

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Софија М. Наод

**МОДЕЛИРАЊЕ ВЕРТИКАЛНОГ
ГРАДИЈЕНТА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ**

докторска дисертација

Београд, 2022.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Sofija M. Naod

**MODELING OF THE VERTICAL GRAVITY
GRADIENT**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2022

ИНФОРМАЦИЈЕ О МЕНТОРУ И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ

Ментори:

В. проф. др Олег Одаловић, дипл. инж. геод.,
Грађевински факултет, Универзитет у Београду
В. проф. др Љиљана Брајовић, дипл. инж. ел.,
Грађевински факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

Проф. др Драган Благојевић, дипл. инж. геод.,
Грађевински факултет, Универзитет у Београду

В. проф. др Ивана Васиљевић, дипл. инж. геол.,
Рударско-геолошки факултет, Универзитет у Београду

Доц. др Сања Грекуловић, дипл. инж. геод.,
Грађевински факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране: _____, Београд.

Много људи је на више начина допринело изради ове докторске дисертације. Захваљујем се свима који су учествовали и помогли да вишегодишњи рад на дисертацији буде доведен до краја.

Посебно бих се захвалила мом ментору проф. др Олегу Одаловићу на континуираној подршци, залагању и указаној несебичној помоћи. Захваљујући његовим научно-стручним саветима, овај истраживачки рад био је могућ.

Неизмерну захвалност дугујем проф. др Љиљани Брајовић за интересовање, дугогодишњу подршку, стручно саветовање и помоћ, које ми је великодушно пружила током израде ове дисертације.

Захвалност такође дугујем проф. др Драгану Благојевићу, проф. др. Ивани Васиљевић и доц. др. Сањи Грекуловић на помоћи, разумевању и пажљивом прегледу рада.

Велико хвала мојим родитељима и сестри на љубави, стрпљењу, подршци и безграничној пожртвованости.

На крају, хвала Геи и Луни што постоје.

Софија Наод

МОДЕЛИРАЊЕ ВЕРТИКАЛНОГ ГРАДИЈЕНТА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

РЕЗИМЕ

Вертикални градијент убрзања теже има битну улогу у областима у којима је неопходно познавати поље Земљине теже. Како је мерење вертикалног градијента дуготрајан, скуп, захтеван и напоран посао, од изузетне је важности уложити напоре у покушају моделирања његове вредности на основу свих расположивих података.

Циљ ове дисертација је да се утврди да ли се вертикални градијент убрзања силе Земљине теже може моделирати на основу доступних података са тачношћу реда тачности мерења релативних гравиметара.

У оквиру докторске дисертације приказани су, у мањој или већој мери, најзначајнији математички модели засновани на приказивању вертикалног градијента у функцији готово свих функционала аномалијског потенцијала. Представљени су и модели који користе информације о масама Земље, у којима се топографске масе (у овој дисертацији све масе тела Земље изнад елипсоида) деле на призме или полиедре, као и методе које се заснивају на решењима граничног проблема теорије потенцијала.

Најчешће коришћена процедура моделирања вертикалног градијента подразумева одвојено третирање дела градијента који је садржан у глобалном геопотенцијалном моделу и дела који је последица утицаја топографских маса, као и моделирање средњеталасне карактеристике, односно резидуалне вредности градијента. Процедура коришћена у оквиру нумеричких истраживања ове дисертације разликује се од до сада коришћених поступака и заснива се на моделирању градијента убрзања силе теже из два дела. Први део подразумева усвајање вредности градијента Нормалне Земље за приближну вредност, док у другом делу тако усвојеној приближној вредности додајемо моделирани гравитациони утицај топографских маса. У наведеном другом делу, гравитациони утицај топографских маса финално се моделира у виду адиције топографских маса од елипсоида до геоида и топографских маса од геоида до физичке површи Земље.

Модел вертикалног градијента убрзања силе Земљине теже креиран је на основу података о геометрији топографских маса доступних у виду дигиталних модела терена.

Добијени подаци одређивања потом су упоређени са резултатима мерења, изведених применом релативних гравиметара. Из наведеног поређења може се закључити да је горе наведени циљ у потпуности испуњен за готово све податке који су били на располагању.

Кључне речи: Вертикални градијент убрзања теже, топографске масе, дигитални модел терена, директно моделирање

Научна област: Геодезија

Ужа научна област: Теоријска и физичка геодезија

УДК број:

MODELLING OF THE EARTH'S VERTICAL GRAVITY GRADIENT

ABSTRACT

The vertical gravity gradient plays an important role in areas where it's necessary to know the Earth's gravity field. Since measuring a vertical gravity gradient is a difficult, time-consuming, expensive, demanding and laborious task, it is extremely important to make an effort to try to model its value based on all available data.

The dissertation aims to determine whether the vertical gravity gradient can be modeled based on available data with the accuracy of the order of measurement accuracy of relative gravimeters.

Within the doctoral dissertation, the most significant mathematical models based on the representation of the vertical gravity gradient as a function of almost all functionals of anomalous potential are presented, to a greater or lesser extent. Models using information about the Earth's masses are also presented – in those models topographic masses (in this dissertation all masses of the Earth's body above the ellipsoid) are divided into prisms or polyhedra, as well as methods based on solutions of the boundary value problem of potential theory.

The most commonly used procedure for modeling the vertical gravity gradient involves separate treating of the part of the gravity gradient contained in the global geopotential model and the part resulting from the influence of topographic masses, as well as modeling the mid-wavelength characteristic, i.e. the residual value of the gravity gradient. The procedure used in the numerical research of this dissertation differs from the procedures used so far and is based on the modeling of the gravity gradient from two parts. The first part implies the adoption of the gravity gradient value of a normal Earth for the approximate value of the real gradient, while in the second part we add the modeled gravitational influence of topographic masses to the adopted approximate value. In the mentioned second part, the gravitational influence of topographic masses is finally modeled in the form of addition of topographic masses from ellipsoid to geoid and topographic masses from geoid to the physical surface of the Earth.

The vertical gradient model is created based on data on the geometry of topographic masses available in the form of digital terrain models.

The obtained determination data were then compared with the measurements, performed using relative gravimeters. From the above comparison, it can be concluded that the above goal was fully met for almost all available data.

Key words: Vertical gravity gradient, topographic masses, digital terrain model, forward modeling

Scientific field: Geodesy

Scientific subfield: Theoretical and Physical Geodesy

UDK number:

Списак скраћеница

ФПЗ	- Физичка површ Земље
IGSN71	- International Gravity Standardization Network 1971 – Међународна гравиметријска стандардизована мрежа 1971
FTG	- Full Tensor Gradiometer – FTG инструмент
eFTG	- Enhanced Full Tensor Gradiometer – eFTG инструмент
GGM	- Global Geopotential Model – Глобални геопотенцијални модел
CHAMP	- CHALLENGING Minisatellite Payload – CHAMP сателитска мисија
GRACE	- Gravity Recovery and Climate Experiment – GRACE сателитска мисија
GRACE-FO	- Gravity Recovery and Climate Experiment Follow-On – GRACE-FO сателитска мисија
GOCE	- Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer – GOCE сателитска мисија
EA	- Електростатички акцелерометар
NASA	- National Aeronautics and Space Administration – Национална управа за ваздухопловство и свемирска истраживања
STAR	- Space Three-axis Accelerometer for Research – STAR акцелерометар
GPS	- Global Positioning System – Глобални систем за позиционирање
SST	- Satellite to Satellite Tracking – Међусателитско праћење
SGG	- Satellite Gravity Gradiometry – Сателитска градиометрија
HL	- High-Low mode – HL начин рада
LL	- Low-Low mode – LL начин рада
LEO	- Low Earth Orbit – Ниска Земљина орбита
ЕГГ	- Електростатички гравитациони градиометар
ММ	- Мерна маса
FFT	- Fast Fourier Transform – Брза Фуријеова трансформација
ДМТ	- Дигитални модел терена
GRS80	- Geodetic Reference System 1980 – Геодетски референтни систем 1980
SRTM	- Shuttle Radar Topography Mission – Дедицирана сателитска топографска мисија
UTC	- Universal Coordinated Time – Универзално координисано време
ДГП	- Детаљни гравиметријски премер
HBT1	- Нивелмани високе тачности 1
HBT2	- Нивелман високе тачности 2
СРЕФ	- Тачке референтне мреже на територији Републике Србије
ITRS	- International Terrestrial Reference System – Међународни терестрички референтни систем

Списак слика

Слика 1.1: Вектор гравитационог привлачења две тачкасте масе (Vaníček & Krakiwsky, 2005)	4
Слика 1.2: Вектор гравитационог привлачења тела B (Vaníček & Krakiwsky, 2005).....	5
Слика 1.3: Гравитациона сила, центрифугална сила и сила теже (Odalović, 2010)	6
Слика 1.4: Класификација векторских поља (Claessens, 2006)	7
Слика 1.5: Нивоске површи и вертикале Земљиног поља теже (Vaníček & Krakiwsky, 2005)	9
Слика 1.6: Промена вектора убрзања теже дуж екипотенцијалне површи (Vaníček & Krakiwsky, 2005).....	9
Слика 1.7: Суседне нивоске површи	10
Слика 1.8: Компоненте тензора градијента убрзања теже (Kumar et al., 2012).....	11
Слика 1.9: Хоризонтални градијент убрзања теже.....	12
Слика 1.10: Природне координате (Heiskanen & Moritz, 2000).....	13
Слика 1.11: Геодетске координате (Odalović, 2010).....	14
Слика 1.12: Промена верикалног градијента нормалног убрзања са променом географске ширине (Starčević, 2014)	17
Слика 1.13: Ундулација геоида (Odalović, 2010)	18
Слика 1.14: Одступање вертикале (Heiskanen & Moritz, 2000)	19
Слика 1.15: Геометријски однос нивоских површи при извођењу Брунсове формуле (Odalović, 2010).....	20
Слика 1.16: Веза ундулације геоида и одступања вертикале (Odalović, 2010).....	22
Слика 1.17: Сферне и правоугле координате (Heiskanen & Moritz, 2000)	25
Слика 2.1: Подела апсолутних гравиметара.....	27
Слика 2.2: Апсолутни гравиметар FG5 (слика је преузета са https://www.nist.gov/)....	30
Слика 2.3: Маса m која осцилира са вертикалном опругом (Torge, 2001)	32
Слика 2.4: Гравиметар са опругом и полугом (Torge, 2001)	34
Слика 2.5: Конструкција ротирајућег гравитационог градиометра и први прототип инструмента развијен у лабораторији за истраживање <i>Hughes Aircraft</i> (Veryaskin, 2018)	39
Слика 2.6: Ротирајући диск FTG градиометра (Veryaskin, 2018)	40
Слика 3.1: CHAMP сателитска мисија - SST-HL конфигурација (Freedен et al., 2002).....	47
Слика 3.2: GRACE сателитска мисија – SST-LL и SST-HL конфигурација (Freedен et al., 2002)	48

Слика 3.3: GOCE сателитска мисија – SGG и SST-HL конфигурација (Freedен et al., 2002)	49
Слика 3.4: а) Акцелерометар б) Једноосни градиометар в) Троосни градиометар (Drinkwater et al., 2006; Fehringer et al., 2008)	51
Слика 3.5: Положај шест акцелерометара у референтном оквиру градиометра (Stummer, 2012; Rummel et al., 2011)	51
Слика 3.6: Блок шема једноосног електростатичког акцелерометра	53
Слика 4.1: Нотација за Стоксову формулу	60
Слика 4.2: Нотација за решење Молоденског	62
Слика 4.3: Раванска апроксимација	63
Слика 5.1: Подела терена на $N \times M$ праве правоугаоне призме	76
Слика 5.2: Координатни систем праве правоугаоне призме	77
Слика 5.3: Изглед полиедара (тетраедар, хексаедар, октаедар, додекаедар)	80
Слика 5.4: Геометријско значење величина које се користе за представљање потенцијала и његових извода	82
Слика 5.5: Сингуларни случајеви при прелазу са површинских на линијске интеграле	84
Слика 6.1: Моделирање и симулација	86
Слика 6.2: Директно и инверзно моделирање (Liu & Xiong, 2018)	87
Слика 6.3: Валидација модела (Erdeljan & Ћарко, 2015)	88
Слика 6.4: Просторни распоред тачака на којима је мерен вертикални градијент убрзања теже	91
Слика 6.5: Уобичајена подешавања параметара инструмента и корекција резултата мерења (Melhorato & Sousa, 2016)	93
Слика 6.6: Положај инструмента приликом мерења	98
Слика 6.7: Записник мерења вертикалног градијента убрзања силе Земљине теже инструментом CG-5	100
Слика 6.8: Графички приказ расподела фреквенција	103
Слика 6.9: Усвојена нотација за коришћени дигитални модел терена	104
Слика 6.10: Подела топографије на праве правоугаоне призме	105
Слика 6.11: Подела топографије на правилне полиедре	105
Слика 6.12: Приказ проблематике преласка са мање на већу резолуцију ДМТ	106
Слика 6.13: Одступање између измерене висине и висине из ДМТ	107
Слика 6.14: Три опције програма	107
Слика 6.15: Корелација између мерене и моделиране вредности – подела на призме	111

Слика 6.16: Корелација између мерене и моделиране вредности – подела на полиедре	112
Слика 6.17: Графички приказ расподела фреквенција.....	114
Слика 6.18: Графички приказ расподела фреквенција.....	115
Слика 6.19: Графички приказ зависности грешке моделирања и геодетске ширине.....	116
Слика 6.20: Графички приказ зависности грешке моделирања и геодетске дужине	117
Слика 6.21: Корелација грешке моделирања и ортометријске висине	118
Слика 6.22: Промена грешке моделирања са повећањем просечне густине Земљине коре – тачка FR1110.....	119
Слика 6.23: Промена грешке моделирања са повећањем просечне густине Земљине коре – тачка FR1111.....	120
Слика 6.24: Промена грешке моделирања са повећањем просечне густине Земљине коре – тачка R245.....	120
Слика 6.25: Промена грешке моделирања са повећањем просечне густине Земљине коре за тачке у близини Фрушке горе.....	121
Слика 6.26: Промена грешке моделирања са повећањем просечне густине Земљине коре за тачке у близини планине Ртањ.....	122
Слика 6.27: Промена грешке моделирања са повећањем просечне густине Земљине коре за тачке у близини Рудника	123

Списак табела

Табела 1-1: Карактеристичне вредности вертикалног градијента нормалног убрзања на елипсоиду.....	17
Табела 2-1: Типови релативних гравиметара који су тренутно у употреби.....	37
Табела 3-1: Резолуција гравитационог поља (Seeber, 2003).....	44
Табела 3-2: Гравитационе сателитске мисије – основне информације	45
Табела 3-3: Гравитационе сателитске мисије – циљеви мисија и коришћени инструменти.....	45
Табела 4-1: Резолуција сигнала гравитационог поља (Li, 1996)	59
Табела 4-2: Карактеристике најчешће коришћених глобалних геопотенцијалних модела	60
Табела 5-1: Карактеристике правилних полиедара	80
Табела 6-1: Однос резолуције и хоризонталног растојања тачака ДМТ (Gigović, 2010)	89
Табела 6-2: Стандардно одступање мереног вертикалног градијента за минималне и максималне вредности разлике висина и разлике убрзања теже	90
Табела 6-3: Трансформациони параметри.....	97
Табела 6-4: Основни статистички подаци мерених вертикалних градијената убрзања теже	101
Табела 6-5: Основни статистички подаци финалног скупа података	102
Табела 6-6: Расподела фреквенција мерених вертикалних градијената убрзања теже	103
Табела 6-7: Усвојене вредности зоне коришћења дигиталног модела терена одређене резолуције.....	108
Табела 6-8: Дескриптивна статистика скупа моделираних вредности вертикалног градијента убрзања теже у свим тачкама детаљног гравиметријског премера.....	108
Табела 6-9: Дескриптивна статистика дела моделираних вредности вертикалног градијента који је последица топографских маса између елипсоида и геоида.....	109
Табела 6-10: Основни статистички подаци моделираних вредности вертикалног градијента убрзања теже у тачкама у којима је мерен вертикални градијент – подела на призме.....	110
Табела 6-11: Дескриптивна статистика моделираних вредности вертикалног градијента убрзања теже у тачкама у којима је мерен вертикални градијент – подела на полиедре.....	110
Табела 6-12: Дескриптивна статистика моделираних вредности вертикалног градијента убрзања теже у тачкама у којима је мерен вертикални градијент – подела топографских маса на полиедре.....	111

Табела 6-13: Упоредивање вредности моделираног вертикалног градијента за две различите висине изнад терена – подела на призме	112
Табела 6-14: Основни статистички подаци разлике моделираних и мерених вредности вертикалног градијента теже при подели топографских маса на праве правоугаоне призме	113
Табела 6-15: Расподела фреквенција грешке моделирања вертикалног градијента убрзања теже – подела на призме	113
Табела 6-16: Дескриптивна статистика грешке моделирања вертикалног градијента убрзања теже при подели топографских маса на полиедре	114
Табела 6-17: Расподела фреквенција грешке моделирања вертикалног градијента убрзања теже – подела на полиедре	114
Табела 6-18: Резултати Пирсоновог теста	117
Табела 6-19: Резултат Пирсоновог теста	119

Списак прилога

Прилог 1: Скица тачака детаљног гравиметријског премера.....	138
Прилог 2: Валидација модела – Поређење мерених и моделираних вредности вертикалног градијента убрзања теже при подели топографских маса на праве правоугаоне призме.....	139
Прилог 3: Валидација модела – Поређење мерених и моделираних вредности вертикалног градијента убрзања теже при подели топографских маса на полиедре.....	141

САДРЖАЈ

СПИСАК СКРАЋЕНИЦА	III
СПИСАК СЛИКА	IV
СПИСАК ТАБЕЛА	VII
СПИСАК ПРИЛОГА	IX
УВОД	1
ПОГЛАВЉЕ 1	
ПОТЕНЦИЈАЛ УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ	3
1.1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ ПОЉА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ	4
1.2 ПРОБЛЕМИ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА	22
1.3 РЕШЕЊЕ СФЕРНИХ ХАРМОНИКА – КОРИСНЕ ФОРМУЛЕ ЗА СФЕРНЕ ХАРМОНИКЕ	24
ПОГЛАВЉЕ 2	
МЕРЕЊЕ УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ И ГРАДИЈЕНАТА УБРЗАЊА ТЕЖЕ	26
2.1 ИНСТРУМЕНТИ И МЕТОДЕ ЗА МЕРЕЊЕ УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ	27
2.2 ИНСТРУМЕНТИ И МЕТОДЕ ЗА МЕРЕЊЕ ГРАДИЈЕНТА УБРЗАЊА ТЕЖЕ	38
ПОГЛАВЉЕ 3	
МОДЕЛИРАЊЕ ПОЉА УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ КОРИШЋЕЊЕМ РЕЗУЛТАТА ДОБИЈЕНИХ ПРИМЕНОМ САТЕЛИТСКИХ ТЕХНИКА	42
3.1 ГРАВИТАЦИОНЕ САТЕЛИТСКЕ МИСИЈЕ	44
3.2 ГОСЕ САТЕЛИТСКА МИСИЈА	49
ПОГЛАВЉЕ 4	
РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ПОТЕНЦИЈАЛА УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ	57
4.1 РЕШЕЊЕ НА ОСНОВУ САТЕЛИТСКИХ ОПАЖАЊА	59
4.2 СТОКСОВО РЕШЕЊЕ И РЕШЕЊЕ МОЛОДЕНСКОГ	60
4.3 КОЛОКАЦИЈА ПО МЕТОДИ НАЈМАЊИХ КВАДРАТА	64
4.4 „REMOVE-RESTORE“ МЕТОДА	65
4.5 УТИЦАЈ ТОПОГРАФИЈЕ НА УБРЗАЊЕ СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ	68

ПОГЛАВЉЕ 5

МОДЕЛИРАЊЕ ГРАДИЈЕНТА УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ.....	69
5.1 ОСНОВНИ КОНЦЕПТ	70
5.2 ВЕРТИКАЛНИ ГРАДИЈЕНТ АНОМАЛИЈЕ ТЕЖЕ.....	71
5.3 МЕТОДЕ МОДЕЛИРАЊА ВЕРТИКАЛНОГ ГРАДИЈЕНТА УБРЗАЊА ТЕЖЕ.....	73
5.4 МОДЕЛИРАЊЕ ВЕРТИКАЛНОГ ГРАДИЈЕНТА УБРЗАЊА ТЕЖЕ КОРИШЋЕЊЕМ ПОДАТАКА О ВИСИНИ ТОПОГРАФСКИХ МАСА	75

ПОГЛАВЉЕ 6

НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА.....	85
6.1 КОРИШЋЕНИ ПОДАЦИ.....	88
6.2 ПРИКУПЉАЊЕ ПОДАТАКА.....	91
6.3 ПРИПРЕМА ПОДАТАКА.....	95
6.4 АНАЛИЗА И ФОРМИРАЊЕ ФИНАЛНОГ СКУПА ПОДАТАКА.....	100
6.5 ПРИНЦИП РАДА СОФТВЕРА	103
6.6 МОДЕЛИРАЊЕ ВЕРТИКАЛНОГ ГРАДИЈЕНТА УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ.....	108
6.7 ВАЛИДАЦИЈА МОДЕЛА	109
6.8 ЗАВИСНОСТ ГРЕШКЕ МОДЕЛИРАЊА И ПОЛОЖАЈА	115
6.9 ЗАВИСНОСТ ГРЕШКЕ МОДЕЛИРАЊА И ВИСИНЕ ТЕРЕНА.....	118
6.10 ПРОМЕНА ГУСТИНЕ У ПОЈЕДИНАЧНИМ ТАЧКАМА.....	119

ПОГЛАВЉЕ 7

ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА.....	125
7.1 ЗАКЉУЧЦИ	125
7.2 ПРЕПОРУКЕ.....	128

ЛИТЕРАТУРА.....	130
ПРИЛОГ 1.....	137
ПРИЛОГ 2.....	138
ПРИЛОГ 3.....	140
БИОГРАФИЈА АУТОРА.....	142
ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ	143
ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКОГ РАДА	144
ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ	145

УВОД

Физичка геодезија је научна дисциплина која за централно место изучавања има потенцијал убрзања силе Земљине теже или само *потенцијал*. У геометријском смислу потенцијал се изучава коришћењем нивоских површи и линија сила (вертикала). Убрзање силе Земљине теже, или само *убрзање теже*, управо је градијент потенцијала, а вертикални градијент убрзања теже, или само *вертикални градијент*, величина је њене промене дуж вертикале. Централно место истраживања ове дисертације представља моделирање вертикалног градијента изван маса тела Земље.

Историјски посматрано вертикални градијент најчешће се користио приликом редукције теже на геоид, као саставни део поступка одређивања геоида, као и при редукцији резултата мерења добијених применом апсолутних гравиметара на ниво физичке површи Земље. Прецизне вредности вертикалног градијента потребне су и при редукцији мерења убрзања теже приликом успостављања гравиметријских мрежа, чиме се повезују апсолутна и релативна мерења убрзања теже (Heiskanen & Moritz, 1967).

Данас примена вертикалног градијента у значајној мери превазилази његов историјски значај и може се рећи да је познавање вертикалног градијента неопходно при коришћењу терестричких и сателитских геодетских техника (Gruber et al., 2014).

Утицај топографских маса на вертикални градијент зависи од распореда густина у њима. Из овог разлога, познавање саме вредности вертикалног градијента и праћење његових промена у простору, ефикасни су показатељи подземне структуре Земље и њених активности и користе се у геофизичким истраживањима (Bodemüller, 1963).

Полазна хипотеза дисертације је:

- вертикални градијент може се моделирати на основу доступних расположивих података о телу Земље,
- са тачношћу реда тачности коју данас постижу релативни гравиметри,
- или прецизније, са проширеном мерном несигурношћу од $\pm 30 \mu\text{Gal}/\text{m}$, а за фактор проширења 2.

Дисертација је подељена у седам поглавља од којих је првих пет посвећено теорији потенцијала, методологији мерења убрзања теже и вертикалног градијента, дедицираним сателитским мисијама са посебним фокусом на GOCE сателитску мисију, решавању проблема граничних вредности потенцијала и методологији моделирања вертикалног градијента, док су у последња два поглавља приказана нумеричка истраживања извођена за потребе дисертације, као и низ закључака и препорука за будућа истраживања.

Поглавље ПОТЕНЦИЈАЛ УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ садржи основне појмове теорије потенцијала. Поред основних појмова укратко су приказани проблеми граничних вредности теорије потенцијала, као и развој гравитационог и аномалијског потенцијала у ред сферних хармоника.

У поглављу МЕРЕЊЕ УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ И ГРАДИЈЕНТА УБРЗАЊА ТЕЖЕ дат је преглед инструмената који се користе за мерење убрзања теже и његовог градијента. Приказане су методе мерења, извори грешака и тачност апсолутних и релативних гравиметара.

Поглавље МОДЕЛИРАЊЕ ПОЉА УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ КОРИШЋЕЊЕМ РЕЗУЛТАТА ДОБИЈЕНИХ ПРИМЕНОМ САТЕЛИТСКИХ ТЕХНИКА обрађује тренутно актуелне сателитске мисије које су повећане истраживању поља теже Земље. У оквиру поглавља приказане су мерне технике које се користе у поменутиим мисијама, као и примена њихових података при моделирању градијента убрзања силе Земљине теже. Посебна пажња посвећена је инструменту који се користи у GOCE сателитској мисији, односно електростатичком гравитационом градиометру који се састоји од три пара електростатичких акцелерометара.

Начини решавања проблема граничних вредности теорије потенцијала, као што су решења на основу сателитских опажања, Стоксово решење и решење Молоденског, колокација и „*remove-restore*“ метода приказани су у поглављу РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ПОТЕНЦИЈАЛА УБРЗАЊА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ.

Поглавље МОДЕЛИРАЊЕ ГРАДИЈЕНТА УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ приказује концепт и методологију моделирања вертикалног градијента, као и досадашња достигнућа у тој области. Поред тога, поглавље садржи и детаљан опис поступка моделирања вертикалног градијента коришћењем података о висини терена, са посебним акцентом на поделу топографских маса на праве правоугаоне призме и полиедре.

Коначно, поглавље НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА обухвата опис поступака прикупљања, припреме, обраде и анализе коришћених података, као и објашњење принципа рада коришћеног софтвера, а све у циљу моделирања вертикалног градијента.

Након приказа и анализе основних статистичких података, хистограма и графика корелације моделираног вертикалног градијента и географског положаја, висине и мерених вертикалних градијента, у поглављу ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА, критичком анализом постојећих података и изношењем опсервација о важности примене вредности вертикалног градијента, изнети су закључци, као и препоруке и смернице за даља истраживања.

ПОГЛАВЉЕ 1

ПОТЕНЦИЈАЛ УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

Потенцијал убрзања силе Земљине теже је збир потенцијала убрзања гравитационе силе и потенцијала убрзања центрифугалне силе, која настаје као последица ротације тела Земље. У математичком смислу наведени потенцијали задају се скаларним функцијама, а уобичајено је да се простор над којим је задата скаларна функција и сама скаларна функција називају *пољем*.

Теорија гравитационог поља полазна је основа за анализу убрзања теже и за извођење самих мерења. С обзиром да се сва геодетска мерења обављају у гравитационом пољу, одређивање овог поља неопходно је како би се резултати мерења правилно тумачили.

Гравитациони потенцијал предмет је проучавања теорије потенцијала. Термин *теорија потенцијала* настао је у математици и математичкој физици XIX века, када је схваћено да се две основне природне силе познате у то време, гравитација и електростатичка сила, могу моделирати помоћу функција које се називају гравитациони и електростатички потенцијал, при чему обе задовољавају Лапласову¹, односно Поасонову² диференцијалну једначину другог реда (Markina, 1992).

С друге стране, гравитациони потенцијал предмет је проучавања и теорије гравитационог потенцијала која датира из XVII века када је, на основу научних достигнућа заснованих на посматрању физичких појава и мерењу физичких величина, установљен положај Земље у космосу (Jekeli, 2007).

Енглески физичар Исак Њутн³ објавио је закон гравитације у свом капиталном делу „*Математички принципи филозофије природе*“ 1687. године. У свом најједноставнијем облику Њутнов закон универзалне гравитације гласи:

- два тела привлаче једно друго силом која је директно пропорционална њиховим масама, а обрнуто пропорционална квадрату међусобног растојања.

Изузетно успешан у свакодневной примени, Њутнов закон се показао тачним и у описивању унутрашње структуре планета, Сунца и других звезда, њихових орбита и кретања у Сунчевом систему, структура галаксија и јата галаксија. Високо прецизна мерења кретања у Сунчевом систему, структура црних рупа и ширење универзума могу

¹ Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

² Siméon Denis Poisson (1781–1840)

³ Isaac Newton (1643–1727)

се у потпуности разумети само у смислу релативистичке теорије гравитације Алберта Ајнштајна¹ (Bekenstein, 1997).

Иако се у случају многих модерних сателитских мерних техника морају узети у обзир релативистички ефекти, за већину примена повезаних са терестричким мерењима у геодезији, и даље се можемо ограничити на Њутнову теорију (Коор, 1993).

1.1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ ПОЉА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

Гравитациона, центрифугална сила, сила теже и убрзање теже

Њутнов закон универзалне гравитације говори да се, с једне стране, гравитациона сила повећава са повећањем масе објеката, док с друге стране, сила опада са повећањем растојања између објеката.

Сила привлачења (гравитациона сила) \vec{F} којом тело B масе M привлачи тело A масе m (и обрнуто) дата је једначином:

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = -G \frac{Mm \vec{l}}{l^2 l'} \quad (1.1)$$

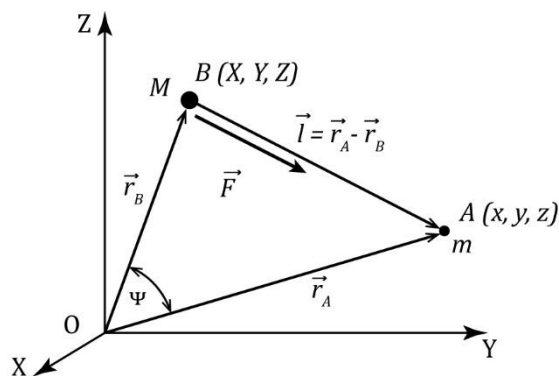
где је G универзална гравитациона константа, чија је вредност $6.67428 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ (Petit & Luzum, 2010), док су вектори \vec{l} , \vec{r}_B и \vec{r}_A у Декартовом² координатном систему дати са (Слика 1.1):

$$\vec{l} = \vec{r}_B - \vec{r}_A, \quad \vec{r}_A^T = (x, y, z), \quad \vec{r}_B^T = (X, Y, Z), \quad (1.2)$$

при чему је l растојање између два тела дато са:

$$l = |\vec{l}| = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}. \quad (1.3)$$

Једначина (1.1) применљива је у случају када су димензије тела A и B занемарљиво мале у односу на њихово међусобно растојање.



Слика 1.1: Вектор гравитационог привлачења две тачкасте масе (Vaníček & Krakiwsky, 2005)

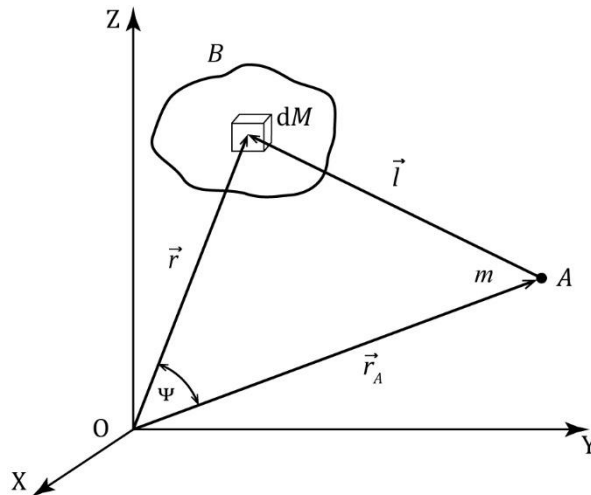
¹ Albert Einstein (1879–1955)

² René Descartes (1596–1650)

Посматрамо ли случај када је тело B , које може представљати Земљу, састављено од елемената масе dM (Слика 1.2), а имајући у виду да је гравитациона сила адитивна (Vaníček & Krakiwsky, 2005), добија се једначина за гравитациону силу којом Земља привлачи тела чије су димензије занемарљиве у односу на Земљу:

$$\vec{F} = Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}) \vec{l}}{l^2 l} dv, \quad (1.4)$$

где је $\rho(\vec{r})$ густина, а dv запремина елемента масе dM , а Ω тело Земље.



Слика 1.2: Вектор гравитационог привлачења тела B (Vaníček & Krakiwsky, 2005)

С обзиром да Земља ротира око своје осе, на тело m , које ротира заједно са Земљом, поред гравитационе силе делује и центрифугална сила дата једначином:

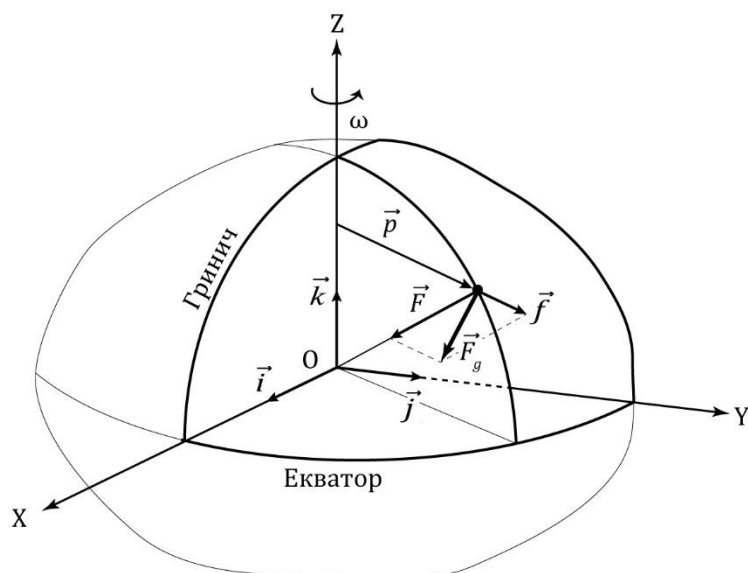
$$\vec{f} = \vec{p} \omega^2 m, \quad (1.5)$$

где је \vec{p} нормално растојање тела m од осе ротације, а ω угаона брзина Земљине ротације која је одређена астрономским мерењима високе тачности и износи (Torge, 1989; Petit & Luzum, 2010):

$$\omega = 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}, \quad (1.6)$$

На тело које се налази на физичкој површи Земље (ФПЗ) делују гравитациона и центрифугална сила (Слика 1.3). Резултујућа сила зове се сила теже и дата је једначином:

$$\vec{F}_g = \vec{F} + \vec{f} = \left(G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}) \vec{l}}{l^3} dv + \vec{p} \omega^2 \right) m. \quad (1.7)$$



Слика 1.3: Гравитациона сила, центрифугална сила и сила теже (Odalović, 2010)

На основу другог Њутновог закона, сила је једнака производу масе и убрзања, па је вектор убрзања силе Земљине теже \vec{g} (вектор теже) дат изразом:

$$\vec{g} = \vec{a}_g + \vec{a}_c = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{l^3} \vec{l} dv + \vec{p}\omega^2, \quad (1.8)$$

где је \vec{a}_g вектор убрзања гравитационе силе, а \vec{a}_c вектор убрзања центрифугалне силе.

У Међународном систему јединица (SI систем), јединица у којој се изражава сила је $N = m \text{ kg s}^{-2}$, док је јединица убрзања ms^{-2} .

У пракси се данас често користе помоћне јединице, Gal и mGal, при чему је:

$$1 \text{ Gal} = 10^{-2} \text{ ms}^{-2},$$

$$1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ ms}^{-2}.$$

Средње убрзање силе Земљине теже износи око 981 000 mGal. Услед спљоштености Земље и њене ротације вредност убрзања варира од 978 100 mGal на екватору, до 983 200 mGal на половима. Промена убрзања услед нехомогености густине маса тела Земље крећу се од неколико десетина до неколико стотина милигала (ESA, 2020).

Потенцијал привлачења, центрифугални потенцијал и потенцијал убрзања теже

Свакој тачки простора могуће је придружити један вектор убрзања гравитационе силе, убрзања центрифугалне силе и убрзања теже и тако дефинисати низ векторских поља убрзања.

Класификација векторских поља врши се према вредностима дивергенције и ротора поља (Слика 1.4). Дивергенција вектора у некој тачки једнака је скаларном производу градијента ∇ и тог вектора и означава се са $\nabla \vec{g}$ или $\text{div}(\vec{g})$, док је ротор векторског поља дефинисан као векторски производ градијента ∇ и тог вектора и означава се са $\nabla \times \vec{g}$ или $\text{rot}(\vec{g})$ (Claessens, 2006).

	$\text{rot } (\vec{g}) = 0$	$\text{rot } (\vec{g}) \neq 0$
$\text{div } (\vec{g}) = 0$	Лапласово поље	Соленоидално (вртложно) поље
$\text{div } (\vec{g}) \neq 0$	Поасоново (потенцијално) поље	Сложено поље

Слика 1.4: Класификација векторских поља (Claessens, 2006)

Векторско поље гравитационе силе, убрзања центрифугалне силе и убрзања теже поседује особине карактеристичне за сва Поасонова поља, а то је да се у свакој тачки простора вектор може изразити као градијент скаларне функције.

С обзиром да је лакше радити са скаларним пољима, вектор убрзања гравитационе силе може се заменити скаларном функцијом V , таквом да је градијент скаларне функције једнак компонентама убрзања:

$$\vec{a}_g = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \text{grad } V, \quad (1.9)$$

при чему је:

$$V = G \iiint_{\Omega} \frac{dM}{l} = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{l} dv. \quad (1.10)$$

Одређивање гравитационог потенцијала V коришћењем израза (1.10), односно одређивање потенцијала за целу Земљу, није могуће из разлога непознатих густина маса Земље.

Аналогно убрзању гравитационе силе, вектор убрзања центрифугалне силе једнак је градијенту центрифугалног потенцијала:

$$\vec{a}_c = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = \text{grad } \Phi, \quad (1.11)$$

док је центрифугални потенцијал дат једначином:

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 p^2. \quad (1.12)$$

Потенцијал убрзања теже W представља збир потенцијала убрзања гравитационе силе V и потенцијала убрзања центрифугалне силе Φ :

$$W = V + \Phi = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{l} dv + \frac{1}{2} \omega^2 p^2. \quad (1.13)$$

У СИ систему потенцијал се изражава у m^2s^{-2} .

Еквивалентно једначинама вектора убрзања гравитационе силе и убрзања центрифугалне силе, вектор убрзања теже једнак је градијенту потенцијала W :

$$\vec{g} = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \text{grad } W. \quad (1.14)$$

Особине потенцијала – Лапласова и Поасонова једначина

Потенцијал V једнозначна је, коначна и непрекидна функција у целом простору.

Први изводи гравитационог потенцијала, то јест компоненте убрзања силе привлачења, такође су једнозначне, коначне и непрекидне функције у целом простору.

Примењујући Лапласов оператор (Landau & Lifšic, 1952) на потенцијал привлачења V , $\Delta V = \nabla \cdot \nabla V = \text{div grad } V$, добија се:

$$\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right). \quad (1.15)$$

Изван маса тела Земље, у празном простору (занемарујући атмосферу), густина ρ је нула, па потенцијал задовољава Лапласову диференцијалну једначину другог реда:

$$\Delta V = 0. \quad (1.16)$$

Ако се тачка за коју се одређује потенцијал привлачења налази унутар тела Земље, други изводи потенцијала имају прекиде у тачкама у којима се густина нагло мења (Heiskanen & Moritz, 2000; Torge, 2001) и гравитациони потенцијал задовољава Поасонову диференцијалну једначину:

$$\Delta V = -4\pi G\rho. \quad (1.17)$$

Након примене Лапласовог оператора Δ на центрифугални потенцијал Φ , добија се једначина облика:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 2\omega^2, \quad (1.18)$$

Из једначина (1.17) и (1.18) добија се уопштена Поасонова једначина за потенцијал убрзања силе теже за тачке унутар Земље, дата са:

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2. \quad (1.19)$$

Изван маса тела Земље ($\rho = 0$), једначина **Error! Reference source not found.** прелази у облик:

$$\Delta W = 2\omega^2. \quad (1.20)$$

Нивоске површи и вертикале

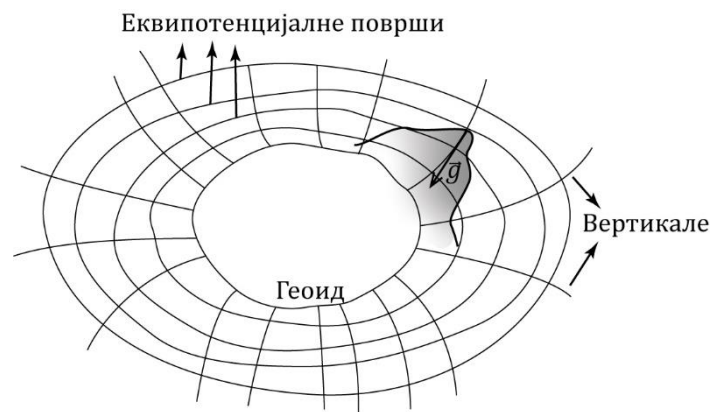
Потенцијал убрзања силе Земљине теже може се геометријски описати површима константног потенцијала и линијама које су управне на те површи. Површи константног потенцијала ($W = \text{const.}$) називају се еквипотенцијалне или нивоске површи.

Нивоске површи које у потпуности леже изван тела Земље аналитичке су површи, односно површи које немају сингуларне тачке (Torge, 2001). С друге стране, нивоске површи које у потпуности или делимично леже унутар Земље нису аналитичке површи. У тачкама у којима се густина мења други изводи потенцијала имају прекиде.

Дакле, потенцијал W аналитичка је функција изван Земље, тј. функција која у свакој тачки има извод било ког реда и може се приказати Тејлоровим¹ редом.

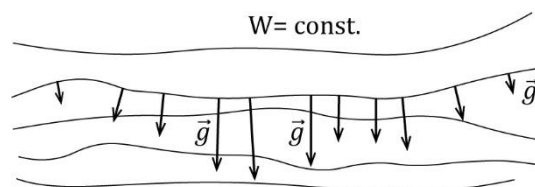
Еквипотенцијална површ која најбоље апроксимира средњи ниво мора (MSL - *Mean Sea Level*) зове се геоид и представља фундаменталну површ физичке геодезије (Heiskanen & Moritz, 2000; Sideris, 2011). Међународна усвојена ознака за геоид је W_0 .

Линије сила или вертикале представљају линије које пресецају све еквипотенцијалне површи под правим углом (Слика 1.5). Из тог разлога вертикале нису праве, већ линије закривљене у свим правцима, односно. линије које поред флексије имају и торзију (Vaníček & Krakiwsky, 2005; Sansò & Rummel, 1997).



Слика 1.5: Нивоске површи и вертикале Земљиног поља теже (Vaníček & Krakiwsky, 2005)

Правац вектора убрзања теже у произвољној тачки поклапа се са тангентом вертикале у тој тачки, односно вектор убрзања теже управан је на еквипотенцијалну површ у посматраној тачки. Интензитет убрзања теже мења се дуж једне еквипотенцијалне површи (Слика 1.6) (Vaníček & Krakiwsky, 2005).



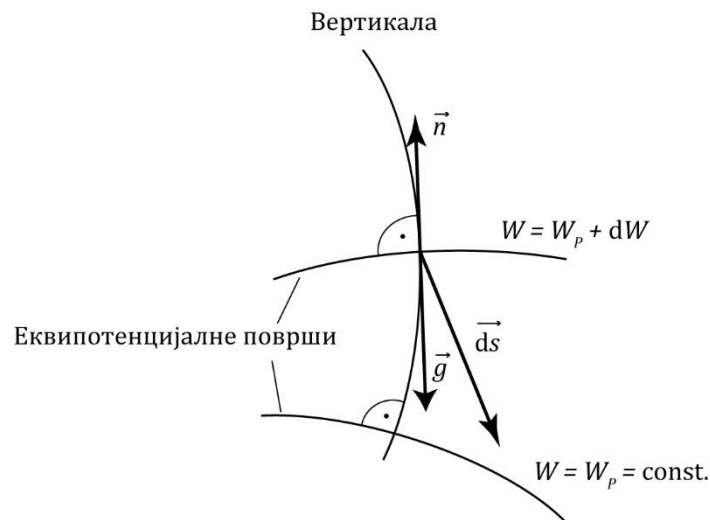
Слика 1.6: Промена вектора убрзања теже дуж еквипотенцијалне површи (Vaníček & Krakiwsky, 2005)

¹ Brook Taylor (1685–1731)

Разлика потенцијала две бесконачно блиске нивоске површи добија се диференцирањем потенцијала теже (Слика 1.7). Имајући у виду израз (1.14) и дефиницију скаларног производа, добијамо:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = \text{grad } W d\vec{s} = \vec{g} d\vec{s} = g ds \cos(\vec{g}, d\vec{s}), \quad (1.21)$$

где је $d\vec{s} = (dx, dy, dz)$.



Слика 1.7: Суседне нивоске површи

Како се ортометријска висина H мери дуж вертикале, почев од геоида, ако посматрамо правац вертикале, а вектор $d\vec{s}$ узмемо у правцу повећања висине, односно у правцу спољне нормале \vec{n} , једначина (1.21) постаје:

$$dW = -g dH, \quad (1.22)$$

односно:

$$g = -\frac{dW}{dH}. \quad (1.23)$$

Једначина (1.23) даје везу између потенцијала и висине и показује да је убрзање теже негативни вертикални градијент потенцијала W .

Градијент убрзања силе Земљине теже

Вектор убрзања теже дефинисан је једначином (1.14) и једнак је градијенту потенцијала убрзања силе Земљине теже, односно компоненте вектора убрзања теже једнаке су парцијалним изводима потенцијала W :

$$\vec{g} = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) = (W_x, W_y, W_z), \quad (1.24)$$

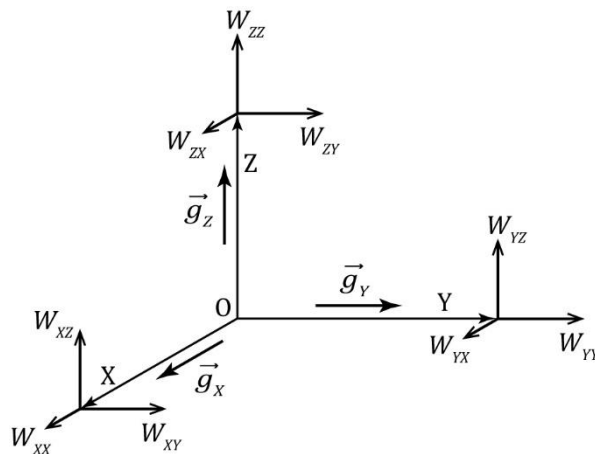
при чему је:

$$W_x \ll W_z, \quad W_y \ll W_z, \quad g \approx W_z. \quad (1.25)$$

Диференцирањем израза (1.24) по координатним осама добијају се градијенти вектора убрзања силе Земљине теже који чине тензор од девет елемената (по три компоненте за сваку од три векторске компоненте убрзања силе теже). Тензор градијента теже назива се Етвешев¹ тензор:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Компоненте тензора су други парцијални изводи потенцијала, односно први изводи компоненти убрзања теже по координатним осама (Слика 1.8). Тензор градијента убрзања теже приказује промену убрзања теже у простору и садржи информације о локалном пољу убрзања теже и користи се при одређивању поља високе резолуције. Компоненте тензора осликавају краткоталасне карактеристике поља теже.



Слика 1.8: Компоненте тензора градијента убрзања теже (Kumar et al., 2012)

Елементи тензора највећи су у оштрим подземним геолошким контрастима, као што су раседи, ивице соних дома и интрузивних магматских стена, као и у наборима синклинала и антиклинала. У тачкама у којима се густина нагло мења други изводи потенцијала имају прекиде, а тамо где је густина константна, компоненте тензора су континуалне функције. Компоненте тензора описују и закривљеност површи константног потенцијала, односно закривљеност нивоских површи (Jekeli, 2011).

Особина карактеристична за поље теже:

$$\text{rot}(\vec{g}) = \text{rot}(\text{grad } W) = 0, \quad (1.27)$$

¹ Loránd Eötvös (1848–1919)

имплицира:

$$W_{xy} = W_{yx}, \quad W_{xz} = W_{zx}, \quad W_{yz} = W_{zy}. \quad (1.28)$$

Узимајући у обзир и Поасонову једначину:

$$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = -4\pi G\rho + 2\omega^2, \quad (1.29)$$

слиеди да тензор градијента убрзања теже има само пет независних компоненти.

Трећи ред тензора (1.26) описује промену убрзања теже у правцу координатних оса и представља градијент убрзања теже:

$$(\text{grad } g)^T = (W_{zx}, W_{zy}, W_{zz}). \quad (1.30)$$

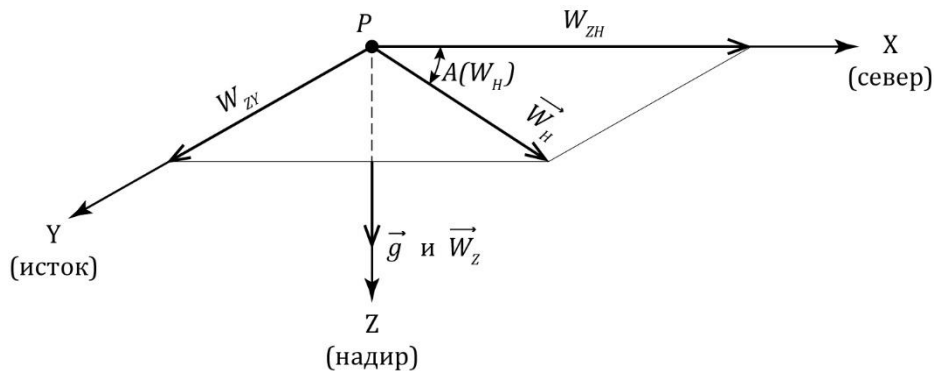
Хоризонтални градијент убрзања теже лежи у хоризонталној равни (Слика 1.9) и дат је са:

$$W_H = \sqrt{W_{zx}^2 + W_{zy}^2}, \quad (1.31)$$

са азимутом:

$$A(W_H) = \tan^{-1} \frac{W_{zy}}{W_{zx}}. \quad (1.32)$$

Хоризонтални градијент одређује и закривљеност вертикале која пролази кроз тачку P .



