajućih parametara.

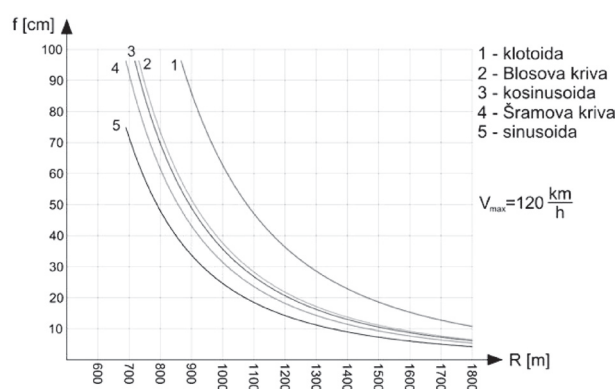
U tabelama 3 i 4 prelazne krivine su poredane po vrednosti odmaka kruga od tangente, u opadajućem redosledu. Može se zaključiti da, što je odmak veći, veća je

Tabela 3. Elementi krivine za  $V_{max} = 80 \text{ km/h}$ ,  $R = 300 \text{ m}$  i  $L = 120 \text{ m}$

$V_{MAX} = 80 \text{ KM/H}$	Kloto-ida	Blosova kriva	Kosinu-soida	Šra-mova kriva	Sinuso-ida	Ele-menti
R [m]	300	119.519	119.562	119.565	119.570	$l_x$ [m]
L [m]	120	7.977	7.179	7.125	7.000	$y_{max}$ [m]
$\tau$ [rad]	0.2000	1.997	1.199	1.145	1.020	$f$ [m]
		59.918	59.961	59.964	59.970	$a$ [m]
$\alpha$ [°]	20	113.169	113.071	113.064	113.048	113.015
	60	234.276	233.858	233.830	233.764	233.636
	100	419.824	418.916	418.854	418.711	418.439
	140	889.649	887.498	887.353	887.015	886.375
$\alpha$ [°]	20	6.656	5.845	5.791	5.664	5.424
	60	48.716	47.794	47.732	47.588	47.315
	100	169.824	168.582	168.498	168.304	167.936
	140	582.981	580.646	580.489	580.124	579.432

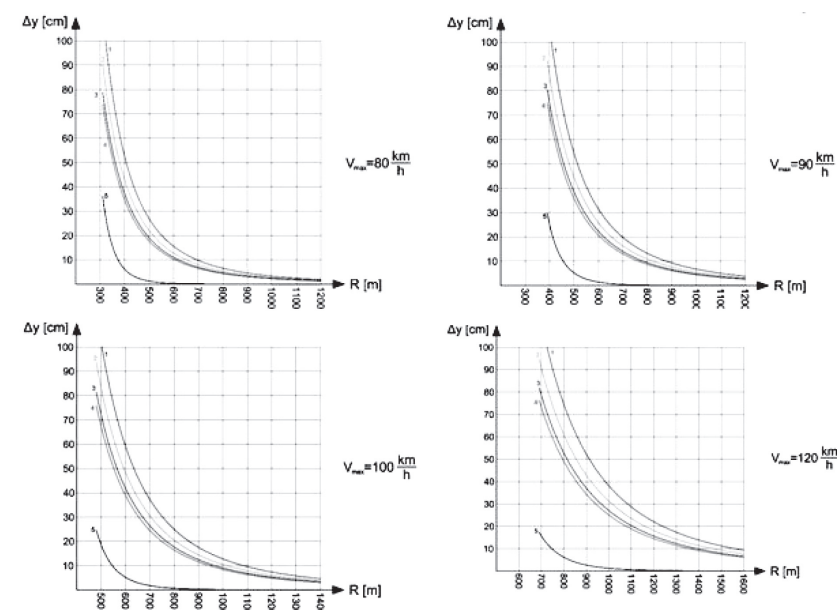
Tabela 4. Elementi krivine za  $V_{max} = 100 \text{ km/h}$ ,  $R = 500 \text{ m}$  i  $L = 140 \text{ m}$

$V_{max} = 100 \text{ km/h}$	Kloto-ida	Blosova kriva	Kosinu-oida	Šra-mova kriva	Sinuso-ida	Ele-menti	
$R \text{ [m]}$	500	139.725	139.750	139.751	139.754	139.760	
$L \text{ [m]}$	140	6.524	5.872	5.824	5.717	5.532	
$\tau \text{ [rad]}$	0.1400	1.632	0.980	0.932	0.825	0.640	
	69.954	69.978	69.980	69.983	69.988	$l_x \text{ [m]}$	
$\alpha \text{ [}^\circ\text{]}$	20	158.405	158.314	158.307	158.292	158.264	$y_{max} \text{ [m]}$
	60	359.571	359.219	359.193	359.134	359.033	
	100	667.776	667.022	666.967	666.842	666.628	
	140	1448.177	1446.408	1446.278	1445.987	1445.486	
$\alpha \text{ [}^\circ\text{]}$	20	9.371	8.708	8.659	8.551	8.363	$f \text{ [m]}$
	60	79.235	78.481	78.426	78.303	78.089	
	100	280.401	279.386	279.311	279.145	278.858	
	140	966.674	964.766	964.626	964.313	963.774	



Slika 4. Zavisnost odmaka kruga  $f$  od poluprečnika  $R$  za brzinu vozila  $V_{max} = 120 \text{ km/h}$

dužina tangente i bisektrise. Sa druge strane, povećanjem poluprečnika kružne krivine smanjuje se potrebni odmak za svaki oblik prelazne krivine. Ipak, veći poluprečnik uslovljava veće dužine tangente i bisektrise.



