



PD 12404



003088019

COBISS *

UNIVERSITET U BEOGRADU
TEHNIČKI FAKULTET

MILUŠ LAZIĆ

PRILOG NELINEARNOJ ANALIZI
ANULIRANOG OPTIČKOG ŠIPA

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

BEOGRAD
JUNI 1986

12404



UNIVERZITET U BEOGRADU
GRADJEVINSKI FAKULTET

MILOŠ LAZOVIĆ

PRILOG NELINEARNOJ ANALIZI AKSIJALNO
OPTEREĆENOG ŠIPA



- DOKTORSKA DISERTACIJA -

JUNI 1988.
BEOGRAD

S A D R Ž A J

1. OPŠTA RAZMATRANJA PROBLEMATIKE ŠIPOVA

- 1.1. Uvod
- 1.2. Nosivost dubokih temelja (šipova)
- 1.3. Šip u glini
 - 1.3.1. Šip pobijen u glinu
 - 1.3.2. Bušeni šip u glini
- 1.4. Šipovi u pesku
 - 1.4.1. Bušeni šipovi u pesku
 - 1.4.2. Šipovi koji se pobijaju u pesak
- 1.5. Metode za proračun sleganja šipa
- 1.6. Numeričke metode

2. KONSTITUTIVNI MODELI TLA

- 2.1. Uvod
- 2.2. Elastični modeli tla
- 2.3. Hipoelastični modeli tla
- 2.4. Elastoplastični modeli tla
 - 2.4.1. Uvod
 - 2.4.2. Mohr-Coulomb-ov model
 - 2.4.3. Drucker-Prager-ov model
 - 2.4.4. Cam-Clay model
 - 2.4.5. Model sa kapom
 - 2.4.6. Lade-ov model za pesak

3. METODE KONAČNIH I KONTAKTNIH ELEMENATA

- 3.1. Formulacija inkrementalnih jednačina kretanja mehanike kontinuuma MKE
 - 3.1.1. Tenzor deformacije

3.1.2. Tenzor napona

3.1.3. Formulacija rešenja nelinearnih problema MKE

3.2. Kontaktni problemi

3.2.1. Uvod

3.2.2. Formulacija kontaktnog problema

3.2.3. Dvočvorni kontaktni element

3.2.4. Tanak kontaktni element

4. REŠAVANJE MATERIJALNO NELINEARNIH PROBLEMA MKE

4.1. Metode za rešavanje nelinearnih jednačina MKE

4.1.1. Uvod

4.1.2. Inkrementalne metode

4.1.3. Iterativne metode

4.1.4. Metod konstantnog sfernog luka i metod konstantnog inkrementa spoljnjeg rada

4.2. Algoritmi za integraciju elasto-plastičnih konstitutivnih jednačina

4.2.1. Uvod

4.2.2. Euler-ova integracija unapred

4.2.3. Trapezno pravilo

4.2.4. Pravilo središne tačke

4.2.5. Sabinkrementalna metoda

4.2.6. Algoritam povratnog preslikavanja

4.2.7. Hipoelastični model

4.2.8. Model sa kapom

4.3. Program DIS

5. PRIKAZ EKSPERIMENTALNE ANALIZE

5.1. Uvod

5.2. Ispitivanje šipova

5.2.1. Izvodjenje šipova

5.2.2. Opterećenje šipova

5.2.3. Merenje zavisnosti opterećenja i sleganja šipa

5.2.4. Merenje raspodele sile po dužini šipa

5.2.5. Prikaz i analiza dobijenih rezultata

5.3. Laboratoriska ispitivanja

5.3.1. Uvod

5.3.2. Prikaz rezultata laboratoriskih ispitivanja

6. PRIKAZ REZULTATA NUMERIČKE ANALIZE

6.1. Uvod

6.2. Prikaz dobijenih rezultata

7. ZAVRŠNI KOMENTARI I ZAKLJUČCI

LITERATURA

P R E D G O V O R

Kao što je poznato, šipovi su konstrukciski elementi preko kojih se opterećenje sa konstrukcije prenosi na dublje slojeve tla, veće nosivosti i manje deformabilnosti. Postoji veliki broj različitih vrsta šipova i oni se najčešće dele prema materijalima od kojih se izvode, prema načinu izvodjenja i prema načinu prenošenja opterećenja. Svaki od ovih faktora bitno utiče na ponašanje šipa pod opterećenjem.

U literaturi se može naći veliki broj predloga i postupaka za određivanje graničnog opterećenja šipa i za određivanje veličine sleganja šipa.

Najpouzdaniji podaci o ponašanju šipa pod opterećenjem dobijaju se na osnovu rezultata merenja pri probnom opterećenju šipa. Ovakav način određivanja nosivosti šipa odnosno njegovog sleganja, je veoma skup pa se zbog toga čine pokušaji da se različitim empiriskim analitičkim i numeričkim metodama odredi ponašanje šipa pod opterećenjem na osnovu podataka o geomehničkim karakteristikama slojeva tla u kojima se šip nalazi.

Osnovni zadatak rada sastoji se u tome da se pokaže koliko se uspešno, korišćenjem savremenih numeričkih metoda, može odrediti ponašanje šipa pod opterećenjem. Naime, brzim razvojem numeričkih metoda uz primenu elektronskih računara, sve smo više u mogućnosti da u analizu uključimo složene promene naponsko-deformacijskih stanja u tlu oko i ispod šipa i na kontaktu šipa sa tlom.

Proučavanje ovih problema je interesantno i iz ekonomskih razloga, jer se, pri projektovanju šipova često puta ide sa znatno većim faktorima sigurnosti nego što su neophodni. Tačnijim metodama proračuna, kod kojih se u analizu uključuju mnogi faktori koji se u konvencionalnim analizama zanemaruju, moguće je znatno pouzdanije odrediti granično opterećenje šipa odnosno veličinu sleganja šipa. Zbog toga se faktori sigurnosti koji su često puta i veći od 3 mogu smanjiti.

Rad se sastoji iz sedam poglavlja.

U prvom poglavlju, daje se kratak presek kroz problematiku fundiranja na šipovima. Poznato je da na ponašanje šipa pod opterećenjem pored karakteristika tla u kojima se šip nalazi značajno utiče i način izvodjenja šipa. U konvencionalnim proračunima obično se separatno posmatra nosivost šipa a

posebno njihovo sleganje i pri tome se koriste različiti proračunski modeli.

Na osnovu velikog broja publikovanih radova i to kako teoriskih to i eksperimentalnih, može se zaključiti da se znatno razlikuje ponašanje bušenih šipova od pobijenih šipova kao i da njihovo ponašanje treba posebno posmatrati u nevezanom i vezanom tlu. Zbog veoma velikog broja faktora koji utiču na ponašanje šipa pod opterećenjem obično se u konkretnim analizama zanemaruju neki od njih i time se značajno pojednostavljuje analiza. Na kraju ovoga poglavlja definiše se zadatak predmetne disertacije.

U drugom poglavlju prikazuju se osnovni konstruktivni modeli tla koji se primenjuju u savremenim numeričkim analizama. U radu su opisani linearno elastični, hipoeleastični i elasto-plastični modeli. Mada se upotrebom linearno-elastičnih modela stavljaju velike zamerke njihova promena je opravdana u oblastima u kojima su promene stanja napona i deformacija male. Hipoeleastičnim modelima značajno bolje se opisuje ponašanje tla. Međutim, poznato je da se samo korišćenjem elasto-plastičnih modela može uspešno opisati ponašanje realnog tla. Postoji veoma veliki broj predloženih elastoplastičnih konstitutivnih modela tla. Zbog toga posebnu pažnju treba posvetiti adekvatnom izboru konstitutivnog modela tla. Samo složenim elastoplastičnim modelima koji se sastoji od više površi popuštanja koje se međusobno presecaju može se uspešno opisati ponašanje tla. Za razliku od drugih materijala u tlu pri svakoj promeni naponskog stanja dolazi do pojave elastičnih i plastičnih deformacija. Znači u svakom koraku opterećenja dolazi do izvesne disipacije energije. Takodje neke vrste tla pokazuju izražena dilatacijska svojstva tj., dolazi do značajne promene zapremine usled smicanja. Još uvek nije pronađen generalni model tla koji bi podjednako uspešno obuhvatio sve napred opisane fenomene a da istovremeno bude jednostavan za praktičnu upotrebu. Zbog toga, u zavisnosti od vrste tla i predviđenih putanja napona u tlu, posebnu pažnju u svakom konkretnom slučaju, treba posvetiti izboru adekvatnog konstitutivnog modela tla.

U trećem poglavlju u skraćenom obliku daje se formulacija MKE pri rešavanju nelinearnih problema. Zatim se u nešto širem obliku prikazuje problematika MKE na rešavanju materijalno nelinearnih problema. U drugom delu ovoga poglavlja razmatra se problematika numeričkog simuliranja kontakta dveju sredina različitih karakteristika.

Autor rada daje predlog dvočvornog kontaktnog elementa za simuliranje ponašanja kontakta betona i tla. Na osnovu eksperimenata, moguće je odrediti nelinearne zavisnosti između relativnog pomeranja i napona smicanja u funkciji od normalnog napona, koje su neophodne za konstituisanje kontaktnih elemenata.

Četvrto poglavlje bavi se problematikom implementacije konačnih i kontaktnih elemenata pri rešavanju problematike interakcije konstrukcije i tla

u uslovima ravnog stanja deformacije i rotacione simetrije. U ovome poglavlju sutor rada daje predlog za poboljšanje korišćenja hipoelastičnog modela Duncan-Chang-a. Naime, kod ovih modela postoji problem sračunavanja neuravnoteženog opterećenja što uslovljava korišćenje samo inkrementalnih postupaka u rešavanju nelinearnih jednačina MKE. Sa predlogom autora, moguće je za poznato stanje deformacije odrediti stanje napona koje zadovoljava konstitutivne jednačine. U ovome poglavlju, posebna pažnja posvećena je metodama integracije elastoplastičnih konstitutivnih jednačina. Na kraju poglavlja dat je kratak opis programa DIS koji je autor napisao, pomoću koga se uspešno mogu rešavati materijalno nelinearni problemi korišćenjem konačnih i kontaktnih elemenata.