Слика 1.9: Хоризонтални градијент убрзања теже

Најчешће коришћена и интуитивно најјаснија компонента тензора је вертикални градијент убрзања теже који представља промену убрзања с висином.

Уопштена Поасонова једначина доводи до везе:

$$W_{zz} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial g_z}{\partial z} = -(W_{xx} + W_{yy}) - 4\pi G\rho + 2\omega^2. \quad (1.33)$$

Средња кривина нивоске површи дефинисана је са:

$$J = -\frac{W_{xx} + W_{yy}}{2g}, \quad (1.34)$$

па једначина (1.33) постаје Брунсова¹ једначина за вертикални градијент:

$$\frac{\partial g}{\partial H} = \frac{\partial g_z}{\partial z} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2. \quad (1.35)$$

Ова једначина доводи у везу вертикални градијент убрзања теже и средњу кривину нивоске површи и пружа могућност одређивања средње кривине нивоске површи из података мерења убрзања теже.

У Међународном систему јединица, јединица градијента убрзања силе Земљине теже је s^{-2} . За градијент убрзања теже поред SI јединице, користи се и CGS јединица, етвеш (E), при чему је:

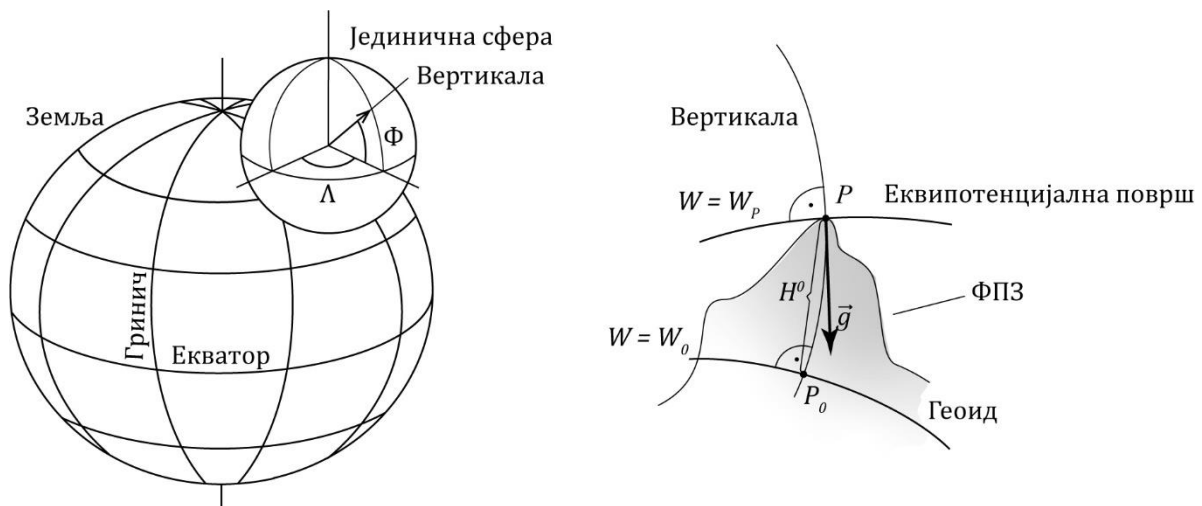
$$1 \text{ E} = 10^{-9} \frac{1}{s^2} = 10^{-9} \frac{\text{Gal}}{\text{cm}} = 10^{-7} \frac{\text{Gal}}{\text{m}} = 10^{-4} \frac{\text{Gal}}{\text{km}} = 10^{-4} \frac{\text{mGal}}{\text{m}} = 10^{-1} \frac{\mu\text{Gal}}{\text{m}}.$$

Природне координате

Тродимензионални криволинијски координатни систем дефинисан коришћењем нивоских површи и вертикала чини систем природних координата (Слика 1.10) у ком је:

- Φ – географска ширина (латитуда) – угао у равни меридијана тачке P који граде екваторска раван и правац вертикале тачке P ,
- Λ – географска дужина (лонгитуда) – угао у равни екватора између меридијана тачке P и почетног (Гриничког) меридијана,
- H^0 – ортометријска висина – одсечак вертикале између тачке P на физичкој површи Земље и одговарајуће тачке P_0 на геоиду.

Уместо ортометријске висине H^0 може се користити и потенцијал W_P тачке P , односно величина $C_P = W_0 - W_P$ која се назива геопотенцијални број.



Слика 1.10: Природне координате (Heiskanen & Moritz, 2000)

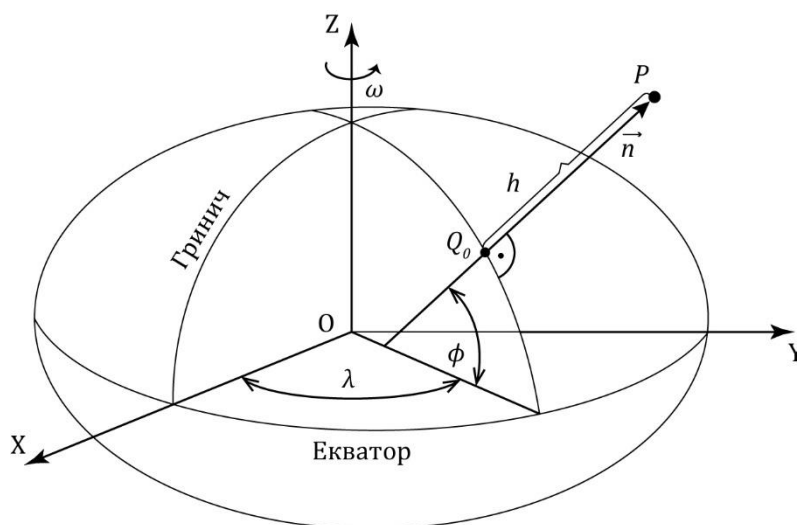
¹ Heinrich Bruns (1848–1919)

С обзиром да се координате Φ и Λ одређују астрономским мерењима називају се и астрономске координате.

Геодетске координате

Положај тачке у односу на обртни елипсоид дефинисан је следећим геодетским или елипсоидним координатама (Слика 1.11):

- ϕ – геодетска ширина (латитуда) – угао у равни меридијана тачке P који граде екваторска раван и правац елипсоидне нормале тачке P ,
- λ – геодетска дужина (лонгитуда) – угао у равни екватора између меридијана тачке P и почетног (Гриничког) меридијана и
- h – елипсоидна висина – одсечак елипсоидне нормале између тачке P на физичкој површи Земље и одговарајуће тачке Q_0 на елипсоиду.



Слика 1.11: Геодетске координате (Odalović, 2010)

Нормална Земља, њен потенцијал и нормално убрзање

Приликом изучавања поља убрзања теже, а ради једноставнијег одређивања и моделирања, уводи се геоцентрични двоосни ротациони елипсоид који најбоље апроксимира Земљу.

Елипсоид који је испуњен масом која је једнака маси Земље и која ротира угаоном брзином која је једнака брзини ротације Земље назива се Нормална Земља. Центар масе Нормалне Земље поклапа се са центром масе Земље, а њена мала оса са средњом осом Земљине ротације (Odalović, 2005).

Овако дефинисана Нормална Земља генерише нормални потенцијал U , односно нормално поље, као и нормално убрзање γ , при чему важи:

$$\vec{\gamma} = \text{grad } U. \quad (1.36)$$

Површ елипсоида је истовремено и екипотенцијална површ *нормалног поља*.

Аналогно потенцијалу W , за који важи релација (1.13), за нормални потенцијал важи:

$$U = V_U + \Phi_U, \quad (1.37)$$

где је V_U гравитациони, а Φ_U центрифугални потенцијал Нормалне Земље.

Уз усвајање претпоставке да изван тела Нормалне Земље нема маса, гравитациони потенцијал Нормалне Земље задовољава Лапасову и Поасонову једначину. На тај начин спољашњи нормални потенцијал (потенцијал изван тела Земље) задовољава једначину:

$$\Delta U = 2\omega^2, \quad (1.38)$$

док унутрашњи нормални потенцијал (потенцијал унутар тела Земље) задовољава једначину:

$$\Delta U = -4\pi G\rho + 2\omega^2. \quad (1.39)$$

Вредност нормалног убрзања одређује се према формули Сомиљанија¹:

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_a \cos^2 \phi + b\gamma_b \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}, \quad (1.40)$$

где су a и b велика и мала полуоса елипсоида, γ_a и γ_b вредности нормалног убрзања теже на екватору и на полу, а ϕ геодетска латитуда (Torge, 2001).

Вертикални градијент нормалног убрзања

Промена нормалног убрзања са променом висине, односно вертикални градијент нормалног убрзања на елипсоиду, добија се применом једначине (1.35) на нормално поље теже са $\rho = 0$ (Heiskanen & Moritz, 2000):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = U_{zz} = -2\gamma J - 2\omega^2, \quad (1.41)$$

где је:

$$J = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right), \quad (1.42)$$

средња кривина елипсоида, M полупречник кривине пресека у правцу меридијана, а N полупречник кривине пресека у правцу првог вертикала, дефинисани са:

$$M = \frac{a^2}{b(1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{3/2}}, \quad N = \frac{a^2}{b(1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{1/2}}. \quad (1.43)$$

У претходним изразима a и b су велика и мала полуоса елипсоида, ϕ геодетска ширина, e' други нумерички ексцентрицитет, а E линеарни ексцентрицитет, дефинисани са:

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e' = \frac{E}{b}. \quad (1.44)$$

На основу велике и мале полуосе елипсоида, линеарног ексцентрицитета и другог нумеричког ексцентрицитета, који су познати за усвојени елипсоид, рачунају се M и N

¹ Carlo Somigliana (1860–1955)

(главни полупречници елипсоида) дефинисани изразима (1.43). Средња кривина елипсоида J дата је изразом (1.42), док се градијент нормалног убрзања одређује коришћењем израза (1.41).

Брунсова формула примењена на нормално поље теже (1.41), након сређивања постаје:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{2\gamma}{a} [1 + f + m - 2f \sin^2 \phi], \quad (1.45)$$

где је γ нормално убрзање на елипсоиду, дата са:

$$\gamma = \frac{GM}{a^2}, \quad (1.46)$$

f је спљоштеност, дата са:

$$f = \frac{a - b}{a}, \quad (1.47)$$

а m је дата са:

$$m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_a}. \quad (1.48)$$

За мале величине h изнад елипсоида, нормално убрзање може се развити у ред по h :

$$\gamma_h = \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial h} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} h^2 + \dots, \quad (1.49)$$

где $\partial/\partial h$ означава промену дуж елипсоидне нормале, а нормално убрзање γ и његови изводи односе се на елипсоид ($h = 0$).

У случају када се Земља посматра као Нормална Земља са хомогеним распоредом маса у погледу густине, вертикални градијент нормалног убрзања мења се по интензитету мало у зависности од положаја и висине на површи Нормалне Земље.

Промена нормалног убрзања са висином дата је формулом:

$$\gamma_h - \gamma = -\frac{2\gamma_a}{a} \left[1 + f + m - \left(3f + \frac{5}{2}m \right) \sin^2 \phi \right] h + \frac{3\gamma_a}{a^2} h^2. \quad (1.50)$$

Симбол γ_h означава нормално убрзање за тачку на ширини ϕ и на висини h изнад елипсоида, док је γ убрзање на самом елипсоиду за исту ширину ϕ . Формула **Error! Reference source not found.** за међународни елипсоид постаје:

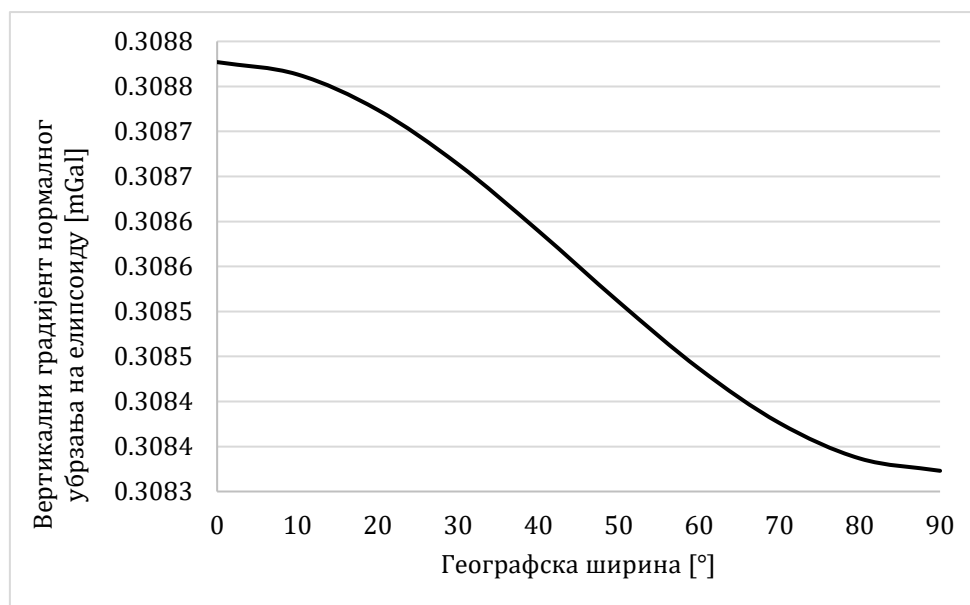
$$\gamma_h - \gamma = -(0.30877 - 0.00045 \sin^2 \phi)h + 0.000072h^2, \quad (1.51)$$

при чему се γ_h и γ изражавају у галима, а h у километрима (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2006).

Вредност вертикалног градијента нормалног убрзања за карактеристичне латитуде дата је у табели 1-1, док је на слици 1.12 приказана промена вертикалног градијента нормалног убрзања са променом латитуде.

Табела 1-1: Карактеристичне вредности вертикалног градијента нормалног убрзања на елипсоиду

Латитуда	mGal/m
0°	0.3088
45°	0.3086
90°	0.3083



Слика 1.12: Промена вертикалног градијента нормалног убрзања са променом географске ширине (Starčević, 2014)

За подручја 45. паралеле претпоставља се да је вертикални градијент нормалног убрзања константан и да износи 0.3086 mGal/m.

Аномалијски потенцијал, ундулација геоида, угао одступања вертикале и аномалија убрзања теже

Разлика између потенцијала W и нормалног потенцијала U представља аномалијски или поремећајни потенцијал:

$$T = W - U. \quad (1.52)$$

Како је потенцијал W дат изразом (1.13), а нормални потенцијал U изразом (1.37), и како су, сходно дефиницијама центрифугалног потенцијала Земље и Нормалне Земље, потенцијали Φ и Φ_U једнаки, аномалијски потенцијал представља разлику гравитационог потенцијала наведених тела.

Уколико занемаримо атмосферу, аномалијски потенцијал изван Земље задовољава једначину:

$$\Delta T = 0, \quad (1.53)$$

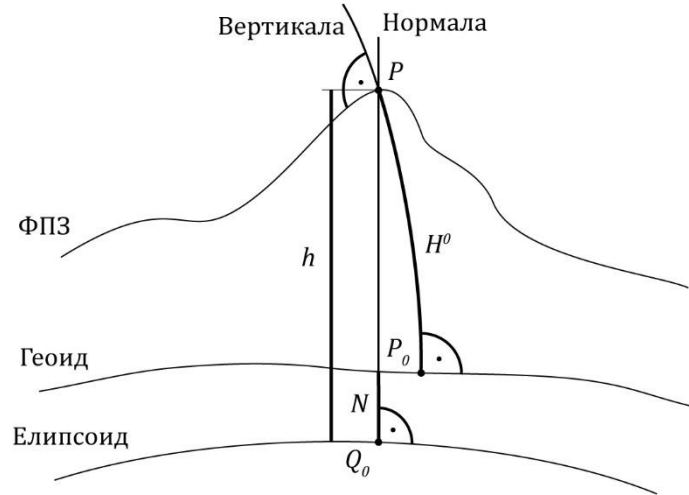
док је унутар Земље и унутар Нормалне Земље збир других извода аномалијског потенцијала једнак:

$$\Delta T = -4\pi G\rho + 4\pi G\rho_U = -4\pi G(\rho - \rho_U), \quad (1.54)$$

где су ρ и ρ_U густине маса Земље и Нормалне Земље.

Величине које су показатељи разлике потенцијала W и нормалног потенцијала U су ундулација геоида, угао одступања вертикале, аномалија убрзања теже и поремећај убрзања теже (функционали аномалијског потенцијала).

Растојање између елипсоида и геоида зове се геоидна висина или ундулација геоида. То је елипсоидна висина тачке P_0 која се налази на геоиду, односно растојање између елипсоида и геоида мерено дуж нормале на елипсоид (Слика 1.13).



Слика 1.13: Ундулација геоида (Odalović, 2010)

Са задовољавајућом тачношћу може се рећи да је ундулација геоида једнака разлици елипсоидне и ортометријске висине, то јест да је:

$$N = h - H^0. \quad (1.55)$$

Одступање вертикале θ је угао који међусобно граде нормала и вертикала у тачки P_0 на геоиду. Угао θ има две компоненте (Слика 1.14), компоненту у правцу меридијана ξ (правац север-југ) и компоненту у правцу првог вертикала η (правац исток-запад).

Одступање у правцу меридијана дефинисано је са:

$$\xi = \Phi - \phi, \quad (1.56)$$

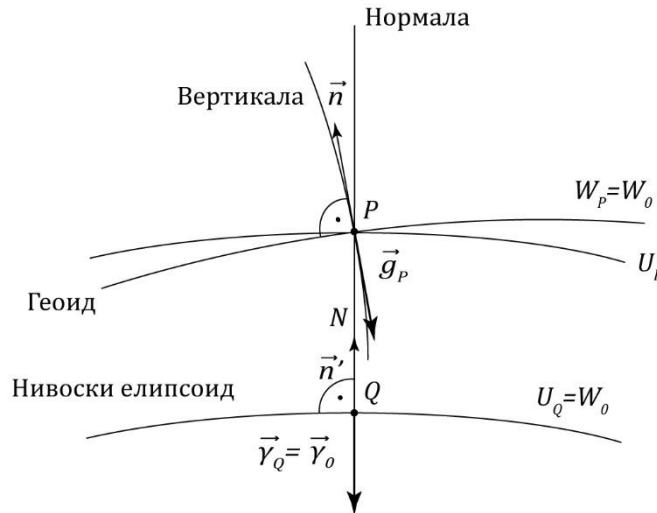
а у правцу првог вертикала са:

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \phi. \quad (1.57)$$

Брунсова формула и основна једначина физичке геодезије

Разлика потенцијала између нивоских површи нормалног потенцијала које пролазе кроз тачку P на геоиду и тачку Q на елипсоиду (Слика 1.15) може се представити у облику:

$$U_P - U_Q = U_P - W_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_Q N = -\gamma_0 N. \quad (1.60)$$



Слика 1.15: Геометријски однос нивоских површи при извођењу Брунсове формуле (Odalović, 2010)

Имајући у виду дефиницију нивоског елипсоида и геоида:

$$U_Q = W_0 = W_P, \quad (1.61)$$

као и дефиницију аномалијског потенцијала:

$$-T_P = U_P - W_P = U_P - W_0, \quad (1.62)$$

једначина (1.60) постаје:

$$N = \frac{T_P}{\gamma_0}. \quad (1.63)$$

Једначина (1.63) представља Брунсову формулу и приказује везу између ундулације геоида N , аномалијског потенцијала на геоиду T_P и нормалног убрзања на елипсоиду γ_0 .

Коришћењем Брунсове формуле долази се и до везе између аномалија убрзања Δg и аномалијског потенцијала T .

Како се јединични вектори вертикале \vec{n} и нормале \vec{n}' у тачки P (Слика 1.15) готово подударују и пошто се висина h рачуна дуж нормале, поремећајно убрзање δg може се писати као:

$$\delta g = g_P - \gamma_P = -\left(\frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n'}\right) \approx -\left(\frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n}\right) = -\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\partial T}{\partial h}. \quad (1.64)$$

Узимајући у обзир само први члан развоја израза **Error! Reference source not found.**, као и једначине (1.63) и (1.59), у складу са ознакама на слици 1.15, једначина **Error! Reference source not found.** постаје:

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \delta g = g_P - \gamma_P = g_P - \gamma_Q - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N = \Delta g - \frac{\partial \gamma T}{\partial h \gamma}. \quad (1.65)$$

После сређивања израза (1.65) добија се основна једначина физичке геодезије која доводи у везу непознати аномалијски потенцијал T и аномалију убрзања Δg :

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T. \quad (1.66)$$

Решавањем Лапласове једначине (1.53) уз гранични услов (1.66), претпостављајући да је Δg познато, добија се аномалијски потенцијал на површи елипсоида и изван њега. Наравно, Лапласова једначина захтева нереалне услове који имплицирају да нема маса изван елипсоида. Сходно томе, масе изван елипсоида морају се уклонити рачунски – примењује се нека од метода редукције убрзања теже, о чему ће бити речи у четвртом поглављу (Moritz, 1980).

Слика 1.16 приказује пресек геоида и елипсоида са вертикалном равни, при чему је компонента одступања вертикале једнака:

$$\theta = -\frac{dN}{ds}, \quad (1.67)$$

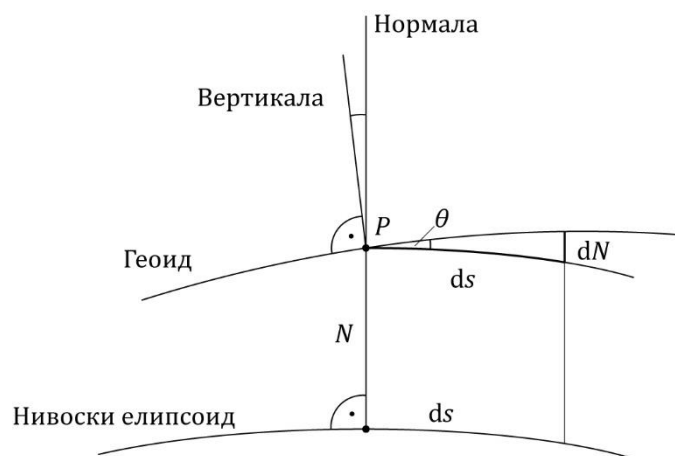
где је ds елемент лука, а dN одговарајући прираштај ундулације при чему је знак минус усвојен по договору. Компоненте одступања верикале у складу са једначином (1.67) гласе:

$$\xi = -\frac{dN}{ds_\phi}, \quad \eta = -\frac{dN}{ds_\lambda}, \quad (1.68)$$

при чему је елемент лука у правцу меридијана $ds_\phi = R d\phi$, а елемент лука у правцу исток-запад $ds_\lambda = R \cos \phi$ (Слика 1.16).

Изрази који представљају везу ундулације геоида и компоненти одступања вертикале у сферној апроксимацији дати су једначинама:

$$\xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \Phi}, \quad \eta = -\frac{1}{R \cos \Phi} \frac{\partial N}{\partial \Lambda}. \quad (1.69)$$



Слика 1.16: Веза ундулације геоида и одступања вертикале (Odalović, 2010)

Коришћењем једначине која повезује ундулацију геоида и аномалијски потенцијал (Брунсова једначина), компоненте одступања вертикале могу се приказати у функцији аномалијског потенцијала.

Поред компоненти одступања вертикале, величине које се могу представити као функције у којима као променљиве фигуришу аномалијски потенцијал или линеарна комбинација аномалијског потенцијала и његових првих парцијалних извода су и ундулација геоида и аномалија убрзања, односно поремећајно убрзање. Из тог разлога се те величине називају линеарним функционалима аномалијског потенцијала и приказују се у облику:

$$t = L[T], \quad (1.70)$$

где је са L означен оператор линеарних функционала, тј. линеарни оператор над потенцијалом T . Компоненте одступања вертикале, ундулација геоида, аномалија убрзања и поремећајно убрзање представљају функционале аномалијског потенцијала, па је њихово одређивање уско повезано са одређивањем аномалијског потенцијала.

1.2 ПРОБЛЕМИ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА

Класични геодетски гранични проблеми теорије потенцијала заснивају се на Њутновој механици. Претпоставља се да се Земља понаша попут крутог тела које се не деформише при утицају силе и које се равномерно окреће око фиксне осе у тродимензионалном Еуклидовом¹ простору. Сви елементи масе налазе се у унутрашњости затворене граничне површи која представља физичку површ Земље, односно, уводи се претпоставка да изван Земље нема атмосфере. Такође се претпоставља да је временски променљиво поље претходно уклоњено из података, као и да су подаци дати континуирано на површи Земље или на геоиду. При таквим претпоставкама, потенцијал убрзања задовољава Поасонову парцијалну диференцијалну једначину унутар маса, односно Лапласову једначину изван маса.

Одређивање облика Земље и њеног спољашњег, стационарног гравитационог поља коришћењем података прикупљених на физичкој површи Земље или у њеној околини

¹ *Eukleídēs* (око 300. год. п. н. е.)

представља решење проблема граничних вредности. У зависности од података датих на граничној површи, као и од врсте и броја непознатих функција које треба решити, постоје различите формулације проблема геодетских граничних вредности (Sansò & Rummel, 1997; Wang, 2016).

Сви геодетски проблеми граничних вредности подразумевају испуњеност услова хармоничности, непрекидности, регуларности и услова задатог на граници. Гранични услов, генерално, повезује мерену величину са аномалијским потенцијалом.

Први услов подразумева да потенцијал задовољава Лапласову једначину, то јест:

$$\Delta T(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in S, \quad (1.71)$$

где је са S означен простор изван Земље. Унутар S потенцијал је непрекидан и барем два пута диференцијабилан, што представља други услов, док услов регуларности обезбеђује да потенцијал тежи нули када растојања теже бесконачности, односно:

$$T(\vec{x}) \rightarrow 0, \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (1.72)$$

Ако је геометрија граничне површи у потпуности позната, онда је једини проблем одређивање потенцијала. Такви проблеми граничних вредности називају се фиксним, на супрот слободних, код којих се поред потенцијала одређује и непознати облик површи (Moritz, 2015).

Класични геодетски проблеми граничних вредности припадају слободним граничним проблемима (гранична површ је непозната) и састоје се у проналажењу решења парцијалне диференцијалне једначине, тако да пронађено решење, или његов извод у правцу спољашње нормале на непознату површ, или линеарна комбинација оба, одговарају задатим вредностима на граници.

Неке величине које се могу мерити (одређивати директно или индиректно) су висина геоида, аномалија висине, поремећајно убрзање, аномалија убрзања и компоненте одступања вертикале. Њихов однос према аномалијском потенцијалу даје први, други и трећи геодетски проблем граничних вредности (Grafarend & Niemeier, 1971; Claessens, 2006).

За одређивање аномалијског потенцијала T , од великог је значаја Стоксова¹ теорема. При њеној дефиницији посматрамо тело Земље које се налази унутар неке површи S . Тада Стоксова теорема у свом најопштијем облику гласи:

- функцију T , која је хармонијска изван површи S , на којој су задате вредности саме функције T , могуће је јединствено одредити на основу задатих вредности.

Проблем налажења хармонијске функције T (унутар или изван површи S) на основу њених познатих вредности на S , зове се Дирихлеов² проблем или први геодетски проблем граничних вредности теорије потенцијала. Решење Дирихлеовог проблема могуће је одредити помоћу развоја функције T у ред сферних хармоника.

Други геодетски проблем граничних вредности теорије потенцијала или Нојманов³ проблем, је проблем одређивања функције T када је на површи S дат први

¹ George Gabriel Stokes (1819–1903)

² Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

³ Carl Neumann (1832–1925)

парцијални извод функције T у правцу спољашње нормале на граничну површ. Формулација Нојмановог геодетског проблема граничних вредности теоретски је позната већ дуго, али њено практично решење и даље представља отворен проблем (Čunderlík et al., 2004).

Трећи геодетски проблем граничних вредности теорије потенцијала, проблем Поенкареа¹, подразумева да је на површи S позната линеарна комбинација функције T и њеног извода у правцу спољашње нормале на непознату површ. Одређивање аномалијског потенцијала из аномалија убрзања (основна једначина физичке геодезије) представља решавање трећег геодетског граничног проблема теорије потенцијала (Grafarend & Niemeier, 1971). Уколико је површ која се одређује геоид, ради се о Стоксовом проблему, док је у случају одређивања физичке површи Земље у питању проблем Молоденског² (Torge, 2001).

Представљени проблеми могу се приказати на следећи начин:

$$\begin{aligned} \text{Дирихлеов проблем:} & \quad T(\vec{x}) = \tilde{L}, \quad \vec{x} \in S, \\ \text{Нојманов проблем:} & \quad \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial n(\vec{x})} = \tilde{L}, \quad \vec{x} \in S, \\ \text{Проблем Поенкареа:} & \quad \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial n(\vec{x})} + kT(\vec{x}) = \tilde{L}, \quad \vec{x} \in S, \end{aligned}$$

где је \tilde{L} позната величина (подаци дати на граничној површи S), $n(\vec{x})$ нормала на површ S , а k је константа.

1.3 РЕШЕЊЕ СФЕРНИХ ХАРМОНИКА – КОРИСНЕ ФОРМУЛЕ ЗА СФЕРНЕ ХАРМОНИКЕ

Било да је у питању гравитациони потенцијал V , нормални потенцијал U , потенцијал убрзања теже W или аномалијски потенцијал T , изван маса, у празном простору, потенцијал задовољава Лапласову диференцијалну једначину другог реда, то јест:

$$\Delta V = 0, \quad \Delta U = 0, \quad \Delta W = 0, \quad \Delta T = 0. \quad (1.73)$$

На тај начин, у простору у ком потенцијал задовољава Лапласову једначину, могућ је развој потенцијала у ред сферних хармоника.

Решења Лапласове једначине називају се хармонијским функцијама. Изван маса, свака хармонијска функција је непрекидна и има непрекидне изводе било ког реда, то јест аналитичка је (Heiskanen & Moritz, 2000; Torge, 2001).

У применама у физичкој геодезији користан је развој потенцијала \square у сферне хармонике приказан у облику:

$$V(r) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (C_{l,m} \cos m\lambda + S_{l,m} \sin m\lambda) P_{l,m}(\cos \theta) \right], \quad (1.74)$$

¹ Henri Poincaré (1854–1912)

² Михаил Сергеевич Молоденский (1909–1991)

где су (r, λ, θ) сферне координате, односно радијус вектор, поларна дужина, геоцентрична лонгитуда, тим редом (Слика 1.17). $GM = G(M_{Zem} + M_{Atm})$ је производ гравитационе константе и укупне масе Земље (тело Земље и атмосфера), док је \square велика полуоса Нормалне Земље.

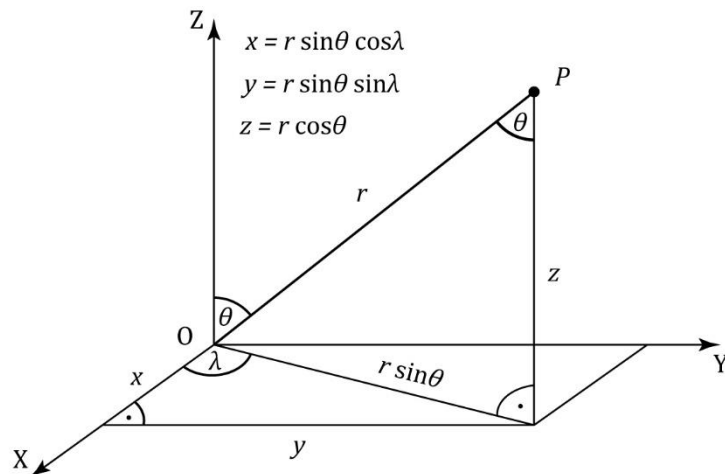
Придружене Лежандрове¹ функције у којима l означава степен, а m ред од P_{lm} дефинисане су са:

$$P_{l,m}(t) = (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_{l,0}(t), \quad (1.75)$$

и са Лежандровим полиномима ($m = 0$):

$$P_{l,0}(t) = P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dt^l} (t^2 - 1)^l, \quad (1.76)$$

при чему је $t = \cos \theta$.



Слика 1.17: Сферне и правоугле координате (Heiskanen & Moritz, 2000)

За нормални потенцијал сферно-хармонијски развој је облика:

$$U(r) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^l C_{l,0} P_{l,0}(\cos \theta) \right] + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta, \quad (1.77)$$

док се за аномалијски потенцијал из (1.74) и (1.77) директно може записати:

$$T(r) = \frac{GM}{r} \left[\sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l (\Delta \bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos \theta) \right]. \quad (1.78)$$

¹ Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

Приказане формуле (1.74), (1.77) и (1.78) **Error! Reference source not found.** представљају изразе за сферно-хармонијски развој гравитационог, нормалног и аномалијског потенцијала, тим редом.

ПОГЛАВЉЕ 2

МЕРЕЊЕ УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ И ГРАДИЈЕНАТА УБРЗАЊА ТЕЖЕ

Убрзање теже и њен вертикални градијент потребни су при одређивању геоида и дефинисању висинских и гравиметријских референтних мрежа различитих размера, од глобалних до националних. У геодезији се ова мерења користе у циљу решавања проблема везаних за изучавање облика и величине Земље, њених деформација, као и проблема везаних за одређивање спољашњег поља убрзања теже (Marson, 2012).

Дисциплина која подразумева мерење убрзања теже назива се гравиметрија, док се дисциплина која се бави проучавањем и мерењем просторних градијената вектора убрзања теже назива градиометрија (Torge, 1989; Starčević, 1991; Jekeli, 2011).

Убрзање теже је величина која се мења са променом положаја у простору и која се такође мења у времену. Вредности теже веће су на половима него на екватору тела Земље. С променом висине интензитет убрзања теже се мења. На вишим надморским висинама интензитет теже у општем случају мањи је од интензитета на нивоу мора и океана. Разлози наведених појава су облик тела Земље, њена ротација, варијације густина маса унутар Земље, као и утицај других небеских тела (Marson & Faller, 1986; Morelli, 1987; Vaníček & Krakiwsky, 2005).

Убрзање теже мерено на површи Земље на једном месту, у различитим тренуцима времена, садржи информације о:

- месту мерења,
- распореду маса у унутрашњости Земље и
- променама самог убрзања у времену (Torge, 1989).

Убрзање теже зависи од распореда и деловања терестричких и екстратерестричких маса, као и од ротације Земље. Распоред маса и ротација Земље подложне су променама у току времена, што доводи до промене у апсолутној вредности убрзања теже на истом месту.

У практичним применама, приликом редукације резултата мерења убрзања теже на геоид или физичку површ Земље, као и при успостављању везе између тачака одређених употребом апсолутних гравиметара и тачака гравиметријске мреже одређених употребом релативних гравиметара, користи се вертикални градијент убрзања теже. Често се у ту сврху користи вертикални градијент нормалног убрзања, који се може одредити на основу параметара Нормалне Земље.

2.1 ИНСТРУМЕНТИ И МЕТОДЕ ЗА МЕРЕЊЕ УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

Методе мерења убрзања теже могу се поделити на динамичке и статичке. Динамичке методе узимају у обзир кретање тела под утицајем теже (осциловање клатна, слободан пад тела), док се код статичких метода посматра промена равнотеже тела под дејством теже (Starčević, 1991; Kuhar & Mulić, 2009).

Сензори који се користе за мерење убрзања теже могу бити апсолутни или релативни. Апсолутни гравиметри, као што и сама реч каже, служе за мерење апсолутне вредности убрзања теже на тачкама на којима се обавља мерење, док се релативним гравиметрима одређују разлике у убрзању теже између два узастопна мерења (Nabighian et al., 2005).

За мерење градијената убрзања теже користе се градиометри. Резултат мерења градиометара је други извод потенцијала теже. Градиометрима се одређује промена убрзања у простору техником која се назива диференцијална акцелерометрија. Поред градиометара којима се одређују све компоненте Етвешевог тензора, за мерење вертикалног градијента убрзања силе Земљине теже користе се и релативни гравиметри.

Апсолутни гравиметри

Инструменти који се користе за мерење апсолутне вредности убрзања теже деле се на клатна и балистичке инструменте. У складу са коришћеним инструментима разликујемо две методе мерења, метод клатна и балистички метод. Обе методе заснивају се на мерењу две основне физичке величине, дужине и времена (Torge, 1989). На слици 2.1. приказана је подела апсолутних гравиметара.



Слика 2.1: Подела апсолутних гравиметара

Од времена Галилејевих¹ и Хајгенсових² експеримената у XVII веку па све до половине XX века једини инструменти коришћени за одређивање апсолутне вредности теже била су клатна.

Метод клатна заснива се на мерењу периода и дужине осцилујућег клатна. Вредност теже g повезана је једноставном релацијом са величинама које је било могуће мерити, са периодом осциловања клатна T и са дужином клатна l :

¹ Galileo Galilei (1564–1642)

² Christiaan Huygens (1629–1695)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.1)$$

Формула (2.1) важи за математичко клатно које подразумева идеалне услове. За физичко клатно, које одговара реалним условима, уместо l користи се редукована дужина физичког клатна:

$$l_r = \frac{J}{ma}, \quad (2.2)$$

где је J момент инерције у односу на осу ротације, док је a растојање центра масе од осе ротације.

До краја XIX века клатнима је постигнута тачност од 1 mGal, а резултати гравиметријских мерења коришћени су за редукацију геодетских и астрономских мерења, интерполацију компоненти одступања вертикале, као и за одређивање облика Земље и њеног гравитационог поља (Krynski, 2012; Morelli, 1987).

Употреба балистичких апсолутних гравиметара почиње педесетих година прошлог века када је напредак у технологији омогућио мерење кратких временских интервала и прецизно мерење дужине. Први балистички инструменти били су високи неколико метара и користили су систем за фотографско снимање и кварцни часовник. Њихова мерна несигурност била је око 1 mGal (Cook, 1965; Nabighian et al., 2005). Почетком шездесетих година развијен је инструмент који је при раду користио ласерски интерферометар, атомски часовник и слободно падајућу тест масу, чиме је започет развој инструмената који су и данас у употреби. Истовремено мерење положаја и времена падајуће тест масе применом Мајкелсоновог интерферометра донело је повећање тачности реда величине од око 10 μ Gal. У исто време развијани су и интерферометријски инструменти код којих се мере парови положај-време приликом успона и пада тест масе (Torge, 1989; Marson, 2012). Први комерцијални преносни апсолутни гравиметар произвео је *Joint Institute for Laboratory Astrophysics* (JILA) 1986. године (Crossley, 2013). Истовремено са гравиметрима JILAg серије који су побољшали тачност на 3 до 5 μ Gal, дошло је до развоја инструмента FG5. Тачност апсолутног гравиметра FG5 је 1 до 2 μ Gal и у потпуности је оперативан од 1993. године (Niebauer et al., 1995).

Рад апсолутних гравиметара заснива се на слободном паду, односно успону и паду објекта у пољу теже, било да је у питању макроскопски објекат или облак хладних атома. Одређивање вредности убрзања теже своди се на мерење параметара кретања и оцене убрзања \square из једначине кретања, при чему дужина пута и временски интервали потребни за прелазак одређеног пута представљају параметре који се мере (Vitushkin, 2015).

Једначина кретања тела масе m које слободно пада у пољу теже гласи:

$$m\ddot{z} = mg(z), \quad (2.3)$$

где \ddot{z} означава убрзање масе m , тј. други извод вектора положаја по времену t , који у случају слободног пада има смер локалне вертикале:

$$\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (2.4)$$

Уколико се усвоји претпоставка о хомогеном пољу теже, интеграљењем израза **Error! Reference source not found.** добијају се брзина и положај тела које пада:

$$\dot{z} = \dot{z}_0 + gt, \quad (2.5)$$

$$z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{g}{2} t^2. \quad (2.6)$$

Константе интеграције z_0 и \dot{z}_0 су положај и брзина тела које пада у тренутку $t = 0$. За одређивање убрзања теже из једначине (2.6), односно из једначине слободног пада, потребно је најмање три мерења позиције и времена. Након елиминисања z_0 и \dot{z}_0 , убрзање теже добија се из разлика положаја и разлика времена по једначини (Torge, 1989):

$$g = \frac{(z_3 - z_1)(t_2 - t_1) - (z_2 - z_1)(t_3 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}. \quad (2.7)$$

Модерни апсолутни гравиметри бележе много више парова положај-време и тако се одређивање убрзања теже своди на решавање једначине слободног пада по методи најмањих квадрата.

Слична формула добија се и за инструменте који користе вертикални хитац као посебан облик слободног пада, с тим што су за одређивање g потребна два мерења положаја и времена.

Приказана једначина за одређивање g при слободном паду тест масе валидна је за хомогено поље теже. Међутим, како се у реалном пољу убрзања теже само убрзање мења са променом висине, усвојимо ли претпоставку о линеарној промени убрзања са висином, једначина **Error! Reference source not found.** постаје:

$$\ddot{z} = g(z) = g_0 + g_z z = g_0 + \frac{\partial g}{\partial z} dz, \quad (2.8)$$

где је $g_0 = g$ у положају $z = 0$, а g_z вертикални градијент убрзања теже.

Решавањем једначине **Error! Reference source not found.** добија се компликованији израз за одређивање положаја падајуће масе:

$$z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{g_0}{2} t^2 + g_z \left(\frac{z_0}{2} t^2 + \frac{\dot{z}_0}{6} t^3 + \frac{g_0}{24} t^4 \right). \quad (2.9)$$

Вредност убрзања теже на почетку путање, g_0 , одређује се из једначине **Error! Reference source not found.** применом методе најмањих квадрата, при чему се вертикални градијент убрзања теже мери или се усваја вертикални градијент нормалног убрзања (Vitushkin, 2015; Micro g LaCoste, 2007).

Поред чињенице да се инструментима који користе вертикални хитац, тј. успон и пад тест масе елиминишу неке од грешака присутне при мерењу убрзања теже помоћу масе која слободно пада, као и чињенице да је тачност атомских гравиметара достигла ред величине тачности инструмента FG5 (Ménoret et al., 2018) у већини примена, FG5

апсолутни гравиметар је и даље светски стандард за апсолутно одређивање убрзања теже.

Апсолутни гравиметар FG5

Главне компоненте балистичког гравиметра FG5 су (Слика 2.2):

- вакуумска комора,
- Мах¹-Зендеров² интерферометар,
- хелијум-неонски ласер (He-Ne ласер),
- склоп супер-опруге
- и контролер система.

Унутар коморе налази се тест маса и механизам за подизање тест масе. Комора се одржава у вакууму употребом јонске пумпе. Тест маса се испушта са висине и под дејством поља теже, слободно пада 20 cm у трајању од 0.2 s, након чега се специјалним колицима подиже на почетну висину и поступак се понавља (Niebauer, 2007; Niebauer et al., 1995).



Слика 2.2: Апсолутни гравиметар FG5 (слика је преузета са <https://www.nist.gov/>)

Испод коморе налази се модификовани Мах-Зендеров интерферометар. Интерферометром се одређује позиција тест масе током слободног пада. Уласком кохерентног ласерског снопа у интерферометар долази до поделе снопа на два оптичка зрака, након чега се врши интерференција зрака који се рефлектовао од тест масе и зрака који се рефлектовао од референтне масе. Интерферометар генерише једну светлу и једну тамну пругу сваки пут када тест маса пређе половину таласне дужине ласерског светла. Мерењем времена појаве одређених пруга на фотодетектору добија се убрзање падајућег објекта. Овај метод мерења убрзања теже је апсолутни, јер је одређивање искључиво метролошко и ослања се на стандарде дужине и времена. Стандард за мерење дужине

¹ Ludwig Mach (1868–1951)

² Ludwig Zehnder (1854–1949)

остварује се употребом He-Ne ласера као извора светлости таласне дужине 633 nm (црвена светлост), док се стандард времена остварује употребом атомског (рубидијумског) часовника (Micro g LaCoste, 2007).

Компонента супер-опруге, која је у суштини, опруга одговарајуће крутости, налази се испод интерферометра и служи за изолацију референтне масе од околних вибрација. Ради изолације ове компоненте, комора је постављена на сопствени статив.

Контролер система (рачунар) контролише систем, прикупља, анализира и складишти податке. Софтвер има лако подесив кориснички интерфејс за рачунање корекција којима се мерено убрзање теже поправља за лунисоларни утицај, плиму и осеку океана и чврсте Земље, кретање полова, као и за утицај атмосфере.

Током једног пада тест масе бележи се око 200 мерења (парова положај-време), а једну сесију мерења чини неколико хиљада падова тест масе. Укупна мерна несигурност инструмента FG5 је 1 до 2 μGal .

Релативни гравиметри

Релативним гравиметрима одређују се разлике у убрзању теже између две станице или промена у убрзању током времена. С обзиром на начин на који раде, релативни гравиметри могу се поделити у три групе:

- гравиметри који мере релативну промену убрзања теже,
- гравиметри који континуирано мере промене у убрзању теже током времена на једној локацији и
- гравиметри који мере релативну промену убрзања теже као функцију положаја на покретним платформама, са авиона или са брода (Hugill, 2011).

До тридесетих година прошлог века и код релативних гравиметара коришћен је динамички метод који је подразумевао употребу клатна. Периоди осцилације истог клатна мерени су на две локације, а разлика у убрзањима добијена је коришћењем формуле:

$$\Delta g_{1,2} = g_2 - g_1 = -2g_1 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + g_1 \frac{(T_2 - T_1)^2}{T_2^2}. \quad (2.10)$$

У случају познатог убрзања теже g_1 , мерењем периода осциловања, T_1 и T_2 , рачунато је убрзање теже g_2 , при чему калибрација није била потребна.

Данас више нису у употреби релативни гравиметри који користе клатна, већ се користе механички релативни гравиметри са опругом, суперпроводни гравиметри и инерцијални акцелерометри (Hugill, 2011).

У зависности од типа конструкције механички гравиметри деле се на гравиметре са вертикалном опругом и гравиметре који поред опруге имају и полугу (Torge, 1989; Timmen, 2010). Ови гравиметри користе се при мерењу вертикалног градијента теже. Гравиметар се поставља на различите висине, при чему се одређује интензитет убрзања теже и уз мерење висинске разлике добија се промена убрзања теже са висином у виду количника разлике интензитета и разлике у висини.

Суперпроводни гравиметри раде по истом принципу као и механички, с разликом што је механичка опруга замењена сфером од суперпроводног материјала која левитира уз помоћ магнетног поља. Овај сензор постиже осетљивост од 1 nGal. Суперпроводни

гравиметар није погодан је за динамички рад који је присутан при мерењу вертикалног градијента убрзања теже.

Инерцијални акцелерометри су уређаји који су развијени за инерцијалне навигационе системе. Имају одличне перформансе на покретним платформама и врло су компактни. Овај инструмент такође није погодан за мерење вертикалног градијента убрзања теже (Hugill, 2011).

Механички гравиметри

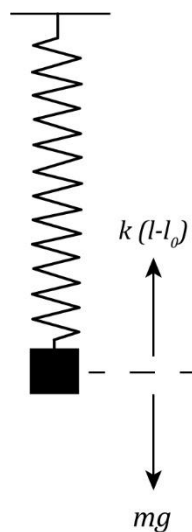
Механички гравиметри деле се на гравиметре са вертикалном опругом и гравиметре који поред опруге имају полуку. Принцип који важи за гравиметре са вертикалном опругом присутан је и код осталих типова гравиметара.

На крају опруге, која је основни елемент механичких гравиметара, налази се тест маса. Под дејством силе теже опруга се истече или скраћује у односу на првобитни положај.

Опруга тежи да одржи статичку равнотежу између силе теже и еластичне силе. У складу са Хуковим¹ законом, при успостављању равнотеже система са слике 2.3, важи:

$$mg = k(l - l_0), \quad (2.11)$$

где је k константа опруге која зависи од врсте материјала, а $(l - l_0)$ представља издужење опруге, при чему је l дужина истегнуте, односно скраћене опруге, док је l_0 дужина недеформисане опруге, а m маса тега.



Слика 2.3: Маса m која осцилира са вертикалном опругом (Torge, 2001)

Мерењем деформације (промене дужине) опруге добија се информација о промени убрзања теже:

$$\Delta g = \frac{k}{m} \Delta l = \frac{g}{l - l_0} \Delta l. \quad (2.12)$$

¹ Robert Hooke (1635–1703)

Систем са слике 2.3 понаша се као непригушени осцилатор и врши хармонијско осциловање око равнотежног положаја:

$$z = z_0 \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad (2.13)$$

где z_0 представља амплитуду, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ угаону фреквенцију, а φ фазни угао.

Једначина кретања гласи:

$$m\ddot{z} = mg - k(l - l_0) - kz. \quad (2.14)$$

С обзиром на једнакост **Error! Reference source not found.** једначина (2.14) постаје:

$$m\ddot{z} + kz = 0, \quad (2.15)$$

односно,

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0. \quad (2.16)$$

Период осцилације износи:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l - l_0}{g}}, \quad (2.17)$$

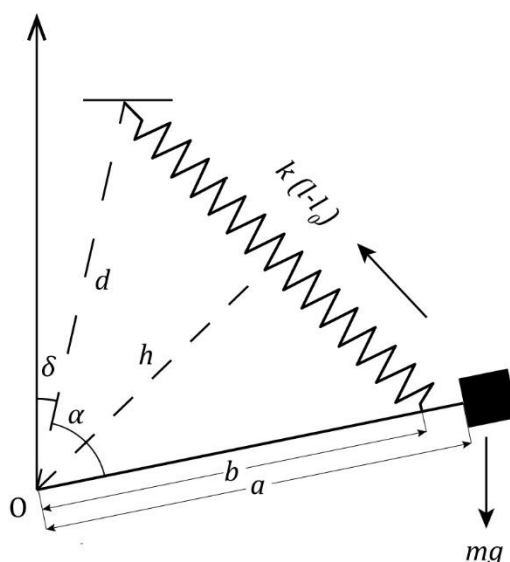
Диференцирањем једначине (2.17) добија се израз за механичку осетљивост инструмента:

$$\frac{dl}{dg} = \frac{m}{k} = \frac{T_0^2}{4\pi^2}. \quad (2.18)$$

За мерење малих промена дужине потребан је систем читања са изузетно великом резолуцијом. Да би се постигла прецизност мерења боља од 10 μGal потребна је таква механичка осетљивост да мерење издужења буде тачности од око 1 nm са одговарајућом временском стабилношћу силе опруге (Timmen, 2010).