$y_{max,cp}$  - maksimalna ordinata popravljene kubne parabole,  
 $y_{max}$  - maksimalna ordinata proizvoljnog oblika prelazne krivine.  
 Zavisnost  $\Delta y$  od poluprečnika za prostu kubnu parabolu nije konstruisana na dijagramima, jer vrednosti za  $\Delta y$  nisu značajne usled činjenice da je:

Slika 5. Zavisnost razlike maksimalne ordinate klotoida i drugih oblika prelaznih krivina od poluprečnika za različite brzine vozila

Dijagrami zavisnosti odmaka kruga  $f$  od poluprečnika  $R$  za brzinu vozila  $V_{max} = 120 \text{ km/h}$  predstavljen je na slici 4 za različite geometrijske oblike prelazne krivine.

Dakle, za klotoidu je potreban najveći odmak kruga od tangente, a za sinusoidu najmanji. U uslovima praktične primene zbog ovog svojstva prelazna krivina oblika klotoida može u određenim slučajevima biti izrazito nepovoljna, jer je za njeno smeštanje potrebno najviše prostora. Odmak  $f$  kubne parabole, kako proste tako i popravljene, je približno jednak odmaku klotoida (razlika može biti reda veličine nekoliko centimetara) tako da se kriva broj 1 na slici 4 sa ograničenom tačnošću može koristiti i pri analizi neophodnog prostora za primenu prelazne krivine oblika proste ili popravljene kubne parabole.

Za veće vrednosti odmaka kruga od tangente biće veća vrednost maksimalne ordinate, pa će zato klotoida imati najveću maksimalnu ordinatu u odnosu na ostale oblike prelaznih krivina, pri istim vrednostima poluprečnika kružne i dužine prelazne krivine.

Dijagrami zavisnosti razlike maksimalne ordinate klotoida i drugih oblika prelaznih krivina od poluprečnika za različite brzine prikazani su na slici 5. Na slici 5 su primenjene sledeće oznake: kriva broj 1 odgovara prelaznoj krivini oblika sinusoida, kriva broj 2 prelaznoj krivini oblika Šramove krive, kriva broj 3 prelaznoj krivini oblika kosinusoida, kriva broj 4 prelaznoj krivini oblika Blosove krive i kriva broj 5 prelaznoj krivini oblika Heferove krive.

Razlike maksimalne ordinate klotoida u odnosu na druge oblike prelaznih krivina određene su na osnovu sledećih formula:

$$\Delta y_{1-4} = y_{max,c} - y_{max}$$

$$\Delta y_5 = y_{max,cp} - y_{max,c} \quad (54)$$

gde je:  
 $y_{max,c}$  - maksimalna ordinata klotoida,

$y_{max,cp}$  - maksimalna ordinata popravljene kubne parabole,

$y_{max}$  - maksimalna ordinata proizvoljnog oblika prelazne krivine.

$$L < \sqrt[4]{0.64 \cdot R^3} \Rightarrow \Delta y = y_{\max,c} - \frac{l_x^2}{6 \cdot R} = 0 \text{ mm} - 4 \text{ mm} \quad (55)$$

Zavisnost  $\Delta y$  od poluprečnika za popravljenu kubnu parabolu (Heferovu krivu) je konstruisana nezavisno od prethodnog uslova i sa dijagrama se može zaključiti da važi:

$$R > 2 \cdot R_{\min} \Rightarrow \Delta y \approx 0 \quad (56)$$

Analiza različitih geometrijskih oblika prelazne krivine može se izvršiti i sa stanovišta dužine trase železničke pruge, uz korišćenje oznaka prema slici 6.

Rastojanje između temena T1 i T2 je fiksirano za potrebe uporedne analize. Treba konstruisati dve simetrične krivine, tako da pri tome ostane određena dužina međupravca  $m$ .

$$S = 2 \cdot L_1 + D_1 + m + 2 \cdot L_2 + D_2$$

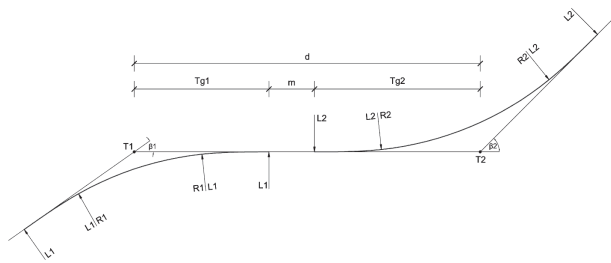
$D_{1,2}$  – dužine kružnih krivina

$$m = d - (Tg_1 + Tg_2) \quad (57)$$

Ukupna dužina krivine zavisi samo od vrednosti poluprečnika kružne krivine i dužine prelazne krivine, a ne zavisi od primenjenog oblika prelazne krivine. Stoga, ako se imaju u vidu prethodno izložene tabele i dijagrami, može se napisati:

$$Tg_{\text{sinusoide}} < Tg_{\text{šramove krive}} < Tg_{\text{kosinusoide}} < Tg_{\text{Blosove krive}} < Tg_{\text{klotoida}} \approx Tg_{\text{kubne parabole}} \Rightarrow S_{\text{sinusoide}} > S_{\text{šramove krive}} > S_{\text{kosinusoide}} > S_{\text{Blosove krive}} > S_{\text{klotoida}} \approx S_{\text{kubne parabole}} \quad (58)$$