Poglavlje pet, sadrži rezultate i analizu ponašanja šipova pri probnom opterećenju, koji su proizašli iz sopstvenih oglada. Ukupno je ispitano tri bušena šipa preseka 0,27 m i dužine 3 m, probnim opterećenjem. Pri ovim ispitivanjima merene su zavisnosti izmedju opterećenja šipa i sleganja vrha šipa kao i raspodela aksijalne sile po dužini šipa. Iz odredjenih organizacijskih i finansijskih problema opiti su izvedeni u dvorištu fakulteta, tako da se šipovi nalaze u sloju lesa što nije karakteristična sredina za fundiranje na šipovima. Pored ovih ispitivanja izvršena su i detaljna ispitivanja neporemećenih uzoraka tla u laboratoriji koja su bila neophodna za odredjivanje neophodnih parametara koji figurišu u konstitutivnim modelima tla.

U šestom poglavlju izvršena je numerička analiza ponašanja aksijano opterećenog šipa. Posebna pažnja posvećena je izboru adekvatnog proračunskog modela. Kontakt izmedju šipa i tla opisan je dvočvornim kontaktnim elementima. U zoni bliže šipu korišćeni su nelinearni konstitutivni modeli tla dok su u zoni dalje od šipa, gde su promene napona male, korišćeni linearni elastični modeli tla.

Rezultati numeričke analize poredjeni su sa rezultatima eksperimenta.

I na kraju u sedmom poglavlju, daju se završni komentari i zaključci. Upoređivanjem rezultata eksperimentalne i numeričke analize zaključuje se da se korišćenjem savremenih numeričkih metoda može uspešno obuhvatiti ponašanje aksijalno opterećenog šipa. Zadovoljavajući rezultati su dobijeni i u slučaju lesa iako je poznato da se ovaj materijal dosta različito ponaša pri niskim i visokim naponima. Da bi numerička analiza bila uspešna neophodno je da se u nju uključi i faza izvodjenja šipa. Takodje posebnu pažnju treba posvetiti izboru adekvatnog konstitutivnog modela tla. Ovakve numeričke analize još uvek su dosta složene pa je za uspešno rešavanje problema neophodan timski rad stručnjaka geotehničara i numeričara.

1. OPŠTA RAZMATRANJA PROBLEMATIKE ŠIPOVA

1.1. UVOD

Šipovi su konstruktivni elementi pomoću kojih se opterećenje sa konstrukcije prenosi na dublje slojeve tla veće opterećenosti i manje deformabilnosti.

Podela šipova može se izvršiti na više načina: prema vrsti materijala od koga se izvode, prema načinu izvodjenja i prema načinu prenošenja opterećenja.

Prema materijalima šipovi se dele na drvene, armirano betonske i čelične šipove.

Mada postoji veliki broj različitih tehnologija izvodjenja šipova, ipak se prema načinu izvodjenja šipovi mogu podeliti u dve grupe i to: šipovi koji se kao gotovi elementi pobijaju u tlo ili se izvode direktno u tlu pod i šipovi kod kojih se pre njihove izgradnje vrši kopanje ili bušenje tla. U buduće ove grupe šipova zvaćemo kratko utisnuti (pobijeni) šipovi i bušeni šipovi.

Prema načinu prenošenja opterećenja šipovi se mogu podeliti na stojeće i lebdeće. Stojeći šipovi se svojim bazama oslanjaju na čvrste slojeve tla zanemarljivo male deformabilnosti, tako da se ukupno opterećenje sa šipa ne tlo prenosi preko baze šipa.

Kod lebdećih šipova, opterećenje sa šipa na tlo prenosi se delimično preko baze šipa a delimično preko omotača šipa.

Pored toga značajne razlike u ponašanju šipa postoje u zavisnosti od toga da li se šip nalazi u vezanom tlu (glina) ili nevezanom tlu (pesak).

Ponašanje šipova pod opterećenjem može se odrediti na više načina, i to:

- probnim opterećenjem
- na bazi dinamičkih podataka dobijenih pri zabijanju šipova,
- terenskim metodama na bazi fizičko-mehaničkih osobina zemljišta,
- na osnovu podataka pri penetracijskom sondiranju tla, i
- prema iskustvu o ponašanju šipova u sličnom tlu.

U ovome radu dalja razmatranja biće ograničena na analizu ponašanja lebdećih šipova korišćenjem metoda koje se zasnivaju na fizičko-mehaničkim osobinama tla.

1.2. NOSIVOST DUBOKIH TEMELJA (ŠIPOVA)

Nosivost šipova može se teorijski odrediti kao nosivost dubokog temelja. Posmatrajmo duboki temelj poznatih dimenzija i oblika koji je ugrađen u tlo poznatih fizičko-mehaničkih karakteristika. Temelj je na vrhu opterećen verikalnim centričnim opterećenjem. Problem se sastoji u određivanju graničnog opterećenja Q_0 koje temelj može da prihvati. Generalno gledano jedan deo opterećenja prenosi se preko baze temelja a drugi deo preko omotača temelja. Obično se ove dve komponente opterećenja razmatraju odvojeno iako su međusobno zavisne. Ukupno opterećenje jednako je zbiru ove dve komponente pa se može pisati:

$$Q = Q_b + Q_s = q_0 \cdot A_b + f_0 \cdot A_s \quad (1.1)$$

Veličine q_0 i f_0 predstavljaju specifičnu nosivost odnosno nosivost po jedinici površine baze i omotača respektivno. Znači problem određivanja nosivosti dubokog temelja (šipa) svodi se na problem određivanja specifičnih nosivosti baze i omotača q_0 i f_0 .

Prvi radovi iz ove oblasti potiču od Prandtl (1920) i Reissner-a (1924) koji su razmatrali problem utiskivača krutog tela u nestišljivu kruto-plastičnu podlogu. Njihova rešenja iskoristili su Caquot (1934) i Buisman (1935) za određivanje nosivosti tla. Njihovo rešenje obično se piše u sledećem obliku:

$$q_0 = cN_c \zeta_c + qN_q \zeta_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \cdot \zeta_\gamma \quad (1.2)$$

gde su uvedene sledeće oznake:

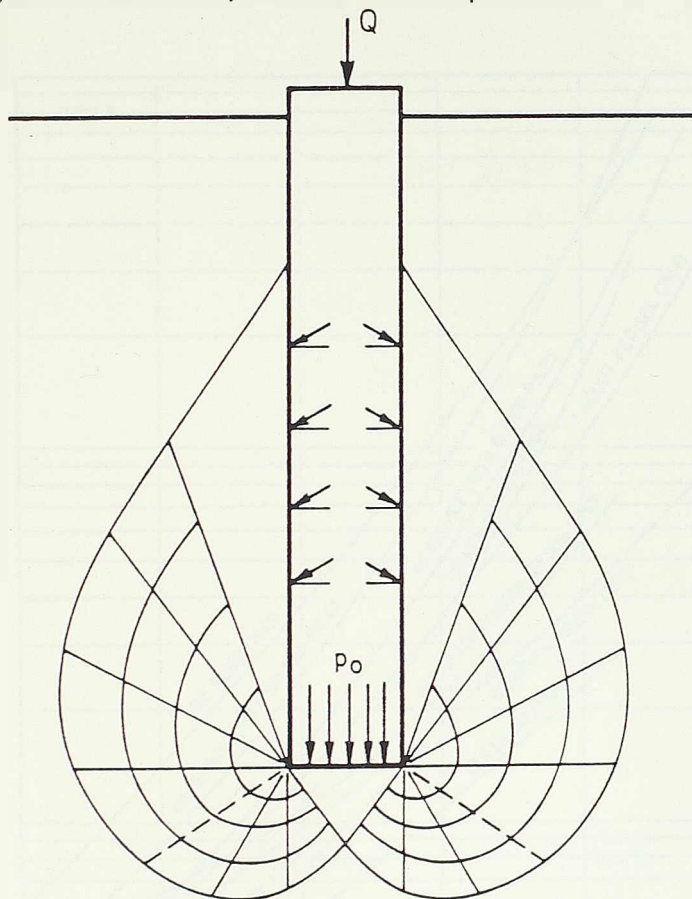
- N_c, N_q, N_γ - su faktori nosivosti trakastog temelja
- $\zeta_c, \zeta_q, \zeta_\gamma$ - su faktori oblika.

De Beer (1948) i Jačky (1948) su dobili drugačija rešenja sa znatno većim faktorima nosivosti.

Polazeći od stanja granične ravnoteže u zemljištu Meyerhof (1953) određuje granično opterećenje ispod baze šipa kao opterećenje pri kome dolazi do formiranja prostornih kontinualnih površi klizanja u tlu. Ove površi imaju oblik spirale (sl. 1) koja se povija prema omotaču šipa.

Sva napred navedena rešenja za određivanje q_0 odnosila su se na probleme koji se nalaze u uslovima ravnog stanja deformacije. Berezantsev je našao rešenje ovoga problema za slučaj rotacione simetrije.

Može se pokazati da je uticaj trećeg člana u izrazu (1.2) zanemarljivo mali kod temelja veće dubine, što znači da pri većim dubinama specifična nosi-



Sl. 1

vost baze ne zavisi od njenih dimenzija.

Veličine faktora nosivosti N_q dobijene na osnovu različitih teorija prikazane su na sl. 2.

Postoji generalna tendencija povećanja nosivosti baze sa povećanjem dubine. Do neke dubine ovo povećanje je linearno sa dubinom. Daljim povećanjem dubine brzina priraštaja nosivosti baze se smanjuje i pri relativno velikim dubinama nosivost baze postaje praktično konstantna.