Једначина равнотеже обртних момената силе другог типа инструмента, гравиметра са опругом и полугом, приказаног на слици 2.4, гласи:

$$mga \sin(\alpha + \delta) = k(l - l_0)h = k(l - l_0) \frac{bd}{l} \sin \alpha. \quad (2.19)$$



Слика 2.4: Гравиметар са опругом и полугом (Torge, 2001)

Једначина **Error! Reference source not found.** показује нелинеарну везу између теже g и угла α .

Са условима:

$$l_0 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha + \delta = 90^\circ, \quad (2.20)$$

при чему се l_0 назива опруга нулте дужине, једначина **Error! Reference source not found.** се поједностављује и гласи:

$$mga = kbd \sin \alpha. \quad (2.21)$$

Подешавајући систем тако да $\alpha \rightarrow 90^\circ$, и да $\delta \rightarrow 0^\circ$ повећава се осетљивост инструмента дата са:

$$\frac{d\alpha}{dg} = \frac{\sin(\alpha + \delta) \sin \alpha}{g \sin \delta}. \quad (2.22)$$

Извори грешака и тачност механичких гравиметара

Сви извори грешака који настају при мерењу са релативним гравиметрима деле се на:

- грешке узроковане самом конструкцијом гравиметра (инструменталне грешке) и
- грешке узроковане спољним факторима.

У инструменталне грешке спада: грешка одређивања калибрацијске функције, грешка хоризонтирања која зависи од осетљивости либела, нестабилност напона, као и ефекат хистерезиса еластичности опруге.

У грешке настале услед спољних утицаја убрајају се: утицај промене температуре и атмосферског притиска, утицај удараца инструмента приликом транспорта, као и утицај магнетног поља.

- Калибрациона функција

Резултати мерења гравиметра изражавају се у подеоцима који се добијају у дигиталном облику на бројачу инструмента. Да би подеоке изразили у јединицама убрзања, односно да би повратну силу прерачунали у јединице убрзања теже, потребно је одредити коефицијент којим се то превођење врши. Поступак одређивања овог коефицијента (који се назива и константа инструмента) представља калибрацију гравиметра (Starčević, 1991).

Општи облик калибрационе функције гласи:

$$g = F(z), \quad (2.23)$$

где је z бројчано читање у јединицама мерног сензора. Иако се тежи да се успостави линеарна веза између z и g приликом прављења инструмента, јављају се нелинеарности које су последица промене константе опруге или промене система за довођење полуге у нулти положај.

Комплетна калибрациона функција може се представити као збир дуготаласне и периодичне компоненте:

$$F(z) = F_{DT}(z) + F_{PER}(z), \quad (2.24)$$

где се дуготаласна компонента апроксимира полиномом:

$$F_{DT}(z) = N_0 + \sum_{k=1}^m Y_k z^k, \quad (2.25)$$

док се периодична компонента моделира Фуријеовим¹ редом:

$$F_{PER}(z) = \sum_{l=1}^n A_l \cos(\omega_l z - \varphi_l), \quad (2.26)$$

где су N_0 нулти (почетни) ниво инструмента, Y_k калибрациони коефицијенти степена k , A_l амплитуда, ω_l фреквенција, φ_l фаза периодичног члана степена l (Torge, 1989).

Калибрација се може реализовати на два начина:

- путем мерења на терену – мерењем на тачкама са познатим вредностима убрзања теже или познатим разликама убрзања теже и
- путем лабораторијских мерења – мерењем малих промена убрзања теже при отклону мерног система из хоризонтале – калибрација променом инклинације.

За калибрацију на терену користе се калибрационе линије – базе или калибрациони системи. Базе формирају тачке на којима су познате вредности убрзања или је позната разлика убрзања између две тачке које чине базу. У зависности од густине тачака и покривености подручја, као и од тачности с којом су одређене тачке које чине калибрационе линије, могуће је одредити линеарне, нелинеарне и периодичне компоненте калибрационе функције (Torge, 1989).

Ако је на тачки A познато убрзање силе теже g_A , а добијено бројчано читање у јединицама мерног сензора z_A , и ако су на тачки B вредности убрзања и читања, g_B и z_B ,

¹ Joseph Fourier (1768–1830)

онда се константа гравиметра (линеарна компонента калибрационе функције) добија као:

$$C = \frac{g_B - g_A}{z_B - z_A}. \quad (2.27)$$

У нашој земљи највећа база била је Београд-Скопље. Разлика убрзања теже ове базе је $344.14 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$, са грешком од $0.1 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$.

За калибрацију малог лимба гравиметра, користе се мале базе од којих је најпознатија база на Авали код Београда. У подножју и на врху утврђена су два бетонска стуба на којима су одређене апсолутне вредности убрзања силе теже преношењем уз вишеструко мерење гравиметрима. Разлика вредности убрзања силе теже на овој бази износи $49.743 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$, са висинском разликом од 249 m. Апсолутна вредност убрзања на стубу у подножју износи $980566.59 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$, док убрзање на стубу на врху износи $980516.85 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ у Потсдамском систему. Убрзања силе теже у систему IGSN71 (*International Gravity Standardization Network 1971* – Међународна гравиметријска стандардизована мрежа 1971) добијају се кад се од горњих вредности одузме разлика Потсдамског гравиметријског система и IGSN71, која износи $13.9 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ (Starčević, 1991).

- **Ход гравиметра (*Drift*)**

Упркос свим мерама за заштиту система за мерење од околине, нулти положај сензора мења се с временом. Та појава назива се ход гравиметра. До појаве хода долази услед попуштања система са опругом и полугом, старења материјала и промена коефицијента еластичности. На ход гравиметра утиче и теренски рад са инструментом (вибрације и мали ударци током мерења, некомпензована колебања температуре итд.). Ход гравиметра зависи од материјала од ког је израђен инструмент (термоеластична својства материјала) и од услова у којима се изводи мерење и достиже неколико μms^{-2} по дану. Инструменти код којих је систем са опругом израђен од кварца имају већи ход од инструмента са металним системом (Torge, 1989).

Укупни ход може се поделити на два дела, стационарни и транспортни ход. Стационарни ход се процењује дуготрајним посматрањем на једној станици и у њега спадају утицаји услед старења материјала и утицаји услед колебања температуре и ваздушног притиска. Транспортни ход последица је вибрација присутних током транспорта инструмента.

Утицај хода гравиметра отклања се посебним начином рада и увођењем одговарајућих поправака, при чему се врши корекција мерених вредности убрзања. Дневни ход моделира се полиномском функцијом (линеарном, квадратном или кубичном). Да би се моделирао дневни ход неопходна су поновљена мерења на истим тачкама током радног дана.

За мерење вертикалног градијента убрзања теже користе се механички гравиметри. Тренутно најчешће коришћен гравиметар је CG-5 Autograv произвођача *Scintrex Ltd*.

У табели 2-1 приказани су типови релативних гравиметара који се тренутно користе у свету (Kuhar & Mulić, 2009).

Табела 2-1: Типови релативних гравиметара који су тренутно у употреби

Произвођач	<i>LaCoste & Romberg (LCR)</i>		<i>Scintrex Ltd.</i>	
Модел	G	D	CG-3M	CG-5
Резолуција	0.1 μms^{-2} *	0.1 μms^{-2}	0.01 μms^{-2}	0.01 μms^{-2}
Тачност	0.15 μms^{-2}	0.05 μms^{-2}	0.05 μms^{-2}	0.05 μms^{-2}
Мерни распон	700 μms^{-2}	20 μms^{-2}	700 μms^{-2}	800 μms^{-2}
Стационарни ход	<0.33 μms^{-2} /дану		<0.2 μms^{-2} /дану (уз примену корекције)	
* 0.01 μms^{-2} = 1 μGal				

Релативни гравиметар Scintrex CG-5

CG-5 Autograv је аутоматизовани гравиметар заснован на кварцном еластичном систему. Сила теже која делује на мерну масу инструмента уравнотежена је опругом и релативно малом електростатичком повратном силом. Померање мерне масе детектује се капацитивним претварачем који има резолуцију од 0.02 nm. Нулти положај непрекидно се одржава помоћу повратне спреге. Преко интерног аналогно-дигиталног (А/Д) претварача, повратни напон претвара се у дигитални сигнал, а затим се преноси у систем за прикупљање и управљање подацима, који служи за обраду, приказ и складиштење података (Scintrex, 2012; Torge, 1989).

Параметри сензора и његових електронских кола одабрани су тако да повратни напон покрива опсег од преко 8000 mGal без ресетовања. Коришћење електронског дизајна са мало шума заједно са изузетно прецизним аутоматским калибрисањем аналогно-дигиталног претварача, резултира резолуцијом од 1 μGal .

Хоризонтирање инструмента врши се помоћу два електронска сензора нагиба (либеле) резолуције 1 лучне секунде. Постоје и сензори који мере унутрашњу температуру. Подаци о нагибу и температури омогућавају аутоматску компензацију промене нагиба. Ако инструмент ради на нестабилној основи, корекције грешака у нагибу у реалном времену могу се аутоматски компензовати у опсегу од ± 200 лучних секунди.

Заштита од промена температуре околине обезбеђује се високостабилном комором у којој су смештене све компоненте. Промене спољне температуре смањују се за фактор преко $1 \cdot 10^5$, а мали преостали ефекти коригују се софтверски у виду поправака. Опсег рада у стандардном инструменту је од -40°C до $+45^\circ\text{C}$. Читав механизам сензора затворен је у вакуумску комору, па се добија и одлична изолација од промена у атмосферском притиску.

Ово изузетно стабилно радно окружење кварцног еластичног система омогућава прецизно предвиђање дуготрајног хода сензора. Софтверска корекција у реалном времену смањује га на мање од 0.02 mGal/дану.

Инструмент поседује следеће врсте корекција:

- поправка за ход гравиметра,
- корекција нагиба,
- компензација температуре,
- корекција директног и индиректног утицаја Сунца и Месеца и
- гравитациони офсет.

2.2 ИНСТРУМЕНТИ И МЕТОДЕ ЗА МЕРЕЊЕ ГРАДИЈЕНТА УБРЗАЊА ТЕЖЕ

Процедура која се односи на одређивање вертикалног градијента теже још увек није јасно дефинисана у погледу метода и коришћених инструмената (Dukowski, 2012).

Релативни гравиметри

Уобичајена процедура подразумева постављање релативног гравиметра на две висине, након чега се резултат мерења (убрзање теже на узастопним висинама) уклапа у линеарни модел:

$$g(h) = ah + b, \quad (2.28)$$

или у нелинеарни модел:

$$g(h) = ah^2 + bh + c, \quad (2.29)$$

где је $g(h)$ очитавање гравиметра на висини мерења h у односу на репер, док су a , b и c константе. У случају линеарног модела вертикални градијент се одређује по формули:

$$W_{zz}(h_i) = \frac{g(h_i) - g(h_0)}{h_i} = a, \quad (2.30)$$

док се у случају апроксимације убрзања теже полиномом другог реда вертикални градијент убрзања теже одређује по формули:

$$W_{zz}(h_i) = \frac{g(h_i) - g(h_0)}{h_i} = ah_i + b, \quad (2.31)$$

при чему је у оба случаја h_i висина на којој је извршено мерење, а h_0 је референтна висина (висина репера). Ако се усвоји линеарни модел, вертикални градијент убрзања теже је константа, а ако се претпостави нелинеарна промена убрзања теже с висином (полином другог реда), срачунати вертикални градијент мења се линеарно са висином.

Сама промена вертикалног градијента са висином (под утицајем локалне топографије) највећа је унутар неколико десетина центиметара изнад терена и може се апроксимирати полиномом другог реда. На око 40 m изнад тла нелинеарност вертикалног градијента нестаје (промена је линеарна), а преко 500 m висине промена је врло мала и измерена вредност вертикалног градијента тежи нормалној вредности вертикалног градијента (0,3086 mGal/m) (Röder & Wenzel, 1986; Csapó & Völgyesi, 2004; Dukowski, 2012). Према мерењима, разлика вертикалног градијента у односу на градијент нормалног убрзања теже на висинама од 500 до 1700 m износи само 1 до 2 % (Hammer & Gumert, 1984).

У раду (Csapó & Völgyesi, 2004) аутори истичу да мерење вертикалног градијента у две тачке, дуж нормале тачке на којој се врши мерење, не пружа довољну тачност и предлажу мерење на три висине. Инструмент је у том случају потребно поставити на специјално дизајниран трипод по шеми А-Б-Ц-Б-А-Б-Ц-Б-А. Поузданија мерења вертикалног градијента добијају се квадратном апроксимацијом са два релативна гравиметра чиме се постижу независни скупови мерења.

Поред мерења вертикалног градијента теже коришћењем релативних гравиметара, за мерење свих компоненти Етвешевог тензора користе се градиометри.

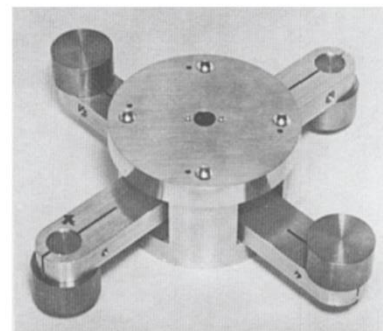
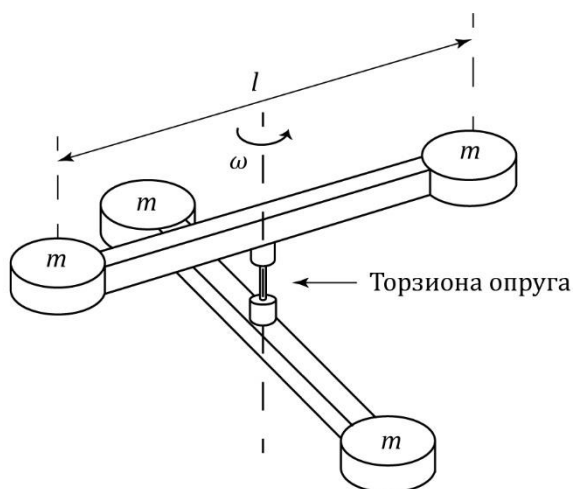
Градиометри

За сам почетак практичне градиометрије узима се изум Лоранда Етвеша с краја XIX века када је, на основу Кулонове¹ торзионе ваге, конструисао и адаптирао торзиону вагу за мерење градијента теже. Свеобухватна историја Етвешеве торзионе ваге, од почетних експеримената до последњих фаза развоја инструмената који раде по принципу торзионе ваге, дата је у раду (Szabó, 2016). Математичка основа за разумевање принципа рада градиометра може се наћи у (Jekeli, 2011; Torge, 1989).

Осетљивост од око 1 Е може се постићи градиометрима који раде по принципу торзионе ваге. Мерење захтева неколико сати на једној станици и поновно рачунање компоненти градијента из најмање пет независних мерења угаоног отклона под различитим азимутним угловима (Veryaskin, 2018).

До средине XX века једини инструменти којима је мерен градијент теже биле су торзионе ваге. Потреба за извођењем геофизичких истраживања на неприступачном терену велике површине и уз минимални утрошак времена довела је до потребе за градиометријским мерењима на покретним платформама. Први покушаји подразумевали су постављање уређаја сличних торзионој ваги на брзо ротирајућу платформу.

Први прототип развијен за примену на покретним платформама био је ротирајући гравитациони градиометар (Слика 2.5).



Слика 2.5: Конструкција ротирајућег гравитационог градиометра и први прототип инструмента развијен у лабораторији за истраживање *Hughes Aircraft* (Veryaskin, 2018)

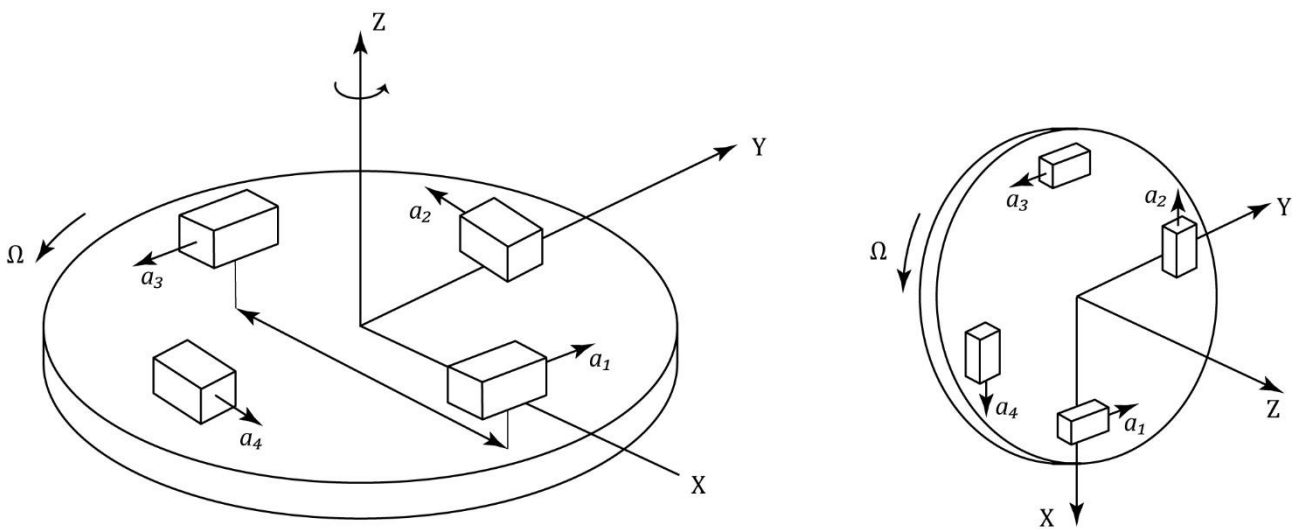
Градиометар је имао по две тест масе на сваком од два крака и мерио је диференцијални обртни момент изазван градијентима. Овај тип градиометра такође се може назвати резонантним модулирајућим гравитационим градиометром, јер се његови излазни сигнали снимају као резултат њихове демодулације на носећој фреквенцији. Развој овог градиометра био је намењен свемирским мисијама и снимању из ваздуха, са циљем да се

¹ Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806)

постигне шум спектралне густине на носећој фреквенцији од $0.3 E/\sqrt{\Delta f}$ где је Δf у Hz (Veryaskin, 2018).

Након развијања неколико ротирајућих градиометара у истраживачким лабораторијама и престижним универзитетима, осамдесетих година у лабораторији *Bell Aerospace* дизајниран је градиометар FTG (*Full Tensor Gradiometer*) који је крајем деведесетих почео да се користи у регионалном премеру. Основни дизајн градиометра FTG састоји се од електронски усклађених парова акцелерометара. Међусобним одузимањем излазног сигнала добијају се све компоненте Етвешевог тензора. Да би се измерио градијент на покретној основи, сензор је постављен на инерцијално стабилизовану платформу са жироскопима и акцелерометрима.

На слици 2.6 приказан је ротирајући диск са четири акцелерометра. Сваки диск монтиран је на жиро-стабилизовану платформу. Градиометар FTG израђен је од три ротирајућа диска постављена међусобно управно.



Слика 2.6: Ротирајући диск FTG градиометра (Veryaskin, 2018)

На сваком диску монтирана су два пара VII-G акцелерометара на растојању од 15 cm. Детектовање градијента од неколико етвеша захтева да акцелерометри имају тачност од око 10^{-10} ms^{-2} . Грешка нултог показивања акцелерометара VII-G (*null bias error*), узрокована пузањем материјала и променом температуре, износи око 10^{-5} до 10^{-6} ms^{-2} . Ова грешка на фреквенцији ротације диска заправо је знатно нижа и реда је величине горе наведеног захтева (Veryaskin, 2018).

Као што је приказано на слици 2.6, парови акцелерометара постављени су један наспрам другог тако да су њихове осе осетљивости у равни диска, управно на осу ротације која пролази кроз центар диска. На сваком диску монтирано је по четири акцелерометра. Збир сигнала два акцелерометра даје градијент у центру, елиминишући линеарно убрзање управно на осу ротације, док разлика између излаза два ортогонално оријентисана пара акцелерометара поништава ротационо убрзање, а сигнал градијента може се добити демодулацијом збира и разлике излаза акцелерометара, што следи из једначине за ротирање платформе око x-осе:

$$[(a_1 + a_2) - (a_3 + a_4)] = 4R \frac{W_{yy} - W_{zz}}{2} \sin 2\Omega t - 4R(W_{yz}) \cos 2\Omega t, \quad (2.32)$$

и из једначине за ротирање платформе око z -осе:

$$[(a_1 + a_2) - (a_3 + a_4)] = 4R(W_{yx}) \cos 2\Omega t + 2R(W_{xx} - W_{yy}) \sin 2\Omega t, \quad (2.33)$$

где су a_i излази акцелерометара ($i = 1, 2, 3, 4$), R растојање између два акцелерометра, а W тензор градијента убрзања теже.

Компоненте тензора градијента убрзања теже одређују се коришћењем три таква диска која су постављена међусобно ортогонално унутар жиро-стабилизоване инерцијалне платформе.

Ротација диска на фреквенцији Ω модулира сигнале градијента простопериодичним сигналом на фреквенцији 2Ω , јер сваки пар акцелерометара два пута региструје одређени градијент по окрету. Линеарна убрзања управна на осу ротације, модулирају се на фреквенцији Ω ротације, јер их детектује само један акцелерометар. Демодулацијом сигнала модулисаних са $\sin 2\Omega$ и $\cos 2\Omega$ добијају се градијенти из разлога што се они мењају на тој фреквенцији. На фреквенцији Ω постоји само модулисани сигнал који представља грешку мерења. Сигнал грешке враћа се преко повратне спреге на сваки пар акцелерометара да би се подесила нула сигнала (Veryaskin, 2018).

Први FTG био је намењен примени у авионима, копненим возилима и бродовима. У лабораторијском окружењу постигнут је шум спектралне густине од око $6 \text{ E}/\sqrt{\Delta f}$ где је Δf у Hz.

Наредних година, дизајн инструмента је усавршаван – повећање растојања између акцелерометара, повећање броја акцелерометара по диску, повећање фреквенције ротације и гранична фреквенција филтера (*filter cutoff frequency*) да би тренутна варијанта градиометра eFTG фирме *Lockheed Martin* имала шум спектралне густине од 2.5 до $4 \text{ E}/\sqrt{\Delta f}$ где је Δf у Hz.

ПОГЛАВЉЕ 3

МОДЕЛИРАЊЕ ПОЉА УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ КОРИШЋЕЊЕМ РЕЗУЛТАТА ДОБИЈЕНИХ ПРИМЕНОМ САТЕЛИТСКИХ ТЕХНИКА

Поље убрзања теже представља одговор на ротационо кретање Земље и унутрашњу расподелу густина масе Земље. С обзиром да је потенцијал теже једнак збиру центрифугалног потенцијала, који је последица ротационог кретања, и гравитационог потенцијала, који генерише посматрано тело својом масом, одређивање потенцијала теже своди се на одређивање гравитационог и центрифугалног потенцијала. Како је центрифугални потенцијал проста аналитичка функција која се лако може израчунати применом израза (1.13), а на основу угаоне брзине (1.6), допринос центрифугалног потенцијала лако је моделирати. То није случај са гравитационим потенцијалом, чије се моделирање компликује услед неправилности у расподели густина масе Земље.

Изван површи Земље, гравитационо поље је хармонијско и може се представити редом просторних сферних хармоника. Да би се што боље моделирале све неправилности гравитационог поља потребан је што већи број коефицијената сферно-хармонијског развоја. Тип и квалитет података, као и просторна дистрибуција података одређују колико ће модел гравитационог поља бити близак реалном.

У прошлости је прикупљање детаљних података о гравитационом пољу класичним гравиметријским методама било ограничено на мање и приступачније регионе. Појавом и развојем сателитског позиционирања, сателитске алтиметрије, сателитске гравиметрије и сателитске градиометрије, омогућено је равномерно прикупљање података гравитационог поља на глобалном нивоу. Данас се за моделирање гравитационог потенцијала Земље, поред терестричких података и података са платформи (авиони и бродови), користе и информација које се прикупљају коришћењем сателита. Сателити, који орбитирају око Земље, пружају могућност добијања хомогеног скупа података који се односе на целу Земљу, а не само на поједине делове. Поред тога, сателити омогућавају прикупљање података у релативно кратком временском периоду.

У основи моделирања гравитационог потенцијала Земље, коришћењем резултата добијених применом сателитских техника, налази се Њутнов закон универзалног привлачења. У складу са Њутновим законом, гравитациони ефекат расподеле масе Земље на орбиту сателита смањује се са квадратом повећања удаљености између сателита и Земље, односно са квадратом повећања висине орбите. При нижим орбитама сателита неправилности гравитационог поља боље се осликавају него при вишим орбитама. Детектовање и мерење неправилности путање сателита, које су узроковане неправилностима у распореду густина маса Земље, омогућава анализу глобалног гравитационог поља.

Нехомогеност масе на дубини од 1 km узрокује одређени гравитациони сигнал у тачки на површини Земље. Да би се генерисао идентичан гравитациони сигнал, промена распореда густина маса на дубини од 10 km мора бити сто пута већа. Да би се произвео исти сигнал на сателиту који кружи на око 200 km надморске висине, промена распореда густина маса Земље мора бити већа за фактор 40 000. Ово показује да је само веома осетљив сателитски сензор способан да мери мале промене Земљиног гравитационог поља. Поред изградње осетљивог сензора, потребно је обезбедити довољно тачне технике које из мерења могу повратити гравитационо поље са високом резолуцијом (Seeber, 2003; Sünkel, 2000; Rummel & Colombo, 1985).

Применом сателитских метода одређивања поља теже Земље, коришћењем глобалних геопотенцијалних модела и коефицијената сферно-хармонијског развоја, може се одредити аномалијски потенцијал и остали функционали.

Приликом анализе глобалног гравитационог поља, гравитациони потенцијал Земље представља се редом (Torge, 2001):

$$V = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (3.1)$$

где је:

- V – гравитациони потенцијал у тачки рачунања,
- GM – производ гравитационе константе и укупне масе Земље,
- R_e – екваторијални полупречник Земље,
- n – степен коефицијената сферно-хармонијског развоја,
- m – ред коефицијената сферно-хармонијског развоја,
- r – радијално растојање тачке рачунања од геоцентра,
- θ – геоцентрична колатитуда тачке рачунања,
- λ – геоцентрична лонгитуда тачке рачунања,
- \bar{P}_{nm} – нормализоване придружене Лежандрове функције (полиноми) степена и реда n и m и
- $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ – коефицијенти реда сферних хармоника.

У овој једначини сферне координате дате су вектором (r, θ, λ) , док радијално растојање тачке рачунања од геоцентра представља збир полупречника Земље и висине посматране тачке изнад Земље, то јест $r = R + h$. Члан $(R/r)^n$ описује слабљење гравитационог поља са висином.

Бесконачни ред скраћује се до максималног разрешивог степена $n = N_{max}$ који се може превести у одговарајућу просторну величину. Највећи степен реда сферних хармоника N_{max} повезан је са најкраћом таласном дужином на површини Земље, λ , следећом везом:

$$\lambda = \frac{360}{N_{max}} [^\circ], \quad (3.2)$$

Односно,

$$\lambda = \frac{2\pi R}{N_{max}} \cong \frac{40000}{N_{max}} [\text{km}], \quad (3.3)$$

где је R полупречник Земље.

Табела 3-1 приказује поделу гравитационог поља у зависности од максималног разрешивог степена развоја N коме одговара одређена просторна резолуција са таласном дужином λ и одређена величина блока S .

Табела 3-1: Резолуција гравитационог поља (Seeber, 2003)

Карактеристика гравитационог поља (резолуција)	Дуга	Средња	Кратка	Веома кратка
Степен и ред развоја N	< 5	< 36	< 200	> 200
Таласна дужина λ [km]	> 8000	> 1000	> 200	< 200
Величина блока S [°]	> 10	> 5	> 1	< 1

3.1 ГРАВИТАЦИОНЕ САТЕЛИТСКЕ МИСИЈЕ

Три најзначајније гравитационе сателитске мисије, које су омогућиле моделирање гравитационог потенцијала велике тачности и високе просторне резолуције на глобалном нивоу, су:

- CHAMP (*CHALLENGING Minisatellite Payload*),
- GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*) и
- GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*).

Класични геопотенцијални модели добијени само на основу резултата сателитских техника ограничени су до максималног сферног хармоника степена $N = 70$, док су поменуте три мисије омогућиле развој потенцијала и до $N = 300$ (Sneeuw, 2001).

Све три мисије одликовале су се ниском и готово поларном орбитом, континуираним праћењем летилице системом за позиционирање и способношћу да одвоје гравитациони од негравитационог утицаја (отпор преостале атмосфере, притисак електромагнетног зрачења и соларног ветра, Кориолисова сила, силе изазване ротацијом сателита и др.). У циљу одвајања гравитационих и негравитационих сила које делују на сателит коришћени су акцелерометри. Основна мерена величина у све три мисије је гравитационо убрзање које се заснива на мерењу релативног кретања испитне (мерне) масе (Rummel et al., 2002; Balmino et al., 1999; Freedен et al., 2002).

У табели 3-2 приказане су основне информације о гравитационим сателитским мисијама, док су у табели 3-3 дати циљеви мисија и коришћени инструменти (Wermuth, 2008; Siemes et al., 2019).

Електростатички акцелерометри (ЕА), коришћени у гравитационим сателитским мисијама, пружили су информације потребне за разликовање стварних путања сателита од чистих гравитационих орбита. Мерењем негравитационих сила или њиховом компензацијом могу се разликовати промене путање сателита које су последица промена распореда густина маса од оних које су последица негравитационих утицаја. Захваљујући акцелерометрима, којима су мерена убрзања узрокована негравитационим силама, било је могуће одвојити убрзања изазвана Земљиним гравитационим пољем и одредити их (Touboul et al., 2012).

Табела 3-2: Гравитационе сателитске мисије – основне информације

	CHAMP	GRACE	GOCE
Година лансирања	2000.	2002.	2009.
Трајање мисије	10 год.	15 год.	4 год.
Оператор мисије	GFZ ¹ и DLR ²	NASA ³ и DLR	ESA ⁴
Број сателита	1	2	1
Висина орбите	450 до 300 km	450 до 300 km	250 km
Маса сателита при лансирању	522 kg	487 kg	1077 kg
Инклинација орбите	87.2°	89.5°	96.6°
Димензије сателита	4.3 m • 0.8 m • 1.6 m	3.1 m • 1.9 m • 0.7 m	5.3 m • 1.1 m ²
Прецизност акцелерометра	$3 \cdot 10^{-9} \text{ ms}^{-2}$	$1 \cdot 10^{-10} \text{ ms}^{-2}$	$1 \cdot 10^{-12} \text{ ms}^{-2}$

Табела 3-3: Гравитационе сателитске мисије – циљеви мисија и коришћени инструменти

Назив мисије	Циљеви мисије	Инструменти
CHAMP	<p>Моделирање гравитационог поља (стационарног и временски променљивог, дуге до средње таласне дужине)</p> <p>Моделирање магнетног поља</p> <p>Осматрање атмосфере (јоносфере)</p>	<p>Звездани компас⁵</p> <p>Мерач брзине јона⁶</p> <p>Векторски магнетометар⁷</p> <p>Оверхаузеров магнетометар⁸</p> <p>Пријемник система за глобално позиционирање</p> <p>Ласерски ретро-рефлектор</p> <p>STAR⁹ акцелерометар</p>
GRACE	<p>Моделирање гравитационог поља (посебан фокус је на временски променљивом пољу средње таласне дужине)</p>	<p>Систем за мерење растојања¹⁰</p> <p>Акцелерометар</p> <p>Пријемник система за глобално позиционирање</p> <p>Ласерски ретро-рефлектор</p> <p>Сензор за Земљу и Сунце¹¹</p> <p>Ултра стабилни осцилатор</p>
GOCE	<p>Моделирање гравитационог поља (стационарно поље са највећом могућом просторном резолуцијом)</p>	<p>Пријемник система за глобално позиционирање – GPS пријемник</p> <p>Ласерски ретро-рефлектор</p> <p>Електростатички гравитациони градиометар – GRADIO</p> <p>Систем за контролу висине</p> <p>Звездани сензор (трагач)¹²</p>

¹ *GeoForschungsZentrum* – Немачки истраживачки центар за геонауке (Хелмхолц Потсдамски центар)

² *Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt* – Немачки центар за ваздушне и свемирске летове

³ *National Aeronautics and Space Administration* – Национална управа за ваздухопловство и свемирска истраживања

⁴ *European Space Agency* – Европска свемирска агенција

⁵ *Advanced Stellar Compass*

⁶ *Digital Ion Drift Meter*

⁷ *Fluxgate Magnetometer*

⁸ *Overhauser Magnetometer*

⁹ *Space Three-axis Accelerometer for Research*

¹⁰ *K-Band Ranging System*

¹¹ *Coarse Earth and Sun Sensor*

¹² *Startracker*

Међусателитско праћење и сателитска градиометрија

Поменуте сателитске мисије користиле су следеће мерне технике:

- SST – *Satellite to Satellite Tracking* – Међусателитско праћење (CHAMP, GRACE и GOCE)и
- SGG – *Satellite Gravity Gradiometry* – Сателитску градиометрију (GOCE).

Међусателитско праћење подразумева мерење растојања и промене растојања између сателита, било да је у питању HL начин рада (*High-Low mode*) или LL начин рада (*Low-Low mode*).

HL начин рада представља конфигурацију у којој сателит, који се налази у ниској Земљиној орбити (LEO – *Low Earth Orbit*), бива праћен високолетећим сателитом. LL режим рада подразумева два LEO сателита, одвојена неколико стотина километара, чија се удаљеност мери са највећом могућом прецизношћу.

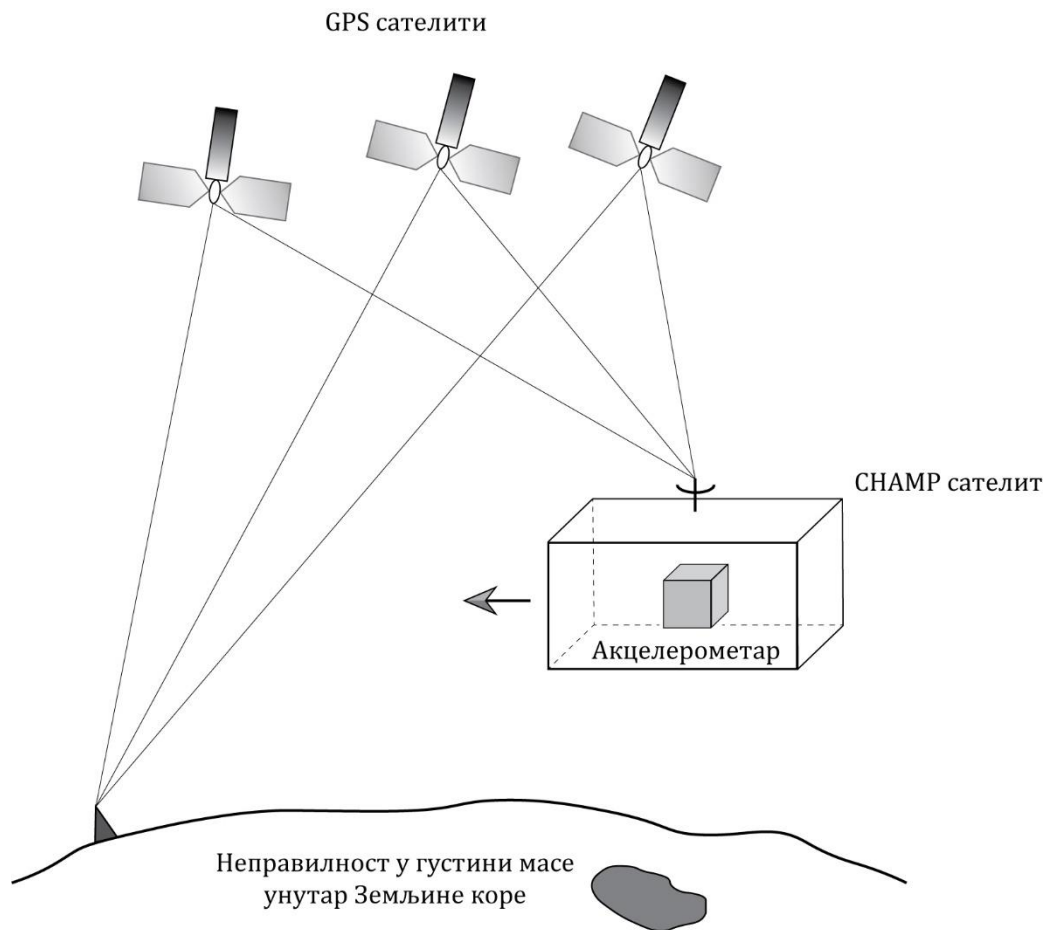
Сателитска градиометрија подразумева мерење убрзања у две блиске тачке директно у сателиту. Тај концепт познат је као диференцијална акцелерометрија. Убрзање се мери са три пара акцелерометара, а промена гравитационог убрзања у три просторна правца добија се из одговарајућих вредности убрзања мерена са два акцелерометра. На тај начин добија се градијент гравитационог убрзања у сва три просторна правца. Важна предност сателитске градиометрије у поређењу са SST техником је та што су негравитациона убрзања практично иста за сва мерења унутар свемирске летелице па нестају диференцијацијом.

У случају SST-HL начина рада мере се први изводи гравитационог потенцијала, док SST-LL конфигурација служи за мерење разлике првих извода гравитационог потенцијала. Дакле, међусателитско праћење омогућава мерење првих извода гравитационог потенцијала (компоненте убрзања гравитационе силе), док се употребом SGG мерне технике добијају други изводи гравитационог потенцијала којима се приказује промена гравитационог убрзања у простору (Seeber, 2003).

CHAMP сателитска мисија

CHAMP мисија започета је 2000. године и трајала је десет година. Сателит се налазио у готово кружној, поларној орбити. Висина орбите била је 450 km, али је до краја мисије висина смањена на 300 km услед отпора атмосфере. Током трајања мисије CHAMP сателит је генерисао врло прецизна мерења гравитационог и магнетног поља (Слика 3.1). Поред одређивања гравитационог и магнетног поља, сателит је имао за циљ и истраживање јоносфере.

CHAMP је био први сателит са LEO орбитом посвећен анализи гравитационог поља. Сателит је имао GPS пријемник који је омогућио прецизно познавање орбите сателита, тј. праћење положаја сателита у простору у функцији времена. Примењена је HL техника међусателитског праћења (SST-HL конфигурација).



Слика 3.1: CHAMP сателитска мисија - SST-HL конфигурација (Freedен et al., 2002)

У средишту масе сателита налазио се електростатички акцелетометар STAR. Принцип рада акцелерометра заснован је на левитацији мерне масе и мерењу промена у односу на нулти положај. STAR акцелерометром мерено је негравитационо убрзање. Ово убрзање било је потребно одвојити од гравитационог убрзања, што је постигнуто детектовањем поремећаја орбите GPS пријемником.

Поред GPS пријемника и акцелерометра, сателит је садржао и ретрорефлектор за ласерско мерење дужина, магнетометар, уређај за истраживање јоносфере (Blagojević, 2014), као и звездани компас којим су добијани подаци о оријентацији летилице у простору. Комбинацијом мерних података акцелерометра и звезданог компаса у фреквентном домену и применом Калманових¹ техника филтрирања, било је могуће одредити и угаона убрзања (Oberndorfer & Müller, 2003).

CHAMP мисија омогућила је рачунање прецизног глобалног геопотенцијалног модела (GGM– *Global Geopotential Model*) и модела геоида. Израчунат је и објављен низ GGM-а заснованих на CHAMP подацима. Максимални степен развоја тих модела је 50 (Torge, 2001).

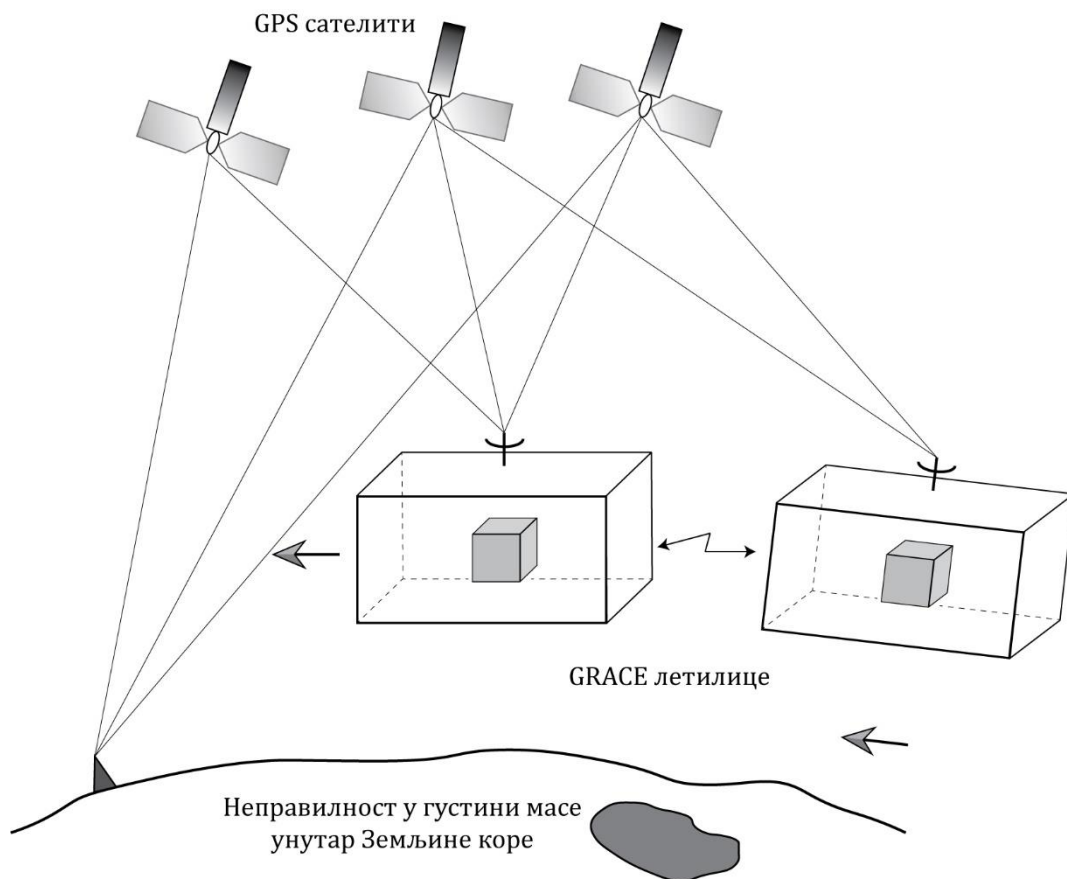
¹ Rudolf Emil Kálmán (1930–2016)

GRACE сателитска мисија

GRACE се састоји од две идентичне летилице које се налазе у поларној орбити у тандемској конфигурацији на висини од око 450 km и на међусобној удаљености од око 220 km. Примењена је комбинација LL и HL техника међусателитског праћења (Слика 3.2). Основна мерена величина сателитског пара је прецизно одређено растојање између два сателита. Користећи GPS и микроталасни систем за мерење (К-опсег радио спектра), промене у раздаљини између сателита мерене су са прецизношћу од 1 μm . Мерни систем је толико осетљив да се може приметити и кретање воденог слоја величине континента и дебљине једног милиметра (Touboul et al., 1999).

GRACE мисија покренута је 2002. године при чему је трајање мисије продужено са планираних пет на петнаест година. Годину дана након краја GRACE мисије покренута је мисија GRACE-FO (*Gravity Recovery and Climate Experiment Follow-On*). Мисија GRACE-FO слична је претходној мисији и тренутно је у току.

Оба GRACE сателита имала су и осетљиве акцелерометре за мерење и уклањање утицаја атмосферског отпора и других негравитационих утицаја. SuperSTAR акцелерометар, коришћен у GRACE мисији, усавршена је варијанта акцелерометра коришћеног у CHAMP мисији. Остварена је десет пута боља резолуција у односу на STAR акцелерометар, чиме је постигнута прецизност од 10^{-10} ms^{-2} (Touboul et al., 1999).



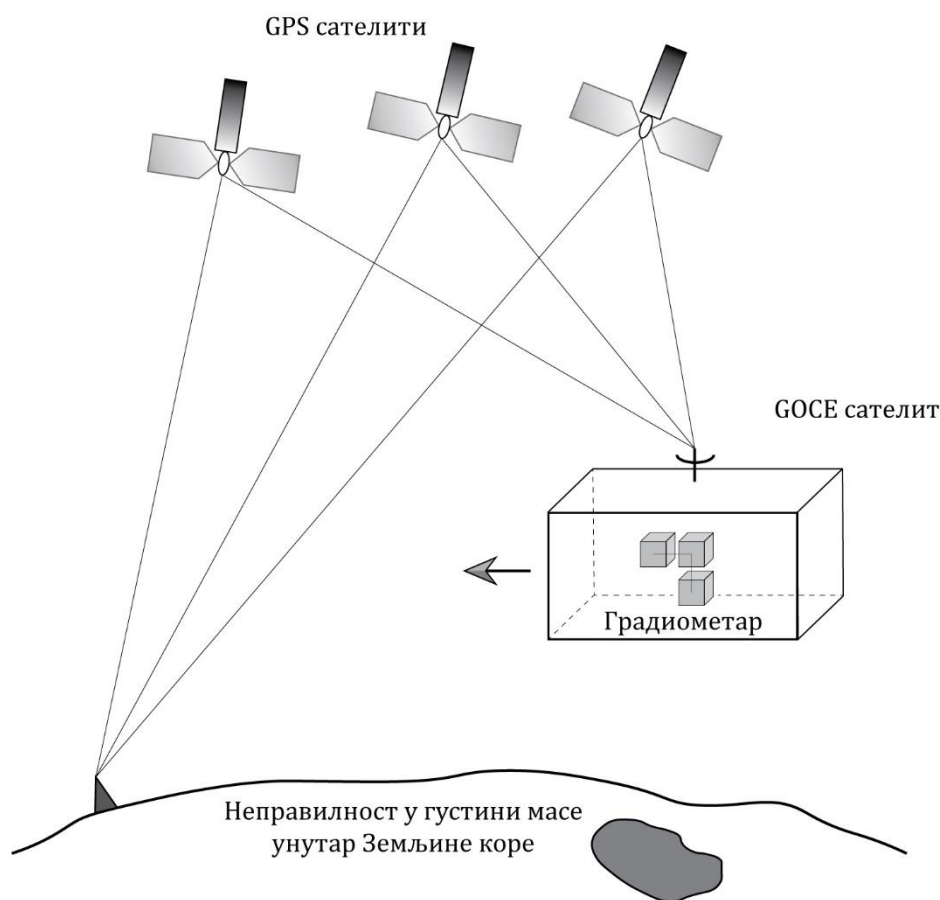
Слика 3.2: GRACE сателитска мисија – SST-LL и SST-HL конфигурација (Freedden et al., 2002)

Промене у гравитационом пољу Земље узроковане кретањима у атмосфери и хидросфери, померањем тектонских плоча и разним другим променама у маси Земље

мерене су у интервалима од око месец дана. GRACE моделима, који су били израђивани на месец дана, била је постигнута резолуција гравитационог поља до степена и реда 150 до 180, тачност аномалија убрзања од ± 10 до $30 \mu\text{ms}^{-2}$ и тачност геоида од $\pm 0.1 \text{ m}$.

3.2 GOCE САТЕЛИТСКА МИСИЈА

Иако концепт сателитске градиометрије постоји више од 50 година, GOCE је прва сателитска мисија која је применила дугоразвијани концепт сателитске градиометрије гравитационог поља. Поред поменуте технике, коришћено је и међусателитско праћење у HL режиму рада (Слика 3.3) (Balmino et al., 1981; Balmino et al., 1999). Сателит се кретао у хелиосинхроној, ниској, приближно кружној и приближно поларној орбити при којој је, током кружења око Земље, летилица била у истом положају посматрајући из перспективе Сунца.



Слика 3.3: GOCE сателитска мисија – SGG и SST-HL конфигурација (Freedden et al., 2002)

GOCE је прва „*drag-free*” мисија која подразумева да се сателит креће у слободном паду око Земље. Негравитационе силе компензују се специјалним системом за контролу висине. Сателит има два дела, спољашњи и унутрашњи. Када на спољашњи оклоп делују негравитационе силе, детектује се релативна промена растојања између спољашњег и унутрашњег дела, након чега јонски потискивачи делују на оклоп враћајући га у првобитни положај. Унутрашњи део слободно лебди унутар спољашњег оклопа и на тај начин бива заштићен од негравитационих утицаја, чиме се омогућава моделирање стационарног гравитационог поља високе резолуције.

Главни циљ GOCE сателитске мисије био је да пружи глобалне геопотенцијалне моделе са високом просторном резолуцијом и са врло великом тачношћу. Један од основних циљева био је и модел геоида са великом тачношћу на глобалном нивоу.

Употребом SGG технике добијене су краткоталасне и средњеталасне информације о гравитационом пољу, на основу којих је моделирано стационарно гравитационо поље високе резолуције. Употребом SST технике одређен је прецизан положај сателита и рачунати су поремећаји орбите, на основу чега су добијене дуготаласне и средњеталасне карактеристике гравитационог поља. Преклапање ове две технике почиње око степена и реда $L = 15$, што је једнако резолуцији од око 1300 km, до најмање $L = 60$, што одговара резолуцији од око 330 km (SERCO/DATAMAT Consortium, 2008).