Dakle, trasa železničke pruge će biti najkraća u slučaju korišćenja kubne parabole ili klotoida, a najduža u slučaju korišćenja sinusoide kao prelazne krivine. Kako je kod železničkih pruga često bitno da trasa bude maksimalne moguće dužine, zbog malih vrednosti podužnih nagiba koje niveleta sme da ima, može se zaključiti da su klotoida i kubna parabola nepovoljne za primenu sa tog aspekta.



Slika 6. Zadati tri tangentna pravca između kojih treba smestiti dve simetrične krivine

### 3. OSNOVNI OBLICI RAMPI ZA NADVIŠENJE

Ukoliko se rampa za nadvišenje predstavi kao prostorni element trase železničke pruge, onda njena projekcija u situacionom planu odgovara geometrijskom obliku

prelazne krivine, dok uzdužni profil rampe predstavlja zakonitost promene nadvišenja spoljne šine na dužini prelazne krivine.

Nadvišenje se najčešće izvodi tako što se spoljna šina izdiže u odnosu na unutrašnju do pune vrednosti nadvišenja. Moguće je i istovremeno izdizanje spoljašnje, uz spuštanje unutrašnje šine za vrednost polovine nadvišenja (primer švajcarske železnice).

Prelazna rampa svojim prostornim geometrijskim oblikom treba da ispuni sledeće uslove:

- zakon promene zakrivljenosti prelazne krivine odgovara zakonu promene nadvišenja spoljne šine,
- ograničena vitopernost koloseka na dužini rampe za nadvišenje kako bi se sprečilo penjanje venca unutrašnjeg točka prednje osovine na glavu unutrašnje šine,
- ograničena brzina izdizanja vozila na rampi,
- ograničena vrednost vertikalnog ubrzanja.

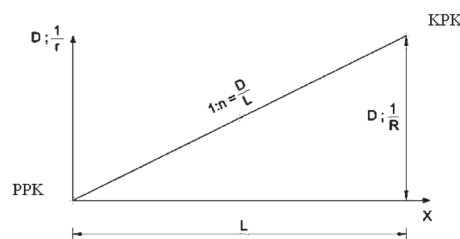
Zadovoljenje nabrojanih uslova je neophodno kako bi se obezbedila sigurnost kretanja vozila duž rampe i udobnost za putnike u vozilu.

Izborom geometrijskog oblika prelazne krivine bira se i način oblikovanja prelazne rampe. Kako se prelazne rampe klotoida i kubne parabole oblikuju na isti način, postoji ukupno pet oblika prelaznih rampi (prema ENV 13803-1). U analizi geometrijskih oblika rampi za nadvišenje koriste se sledeće veličine i oznake u skladu sa evropskim normama:

- $1 : n$  – nagib prelazne rampe (nagib tangente kod krivolinijskih rampi),
- $dD/dt$  – promena nadvišenja kao funkcija vremena (brzina promene nadvišenja),
- $a_v$  – vertikalno ubrzanje kao posledica promene nadvišenja,
- $D$  – nadvišenje,
- vrednost nadvišenja u proizvoljnoj tački prelazne rampe,
- $R$  – poluprečnik kružne krivine,
- $L$  – dužina prelazne rampe,
- $V$  – brzina kretanja voza duž prelazne rampe.

#### 3.1. Geometrijski oblik rampe za nadvišenje koja odgovara prelaznoj krivini oblika klotoida, proste i popravljene kubne parabole

Prelaznoj krivini oblika klotoida ili kubne parabole, kao što je već napomenuto, odgovara oblik rampe sa pravolinijskom promenom nadvišenja. Dakle, nadvišenje se, kao i zakrivljenost prelazne krivine pomenutih geometrijskih oblika, menja po linearnoj zakonitosti (slika 7).



Slika 7. Pravolinijska rampa za nadvišenje

Formula za proračun vrednosti nadvišenja u proizvoljnoj tački se određuje na osnovu formule zakrivljenosti na sledeći način:

$$\frac{1}{r} = \frac{l}{L \cdot R}$$

$$\Rightarrow D_x = D \cdot \frac{x}{L} \quad (59)$$

Isti postupak se koristi i za sve druge oblike prelaznih rampi.

Ako se usvoji da se vozilo duž prelazne rampe kreće konstantnom brzinom, što se može smatrati za opravdano, sledi:

$$x = V \cdot t, \quad (60)$$

pa se može izvršiti smena po vremenu u formuli za nadvišenje u proizvoljnoj tački.