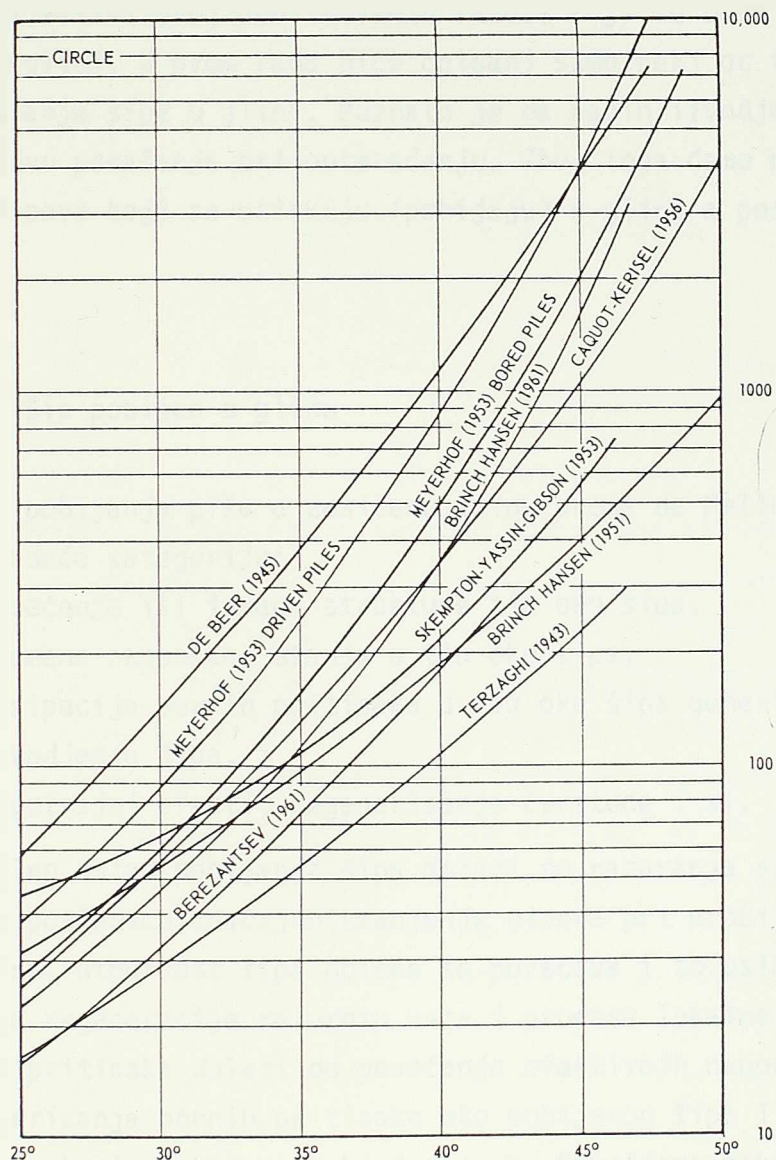
Ovo se može objasniti činjenicom da na većim dubinama dolazi do loma utiskivanja tla i lokalnog klizanja na ivicama temelja. Naime tlo nije kruto-plastičan materijal kako je u predhodnim teoriskim radovima pretpostavljeno, već materijal koji poprima značajne zapreminske deformacije.

Otpornost omotača f_o obično se određuje kao otpornost na trenje, tj. otpornost klizanja krutog tela u kontaktu sa tlom. Na osnovu klasičnog koncepta, otpornost na trenje može se rastaviti na dva dela. Prvi deo koji je nezavistan od normalnih napona i obično se naziva adhezija i obeležava sa c_a . Drugi deo trenja proporcionalan je normalnom naponu i uglu smicanja δ .

$$f_o = c_a + \sigma_n \operatorname{tg} \delta$$

(1.3)

Normalni napon σ_n obično je jednak odgovarajućem pritisku usled sopstvene težine tla po omotaču temelja.



Sl. 2

$$f_0 = C_a + K_s \cdot q_s \cdot \operatorname{tg} \delta \quad (1.4)$$

gde je K_s bezdimenzionalni faktor i naziva se koeficijent pritiska omotača.

Kao i u slučaju nosivosti baze i nosivosti omotača sa dubinom raste linearno samo do neke dubine.

Kao kriterijum loma tla ispod temelja obično se usvaja opterećenje pri kome je najveća brzina deformacije. Za postizanje graničnog opterećenja po omotaču, potrebno je znatno manje pomeranje nego pomeranje potrebno za dostizanje graničnog opterećenja baze.

1.3. ŠIP U GLINI

Postoji veliki broj publikovanih radova koji se bave problematikom ponašanja šipa u glini. U ovom radu biće opisani samo neki od faktora koji bitno utiču na ponašanje šipa u glini. Poznato je da način izvodjenja šipova bitno utiče na njegovo ponašanje pri opterećenju. Zbog toga ćemo posebno razmatrati ponašanje šipova koji se utiskuju (pobijaju) u glinu a posebno ponašanje bušenih šipova.

1.3.1. Šip pobijen u glinu

Efekti pobijanja piša u zasićenu glinu prema de Mello-u (1969) mogu se svrstati u sledeće kategorije:

- (a) remećenje ili izmena strukture tla oko šipa,
- (b) promena naponskog stanja u tlu oko šipa,
- (c) disipacija pornih pritisaka u tlu oko šipa generisanih za vreme izvodjenja šipa, i
- (d) dugotrajni efekti, regenerisanje čvrstoće i sl.

Generalno usled pobijanja šipa dolazi do razaranja strukture tla oko šipa, što ima za posledicu značajno smanjenje otpora pri probijanju šipa. Kasnije tokom vremena, otpornost šipa obično se povećava i to usled procesa tiksootropije delimične regeneracije razornih veza i procesa lokalne konsolidacije, opadanjem pornih pritisaka dolazi do povećanja efektivnih napona oko šipa. Problematikom generisanja pornih pritisaka oko pobijenog šipa i procesom konsolidacije oko njega bavio je se veći broj autora. Navešćemo neke od predloga.

Prema D. Appolonia & Lambe (1971) porni pritisak oko šipa može se sračunati na osnovu sledećeg izraza:

$$\frac{\Delta U_m}{\sigma_{vo}} = \left[(1 - K_0) + \frac{2C_u}{\sigma_{vo}} \right] \cdot A_f \quad (1.5)$$

gde su uvedene sledeće oznake

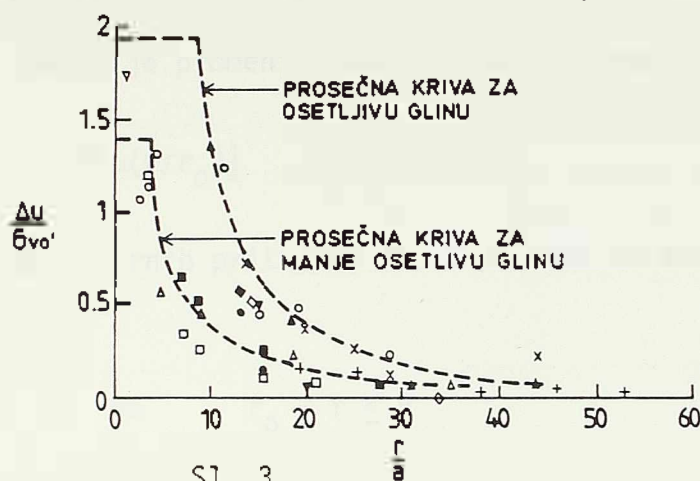
ΔU_m - maksimalna vrednost priraštaja pornih pritisaka

K_0 - koeficijent bočnog pritiska tla u stanju mirovanja

A_f - koeficijent pornog pritiska pri lomu.

Navedeni porni pritisak opada rapidno sa rastojanjem od šipa (sl. 3) i generalno disipira veoma brzo.

Teorijski, metodologiju za određivanje veličine pornog pritiska okolo šipa i njegove raspodele razmatrali su Nishida (1962) i Landanyi (1963).



Sl. 3

Ovi radovi se zasnivaju na teoriji širenja cilindričnog otvora u elastoplastičnoj sredini. Mnogo rigorozniju analizu promene naponskog stanja, pornih pritisaka i toka konsolidacije predložio je Wroth (1979). Proces utiskivanja šipa modeliran je širenjem cilindričnog otvora sa radijalnim pomeranjima tla. Problem je rešavan MKE a za tlo je korišćen Cam-Clay model. Postoji relativno malo podataka merenja pornih pritisaka na terenu oko pobijenog šipa. Međutim merenja koje je izvršio Bjerrum sa saradnicima, pokazuju da je gradijent pornih pritisaka radijalan, prema tome proces konsolidacije se obavlja kretanjem vode u radijalnom pravcu od šipa. Suprotno tome čestice tla kreću se unutar ka šipu, pa se tlo nalazi u fazi rasterećenja. Prema tome za vreme odvijanja procesa konsolidacije tlo se ponaša kao elastičan materijal. Zbog velikih napona smicanja u tlu oko šipa dolazi do plastifikacije tla do poluprečnika R , koji se može odrediti iz sledećeg izraza:

$$R = p_0 [G/C_u]^{1/2} \quad (1.6)$$

Generisani porni pritisci koji se javljaju neposredno pored šipa mogu biti i po nekoliko puta veći od efektivnih vertikalnih napona. Ovi pritisci su utoliko veći ukoliko je veća senzitivnost gline. Po obliku porni pritisak opada približno linearno sa logaritmom rastojanja od šipa.

Za otvor koji nastaje širenjem cilindričnog otvora od nule do radiusa r_0 , radijalni i tangencijalni totalni naponi mogu se sračunati na osnovu sledećih izraza:

$$\Delta\sigma_r = C_u [1 + 1u(G/c_u) - 21u(r/r_0)] \quad (1.7)$$

$$\Delta\sigma_a = c_u [-1 + \ln(G/c_u) - 2\ln(r/r_0)] \quad (1.8)$$

Priraštaj pornog pritiska jednak je promeni srednjeg totalnog napona:

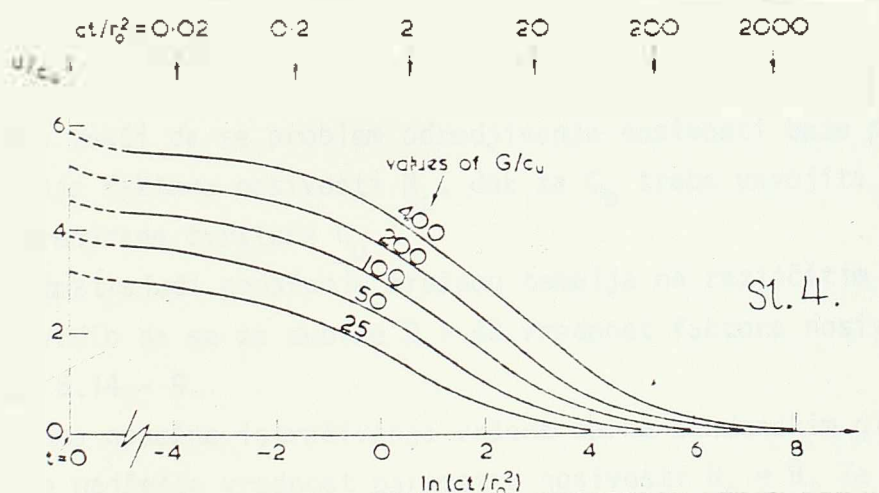
$$\Delta u = c_u [\ln(G/c_u) - 2\ln(r/r_0)] \quad (1.9)$$

Prema tome raspodela pornih pritisaka oko šipa može se izraziti sledećim izrazom:

$$\Delta U_0 = 2c_u \ln(R/r) \quad \text{za} \quad r_0 \leq r \leq R \quad (1.10)$$

Na slici 4. prikazana je promena pornog pritiska sa vremenom u funkciji odnosa G/c_u , pri čemu je uvedena oznaka:

$$c = \frac{K}{\gamma_u} \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \quad (1.11)$$



Pod pretpostavkom da je poznato naponsko stanje u tlu oko šipa u toku opterećenja šipa mogu se postaviti dva pitanja: kako se menja efektivni napon u tlu oko šipa u fazi opterećenja i koji kriterijum loma u tlu treba primeniti da bi se sračunala nosivost šipa.