GOCE мисија омогућила је:

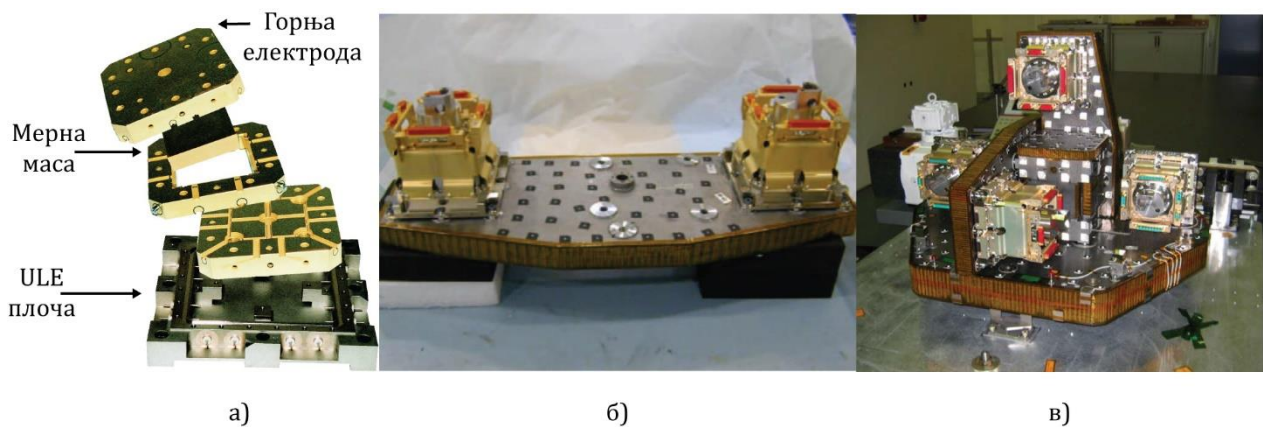
- одређивање аномалија убрзања теже са тачношћу од 1 до 2 mGal, то јест од 1 до $2 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$,
- одређивање геоида са тачношћу од 1 до 2 cm,
- просторну резолуцију модела бољу од 100 km и
- степен глобалног геопотенцијалног модела већи од 200 (Drinkwater et al., 2006).

Електростатички гравитациони градиометар

За разлику од CHAMP и GRACE летилица, које су имале акцелерометре, у GOCE сателиту коришћен је градиометар. Електростатички гравитациони градиометар (ЕГГ) GOCE сателитске мисије састоји се од три једноосна ортогонално распоређена градиометра. Центар троаксијалног система поклапа се са центром масе градиометра. Сваки од градиометара састоји се од два ултрасензитивна тродимензионална акцелерометра. Капацитивни ЕА који су интегрисани у GOCE летилицу представљају побољшане верзије STAR и SuperSTAR акцелерометра и називају се GRADIO. Акцелерометар GRADIO заснива се на принципу лебдења инерцијалне (мерне) масе унутар сензорског кућишта.

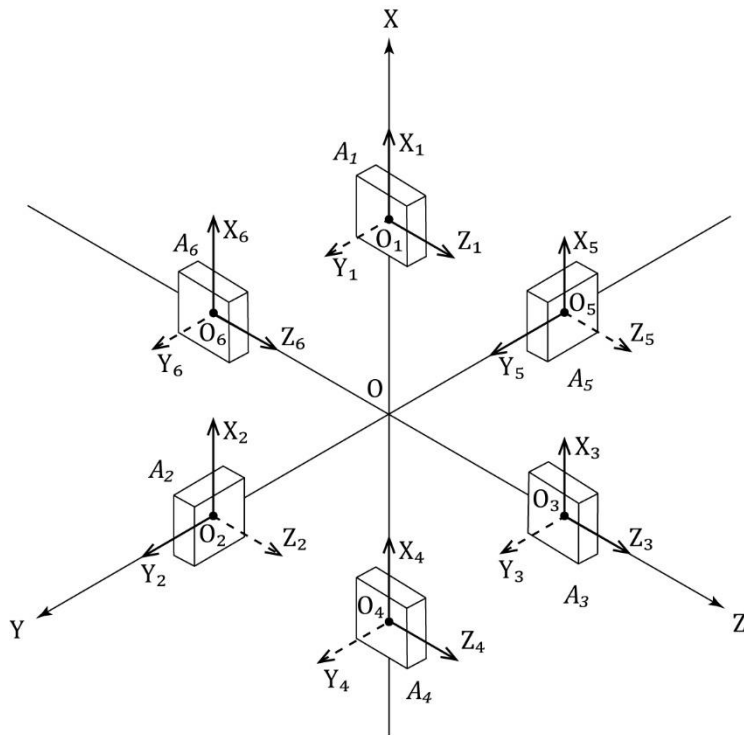
Растојање између два акцелерометра на једној оси износи 0.5 m. Сваки акцелерометар садржи мерну масу (ММ), направљену од легуре родијум-латине (Rh-Pt), која може слободно да се креће унутар кућишта које је направљено од ULE (*Ultra Low Expansion Silica Glass*) плоча у које је угравирано осам пари електрода. Контролисаним напонима који се доводе на електроде, омогућава се да се ММ не помера у односу на кућиште (Marque et al., 2008). Ови напони представљају и излазне величине ЕА.

ММ је правоугаоног облика, димензија 4 cm • 4 cm • 1 cm, масе 320 g. Облик ММ омогућава да се ЕА тестира на Земљи, тако што се довођењем високог напона на његове највеће површине врши компензација тежине ММ (она лебди). На слици 3.4а) представљена је ММ и кућиште ЕА. На слици 3.4б) приказан је једноосни градиометар који се састоји од два акцелерометра, док је на слици 3.4в) приказан троосни градиометар који се састоји од шест акцелерометара који су постављени симетрично у односу на центар масе градиометра.



Слика 3.4: а) Акцелерометар б) Једноосни градиометар в) Троосни градиометар (Drinkwater et al., 2006; Fehring et al., 2008)

Оријентација градиометра у односу на координатне осе везане за сателит шематски је приказана на слици 3.5. Шест акцелерометара у референтном оквиру градиометра означени су са A_i ($i = 1, 2, \dots, 6$). Пуне стрелице на сваком од акцелерометара показују ултра осетљиве осе, док испрекидане стрелице показују мање осетљиве осе. Од 8 пара електрода, четири пара се користе за Y-Z транслаторно кретање мерне масе и за Φ ротацију (око X-осе), а четири пара за преосталу транслацију дуж X-осе и Θ и Ψ ротације (тј. ротације око Y и Z-осе). Одговарајућим комбинацијама сигнала са ових осам канала одређује се шест транслаторних и ротационих степени слободе ММ.



Слика 3.5: Положај шест акцелерометара у референтном оквиру градиометра (Stummer, 2012; Rummel et al., 2011).

Рад ЕА од којих се састоји ЕГГ, заснива се на мерењу силе која је потребна да би се мерна маса одржала у центру кућишта.

У случају сателита у орбити узима се у обзир и ротација акцелерометра у односу на центар масе сателита и ротација самог сателита. Убрзање мерено акцелерометром A_i дато је једначином кретања (Bouman, 2015):

$$\mathbf{a}_i = -(\mathbf{M} - \mathbf{\Omega}^2 - \dot{\mathbf{\Omega}}) \mathbf{R}_i + 2\mathbf{\Omega} \dot{\mathbf{R}}_i + \mathbf{D} - \mathbf{S}_i - \mathbf{M}_i. \quad (3.4)$$

Матрица \mathbf{M} је тензор гравитационог градијента, који се у геодезији назива и Марусијев¹ тензор (Rummel et al., 2011):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Чланови матрице $\mathbf{\Omega}$ представљају центрифугално убрзање:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

док су чланови матрице $\dot{\mathbf{\Omega}}$ угаона (Ојлерова²) убрзања:

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y & \dot{\omega}_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Компонента $\mathbf{M}\mathbf{R}_i$ представља релативно убрзање мерне масе и кућишта, где је \mathbf{R}_i вектор положаја центра масе сателита и центра мерне масе i -тог акцелерометра. $\mathbf{\Omega}^2\mathbf{R}_i$ је центрифугално убрзање мерне масе, док је $\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{R}_i$ убрзање мерне масе услед ротације сателита. Кориолисово убрзање дато је са $2\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{R}}_i$. Компонента \mathbf{D} представља убрзање сателита услед осталих негравитационих сила, док је убрзање услед гравитационе силе самог сателита \mathbf{S}_i . Убрзање које производи магнетно поље дато је са \mathbf{M}_i .

Комбинацијом мерених убрзања i -тог и j -тог акцелерометра који леже на истој оси, добијају се убрзања сателита услед негравитационих сила и тензор гравитационог градијента. Сабирањем убрзања акцелерометра који леже на истој оси, користећи једначину (3.4), добија се вектор убрзања сателита услед негравитационих сила D :

$$\mathbf{a}_c^{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j) = \mathbf{D}, \quad (3.8)$$

док се одузимањем две вредности убрзања добијају информације о гравитационом, центрифугалном и Ојлеровом убрзању:

$$\mathbf{a}_d^{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) = -(\mathbf{M} - \mathbf{\Omega}^2 - \dot{\mathbf{\Omega}})\mathbf{R}_i. \quad (3.9)$$

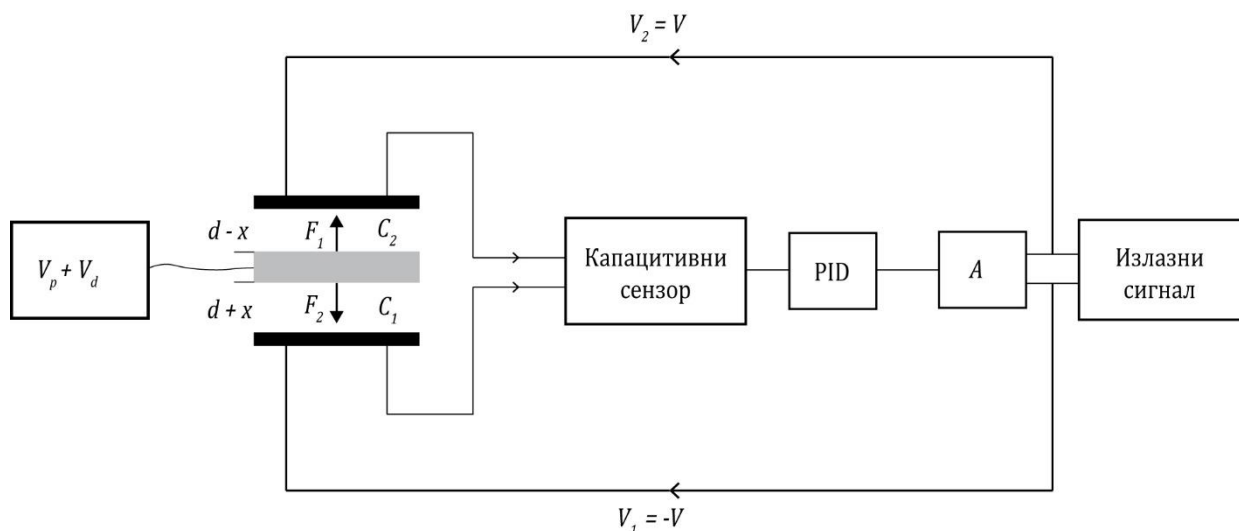
¹ Antonio Marussi (1907 – 1984)

² Leonhard Euler (1707 – 1783)

У једначинама **Error! Reference source not found.** и (3.9) убрзања a_i и a_j представљају парове акцелерометара који леже на истој оси, то јест парове (A_1-A_4) , (A_2-A_5) и (A_3-A_6) .

Електростатички акцелерометар

Принцип рада GRADIO акцелерометра заснива се на принципу лебдења мерне масе унутар кућишта. На слици 3.6 приказана је блок шема једноосног ЕА.



Слика 3.6: Блок шема једноосног електростатичког акцелерометра

Између две правоугаоне електроде, на које се редом доводе напони $V_1 = +V$ и $V_2 = -V$, постављена је мерна маса. Она је повезана на напон V_t који је једнак збиру једносмерног поларизационог напона V_p и простопериодичног напона $V_d(t)$:

$$V_t = V_p + V_d(t). \quad (3.10)$$

Фреквенција напона $V_d(t)$ је 100 kHz и она је сувише висока да може да утиче на кретање мерне масе. Номинални положај мерне масе је у средини између електрода када је њено растојање од обе електроде једнако d , односно када је $x = 0$. Између плоча кондензатора и површина мерне масе јављају се електричне силе интензитета F_1 и F_2 . Претпоставља се да су напони V и V_t позитивни. Између површина мерне масе и електрода са обе стране формирају се кондензатори капацитивности C_1 и C_2 . Када је мерна маса у положају $x = 0$ ове капацитивности су једнаке. Капацитивни детектор, који ради по принципу диференцијалног капацитивног моста, користи се за мерење одступања мерне масе од номиналног положаја, односно за мерење величине Δ . Када се под дејством спољашњих сила мерна маса изведе из свог номиналног положаја, излазним сигналом са капацитивног моста се преко повратне спреге контролише напон V . На тај начин се мерна маса враћа и одржава непокретном у номиналном положају. Повратна спрега садржи PID регулатор.

Једначина кретања ММ може се изразити преко разлике електричних сила, које у оквиру ових кондензатора делују на њу. Према Кулоновом закону имамо да је сила између плоча кондензатора дата једначином:

$$F_{ci} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A E_i^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A \left(\frac{U_i}{s_i} \right)^2, \quad (3.11)$$

где су ε_0 диелектрична константа вакуума, A површина електрода, тј. мерне масе, E_i електрично поље унутар кондензатора, U_i напон између плоча кондензатора и s_i растојање између плоча кондензатора, где је $i=1$ или 2 . Веза између напона и електричног поља унутар кондензатора уведена је под претпоставком да је поље унутар кондензатора хомогено.

Пошто је привлачна сила у пољу E_1 супротног смера од привлачне силе у пољу E_2 , укупна капацитивна (електрична) сила која делује на мерну масу је:

$$F_c = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A (E_1^2 - E_2^2). \quad (3.12)$$

Ако се у једначину (3.12) замене следеће једнакости:

$$\begin{aligned} U_1 &= V - (V_p + V_d(t)), \\ U_2 &= (V_p + V_d(t)) - (-V), \\ s_1 &= d - x, \\ s_2 &= d + x, \end{aligned} \quad (3.13)$$

добија се:

$$F_c = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A \left(\frac{V^2 - 2VV_t + V_t^2}{(d-x)^2} - \frac{V^2 + 2VV_t + V_t^2}{(d+x)^2} \right). \quad (3.14)$$

Због високе фреквенције напона $V_d(t)$ одређује се усредњена сила која се може представити изразом:

$$\hat{F}_c = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A \left(\frac{V^2 - 2VV_p + \hat{V}_t^2}{(d-x)^2} - \frac{V^2 + 2VV_p + \hat{V}_t^2}{(d+x)^2} \right), \quad (3.15)$$

где је \hat{V}_t усредњена вредност V_t у неком временском интервалу и једнака је:

$$\hat{V}_t = V_p^2 + \hat{V}_d^2, \quad (3.16)$$

при чему је \hat{V}_d^2 средња квадратна вредност напона V_d .

Једначина (3.15) је нелинеарна функција од V и x , али за $x = 0$ она постаје линерна функција од V . Развојем у ред у околини $x = 0$, уз занемаривање чланова вишег реда, једначина (3.15) постаје:

$$\hat{F}_c(V, x) = -\frac{2 \varepsilon_0 A}{d^2} \left(VV_p - \frac{x}{d} \hat{V}_t^2 \right). \quad (3.17)$$

Напон V се контролише и мери преко повратне спреге са PID контролером и једнак је:

$$V(x) = K_{PID}\omega_0^2 \left(\frac{\dot{x}}{\omega_d} + x + \omega_i \int_0^t x dt \right), \quad (3.18)$$

где су K_{PID} укупно појачање PID контролера, ω_0 сопствена учестаност контролера, ω_i карактеристична учестаност интегратора и ω_d карактеристична учестаност диференцијатора.

Када се ЕА излаже некој спољашњој сили F_{ext} која је резултанта гравитационих и неконзервативних сила које делују на сателит, контролни напон V се подешава тако да је мерна маса у свом номиналном положају. На њу делују спољашње силе и електричне силе унутар акцелерометра, па једначина њеног кретања гласи:

$$M\ddot{x} = F_{ext} - F_c(V(x), x). \quad (3.19)$$

Увођењем једначина (3.17) и (3.18) у (3.19) добија се релативно убрзање мерне масе у односу на кућиште:

$$\ddot{x} = -\frac{2 \varepsilon_0 A V_p}{M d^2} K_{PID} \omega_0^2 \left(\frac{\dot{x}}{\omega_d} + x + \omega_i \int_0^t x dt \right) + \frac{2 \varepsilon_0 A \hat{V}_t^2}{M d^3} x + \frac{F_{ext}}{M}. \quad (3.20)$$

Због одржавања мерне масе непокретном $\ddot{x} \cong 0$ па је:

$$0 \cong \frac{F_{ext}}{M} - \frac{F_c}{M}. \quad (3.21)$$

Величина која се мери на акцелерометру је контролни напон који се доводи на мерну масу да би она била у номиналном положају. С обзиром да је одступање од равнотежног положаја, \square , веома мало, једначина (3.20) **Error! Reference source not found.** постаје:

$$\frac{F_c}{M} \approx \frac{2 \varepsilon_0 A V_p}{M d^2} K_{PID} \omega_0^2 \left(\frac{\dot{x}}{\omega_d} + x + \omega_i \int_0^t x dt \right) = \frac{2 \varepsilon_0 A V_p}{M d^2} V(x) = \frac{F_{ext}}{M}, \quad (3.22)$$

односно:

$$\frac{F_{ext}}{M} = a \approx G_{el} V(x) \quad (3.23)$$

при чему је G_{el} електростатичко појачање, односно константа сразмерности којом треба помножити контролни напон да би се изражавао као релативно убрзање мерне масе у односу на електроде под дејством спољашњих сила. Једначина (3.21) показује да вредност електростатичког појачања зависи од масе и димензија мерне масе, од номиналне димензије процепа и поларизационог напона. Изведена једначина представља статички модел акцелерометра.

Детекција положаја мерне масе врши се преко мерења разлика капацитивности између мерне масе и одговарајућих електрода. Мерни капацитивни мостови, који се за то користе, раде на фреквенцији од 100 kHz, а актуатор који врши контролу напона на сензору ради на 1024 Hz (да би се контролисао положај мерне масе). У језгру постоје механички одстојници, како би се спречио директан контакт мерне масе и електрода кућишта. Најмање растојање мерне масе и кућишта дуж X-осе износи 15 μm , а дуж Y и Z-оса по 30 μm . Овим се минимизирају удари на мерну масу услед вибрација током

лансирања сателита и за време тестирања. Једина механичка веза између мерне масе и кућишта је златна жица дебљине 5 μm која омогућава поларизацију мерне масе.

Што се тиче осетљивости и тачности постоје два начина рада ЕА, и то аквизициони и научни. Поларизациони напон V_p може бити 27 V у аквизиционом и 7.5 V у научном режиму. Простопериодични напон V_d има фреквенцију 100 kHz и практично представља носећи сигнал при одређивању капацитивности сензора и омогућава „lock-in“ детекцију кретања мерне масе. Има ефективну вредност 1.3 V у аквизиционом и 7.6 V у научном режиму. Аквизициони режим омогућава детектовање већег опсега положаја мерне масе, али нема оптималну резолуцију. Одабрани V_p успешно покреће мерну масу ка центру кућишта у свим могућим случајевима спољашњег убрзања и почетног положаја мерне масе. Научни мерни режим даје високу резолуцију детектованог сигнала, и тако омогућава да сензор ради са максималном осетљивошћу када је сателит у орбити.

ПОГЛАВЉЕ 4

РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ПОТЕНЦИЈАЛА УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

Одређивање облика Земље и њеног спољашњег, стационарног гравитационог поља коришћењем података прикупљених на површини Земље или у њеној околини представља решење проблема граничних вредности. У зависности од података датих на граничној површи, као и од врсте и броја непознатих функција које треба решити, постоје различите формулације геодетских проблема граничних вредности (Sansò & Rummel, 1997; Wang, 2016).

Гранични услов повезује мерену величину са аномалијским потенцијалом, па се решавање проблема граничних вредности своди на решавање проблема одређивања аномалијског потенцијала.

Постоје два класична приступа која се користе при апроксимацији гравитационог поља Земље, то јест при решавању проблема одређивања аномалијског потенцијала. Први је параметарски (*model approach*), а други је операциони приступ (*operational approach*).

Параметарски приступ подразумева одређивање аномалијског потенцијала из резултата опажања само једне величине познате у свим тачкама области, док операциони приступ подразумева једновремено одређивање аномалијског потенцијала из резултата опажања низа величина које су познате у коначном броју тачака (Odalović, 2005).

У основи, параметарски приступ састоји се од формулисања математичког модела у облику геодетског проблема граничних вредности, користећи аналитичко гледиште и примењујући га кроз поступак дискретизације. Развијене су бројне технике за решавање геодетских граничних проблема, нпр. сферно-хармонијски развој, Стоксово решење и решење Молоденског (Sansò, 1987).

Стоксово решење и решење Молоденског спадају у директне параметарске методе одређивања аномалијског потенцијала и подразумевају познавање убрзања теже у великом броју тачака. У поменутих моделима, аномалијски потенцијал представљен је као директна функција параметра који се опажа. Индиректни параметарски приступ подразумева представљање аномалијског потенцијала преко параметара који су функција величине која се опажа.

Операциони приступ полази од стварних мерења, након чега се успоставља општи принцип процене који користи информације о статистичком понашању непознатих (Sansò, 1987). Овај приступ доводи до колокације, која представља технику за комбиновање података различитих врста у циљу добијања оптималне процене сигнала

гравитационог поља и других параметара. Метод не зависи од расподеле података, иако је пожељно креирати правилну дистрибуцију података (Li, 1996).

Ни једна од поменутих метода моделирања гравитационог поља не решава проблем при ком се комбинују различити типови података са различитим резолуцијама и различитом густином прикупљених података у посматраном подручју, са различитим висинама на које се односе и различитим нивоима шума сигнала гравитационог поља који су последица различитих поступака мерења и различитих технологија. Да би се решили ти проблеми, треба применити мултирезолуцијски приступ.

Конвенционална метода за обраду поменутих података, која истовремено комбинује податке са различитим резолуцијама, је колокација. Проблем употребе колокације је тај што она узима у обзир само просторну корелацију, а не резолуцијску корелацију података. На пример, када процењује сигнал при једној резолуцији из мерења при другој резолуцији, колокација узима у обзир само растојање између две тачке у две различите резолуције. Информације у вези са резолуцијом се не користе. Један од начина за превазилажење овог проблема је коришћење мултирејт система или таласића, чиме се, пре примене колокације, мерења на различитим нивоима резолуције трансформишу на исти ниво резолуције. Основна идеја која стоји иза таласића је разлагање података на различите фреквенцијске компоненте (Daubechies, 1992; Li, 1996). Други начин, који је развила геодетска заједница, и који представља врсту наивног мултирезолуцијског приступа је „*remove-restore*“ метода. Ову методу карактерише одвојено третирање доприноса сигнала са различитим спектралним опсегом (Sansò et al., 2009)

Шварц¹ је класификовао информације о гравитационом пољу у четири категорије: нискофреквентни део, део средње фреквенције, високофреквентни део и део врло високе фреквенције. У погледу резолуције, први део одговара ниској резолуцији, док комбинација прва два, прва три и сва четири дела одговара средњој резолуцији, високој резолуцији и врло високој резолуцији, респективно (Schwarz, 1984).

Табела 4-1 резимира тип података који одговарају одређеној резолуцији и сигнале гравитационог поља који се могу одредити.

¹ Klaus Peter Schwarz (1938–2012)

Табела 4-1: Резолуција сигнала гравитационог поља (Li, 1996)

Резолуција (Фреквенција)	Врсте мерења – тип података	Величине гравитационог поља
Ниска	Опажање поремећаја сателитских орбита	Ундулација геоида Аномалија убрзања теже
Средња	Алтиметријски подаци Средње аномалије теже (1° • 1°) и (20' • 20') SGG i SST подаци	Ундулација геоида Аномалија убрзања теже Одступања вертикале Други изводи аномалијског потенцијала
Висока	Средње аномалије убрзања теже (5' • 5') Одступање вертикала Гравиметријски и градиометријски подаци са авионских платформи	Аномалија убрзања теже Поремећај убрзања теже Одступања вертикале Други изводи аномалијског потенцијала
Веома висока	Градиометријски подаци са авионских платформи Подаци о висинама (1 km • 1 km)	Аномалија убрзања теже Одступања вертикале Други изводи аномалијског потенцијала

4.1 РЕШЕЊЕ НА ОСНОВУ САТЕЛИТСКИХ ОПАЖАЊА

На сличан начин као што је гравитациони потенцијал Земље представљен редом **Error! Reference source not found.**, аномалијски потенцијал је на основу глобалног геопотенцијалног модела и сферних хармоника дат са:

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{R_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [\delta\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \delta\bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (4.1)$$

где је:

- GM – производ гравитационе константе и масе Земље,
- R_e – екваторијални полупречник Земље,
- n – степен коефицијената сферно-хармонијског развоја,
- m – ред коефицијената сферно-хармонијског развоја,
- r – радијално растојање тачке рачунања од геоцентра,
- θ – геоцентрична колатитуда тачке рачунања,
- λ – геоцентрична лонгитуда тачке рачунања,
- N_{max} – највећи степен реда глобалног геопотенцијалног модела,
- \bar{P}_{nm} – нормализоване придружене Лежандрове функције (полиноми) степена и реда n и m и
- $\delta\bar{C}_{nm}, \delta\bar{S}_{nm}$ – разлика коефицијената стварног потенцијала теже и нормалног потенцијала теже (Li, 1996).

У случају сателитских глобалних геопотенцијалних модела, коефицијенти сферних хармоника добијају се анализом поремећаја путање сателита, док се у случају комбинованих модела, коефицијенти рачунају на основу параметара пертурбација орбите и терестричких података убрзања силе Земљине теже.

У табели 4-2 дат је највећи степен развоја (N_{max}) и резолуција (\mathcal{R}) најчешће коришћених глобалних геопотенцијалних модела.

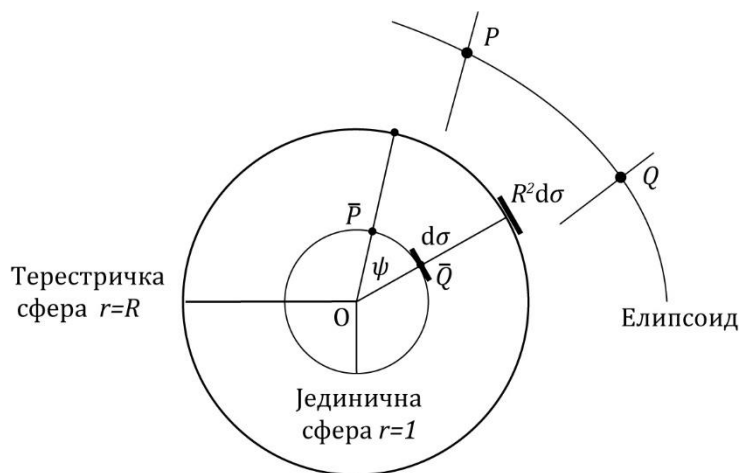
Табела 4-2: Карактеристике најчешће коришћених глобалних геопотенцијалних модела

GGM	$\square_{\square\square\square}$	\mathcal{R}
EGM96 ¹	360	15' • 15'
EGM2008 ²	2190	2.5' • 2.5'

4.2 СТОКСОВО РЕШЕЊЕ И РЕШЕЊЕ МОЛОДЕНСКОГ

Стоксова теорија подразумева одређивање површи геоида S на основу аномалија убрзања које се односе на површ геоида и представљају разлику убрзања на геоиду и убрзања на елипсоиду, при чему се за референтну површ усваја елипсоид S' .

Стоксова формула важи за референтни елипсоид који има исти потенцијал као геоид, обухвата масу која је нумерички једнака Земљиној маси и има центар у тежишту Земље (Слика 4.1).



Слика 4.1: Нотација за Стоксову формулу

Када су аномалије убрзања познате на површи геоида, рачунање аномалијског потенцијала у свакој тачки изван Земље могуће је употребом Стоксове интегралне формуле:

¹ Earth Gravitational Model 96 – Гравитациони модел Земље 96

² Earth Gravitational Model 2008 – Гравитациони модел Земље 2008

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(r, \psi) d\sigma, \quad (4.2)$$

где су (r, θ, λ) сферне координате тачке у којој се одређује аномалијски потенцијал, ψ сферно растојање између тачке рачунања и померајуће тачке (елемент површине $d\sigma$ за који је аномалија убрзања Δg позната), σ јединична сфера, а $S(r, \psi)$ је Стоксова функција (Стоксово језгро) облика:

$$S(r, \psi) = \frac{2R}{l} + \frac{R}{r} - 3 \frac{Rl}{r^2} - \frac{R^2}{r^2} \cos \psi \left(5 + 3 \ln \frac{R - R \cos \psi + l}{2r} \right). \quad (4.3)$$

На површи терестричке сфере, односно на геоиду важи (Moritz, 1972):

$$r = R \quad \text{и} \quad l = 2R \sin \frac{\psi}{2}, \quad (4.4)$$

па Стоксова функција постаје:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \left(\frac{\psi}{2} \right)} - 6 \sin \left(\frac{\psi}{2} \right) + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \left(\frac{\psi}{2} \right) + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right). \quad (4.5)$$

Приказане формуле подразумевају сферну апроксимацију. Усваја се хармонијски аномалијски потенцијал изван геоида што подразумева уклањање маса, односно редукцију теже.

Стоксова функција, која се често назива језгро, може бити поједностављена увођењем раванске апроксимације, након чега и рачунање аномалијског потенцијала и његових функционала постаје једноставније.

Главно ограничење употребе Стоксове интегралне формуле је редукција мереног убрзања теже на ниво геоида, која је неопходна при употреби формуле, а која укључује претпоставке о густини маса изнад геоида. То је уједно и био разлог увођења теорије Молоденског. Његово решење теоретски превазилази проблем редукције теже и померања маса унутар геоида на тај начин што се користе аномалије убрзања које се односе на ФПЗ.

Теорија Молоденског подразумева одређивање физичке површи Земље S , на основу аномалија убрзања које се добијају као разлика убрзања на површи Земље и нормалног убрзања одговарајуће тачке на телуриду. Теорија Молоденског усваја телуриод Σ за референтну површ на којој је задовољен гранични услов и омогућава одређивање аномалијских висина и квазигеоида.

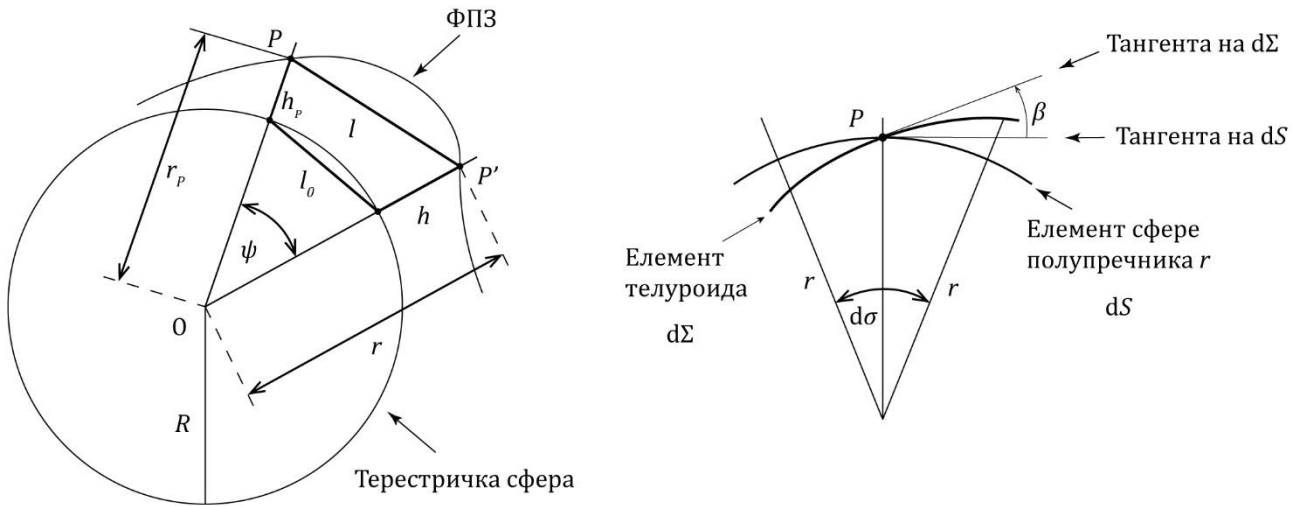
Молоденски је добио решење представљајући аномалијски потенцијал као потенцијал површинског слоја на Земљиној површи, или са истом тачношћу, на телуриду Σ :

$$T = \iint_{\Sigma} \frac{\phi}{l} d\Sigma, \quad (4.6)$$

и трансформишући гранични услов (1.66) у интегралну једначину:

$$2\pi\phi \cos \beta - \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial h_p} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{1}{\gamma_p} \frac{\partial \gamma}{\partial h_p} \frac{1}{l} \right] \phi \, d\Sigma = \Delta g, \quad (4.7)$$

где је h висина изнад елипсоида, а h_p висина референтне тачке P (тачка рачунања) на коју се односе аномалијски потенцијал и гранични услов, угао β је угао између вертикале и површинске нормале и представља нагиб терена, l је растојање између P и елемента површине $d\Sigma$, ϕ је дефинисано на површи телуроида и једнако је производу површинске густине и гравитационе константе (Слика 4.2).



Слика 4.2: Нотација за решење Молоденског

Може се показати да је решење Молоденског, након увођења сферне апроксимације (Слика 4.2):

$$\begin{aligned} r_p &= h_p + R, \\ r &= h + R, \\ l &= \sqrt{r_p^2 + r - 2 r_p r \cos \psi}, \\ d\Sigma &= r^2 \sec \beta \, d\sigma, \end{aligned} \quad (4.8)$$

и раванске апроксимације (Слика 4.3):

$$r = r_p = R, \quad (4.9)$$

дато у облику реда:

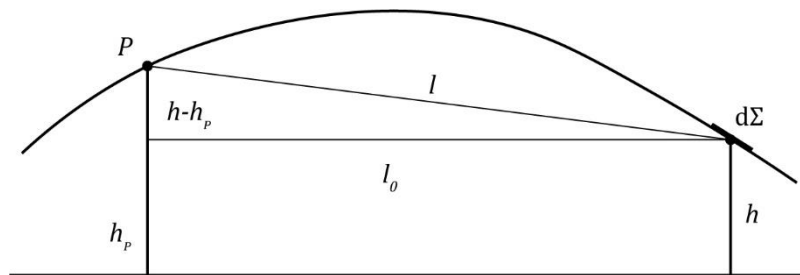
$$T = T_0 + T_1 + T_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} T_n, \quad (4.10)$$

где су:

$$\begin{aligned}
T_0 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_0 S(\psi) d\sigma, \\
T_1 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_1 S(\psi) d\sigma, \\
T_2 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_2 S(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{2} \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)}{l_0^3} \chi_0 d\sigma, \\
T_3 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_3 S(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{2} \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)}{l_0^3} \chi_1 d\sigma, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{4.11}$$

при чему је:

$$\begin{aligned}
G_0 &= \Delta g, \\
G_1 &= R^2 \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)}{l_0^3} \chi_0 d\sigma, \\
G_2 &= R^2 \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)}{l_0^3} \chi_1 d\sigma - \frac{3R}{4} \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)^2}{l_0^3} \chi_0 d\sigma + 2\pi \chi_0 \tan^2 \beta, \\
G_3 &= R^2 \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)}{l_0^3} \chi_2 d\sigma - \frac{3R}{4} \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)^2}{l_0^3} \chi_1 d\sigma - \\
&\quad - \frac{3}{2} R^2 \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)^3}{l_0^5} \chi_0 d\sigma + 2\pi \chi_1 \tan^2 \beta. \\
&\dots
\end{aligned} \tag{4.12}$$



Слика 4.3: Раванска апроксимација

У приказаним формулама l_0 је дато са:

$$l_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2}, \tag{4.13}$$

док је χ дато са:

$$\chi = \frac{\phi}{\cos \beta}. \quad (4.14)$$

Први члан реда (4.10) није ништа друго до Стоксов интеграл.

Један од разлога зашто се Стоксова интеграција више користи у практичним применама од интеграла Молоденског је тај што се употребом Стоксове формуле добијају геоидне висине и геоид, док решење Молоденског даје аномалије висина и квазигеоид.

4.3 КОЛОКАЦИЈА ПО МЕТОДИ НАЈМАЊИХ КВАДРАТА

Интегралне формуле, попут Стоксове и формуле Молоденског, користе једну врсту података за апроксимацију осталих елемената гравитационог поља. Међутим, често су доступни различити типови података који садрже корисне информације у вези са гравитационим пољем.

Колокација по методи најмањих квадрата је математички алат који су развиле геодете Мориц¹ и Краруп². Њен развој започет је као статистичка интерполација аномалија убрзања теже, након чега је, приликом истраживања везе између изравнања и предикције по методи најмањих квадрата, принцип генерализован на различите врсте података, да би на крају, поред предикције сигнала гравитационог поља тамо где мерења нису извршена, колокација довела до решавања ширег скупа проблема који укључује и оцену параметара који представљају систематске ефекте (Moritz, 1972).

Колокација је једна од метода која може користити различите врсте података за предикцију других величина гравитационог поља. Иако има статистичко порекло, ова метода може се сматрати и чисто аналитичком методом апроксимације (Moritz, 1978).

Математички модел колокације по методи најмањих квадрата може се приказати у облику:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t} + \mathbf{n}, \quad (4.15)$$

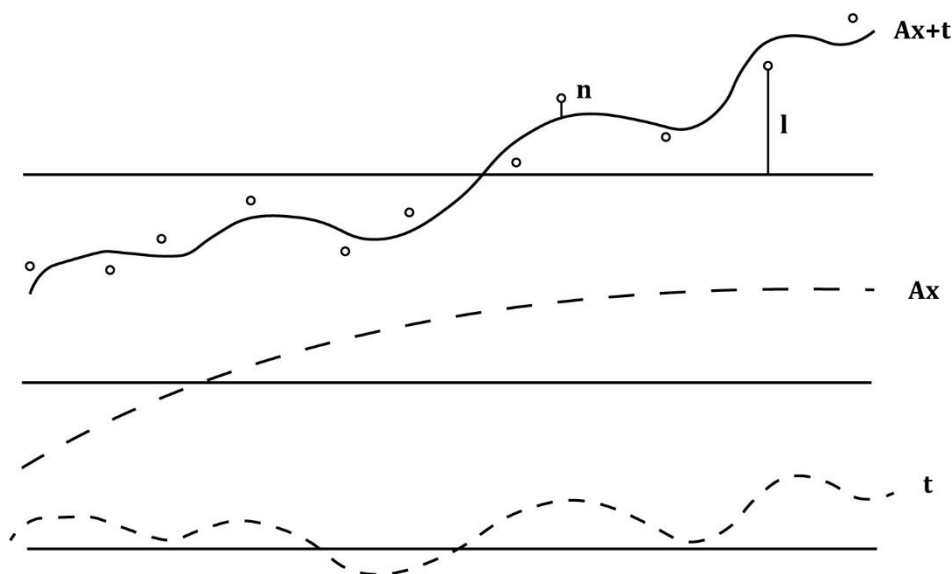
где је \mathbf{l} вектор q мерења, \mathbf{x} вектор m параметара (непознатих), \mathbf{A} позната матрица дизајна (матрица коефицијената), димензија $q \times m$, \mathbf{t} вектор сигнала, а \mathbf{n} вектор шума, односно вектор грешака мерења.

Такав модел приказује мерења са својом систематском (детерминистичком) компонентом $\mathbf{A}\mathbf{x}$ и две случајне (стохастичке) компоненте \mathbf{t} и \mathbf{n} . Систематски део се најчешће састоји од нелинераних функција веза које се линеаризују, то јест своде се на линеарни облик развијањем у Тејлоров ред у околини приближних вредности параметара.

Модел **Error! Reference source not found.** може се визуализовати и рашчланити као што је приказано на слици 4.3. Модел омогућава одређивања криве $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t}$, на основу дискретних мерења \mathbf{l} , која су оптерећена случајним грешкама мерења \mathbf{n} .

¹ Helmut Moritz (1933–)

² Torben Krarup (1919–2005)



Слика 4.3 Модел колокације по методи најмањих квадрата

Члан **Ax** је једноставна, регуларна крива, која представља линеарну или линеаризовану функцију параметара **x**. Овај систематски део једначине **Error! Reference source not found.** осликава генерални тренд феномена, док је сигнал **t** функција која неправилно осцилује око нуле и репрезентује континуиране неправилне флукуације феномена. За разлику од сигнала **t**, друга случајна компонента модела, случајна грешка мерења **n**, појављује се само у тачкама у којима је мерено и стога је дискретна величина (Moritz, 1980).

Ако одређивање параметра **x** посматрамо као изравнање, уклањање шума **n** као филтрирање, а одређивање сигнала **t** у произвољним тачкама у којима мерења нису извршена као предикцију, онда модел колокације по методи најмањих квадрата комбинује изравнање, филтрирање и предикцију (интерполацију и екстраполацију).

Решења модела **Error! Reference source not found.** са грешкама коваријационих матрица, добијено на основу услова минимума:

$$\mathbf{t}^T \mathbf{C}_{tt}^{-1} \mathbf{t}^T + \mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{n}^T = \min, \quad (4.16)$$

може се наћи у (Moritz, 1980). У горњој формули \mathbf{C}_{tt} и \mathbf{C}_{nn} су коваријационе матрице сигнала и шума.

4.4 „REMOVE-RESTORE“ METODA

„Remove-restore“ метода, као врста мултирезолуцијског приступа, омогућава комбиновање терестричких и сателитских метода и подразумева нешто једноставнију поделу од поделе приказане у табели 3-2. Ова метода незаменљива је при локалном моделирању гравитационог поља.

Аномалијски потенцијал и његови функционали се у поступку „remove-restore“ методе посматрају као сигнали које је могуће разложити на нискофреквентну, средњефреквентну и високофреквентну компоненту. Односно, сваки функционал аномалијског потенцијала могуће је представити у облику збира дуготаласне, средњеталасне и краткоталасне карактеристике:

$$t = t' + t'' + t''', \quad (4.17)$$

а свака од карактеристика, сагласно својој резолуцији, подразумева одређен степен промене укупне вредности функционала (Odalović, 2005; Odalović, 2010).

Метода подразумева различито третирање делова сигнала са различитим спектралним опсегом. Прво се врши уклањање дела сигнала који генерише глобални и претпостављени топографски модел, након чега се из неуклоњених делова сигнала неком од метода моделирања одређују средњеталасне компоненте функционала аномалијског потенцијала, да би се на крају извршило враћање ефекта уклоњених делова. Дакле, приликом примене „*remove-restore*“ методе истовремено се користи GGM за дуже таласне дужине и топографско-изостатички модел за краће таласне дужине.

„*Remove-restore*“ метода састоји се од следећих корака:

1. Отклањање (*remove*) – на основу познавања физичких особина функционала аномалијског потенцијала из резултата опажања отклања се део који је могуће математички моделирати (дуготаласне и краткоталасне карактеристике). Део који остаје представља средњеталасну карактеристику и назива се резидуални функционал.
2. Пресликавање (*compute*) – на основу теоријски дефинисаних веза између аномалијског потенцијала и његових функционала могуће је одредити резидуалну вредност функционала, односно моделирати средњеталасну карактеристику.
3. Враћање (*restore*) – одређивање дела функционала који настаје као последица дела резултата опажања елиминисаних у фази отклањања и његово додавање на вредности које су одређене у фази пресликавања, то јест одређивање краткоталасних и дуготаласних карактеристика функционала и њихово додавање моделираној средњеталасној карактеристици.

Резидуалне вредности резултата опажања функционала аномалијског потенцијала морају испуњавати два услова:

- да имају средњу вредност која је приближно једнака нули и
- да је стандардна девијација резидуала мања од стандарне девијације резултата мерења.

Дуготаласна карактеристика

Дуготаласна карактеристика одређује се коришћењем глобалних геопотенцијалних модела. Израз за одређивање дуготаласне карактеристике аномалијског потенцијала у функцији сферних хармоника гласи:

$$T_{GGM} = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}^U_{nm}) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (4.18)$$

где су \bar{J}'_{nm} и \bar{K}'_{nm} емпиријске вредности коефицијента глобалног модела, док је \bar{J}^U_{nm} коефицијент сферно-хармонијског развоја нормалног потенцијала.

Коефицијенте нормалног поља довољно је узимати до осмог степена развоја (Odalović, 2010).

На основу теоријски дефинисаних веза аномалијског потенцијала и његових линеарних функционала, могу се извести изрази за дуготаласне карактеристике функционала.

Примера ради, израз за ундулацију геоида следи из Брунсове формуле:

$$N_{GGM} = \frac{GM}{\gamma_0 r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [\delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (4.19)$$

На сличан начин добија се израз за аномалију убрзања:

$$\Delta g_{GGM} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{N_{max}} (n-1) \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [\delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (4.20)$$

Тачност дуготаласне карактеристике аномалијског потенцијала и функционала аномалијског потенцијала зависи од степена и реда глобалног модела, као и од тачности коефицијента глобалног модела који су, с друге стране, продукт квалитета самих података коришћених за креирање глобалног геопотенцијалног модела.

Краткоталасна карактеристика

Гравитациони утицај топографских маса одражава се на краткоталасни део сигнала (гравитационог поља). Уклањањем овог утицаја из резултата опажања, сигнал постаје углађен, чиме се поједностављује моделирање средњеталасне карактеристике.

Поступак којим се из резултата мерења теже на површини Земље добија тежа на геоиду назива се редукција убрзања теже. Који ће се модел топографских маса користити зависи од конкретног случаја.

Ефекат топографије на аномалијски потенцијал и његове функционале може се одредити на више начина. Примера ради, класично решење помоћу Стоксове формуле претпоставља да изнад геоида нема топографских маса и да се улазне аномалије убрзања односе на геоид.

Ефекат топографских маса рачуна се коришћењем Њутновог закона гравитације. Пошто је топографија неправилна, и у погледу геометрије, и у погледу густине, топографске масе деле се на елементарна тела за која постоје затворена решења интеграла (Nagy et al., 2000). Нарочито је погодна подела топографије на правилне призме константне густине из разлога што су топографске висине, потребне за решавање интеграла, данас доступне у форми дигиталних модела терена (Torge, 2001).

С обзиром да је, с једне стране, утицај локалних маса другачији од утицаја удаљених топографских маса и да је, с друге стране, њихов утицај различит на различите функционале аномалијског потенцијала, могућ је један начин моделирања при одређивању краткоталасних карактеристика једног функционала, док је при одређивању другог функционала аномалијског потенцијала дозвољен потпуно другачији третман топографије (Odalović, 2010).

Средњеталасна карактеристика

Три најзаступљеније методе за одређивање средњеталасних карактеристика аномалијског потенцијала, а самим тим и линеарних функционала аномалијског потенцијала, приказане су оквиру овог поглавља. То су Стоксово решење и решење

Молоденског, када се располаже искључиво подацима гравиметријског премера, и колокација по методи најмањих квадрата, када су расположиви подаци хетерогени.

У случају примене Стоксовог решења процес „*remove-restore*“ методе нешто је другачији, што представља последицу третирања утицаја топографије, односно последицу редукције резултата мерења убрзања теже.

Масе изнад геоида се отклањају, кондензују на површ геоида или се пребацују унутар геоида, након чега изнад геоида нема маса. Утицај топографије садржан је у самој вредности аномалије теже. Из тог разлога се неће директно појавити одређивање краткоталасних карактеристика. Поред тога, приликом редукције појављује се индиректни ефекат, који се мора додатно моделирати након одређивања средњеталасних карактеристика. С обзиром да се подразумева сферна апроксимација при примени Стоксове формуле, неопходно је рачунање и додавање одговарајућих елипсоидних корекција на крају процеса (Odalović, 2010).

Приликом моделирања средњеталасних карактеристика коришћењем колокације, услов центрираности аномалијског потенцијала и његових функционала није испуњен у локалном подручју, где резултати опажања поседују тренд, па је колокацију могуће применити тек након моделирања и елиминације тренда. Пошто није потребно вршити никакве редукције резултата, након елиминације тренда и применом модела одређују се средњеталасне карактеристике (Odalović, 2010).

4.5 УТИЦАЈ ТОПОГРАФИЈЕ НА УБРЗАЊЕ СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

Постоји више техника редукције убрзања теже, које се разликују у зависности од начина на који се поступа са топографским масама изнад геоида. Свака техника редукције убрзања теже третира топографију на другачији начин. У теорији, све редукције убрзања теже еквивалентне су у погледу решења, под условом да се одговарајући индиректни ефекат узима у обзир правилно и доследно (Heiskanen & Moritz, 2000).

Избор методе зависи од величине индиректног ефекта, глаткоће и величине насталих аномалија и њиховог геофизичког значења.

У геодезији се користе:

- Бугеова¹ редукција,
- топографско-изостатичке редукције (Прат²-Хајфордова³, Ејри⁴-Хајсканенова⁵, Венинг Мајнесова⁶),
- резидуални модел терена,
- кондензационе редукције Хелмерта⁷ (прва и друга) и
- инверзна редукција Рудцког⁸.

¹ Pierre Bouguer (1698–1758)

² John Henry Pratt (1809–1871)

³ John Fillmore Hayford (1868–1925)

⁴ George Biddell Airy (1801–1892)

⁵ Veikko Aleksanteri Heiskanen (1895–1971)

⁶ Felix Andries Vening Meinesz (1887–1966)

⁷ Friedrich Robert Helmert (1843–1917)

⁸ Maurycy Pius Rudzki (1862–1916)

ПОГЛАВЉЕ 5

МОДЕЛИРАЊЕ ГРАДИЈЕНТА УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

Вертикални градијент убрзања теже потребно је користити приликом редукције резултата мерења убрзања теже на геоид, која је саставни део гравиметријског одређивања геоида, као и при редукцији резултата апсолутног мерења убрзања теже на ниво физичке површи Земље. Прецизне вредности вертикалног градијента убрзања теже потребне су и при редукцији мерења убрзања теже приликом успостављања гравиметријске мреже, чиме се повезују апсолутна и релативна мерења убрзања теже.

На тај начин, теоријски правилна редукција убрзања теже, која подразумева употребу верикалног градијента убрзања теже, омогућава одређивање облика Земље, односно одређивање аномалијског потенцијала и ундулација геоида.