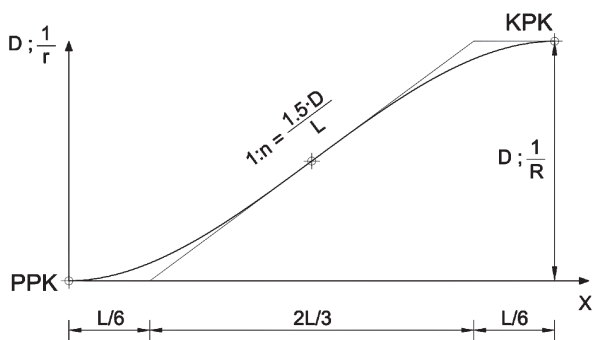
$$D_t = D \cdot \frac{V \cdot t}{L} \quad \frac{dD_t}{dt} = \frac{D \cdot V}{L} = const.$$

$$a_v = \frac{d^2 D_t}{dt^2} = 0 \quad (61)$$

Kako je brzina promene nadvišenja konstantna, sledi da je vertikalno ubrzanje jednako nuli.

### 3.2. Geometrijski oblik rampe za nadvišenje koja odgovara prelaznoj krivini oblika Blosove krive

Prelaznoj krivini oblika Blosove krive u skladu sa zakonom promene zakrivljenosti odgovara krivolinijska rampa za nadvišenje (slika 8). Za njeno oblikovanje se koristi parabola trećeg stepena prema formulama (62).



Slika 8. Rampa za nadvišenje koja odgovara prelaznoj krivini oblika Blosove krive

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \cdot \left[ 3 \cdot \left( \frac{l}{L} \right)^2 - 2 \cdot \left( \frac{l}{L} \right)^3 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_x = D \cdot \left[ 3 \cdot \left( \frac{x}{L} \right)^2 - 2 \cdot \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right] \quad (62)$$

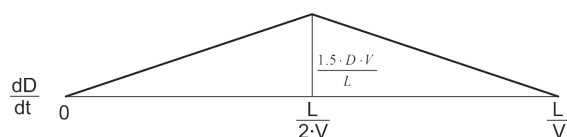
Uvođenjem smene po vremenu, dobija se brzina promene nadvišenja na dužini rampe prema formulama

63 i dijagram brzine promene nadvišenja, koji je predstavljen na slici 9.

$$D_t = D \cdot \left[ 3 \cdot \left( \frac{V \cdot t}{L} \right)^2 - 2 \cdot \left( \frac{V \cdot t}{L} \right)^3 \right]$$

$$\frac{dD_t}{dt} = D \cdot \left[ 6 \cdot \frac{V^2}{L^2} \cdot t - 6 \cdot \frac{V^3}{L^3} \cdot t^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} t=0 \Rightarrow \frac{dD_t}{dt} = 0 \\ t = \frac{L}{2 \cdot V} \Rightarrow \frac{dD_t}{dt} = \frac{1.5 \cdot D \cdot V}{L} \\ t = \frac{L}{V} \Rightarrow \frac{dD_t}{dt} = 0 \end{array} \right] \quad (63)$$

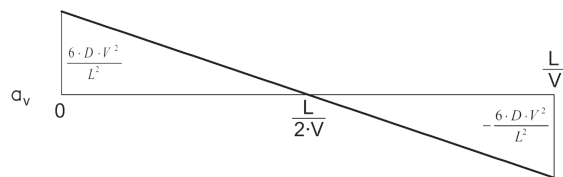


Slika 9. Dijagram brzine promene nadvišenja

Vertikalno ubrzanje se određuje prema formulama (64). Dijagram promene vertikalnog ubrzanja predstavljen je na slici 10.

$$a_v = \frac{d^2 D_t}{dt^2} = D \cdot \left[ 6 \cdot \frac{V^2}{L^2} - 12 \cdot \frac{V^3}{L^3} \cdot t \right] \Rightarrow$$

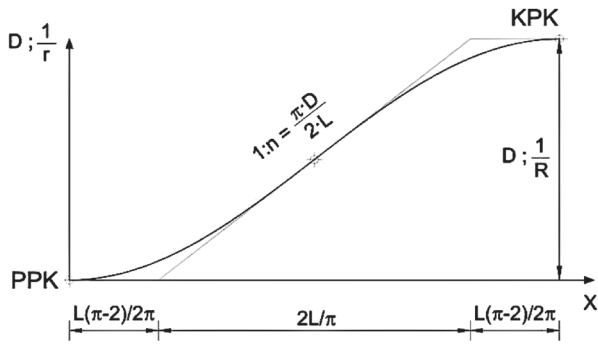
$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} t=0 \Rightarrow a_v = \frac{6 \cdot D \cdot V^2}{L^2} \\ t = \frac{L}{2 \cdot V} \Rightarrow a_v = 0 \\ t = \frac{L}{V} \Rightarrow a_v = -\frac{6 \cdot D \cdot V^2}{L^2} \end{array} \right] \quad (64)$$



Slika 10. Dijagram promene vertikalnog ubrzanja

### 3.3. Geometrijski oblik rampe za nadvišenje koja odgovara prelaznoj krivini oblika kosinusoide

Kako se kod kosinusoide zakrivljenost menja po kosinusnom zakonu, isto važi i za promenu nadvišenja. Odnosno, za oblikovanje ove prelazne rampe koristi se kosinusna kriva prema formulama (65).



Slika 11. Rampa za nadvišenje za kosinusoidu prelaznu krivinu

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2 \cdot R} \cdot \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{L}\right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_x = \frac{D}{2} \cdot \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \right] \quad (65)$$

Uvođenjem smene po vremenu, dobija se izraz za brzinu promene nadvišenja (66) i dijagram brzine promene nadvišenja, koji je predstavljen na slici 12.