Parry & Swain (1977) su detaljno ispitivali zavisnost ugla δ' od odnosa napona $K = \sigma'_H/\sigma'_U$. Oni su zaključili sa se lom u tlu oko šipa dešava pod nekim uglom u odnosu na osu šipa. Maksimalan ugao trenja paralelan osi šipa bitno zavisi od naginjanja ravni loma. Na osnovu ovih ispitivanja oni su došli do zaključka kada je $K > 1$ da je ugao trenja $\delta' < \phi'$. Chandler & Martins su izvršili detaljna eksperimentalna ispitivanja promene radijalnog napona oko šipa u fazi opterećenja. Kod pobijenih šipova u fazi izvodjenja šipa dolazi do znatnog povećanja radijalnih napona, i kod normalno konsolidovanih glina ovaj odnos σ'_H/σ'_U postaje veći od jedan. U fazi opterećenja šipa dolazi do značajnog

pada radijalnih napona. Ovaj efekat opadanja napona zajedno sa efektom razaranja strukture pri pobijanju šipa značajno redukuje nosivost šipa. Ovo znači da su promene radijalnih napona pri pobijanju šipa i pri opterećenju suprotnog znaka.

Kod normalno konsolidovanih glina radijalni napon opada pri opterećenju sve dok napon smicanja ne dostigne vršnu vrednost. U stanju rezidualne otpornosti nema opadanja radijalnog napona a smičuće deformacije su skoncentrisane na veoma usku zonu oko šipa, reda veličine nekoliko čestica. Na ovim mestima dolazi do diskontinuiteta u pomeranjima.

Kod prekonsolidovanih glina u fazi opterećenja dolazi do povećanja radijalnih napona.

Za određivanje nosivosti šipa koriste se dva pristupa i to: analiza totalnih napona i analiza efektivnih napona.

Tradicionalno se za određivanje nosivosti šipova u glinama koristi metoda totalnih napona. U ovom slučaju izraz za nosivost baze može se napisati u sledećem obliku:

$$Q_b = C_b N_c A_b \quad (1.12)$$

što znači da se problem određivanja nosivosti baze praktično svodi na određivanje faktora nosivosti N_c , dok za C_b treba usvojiti vrednost nepomećene nedrenirane čvrstoće C_u .

Razmatrajući ponašanje kružnog temelja na različitim dubinama Skempton (1951) je utvrdio da se za dubine $D > 4B$ vrednost faktora nosivosti N_c kreće u granicama od 6.14 - 9.

Veoma opsežna istraživanja vršena su na Londonskim glinama i zaključeno je da je najčešća vrednost parametra nosivosti $N_c = 9$. Za sračunavanje ovoga parametra Landanyi je predložio sledeći izraz:

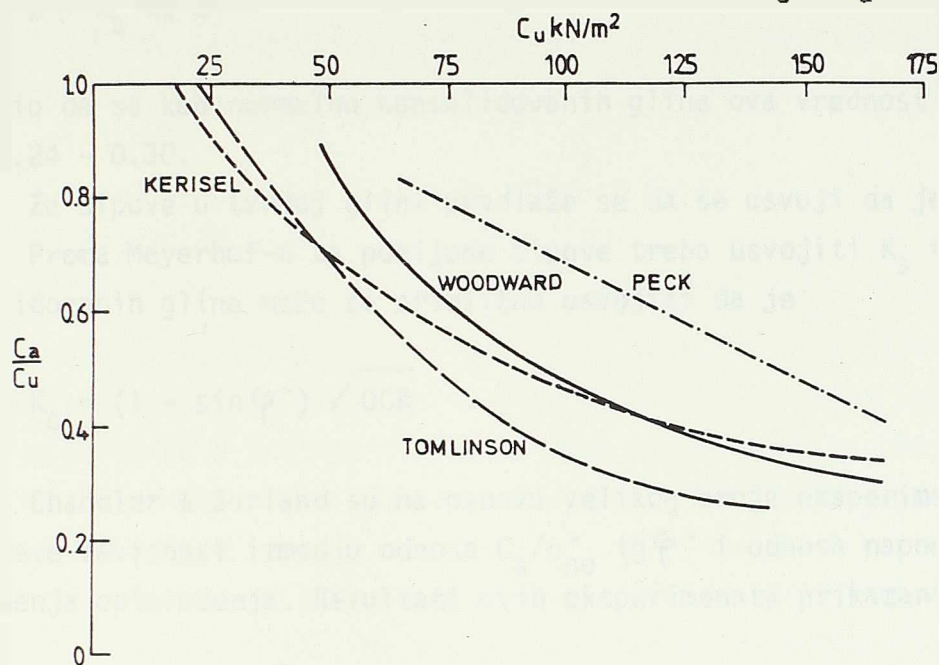
$$N_c = 1 + \frac{4}{3} \left[1 + 1u \left(\frac{E_u}{3C_u} \right) \right] \quad (1.13)$$

Nosivost omotača šipa određuje se iz sledećeg izraza:

$$Q_s = C_a \cdot A_s \quad (1.14)$$

gde je C_a - adhezija izmedju omotača stabla šipa i okolnog tla. Obično se uzima da je ova adhezija jednaka nedreniranoj čvrstoći tla, merenoj u laboratoriji ili na terenu, pomnoženoj sa empirijski određenim faktorom akhezije α . Veličina ovoga faktora zavisi od: geoloških uslova na terenu, vrste i veličine

šipa i načina izvodjenja šipa. Puno napora je uloženo da se uspostave korelacije između adhezije C_a i nedrenirane čvrstoće C_u , odnosno da se odrede vrednosti faktora adhezije. Za nabijeni šip, tipične zavisnosti C_u i C_a prikazane su na sl. 5.



Sl. 5

Za tvrde gline vrednosti parametra α odredio je Tomlinson u zavisnosti odnosa penetracije šipa. Može se zaključiti da je postupak totalnih napona veoma koristan i jednostavan za primenu, međutim, njegova empirijska priroda ukazuje da treba biti veoma obazriv kod njegove primene naročito u novim nedovoljno ispitanim sredinama.

Dobro je poznato da ponašanje tla zavisi od efektivnih napona kojima je izloženo. Zato su mnogi autori predložili da se ponašanje šipa poredi sa efektivnim naponima u okolnom tlu (Chandler 1968, Burland 1973, Meyerhof 1976, Parry & Swain 1977, Randolph, Carter & Wroth 1979 i Kirby & Esrig 1980). Da bi se koristio ovaj pristup neophodno je praćenje promene naponskog stanja oko šipa i to u fazama pre izgradnje šipa u toku njegove izgradnje i u fazi opterećenja.

Chandler (1968) je za sračunavanje vršne nosivosti omotača šipa predložio sledeći izraz:

$$C_a = c' + \sigma_n' \operatorname{tg} \delta' \quad (1.15)$$

S obzirom na razaranje strukture tla oko šipa preporučuje se da se zanemari vrednost kohezije c' . Takodje se preporučuje da za vrednost ugla trenja δ' treba usvojiti vrednost ugla unutrašnjeg trenja ϕ' . Za horizontalni napon u tlu obično se pretpostavlja da je jednak naponu u tlu pre izvodjenja šipa.

Burland (1973) je analizirao promenu parametra β

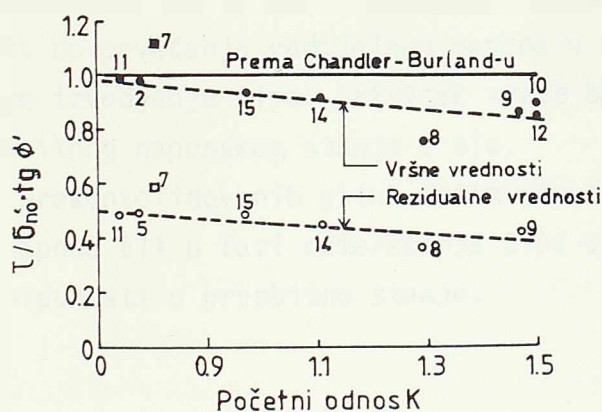
$$\beta = K_s \operatorname{tg} \delta' \quad (1.16)$$

i ustanovio da se kod normalno konsolidovanih glina ova vrednost kreće u granicama od 0.24 - 0.30.

Za šipove u tvrdoj glini predlaže se da se usvoji da je $K_s = K_0$ i ugao $\delta' = \varphi'$. Prema Meyerhof-u za pobijene šipove treba usvojiti $K_s = 1.5 K_0$. Kod prekonsolidovanih glina može se približno usvojiti da je

$$K_0 = (1 - \sin \varphi') \sqrt{\text{OCR}} \quad (1.17)$$

Chandler & Burland su na osnovu velikog broja eksperimenata, pokušali da uspostave zavisnost izmedju odnosa $C_a / \sigma_{no} \operatorname{tg} \varphi'$ i odnosa napona $K = \sigma_h / \sigma_v$ pre nanošenja opterećenja. Rezultati ovih eksperimenata prikazani su na sl. 6.



Sl. 6

Dozvoljeno opterećenje šipa dobija se deljenjem graničnog opterećenja sa odgovarajućim faktorom sigurnosti. Često puta se preporučuje da se za bazu i omotač usvoje različiti faktori sigurnosti. Ovo se čini iz razloga što je za dostizanje granične nosivosti po omotaču potrebno znatno manje pomeranje nego pomeranje potrebno za dostizanje granične nosivosti baze.

1.3.2. Bušeni šip u glini

Ponašanje bušenih šipova u glini intenzivno je ispitivano na Londonskim glinama. Kao i kod pobijenih šipova i kod bušenih šipova njihovo ponašanje značajno zavisi od načina izgradnje šipa.

Pri sračunavanju nosivosti baze sa dovoljnom tačnošću može se usvojiti da je $N_c = 9$. U nekim slučajevima zavisno od izgradnje šipa može doći do

remećenja gline u nivou baze i njenog značajnog omekšanja. Ovo ima za posledicu povećanje sleganja šipa.