Литература која се тиче вертикалног градијента убрзања теже фокусира се на три аспекта: методе мерења вертикалног градијента, инверзија података мерења вертикалног градијента убрзања теже у податке параметара узрочника (одређивање густине, облика и дубине подземних структура Земље на основу функције везе која се успоставља) и моделирање вертикалног градијента убрзања теже коришћењем аномалија убрзања и дигиталних модела терена (Zhao et al., 2015). Аномалије убрзања и висине, то јест дигитални модел терена подаци су који се најчешће користе при моделирању вертикалног градијента убрзања теже.

Током последњих неколико деценија развијен је низ метода за моделирање градијената коришћењем података о топографским масама. Све методе заснивају се на изводима другог реда гравитационог потенцијала. Најважнији су алгоритми који топографске масе деле на призме или полиедре, а затим сумирају сваки допринос призме или полиедра. Ове методе припадају групи метода коначних елемената. Остале методе користе брзу Фуријеову трансформацију (FFT – *Fast Fourier Transform*) и захтевају правилно распоређене податке (Jekeli & Zhu, 2006; Zhu, 2007).

Одабир методе моделирања градијента убрзања теже зависи од података који се користе приликом моделирања. Тако разликујемо методе моделирања које се заснивају на употреби дигиталних модела терена и методе које се базирају на примени гравиметријских података, као и методе моделирања које подразумевају употребу обе врсте података. У првом случају (када су доступни подаци о висини) користе се методе коначних елемената, брза Фуријеова трансформација, таласићи и сплајн, док се у случају коришћења гравиметријских података примењују колокација, таласићи и сплајн. Уколико су нам доступни и дигитални модели терена (ДМТ) и аномалије убрзања теже, користи се „*remove-restore*“ метода.

Када нам густине маса нису познате, уобичајено је да се усвоји претпоставка о константним густинама топографских маса.

5.1 ОСНОВНИ КОНЦЕПТ

Теоријски правилна редукција мерења убрзања теже, која подразумева употребу верикалног градијента убрзања теже, може се добити развојем у Тејлоров ред:

$$g_0 = g - \frac{\partial g}{\partial h} H \dots, \quad (5.1)$$

при чему је g_0 вредност теже на геоиду, g вредност теже опајана на површи Земље, H ортометријска висина, а $\partial g/\partial h$ вертикални градијент убрзања теже.

Део:

$$F = -\frac{\partial g}{\partial h} H, \quad (5.2)$$

представља редукцију за слободан ваздух на геоид.

У већини практичних примена користи се вертикални градијент нормалног убрзања, који се назива и нормални градијент. Међутим, како показују бројне студије, коришћење вертикалног градијента нормалног убрзања уместо вертикалног градијента убрзања теже може довести до значајних грешака. Одступање верикалног градијента убрзања теже од нормалног градијента у значајној мери зависи од топографских маса. До сада су регистрована одступања и до 88% (Zahorec et al., 2014; Zahorec et al., 2016).

Верикални градијент убрзања теже састоји се од два дела, нормалног и аномалијског дела (Heiskanen & Moritz, 2000):

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial h} + \frac{\partial \Delta g}{\partial h}, \quad (5.3)$$

где је Δg аномалија убрзања теже, а $\partial \Delta g/\partial h$ аномалијски део верикалног градијента убрзања теже.

Услед нехомогености густина маса не може се успоставити тачна формула за израчунавање и извођење вертикалног градијента убрзања теже. Израз **Error! Reference source not found.** указује на то да, ако се вертикални градијент аномалије убрзања може израчунати са одређеном тачношћу, тада се нумеричка апроксимација вертикалног градијента убрзања теже може добити са истом несигурношћу (Zhao et al., 2015).

Како је вертикални градијент једнак другом парцијалном изводу одговарајућег потенцијала по z , израз се може приказати и у облику:

$$W_{zz} = U_{zz} + T_{zz}, \quad (5.4)$$

Нормални потенцијал и други парцијални извод нормалног потенцијала U_{zz} (градијент нормалне теже) рачунају се за одређени (усвојени) елипсоид на основу познатих параметара којима је елипсоид дефинисан. На тај начин, одређивање вертикалног градијента теже W_{zz} своди се на одређивање другог парцијалног извода аномалијског потенцијала T_{zz} .

Методологија моделирања - декомпозиција убрзања теже

Убрзање теже g може се раздвојити на компоненте g_G , g_T и g_A , које редом представљају делове који су последица масе унутар геоида, топографских маса и маса атмосфере (Tenzer, 2004).

С обзиром да је убрзање теже на геоиду g_G једнако збиру нормалног убрзања γ и аномалије теже Δg , декомпозиција теже може се представити следећим изразом:

$$g = \gamma + \Delta g + g_T + g_A. \quad (5.5)$$

Применом горњег разлагања, вертикални градијент убрзања теже дуж вертикале W_{zz} , рачуна се на основу:

$$W_{zz} = U_{zz} + T_{zz}^{\Delta g} + W_{zz}^T + W_{zz}^A, \quad (5.6)$$

где је U_{zz} градијент нормалног убрзања теже, $T_{zz}^{\Delta g}$ градијент аномалије убрзања који представља ефекат маса испод геоида, а W_{zz}^T и W_{zz}^A су градијенти који настају као последица топографских маса и маса атмосфере, тим редом (Tenzer, 2004; Rózsa & Tóth, 2005). Приликом моделирања градијента убрзања теже, атмосферски ефекат се занемарује, с обзиром да је по интензитету много мањи од остала три наведена ефекта (око 10^{-5} E) (Zhu, 2007).

5.2 ВЕРТИКАЛНИ ГРАДИЈЕНТ АНОМАЛИЈЕ ТЕЖЕ

Користећи чињеницу да се потенцијал W може представити збиром нормалног потенцијала U и аномалијског потенцијала T , одређивање вертикалног градијента убрзања теже W_{zz} своди се на одређивање другог парцијалног извода аномалијског потенцијала T_{zz} .

Може се показати да је аномалијски део верикалног градијента убрзања теже $\partial \Delta g / \partial h$ могуће приказати у функцији од аномалије убрзања Δg , ундулације геоида N и компоненти одступања вертикале ξ и η . На тај начин функционали аномалијског потенцијала играју битну улогу у одређивању аномалијског дела верикалног градијента убрзања теже.

Полазећи од Поасоновог интеграла и једначине сферно-хармонијског развоја аномалије убрзања теже, добија се интегрална формула која изражава вертикални градијент аномалије убрзања теже у функцији саме аномалије убрзања Δg (Heiskanen & Moritz, 2000):

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial h} = \frac{1}{16\pi R} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g - \Delta g_P}{\sin^3 \frac{\psi}{2}} d\sigma - \frac{2}{R} \Delta g_P, \quad (5.7)$$

где се Δg_P односи на тачку P у којој се рачуна вертикални градијент аномалије убрзања, док је ψ угловно растојање између тачке рачунања и померајуће тачке (варијабилног елемента $d\sigma$), σ домен интеграције, то јест јединична сфера, а R полупречник терестричке сфере.

Увођењем просторне дужине између фиксне тачке P и варијабилног елемента $R^2 d\sigma$, која је дата у функцији угловног растојања ψ са:

$$l = 2R \sin \frac{\psi}{2}, \quad (5.8)$$

израз (5.7) може се написати и у облику:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial h} = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g - \Delta g_P}{l^3} d\sigma - \frac{2}{R} \Delta g_P. \quad (5.9)$$

Пошто интегранд брзо опада са повећањем дужине l , да би се добио довољно тачан резултат, довољно је спровести интеграцију само у непосредној околини тачке P (за разлику од Стоксове формуле у којој се интеграција спроводи за целу Земљу).

Друга метода за израчунавање вертикалног градијента убрзања теже добија се коришћењем Лапласове једначине примењене на аномалијски потенцијал и основне једначине физичке геодезије у сферној апроксимацији, при чему се вертикални градијент аномалије убрзања теже добија у функцији ундулације геоида и првог и другог хоризонталног извода ундулације:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial h} = \frac{2\gamma}{R^2} N - \frac{\gamma}{R^2} \tan \phi \frac{\partial N}{\partial \phi} + \frac{\gamma}{R^2} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2} + \frac{\gamma}{R^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 N}{\partial \lambda^2}. \quad (5.10)$$

Приказана формула није погодна за практичну примену, јер захтева веома детаљну и тачну карту геоида која, по правилу, никада није доступна. Лако се може показати да се, уз исту апроксимацију, ундулација геоида може заменити аномалијом висина ζ .

Нешто практичнија једначина за рачунање вертикалног градијента аномалије убрзања, дата је изразом:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial h} = -G \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \quad (5.11)$$

и изражава вертикални градијент аномалије убрзања у функцији хоризонталних извода компоненти одступања вертикале.

Још један интегрални приступ дат је у (Rózsa & Tóth, 2005). Вертикални градијент аномалије убрзања дат је (у сферној апроксимацији) са:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r} = \frac{1}{4\pi R} \iint_{\sigma} \Delta g K(r, \psi) d\sigma, \quad (5.12)$$

где је K језгро у функцији сферног растојања ψ и радијус вектора тачке рачунања r , дато са:

$$K(r, \psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+3} \frac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{(n-1)} P_n(\cos \psi). \quad (5.13)$$

Израз (5.13) може се приказати у затвореној форми као:

$$K(t, x) = t^3 \left(6t^2 \frac{(x-t)^2}{L^5} + t \frac{11x-13t}{L^3} + \frac{16}{L} - 18L + 18tx \ln \frac{2}{M} - 45tx + 2 \right), \quad (5.14)$$

где је:

$$\begin{aligned} t &= \frac{R}{r}, \\ x &= \cos \psi, \\ L &= 1 - 2tx + t^2, \\ M &= 1 + L - tx, \\ r &= R + H, \end{aligned} \quad (5.15)$$

R је полупречник Земље, H је висина хоризонталне површи за коју се рачуна вертикални градијент, док је ψ сферно растојање између тачке рачунања и померајуће тачке.

5.3 МЕТОДЕ МОДЕЛИРАЊА ВЕРТИКАЛНОГ ГРАДИЈЕНТА УБРЗАЊА ТЕЖЕ

Методе рачунања вертикалног градијента убрзања теже можемо поделити у три групе (врсте).

Прва врста су методе моделирања које дају градијенте убрзања гравитационе силе на основу директне примене Њутнове теорије гравитационог потенцијала. Ту спадају методе које топографске масе деле на призме, или генерално, полиедре, при чему се рачуна други извод гравитационог потенцијала за сваку од призми, а укупан градијент убрзања гравитационе силе добија се сумирањем утицаја свих призми (Zhao et al., 2015).

Усвајајући одређени модел густина Земљине коре, израчунава се гравитациони утицај маса изнад елипсоида користећи различите апроксимације Њутнових интеграла. С обзиром да је тешко моделирати густине маса тела Земље, апроксимације подразумевају одговарајуће грешке у моделу градијената које су последица грешака модела густина (Jekeli & Zhu, 2006).

Један од најчешће коришћених типова података, чијом применом се добија гравитациони утицај топографских маса, је дигитални модел терена. Резолуција и тачност ДМТ-а одређује тачност моделирања вертикалног градијента убрзања теже.

Методе прве групе полазе од добро познатог израза за потенцијал убрзања теже дат са:

$$W = V + \Phi = G \iiint_v \frac{\rho(Q)}{l_{PQ}} dv_Q + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (5.16)$$

где је P тачка рачунања, са правоугаоним координатама (x, y, z) , Q тренутна тачка интеграције са познатом висином из дигиталног модела терена, $\rho(Q)$ густина у тачки Q , $dv_Q = dx_Q dy_Q dz_Q$ елемент запремине, а l_{PQ} растојање између тачака P и Q .

Како је рачунање другог парцијалног извода центрифугалног потенцијала једноставно, одређивање градијента убрзања теже своди се на рачунање другог извода

гравитационог потенцијала по координатним осама након чега се добијају елементи гравитационог тензора:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Другој групи припадају методе које се заснивају на решењима граничног проблема теорије потенцијала. У ове методе спада Стоксово решење. Двоструком диференцијацијом интеграла који повезује аномалијски потенцијал и аномалије убрзања, добија се тражени израз за везу између аномалија убрзања и елемената гравитационог тензора. Верикални градијент добијен применом ове методе представљен је следећим изразом:

$$\frac{\partial \Delta g_r}{\partial r} = T_{rr} = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial^2 S(r, \psi)}{\partial r^2} \Delta g \, d\sigma, \quad (5.18)$$

при чему је спектрални облик другог радијалног извода Стоксовог језгра дат са:

$$\frac{\partial^2 S(r, \psi)}{\partial r^2} = S_{rr} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} t^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{r^2} P_n(x), \quad (5.19)$$

док је затворени облик језгра (Kern & Haagmans, 2005):

$$S_{rr} = \frac{t^3}{R^2} \left[(1-tx) \left(\frac{3(1-t^2)}{D^5} - \frac{4}{D^3} \right) - \frac{(1+t^2)}{D^3} + \frac{14}{D} - 18D + 2 \right. \\ \left. - 3tx \left(15 + 6 \ln \frac{1-tx+D}{2} \right) + \frac{4(1-t^2)}{D^3} \right], \quad (5.20)$$

при чему је:

$$t = \frac{R}{r}, \\ D = \sqrt{1 - 2tx + t^2}, \\ x = \cos \psi. \quad (5.21)$$

За израчунавање израза (5.19) потребно је познавање аномалија убрзања за целу Земљу, што никада не може бити испуњено. Да би се применила формула за аномалијски потенцијал и његове парцијалне изводе, увек се примењује „remove-restore“ метода.

Трећа метода је комбинована метода („remove-restore“). Ова метода подразумева различито третирање делова сигнала са различитим спектралним опсегом, односно одвојено третирање делова градијента убрзања теже који су садржани у глобалном геопотенцијалном моделу и делова који су последица постојања топографских маса, као

и моделирање средњеталасне карактеристике, односно резидуалне вредности градијента убрзања теже.

Рачунање градијента убрзања теже врши се комбиновањем решења из три извора: глобалног геопотенцијалног модела, аномалије убрзања и топографских маса представљених дигиталним моделом терена. Уклањање гравитационог ефекта топографских маса (краткоталасна карактеристика) и доприноса глобалног геопотенцијалног модела (дуготаласна карактеристика), омогућава моделирање средњеталасне карактеристике градијента убрзања теже, након чега се враћају претходно уклоњени ефекти, али сада у погледу вертикалног градијента убрзања теже.

На тај начин рачунање вертикалног градијента убрзања теже приказује се као:

$$W_{zz} = U_{zz} + T_{zz}^{GGM} + T_{zz}^{RES} + W_{zz}^{DEM}, \quad (5.22)$$

где је U_{zz} вертикални градијент нормалног убрзања за који се усваја вредност од 3086 E, односно 0.3086 mGal/m, T_{zz}^{GGM} градијент аномалије убрзања који се може израчунати на основу глобалног геопотенцијалног модела, T_{zz}^{RES} резидуални градијент убрзања теже који се рачуна применом Стоксовог интеграла, а W_{zz}^{DEM} ефекат топографских маса срачунат на основу дигиталног модела терена.

На основу развоја аномалијског потенцијала у ред сферних хармоника (4.1), добија се други парцијални извод аномалијског потенцијала у правцу нормале, односно градијент аномалије убрзања теже који се може израчунати на основу глобалног геопотенцијалног модела:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial r}\right)^{GGM} &= \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)^{GGM} = T_{zz}^{GGM} = \\ &= \frac{GM}{r^3} \sum_{n=2}^{N_{max}} (n+1)(n+2) \left(\frac{R_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \theta), \end{aligned} \quad (5.23)$$

где су (r, λ, θ) (сферне) геоцентричне координате, R_e полупречник Земље у равни екватора, \bar{C}_{nm}^* разлика између ортонормираних коефицијената и коефицијената нормалног поља, \bar{S}_{nm} ортонормирани коефицијенти, $\bar{P}_{nm}(\sin \theta)$ ортонормиране придружене Лежандрове функције (Zhao et al., 2015).

5.4 МОДЕЛИРАЊЕ ВЕРТИКАЛНОГ ГРАДИЈЕНТА УБРЗАЊА ТЕЖЕ КОРИШЋЕЊЕМ ПОДАТАКА О ВИСИНИ ТОПОГРАФСКИХ МАСА

Градијенти убрзања теже често се моделирају коришћењем правилно распоређених података о надморским висинама топографских маса. Модели базирани на подацима о висини припадају методама коначних елемената и укључују правоугаоне призме, полиедре и директне нумеричке интегралне методе итд.

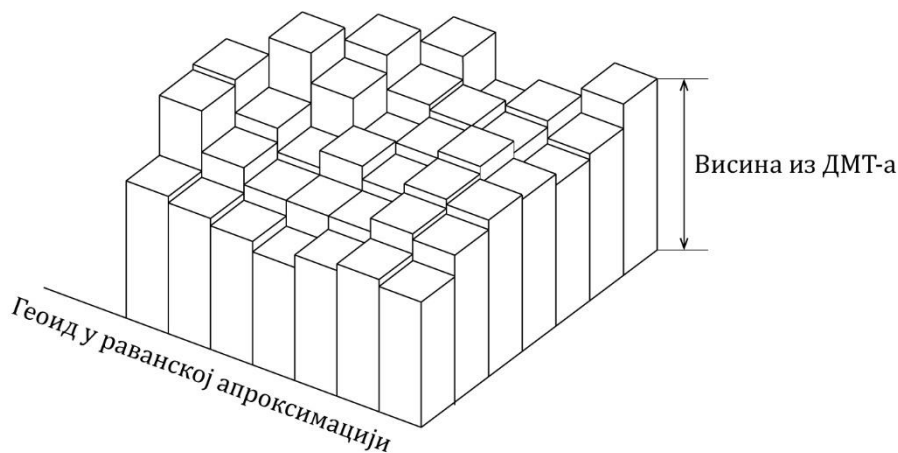
Када се у прорачуну користи велика количина података о надморској висини, алгоритми засновани на методама коначних елемената одузимају пуно времена па се често примењује брза FFT.

Детаљи о наведеним методама могу се наћи у (Zhu, 2007; Jekeli & Zhu, 2006; Nagy et al., 2000; Forsberg, 1984; Petrović, 1996).

Праве правоугаоне призме

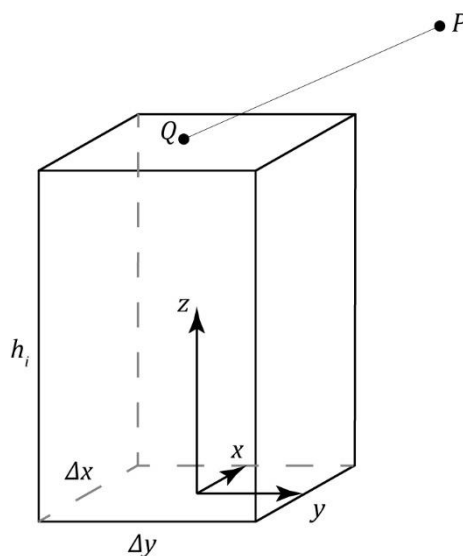
При моделирању вертикалног градијента убрзања теже топографске масе могу се поделити на праве правоугаоне призме. Том приликом усваја се константна густина елемената (призми), да би се помоћу Њутновог интеграла израчунао гравитациони утицај топографских маса.

Подела топографских маса на призме, приказана на слици 5.1, подразумева део тела Земље који је са доње стране ограничен са равни која представља геоид у раванској апроксимацији, док је горња површина призми дефинисана висинама дигиталног модела терена. Област за коју се врши интеграција дели се $N \times M$ призми, при чему је висина сваке призме једнака висини из дигиталног модела терена одређене резолуције. С обзиром да је потребно срачунати градијенте изван маса, тачка у кој се рачуна утицај топографије, тачка P , налази се изнад терена или на самом терену.



Слика 5.1: Подела терена на $N \times M$ праве правоугаоне призме

Да би се срачунао утицај сваке појединачне призме, успостављен је координатни систем као што је приказано на слици 5.2. Свака призма је ограничена са хоризонталном равни (x_0, y_0) , са равнима које су управне на ову раван и са горњом површином, чија је висина позната из дигиталног модела терена.



Слика 5.2: Координатни систем праве правоугаоне призме

Димензије i -те призме су: Δx у правцу x -осе, Δy у правцу y -осе и h_i у правцу z -осе. Хоризонталне координате \square -те померајуће тачке Q су (a_i, b_i) за $i = 1, 2 \dots N$, односно за $i = 1, 2, \dots M$.

Из израза за гравитациони потенцијал у тачки P добија се израз за градијент убрзања гравитационе силе или само гравитациони градијент услед i -те призме:

$$\Gamma_{jk}^i = G\rho \int_0^{h_i} \int_{b_i-\Delta y/2}^{b_i-\Delta y/2} \int_{a_i-\Delta x/2}^{a_i-\Delta x/2} \frac{\partial^2}{\partial j \partial k} \frac{1}{l_{PQ}} dx_Q dy_Q dz_Q, \quad (5.24)$$

где је:

$$l_{PQ} = \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2}, \quad (5.25)$$

j и k означавају цикличну пермутацију x, y и z индекса.

Диференцирањем израза (5.24) за елементе тензора са истим индексима добија се:

$$\Gamma_{jj}^i = G\rho \int_0^{h_i} \int_{b_i-\Delta y/2}^{b_i-\Delta y/2} \int_{a_i-\Delta x/2}^{a_i-\Delta x/2} \frac{3(j - j_Q) - l_{PQ}^2}{l_{PQ}^5} dx_Q dy_Q dz_Q, \quad (5.26)$$

док се за елементе са укрштеним индексима добија:

$$\Gamma_{jk}^i = G\rho \int_0^{h_i} \int_{b_i-\Delta y/2}^{b_i-\Delta y/2} \int_{a_i-\Delta x/2}^{a_i-\Delta x/2} \frac{3(j - j_Q) - (k - k_Q)}{l_{PQ}^3} dx_Q dy_Q dz_Q. \quad (5.27)$$

Интеграцијом горњих израза добијају се следећи затворени изрази за елементе гравитационог тензора (5.17):

$$\Gamma_{xx}^i = G\rho \tan^{-1} \frac{(y - y_Q)(z - z_Q)}{l_{PQ} (x - x_Q)} \Big|_{x=a_i-\Delta x/2}^{x=a_i-\Delta x/2} \Big|_{y=b_i-\Delta y/2}^{y=b_i-\Delta y/2} \Big|_{z=0}^{z=h_i}, \quad (5.28)$$

$$\Gamma_{xy}^i = -G\rho \ln(z - z_Q + l_{PQ}) \Big|_{x=a_i-\Delta x/2}^{x=a_i-\Delta x/2} \Big|_{y=b_i-\Delta y/2}^{y=b_i-\Delta y/2} \Big|_{z=0}^{z=h_i}, \quad (5.29)$$

$$\Gamma_{xz}^i = -G\rho \ln (y - y_Q + l_{PQ}) \Big|_{x=a_i-\Delta x/2}^{x=a_i-\Delta x/2} \Big|_{y=b_i-\Delta y/2}^{y=b_i-\Delta y/2} \Big|_{z=0}^{z=h_i}, \quad (5.30)$$

$$\Gamma_{yy}^i = G\rho \tan^{-1} \frac{(z - z_Q)(x - x_Q)}{l_{PQ}(y - y_Q)} \Big|_{x=a_i-\Delta x/2}^{x=a_i-\Delta x/2} \Big|_{y=b_i-\Delta y/2}^{y=b_i-\Delta y/2} \Big|_{z=0}^{z=h_i}, \quad (5.31)$$

$$\Gamma_{yz}^i = -G\rho \ln(x - x_Q + l_{PQ}) \Big|_{x=a_i-\Delta x/2}^{x=a_i-\Delta x/2} \Big|_{y=b_i-\Delta y/2}^{y=b_i-\Delta y/2} \Big|_{z=0}^{z=h_i}, \quad (5.32)$$

$$\Gamma_{zz}^i = G\rho \tan^{-1} \frac{(x - x_Q)(y - y_Q)}{l_{PQ}(z - z_Q)} \Big|_{x=a_i-\Delta x/2}^{x=a_i-\Delta x/2} \Big|_{y=b_i-\Delta y/2}^{y=b_i-\Delta y/2} \Big|_{z=0}^{z=h_i}. \quad (5.33)$$

Коришћењем формула од (5.28) до (5.33) рачунају се градијенти убрзања гравитационе силе i -те призме у тачки P . Усваја се константна вредност густине призме. Свакој појединачној призми може се доделити различита (константна) густина, која се усваја из дигиталног модела густина, ако модел густина постоји.

Сумирањем утицаја свих призми добија се укупан гравитациони утицај топографских маса, односно:

$$\Gamma_{jk} = \sum_{i=(1,1)}^{(N,M)} \Gamma_{jk}^i, \quad (5.34)$$

Ако за дно призме не усвојимо геод, већ уместо њега изаберемо другу референтну површ (нпр. средњу елевациону површ резидуалног модела терена), резидуални градијенти могу се добити одузимањем референтне висине од првобитне висине призме. Означавајући са \bar{h} референтну висину, која је константна у подручју интеграције, гравитациони градијент у тачки P који је последица утицаја i -те призме износи:

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = G\rho \int_{\bar{h}}^{h_i} \int_{b_i-\Delta y/2}^{b_i-\Delta y/2} \int_{a_i-\Delta x/2}^{a_i-\Delta x/2} \frac{\partial^2}{\partial j \partial k} \frac{1}{l_{PQ}} dx_Q dy_Q dz_Q. \quad (5.35)$$

На тај начин добија се гравитациони градијент који је последица i -те призме који се налази између референтне површине и геоида као:

$$\Delta \bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \bar{\Gamma}_{jk}^i = G\rho \int_0^{\bar{h}_i} \int_{b_i-\Delta y/2}^{b_i-\Delta y/2} \int_{a_i-\Delta x/2}^{a_i-\Delta x/2} \frac{\partial^2}{\partial j \partial k} \frac{1}{l_{PQ}} dx_Q dy_Q dz_Q. \quad (5.36)$$

Директни метод интеграције

Посматрамо ли праве правоугаоне призме као основне елементе топографије које су ограничене са доње стране са равни A , а са горње стране са равни $z = h(x, y)$, израз (5.24) можемо написати у облику (Zhu, 2007):

$$\Gamma_{jk} = G\rho \iint_A \int_0^{h(x,y)} F_{jk} dAdz_Q = G\rho \iint_A T_{jk} dA, \quad (5.37)$$

при чему су F_{jk} и T_{jk} дефинисани изразима:

$$F_{jk} = \frac{\partial^2}{\partial j \partial k} \frac{1}{l_{PQ}}, \quad (5.38)$$

$$T_{jk} = \int_0^{h(x,y)} F_{jk} dz_Q, \quad (5.39)$$

а j и k означавају цикличну пермутацију x, y и z координатних оса.

Може се показати да су аналитички изрази за F_{jk} дати са:

$$\begin{aligned} F_{xx} &= -\frac{1}{l_{PQ}^3} + \frac{3(x-x_Q)^2}{l_{PQ}^5}, & F_{xy} &= \frac{3(x-x_Q)(y-y_Q)}{l_{PQ}^5}, \\ F_{xz} &= \frac{3(x-x_Q)(z-z_Q)}{l_{PQ}^5}, \\ F_{yy} &= -\frac{1}{l_{PQ}^3} + \frac{3(y-y_Q)^2}{l_{PQ}^5}, & F_{yz} &= \frac{3(y-y_Q)(z-z_Q)}{l_{PQ}^5}, \\ F_{zz} &= -\frac{1}{l_{PQ}^3} + \frac{3(z-z_Q)^2}{l_{PQ}^5} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Полиедри

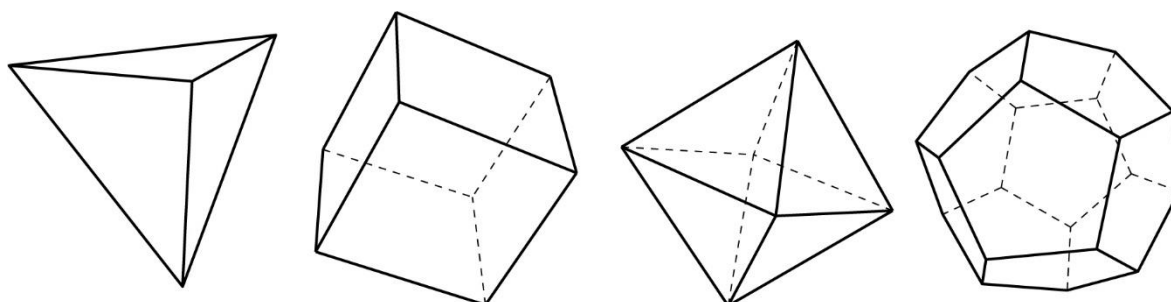
Под полиедром подразумевамо тродимензионално тело омеђено са четири или више многоуглова. Површи многоуглова називају се стране полиедра, а странице тих многоуглова називају се ивице полиедра. Рогљеви које образују стране полиедра са једним заједничким теменом су рогљеви полиедра, а врхови тих рогљева су темена полиедра.

Правилни полиедри одређени су Шлефлијевим¹ симболом облика $\{n, m\}$, где је n број страница сваког лица полиедра, а m број лица која се састају на сваком темену полиедра. У табели 5-1 дате су карактеристике правилних полиедара чији изглед је дат на слици 5.3.

¹ Ludwig Schläfli (1814 - 1895)

Табела 5-1: Карактеристике правилних полиедара

Полиедар	Темена	Ивице	Лица (стране)	Шлефлијев симбол
Тетраедар	4	6	4	{3, 3}
Хексаедар	8	12	6	{4, 3}
Октаедар	6	12	8	{3, 4}
Додекаедар	20	30	12	{5, 3}



Слика 5.3: Изглед полиедара (тетраедар, хексаедар, октаедар, додекаедар)

Математички апарат за одређивање потенцијала неправилних и нехомогених тела подразумева разлагање, то јест поделу маса на произвољне полиедарске елементе хомогене густине. Затворени аналитички изрази за потенцијал убрзања гравитационе силе хомогеног полиедра произвољног облика ограниченог са равним површинама, могу се пронаћи у радовима (Talwani & Ewing, 1960; Petrović, 1996; Warner & Scheeres, 1997; Tsoulis, 1999; Tsoulis, 2012).

Потенцијал и први и други изводи потенцијала у произвољној тачки P , за произвољно хомогено полиедарско тело густине ρ могу се ефикасно одредити коришћењем Гаусове¹ теореме дивергенције, трансформацијом запреминског (тродимензионалног) интеграла у површинске (дводимензионалне) интеграле, а затим трансформацијом површинских интеграла у линијске. Петровић (1996) је дао аналитичке формуле за израчунавање потенцијала хомогених полиедарских тела и његових првих и других извода.

Гравитациони потенцијал V у произвољној тачки P који настаје услед полиедарског тела запремине U густине ρ , дат је једначином (1.11). Други извод потенцијала дат је запреминским интегралом:

$$V_{ij} = G\rho \iiint_U \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{l} \right) dU, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (5.41)$$

где је растојање l дато са:

¹ Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

$$l = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (5.42)$$

при чему је почетак координатног система у тачки P ($x_i = 0$), док су координатне осе дефинисане јединичним векторима ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$).

Трансформација интеграла (5.41) у површински интеграл могућа је употребом Гаусове интегралне формуле:

$$\iiint_U \operatorname{div} \vec{u} \, dU = \iint_S \vec{u} \cdot \vec{N} \, dS, \quad (5.43)$$

у којој је U запремина обухваћена површином S , а \vec{N} означава спољашњу нормалу на затворену површ S .

Коришћењем формуле (5.43) добија се површински интеграл:

$$V_{ij} = G\rho \iint_S \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{l} \right) \cos(\vec{N}, \vec{e}_i) \, dS, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (5.44)$$

Под претпоставком да се површ S састоји од a полигона (страна) S_p :

$$S = \bigcup_{p=1}^a S_p, \quad (5.45)$$

и да је за сваки полигон спољашња нормала \vec{N}_p константна, једначина (5.44) постаје:

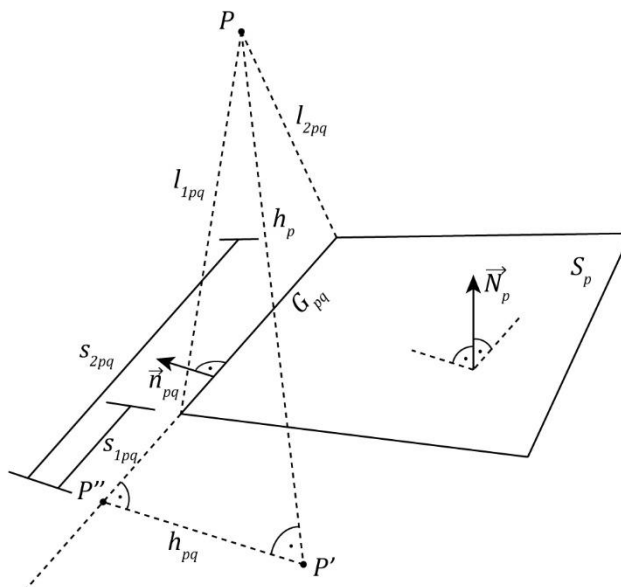
$$V_{ij} = G\rho \sum_{p=1}^a \cos(\vec{N}_p, \vec{e}_i) \iint_{S_p} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{l} \right) \, dS, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (5.46)$$

Да бисмо површински интеграл (5.46) трансформисали у линијски, за сваки полигон S_p уводи се нови правоугаони координатни систем (Слика 5.4). Координатни почетак је сада у тачки P' која представља ортогоналну пројекцију тачке P на раван дефинисану са S_p , док су координатне осе изабране тако да је $\vec{e}_3' = \vec{N}_p$, \vec{e}_2' узима било који смер у равни полигона S_p , а \vec{e}_1' чини ортонормирану базу са векторима \vec{e}_2' и \vec{e}_3' .

Уводећи ознаке са слике 5.4, величина h_p представља растојање између тачке P и равни дефинисане полигоном S_p , величина σ_p има вредност -1 када је вектор \vec{N}_p усмерен ка полупростору који садржи тачку P и вредност 1 када је \vec{N}_p усмерен на други полупростор, Хесеов¹ нормални облик једначине површине равни (Хесеова нормална форма) може се написати као:

$$\sigma_p h_p = x_1 \cos(\vec{N}_p, \vec{e}_1) + x_2 \cos(\vec{N}_p, \vec{e}_2) + x_3 \cos(\vec{N}_p, \vec{e}_3), \quad (5.47)$$

¹ *Otto Hesse* (1811–1874)



Слика 5.4: Геометријско значење величина које се користе за представљање потенцијала и његових извода

Примењујући Гаусову теорему дивергенције (у равни):

$$\iint_{S_p} \text{div } \vec{u} \, dS = \int_{G_p} \vec{u} \vec{n}_p \, ds, \quad (5.48)$$

где је \vec{n}_p спољашња нормала (у равни) на граничну ивицу G_p полигона S_p , који се састоји од b ивица (сегмената) G_{pq} :

$$G_p = \bigcup_{q=1}^b G_{pq}, \quad (5.49)$$

једначина (5.46) постаје:

$$V_{ij} = G\rho \sum_{p=1}^a \cos(\vec{N}_p, \vec{e}_i) \sum_{q=1}^b \cos(\vec{n}_{pq}, \vec{e}_j) \int_{G_{pq}} \frac{1}{l} \, ds + \sigma_p h_p \cos(\vec{N}_p, \vec{e}_j) \sum_{q=1}^b \sigma_{pq} h_{pq} \int_{G_{pq}} \frac{1}{r^2 l} \, ds, \quad (j = 1, 2, 3), \quad (5.50)$$

при чему је \vec{n}_{pq} спољашња нормала сегмента G_{pq} , h_{pq} растојање између P' и сегмента G_{pq} , а σ_{pq} је -1 када је вектор \vec{n}_{pq} усмерен ка полупростору који садржи тачку P' , и 1 када је \vec{n}_{pq} усмерен ка полупростору који не садржи тачку P' .

Да бисмо израчунали други извод потенцијала, уводимо нови локални координатни систем за сваки појединачни сегмент G_{pq} . Нека је тачка P'' ортогонална пројекција тачке P' на праву линију која је добијена продужетком сегмента G_{pq} (Слика 5.4). Узимајући ову

тачку за почетак једнодимензионалног локалног координатног система на G_{pq} и користећи удаљеност s од ње као координату, добијамо:

$$\int_{G_{pq}} \frac{1}{l} ds = \int_{s_{1pq}}^{s_{2pq}} \frac{1}{\sqrt{h_p^2 + h_{pq}^2 + s^2}} ds, \quad (5.51)$$

$$\int_{G_{pq}} \frac{1}{r^2 l} ds = \int_{s_{1pq}}^{s_{2pq}} \frac{1}{(h_{pq}^2 + s^2) \sqrt{h_p^2 + h_{pq}^2 + s^2}} ds.$$

Гравитациони градијент који је последица посматраног полиедарског тела, према формули (32) у раду (Petrović, 1996), у произвољој тачки P представљен је са:

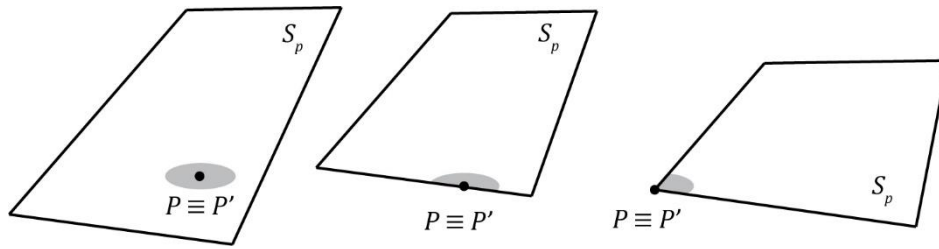
$$\begin{aligned} V_{ij} &= G\rho \sum_{p=1}^a \cos(\vec{N}_p, \vec{e}_i) \beta_{pj} \\ &= G\rho \sum_{p=1}^a \cos(\vec{N}_p, \vec{e}_i) \sum_{q=1}^b \cos(\vec{n}_{pq}, \vec{e}_j) LN_{pq} \\ &\quad + \sigma_p \cos(\vec{N}_p, \vec{e}_j) \sum_{q=1}^b \sigma_{pq} AN_{pq} + SING_{\beta_{pj}}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

где су:

$$\begin{aligned} LN_{pq} &= \ln \frac{s_{2pq} + l_{2pq}}{s_{1pq} + l_{1pq}}, \\ AN_{pq} &= \arctan \frac{h_p s_{2pq}}{h_{pq} l_{2pq}} - \arctan \frac{h_p s_{1pq}}{h_{pq} l_{1pq}}, \\ \beta_{pj} &= \sum_{q=1}^b \cos(\vec{n}_{pq}, \vec{e}_j) LN_{pq} + \sigma_p \cos(\vec{N}_p, \vec{e}_j) \sum_{q=1}^b \sigma_{pq} AN_{pq}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Члан $SING_{\beta_{pj}}$ представља израз сингуларности дефинисан за различите ситуације. На слици 5.5 приказан је случај када обе тачке, P и P' , леже изван полигона S_p полиедра површине S .

Међутим, у случајевима приказаним на слици 5.5, када тачка P лежи у унутрашњости полигона S_p , на ивици или у углу полигона S_p , величина h_p постаје нула, а изрази (5.51) недефинисани.



Слика 5.5: Сингуларни случајеви при прелазу са површинских на линијске интеграле

Третман сингуларитета који се појављују у нумеричким прорачунима при подели топографских маса на произвољне полиедарске елементе могу се наћи у (Tsoulis & Petrović, 2001; D'Urso, 2013; D'Urso, 2014).

ПОГЛАВЉЕ 6

НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА

Изведена нумеричка истраживања с циљем моделирања вертикалног градијента убрзања силе Земљине теже произилазе из теоријских основа и принципа приказаних у претходним поглављима. Истраживања су спроведена на основу расположивих података, након чега је извршено поређење моделираних и мерених вредности вертикалног градијента убрзања теже, чиме је реализована верификација и валидација модела.

Процедура коришћена у поглављу нумеричка истраживања разликује се од до сада коришћених поступака датих у (Zhu, 2007; Jekeli & Zhu, 2009; Jekeli & Zhu, 2006; Rózsa & Tóth, 2005; Kim & Wessel, 2016).

Вертикални градијент нормалног убрзања могуће је срачунати у произвољној тачки простора P , која се налази изван маса тела Земље. У оквиру ове дисертације његова срачуната вредност посматрана је као приближна вредност вертикалног градијента убрзања теже (U_{zz}). Са друге стране, могуће је срачунати гравитациони утицај топографских маса на вертикални градијент убрзања теже такође у тачки P (TM_{zz}), при чему се топографским масама у оквиру ове дисертације сматрају све масе изнад елипсоида. Сабирањем U_{zz} и TM_{zz} добија се вредност вертикалног градијента у тачки P , која се у оквиру ове дисертације сматрала моделираном вредношћу вертикалног градијента убрзања теже.

Гравитациони утицај топографских маса изнад елипсоида подељен је на рачунање гравитационог утицаја топографских маса између елипсоида и геоида, и на рачунање гравитационог утицаја топографских маса између геоида и физичке површи Земље. Извршена је подела топографских маса на призме и на полиедре, при чему је усвојена константна густина топографских маса. Разматран је и анализиран утицај усвајања различите густине призми при моделирању вертикалног градијента убрзања теже, зависност географског положаја и моделираног вертикалног градијента убрзања теже, као и међусобна повезаност висине и моделираног вертикалног градијента.

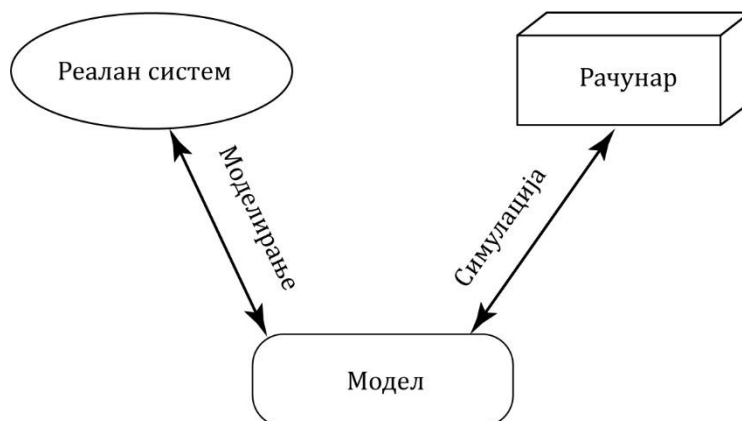
У зависности од удаљености појединачне призме од тачке рачунања (тачка у којој се рачуна вертикални градијент убрзања теже) коришћени су дигитални модели терена различите резолуције, чиме је постигнуто различито третирање утицаја локалних и удаљених топографских маса.

Приликом моделирања вертикалног градијента теже коришћен је софтвер који је креиран за потребе израде ове дисертације. Програм је креиран у програмском језику *Visual C++*, а аутор програма је проф. др Олег Одаловић.

Ток истраживања чиниле су следеће фазе:

1. Прикупљање података;
2. Припрема расположивих података;
3. Анализа и формирање финалног скупа података;
4. Подела топографских маса на праве правоугаоне призме или полиедре;
5. Моделирање вертикалног градијента убрзања теже;
6. Анализа утицаја удаљености зона са различитим резолуцијама дигиталног модела терена;
7. Анализа утицаја висине изнад тачке за коју се моделирање изводи;
8. Анализа утицаја усвајања различите густине призми при моделирању вертикалног градијента убрзања теже;
9. Анализа корелације моделираног вертикалног градијента убрзања теже и географског положаја;
10. Анализа корелације моделираног вертикалног градијента убрзања теже и висине терена;
11. Валидација модела – поређење моделираних и измерених вредности вертикалног градијента убрзања теже.

Генерално, моделирање и симулацију чини низ активности при креирању модела реалног система и његове симулације на рачунару, при чему се под моделирањем подразумева процес успостављања везе између реалног система и модела, док је симулација процес успостављања везе између модела и рачунара (Слика 6.1) (Zeigler & Sarjoughian, 2013).



Слика 6.1: Моделирање и симулација

У основи, постоје две главне врсте моделирања – директно моделирање, односно моделирање „унапред“ (*forward modeling*) и инверзно моделирање (*inverse modeling*).

Директни проблем (*forward problem*) је проблем одређивања модела који има за циљ да врши предикцију података из задатих улаза система. Насупрот томе, инверзни проблеми (*inverse problem*) полазе од претпоставке да су подаци познати. На основу података креира се модел који може да произведе наведене резултате (Слика 6.2).



Слика 6.2: Директно и инверзно моделирање (Liu & Xiong, 2018)

Инверзно моделирање користи карактеристике података за процену скупа основних параметара модела физичке појаве која се истражује. С друге стране, директно моделирање користи модел за предикцију физичких величина (модел дефинише стање система). У циљу добијања параметра модела врши се упоређивање моделираних величина са расположивим скупом података.

Моделирање које је уобичајено у геодезији, геофизици и другим гео-наукама је директно моделирање. Оно подразумева употребу модела у сврху симулације исхода. Модел „унапред“ полази од одређених параметара, након чега се применом одређеног модела добијају подаци који се потом могу упоређивати са стварним подацима (мерењима). Дакле, директно моделирање обухвата технике одређивања одређене физичке величине применом скупа теоријских једначина које омогућавају податке које би одређени сензор мерио.

Уопштено, проблеми „унапред“ могу се описати на следећи начин:

Модел (параметри модела m , извори i) \rightarrow Подаци p

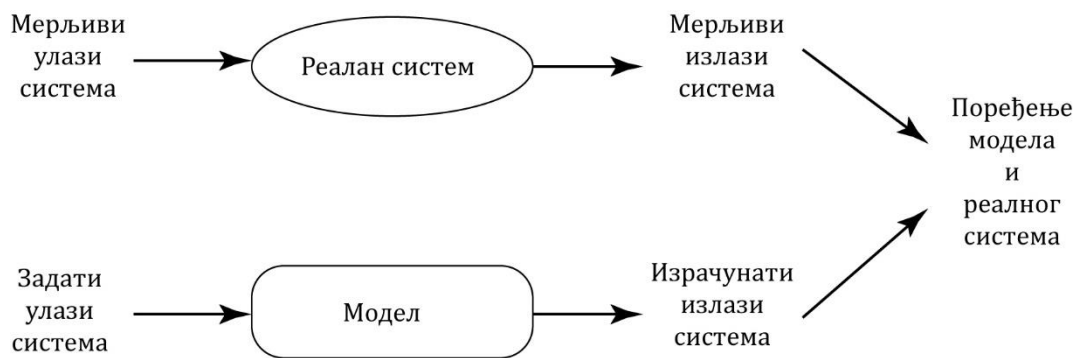
$$p = A_i(m),$$

где A_i оператор проблема „унапред“ који зависи од извора посматраног поља (Liu & Xiong, 2018).

Сходно изложеним дефиницијама, моделирање вертикалног градијента убрзања теже спада у групу ових проблема.

Симулирање синтетичких податка на основу дигиталног модела терена, упоређивање тако добијених података са мереним вредностима вертикалног градијента убрзања теже и итеративно умањење разлике између података прикупљених у гравиметријском премеру и синтетичких података добијених коришћењем софтвера, представља суштину овог поглавља.

Поређење модела и реалног система, односно поређење вертикалног градијента убрзања теже добијеног моделирањем и мерењем, и задовољавање задатих критеријума представља валидацију модела и може се приказати схемом приказаном на слици 6.3.



Слика 6.3: Валидација модела (Erdeljan & Џарко, 2015)

Разумно подударане, односно задовољавање задатих критеријума осигурава да примењени модел може објаснити одступање моделираног вертикалног градијента убрзања теже и његове мерене вредности, чиме се правилно описује утицај топографских маса изнад елипсоида.

6.1 КОРИШЋЕНИ ПОДАЦИ

У податке који су коришћени током израде дисертације спадају дигитални модели терена различите резолуције, мерени вертикални градијенти убрзања теже и параметри Нормалне Земље система GRS80 (*Geodetic Reference System 1980* – Геодетски референтни систем 1980).

Коришћени су дигитални модели терена следећих резолуција:

- 30 m • 30 m,
- 50 m • 50 m,
- 1 000 m • 1 000 m и
- 2 000 m • 2 000 m.

Дигитални модели терена коришћени су за предикцију вертикалног градијента убрзања теже у 85 372 тачке детаљног гравиметријског премера (ДГП).

Координате тачака детаљног гравиметријског премера одређиване су разним методама. Положај тачака дефинисан је везивањем за геодетску основу. У случајевима када није било геодетске основе, положај тачака дефинисан је развијањем бусолних или полигонских влакова (који су се ослањали на тригонометријске тачке). У појединим случајевима, вршена је директна идентификација на картама. Референтна површ за висине је нулта нивоска површ која пролази кроз репер у Трсту (НВТ1 – Нивелман високе тачности 1). Висинске разлике одређиване су применом геометријског нивелмана у равнијим пределима, односно применом тригонометријског нивелмана у планинским крајевима. Убрзања силе Земљине теже односе се на референтни ниво дефинисан вредношћу апсолутног убрзања на тачки у Потсдаму. У циљу добијања датумски хомогених података, координате је потребно трансформисати тако да се односе на елипсоид GRS80, висине на систем нормалних висина мреже НВТ2 (Нивелман високе тачности 2), а вредности убрзања силе теже у систем IGSN71.

Дигитални модели терена

За територију Србије, дигитални модели терена добијени су дигитализацијом топографских карата размере 1:25 000.

С обзиром на класификацију приказану у табели 6-1, дигитални модел терена резолуције 30 m • 30 m спада у моделе високе резолуције, дигитални модел терена резолуције 50 m • 50 m у моделе средње резолуције, док су дигитални модели терена резолуције 1 000 m • 1 000 m и 2 000 m • 2 000 m модели ниске резолуције.

Подаци су садржани у текстуалним базама података, у којима је свака тачка дигиталног модела терена представљена уређеним паром координата у Гаус-Кригеровој¹ пројекцији, које се односе на Беселов² елипсоид, и трећом координатом коју чине висине (Odalović, 2005).