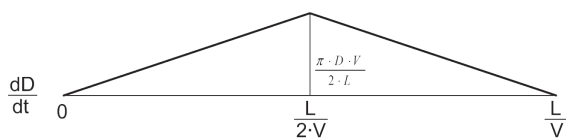
$$D_t = \frac{D}{2} \cdot \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi \cdot V \cdot t}{L}\right) \right]$$

$$\frac{dD_t}{dt} = \frac{\pi \cdot D \cdot V}{2 \cdot L} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot V \cdot t}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow \frac{dD_t}{dt} = 0 \\ t = \frac{L}{2 \cdot V} \Rightarrow \frac{dD_t}{dt} = \frac{\pi \cdot D \cdot V}{2 \cdot L} \\ t = \frac{L}{V} \Rightarrow \frac{dD_t}{dt} = 0 \end{array} \right] \quad (66)$$

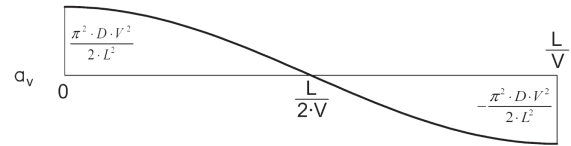
$$a_v = \frac{d^2 D_t}{dt^2} = \frac{\pi^2 \cdot D \cdot V^2}{2 \cdot L^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot V \cdot t}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow a_v = \frac{\pi^2 \cdot D \cdot V^2}{2 \cdot L^2} \\ t = \frac{L}{2 \cdot V} \Rightarrow a_v = 0 \\ t = \frac{L}{V} \Rightarrow a_v = -\frac{\pi^2 \cdot D \cdot V^2}{2 \cdot L^2} \end{array} \right] \quad (67)$$



Slika 12. Dijagram brzine promene nadvišenja

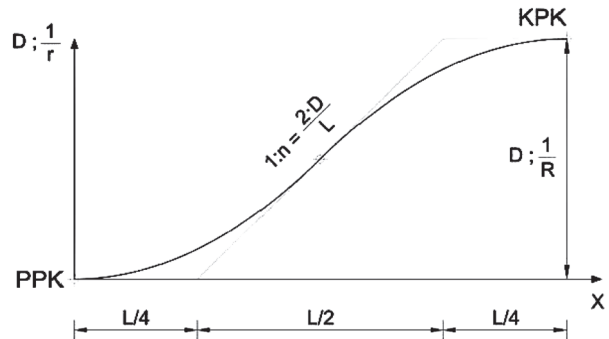
Vertikalno ubrzanje se određuje na osnovu izraza (67).



Slika 13. Dijagram promene vertikalnog ubrzanja

### 3.4. Geometrijski oblik rampe za nadvišenje koja odgovara prelaznoj krivini oblika Šramove krive

Prelaznoj krivini oblika Šramove krive odgovara krivolinijska prelazna rampa, koja se sastoji iz dva dela sa zajedničkom tangentom u sredini dužine prelazne krivine, prema formulama (68). Za njeno oblikovanje se koristi parabola drugog stepena (slika 14) u skladu sa formulama (68).



Slika 14. Rampa za nadvišenje koja odgovara prelaznoj krivini oblika Šramove krive

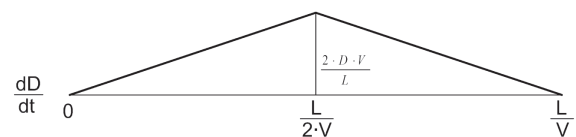
$$\frac{1}{r} = \frac{2}{R} \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^2, \quad 0 \leq l \leq \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow D_x = 2 \cdot D \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2, \quad 0 \leq l \leq \frac{L}{2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{2}{R} \cdot \left(1 - \frac{l}{L}\right)^2, \quad \frac{L}{2} \leq l \leq L$$

$$\Rightarrow D_x = D - 2 \cdot D \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2, \quad \frac{L}{2} \leq l \leq L \quad (68)$$

Uvođenjem smene po vremenu, dobijaju se formule (69) za određivanje brzine promene nadvišenja i odgovarajući dijagram promene nadvišenja, koji je predstavljen na slici 15.



Slika 15. Dijagram brzine promene nadvišenja

$$D_t = 2 \cdot D \cdot \left(\frac{V \cdot t}{L}\right)^2, \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{2}$$

$$D_t = D - 2 \cdot D \cdot \left(1 - \frac{V \cdot t}{L}\right)^2, \quad \frac{L}{2} \leq t \leq L$$

$$\frac{dD_t}{dt} = \frac{4 \cdot D \cdot V^2 \cdot t}{L^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow \frac{dD_t}{dt} = 0 \\ t = \frac{L}{2 \cdot V} \Rightarrow \frac{dD_t}{dt} = \frac{2 \cdot D \cdot V}{L} \end{array} \right], \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{2}$$

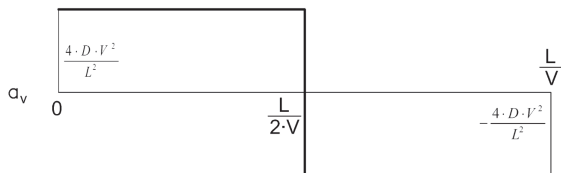
$$\frac{dD_t}{dt} = \frac{4 \cdot D \cdot V}{L} \cdot \left(1 - \frac{V \cdot t}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} t = \frac{L}{2 \cdot V} \Rightarrow \frac{dD_t}{dt} = \frac{2 \cdot D \cdot V}{L} \\ t = \frac{L}{V} \Rightarrow \frac{dD_t}{dt} = 0 \end{array} \right], \quad \frac{L}{2} \leq t \leq L \quad (69)$$