Za sračunavanje nosivosti omotača šipa potrebno je odrediti adheziju između tla i šipa. Generalno se može usvojiti da je adhezija manja od nedrenirane čvrstoće tla pre izvodjenja šipa. Ovo omekšanje gline nastaje iz sledećih razloga:

- a) apsorpcija vode iz sveže betonske mase,
- b) migracija vode iz tla prema šipu, i
- c) povećanje vlažnosti tla usled izvodjenja šipa.

Svi ovi negativni efekti mogu se značajno smanjiti ako se poveća brzina izvodjenja šipa. Meyerhof je merio promene vlažnosti gline oko bušenog šipa i zaključio je da mala promena vlažnosti može značajno da redukuje adheziju između šipa i tla. Generalno faktor adhezije α kod bušenih šipova kreće se u granicama od 0.3 - 0.60.

U zavisnosti od tehnologije izvodjenja bušenih šipova dolazi do promene radijalnih napona u tlu. Na primer u zavisnost od načina betoniranja vrste betona može doći do povećanja radijalnog napona u tlu oko šipa u odnosu na naponsko stanje pre izvodjenja šipa. Pritisak sveže betonske mase može biti značajno veći od prvobitnog naponskog stanja u tlu.

Kod tvrdih prekonsolidovanih glina tokom izvodjenja šipa dolazi do opadanja radijalnog napona ali u fazi opterećenja šipa ovaj napon se povećava i vraća se skoro u potpunosti u prvobitno stanje.

1.4. ŠIPOVI U PESKU

Ponašanje šipova u peskovima bitno se razlikuje od njihovog ponašanja u glinama. Pored teoretskih radova objavljenih iz ove oblasti postoji i veliki broj objavljenih rezultata eksperimentalnih istraživanja. Monografija prof. Vesića "A study of bearing capacity of deep foundations" predstavlja najsveobuhvatnije do sada publikovano delo u kome se eksperimentalno i teorijski analizira ponašanje šipova u peskovima. Opiti su vršeni i u laboratoriji i na terenu. U laboratoriji, opiti su vršeni u homogenim peskovima. Poznato je da se samo na osnovu velikog broja dobro izvedenih opita u homogenoj masi mogu doneti zaključci koji se kasnije mogu uspešno generalizovati. Da bi se odredio uticaj dimenzija šipa i način njegovog izvodjenja opiti su vršeni u laboratoriji i na terenu i to na šipovima različitih dimenzija i oblika. Saznanja do kojih je se došlo ovim istraživanjima i zaključci koji su na osnovu njih izvedeni opšte su prihvaćeni u stručnoj javnosti. I u ovome radu, pri opisivanju ponašanja šipova u peskovima, dosta ćemo se osloniti na rezultate i zaključke objavljene

u navedenoj monografiji.

Način izvodjenja šipova bitno utiče na njegovo ponašanje pod opterećenjem pa će se zbog toga posebno analizirati bušeni šipovi od pobijenih šipova.

1.4.1. Bušeni šipovi u pesku

Nosivost bušenih šipova u pesku dobija se kao i u predhodnom slučaju zbiranjem nosivosti baze i nosivosti omotača šipa.

Postoji generalna tendencija povećanja nosivosti baze šipa sa povećanjem dubine. Praktično linearno povećanje nosivosti baze sa dubinom je samo do relativne dubine $D/B \leq 4$. (10). Daljnim povećanjem dubine ugradjivanja baze šipa, brzina povećanja nosivosti baze se smanjuje. Pri relativnim dubinama $D/B \geq 15$. (20) nosivost praktično dostiže svoju asimptotsku vrednost, koja izgleda da je funkcija samo zbijenosti peska. Brojevi u zagradama odnose se na bušene šipove većih prečnika. Ova dubina pri kojoj se postiže granična nosivost baze naziva se kritična dubina. Na ovim dubinama dešava se samo lom utiskivanja sa ograničenim zonama klizanja oko baze šipa. Ova dubina zavisi od relativne dužine šipa i zbijenosti peska.

Dosta truda je uloženo da bi se objasnilo zbog čega na većim dubinama ne dolazi do povećanja nosivosti baze. Dostizanje konstantne vrednosti q_0 ne znači smanjenje faktora nosivosti N_q . Odgovor treba tražiti u činjenici da veličina q nije jednaka efektivnom vertikalnom naponu u nivou baze šipa od težine tla, već je jednaka normalnom naponu pri lomu u horizontalnoj ravni na nivou baze šipa $q = q_f$. U praktičnim analizama, obično se prećutno umesto q_f usvaja vrednost efektivnog vertikalnog napona na dubini baze šipa, od težine tla, što često puta dovodi do značajnih odstupanja. Ovakav proračun nosivosti baze naročito se ne može prihvatiti u slučajevima kada šip nedovoljno ulazi u sloj peska iznad kojeg su slojevi stišljivog tla.

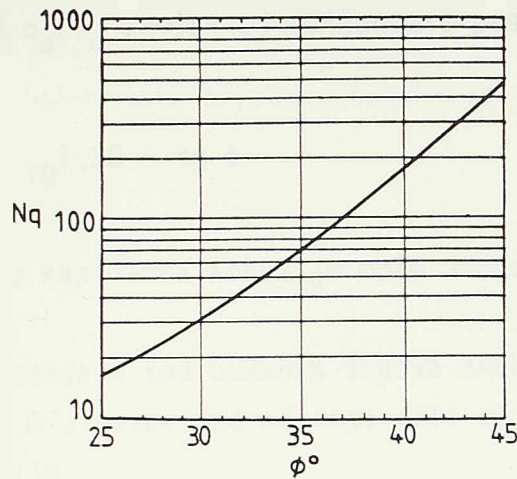
Na osnovu teorijskih razmatranja i rezultata eksperimenata, u slučaju lokalnog loma i loma utiskivanja, faktor nosivosti N_q može se odrediti iz sledećeg izraza:

$$N_q = e^{3.8 \cdot \phi \cdot \text{tg} \phi} \cdot \text{tg}^2(45 + \phi/2) \quad (1.18)$$

Prema ispitivanjima Kerisel-a () može se zaključiti da je faktor nosivosti složena funkcija od ϕ , D/B i B .

Najbolja slaganja sa rezultatima opita dobijaju se ako se faktor nosivosti N_q u zavisnosti od ugla ϕ sračuna prema predlogu Berezantzev-a (sl.7).

Zbog mogućih efekata omekšanja pri izvođenju šipa, za preporuku je da se faktor nosivosti sa redukovanom vrednošću ugla unutrašnjeg trenja $\varphi_r = \varphi - 3^\circ$.



Sl. 7

Izmedju faktora nosivosti N_q i specifične nosivosti baze i omotača q_o i f_o , može se ustanoviti na osnovu jednačine (1.2) i (1.4) sledeća zavisnost:

$$N_q = \frac{q_o}{f_o} K_s \operatorname{tg} \delta \quad (1.19)$$

Faktor nosivosti N_q je prvenstveno funkcija zbijenosti peska. Da bi se u potpunosti iscrpila nosivost baze dušenih šipova u pesku potrebna su velika sleganja do 25% od prečnika baze.

Nosivost omotača bušenih šipova takodje raste sa povećanjem dubine. Kod šipova u zbijenom pesku nosivost omotača raste do dubine od $D/B = 15$ i nadalje je skoro konstantna. Kod rastesitih peskova ova zavisnost nije najjasnija ali takodje do relativne dubine $D/B \leq 4$ postoji linearno povećanje nosivosti omotača šipa.

Na sličan način kao q_f menja se i vertikalni napon q_s sa dubinom neposredno pored stabla šipa.

Pri opterećenju šipa pesak oko stabla šipa teži da prati generalno pomeranje na dole. Kao posledica ovih pomeranja dolazi do inklinacije radialnih napona u zoni neposredno pored šipa. Veličina ove inklinacije zavisi od veličine sleganja i rastojanja od baze šipa.

U početnoj fazi opterećenja, veći deo opterećenja preuzima omotač šipa, kasnije sa porastom opterećenja šipa, opterećenje se seli na bazu šipa.

Pomeranje koje je potrebno da bi se aktivirala puna otpornost po omotaču šipa, ne zavisi od prečnika šipa i dubine šipa od zbijenosti peska. Kod šipova kružnog poprečnog preseka ovo varira izmedju 7 i 10 mm, dok je kod šipova kvadratnog poprečnog preseka dva puta manje.

Granično opterećenje pri zatezanju šipa, po omotaču šipa, ne razlikuje se od opterećenja pri pritisku šipa. Ovaj odnos najviše zavisi od dimenzija šipa.

Količnik q_0/f_0 zavisi od zbijenosti peska a malo zavisi od dimenzija šipa

$$\frac{q_0}{f_0} = 9 \cdot 10^{1,30} \cdot \text{tg } \phi \quad (1.20)$$

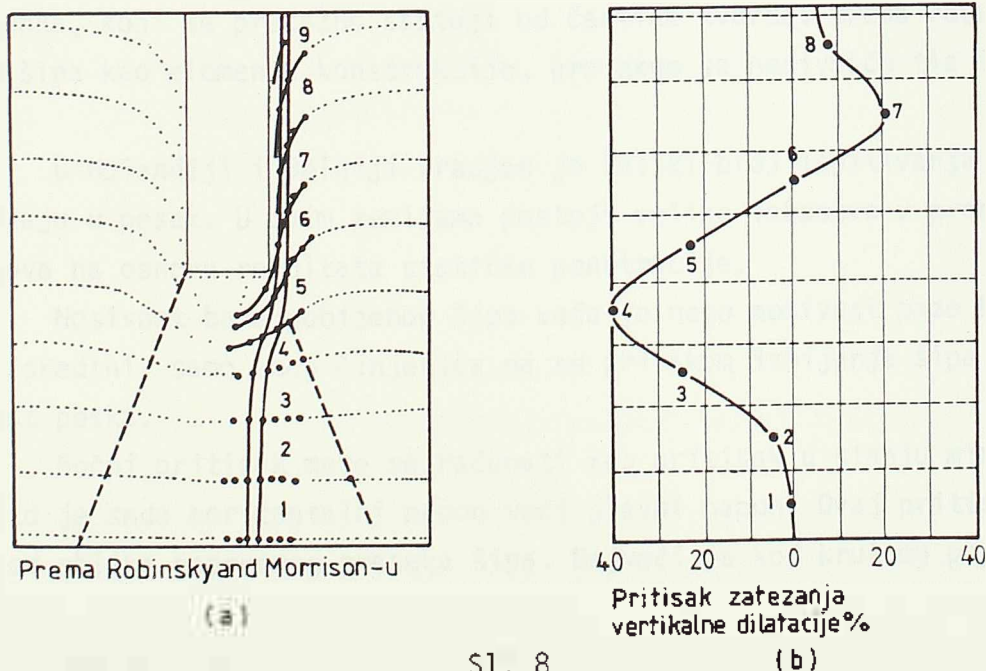
Prisustvo kapilarne kohezije može značajno da poveća q_0 , bez značajnije promene f_0 .