Гравитациони утицаји топографских маса изван граница Србије одређени су на основу глобалног модела терена SRTM (*Shuttle Radar Topography Mission* – Дедицирана сателитска топографска мисија).

Табела 6-1: Однос резолуције и хоризонталног растојања тачака ДМТ (Gigović, 2010)

Резолуција	Хоризонтално растојање висинских тачака	
	[m]	["]
Ниска	90 до 900	3 до 30
Средња	30 до 90	1 до 3
Висока	10 до 30	0.3 до 1
Веома висока	1 до 10	0.03 до 0.3

Мерени вертикални градијент силе Земљине теже

Вертикални градијент убрзања теже мерен је релативним гравиметром CG-5 произвођача *Scintrex Ltd.*

Убрзање теже мерено је на две висине, након чега је вертикални градијент добијен по формули:

$$VG = \frac{\Delta g}{\Delta h}, \quad (6.1)$$

где је Δg разлика убрзања која одговара разлици висине Δh .

Као што је приказано у табели 2-1, резолуција модерних аутоматизованих гравиметара са дигиталним интерфејсом је 1 до 5 μGal . Међутим, приликом рада изван лабораторије, у реалним теренским условима, добијају се веће вредности стандардне девијације појединачних мерења.

Према спецификацији произвођача стандардно одступање мерења инструментом CG-5, у типичним условима и на било ком месту, требало би да буде мање од 5 μGal (Scintrex, 2012). Ова висока прецизност потврђена је у бројним студијама које су

¹ *Louis Krüger* (1857–1923)

² *Friedrich Wilhelm Bessel* (1784–1846)

засноване на мерењима у лабораторијама, на калибрационим линијама и на тачкама гравиметријске мреже (Lederer, 2009; Parseliunas et al., 2008; Parseliunas et al., 2011; Parseliunas et al., 2013; Yushkin, 2011; Reudink et al., 2014).

Истражујући осетљивост инструмента CG-5 на нагињање (*tilting*), (Reudink et al. 2014) објавили су да се тачност мерења теже може погоршати и за 10 μGal .

У регионалном премеру, нагињање инструмента се дешава приликом његовог транспорта са једне на другу тачку гравиметријске мреже. Инструмент се најчешће преноси на задњем седишту аутомобила при чему је нагињање неизбежно, чак и у случају коришћења посебно дизајнираних транспортних торби. Да би се добили висококвалитетни резултати у складу са спецификацијама произвођача, гравиметри током транспорта морају остати у усправном положају са максималним одступањем од пар степени. Овај захтев практично никада није испуњен, па се из тог разлога тачност инструмента смањује.

Грешке изазване транспортом не могу се избећи ни након примене контролних мера које препоручује произвођач – провера читавања током мерења или преглед финалних података пре напуштања места мерења (Reudink et al., 2014).

У још једној студији у којој су упоређени гравиметри Sodin, ZLS Burris и CG-5, објављено је да лабораторијска мерења вертикалног градијента убрзања теже могу резултирати систематским грешкама од 5 до 10 μGal и да је највероватнији узрок ових грешака ефекат унакрсног спајања (*cross-coupling effect*) (Кораев et al., 2008).

Узевши све у обзир, инструмент CG-5 у реалним теренским условима са сигурношћу постиже прецизност од 10 до 15 μGal .

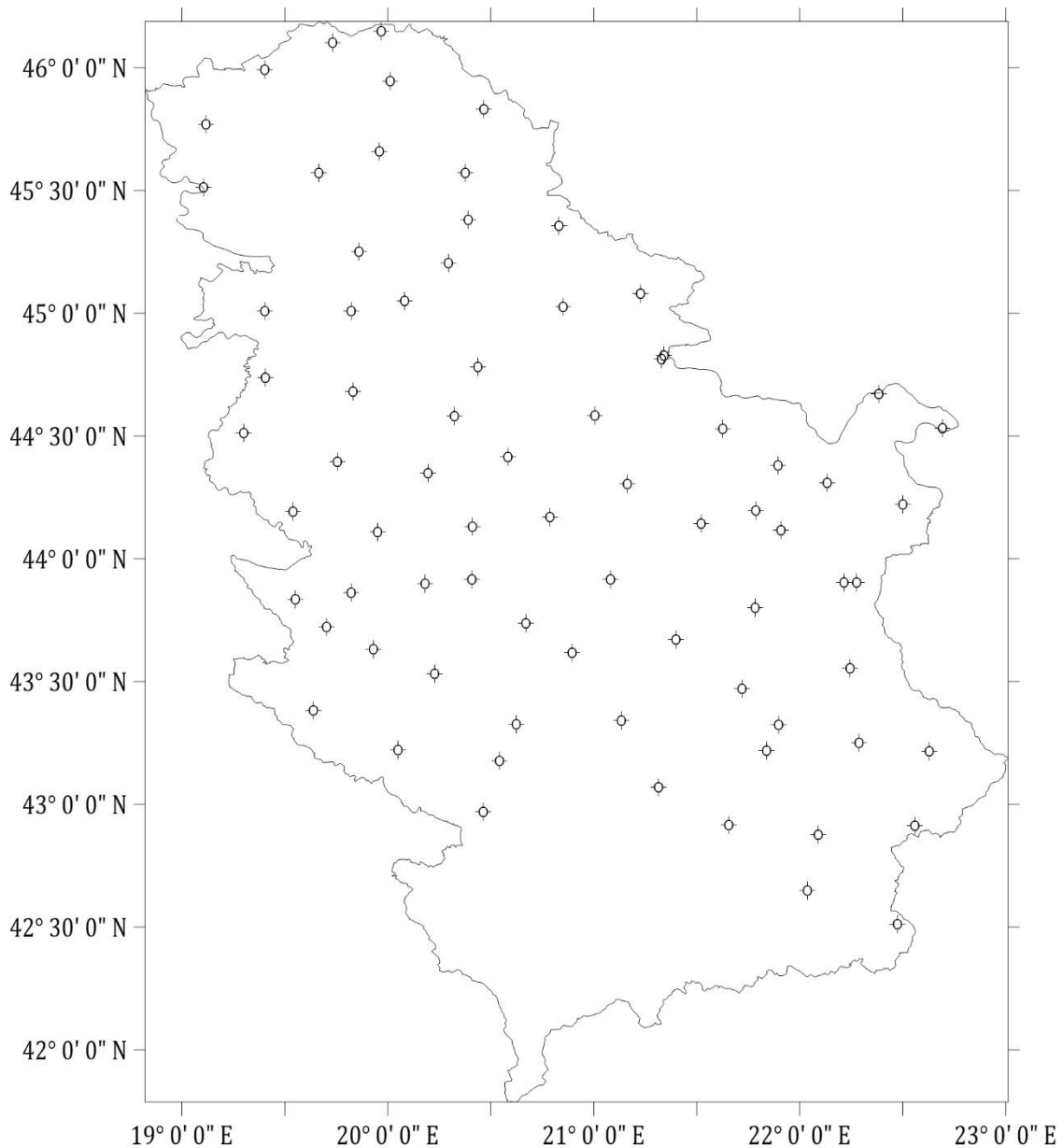
Имајући у виду да је најмања стандардна мерна несигурност резултата мерења убрзања теже 10 μGal , а стандардно одступање мерења висине 1 mm, применом закона о преносу грешака на израз (6.1), са минималним и максималним вредностима разлике висине и разлике убрзања теже, добија се опсег за стандардно одступање мереног вертикалног градијента σ_{VG} приказан у табели 6-2.

Усвајајући да је фактор проширења 2, добија се проширена мерна несигурност резултата мерења вертикалног градијента убрзања теже која износи око 30 $\mu\text{Gal}/\text{m}$.

Табела 6-2: Стандардно одступање мереног вертикалног градијента за минималне и максималне вредности разлике висина и разлике убрзања теже

	Минимум	Максимум
$\Delta h[\text{m}]$	0.933	1.574
$\Delta g [\mu\text{Gal}]$	216.0	509.4
$\sigma_{VG} \left[\frac{\mu\text{Gal}}{\text{m}} \right]$	15.2	9.0

Просторни распоред тачака на којима је мерен вертикални градијент убрзања теже приказан је на слици 6.4.



Слика 6.4: Просторни распоред тачака на којима је мерен вертикални градијент убрзања теже

6.2 ПРИКУПЉАЊЕ ПОДАТАКА

Дигитални модели терена

Као што је већ речено, дигитални модели терена добијени су дигитализацијом топографских карата размере 1:25 000.

У оквиру пројекта „Дигитални модел терена Србије и Црне Горе за војне потребе“ из 2002. године, Војногеографски институт војске Србије и Црне Горе израдио је дигитални модел терена Србије који је коришћен за предикцију вертикалног градијента убрзања теже. Поменути дигитални модел терена коришћен је и у поступку одређивања геоида високе резолуције за територију Републике Србије (Odalović, 2005), као и за моделирање густина Земљине коре при решавању проблема граничних вредности потенцијала Земљине теже (Grekulović, 2014).

По прелиминарним анализама које су урађене у Војногеографском институту утврђено је да се овим путем може креирати дигитални модел терена чија је тачност само у изразитим планинским пределима мања од 10 m (Odalović, 2005). Међутим, подаци који су преузети за научна истраживања омогућили су креирање дигиталног модела терена резолуције једне лучне секунде у оба правца (Odalović, 2005; Grekulović, 2014).

У тачки модела, чија се висина одређује, дефинисан је правоугли координатни систем са координатним почетком у самој тачки. У сваком квадранту координатног система одабране су четири најближе тачке са познатом висином, а висина тачке модела одређена је коришћењем израза:

$$H_{DMT}^O = \frac{p_1 H_1^O + \dots + p_n H_n^O}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad (6.2)$$

где је n број тачака чије се висине користе при одређивању висине тачке модела ($n_{max} = 16$), а p_i тежине дефинисане са:

$$p_i = \frac{1}{l_i^2}, \quad (6.3)$$

при чему је l_i растојање од тачке са познатом висином до тачке модела чија се висина одређује.

Приликом рачунања вертикалног градијента убрзања теже, удаљеност појединачне призме од тачке рачунања утицала је на одабир дигиталног модела терена. Другим речима, одабир резолуције коришћеног дигиталног модела терена зависио је од удаљености тачке рачунања и призме чији је гравитациони утицај рачунат.

Изван граница Србије коришћени су дигитални модели терена формиран на основу података топографске мисије SRTM. Глобални модел терена продукт је међународног пројекта NASA и NGA¹. Подаци дигиталних модела терена доступни су на интернету и могу се преузети са одређених интернет адреса. Модели са резолуцијом од три лучне секунде (приближно 90 m) доступни су за све земље, док су подаци са резолуцијом од једне лучне секунде доступни само неким земљама (Samardžić & Milenković, 2010).

Вертикални градијент убрзања силе Земљине теже

У оквиру радова на ревитализацији Основне гравиметријске мреже Републике Србије, која представља гравиметријски референтни оквир Републике Србије, мерено је убрзање силе Земљине теже и вертикални градијент убрзања силе теже на свим тачкама Основне гравиметријске мреже. Вертикални градијент мерен је на СРЕФ тачкама (тачке референтне мреже на територији Републике Србије) и фундаменталним реперима који су у саставу Основне гравиметријске мреже.

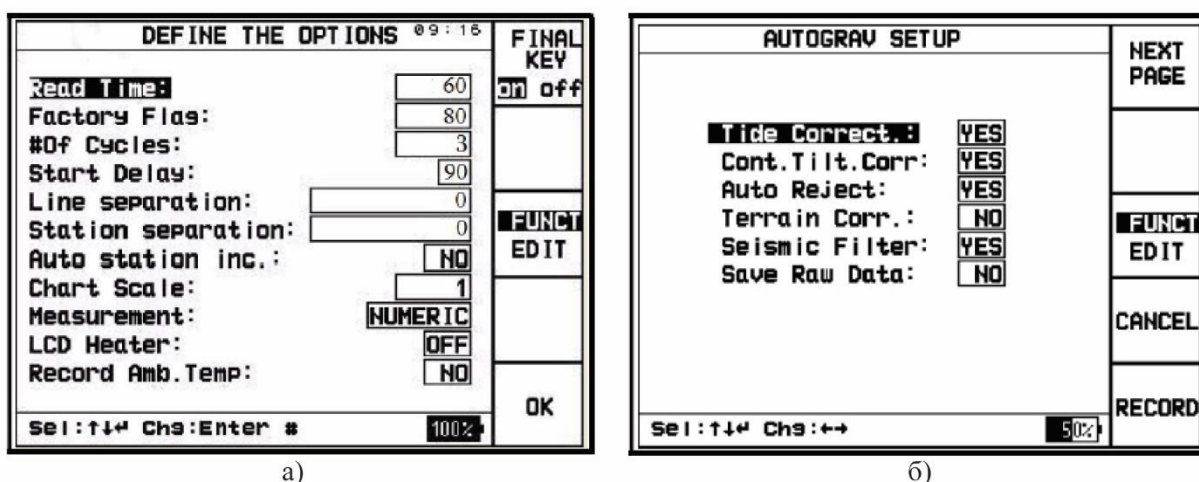
Током 2020. и 2021. године вертикални градијент убрзања теже измерен је на 77 тачака Основне гравиметријске мреже Србије.

¹ National Geospatial-Intelligence Agency – Национална геопросторна обавештајна агенција

Пре поменутих радова на ревитализацији Основне гравиметријске мреже Републике Србије, вертикални градијент убрзања теже мерен је 2007. године у оквиру пројекта „Изградња капацитета у Србији: Катастар непокретности и упис права – фаза II“. У оквиру поменуте кампање, поред одређивања апсолутне вредности убрзања теже мерен је и вертикални градијент у манастирима Гргетег на Фрушкој гори, Градац у Рашкој и Сићево у близини Ниша.

Поред података горе наведених мерних кампања располагало се и са подацима са студентске праксе на Златибору. На студентској пракси, у јуну 2021. године измерена су два вертикална градијента теже.

Пре почетка мерења вертикалног градијента теже, било је потребно конфигурирати неке параметре као што су трајање мерења на једној тачки (*read time*), интервал у којем ће се понављати мерења (*cycle time*), број читања приликом аутоматског понављања читања (*#of cycles*), зауставно време два читања како би се стабилизовали услови за мерење (*start delay*) и друге. Параметри „options“ менија приказани су на слици 6.5а.



Слика 6.5: Уобичајена подешавања параметара инструмента и корекција резултата мерења (Melhorato & Sousa, 2016)

Поред тога, подешене су следеће корекције (слика 6.5б):

- Рачунање лунисоларног утицаја (*tide correction*)

Примена корекције директног и индиректног утицаја Сунца и Месеца на гравитационе податке, која се назива и гравиметријска корекција (Amarante & Trabanco, 2016), аутоматски се рачуна приликом мерења убрзања силе теже, уколико је тако подешено у „autograv“ менију инструмента. Овај утицај рачуна се по формулама Лонгмана. Формуле се могу наћи у (Longman, 1959; Amarante & Trabanco, 2016). Да би корекција била адекватно срачуната, потребано је на свакој тачки мерења унети податке који се односе на референтну тачку на датом простору. За референтну тачку уносе се лонгитуда, латитуда, висина и UTC (*Universal Coordinated Time* – универзално координисано време) зона (Seigel, 1995). Подаци се не морају мењати за све тачке које су унутар простора пречника од око 40 km.

- Континуирана компензација (*continuous tilt correction*)

Континуирана корекција нагиба аутоматски узима у обзир мања померања у вертикалном правцу. Функција се активира при раду на нестабилном терену, док се искључује на стабилним теренима.

- Филтер за аутоматско одбацивање (*auto rejection filter*)

Аутоматско одбацивање података оптерећених високофреквентним сметњама омогућено је активацијом филтера који је интегрисан у инструмент. У случају примене филтера, мерење се одбацује ако је шум већи од 4 или 6 стандардних девијација резултата мерења.

- Сеизмички филтер (*seismic filter*)

Сеизмички филтер елиминира ниске фреквенције узроковане позадинском сеизмичношћу или земљотресима. Инструмент је углавном подешен тако да је филтер увек примењен.

- Корекција терена (*terrain correction*)

Једна од корекција уграђених у инструмент је корекција терена, која није коришћена приликом мерења вертикалног градијента убрзања теже.

Процедура коришћена за мерење вертикалног градијента теже у оквиру радова из 2020. и 2021. године разликује се од процедуре примењене 2007. године, када су одређиване апсолутне вредности убрзања у поменута три манастира.

Наиме, процедура коју су применили стручњаци из Шведске управе за картографију, катастар и упис земљишта (*Lantmäteriet*) подразумева мерење по шеми Д-Г-Г-Д, где Д означава мерење „доле“ (мерење на поду просторије), док је са Г означено мерење „горе“ (мерење на око 1.5 m изнад пода просторије). Свако мерење трајало је 60 секунди (60 s доле, 60 s горе, 60 s горе, 60 s доле). Вредност разлике читања у доњем и горњем положају (промена теже) одређена је као средина из шест мерења. Разлог овакве шеме мерења је смањење утицаја могућег хода гравиметра (Ågren et al., 2007).

С друге стране, приликом мерења вертикалног градијента теже на СРЕФ тачкама и фундаменталним реперима, као и на две тачке на Златибору, убрзање је мерено пет пута. Мерено је по шеми Д-Г-Д-Г-Д, где Д означава мерење „доле“ (мерење на базној плочи, при чему је инструмент стављен на своје постоље), док је са Г означено мерење „горе“ (мерење на одређеној висини, при чему је инструмент на стативу). У горњем положају, инструмент је центрисан на истој вертикали у односу на доњу тачку, на висини од најмање једног метра у односу на доњу тачку. Након што је инструмент постављен (центрисан) и хоризонтиран, мерено је шест сесија у трајању од једног минута у оквиру једног циклуса на тачки, уз услов да најмање четири мерења буду у границама до 0.01 mGal. Мерење по приказаној шеми реализовано је из разлога елиминације хода гравиметра.

Приликом мерења инструмент је оријентисан према северу. Висина инструмента мерена је до на милиметар.

6.3 ПРИПРЕМА ПОДАТАКА

Припрема расположивих података подразумева неопходне трансформације доступних података и рачунање хода гравиметра на свакој тачки на којој је мерен вертикални градијент убрзања теже.

Дигитални модели терена

Подаци дигиталног модела терена садржани су у текстуалним базама података у којима су тачке представљене правоуглим координатама у Гаус-Кригеровој пројекцији на елипсоиду Бесела и ортометријском висином. Да би се дигитални модел терена адекватно учитао у софтвер, било је потребно применити одређене математичке моделе и функције којима се могу трансформисати координате из државног координатног система (Гаус-Кригера пројекција-елипсоид Бесела) у глобални систем елипсоида GRS80. Трансформација доводи до хомогенизације података и из тог разлога потребно је извршити координатну трансформацију између различитих система.

Трансформација је подразумевала следеће кораке:

1. Одређивање немодулисаних правоуглих координата

$$(Y, X)_{GK} \xrightarrow{\text{трансф.}} (\bar{Y}, \bar{X})_{GK}, \quad (6.4)$$

коришћењем израза:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{X - 7\,500\,000}{0.9999}, \\ \bar{Y} &= \frac{Y - 7\,500\,000}{0.9999}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

2. Трансформацију правоуглих немодулисаних координата (Гаус-Кригера пројекција) у елипсоидне геодетске координате (елипсоид Бесела) (Gojković et al., 2017)

$$(\bar{Y}, \bar{X})_{GK} \xrightarrow{\text{трансф.}} (\varphi, \lambda)_{Bessel}, \quad (6.6)$$

коришћењем израза:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \frac{t_0}{2N_0} (-1 - \eta_0^2) \bar{Y}^2 \\ &\quad + \frac{t_0}{24N_0^4} (5 + 3t_0^2 + 6\eta_0^2 - 6t_0^2\eta_0^2 - 3\eta_0^4 - 9t_0^2\eta_0^4) \bar{Y}^4 + \dots, \\ \lambda &= \lambda_0 + \frac{1}{N_0 \cdot \cos \varphi_0} \bar{Y} + \frac{1}{6N_0^3 \cdot \cos \varphi_0} (-1 - 2t_0^2 - \eta_0^2) \bar{Y}^3 + \dots, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где је N_0 полупречник кривине првог вертикала, $t_0 = \tan \varphi_0$, $\eta_0^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_0$, а φ_0 дато са:

$$\varphi_0 = \frac{\bar{X}}{\alpha} + \beta \sin \frac{2\bar{X}}{\alpha} + \gamma \sin \frac{4\bar{X}}{\alpha} + \dots, \quad (6.8)$$

при чему је:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a+b}{2} \left(1 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{64}n^4 + \dots \right), \\ \beta &= \frac{3}{2}n - \frac{27}{32}n^3 + \frac{69}{512}n^5 + \dots, \\ \gamma &= \frac{21}{16}n^2 - \frac{55}{32}n^4 + \dots, \\ n &= \frac{a-b}{a+b}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

3. Трансформацију елипсоидних геодетских координата (елипсоид Бесела) у правоугле координате (елипсоид Бесела)

$$(\varphi, \lambda)_{Bessel} \xrightarrow{\text{трансф.}} (X, Y, Z)_{Bessel}, \quad (6.10)$$

коришћењем израза:

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda, \\ Y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda, \\ Z &= \left(N \frac{b^2}{a^2} + h \right) \sin \varphi, \end{aligned} \quad (6.11)$$

где је:

$$N = \frac{a}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad (6.12)$$

4. Трансформацију правоуглих координата које се односе на Беселов елипсоид у правоугле координате које се односе на елипсоид GRS80

$$(X, Y, Z)_{Bessel} \xrightarrow{\text{трансф.}} (X, Y, Z)_{GRS80}, \quad (6.13)$$

коришћењем израза:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{GRS80} = (1+k) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{Bessel} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

и трансформационих параметара датих у табели 6-3.

Табела 6-3: Трансформациони параметри

	Трансформациони параметри	Стандардна девијација
Транслација x	$t_x = 544.15384$ m	$\sigma(t_x) = 0.56235$ m
Транслација y	$t_y = 187.18717$ m	$\sigma(t_y) = 0.57122$ m
Транслација z	$t_z = 416.14709$ m	$\sigma(t_z) = 0.43672$ m
Ротација x	$\varepsilon_x = -5.21233''$	$\sigma(\varepsilon_x) = 0.01377''$
Ротација y	$\varepsilon_y = -0.35189''$	$\sigma(\varepsilon_y) = 0.01960''$
Ротација z	$\varepsilon_z = 13.79205''$	$\sigma(\varepsilon_z) = 0.01735''$
Размера	$k = 6.88937746$ ppm	$\sigma(k) = 0.106$ ppm

5. Трансформацију правоуглих координата (GRS80 елипсоид) у елипсоидне координате (GRS80 елипсоид)

$$(X, Y, Z)_{GRS80} \xrightarrow{\text{трансф.}} (\varphi, \lambda, h)_{GRS80}, \quad (6.15)$$

коришћењем израза:

$$\begin{aligned} \lambda &= \arctan \frac{Y}{X}, \\ \varphi_0 &= \arctan \frac{Z}{p(1-e^2)}, \\ N_i &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_i}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ h_i &= \frac{p}{\cos \varphi_i} - N_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ \varphi_i &= \arctan \frac{Z}{p} \left(1 - e^2 \frac{N_i}{N_i + h_i} \right)^{-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.16)$$

где су e и e' први и други нумерички ексцентрицитети, а p је дато са:

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (6.17)$$

Овај корак трансформације је итеративни процес. Када геодетска ширина из две узастопне итерације има исту вредност, процес се завршава.

Након трансформације, координатама $(\varphi, \lambda)_{GRS80}$ придружене су одговарајуће ортометријске висине H^o .

Последица примењених трансформација су датумски хомогени подаци, који се односе на:

- Међународни терестрички референтни систем (ITRS¹),
- Геодетски референтни систем 1980 (GRS80) и
- Нивелман високе тачности 2 (НВТ2).

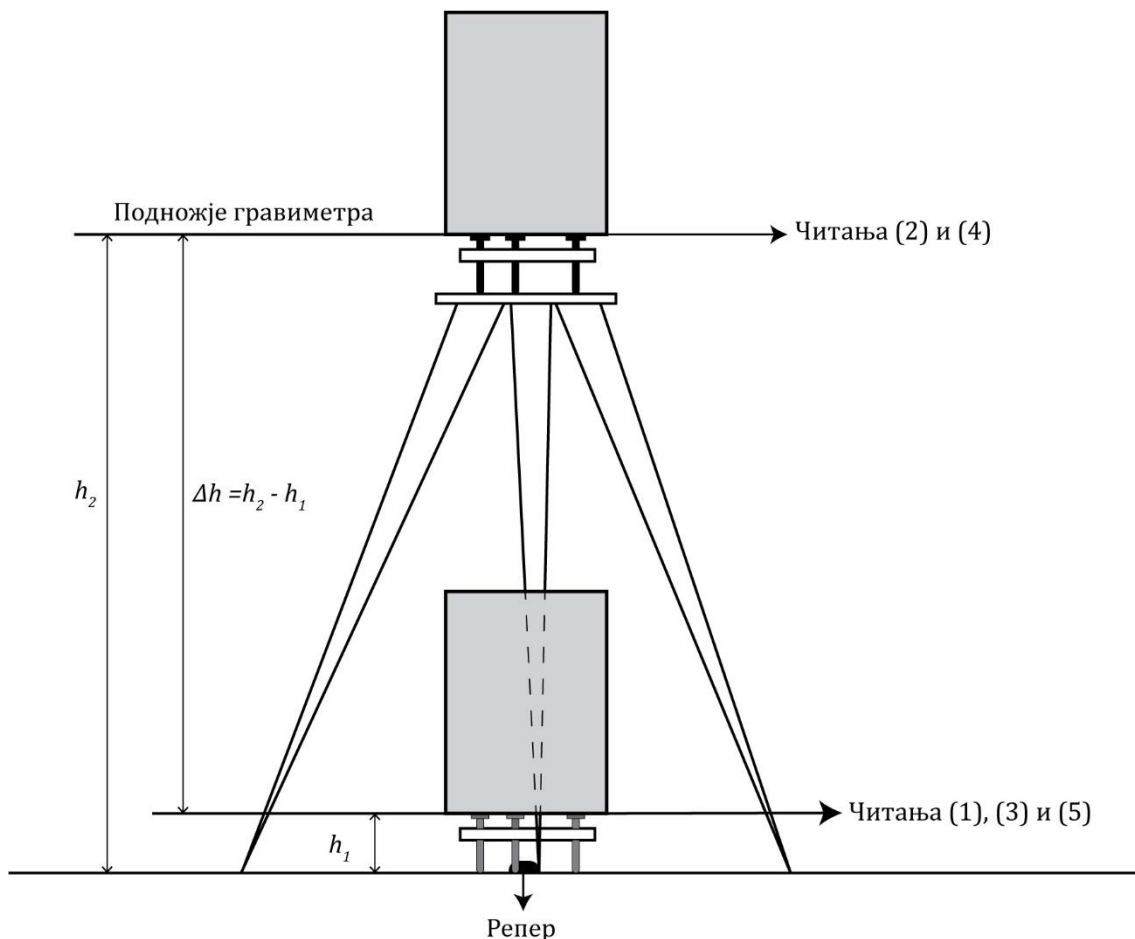
Крајњи резултат трансформација је уређена тројка координата $(\varphi_{GRS80}, \lambda_{GRS80}, H^o)$ чиме је дефинисан дигитални модел терена, који је, као такав, коришћен у даљим нумеричким истраживањима.

¹ International Terrestrial Reference System – Међународни терестрички референтни систем

Вертикални градијент убрзања силе Земљине теже

Припрема података мерења вертикалног градијента убрзања теже подразумева одређивање поправке за ход гравиметра и поправљање резултата мерења за вредност израчунатог хода, за сваку станицу појединачно.

Као што је већ речено, на свакој тачки, на којој је рачунат вертикални градијент убрзања теже, убрзање је мерено пет пута по шеми Д-Г-Д-Г-Д. Усвојено је да се „доња“ читања означавају са (1), (3) и (5), а „горња“ са (2) и (4) (Слика 6.6).



Слика 6.6: Положај инструмента приликом мерења

Након што су извршена читања релативним гравиметром, при чему су примењене корекције и филтери подешени у менију инструмента (рачунање лунисоларног утицаја, сеизмички филтер, филтер за аутоматско одбацавање и други), уследила је обрада резултата мерења.

Вертикални градијент убрзања теже рачунат је по формули 6.2. Висинска разлика мерена је до на милиметар, а разлика убрзања рачуната је за сваку тачку појединачно као аритметичка средина из четири вредности добијених из разлике „доњег“ и „горњег“ читања инструмента.

Одређене су средње вредности из шест читања за сваку станицу (под станицом се подразумева „доње“, односно „горње“ читање инструмента) као проста аритметичка средина:

$$\bar{g}^{(i)} = \frac{\sum_{k=1}^6 g_k^{(i)}}{6}, \quad i = 1, 2 \dots 5. \quad (6.18)$$

За одређивање хода инструмента на свакој станици, коришћена је следећа процедура:

1. Срачуната је разлика последњег и првог читања, то јест разлика два доња читања на свакој тачки у којој је рачунат вертикални градијент убрзања теже:

$$\Delta g' = \bar{g}^{(5)} - \bar{g}^{(1)}. \quad (6.19)$$

2. Срачуната је разлика времена при последњем доњем читању и првом доњем читању на свакој тачки:

$$\Delta t' = t^{(5)} - t^{(1)}. \quad (6.20)$$

3. Одређена је вредност вертикалног градијента теже са вредностима срачунатим у прва два корака процедуре као количник разлике читања и разлике времена:

$$VG' = \frac{\Delta g'}{\Delta t'}. \quad (6.21)$$

4. Свако читање поправљено је за ход гравиметра коришћењем израза:

$$g^{(i)} = \bar{g}^{(i)} - (t_1^{(i)} - t_1^{(1)}) VG', \quad i = 1, 2 \dots 5. \quad (6.22)$$

5. Срачунате су четири вредности Δg^i из пет читања поправљених за ход гравиметра коришћењем израза:

$$\Delta g^i = |g^{(i+1)} - g^{(i)}|, \quad i = 1, 2 \dots 4. \quad (6.23)$$

6. Срачуната је средња вредност Δg као проста аритметичка средина из четири претходно одређене вредности разлике читања $\Delta g^i, i = 1, 2 \dots 4$:

$$\Delta g = \frac{\sum_{i=1}^4 \Delta g^i}{4}. \quad (6.24)$$

7. Вертикални градијент убрзања теже за сваку тачку одређен је као количник претходно одређене средње вредности Δg и мерене висинске разлике Δh .

Вредности разлике убрзања (Δg), стандардне девијације разлике убрзања ($\sigma_{\Delta g}$) и разлике висина (Δh) одређене су за све тачке мерне кампање, након чега су срачунате вредности вертикалног градијента теже за 77 тачака Основне гравиметријске мреже и две тачке са студентске праксе на Златибору. Три тачке (FR0002, R102 и R766A) измерене су два пута. Разлог поновног мерења је претпоставка да квалитет мерења није био задовољавајући.

Резултати мерења на фундаменталном реперу бр. 1 (FR0001) приказани су на слици 6.7.

	Станице	Читања гравиметра	Стандардна девијација	Број одбачених мерења	UTC време											
	Gradijent FR0001															
	/-----LINE-----	STATION	ALT.	GRAV.	SD.	TILT-X	TILT-Y	TEMP	TIDE	DUR	REJ	TIME	DEC	TIME+DATE	TERRAIN	DATE
Д (1)	0.000000	41.000000	0.1740	6186.100	0.022	1.8	2.5	-5.41	0.068	60	2	11:41:48	44255.48658	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	41.000000	0.1740	6186.102	0.015	3.8	3.4	-5.42	0.068	60	0	11:42:58	44255.48739	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	41.000000	0.1740	6186.104	0.012	4.9	5.1	-5.42	0.068	60	0	11:44:03	44255.48814	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	41.000000	0.1740	6186.104	0.014	5.0	5.7	-5.43	0.068	60	0	11:45:08	44255.48889	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	41.000000	0.1740	6186.107	0.023	5.0	6.2	-5.45	0.067	60	8	11:46:13	44255.48964	0.0000	2021/03/29	
Г (2)	0.000000	41.000000	0.1740	6186.107	0.013	5.1	7.4	-5.46	0.067	60	0	11:47:19	44255.49041	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	42.000000	1.4760	6185.701	0.017	-1.8	1.4	-5.58	0.064	60	0	12:01:17	44255.50009	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	42.000000	1.4760	6185.698	0.069	-3.4	0.5	-5.59	0.063	60	0	12:02:27	44255.50090	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	42.000000	1.4760	6185.703	0.024	-2.7	2.2	-5.60	0.063	60	0	12:03:32	44255.50165	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	42.000000	1.4760	6185.701	0.032	-4.8	4.8	-5.61	0.063	60	0	12:04:37	44255.50240	0.0000	2021/03/29	
Д (3)	0.000000	42.000000	1.4760	6185.705	0.028	-5.6	5.1	-5.61	0.062	60	9	12:05:42	44255.50315	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	42.000000	1.4760	6185.704	0.045	-5.3	7.0	-5.62	0.062	60	15	12:06:48	44255.50391	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	43.000000	0.1740	6186.122	0.023	0.2	1.4	-5.63	0.061	60	4	12:09:07	44255.50552	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	43.000000	0.1740	6186.124	0.010	-0.4	2.1	-5.63	0.061	60	0	12:10:17	44255.50633	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	43.000000	0.1740	6186.125	0.013	-0.6	2.5	-5.63	0.061	60	0	12:11:22	44255.50708	0.0000	2021/03/29	
Г (4)	0.000000	43.000000	0.1740	6186.125	0.011	-0.7	3.2	-5.64	0.060	60	0	12:12:27	44255.50783	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	43.000000	0.1740	6186.127	0.012	-0.8	3.3	-5.64	0.060	60	0	12:13:32	44255.50858	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	43.000000	0.1740	6186.128	0.009	-0.2	2.9	-5.64	0.059	60	0	12:14:38	44255.50935	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	44.000000	1.4760	6185.696	0.029	1.3	8.5	-5.64	0.058	60	16	12:17:36	44255.51140	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	44.000000	1.4760	6185.703	0.025	8.4	2.7	-5.64	0.058	60	6	12:18:46	44255.51221	0.0000	2021/03/29	
Д (5)	0.000000	44.000000	1.4760	6185.703	0.016	-1.3	8.6	-5.64	0.057	60	0	12:19:51	44255.51296	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	44.000000	1.4760	6185.704	0.035	3.9	2.3	-5.64	0.057	60	0	12:20:56	44255.51371	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	44.000000	1.4760	6185.706	0.035	2.2	6.6	-5.64	0.057	60	0	12:22:01	44255.51446	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	44.000000	1.4760	6185.704	0.061	3.6	4.6	-5.64	0.056	60	5	12:23:07	44255.51523	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	45.000000	0.1740	6186.111	0.022	-0.5	2.6	-5.64	0.052	60	6	12:32:20	44255.52162	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	45.000000	0.1740	6186.110	0.009	-0.1	6.6	-5.64	0.052	60	1	12:33:30	44255.52243	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	45.000000	0.1740	6186.114	0.020	-2.7	8.1	-5.64	0.051	60	1	12:34:35	44255.52318	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	45.000000	0.1740	6186.115	0.015	1.2	-0.6	-5.63	0.051	60	6	12:35:40	44255.52393	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	45.000000	0.1740	6186.117	0.015	-1.0	0.8	-5.63	0.050	60	0	12:36:45	44255.52468	0.0000	2021/03/29	
	0.000000	45.000000	0.1740	6186.119	0.013	-4.8	1.6	-5.64	0.050	60	0	12:37:51	44255.52544	0.0000	2021/03/29	

Слика 6.7: Записник мерења вертикалног градијента убрзања силе Земљине теже инструментом CG-5

6.4 АНАЛИЗА И ФОРМИРАЊЕ ФИНАЛНОГ СКУПА ПОДАТАКА

Анализа података и формирање финалног скупа података осигурава коначни скуп података који ће се, на основу усвојених критеријума и извршене селекције, користити у даљим нумеричким истраживањима.

Пре одабира коначног скупа тачака на којима је мерен вертикални градијент, а у циљу валидације модела, извршена је анализа основних статистичких података скупа мерења.

Анализа је извршена на основу следећих дескриптивних статистика:

1. Минималне и максималне вредности скупа података S :

$$X_{min} \leq X, \quad \forall X \in S,$$

$$X_{max} \geq X, \quad \forall X \in S.$$

2. Мера централне тенденције:

- Аритметичке средине:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n},$$

где је n број података скупа података S .

- Медијане (m):

- за n непарно:

$$m = X_{\frac{n+1}{2}},$$

○ за n парно:

$$m = \frac{1}{2} \left(X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n+1}{2}} \right),$$

при чему су подаци скупа S поређани у растућем редоследу, то јест:

$$X_1, X_2, \dots, X_n; X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n.$$

- Модуса (μ):

$$\mu = L + h \frac{f_m - f_1}{(f_m - f_1) + (f_m - f_2)},$$

где је L доња граница модалног интервала, h ширина интервала (класе), f_m фреквенција модалне класе, f_1 фреквенција пре модалног интервала, а f_2 фреквенција после модалног интервала.

3. Мера варијабилитета:

- Интервала (ранга):

$$R = X_{max} - X_{min}.$$

- Стандардне девијације:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - X)^2}.$$

Дескриптивна статистика скупа који је обухватао вертикалне градијенте теже мерене на тачакама гравиметријске мреже, у три манастира и два градијента са студентске праксе приказана је у табели 6-4.

Табела 6-4: Основни статистички подаци мерених вертикалних градијената убрзања теже

Мерени вертикални градијент убрзања теже [$\mu\text{Gal/m}$] Скуп свих тачака	
n	84
X_{min}	169.1
X_{max}	377.3
\bar{X}	285.9
m	302.5
μ	313.1
R	208.2
σ	41.9

Након анализе свих релевантних статистичких обележја скупа података, усвојено је да у даљим прорачунима неће учествовати следећа мерења:

- мерења у манастирима Гргетег на Фрушкој гори, Градац у Рашкој и Сићево у близини Ниша,
- поновљена мерења на тачкама FR0002, R102 и R766A,
- мерења на тачкама R430 и R3102 и
- једно мерење са студентске праксе.

Мерења у манастирима нису коришћена из разлога што се гравиметар приликом мерења налазио унутар објекта (маса). Другим речима, мерења вертикалног градијента убрзања теже другачије се тумаче када су извршена унутар објекта и изван њих. Подаци о објектима нису садржани у дигиталном моделу терена, па поменути мерења нису коришћена у финалном скупу за валидацију модела.

Друга (поновљена) мерења на тачкама FR0002, R102 и R766A Основне гравиметријске мреже искључена су, јер је мерење вертикалног градијента убрзања теже на њима поновљено без потребе, односно тачност првобитних мерења била је задовољавајућа.

Мерење на тачки 430 није коришћено јер је у питању груба грешка. Резултати мерења на тачкама R430 и R457 који су ишчитани из инструмента, идентични су. Како мерења на тачки R430 нису пронађена у теренским записницима следио је закључак да је тачка R430 груба грешка, док је R457 укључена у финални скуп података.

С обзиром да подаци о положају тачке R3102 нису нигде забележени (недостају координате тачке), мерења вертикалног градијента теже на њој такође нису коришћена.

Мерење на тачки VG182 није коришћено због недостатка информација о положају привремене тачке на којој је измерен вертикални градијент убрзања теже.

Након што је извршена анализа скупа резултата мерења у погледу тачности и просторног распореда, формиран је финални скуп података кога чини 76 тачака које задовољавају критеријуме квалитета. Срачунати су основни статистички подаци финалног скупа података који су приказани у табели 6-5.

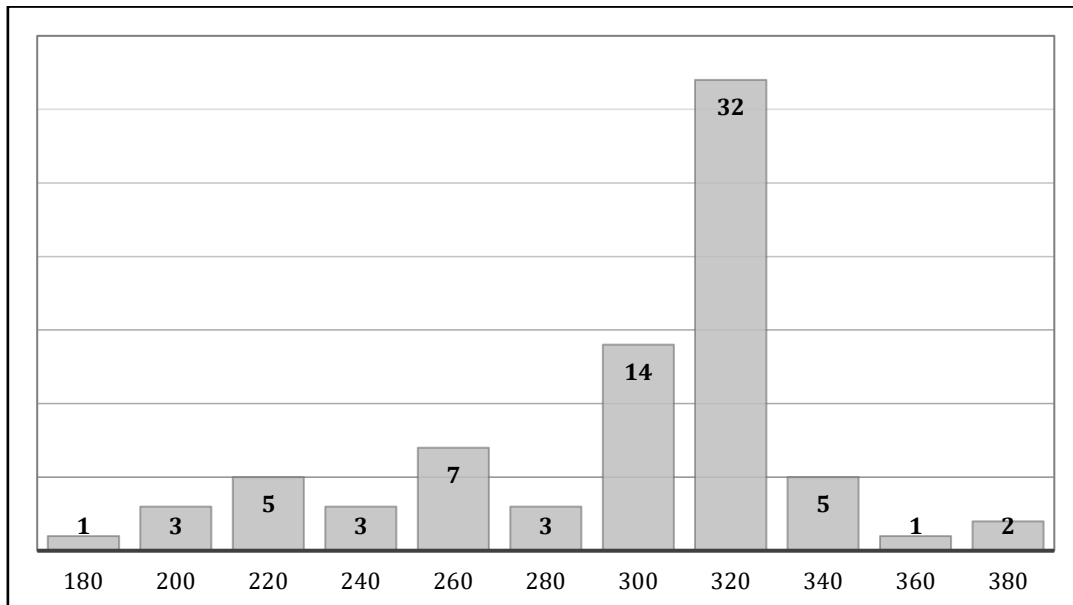
Табела 6-5: Основни статистички подаци финалног скупа података

Мерени вертикални градијент убрзања теже [$\mu\text{Gal}/\text{m}$] Финални скуп података	
n	76
X_{min}	169.1
X_{max}	377.3
\bar{X}	286.3
m	302.5
μ	313.1
R	208.2
σ	42.4

На основу расподела фреквенција мерених вертикалних градијената убрзања теже датих у табели 6-6, конструисан је хистограм приказан на слици 6.8.

Табела 6-6: Расподела фреквенција мерених вертикалних градијената убрзања теже

Интервал вредности вертикалног градијента	Фреквенција	Релативна фреквенција [%]
[160, 180]	1	1
[180, 200]	3	4
[200, 220]	5	7
[220, 240]	3	4
[240, 260]	7	9
[260, 280]	3	4
[280, 300]	14	18
[300, 320]	32	42
[320, 340]	5	7
[340, 360]	1	1
[360, 380]	2	3



Слика 6.8: Графички приказ расподела фреквенција

Око 60% резултата налази се у интервалу [280, 340], што значи да око 60% резултата има вредност изузетно блиску теоријској вредности, односно вредности нормалног градијента убрзања теже (308.6 $\mu\text{Gal}/\text{m}$).

6.5 ПРИНЦИП РАДА СОФТВЕРА

Као што је већ речено, за рачунање гравитационог утицаја локалних и удаљених топографских маса коришћен је програм креиран од стране проф. др Олега Одаловића. Софтвер подржава различите могућности када су у питању топографске масе, њихова подела, висина и густина елемената.

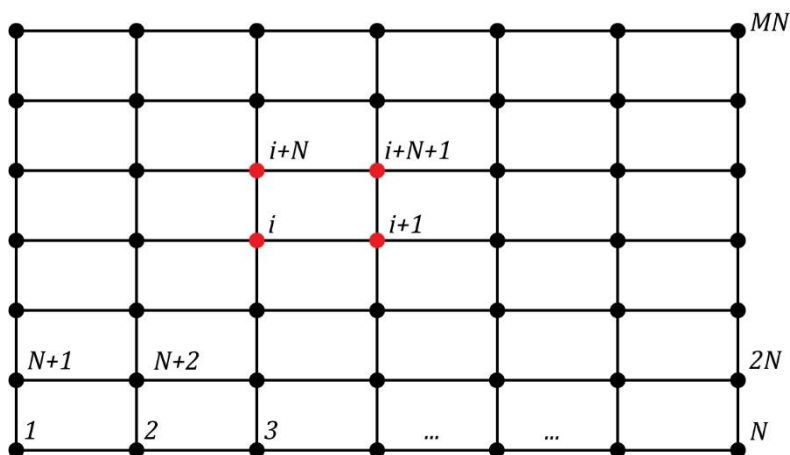
- **Подела топографских маса на праве правоугаоне призме (полиедре)**

Пре рачунања гравитационог утицаја, све топографске масе подељене су на праве правоугаоне призме или на полиедре, у зависности која опција софтвера је одабрана (Слика 6.9).

Подела топографских маса територије Србије ($41^\circ \leq \varphi \leq 47^\circ$, $18^\circ \leq \varphi \leq 24^\circ$) извршена је на основу дигиталног модела терена, док је подела ван граница Србије извршена на основу SRTM глобалног модела терена.

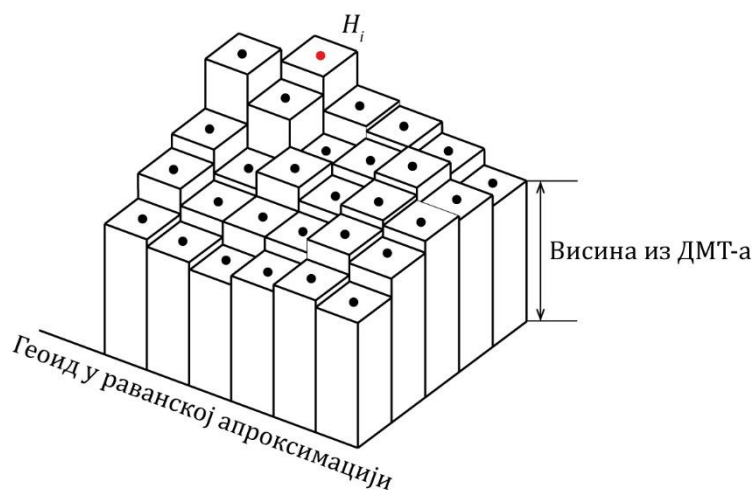
Сумирањем утицаја свих призми (полиедара) добијен је укупан гравитациони утицај топографских маса изнад геоида. Исти поступак примењен је и на топографске масе које се налазе између геоида и елисоида. Разлика је у томе што је у првом случају коришћена ортометријска висина, док је за рачунање гравитационог утицаја маса између геоида и елисоида коришћена ундулација геоида и елипсоидна висина тачака у којима се одређује вертикални градијент убрзања теже.

Дигитални модел терена коришћен у нумеричким прорачунима састоји се од низа правилно распоређених дискретних тачака H_i , $i = 1, 2, \dots, MN$, где су N и M бројеви грида као што је приказано на слици 6.9.



Слика 6.9: Усвојена нотација за коришћени дигитални модел терена

На слици 6.10 приказан је начин поделе топографских маса коришћен у нумеричким прорачунима при подели топографије на праве правоугаоне призме. Димензије призми одговарају димензијама призми одабраног дигиталног модела терена, док је њихова висина једнака висини из дигиталног модела терена, или им је додељена друга висина (примера ради, ортометријска висина из премера).

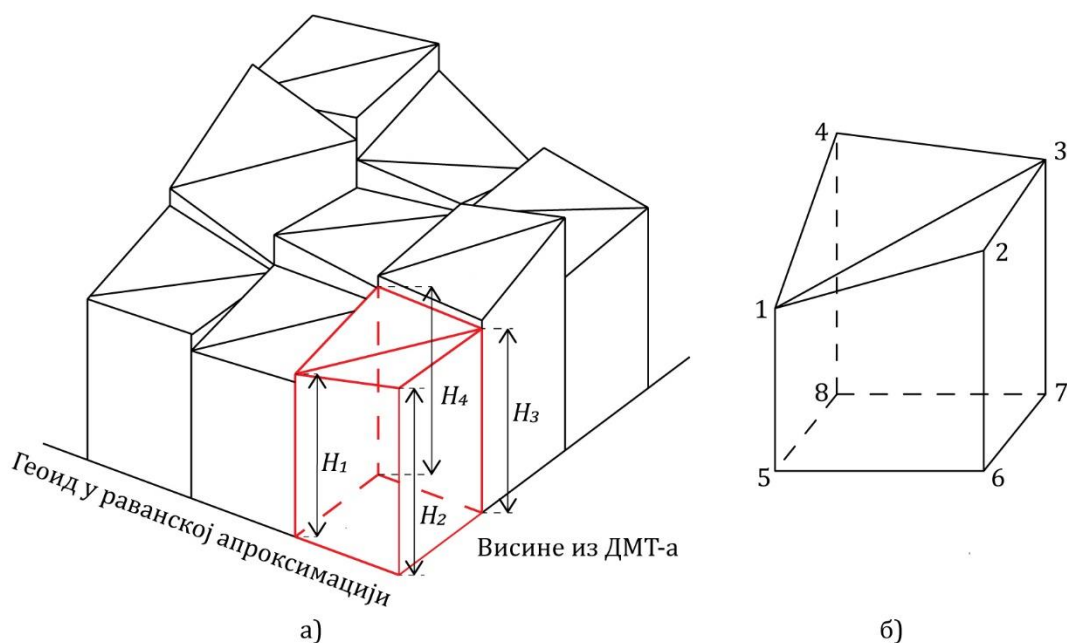


Слика 6.10: Подела топографије на праве правоугаоне призме

При подели топографије на полиедре коришћен је нешто другачији принцип поделе маса. Изглед и положај полиедара у односу на коришћени дигитални модел терена приказан је на слици 6.11.

Сваке четири околне тачке (H_i , H_{i+1} , H_{i+N} и H_{i+N+1} на слици 6.9) конструишу правоугаоник. Спајањем дијагонала југозапад-североисток (тачке 1 и 3 на слици 6.11б) или северозапад-југоисток (тачке 2 и 4 на истој слици) формирају се два троугла. На тај начин, сваки правоугаоник мреже дели се на две троугласте стране тако да имамо $2MN$ полигона (троугла) који представљају топографску површину. На тај начин, површина терена подељена је на $2MN$ троугла (полигона). На основу креираних троуглова, формирају се полиедри чија су темена на H_i растојању од доње хоризонталне референтне равани.