Dijagram vertikalnog ubrzanja na osnovu formula (70) predstavljen je na slici 16.

$$a_v = \frac{d^2 D_t}{dt^2} = \frac{4 \cdot D \cdot V^2}{L^2} = const., \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{2}$$

$$a_v = \frac{d^2 D_t}{dt^2} = -\frac{4 \cdot D \cdot V^2}{L^2} = const., \quad \frac{L}{2} \leq t \leq L \quad (70)$$



Slika 16. Dijagram brzine promene nadvišenja

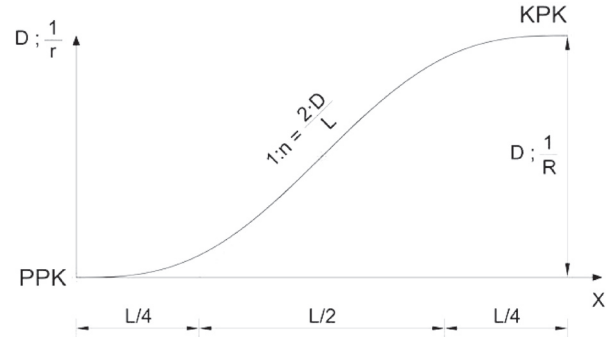
### 3.5. Geometrijski oblik rampe za nadvišenje koja odgovara prelaznoj krivini oblika Klajnovne krive

S obzirom na to da se zakrivljenost Klajnovne krive menja po sinusnom zakonu, isto važi i za promenu nadvišenja. Dakle, za oblikovanje ove prelazne rampe se koristi sinusna kriva u skladu sa formulama (71) i slikom 17.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \cdot \left[ \frac{l}{L} - \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{L}\right) \right]$$

$$D_x = D \cdot \left[ \frac{x}{L} - \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \right] \quad (71)$$

Uvođenjem smene po vremenu, izvodi se izraz (72) koji definiše brzinu promene nadvišenja  $dD_t/dt$ . Odgova-



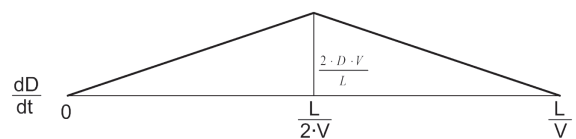
Slika 17. Rampa za nadvišenje koja odgovara Klajnovoj krivi

rajući dijagram brzine promene nadvišenja predstavljen je na slici 18.

$$D_t = D \cdot \left[ \frac{V \cdot t}{L} - \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot V \cdot t}{L}\right) \right]$$

$$\frac{dD_t}{dt} = \frac{D \cdot V}{L} \cdot \left[ 1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot V \cdot t}{L}\right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow \frac{dD_t}{dt} = 0 \\ t = \frac{L}{2 \cdot V} \Rightarrow \frac{dD_t}{dt} = \frac{2 \cdot D \cdot V}{L} \\ t = \frac{L}{V} \Rightarrow \frac{dD_t}{dt} = 0 \end{array} \right] \quad (72)$$



Slika 18. Dijagram brzine promene nadvišenja

Na osnovu formula (72) izvodi se izraz za vertikalno ubrzanje  $a_v$ :

$$a_v = \frac{d^2 D_t}{dt^2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot D \cdot V^2}{L^2} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot V \cdot t}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow a_v = 0 \\ t = \frac{L}{2 \cdot V} \Rightarrow a_v = 0 \\ t = \frac{L}{V} \Rightarrow a_v = 0 \end{array} \right] \quad (73)$$

Ekstremne vrednosti ubrzanja određuju se na osnovu izraza (74).

$$\frac{d^3 D_t}{dt^3} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot D \cdot V^3}{L^3} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot V \cdot t}{L}\right)$$

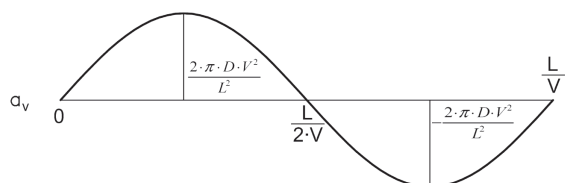
$$\frac{d^3 D_t}{dt^3} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot V \cdot t}{L}\right) = 0$$

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot V \cdot t}{L} = \frac{\pi}{2} \wedge \frac{2 \cdot \pi \cdot V \cdot t}{L} = \frac{3 \cdot \pi}{2}$$

$$t = \frac{L}{4 \cdot V} \wedge t = \frac{3 \cdot L}{4 \cdot V}$$

$$\left[ \begin{array}{l} t = \frac{L}{4 \cdot V} \Rightarrow a_v = \frac{2 \cdot \pi \cdot D \cdot V^2}{L^2} \\ t = \frac{3 \cdot L}{4 \cdot V} \Rightarrow a_v = -\frac{2 \cdot \pi \cdot D \cdot V^2}{L^2} \end{array} \right] \quad (74)$$