Ugao smicanja δ kod bušenih šipova treba usvojiti da je jednak uglu unutrašnjeg trenja ϕ , nezavisno od toga dali se pri izvodjenju šipova koristi bentonitna suspenzija.

1.4.2. Šipovi koji se pobijaju u pesak

Kada se šip pobija u pesak, dolazi do povećanja njegove kompaktnosti i zbijenosti. Usled zbijanja i vibracija tokom izvodjenja šipa, čestice se međusobno pomeraju i pakuju a takodje dolazi i do loma nekih čestica.

Povećanje nosivosti šipa usled povećanje i zbijenost peska pri izvodjenju šipa, detaljno je proučavao Meyerhof (1959). Pomeranje čestica oko šipa pri njegovom pobijanju snimano je radiografski (sl. 8).



Sl. 8

(b)

Na slici (8) prikazane su vertikalne dilatacije u tlu pored šipa.

Ispod baze šipa dolazi do zbijanja tla dok se neposredno iznad baze šipa smanjuje zbijenost peska usled dilatacije zatezanja.

Da bi obuhvatio efekat pobijanja šipa u pesak, Kishida (1967) je predložio na osnovu obimnih ispitivanja na modelima i na terenu, povećanje ugla unutrašnjeg trenja materijala. Prema njemu, nosivost baze šipa treba računati sa uglom

$$\phi_r = \frac{\phi + 40^\circ}{2} \quad (1.21)$$

Za sračunavanje nosivosti stabla šipa treba usvojiti ugao smicanja

$$\delta = \frac{3}{4} \phi + 10^\circ \quad (1.22)$$

Prema Tomilsonu (1980), pri pobijanju šipa u pesak, oko šipa se formira jedna uska veoma zbijena zona. Van ove zone formira se zona relativno rastresitog peska, koja značajno utiče na nosivost omotača. Pored toga u ovoj zoni dolazi do značajnih deformacija usled napona smicanja u tlu. Prema do sada publikovanim radovima najveća izmerena vršna vrednost specifične nosivosti omotača šipa u pesku je $f_0 = 110 \text{ kN/m}^2$.

Pri proračunu nosivosti baze šipa, faktor nosivosti N_q treba odrediti prema Berezantsev-u, pri čemu treba voditi računa o povećanju zbijenosti peska pri pobijanju šipa. Na osnovu publikovanih radova do sada najveća izmerena vrednost nosivosti baze $q_0 = 11000 \text{ kN/m}^2$. Ako se šip pobija u sloj zbijenog peska ili šljunka, koji se pretežno sastoji od čestica kvarca, treba računati sa nosivošću šipa kao elementa konstrukcije, pre nego sa nosivošću tla ispod baze šipa.

U Holandiji i Belgiji uradjen je veliki broj ispitivanja šipova koji se pobijaju u pesak. U ovim zemljama postoji veliko iskustvo u proceni ponašanja šipova na osnovu rezultata statičke penetracije.

Nosivost baze pobijenog šipa veća je nego nosivost baze bušenog šipa u istoj sredini, samo zbog činjenica da se prilikom izbivanja šipa povećava zbijenost peska.

Bočni pritisak može se računati kao pritisak u stanju mirovanja, s tim što je sada horizontalni napon veći glavni napon. Ovaj pritisak značajno zavisi od oblika poprečnog preseka šipa. Najveći je kod kružnog poprečnog preseka.

Nosivost baze i omotača linearno se povećavaju sa dubinom na manjim dubinama. Na većim dubinama ove vrednosti dostižu kvazi konstantnu vrednost. Treba primetiti da je u ovome slučaju, veća kritična dubina nego kod bušenih šipova, naročito u zbijenom pesku.

Pomeranje potrebno da se dostigne granična vrednost nosivosti baze, zavisi od dimenzija baze i iznosi $\sim 10\%$ od prečnika baze. Medjutim, pomeranje potrebno da se postigne granična nosivost po omotaču šipa nezavisno je od dimenzije šipa, načina izvodjenja i zbijenosti peska i kreće se u granicama od 7 - 10 mm.

1.5. METODE ZA PRORAČUN SLEGANJA ŠIPA

Sleganje vrha šipa nastaje kao posledica skraćanja stabla šipa, sleganja tla u nivou baze šipa usled opterećenja koje se prenosi preko baze šipa i sleganje tla u nivou baze šipa usled opterećenja koje se sa šipa preko omotača prenosi na tlo.

Postoji više metoda za proračun sleganja šipa: empirijske metode, metode koje se zasnivaju na rešenjima teorije elastičnosti i numeričke metode.

Kod empirijskih metoda, sleganje šipa sračunava se pomoću jednostavnih izraza, uvodjenjem određenog broja faktora koji su određeni na osnovu velikog broja eksperimenata. Na primer prema Vesiću (1967) sleganje šipa može se sračunati na sledeći način.

Sleganje baze šipa sračunava se iz izraza

$$w_b = \frac{C_w Q_p}{(1 + D_r^2) \cdot B \cdot q_0} \quad (1.23)$$

gde je C_w koeficijent zavisan od načina izvodjenja šipa. Za pobijene šipove $C_w = 0.04 - 0.05$, a za bušene šipove $C_w = 0.18$.

Ovako sračunatom sleganju baze šipa treba dodati i elastično skraćanje stabla šipa

$$w_s = (Q_b + \alpha Q_s) \frac{L}{A \cdot E_b} \quad (1.24)$$

α je koeficijent koji zavisi od načina raspodele opterećenja po dužini šipa i kreće se u granicama od 0.5 - 0.60.

Kod metoda koje se zasnivaju na rešenjima teorije elastičnosti, najčešće se koristi Mindlin-ovo (1936) rešenje. Za pretpostavljenu raspodelu opterećenja oko šipa i ispod baze šipa integracijom se sračunavaju priraštaji napona u tlu ispod baze šipa. Zatim se poznatim metodama mehanike tla sračunavaju vertikalne dilatacije u tlu odnosno sleganja. Treba naglasiti da je tačnost ovih metoda ograničena zbog nepoznavanja raspodele opterećenja oko šipa

i zbog toga što moduli deformacije tla ispod baze šipova bitno zavise od načina izvodjenja šipova.

Zbog napred navedenih teškoća i nedostataka u današnje vreme za sračunavanje sleganja šipa obično se koriste numeričke metode. U narednom odeljku detaljnije ćemo govoriti o primeni numeričkih metoda za određivanje ponašanja šipa pod opterećenjem. Na ovome mestu navešćemo samo jedno takvo rešenje koje je jednostavno za primenu a prema iskustvima autora ovoga rada daje veoma dobre rezultate.

Poulos & Davis korišćenjem metode konačnih elemenata, izvršili su veoma obimne parametarske analize za sračunavanje sleganja šipa. Prema ovom autoru sleganje lebdećeg šipa može se sračunati iz sledećeg izraza

$$\omega = \frac{Q \cdot I}{E_s \cdot d} \quad (1.25)$$

Veličine koje figurišu u ovom izrazu imaju sledeće značenje:

$$I = I_0 \cdot R_k \cdot R_h \cdot R_v \cdot R_b \quad (1.26)$$

ω - sleganje vrha šipa

Q - aksijalno opterećenje šipa

I_0 - uticajni koeficijent za nestišljivi šip u polu beskonačnoj masi za $\nu_s = 0.50$

R_k - faktor korekcije usled deformabilnosti šipa

R_h - faktor korekcije za konačnu debljinu deformabilnog sloja

R_v - faktor korekcije za Poisson-ov broj $\neq 0.50$

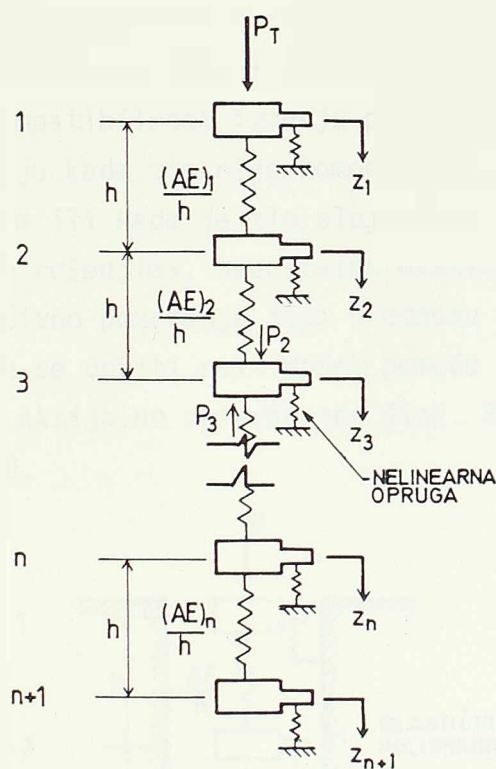
R_b - faktor korekcije koji uzima u obzir proširenje baze.

Svi ovi faktori mogu se očitati sa dijagrama koji su dati u knjizi autora, tako da se veoma brzo može sračunati sleganje šipa uzimajući u obzir skoro sve bitne parametre od kojih zavisi sleganje šipa.

1.6. NUMERIČKE METODE

U novije vreme razvijen je relativno veliki broj numeričkih metoda i postupaka za simuliranje ponašanja aksijalno opterećenog šipa. Navešćemo samo neke od ovih metoda bez težnje da detaljnije ulazimo u njihovo opisiyanje.

Seed & Reese (1957) prvi su predložili metod reakcije tla (t-z) metod za analizu ponašanja aksijalno opterećenog šipa. Osnovna ideja ovakvog postupka sastoji se u podeli šipa na n najčešće jednakih delova. Na sl. 9 šematski je prikazan ovaj model.