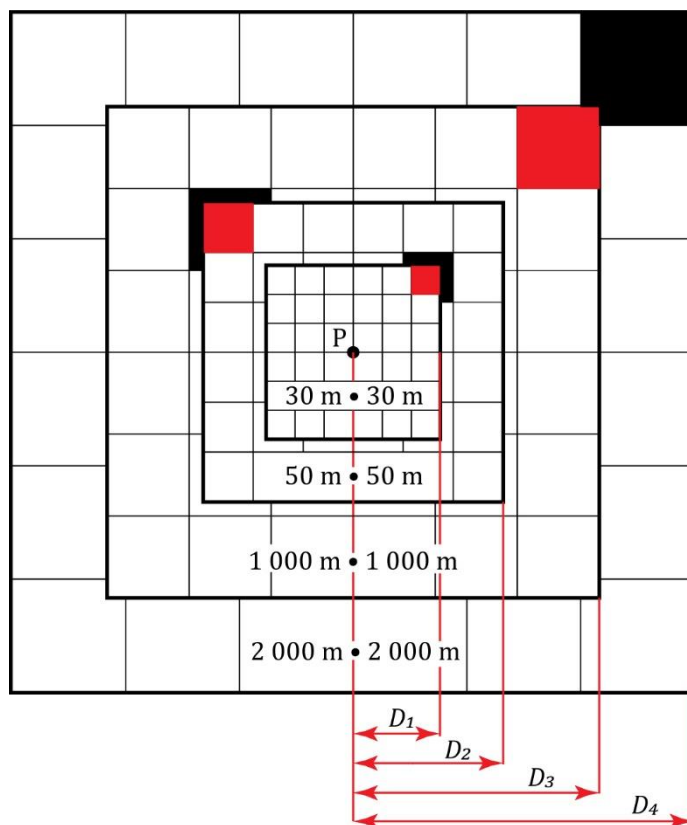
Гравитациони градијент убрзања теже који настаје услед одређене призме (полиедра), у произвољој тачки P , рачуна се на основу израза датих у претходном поглављу.



Слика 6.11: Подела топографије на правилне полиедре

У прорачунима у оквиру овог поглавља, од тачке рачунања до растојања D_1 коришћен је ДМТ највеће резолуције (30 m • 30 m). Од растојања D_1 до растојања D_2 коришћен је ДМТ мање резолуције (50 m • 50 m), док су од растојања D_2 до D_3 и од D_3 до D_4 коришћени дигитални модели терена резолуције 1 000 m • 1 000 m и 2 000 m • 2 000 m, тим редом (Слика 6.12).

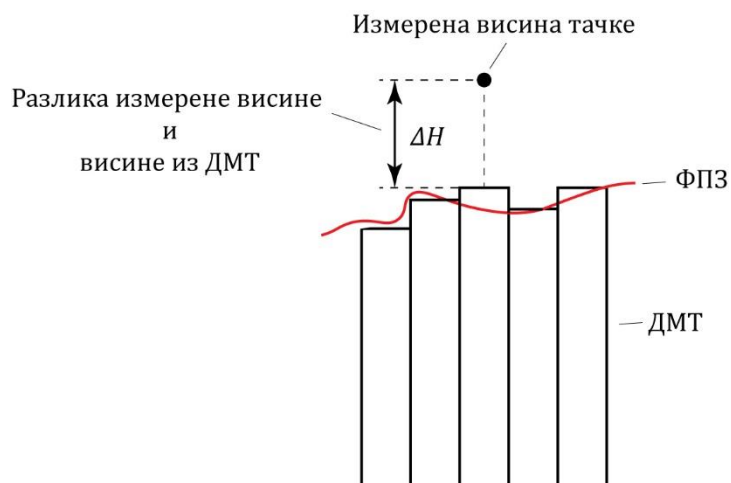
Највеће потешкоће приликом писања кода програма представљало је рачунање утицаја призми (полиедара) које се налазе на местима на којима престаје употреба дигиталног модела терена једне (мање) резолуције, а почиње коришћење дигиталног модела терена друге (веће) резолуције (Слика 6.12).



Слика 6.12: Приказ проблематике преласка са мање на већу резолуцију ДМТ

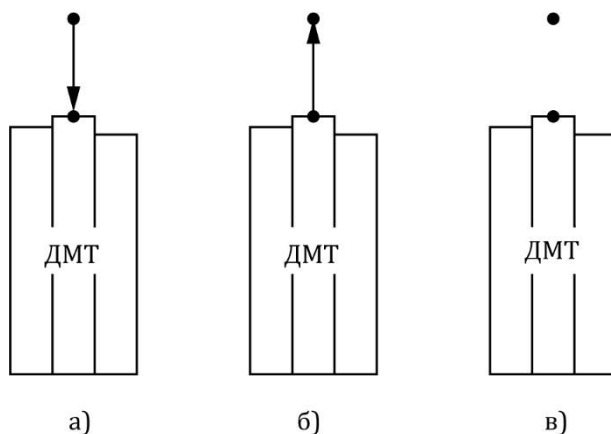
- **Висине елемената**

Из разлога што је висина у оквиру дигиталног модела терена одређена другачијим техникама у односу на конвенционалне геодетске технике, долази до разлике, односно одступања између измерене висине и висине исте тачке у ДМТ (Слика 6.13).



Слика 6.13: Одступање између измерене висине и висине из ДМТ

Узимајући у обзир неусклађеност ових висина, могућ је одабир неке од три опције падајућег менија софтвера. На слици 6.14 приказане су три могућности, када је у питању висина H одређеног елемента (призме). Прва могућност је опција „Усвојити висине из ДМТ“ (слика 6.14а). На тај начин, сваком елементу додељује се вредност висине коју има одговарајућа призма у дигиталном моделу терена. Друга опција је „Елементу доделити висину тачке“ (слика 6.14б), којом се сваком елементу додељује висина која је учитана у програм заједно са осталим подацима (ова опција користи се када постоји мерена висина за одређену тачку, која је по правилу, веће тачности од тачности висине из ДМТ). Софтвер подржава и могућност да за конкретан случај изаберемо висину коју ћемо користити, што је подржано одабиром опције „Висине ДМТ и тачке остају непромењене“ (слика 6.14в).



Слика 6.14: Три опције програма

Поред поменутих могућности, софтвер има опцију и за подешавање висине h изнад површине призме на коју се односи моделирани вертикални градијент убрзања теже. Подразумевана вредност висине је 1 м.

- **Густина елемената**

Подразумевана вредност густине призми (полиедара) је просечна, константна вредност густине Земљине коре од 2.67 g/cm^3 . Програм омогућава и додељивање друге вредности густине, као и употребу 2Д геолошког модела и 3Д дигиталног модела густина.

6.6 МОДЕЛИРАЊЕ ВЕРТИКАЛНОГ ГРАДИЈЕНТА УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

Моделирање вертикалних градијената убрзања силе теже реализовано је коришћењем програма у 85 372 тачке. Предикција је извршена у свим тачкама детаљног гравиметријског премера које обухватају топографско подручје са преко 2 500 m разлике (варијације) у надморској висини терена.

Коришћењем хеуристичке методе „покушај и проба“, након чега је спроведена анализа гравитационог утицаја локалних и удаљених топографских маса на призму чији се гравитациони утицај рачуна, утврђене су оптималне вредности растојања D_1, D_2, D_3 и D_4 (Marušiak et al., 2016). Усвојене вредности поменутих растојања и зоне коришћења дигиталних модела одређених резолуција дате су у табели 6-7.

Табела 6-7: Усвојене вредности зоне коришћења дигиталног модела терена одређене резолуције

Резолуција ДМТ	Зона коришћења ДМТ
30 m • 30 m	0 m до 250 m
50 m • 50 m	250 m до 5 240 m
1 000 m • 1 000 m	5 240 m до 28 800 m
2 000 m • 2 000 m	28 800 m до 167 350 m

Приликом моделирања, подешена је подразумевана вредност висине h изнад површине призме па се добијене вредности вертикалног градијента теже у свим тачкама детаљног гравиметријског премера односе на тачку која је 1 m изнад површине терена (призме).

По питању густина елемената, моделирање вертикалних градијената теже реализовано је применом константне вредности густине свих призми у свим тачкама детаљног гравиметријског премера. Усвојена је вредност 2.67 g/cm^3 .

Основни статистички подаци скупа моделираних вредности вертикалног градијента у свим тачкама детаљног гравиметријског премера приказани су у табели 6-8.

Табела 6-8: Дескриптивна статистика скупа моделираних вредности вертикалног градијента убрзања теже у свим тачкама детаљног гравиметријског премера

Моделирани вертикални градијенти убрзања теже [$\mu\text{Gal}/\text{m}$] Тачке детаљног гравиметријског премера	
n	85 372
X_{min}	95.9
X_{max}	537.8
\bar{X}	311.8
m	312.7
μ	311.2
R	441.9
σ	42.2

Из резултата приказаних у табели 6-8 могуће је уочити следеће:

- минимална вредност вертикалног градијента разликује се за 212.7 $\mu\text{Gal}/\text{m}$ (2 127 E) од нормалног вертикалног градијента,
- максимална вредност вертикалног градијента разликује се за 229.2 $\mu\text{Gal}/\text{m}$ (2 292 E) од нормалног вертикалног градијента и
- средња вредност моделираног вертикалног градијента (311.8 $\mu\text{Gal}/\text{m}$) блиска је нормалном вертикалном градијенту (308.6 $\mu\text{Gal}/\text{m}$).

На основу великог броја резултата моделирања, могуће је тврдити да се усвајањем нормалног вертикалног градијента теже при редукацији теже могу направити грешке од најмање 0.2 mGal/m на подручју Републике Србије.

С друге стране, блиске вредности нормалног вертикалног градијента убрзања теже и средње вредности моделираног вертикалног градијента убрзања теже у потпуности су у складу са теоријским поставкама.

У табели 6-9 одвојено су приказани основни статистички подаци дела моделираних вредности вертикалног градијента у свим тачкама детаљног гравиметријског премера који се односи на рачунање утицаја топографских маса које се налазе између елипсоида и геоида (Ågren et al., 2011).

Табела 6-9: Дескриптивна статистика дела моделираних вредности вертикалног градијента који је последица топографских маса између елипсоида и геоида

Моделирани вертикални градијенти убрзања теже [$\mu\text{Gal}/\text{m}$] Тачке детаљног гравиметријског премера Део топографских маса од елипсоида до геоида	
n	85 372
X_{min}	$-2 \cdot 10^{-6}$
X_{max}	$2 \cdot 10^{-6}$
\bar{X}	$-3 \cdot 10^{-8}$
m	$-4 \cdot 10^{-8}$
μ	$-2 \cdot 10^{-9}$
R	$-4 \cdot 10^{-6}$
σ	$-4 \cdot 10^{-7}$

Приказани резултати који имају изузетно мале вредности дела градијента који је последица топографских маса између елипсоида и геоида, доводе до закључка да утицај маса између ове две референтне површи није имао значајан ефекат на финалну вредност моделираног вертикалног градијента.

6.7 ВАЛИДАЦИЈА МОДЕЛА

Валидација модела изведена је упоређивањем моделираних и мерених вредности вертикалних градијената убрзања силе Земљине теже на 76 тачака (тачке Основне гравиметријске мреже и једна тачка са Златибора). Након што је формиран финални скуп података за проверу исправности модела, извршено је моделирање вертикалних градијената у тачкама на којима је мерен градијент теже, и то:

- поделом топографских маса на праве правоугаоне призме и
- поделом топографских маса на полиедре.

У оба случаја, за густину топографских маса усвојена је просечна, константна вредност густине Земљине коре од 2.67 g/cm^3 .

Моделирање вертикалног градијента при подразумеваној висини изнад терена

Основни статистички подаци моделираних вредности градијента теже у тачкама у којима је мерен вертикални градијент, при подели топографских маса на праве правоугаоне призме и на полиедре, и при вредности висине од 1 m изнад површине терена (подразумевана вредност висине), дати су у табелама 6-10 и 6-11, тим редом.

Табела 6-10: Основни статистички подаци моделираних вредности вертикалног градијента убрзања теже у тачкама у којима је мерен вертикални градијент – подела на призме

Моделирани вертикални градијенти убрзања теже [$\mu\text{Gal}/\text{m}$] Тачке у којима је мерен вертикални градијент Подела топографских маса на праве правоугаоне призме	
n	76
X_{min}	167.6
X_{max}	379.4
\bar{X}	294.2
R	211.8
σ	42.5

Табела 6-11: Дескриптивна статистика моделираних вредности вертикалног градијента убрзања теже у тачкама у којима је мерен вертикални градијент – подела на полиедре

Моделирани вертикални градијенти убрзања теже [$\mu\text{Gal}/\text{m}$] Тачке у којима је мерен вертикални градијент Подела топографских маса на полиедре	
n	76
X_{min}	-38.4
X_{max}	397.6
\bar{X}	283.0
R	436.0
σ	76.8

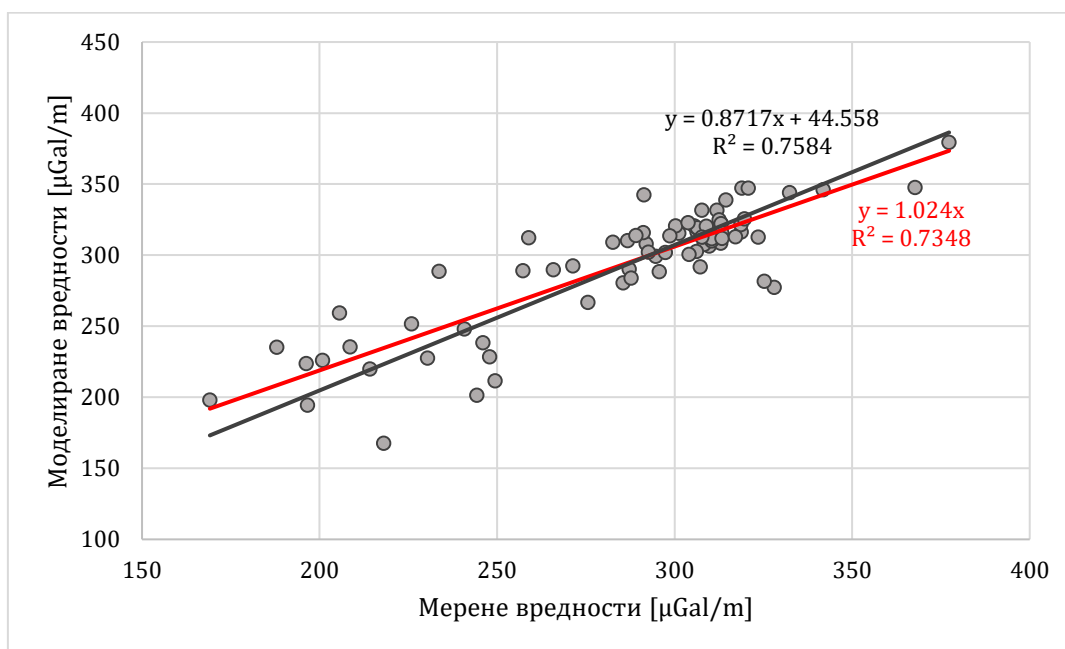
У случају моделирања вертикалног градијента са полиедрима, у резултатима приказаним у табели 6-11, уочава се негативна вредност вертикалног градијента. Од 76 тачака на којима је извршена предикција, само је на фундаменталном реперу број FR1110 вредност моделираног градијента негативна. Прегледом теренских записника, установљено је да је у непосредној близини репера FR1110 стрма стена (изражена топографија), која није довољно добро описана дигиталним моделом терена. Тачка FR1110 није коришћена у даљим прорачунима.

Основни статистички подаци који обухватају скуп од 75 моделираних вредности коришћењем полиедара дати су у табели 6-12.

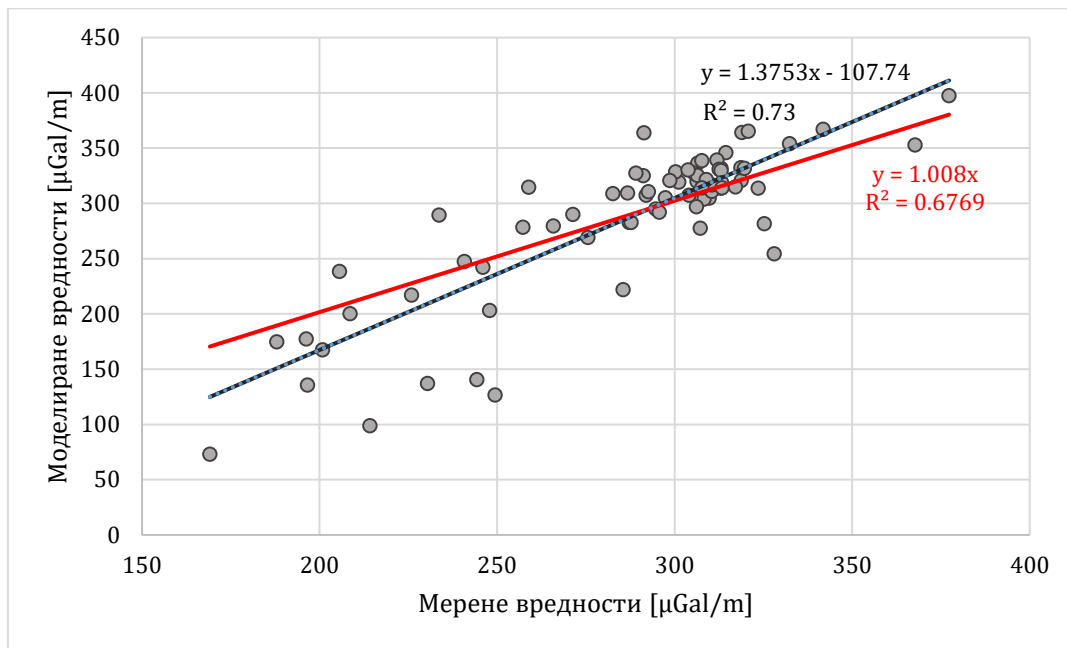
Табела 6-12: Дескриптивна статистика моделираних вредности вертикалног градијента убрзања теже у тачкама у којима је мерен вертикални градијент – подела топографских маса на полиедре

Моделирани вертикални градијенти убрзања теже [$\mu\text{Gal}/\text{m}$] Тачке у којима је мерен вертикални градијент Подела топографских маса на полиедре	
n	75
X_{min}	73.3
X_{max}	397.6
\bar{X}	287.3
R	324.3
σ	67.6

На слици 6.15 приказан је график који показује корелацију између измерених и моделираних вредности вертикалних градијената теже при подели топографских маса на праве правоугаоне призме, док је график корелације при подели топографије на полиедре дат на слици 6.16. За приказане графике исцртана је функција линеарне регресије са једначинама $y = ax + b$ (црна права на сликама) и $y = ax$ (црвена права на графицима).



Слика 6.15: Корелација између мерене и моделиране вредности – подела на призме



Слика 6.16: Корелација између мерене и моделиране вредности – подела на полиедре

Моделирање вертикалног градијента на средњој вредности висине изнад терена на којој је мерен вертикални градијент убрзања теже

Приликом моделирања вертикалних градијената убрзања теже на тачкама на којима је градијент и измерен, подешена је подразумевана вредност висине h изнад површине призме (полиедра). На тај начин добијен је први скуп вредности моделираног вертикалног градијента теже који се односи на тачку која је 1 m изнад површине терена (табеле 6-10 и 6-12).

Такође, одређена је просечна (средња) вредност висине на којој је мерен вертикални градијент убрзања теже као аритметичка вредност свих висина (свих тачака) изнад терена. Тако добијен скуп вредности моделираног вертикалног градијента теже односи се на тачку која је 0.83 m изнад површине терена.

Основни статистички подаци који се односе на упоређивање вредности моделираног вертикалног градијента теже два поменути скупа (за висину 1 m и 0.83 m) дати су у табели 6-13.

Табела 6-13: Упоређивање вредности моделираног вертикалног градијента за две различите висине изнад терена – подела на призме

Разлика моделираног вертикалног градијента теже за две усвојене висине [μGal/m] Тачке у којима је мерен вертикални градијент Подела топографских маса на призме	
n	76
X_{min}	-1.14
X_{max}	0.01
\bar{X}	-0.19
σ	0.25

Прорачуни у којима је усвојена просечна висина извршени су само за случај када се топографске масе деле на праве правоугаоне призме.

Средња вредност разлике при моделирању градијента са подразумеваном вредношћу висине и са просечном висином износи $-0.2 \mu\text{Gal}/\text{m}$, што је безначајно у поређењу са грешком мерења.

Грешка моделирања

Усвајајући мерене вредности градијента убрзања теже као условно тачне, грешка моделирања дефинише се као разлика између моделиране и мерене вредности вертикалног градијента теже. Након формирања скупа разлика између моделираних и мерених вредности (скуп грешака моделирања), извршена је анализа грешака моделирања на 76 тачака за предикцију применом призми и на 75 тачака за предикцију применом полиедара.

Основни статистички подаци грешака моделирања вертикалног градијента теже при подели топографских маса на праве правоугаоне призме дати су у табели 6-14. На основу расподела фреквенција (Табела 6-15) конструисан је хистограм (Слика 6.17).

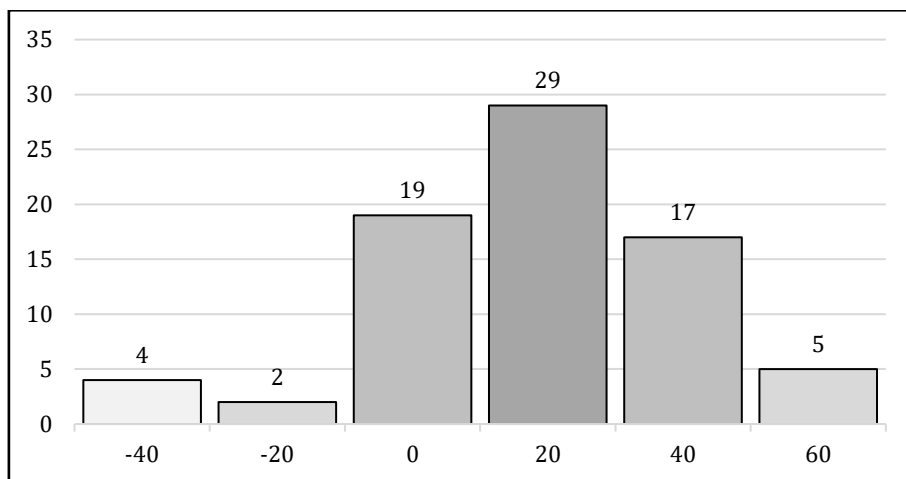
Основни статистички подаци грешка моделирања вертикалног градијента теже при подели топографских маса на полиедре дати су у табели 6-16. У табели 6-17 приказана је расподела фреквенција грешке моделирања вертикалног градијента теже при предикцији коришћењем полиедара, док је на слици 6.18 дат график те расподеле.

Табела 6-14: Основни статистички подаци разлике моделираних и мерених вредности вертикалног градијента теже при подели топографских маса на праве правоугаоне призме

Грешка моделирања вертикалног градијента [$\mu\text{Gal}/\text{m}$] Подела топографских маса на праве правоугаоне призме	
n	76
X_{min}	-50.74
X_{max}	54.79
\bar{X}	7.8
R	105.5
σ	21.6

Табела 6-15: Расподела фреквенција грешке моделирања вертикалног градијента убрзања теже – подела на призме

Интервал вредности вертикалног градијента	Фреквенција	Релативна фреквенција [%]
[-60, -40]	4	5.3
[-40, -20]	2	2.6
[-20, 0]	19	25.0
[0, 20]	29	38.2
[20, 40]	17	22.4
[40, 60]	5	6.6



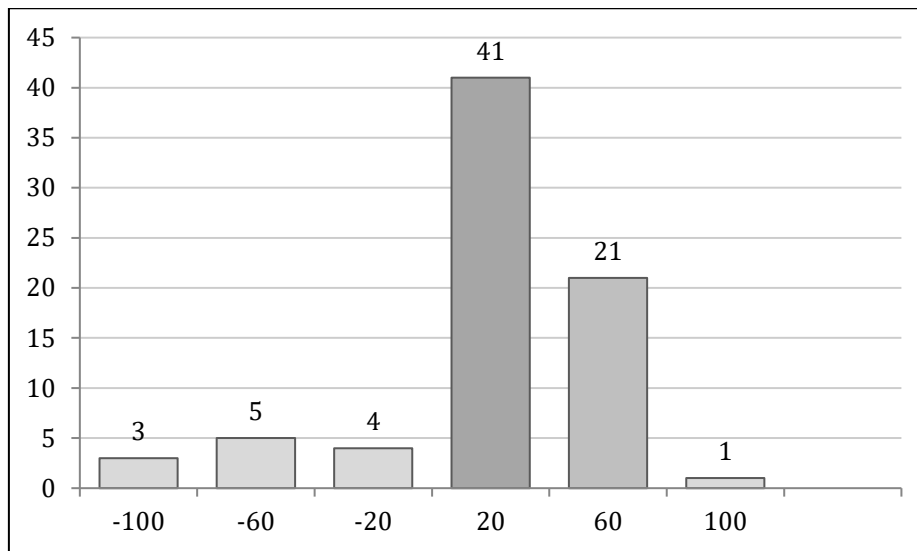
Слика 6.17: Графички приказ расподела фреквенција

Табела 6-16: Дескриптивна статистика грешке моделирања вертикалног градијента убрзања теже при подели топографских маса на полиедре

Грешка моделирања вертикалног градијента [$\mu\text{Gal}/\text{m}$] Подела топографских маса на полиедре	
n	75
X_{min}	-122.7
X_{max}	72.8
\bar{X}	0.1
R	195.5
σ	38.5

Табела 6-17: Расподела фреквенција грешке моделирања вертикалног градијента убрзања теже – подела на полиедре

Интервал вредности вертикалног градијента	Фреквенција	Релативна фреквенција [%]
[-140, -100]	3	4
[-100, -60]	5	7
[-60, -20]	4	5
[-20, 20]	41	55
[20, 60]	21	28
[60, 100]	1	1



Слика 6.18: Графички приказ расподела фреквенција

Критеријум за усвајање модела

Валидација модела подразумева задовољење критеријума постављених на почетку овог поглавља. С обзиром да проширена мерна несигурност резултата мерења вертикалног градијента износи $30 \mu\text{Gal}/\text{m}$, модел се сматра исправним ако грешка моделирања не прелази наведену вредност. У том смислу, валидација модела подразумева задовољење следећег критеријума:

- у тачкама у којима је измерен вертикални градијент убрзања теже, модел се сматра исправним ако је грешка моделирања исте или мање вредности од грешке мерења.

Грешка моделирања, при подели топографских маса на праве правоугаоне призме и при подели на полиедре, упоређена је са грешком мерења у тачкама које чине скуп за валидацију модела.

На основу спроведених статистичких анализа финалног скупа тачака за валидацију модела при подели топографских маса на праве правоугаоне призме, може се закључити да за 14% тачака вредност разлике моделиране и мерене вредности вертикалног градијента прелази вредност усвојену горе дефинисаним критеријумом. Другим речима, креирани модел вертикалног градијента не испуњава захтеве у погледу тачности моделирања за 14% резултата.

Нешто лошији резултати добијају се при подели топографских маса на полиедре. У случају моделирања вертикалног градијента коришћењем полиедара, 28% резултата не задовољава постављене критеријуме исправности модела.

6.8 ЗАВИСНОСТ ГРЕШКЕ МОДЕЛИРАЊА И ПОЛОЖАЈА

На основу креираног модела вертикалног градијента убрзања теже, могуће је извршити предикцију вертикалног градијента независно од географског положаја. Дата претпоставка формулисана је хипотезама:

Н₀: Грешка моделирања не зависи од географског положаја (латитуде и лонгитуде).

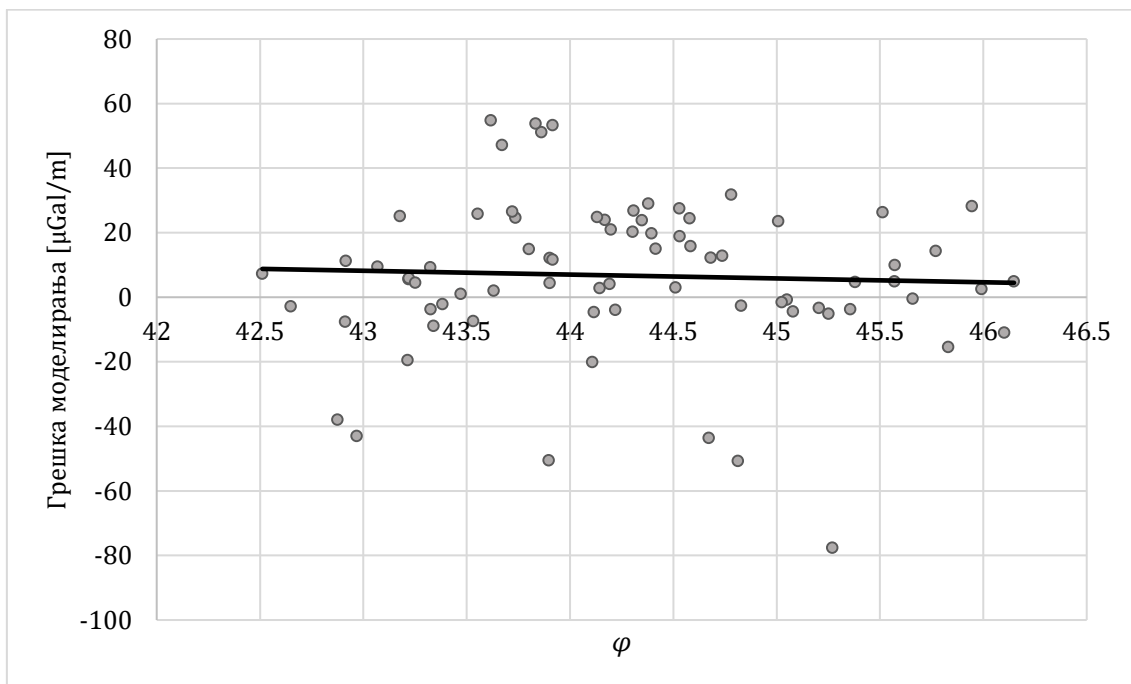
Н₁: Грешка моделирања зависи од географског положаја (латитуде и лонгитуде).

У процесу обраде и анализе података коришћена је техника које се примењује за нумеричке и континуалне варијабле, Пирсонов тест корелације.

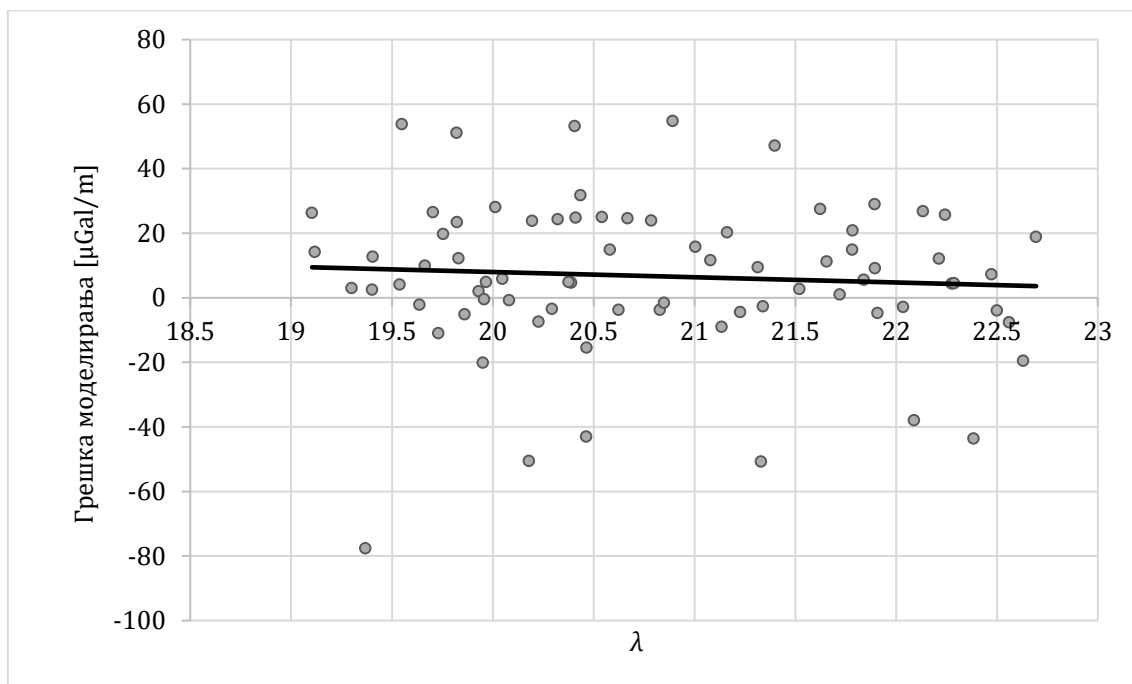
Циљ статистичког тестирања хипотеза је да се потврди или одбаци главна (нулта) хипотеза од које се пошло у истраживању, а то је да грешка моделирања не зависи од географског положаја. На тај начин би се доказало да је квалитет предикције исти, независно од места примене модела.

Пирсонов тест

На основу вредности грешке моделирања скупа тачака у којима је извршена предикција вертикалног градијента теже и које су измерене, и одговарајућих вредности геодетске ширине, конструисан је график зависности грешке моделирања и геодетске ширине. График је приказан на слици 6.19, док је на слици 6.20 приказан график зависности грешке моделирања и геодетске дужине.



Слика 6.19: Графички приказ зависности грешке моделирања и геодетске ширине



Слика 6.20: Графички приказ зависности грешке моделирања и геодетске дужине

На основу дијаграма растурања може се закључити да претпоставка о хомогености и линеарности варијанси није задовољена. Дијаграми растурања показују да не постоји корелација између променљивих, односно грешка моделирања и геодетска ширина, као и грешка моделирања и геодетска дужина нису корелисане величине.

Као што је речено, у процесу обраде и анализе података коришћен је Пирсонов тест корелације. Резултати теста приказани су у табели 6-18.

Табела 6-18: Резултати Пирсоновог теста

Коефицијент корелације r	φ	λ	Грешка моделирања
φ	1		
λ	-0.50	1	
Грешка моделирања	-0.04	-0.07	1
t – статистика	0.392	0.599	
p – вредност	0.696	0.551	

Резултат примењеног Пирсоновог теста корелације показује да између геодетске ширине (φ) и грешке моделирања не постоји корелација ($r = -0.04$). Такође, тест показује да између грешке моделирања и геодетске дужине (λ) не постоји корелација ($r = -0.07$). Поред тога, корелације нису статистички значајне ($p > 0.001$), због чега се потврђује H_0 , тј. грешка моделирања вертикалног градијента убрзања теже за коришћене податке не зависи од географског положаја (латитуде и лонгитуде). Дакле, креирани модел вертикалног градијента силе Земљине теже подједнако добро описује топографске масе независно од географског положаја.

6.9 ЗАВИСНОСТ ГРЕШКЕ МОДЕЛИРАЊА И ВИСИНЕ ТЕРЕНА

На основу креираног модела вертикалног градијента теже, могуће је извршити предикцију вертикалног градијента теже независно од висине терена. Дата претпоставка формулисана је хипотезама:

H_0 : Грешка моделирања не зависи од висине терена.

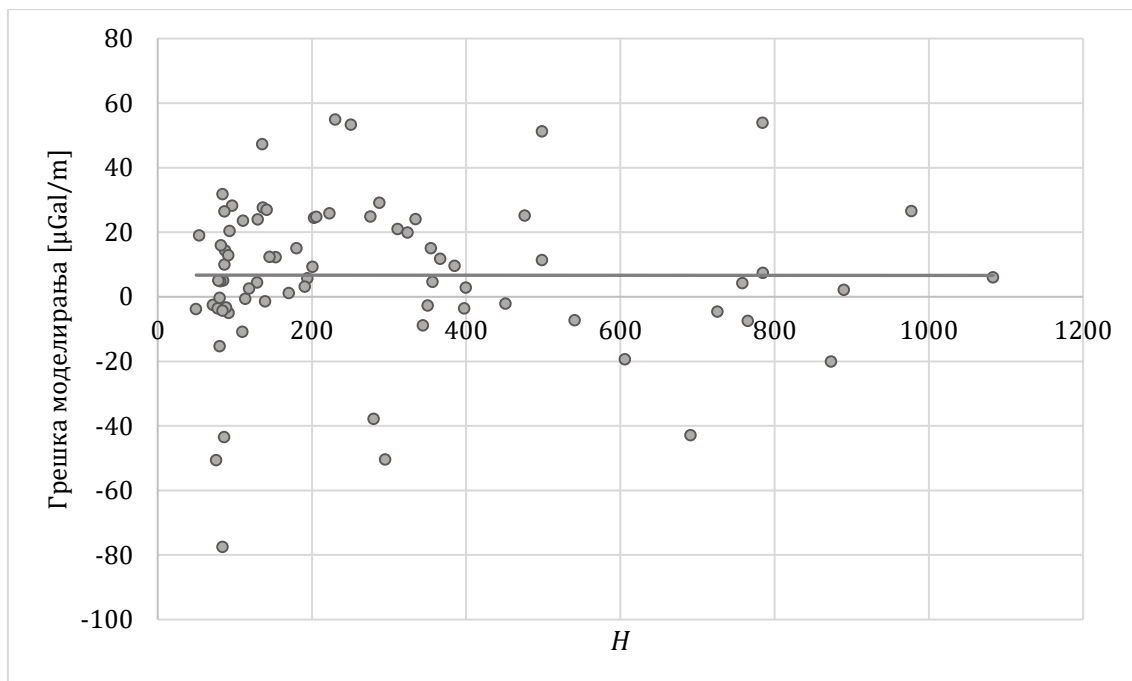
H_1 : Грешка моделирања зависи од висине терена.

У процесу обраде и анализе података коришћен је Пирсонов тест корелације.

Пирсонов тест

На основу вредности висине и одговарајућих вредности грешака моделирања, које се односе на скуп тачака у којима је измерен и моделиран вертикални градијент убрзања теже, конструисан је график зависности висине и грешке моделирања.

График зависности висине и грешке моделирања приказан је на слици 6.21, док су резултати Пирсоновог теста приказани у табели 6-19.



Слика 6.21: Корелација грешке моделирања и ортометријске висине

На основу приказаног графика може се закључити да не постоји корелација између грешке моделирања вертикалног градијента убрзања теже за коришћене податке и ортометријске висине.

Резултат примењеног Пирсоновог теста корелације показује да између висине и грешке моделирања не постоји корелација ($r = -0.001$). Тест је показао да је $p > 0.001$ што указује да корелација није статистички значајна за податке који су коришћени при тестирању, због чега се потврђује нулта хипотеза (Табела 6-19).

Табела 6-19: Резултат Пирсоновог теста

Коефицијент корелације r	N	Грешка моделирања
N	1	
Грешка моделирања	-0.001	1
t – статистика	0.008	
p – вредност	0.994	

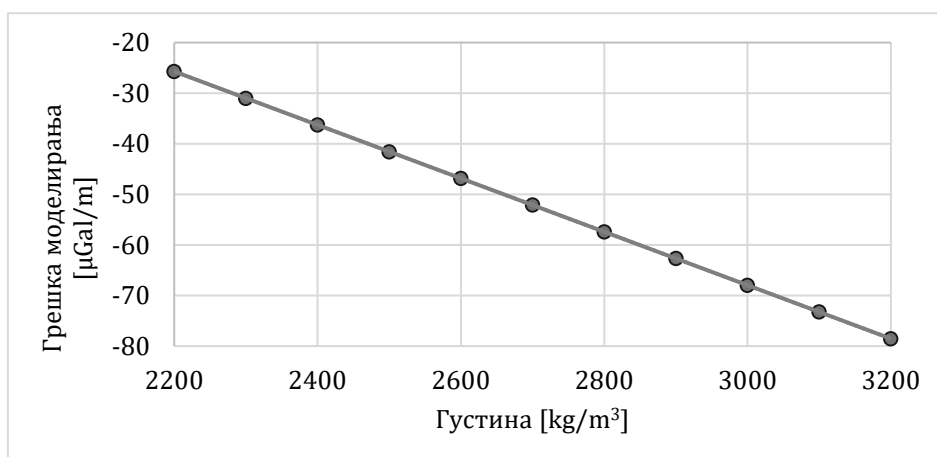
Статистичким тестирањем нулте хипотезе од које се пошло у истраживању, применом Пирсоновог теста корелације, показује се да грешка моделирања не зависи од висине топографије. Другим речима, квалитет предикције не зависи од надморске висине подручја над којим се примењује.

6.10 ПРОМЕНА ГУСТИНЕ У ПОЈЕДИНАЧНИМ ТАЧКАМА

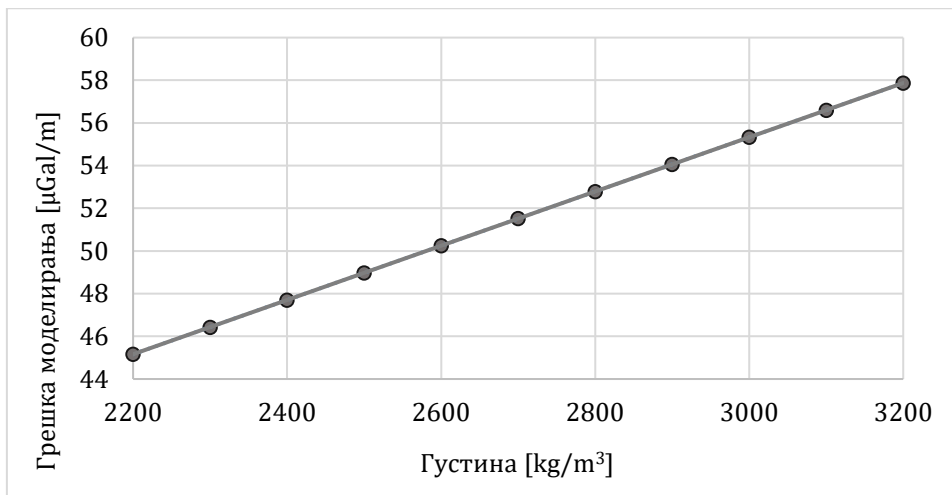
Генерално, грешке моделирања вертикалног градијента имају већу вредност у пределима са израженијим рељефом (примера ради, западна и југозападна Србија, Фрушка гора у Војводини и слично).

У тачкама финалног скупа за валидацију модела у којима је грешка моделирања већа од грешке мерења, спроведене су додатне анализе. Додатни прорачуни извршени су у циљу анализе утицаја усвајања различите густине призмичке при моделирању вертикалног градијента теже. Такође, додатни прорачуни извршени су и за тачке које се налазе у близини Фрушке горе, Ртња и планине Рудник. Прорачуни су извршени тако што је вертикални градијент рачунат за различите вредности просечне густине Земљине коре, након чега је извршено упоређивање вредности грешке моделирања. Усвојена је вредност просечне густине од 2.2 до 3.2 g/cm³.

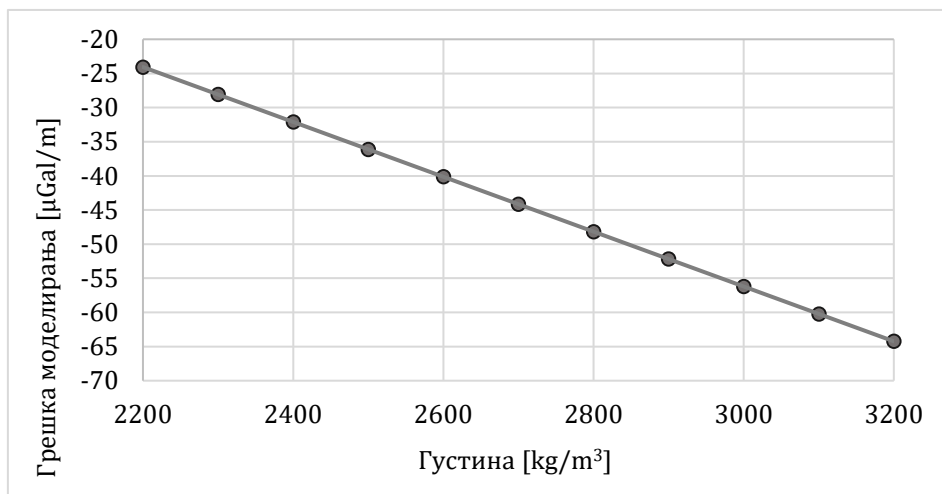
На сликама 6.22, 6.23 и 6.24 приказано је смањење грешке моделирања за тачке чија вредност разлике мерене и моделиране вредности вертикалног градијента не испуњава захтеве у погледу тачности моделирања. Све три тачке налазе се у југозападној Србији. Графици који описују промене грешке моделирања тачака у близини Фрушке горе, Ртња и Рудника при различитим просечним густинама Земљине коре приказани су на сликама 6.25, 6.26 и 6.27, респективно.