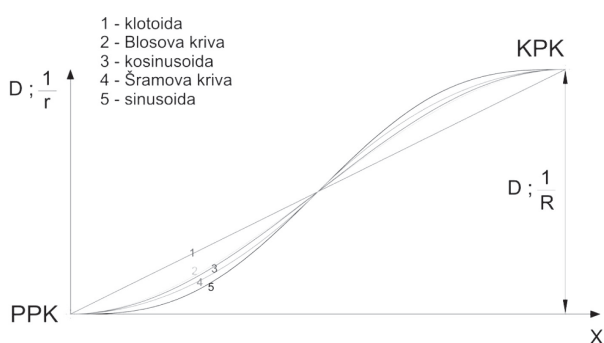
Na osnovu izraza (73) i (74) dobija se dijagram vertikalnog ubrzanja, koji je predstavljen na slici 19.



Slika 19. Dijagram vertikalnog ubrzanja

### 3.6. Poređenje geometrijskih oblika rampi za nadvišenje

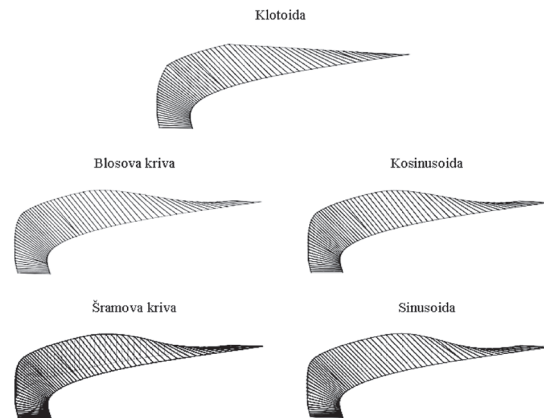
Na slici 20 je, radi međusobnog vizuelnog poređenja, dat prikaz svih pet prethodno detaljno razmatranih geometrijskih oblika prelaznih rampi. Na slici se jasno uočava da je najduža prostorna rampa oblika sinusoida, a najkraća rampa ona kojoj odgovara pravolinijska promena nadvišenja i prelazna krivina oblika klotoide u situacionom planu.



Slika 20. Uporedni prikaz svih oblika prelaznih rampi

Na slici 21 dat je prostorni prikaz ravni koloseka za različite geometrijske oblike prelazne krivine i njima odgovarajućeg oblika prelazne rampe.

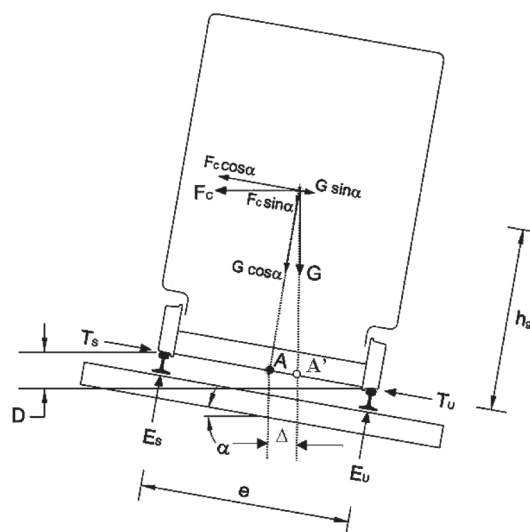
Sa aspekta jednostavnosti mehanizovanog izvođenja i održavanja koloseka u zastoru od tucanika treba težiti primeni prelazne krivine oblika klotoide ili kubne parabole, kojima odgovara rampa sa linearnom promenom nadvišenja spoljne šine. Međutim, osnovni nedostatak



Slika 21. Prostorni prikaz ravni koloseka za pet različitih oblika prelazne krivine i rampe za nadvišenje

ovog oblika prostorne rampe sa aspekta praktične izvodljivosti je neodrživost oblika rampe na početku i kraju prelazne krivine (slika 7). Usled neminovnog vertikalnog zaobljenja spoljne šine na početku i kraju prelazne krivine javlja se dodatno bočno ubrzanje koje deluje na putnike u sanduku kola.

Kod svih prostornih geometrijskih oblika rampe za nadvišenje koji su analizirani u ovom radu, pošlo se od pretpostavke da se geometrijskim oblikovanjem podužne ose ravni koloseka (ravan koja povezuje gornju ivicu spoljne i unutrašnje šine u koloseku) može ograničiti neponišteno bočno ubrzanje  $V^2/R$  koje deluje na putnike. Zbog toga su svi razmatrani geometrijski oblici rampe za nadvišenje izvedeni uz zahtev da se jednovremeno po istoj matematičkoj zakonitosti povećava zakrivljenost prelazne krivine i nadvišenje spoljne šine. Generalni nedostatak ovog pristupa iskazuje se tek u uslovima povećanja brzina putničkih vozova kroz smanjenje udobnosti u odnosu na proračunom pretpostavljene vrednosti neponištenog bočnog ubrzanja (slika 22).