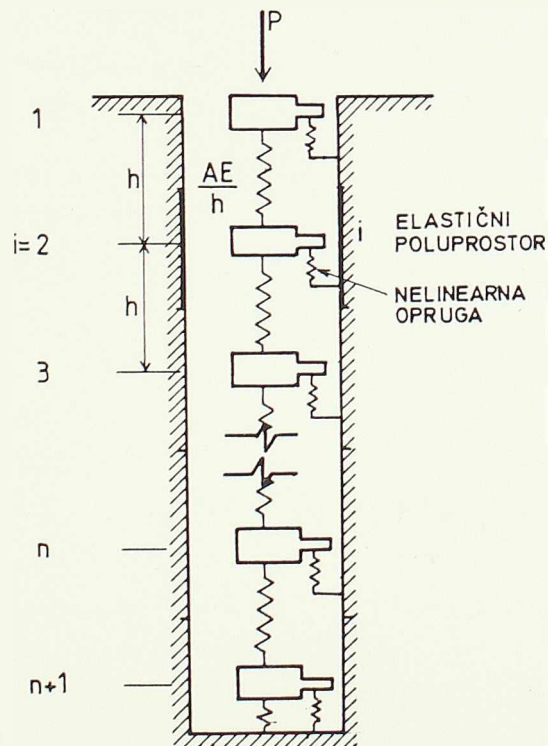


Sl. 9

Kod ove metode, pretpostavlja se da je pomeranje svake tačke zavisno samo od opterećenja u toj tački. Na ovaj način interakcija izmedju šipa i tla pretstavljena je preko sistema opruga pomoću kojih se uspostavlja veza izmedju napona smicanja na kontaktu šipa i tla i pomeranja šipa. Tačnost ove metode direktno zavisi od izbora funkcija t-z. Ove funkcije zavise od graničnog opterećenja koje se može preneti preko omotača šipa, od rasporeda opterećenja po dužini šipa i karaktera pomeranja. Za konstruisanje ovih krivih koriste se rezultati eksperimenata na modelima i na terenu. Postoje razradjeni i teorijski postupci za konstruisanje ovih krivih. Osnovni nedostatak ovakvog numeričkog postupka je u tome što se zanemaruju medjusobni uticaji, odnosno naponi i po-

meranja u svakoj tački šipa zavise od napona u svim tačkama a ne samo od napona u lameli u kojoj se računa pomeranje.

Drugu grupu metoda, čine metode koje se zasnivaju na integraciji Mindlin-ovog rešenja za pomeranja usled dejstva koncentrisane sile unutar elastičnog poluprostora. Kao i kod predhodne metode i ovde se šip deli na n -delova. Po površini svakog segmenta predpostavlja se ravnomerna raspodela napona smicanja. Integracijom Mindlin-ovog rešenja za pomeranja po površini svakog od cilindara formira se matrica uticajnih koeficijenata, odnosno matrica fleksibilnosti tla. Inverzijom ove matrice formira se matrica krutosti tla. Spajanjem ove matrice krutosti sa matricom krutosti šipa, aksijalno napregnuti KE, dobija se matrica krutosti sistema šip-tlo. Rešavanjem sistema linearnih jednačina dobija se nepoznata pomeranja čvornih tačaka a na osnovu njih sračunavaju se naponi smicanja u čvornim tačkama po dužini šipa. Kod ovakvih metoda pretpostavlja se da postoji potpuna kompatibilnost izmedju pomeranja tla i šipa. Teškoće u primeni ove metode nastaju kada tlo nije homogeno po dubini, odnosno kada se moduli tla menjaju sa dubinom ili kada je tlo slojevito. U ovakvim slučajevima pribegava se aproksimativnim rešenjima. Nedostatak ovakvih modela je u tome što se ne može obuhvatiti relativno pomeranje šipa u odnosu na tlo. Kombinacijom napred navedenih modela može se dobiti novi model pomoću koga se može mnogo uspešnije simulirati ponašanje aksijalno opterećenog šipa. Šematski prikaz ovakvog modela prikazan je na sl. 10.



Sl. 10

Uvedena zavisnost izmedju relativnog pomeranja šipa i tla i napona smicanja, su nelinearne pa se na taj način rešavanje problema svodi na rešavanje nelinearnog sistema jednačina. Zbog svoje jednostavnosti ovakvi postupci nailaze na sve veću upotrebu. Autor oboga rada predložio je jedan postupak koji se može svrstati u ovu grupu.

Medjutim, ovakvi postupci imaju i nedostaka od kojih su najvažniji sledeći:

- definisanjem karakteristika opruga, definiše se i granično opterećenje šipa,
- teškoće koje nastaju pri integraciji Mindlin-ovog rešenja,
- nepostoji mogućnost uzimanja u obzir promene radijalnih napona u fazi opterećenja šipa i
- nemože se pratiti razvoj zona plastifikacije u tlu oko šipa.

Zbog svih navedenih nedostataka, za tačnije analize ponašanja aksijalno opterećenog šipa, primenjuje se MKE. Posebnu pažnju u ovakvim analizama treba posvetiti izboru adekvatnog konstitutivnog modela tla. Za uspešnu analizu kontakta šipa i tla potrebno je uključiti i kontaktne elemente. Na ovaj način, nelinearna analiza aksijalno opterećenog šipa, svodi se na rešavanje materijalno nelinearnog problema MKE.

Zadatak ovog rada je da se pokaže koliko se uspešno može predvideti ponašanje aksijalno opterećenog šipa, korišćenjem savremenih numeričkih metoda.

2. KONSTITUTIVNI MODELI TLA

2.1. UVOD

Pri razmatranju različitih problema u geotehničkom inženjerstvu, potrebno je zajedno odabrati metodu analize i odgovarajući model tla. Na ovom polju učinjen je značajan napredak i to kako u razmatranju i opisivanju ponašanja tla, tako i u pogledu numeričke analize problema geoteničkog inženjerstva.

S obzirom na obim ove problematike u ovome radu će se dati osvrt samo na neke specifične slučajeve od interesa za ovaj rad.

Istorijski gledano počeci mehanike tla vezani su za ime Terzaghi-ja (1926-1956) čiji su radovi imali dominantan uticaj u ovoj oblasti. Početak moderne mehanike tla vezan je za fundamentalan naučni rad iz oblasti naponsko-deformacijskih osobina tla koji je uradjen u V. Britaniji. Poslednjih 30 godina predstavljaju pravu naučnu revoluciju u ovoj oblasti i to podjednako u napredovanju teorije, numeričke analize i eksperimenata. Zahvaljujući ovom napretku u upoznavanju ponašanja tla mnogi do sada prihvaćeni koncepti iskustva i prakse postaju zastarelim, i moraju se zameniti novim.

U poredjenju sa ostalim materijalima, osnovne osobine tla moraju se meriti. One mogu u zavisnosti od geološke istorije, znatno da variraju i poznate su sa mnogo manjom tačnošću nego kod ostalih materijala.

Glavni ciljevi u pronalaženju konstitutivnih modela za ponašanje tla su: da oni dobro opisuju ponašanje konkretnog tla, da se parametri za njihovo opisivanje mogu odrediti konvencijalnim opitima i da je njihova primena što jednostavnija u numeričkim analizama. Do sada, koliko je poznato nije pronadjen takav model koji ispunjava svenapred navedene zahteve.

Ukoliko su modeli jednostavniji utoliko je njihova primena ograničenija. Takodje parametri koji opisuju osobine tla treba da imaju jasno fizičko značenje, a ne da budu konstante koje samo opisuju rezultate eksperimenata.

Metode proračuna koje se najčešće primenjuju pri konvencijalnom rešenju geotehničkih problema su:

- (i) deformaciona analiza
- (ii) analiza granične ravnoteže

Granična analiza razmatra samo ravnotežu mase tla; bavi se samo gravitacionim opterećenjem i čvstoćama a ne uzima u obzir deformacije. Suprotno njoj analiza deformacija bavi se samo deformacijama a ne uzima u obzir čvrstoću tla. Tendencija savremene numeričke analize geotehničkih problema je u

spajanju ove dve, napred iznete analize odnosno da se istovremeno razmatraju i čvrstoća i deformabilnosti.

Geomehanički problemi se najčešće rešavaju primenom mehanike kontinuuma pri čemu je ponašanje materijala izraženo naponsko-deformacijskim zakonima. Medjutim, mehanika kontinuuma, bavi se sa hipotetičkim materijama, pri čemu se sistem diskontinualnih čestica tla tretira kao kontinuum.

Mehanička čestica, s druge strane bavi se interakcijom čestica tla. Oblast u kojoj diskontinualno ponašanje čestica od značaja je formiranje površi klizanja ili izraženih smicanja u tlu. Do sada je učinjeno dosta napora da se sintetizuje ponašanje kontinuuma prema ponašanju čestica, ali generalne formulacije su toliko kompleksne i komplikovane da se prihvatljivo rešenje još uvek izučava (Strack 1979, Thornton 1983).

Pre nego što predjemo na opisivanje odredjenih modela potrebno je predhodno da definišemo promenljive koje figurišu u tim modelima.

(i) materijalne konstante koje su kao što im ime kaže fundamentalne konstante materijala i definišu vrstu materijala.

(ii) promenljive stanja čije veličine se menjaju kako se tlo deformiše. One su neophodne da u modelima definišu trenutno stanje materijala.

Zavisno od izbora modela tla neke materijalne konstante u jednom modelu mogu biti promenljive stanja u drugom modelu. Na primeru, ugao unutrašnjeg trenja ϕ' obično se smatra fundamentalnom veličinom iako neki radovi (Lode and Duncan 1975,...) pokazuju da ϕ' varira u zavisnosti od srednjeg napona σ_2 , odnosno Lode-ovog ugla Q .

Pored toga, pri formiranju modela za opisivanje ponašanja tla, treba imati u vidu da je tlo višefazna sredina. Jedan od najvažnijih principa u mehanici tla jeste princip efektivnih napona koji direktno proizilazi iz više fazne prirode tla. On se može sagledati u svetlu teorije mešavine, u kojoj jedna komponenta mešavine (fluid) nemože preuzeti smičuće napone.

Sve vrste tla mogu se svrstati u dve grupe; koherentne i nekoherentne materije. Tipični predstavnici ovih su gline i peskovi. Postoji dosta zajedničkih osobina u ponašanju gline i krupnozrnih materijala. Medjutim, mineralogija gline je veoma različita od mineralogije peska (Mitchell 1976) tako da postoje i neke bitne razlike. Zbog toga ćemo se u najkraćim crtama osvrnuti na te razlike.