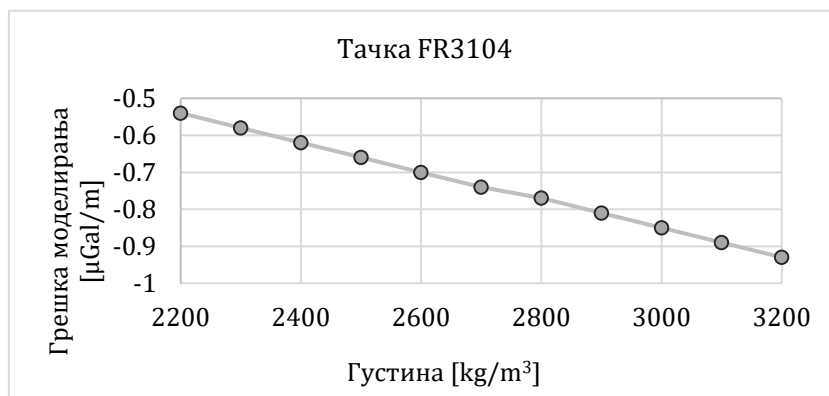
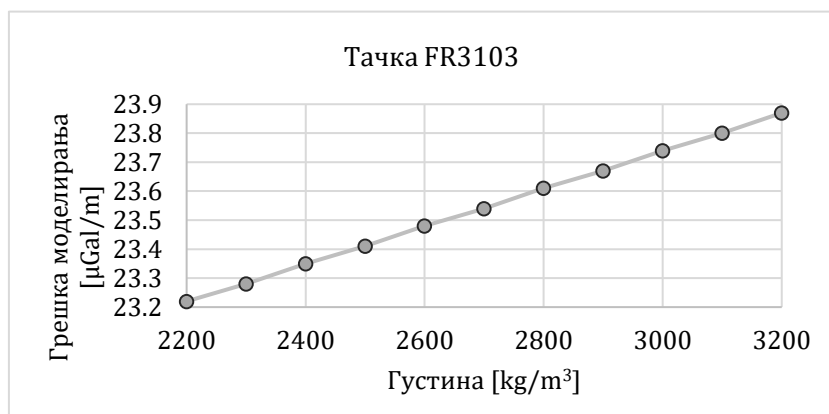
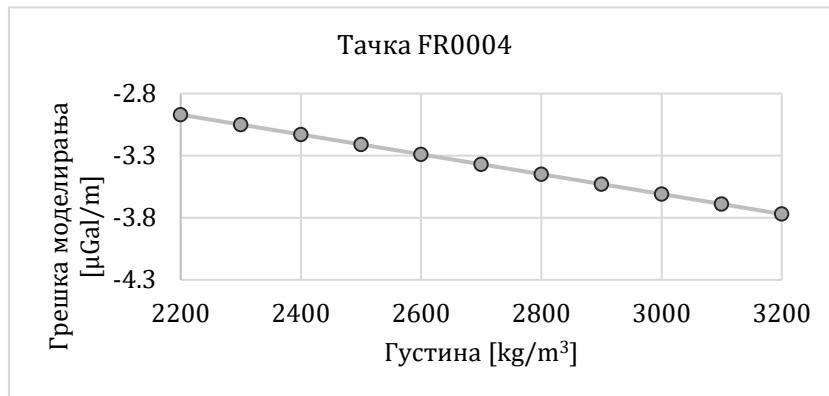
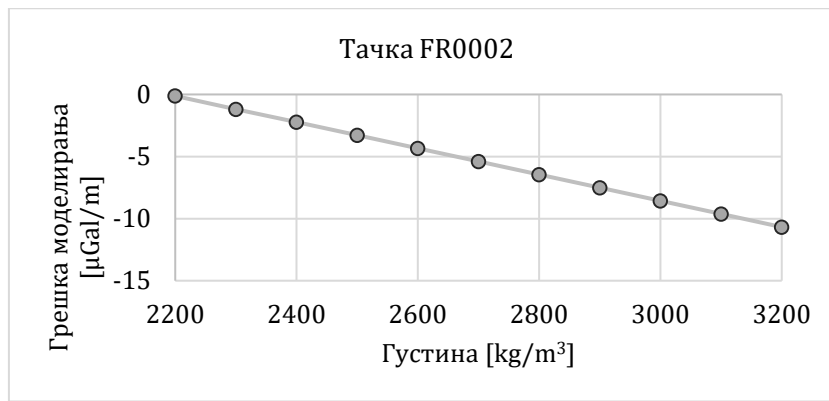
Слика 6.22: Промена грешке моделирања са повећањем просечне густине Земљине коре – тачка FR1110



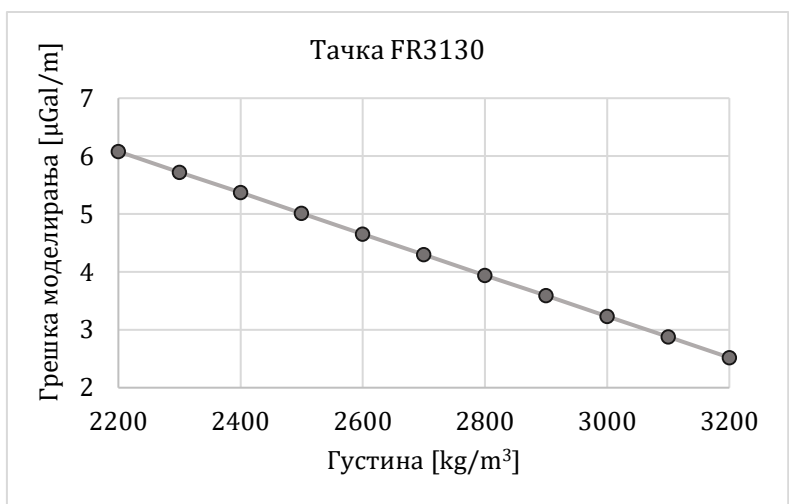
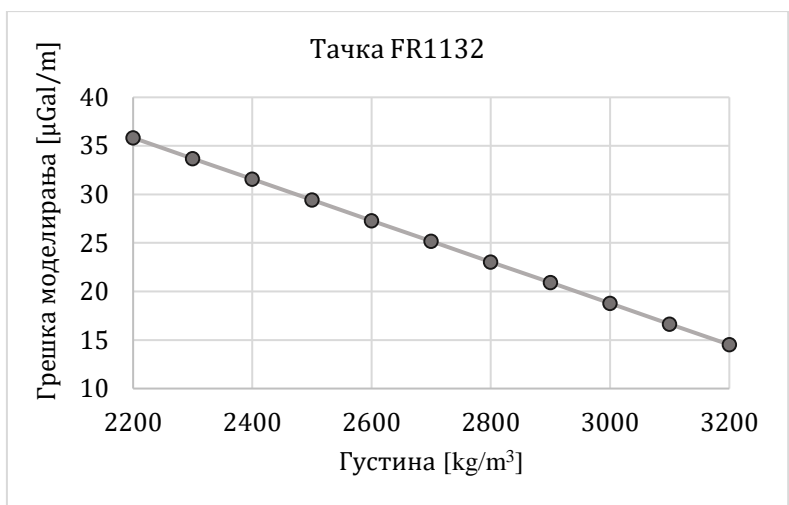
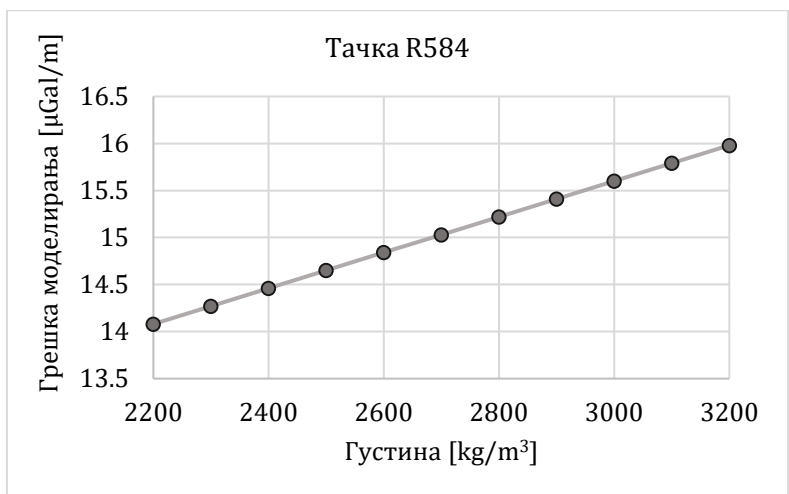
Слика 6.23: Промена грешке моделирања са повећањем просечне густине Земљине коре – тачка FR1111



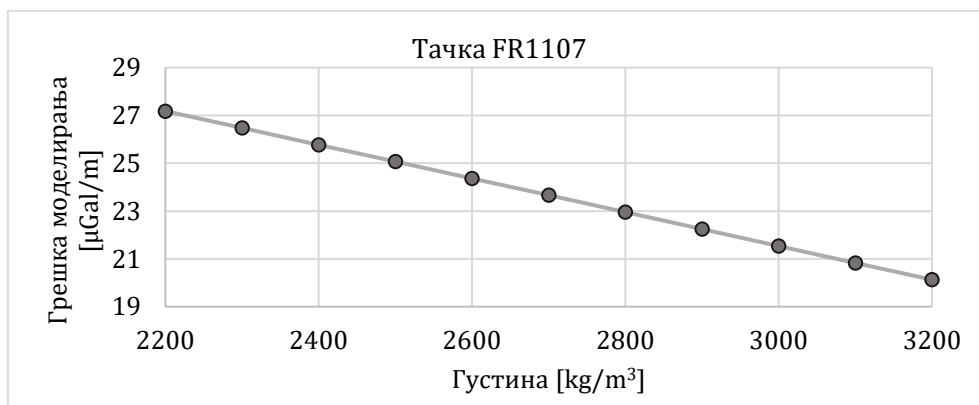
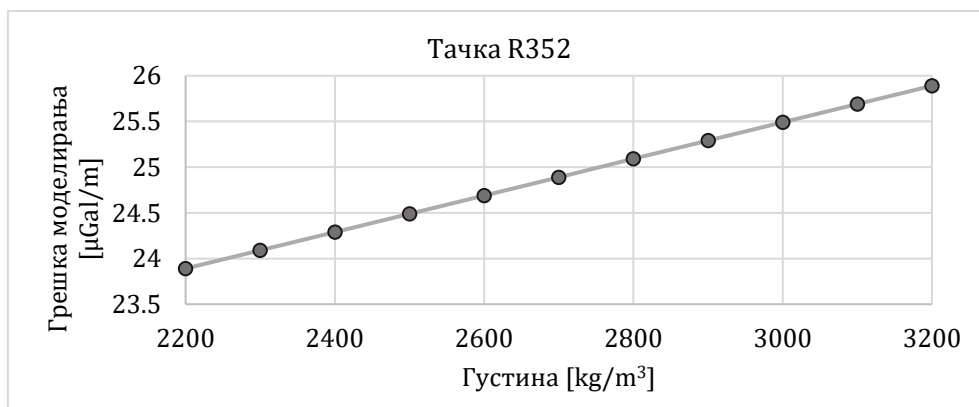
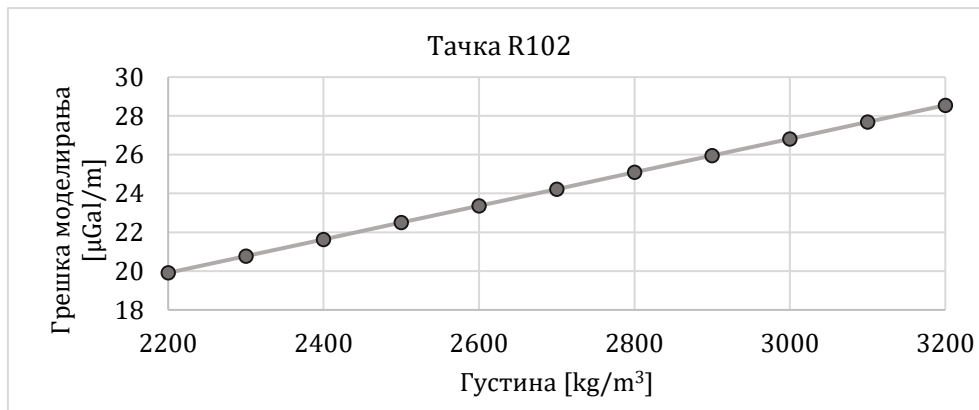
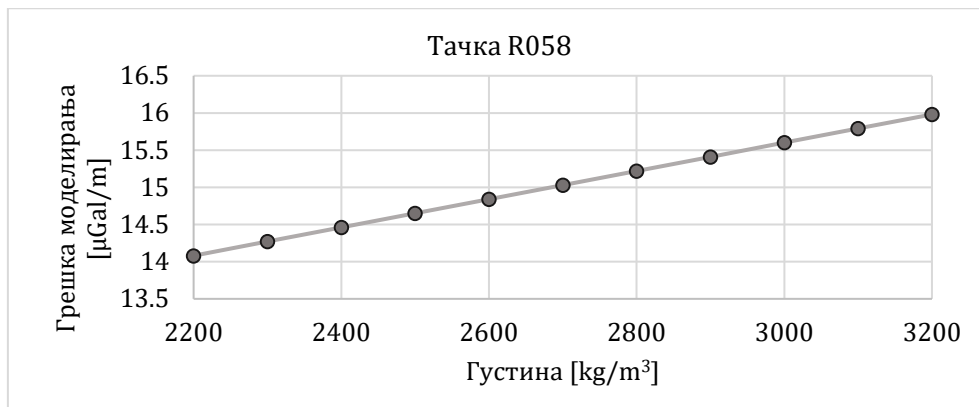
Слика 6.24: Промена грешке моделирања са повећањем просечне густине Земљине коре – тачка R245



Слика 6.25: Промена грешке моделирања са повећањем просечне густине Земљине коре за тачке у близини Фрушке горе



Слика 6.26: Промена грешке моделирања са повећањем просечне густине Земљине коре за тачке у близини планине Ртањ



Слика 6.27: Промена грешке моделирања са повећањем просечне густине Земљине коре за тачке у близини Рудника

На свим графиконима уочава се линеарна промена грешке моделирања са повећањем просечне густине Земљине коре.

Графици 6.22, 6.23 и 6.24 приказују да је могуће смањење грешке моделирања променом просечне густине. У две тачке (R245 и FR1110) од три приказане, вредност грешке моделирања сведена је на вредност мању од 30 $\mu\text{Gal}/\text{m}$. Дакле, одговарајућа вредност просечне густине Земљине коре може побољшати модел вертикалног градијента, тако да креирани модел испуњава захтеве у погледу тачности моделирања.

У случају тачака у близини Фрушке горе, евидентно је боље слагање мерених и моделираних вредности вертикалног градијента са смањењем просечне густине Земљине коре. Најмања вредност грешака моделирања остварена је при густини од $2.2 \text{ g}/\text{cm}^3$.

У близини планина Ртањ и Рудник вредност грешке моделирања флукутира при повећању просечне густине Земљине коре. У свим тачкама у којима су извршени додатни прорачуни, промена вредности грешке моделирања није значајна. Максимална вредност побољшања је реда $20 \mu\text{Gal}/\text{m}$.

ПОГЛАВЉЕ 7

ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

Вертикални градијент убрзања силе Земљине теже игра важну улогу у истраживању Земљиног гравитационог поља. Његова стварна вредност потребна је при решавању различитих геодетских и геофизичких практичних проблема. Уз брзи развој техника моделирања Земљиног гравитационог поља, могуће је прецизно апроксимирати вертикални градијент убрзања теже коришћењем података о терену.

Процедура коришћена у поглављу нумеричка истраживања разликује се од до сада коришћених поступака, и у том смислу представља допринос научном истраживању на тему моделирања вертикалног градијента убрзања силе Земљине теже.

У оквиру ове дисертације развијен је модел градијента убрзања теже применом скупа теоријских једначина које омогућавају предикцију података независно од географског положаја и висине терена. Предложене су две методе рачунања гравитационог утицаја топографских маса. Прва метода подразумева поделу топографских маса на праве правоугаоне призме, док друга укључује поделу топографије на полиедре. Добијени подаци предикције потом су упоређени са стварним резултатима мерења, чиме је извршена валидација креираног модела. Примењене технике моделирања припадају групи моделирања „унапред“ и подразумевају употребу модела у сврху симулације исхода.

Коришћена је апроксимација равне Земље и претпостављена је константна густина топографских маса.

7.1 ЗАКЉУЧЦИ

Модел вертикалног градијента убрзања теже креиран је на основу података о терену доступних у виду дигиталног модела топографије резолуције 30 m • 30 m и веће. С друге стране, у циљу валидације модела, коришћени су расположиви резултати мерења вертикалног градијента убрзања теже, који обухватају мерења на правилно распоређеним тачкама по читавој територији Републике Србије.

Статистичка обрада података мерења вертикалног градијента убрзања теже показује да

- око 60% резултата има вредност блиску нормалној (теоретској) вредности градијента убрзања теже, што је у сагласности са теоријским поставкама.

Упркос потврђивању теоријске вредности градијента теже, мерења у Републици Србији поткрепљују и бројне студије које истичу разлику између његове стварне и теоријске вредности.

На основу доступних података, може се закључити да:

- разлика између моделираног и вертикалног градијента нормалног убрзања достиже вредност од најмање 0.2 mGal/m.

Ова вредност значајна је за већину геодетских рачунања, у која, између осталог, спада и одређивање геоида.

Из тог разлога, мерење или моделирање вертикалног градијента теже неопходно је у циљу правилније редукције мереног убрзања теже на ниво физичке површи Земље и рачунање аномалија слободног ваздуха на основу стварног вертикалног градијента теже.

Кроз прорачуне и поређења са стварним мерењима, а на основу анализе статистичких података, хистограма и графика корелације моделираног вертикалног градијента и мерених вертикалних градијента теже, изводи се следећи закључак:

- упоређујући две предложене методе моделирања, метода поделе топографских маса на праве правоугаоне призме даје боље резултате апроксимације од методе која подразумева поделу топографије на полиедре.

Полазна хипотеза дисертације, која гласи:

- вертикални градијент убрзања силе Земљине теже може се моделирати на основу доступних података са тачношћу реда тачности мерења, односно са тачношћу од око 30 μ Gal/m (300 E),

потврђује се у 86% тачака скупа за валидацију модела, у случају примене прве методе (подела на призме), односно у 72% тачака, у случају примене методе која подразумева поделу топографије на полиедре.

На тај начин, примарни циљ дисертације, који је подразумевао упоређивање измерених вертикалних градијената теже са израчунатим (моделираним) вредностима на основу утицаја топографских маса и задовољавање постављених критеријума у погледу тачности моделирања, испуњен је за велики број тачака финалног скупа.

Савремене тенденције извођења геодетских радова подразумевају испуњење сложенијих геодетских задатака у што краћим временским периодима. У том смислу, нове технологије олакшавају мерења и, у неким случајевима, елиминишу грешке настале услед утицаја људског фактора.

Одређивање тензора градијента убрзања теже у случају GOCE сателитске мисије и јавно доступни ниво-2 подаци (*level-2 product*) омогућавају обраду сигнала теже ослобођене утицаја људске непажње, и као такви имају своје предности при моделирању вертикалног градијента убрзања силе Земљине теже. С друге стране, њихова обрада подразумева одлично познавање области дигиталне обраде сигнала, па је из тог разлога далеко компликованија од обраде резултата мерења релативним гравиметром.

Када је у питању терестричко одређивање вертикалног градијента теже, ситуација је нешто другачија. Уопштено гледано, процедура која се односи на одређивање вертикалног градијента теже још увек није јасно дефинисана у погледу метода и коришћених инструмената.

У мерним кампањама у Србији коришћен је релативни гравиметар CG-5 и процедуре описане у претходном поглављу.

Премда инструмент CG-5 није компликован за руковање, грешке настале услед људског фактора не могу се избећи. Истовремено, грешке изазване транспортом инструмента

није могуће отклонити чак ни након примене контролних мера које препоручује произвођач. Осим тога, идеални теренски услови врло често нису испуњени (повољне временске прилике – време без ветра и мирна околина – одсуство саобраћаја и сл.). Прегледом теренских записника, који се односе на тачке у којима је грешка моделирања већа од грешке мерења, уочавају се примедбе које се односе на локалну топографију, временске прилике или стање околине (нпр. близина стрме стене, близина објекта – цркве или манастира, присуство јаког ветра и фреквентног саобраћаја и сл.).

Сходно томе, неиспуњеност идеалних услова и присуство грешака, одражава се на понављање мерења, односно поновни излазак на терен.

Из свега наведеног, следи закључак:

- моделирање вертикалног градијента теже, са аспекта економичности, брзине, утрошеног времена и ресурса, далеко је повољније од мерења релативним гравиметром.

На основу статистичког тестирања формулисаних хипотеза и применом метода статистичке анализе, а у вези са корелацијом висине терена и географског положаја са грешком моделирања, произилазе следећи закључци:

- не постоји статистички значајна корелација између грешке моделирања и географског положаја, као ни између висине терена и грешке моделирања,
- креирани модел вертикалног градијента убрзања силе Земљине теже подједнако добро описује топографске масе независно од географског положаја и
- квалитет предикције не зависи од надморске висине подручја над којим се примењује.

Дакле, модел вертикалног градијента убрзања теже применљив је на сваком месту и свуда даје подједнако добре резултате.

Анализа утицаја висине изнад терена за коју се врше прорачуни показује да је разлика резултата моделирања безначајна за две блиске висине (Табела 6-15), односно да се моделирање вертикалног градијента убрзања теже може вршити са подразумеваном вредношћу висине изнад терена.

Анализа утицаја удаљености зона са различитим резолуцијама дигиталног модела терена показује да се повећавањем прве зоне (веће растојање D_1) повећава време рачунања гравитационог утицаја призми (полиедара), а безначајно се повећава квалитет предикције. Стога се могу усвојити растојања, односно зоне коришћења ДМТ предложене у претходном поглављу (Табела 6-7).

Анализа утицаја усвајања различите густине призми при моделирању вертикалног градијента теже показује да промена просечне густине Земљине коре може значајно побољшати модел. С друге стране, корелација густине и вертикалног градијента убрзања теже захтева додатна истраживања. С обзиром да је вертикални градијент осетљив на локалну дистрибуцију густина топографских маса и да су додатне информације о густини углавном непознате или у лошој резолуцији, реални модел густина је неопходан.

С обзиром да се моделирањем примењеним у овој дисертацији остварује захтевана тачност – тачност реда величине тачности мерења, модел вертикалног градијента убрзања теже креиран на основу података о терену доступних у виду дигиталног модела топографије, може се користити за предикцију вертикалног градијента убрзања теже независно од географског положаја и висине терена.

Дакле, модел који се ослања искључиво на податаке о терену у виду ДМТ различите резолуције, односно модел који не узима у обзир густине топографских маса, испуњава тренутне практичне захтеве у геодезији.

7.2 ПРЕПОРУКЕ

Иако се креираним моделом вертикалног градијента убрзања силе Земљине теже остварује захтевана тачност – тачност реда величине тачности мерења, модел вертикалног градијента убрзања теже креиран на основу података о терену доступних у виду дигиталног модела топографије, може се побољшати.

Посебан проблем представља квалитет коришћеног дигиталног модела терена. Када је у питању метод моделирања коришћењем полиедара, бољи дигитални модел терена је нужан. Боља резолуција и већа тачност дигиталног модела терена од пресудног су значаја за рачунање гравитационог утицаја топографских маса. У случају моделирања коришћењем призми, постигнуто је добро слагање између израчунатих (предвиђених) и мерених вертикалних градијената теже у 66 тачака.

Из разлога што су градијенти теже осетљивији на локалну топографију, одступање стварног вертикалног градијента теже од моделиране вредности у извесној мери зависи од оближње топографије. Велики део овог одступања могао би се моделирати под условом да је доступан детаљан дигитални модел терена (примера ради, ДМТ резолуције 1 m • 1 m).

Дакле, са сигурношћу се може тврдити да би

- коришћење дигиталног модела терена веће резолуције и веће тачности унапредило креирани модел вертикалног градијента теже.

Анализом просторног распореда грешке моделирања, уочава се тренд који може имати везе са локалном топографијом и регионалним геолошким структурама. Пошто је претпостављена константна густина топографских маса, односно занемарена је аномалија густина која постоји у топографији, могуће је проширење модела коришћењем других података.

Поред препоруке за унапређење постојећег модела, следе и препоруке за даља истраживања:

- коришћење података о густини, односно имплементација модела густина у креирани модел вертикалног градијента теже;
- коришћење података аномалија убрзања, односно проширење постојећег модела или креирање новог модела који би користио и податке о распореду густина у топографским масама;
- коришћење података GOCE сателитске мисије и података будућих гравитационих мисија;
- примена мултирезолуцијског приступа – примена „*remove-restore*“ методе, односно одвојено третирање дуготаласних, краткоталасних и средњеталасних доприноса сигнала теже;
- употреба података микрогравиметријског премера у циљу побољшања постојећих модела густина.

И на крају, на основу изнетих препорука, следи познати закључак – будући да појава нехомогености у унутрашњој дистрибуцији густине Земље узрокује сложену структуру гравитационог поља Земље, а да градијент убрзања силе Земљине теже представља

физичку величину која ту сложену структуру описује, побољшање модела вертикалног градијента, као и његова употреба у микрогравиметријском премеру, могуће су применом мултидисциплинарног приступа, односно применом и интеграцијом сазнања и научних достигнућа из различитих области (геодезија, геофизика, геологија, гравиметрија, дигитална обрада сигнала и друге).

ЛИТЕРАТУРА

Ågren, J., Đalović, S. & Škrgunj, J., 2011. Plan for the Future Determination of a National Geoid Model for Serbia, Belgrade, Serbia: Republic Geodetic Authority.

Ågren, J. et al., 2007. Report - Absolute Gravity Campaign in Serbia, Belgrade: Capacity Building for Serbia, Real Estate and Registration Project.

Amarante, R. R. & Trabanco, J. L. A., 2016. Calculation of the tide correction used in gravimetry. *Brazilian Journal of Geophysics*, 34(2), pp. 193-206.

Balmino, G. et al., 1981. Gradio: Project proposal for satellite gradiometry, Washington D.C.: National Aeronautics and Space Administration, NASA TM-76796.

Balmino, G. et al., 1999. CHAMP, GRACE and GOCE: mission concepts. *Bollettino Di Geofisica Teorica Ed Applicata*, 40(3-4), pp. 309-319.

Bekenstein, J., 1997. Gravitational theories. [Online] Available at: <http://ned.ipac.caltech.edu/> [Accessed 13 4 2021].

Blagojević, D., 2014. Uvod u satelitsku geodeziju. Beograd: Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.

Bodemüller, H., 1963. Measurement and geodetic evaluation of vertical gradients of gravity. *Bull. Geodesique*, Volume 69, pp. 261-279.

Bouman, J., 2015. Sources of satellite gravity data and gradient grids, Satellite seminar. Antibes: ESA.

Claessens, S. J., 2006. Solutions to Ellipsoidal Boundary Value Problems for Gravity Field Modelling, Doctoral Dissertations. Perth, Australia: Curtin University of Technology.

Cook, A., 1965. The Absolute Determination of the Acceleration Due to Gravity. *Metrologia*, 1(3), pp. 84-114.

Crossley, D., 2013. The Measurement Of Surface Gravity. *Reports on Progress in Physics*, Volume 76, pp. 1-47.

Csapó, G. & Völgyesi, L., 2004. New measurements for the determination of local vertical gradients. *Reports on Geodesy*, 69(2), pp. 303-308.

Čunderlík, R., Mikula, K. & Mojzeš, M., 2004. A comparison of the variational solution to the Neumann geodetic boundary value problem with the geopotential model EGM-96. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, 34(3), pp. 209-225.

D'Urso, M., 2013. On the evaluation of the gravity effects of polyhedral bodies and a consistent treatment of related singularities. *87(3)*, pp. 239-252.

D'Urso, M., 2014. Analytical computation of gravity effects for polyhedral bodies. *Journal of Geodesy* volume, Volume 88, pp. 13-29.

Daubechies, I., 1992. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia, USA, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics.

Drinkwater, M. et al., 2006. The GOCE Gravity Mission: ESA's First Core Earth Explorer. Frascati, Italy, Proceedings of the 3rd International GOCE User Workshop, pp. 1-8.

Dykowski, P., 2012. Vertical gravity gradient determination for the needs of contemporary absolute gravity measurements-first results. *Reports on Geodesy*, 92(1), pp. 23-35.

- Erdeljan, A. & Čapko, D., 2015. Modelovanje i simulacija sistema - sa primerima. Novi Sad: FTN izdavaštvo.
- ESA, 2020. European Space Agency. [Online] Available at: <https://earth.esa.int/eogateway/> [Accessed 03 11 2020].
- Fehringer, M., Andre, G., Lamarre, D. & Maeusli, D., 2008. A jewel in ESA's crown. ESA bulletin, Volume 133, pp. 14-23.
- Forsberg, R., 1984. A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modeling, Columbus, Ohio: The Ohio State University.
- Freedon, W., Michel, V. & Nutz, H., 2002. Satellite-to-satellite tracking and satellite gravity gradiometry (Advanced techniques for high-resolution geopotential field determination). Journal of Engineering Mathematics, Volume 43, pp. 19-56.
- Gigović, L., 2010. Digitalni modeli visina i njihova primena u vojnoj analizi terena. Vojnotehnički glasnik, 2(10), pp. 165-178.
- Gojković, Z., Radojičić, M. & Vulović, N., 2017. Application for coordinate transformation between Gaus-Kruger projection - Bessel ellipsoid and UTM projection - WGS84 ellipsoid. Underground mining engineering, Volume 30, pp. 29-45.
- Grafarend, E. & Niemeier, W., 1971. The Free Nonlinear Boundary Value Problem of Physical Geodesy. Bulletin Géodésique, 101(1), pp. 243-262.
- Grekulović, S., 2014. Doktorska disertacija: Modeliranje gustine Zemljine kore pri rešavanju problema graničnih vrednosti potencijala Zemljine teže. Beograd: Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet.
- Gruber, T., Rummel, R., Abrikosov, O. & van Hees, R., 2014. GOCE Level 2 Product Data Handbook, Paris: The European GOCE Gravity Consortium.
- Hammer, S., 1970. The Anomalous Vertical Gradient of Gravity. Geophysics, 35(1), pp. 153-157.
- Hammer, S. & Gumert, W., 1984. Airborne measurement of the vertical gradient of gravity. EOS 65, Volume 16, pp. 196-200.
- Heiskanen, W. & Moritz, H., 1967. Physical Geodesy. San Francisco and London: W.H. Freeman and Company.
- Heiskanen, W. & Moritz, H., 2000. Fizička geodezija. Beograd: Građevinski fakultet - Institut za geodeziju.
- Hofmann-Wellenhof, B. & Moritz, H., 2006. Physical Geodesy. Wien, Austria: SpringerWienNewYork.
- Hugill, A., 2011. Gravimeters. Encyclopedia of Solid Earth Geophysics, pp. 449-456.
- Jekeli, C., 2007. Potential Theory and Static Gravity Field of the Earth. In: G. Schubert, ed. Treatise on Geophysics. Columbus, OH, USA: Elsevier Science Direct, pp. 11-42.
- Jekeli, C., 2011. Gravity, Gradiometry. In: H. K. Gupta, ed. Encyclopedia of Solid Earth Geophysics. Dordrecht, The Netherlands: Springer, pp. 547-561.
- Jekeli, C. & Zhu, L., 2006. Comparison of methods to model the gravitational gradients from topographic data bases. Geophys. J. Int., Volume 166, pp. 999-1014.
- Jekeli, C. & Zhu, L., 2009. Gravity gradient modeling using gravity and DEM. Journal of Geodesy, Volume 83, pp. 557-567.

- Kern, M. & Haagmans, R., 2005. Determination of gravity gradients from terrestrial gravity data for calibration and validation of gradiometric GOCE data. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, pp. 95-100.
- Kim, S. & Wessel, P., 2016. New analytic solutions for modeling vertical gravity gradient anomalies. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 17(5), pp. 1915-1924.
- Koop, R., 1993. Global gravity field modelling using satellite gravity gradiometry. Delft: Netherlands geodetic commission, Publications of geodesy, New series, Number 38.
- Копяев, А. В. et al., 2008. Laboratory and field experiences with Sodin, ZLS Burriss and Scintrex CG5 gravimeters. Санкт-Петербург, Материалы международного симпозиума " Наземная, морская и аэрогравиметрия: измерения на неподвижных и подвижных основаниях".
- Krynski, J., 2012. Gravimetry for geodesy and geodynamics - brief historical review. *Reports on Geodesy*, 92(1), pp. 69-86.
- Kuhar, M. & Mulić, M., 2009. Fizikalna geodezija. Sarajevo: Univerzitet u Sarajevu.
- Kumar, M., Khanna, A. & Dasgupta, R., 2012. Gravity Gradiometry: Potent Potential Field Method. Hyderabad, 9th Biennial International Conference & Exposition on Petroleum Geophysics, pp. 1-5.
- Landau, L. & Lifšic, E., 1952. Teorija polja. Beograd: Naučna knjiga.
- Lederer, M., 2009. Accuracy of the relative gravity measurement. *Acta Geodyn. Geomater.*, 6(3), pp. 383-390.
- Liu, C. & Xiong, J., 2018. Geophysical Inversion Theory and Global Optimization Methods. USA: Scientific Research Publishing, Inc.
- Li, Z., 1996. Multiresolution Approximation in Gravity Field Modeling, Doctoral Dissertation. Calgary, Alberta, Canada: The University of Calgary.
- Longman, I., 1959. Formulas for Computing the Tidal Accelerations Due to the Moon and the Sun. *Journal of Geophysical Research*, 64(12), pp. 2351-2355.
- Markina, I., 1992. Potential theory: the origin and applications. Bergen, Norway.: Department of Mathematics, University of Bergen.
- Marque, J. P. et al., 2008. The ultra sensitive accelerometers of the ESA GOCE mission. Glasgow, Scotland, United Kingdom, 59th International Astronautical Congress.
- Marson, I., 2012. A Short Walk along the Gravimeters Path. *International Journal of Geophysics*, Volume 2012, pp. 1-9.
- Marson, I. & Faller, J., 1986. g-the acceleration of gravity: its measurement and its importance. *J. Phys. E: Sci. Instrum*, Volume 19, pp. 22-32.
- Marušiak, I. et al., 2016. TopoSK program for terrain corrections calculation. Bratislava: G-trend Ltd.
- Melhorato, R. L. & Sousa, M. A., 2016. An Assessment of the field performance of Scintrex CG-5 Autograv Gravimeters. Saint Petersburg, Russian Federation, International Association of Geodesy Symposium on Terrestrial Gravimetry.
- Ménoret, V. et al., 2018. Gravity measurements below 10^{-9} g with a transportable absolute quantum gravimeter. *Scientific Reports*, 8(12300), pp. 1-11.
- Micro g LaCoste, 2007. FG5 Absolute Gravimeter User's Manual. Colorado, USA: Micro g LaCoste.

- Mohr, P. J., Newell, D. B. & Taylor, B. N., 2016. CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants:2014. *Reviews of Modern Physics*, 88(3), pp. 1-73.
- Morelli, C., 1987. Absolute gravity as geodetic reference control. *Journal of Geodynamics*, 7(3-4), p. 285-298.
- Moritz, H., 1972. *Advanced Least-Squares Methods*, Columbus, Ohio: The Ohio State University.
- Moritz, H., 1978. Least-Squares Collocation. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 16(3), pp. 421-430.
- Moritz, H., 1980. *Advanced Physical Geodesy*. Karlsruhe, Germany: Herbert Wichmann Verlag.
- Moritz, H., 2015. Classical Physical Geodesy. In: F. W., Z. Nashed & T. Sonar, eds. *Handbook of Geomathematics*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 256-288.
- Nabighian, M. et al., 2005. The Historical Development of the Gravity Method in Exploration. *Geophysics*, 70(6), pp. 63-89.
- Nagy, D., Papp, G. & Benedek, J., 2000. The gravitational potential and its derivatives for the prism. *Journal of Geodesy*, Volume 74, pp. 552-560.
- Niebauer, T. M., 2007. Gravimetric Methods – Absolute Gravimeter: Instruments Concepts and Implementation. *Treatise on Geophysics*, Volume 3, pp. 43-64.
- Niebauer, T. et al., 1995. A new generation of absolute gravimeters. *Metrologia*, pp. 159-180.
- Oberndorfer, H. & Müller, J., 2003. CHAMP Accelerometer and Star Sensor Data Combination. *First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies*, pp. 26-31.
- Odalović, O., 2005. Doktorska disertacija: Metodologija određivanja geoida visoke rezolucije centimetarske tačnosti za teritoriju Republike Srbije. Beograd: Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet.
- Odalović, O., 2010. *Fizička geodezija*. Beograd: Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Parseliunas, E., Petroskevicius, P., Birvydiene, R. & Obuchovski, R., 2011. Investigation of the automatic gravimeters CG-5 and analysis of gravimetric measurements. Vilnius, Lithuania, The 8th International Conference on Environmental Engineering, pp. 1416-1423.
- Parseliunas, E., Petroskevicius, P. & Obuchovski, R., 2008. Analysis of gravimetric observations made by Scintrex CG-5. Vilnius, Lithuania, The 7th International Conference on Environmental Engineering, pp. 1422-1428.
- Parseliunas, E., Petroskevicius, P., Obuchovski, R. & Birvydiene, R., 2013. An Investigation of the Automatic Relative Gravimeters. *Solid State Phenomena*, Volume 199, pp. 261-266.
- Petit, G. & Luzum, B., 2010. *IERS conventions (2010)*, France: Bureau International des Poids et mesures sevres; US Naval Observatory.
- Petrović, S., 1996. Determination of the potential of homogeneous polyhedral bodies using line integrals. *Journal of Geodesy*, Volume 71, pp. 44-52.
- Reudink, R. et al., 2014. High tilt susceptibility of the Scintrex CG-5 relative gravimeters. *Journal of Geodesy*, 88(6), pp. 617-622.
- Röder, R. H. & Wenzel, H. G., 1986. Relative gravity observations at BIPM, Sevres in 1985 and 1986. *Bulletin d'information-Bureau gravimétrique international*, Volume 59, pp. 177-183.
- Rózsa, S. & Tóth, G., 2005. *Prediction of Vertical Gravity Gradients Using Gravity and Elevation Data*. Berlin, Heidelberg, Springer, pp. 344-349.

- Rummel, R. et al., 2002. Dedicated gravity field missions - principles and aims. *Journal of Geodynamics*, 33(1-2), pp. 3-20.
- Rummel, R. & Colombo, O., 1985. Gravity Field Determination from Satellite Gradiometry. *Bull. Geodesique*, 59(9), pp. 233-246.
- Rummel, R., Yi, W. & Stummer, C., 2011. GOCE gravitational gradiometry. *Journal of Geodesy*, Volume 85, pp. 777-790.
- Samardžić, M. & Milenković, M., 2010. Shuttle radar topography mission: Availability of data and the accuracy achieved. *Glasnik Srpskog geografskog društva*, Volume 1, pp. 51-72.
- Sansò, F., 1987. Talk on the theoretical foundations of physical geodesy. Vancouver, Canada, XIX General Assembly of the IUGG-IAG.
- Sansò, F., Barzaghi, R. & Carrion, D., 2009. The Geoid Today: Still a Problem of Theory and Practice. Rome, VII Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, pp. 173-180.
- Sansò, F. & Rummel, R., 1997. *Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid*. 1 ed. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Schwarz, K., 1984. Data Types and Their Spectral Properties. Beijing, China, Beijing International Summer School, pp. 1-66.
- Scintrex, 2012. CG-5 Operation Manual. Ontario, Canada: Scintrex Ltd.
- Seeber, G., 2003. *Satellite Geodesy*. Berlin: Walter de Gruyter.
- Seigel, H., 1995. *A Guide To High Precision Land Gravimeter Surveys*. Ontario, Canada: Scintrex Limited.
- SERCO/DATAMAT Consortium, 2008. *GOCE L1b Products User Handbook*. GOCE-GSEG-EOPG-TN-06-0137, Paris: European Space Agency.
- Sideris, M. G., 2011. Geoid Determination, Theory and Principles. In: H. K. Gupta, ed. *Encyclopedia of Solid Earth Geophysics*. Dordrecht, The Netherlands: Springer, pp. 356-362.
- Siemes, C., Rexer, M., Schlicht, A. & Haagmans, R., 2019. GOCE gradiometer data calibration. *Journal of Geodesy*, Volume 93, pp. 1603-1630.
- Sneeuw, N., 2001. Dynamical Satellite Geodesy on the Torus: Block-Diagonality from a Semi-Analytical Approach. *Gravity, Geoid and Geodynamics 2000*. International Association of Geodesy Symposia, Volume 123, pp. 137-142.
- Starčević, M., 1991. *Gravimetrijske metode istraživanja*. Beograd: Nauka.
- Starčević, M., 2014. Uticaj vertikalnog gradijenta na određivanje gravitacionog ubrzanja u geodeziji i geofizici. *Geodetska služba*, Volume 114, pp. 67-73.
- Stummer, C., 2012. *Gradiometer Data Processing and Analysis for the GOCE Mission*, Doctoral Dissertation. München: Technischen Universität München, Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie.
- Sünkel, H., 2000. *From Eötvös to Milligal*, Final Report. Graz: ESA.
- Szabó, Z., 2016. The history of the 125 year old Eötvös torsion balance. *Acta Geodaetica et Geophysica*, Volume 51, pp. 273-293.
- Talwani, M. & Ewing, M., 1960. Rapid computation of gravitational attraction of three-dimensional bodies of arbitrary shape. *Geophysics*, Volume 25, pp. 203-225.

- Tenzer, R., 2004. Discussion of mean gravity along the plumbline. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 48(2), pp. 309-330.
- Timmen, L., 2010. Absolute and Relative Gravimetry. In: *Sciences of Geodesy - I*. Berlin, Heidelberg: Springer, pp. 1-48.
- Torge, W., 1989. *Gravimetry*. Berlin-New York: Walter de Gruyter.
- Torge, W., 2001. *Geodesy*. Berlin: Walter de Gruyter.
- Touboul, P., Foulon, B., Christophe, B. & Marque, J., 2012. CHAMP, GRACE, GOCE Instruments and Beyond. *Geodesy for Planet Earth, International Association of Geodesy Symposia, Volume 136*, pp. 215-221.
- Touboul, P., Willemenot, E., Foulon, B. & Josselin, V., 1999. Accelerometers for CHAMP, GRACE and GOCE space missions: synergy and evolution. *Bollettino Di Geofisica Teorica Ed Applicata*, 40(3-4), pp. 321-327.
- Tsoulis, D., 1999. *Analytical and Numerical Methods in Gravity Field Modelling of Ideal and Real Masses*, Doctoral Dissertation. München: Technischen Universität München.
- Tsoulis, D., 2012. Analytical computation of the full gravity tensor of a homogeneous arbitrarily shaped polyhedral source using line integrals. *Geophysics*, 77(2), pp. F1-F11.
- Tsoulis, D. & Petrović, S., 2001. On the singularities of the gravity field of a homogeneous polyhedral body. *Geophysics*, 66(2), pp. 535-539.
- Vaníček, P. & Krakiwsky, E., 2005. *Geodezija: Koncepti*. Beograd: Savez geodeta Srbije - Geodetski žurnal.
- Veryaskin, A., 2018. *Gravity gradiometry*. In: *Gravity, Magnetic and Electromagnetic Gradiometry*. s.l.:Morgan & Claypool Publishers, pp. 1-56.
- Vitushkin, L. F., 2015. Absolute Ballistic Gravimeters. *Gyroscopy and Navigation*, 6(4), pp. 254-259.
- Wang, Y. M., 2016. Geodetic Boundary Value Problems. In: E. Grafarend, ed. *Encyclopedia of Geodesy*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing , pp. 1-8.
- Warner, R. & Scheeres, D., 1997. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Volume 65*, pp. 313-344.
- Wermuth, M. K., 2008. *Gravity Field Analysis from the Satellite Missions CHAMP and GOCE*, Phd Dissertation. München: Technischen Universität München.
- Yushkin, V. D., 2011. Operating experience with CG5 gravimeters. *Measurement Techniques*, 54(5), pp. 486-489.
- Zahorec, P. et al., 2014. The role of near topography and building effects in vertical gravity gradients approximation. *First Break*, 32(1), pp. 65-71.
- Zahorec, P. et al., 2016. Prediction of vertical gradient of gravity and its significance for volcano monitoring – example from Teide volcano. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, 46(3), pp. 203-220.
- Zeigler, B. & Sarjoughian, H. S., 2013. *Guide to Modeling and Simulation of Systems of Systems*. London: Springer-Verlag London.

Zhao, D., Li, S., Bao, H. & Wang, Q., 2015. Accurate Approximation of Vertical Gravity Gradient Within the Earth's External Gravity Field. Shanghai, China, Springer, Cham, pp. 147-152.

Zhu, L., 2007. Gradient Modeling with Gravity and DEM, Doctoral Dissertation. Columbus, Ohio: The Ohio State University.

ПРИЛОГ 2

Валидација модела – Поређење мерених и моделираних вредности вертикалног градијента убрзања теже при подели топографских маса на праве правоугаоне призме

Назив тачке	Измерен вертикални градијент [μGal/m]	Моделиран вертикални градијент [μGal/m]	Грешка моделирања [μGal/m]
FR0001	318.80	316.20	-2.60
FR0002	285.50	280.42	-5.08
FR0003	306.30	316.25	9.95
FR0004	309.80	306.45	-3.35
FR0005	200.90	226.01	25.11
FR1088	196.60	194.45	-2.15
FR1105	257.30	289.07	31.77
FR1107	265.90	289.77	23.87
FR1109	258.90	312.18	53.28
FR1110	218.10	167.56	-50.54
FR1111	291.40	342.54	51.14
FR1112	205.60	259.41	53.81
FR1122	328.10	277.36	-50.74
FR1126	196.30	223.82	27.52
FR1127	169.10	198.12	29.02
FR1128	208.60	235.45	26.85
FR1131	306.50	318.70	12.20
FR1132	225.90	251.71	25.81
FR1135	233.70	288.49	54.79
FR1139	214.20	219.81	5.61
FR1140	249.50	211.61	-37.89
FR1141	230.40	227.59	-2.81
FR2134	188.00	235.19	47.19
FR3103	286.80	310.32	23.52
FR3104	308.30	307.58	-0.72
FR3106	314.50	338.92	24.42
FR3114	301.20	315.50	14.30
FR3116	308.00	312.95	4.95
FR3117	319.00	347.19	28.19
FR3118	307.20	291.84	-15.36
FR3119	310.00	314.76	4.76
FR3120	306.20	302.51	-3.69
FR3124	292.00	307.87	15.87
FR3130	294.70	299.10	4.40
FR3133	313.10	322.35	9.25
GT251	271.40	292.34	20.94
NM1400	291.20	315.84	24.64
R011	332.40	344.11	11.71
R058	305.50	320.50	15.00

Назив тачке	Измерен вертикални градијент [μGal/m]	Моделиран вертикални градијент [μGal/m]	Грешка моделирања [μGal/m]
R102	307.70	331.67	23.97
R121	318.70	321.50	2.80
R123	300.30	320.60	20.30
R145	275.60	266.69	-8.91
R211	304.10	300.43	-3.67
R216	244.30	201.36	-42.94
R245	292.60	302.08	9.48
R249	319.70	325.60	5.90
R261	295.70	288.33	-7.37
R289	377.30	379.39	2.09
R302	289.10	313.93	24.83
R352	367.70	347.60	-20.10
R357	311.90	331.72	19.82
R377	312.60	324.88	12.28
R386	306.40	319.22	12.82
R398	287.20	290.22	3.02
R404	341.90	346.04	4.14
R411	313.10	322.10	9.00
R457	320.80	347.17	26.37
R485	310.50	310.07	-0.43
R495	313.30	315.81	2.51
R526	323.60	312.64	-10.96
R531	325.30	281.70	-43.60
R534	303.80	322.74	18.94
R542	287.80	283.87	-3.93
R561	298.70	313.67	14.97
R584	310.50	311.54	1.04
R616	297.40	301.93	4.53
R634	247.90	228.42	-19.48
R647	309.00	320.27	11.27
R672	246.00	238.44	-7.56
R679	240.80	248.13	7.33
R716	313.40	311.90	-1.50
R766A	317.20	312.84	-4.36
R789A	307.70	312.63	4.93
R804	282.60	309.11	26.51
VGGRAV	318.80	316.20	-2.60

ПРИЛОГ 3

Валидација модела – Поређење мерених и моделираних вредности вертикалног градијента убрзања теже при подели топографских маса на полиедре

Назив тачке	Измерен вертикални градијент [$\mu\text{Gal}/\text{m}$]	Моделиран вертикални градијент [$\mu\text{Gal}/\text{m}$]	Грешка моделирања [$\mu\text{Gal}/\text{m}$]
FR0001	318.80	320.98	2.18
FR0002	285.50	222.15	-63.35
FR0003	306.30	319.98	13.68
FR0004	309.80	304.81	-4.99
FR0005	200.90	167.59	-33.31
FR1088	196.60	135.88	-60.72
FR1105	257.30	278.44	21.14
FR1107	265.90	279.73	13.83
FR1109	258.90	314.87	55.97
FR1111	291.40	364.16	72.76
FR1112	205.60	238.58	32.98
FR1122	328.10	254.57	-73.53
FR1126	196.30	177.60	-18.70
FR1127	169.10	73.33	-95.77
FR1128	208.60	200.25	-8.35
FR1131	306.50	336.58	30.08
FR1132	225.90	217.23	-8.67
FR1135	233.70	289.63	55.93
FR1139	214.20	98.85	-115.35
FR1140	249.50	126.76	-122.74
FR1141	230.40	137.18	-93.22
FR2134	188.00	175.01	-12.99
FR3103	286.80	309.49	22.69
FR3104	308.30	304.02	-4.28
FR3106	314.50	346.06	31.56
FR3114	301.20	319.36	18.16
FR3116	308.00	314.68	6.68
FR3117	319.00	364.28	45.28
FR3118	307.20	277.80	-29.40
FR3119	310.00	317.11	7.11
FR3120	306.20	297.08	-9.12
FR3124	292.00	307.58	15.58
FR3130	294.70	295.03	0.33
FR3133	313.10	331.81	18.71
GT251	271.40	290.06	18.66
NM1400	291.20	325.28	34.08
R011	332.40	354.14	21.74
R058	305.50	327.63	22.13
R102	307.70	338.77	31.07
R121	318.70	332.44	13.74

Назив тачке	Измерен вертикални градијент [μGal/m]	Моделиран вертикални градијент [μGal/m]	Грешка моделирања [μGal/m]
R123	300.30	328.72	28.42
R145	313.00	314.00	1.00
R211	275.60	269.31	-6.29
R216	304.10	307.58	3.48
R245	244.30	140.78	-103.52
R249	292.60	310.62	18.02
R261	319.70	331.91	12.21
R289	295.70	292.15	-3.55
R302	377.30	397.63	20.33
R352	289.10	327.63	38.53
R357	367.70	352.91	-14.79
R377	311.90	339.51	27.61
R386	312.60	330.99	18.39
R398	306.40	325.40	19.00
R404	287.20	282.95	-4.25
R411	341.90	367.16	25.26
R457	313.10	329.85	16.75
R485	320.80	365.33	44.53
R495	310.50	310.93	0.43
R526	313.30	318.81	5.51
R531	323.60	313.80	-9.80
R534	325.30	281.67	-43.63
R542	303.80	330.48	26.68
R561	287.80	282.91	-4.89
R584	298.70	320.86	22.16
R616	310.50	316.80	6.30
R634	297.40	305.14	7.74
R647	247.90	203.31	-44.59
R672	309.00	321.66	12.66
R679	246.00	242.28	-3.72
R716	240.80	247.65	6.85
R766A	313.40	314.26	0.86
R789A	317.20	315.00	-2.20
R804	307.70	314.21	6.51
VGGRAV	282.60	309.09	26.49

БИОГРАФИЈА АУТОРА

Софија Мугурел Наод, рођена је 28. јуна 1984. године у Панчеву. Основну школу „Бранко Радичевић“ у Панчеву завршила је као носилац Вукове дипломе. Након завршене Гимназије „Урош Предић“ у Панчеву (природно-математички смер), 2003. године уписала је Грађевински факултет Универзитета у Београду, Геодетски одсек.

Положила је све испите са просечном оценом 8.86 и дипломирала 2010. године са темом „Одређивање геоида Републике Србије коришћењем методе GPS нивелмана“ са оценом десет (10).

Одмах по завршетку академских студија, 2010. године, уписала је докторске академске студије на Грађевинском факултету и положила све наставним планом предвиђене испите са просечном оценом десет (10).

Веће научних области грађевинско-урбанистичких наука на седници одржаној 2014. године дало је сагласност на предлог теме докторске дисертације под називом „Моделирање вертикалног градијента силе Земљине теже“.

У току докторских студија похађала је једногодишњи програм школовања „*Java Development*“ у *ITAcademy*, као и неколико курсева од којих и „Просторне анализе у *open source GIS* окружењу“ на Грађевинском факултету. 2013. године била је учесник међународне конференције *Geomat* у Јашију, у Румунији.

Током докторских студија објавила је више радова као аутор или коаутор, од тога: два рада у научним часописима међународног значаја (часописи на SCI¹ листи), један рад у часопису националног значаја, два рада на међународним научним скуповима и један рад на научном скупу националног значаја.

Била је добитник награде из фонда проф. др Миливоја Симића за најбољи студентски научни рад реализован у сарадњи са Лабораторијама за електронику и грађевинску физику.

Током 2010. године радила је у Републичком геодетском заводу, у Контролном центру националне мреже перманентних станица Републике Србије, а од 2011. године до данас, запослена је у породичној приватној геодетској организацији у Панчеву.

Учествовала је на пројектима осматрања тла и објеката, као и на пројектима оскултације и деформационих мерења. Поред тога, радила је на извођењу геодетских радова за које је предвиђена израда главног пројекта, на радовима у поступку одржавања катастра непокретности и катастра водова, као и на радовима у инжењерско-техничким областима за које се не израђује главни пројекат. Од 2017. године поседује Геодетску лиценцу првог реда Републичког геодетског завода, а од 2018. године и Лиценцу одговорног пројектанта, као и Лиценцу одговорног извођача геодетских радова Инжењерске коморе Србије.

Чита, пише и говори енглески језик и поседује сертификат Института за стране језике.

¹ *Science Citation Index*

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Име и презиме аутора: Софија Наод

Број индекса: 918/2010

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

„Моделирање вертикалног градијента силе Земљине теже“

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршила ауторска права и користила интелектуалну својину других лица.

У Београду, 13.12.2021.

Потпис аутора



ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКОГ РАДА

Име и презиме аутора: Софија Наод

Број индекса: 918/2010

Студијски програм: Геодезија и геоинформатика

Наслов рада: „**Моделирање вертикалног градијента силе Земљине теже**“

Ментори: В. проф. др Олег Одаловић, дипл. инж. геод. и в. проф. др Љиљана Брајовић,
дипл. инж. ел.

Изјављујем

да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предала ради похрањивања у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду. Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада. Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

У Београду, 13.12.2021.

Потпис аутора



ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

„Моделирање вертикалног градијента силе Земљине теже“

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предала сам у електронском формату погодном за трајно архивирање. Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (*Creative Commons*) за коју сам се одлучила.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци. Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

У Београду, 13.12.2021.

Потпис аутора



1. Ауторство – Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.