Slika 22. Odstupanje projekcije težišta sanduka vozila A' na ravan koloseka u odnosu na položaj podužne ose A

Tokom vožnje kroz krivinu sanduk vozila se naginje poprečno u odnosu na ravan koloseka. Bočno ubrzanje koje se opaža unutar vozila zavisi od ugla naginjanja sanduka, u skladu sa konstrukcijom vozila. Kod vozila koja nemaju sistem za upravljanje naginjanjem sanduka u krivini, bočno ubrzanje u vozilu je, u opštem slučaju, veće od ubrzanja u ravni koloseka. Pomenuta razlika u bočnom ubrzanju se javlja usled naginjanja kolskog sanduka ka spoljnoj strani krivine i linearno je zavisna od manjka nadvišenja u koloseku. Naginjanje kolskog sanduka dešava se usled sabijanja opruga pod dejstvom neponištenog dela centrifugalne sile. Efekat sabijanja opruga realno smanjuje efekat izvedenog nadvišenja spoljne šine u krivini. Kod savremenih vozila uvećanje bočnog ubrzanja u vozilu iznosi 20 – 40%. Zbog toga se pri proračunu kinematičke granice slobodnog profila, u opštem slučaju, uzima dodatak 40% usled naginjanja sanduka vozila.

Oblici prelaznih krivina kojima odgovaraju krivolinijske rampe za nadvišenje oblikovani su tako da se smanje dinamički uticaji na vozilo i vertikalno ubrzanje koje osećaju putnici, uz ograničenje bočnog ubrzanja u ravni koloseka. Međutim, nepostojanost geometrije usled neminovnog neujednačenog sleganja koloseka u zastoru od tucanika pod opterećenjem od saobraćaja, dovodi tokom eksploatacije do problema održavanja “zaobljenih” rampi za nadvišenje i neželjenog efekta povećanja dinamičkih udara na početku i kraju prelazne krivine.

Trajno smanjenje dinamičkih uticaja primenom Blosove, kosinusoidne, Šramove ili Klajnovne krive dolazi do izražaja u uslovima stabilne geometrije koloseka na čvrstoj podlozi.

#### 4. ZAKLJUČAK

Savremeni pristup trasiranju železničke pruge podrazumeva izbor geometrijskog oblika prelazne krivine i rampe za nadvišenje kao jedinstvenog prostornog elementa trase. Izbor prostornog oblika rampe za nadvišenje treba da odgovara tipu konstrukcije gornjeg stroja i uslovima održavanja geometrije koloseka tokom eksploatacije.

Dalja istraživanja treba usmeriti na prostorno oblikovanje geometrije koloseka uz uzimanje u obzir ubrzanja u težištu vozila.

#### LITERATURA

- [1] CEN: ENV 13803-1:2002 Railway applications – Track alignment design parameters – Track gauges 1435 mm and wider – Part 1: Plain line
- [2] Jugoslovenske železnice: „314 Pravilnik o održavanju gornjeg stroja pruga JŽ“, Beograd, 1991.
- [3] Lazarević, L.: „Rampa za nadvišenje kao prostorni element trase železničke pruge“, master rad, Građevinski fakultet, Beograd, 2010.
- [4] ORE B 55/RP8: Final report: Conditions for negotiating track twists: Recommended values for the track twists, Calculation and measurements of the relevant vehicle parameters, Vehicle testing, April 1983
- [5] Popović Z.: Interoperability and standardization of railway infrastructure of Serbian railways, Railway Technical Review, Hamburg, ISSUE 4/2007, Volume 47, pp. 6-9
- [6] Popović Z.: Interoperabilnost i standardizacija železničke infrastrukture – evropska iskustva, XII Naučno-stručna konferencija o železnici sa međunarodnim učešćem Želkon ,06, zbornik radova, Niš, 2006., str. 175-178.
- [7] Popović, Z., Puzavac, L.: „Harmonizacija tehničkih propisa za železničku infrastrukturu“, Prvi nacionalni simpozijum sa međunarodnim učešćem – Teorijska i eksperimentalna istraživanja konstrukcija i njihova primena u građevinarstvu TEIK 2010, zbornik radova, Niš, 2010., knjiga 3, str. C-51 – C-60
- [8] Popović Z., Puzavac L.: Harmonizacija tehničkih standarda na primeru uređenja koloseka u krivini, 3. internacionalni naučno-stručni skup GNP 2010 Građevinarstvo – nauka i praksa, zbornik radova, Žabljak, 15-19. februar 2010., knjiga 2, str. 1033-1038.
- [9] Popović Z., Puzavac L., Lazarević L.: Prostorno oblikovanje rampe za nadvišenje prema evropskim standardima, XIV Naučno-stručna konferencija o železnici sa međunarodnim učešćem Želkon, 10, zbornik radova, Niš, 2010., str. 151-154.
- [10] Puzavac L., Popović Z.: Uređenje koloseka u krivini za nove pruge i rekonstrukcije, XIII Naučno-stručna konferencija o železnici sa međunarodnim učešćem Želkon, 08, zbornik radova, Niš, 2008., str. 147-150.
- [11] Puzavac L., Popović Z.: Modeliranje propadanja vertikalne geometrije koloseka, Izgradnja, broj 1-2, Januar-februar, 2010., str. 7-20.
- [12] Puzavac L., Popović Z., Lazarević L.: Geometrijsko oblikovanje prelazne krivine prema evropskim standardima, XIV Naučno-stručna konferencija o železnici sa međunarodnim učešćem Želkon ,10, zbornik radova, Niš, 2010., str. 147-150.
- [13] Weigend, M: Linienführung und Gleisplangestaltung, Eurailpress, S. 120, Hamburg, 2004.