Osnovna razlika izmedju gline i peska jeste njihova vodopropustljivost. Poznato je da je vodopropustljivost srazmerna kvadratu karakteristične dimenzije čestice, što ima za posledicu da je propusnost peska veća od propusnosti gline 10^7 puta pa i više. Iz ovoga proizilazi da je vreme dreniranja peska veoma kratko i da je nedrenirano stanje u ovom slučaju veoma retko. Zbog velike

vodopropusnosti pesak ne poseduje kratkotrajnu nedreniranu čvrstoću pa je praktično nemoguće uzimati neporemećene uzorke.

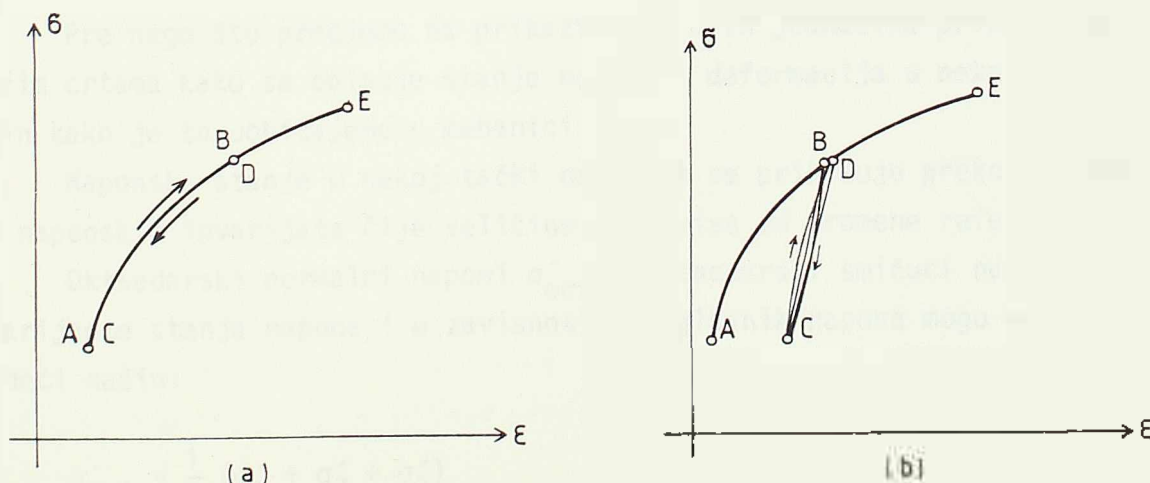
Druga veoma bitna razlika izmedju gline i peska je interakcija izmedju njihovih čestica. Interakcija izmedju čestica tla krupnoće prašine i većih može se razmatrati kao čisto mehanička interakcija. Kod čestica gline ova interakcija je znatno složenija jer se izmedju čestica javljaju različiti elektro-hemijski procesi, sile koje glini daju koheziju.

Osnovni parametar ili pokazatelj koji odražava ponašanje gline pod opterećenjem jeste pritisak prekonsolidacije. Uzorci sa malim pritiskom prekonsolidacije (OCR) pokazuje velika smicanja i kompresiju i u njima se generišu pozitivni porni pritisci. Kod glina sa velikim OCR ponašanje je znatno krtije, formiraju se površi klizanja i diskontinuiteta i mogu se generisati negativni porni pritisci.

Za opisivanje karaktera ponašanja peska potrebno je poznavati njegovu zbijenost i tekući pritisak.

Za opisivanje ponašanja tla u okviru mehanike kontinuuma najčešće se koristi nelinearna elastična teorija i elastoplastična teorija. Da bi smo ukazali na bitne razlike izmedju ovih teorija posmatrajmo ponašanje nekog uzorka za jedan ciklus opterećenja, rasterećenja i ponovnog opterećenja (sl. 1).

U teoriji nelinearne elastičnosti zavisnost izmedju napona i deformacija je nelinearna (AB). Pri rasterećenju uzorak se vraća nazad po istoj krivoj bez histerezisa (BC). Pri ponovnom opterećenju uzorak se ponovo deformiše na isti način (CDE). Poredjenjem ovakvog ponašanja sa ponašanjem realnog tla može se zaključiti da nelinearna teorija elastičnosti nije u stanju da uspešno opiše ponašanje tla.



Sl. 1

U elasto-plastičnoj teoriji (sl. 1b) pri primarnom opterećenju uzorak se deformiše po krivoj AB. Pri rasterećenju primećuje se znatno kruće ponašanje BC. Pri

rastojanju primećuje se znatno kruće ponašanje BC. Pri ponovnom opterećenju uzorak se vraća po liniji rasterećenja CD da bi nadalje nastavio da se ponaša po liniji primarnog opterećenja DE. Ovakvo ponašanje najviše odgovara ponašanju realnog tla pa ćemo zbog toga u buduće za opisivanje ponašanja tla koristiti elasto-plastične modele.

2.2. ELASTIČNI MODELI TLA

Kao i kod većine građevinskih materijala i za tlo se često koriste elastični modeli. Mada se upotrebi ovakvih modela mogu staviti velike zamerke, oni se u izvesnim slučajevima mogu iskoristiti za uspostavljanje veza između napona i deformacija. Naime, u prostoru napona postoje obvojnice (površni) popuštanja unutar kojih se uzorak tla ponaša elastično.

Predpostavlja se da u svakoj tački elastičnog tla postoji jednoznačna zavisnost između naponskog i deformacijskog stanja i da je ta zavisnost linearna. Takodje se predpostavlja da je ovaj proces savremeno ireverzibilan i da je nezavistan od putanje napona odnosno deformacije. Fizička zavisnost između komponenata tenzora napona i komponenata tenzora deformacije, poznata pod imenom generalisani Hukov zakon, može se prikazati u sledećem obliku:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \gamma_{kl} \quad (2.1)$$

Komponente C_{ijkl} nazivaju se modulima materijala i u opštem slučaju one zavise od osobina materijala i prirode geometrije tela.

Pre nego što predjemo na prikazivanje ovih jednačina prikazaćemo u najkraćim crtama kako se opisuje stanje napona i deformacija u nekoj tački tela na način kako je to uobičajeno u mehanici tla.

Naponsko stanje u nekoj tački najčešće se prikazuje preko pogodno odabranih naponskih invarijata čije veličine ne zavise od promene referentnih osa.

Oktaedarski normalni naponi σ_{oct}^* i oktaedarski smičući naponi τ_{oct}^* su invarijante stanja napona i u zavisnosti od glavnih napona mogu se prikazati na sledeći način:

$$\sigma_{oct}^* = \frac{1}{3} (\sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^*) \quad (2.2)$$

$$\tau_{oct}^* = \frac{1}{3} |(\sigma_1^* - \sigma_2^*)^2 + (\sigma_2^* - \sigma_3^*)^2 + (\sigma_3^* - \sigma_1^*)^2|^{1/2} \quad (2.3)$$

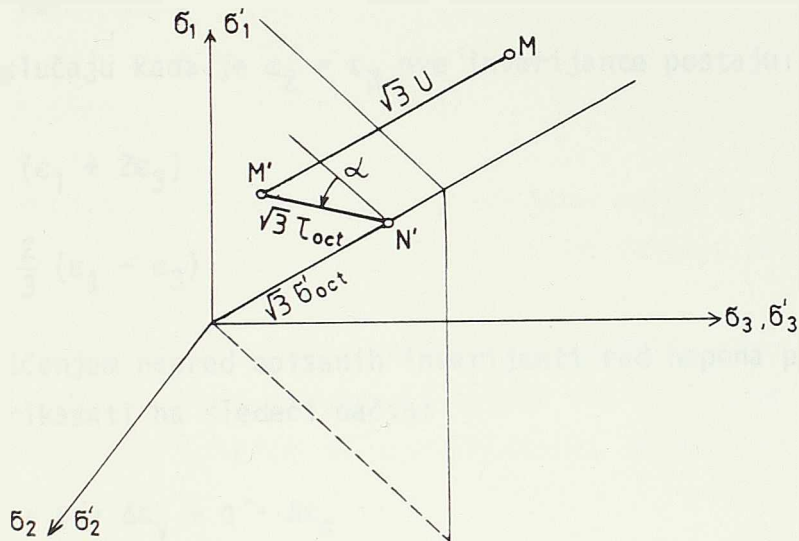
Veze između oktaedarskih efektivnih i totalnih napona mogu se pri-

kazati sledećim jednačinama:

$$\sigma_{oct}^* = \sigma_{oct} - u \quad (2.4)$$

$$\tau_{oct}^* = \tau_{oct} \quad (2.5)$$

Značenje ovih veličina prikazano je na slici 2.



Sl. 2

Da bi se tačno definisao položaj tačke M' potrebno je uvesti i treću invarijantu za koju se najčešće usvaja ugao α koji služi kao mera rotacije vektora MM' od triaksijalne ravni $\sigma_2 = \sigma_3$.

U specijalnom slučaju rotacione simetrije gde je $\sigma_2 = \sigma_3$ najčešće se definišu nove invarijante na sledeći način:

$$p' = \frac{1}{3} (\sigma_1' + 2\sigma_3') = \sigma_{oct}^* \quad (2.6)$$

$$q' = (\sigma_1' - \sigma_3') = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct}^*$$

Na sličan način mogu se prikazati i invarijante tenzora deformacije. Pri izboru ovih invarijanti treba voditi računa da one budu konzistentne sa invarijantama napona, tako da njihov proizvod bude ekvivalentan radu spoljašnjih sila.

$$\epsilon_{oct} = \frac{1}{3} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \quad (2.7)$$

$$\gamma_{\text{oct}} = \frac{2}{3} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2]^{1/2} \quad (2.9)$$

odnosno invarijante koje odgovaraju p' i q' su:

$$\epsilon_r = 3\epsilon_{\text{oct}} \quad (2.10)$$

$$\epsilon_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{\text{oct}} \quad (2.11)$$

U specijalnom slučaju kada je $\epsilon_2 = \epsilon_3$ ove invarijante postaju:

$$\epsilon_v = (\epsilon_1 + 2\epsilon_3) \quad (2.12)$$

$$\epsilon_s = \frac{2}{3} (\epsilon_1 - \epsilon_3) \quad (2.13)$$

Korišćenjem napred opisanih invarijanti rad napona po jedinici zapremine može se prikazati na sledeći način:

$$\Delta W/V = p' \cdot \Delta \epsilon_v + q' \cdot \Delta \epsilon_s \quad (2.14)$$

Sa napred uvedenim oznakama veza između tenzora napona i tenzora deformacije odnosno generalisani Hukov zakon može se prikazati u sledećem obliku:

$$p' = K \cdot \epsilon_v \quad (2.15)$$

$$q' = G \cdot \epsilon_s \quad (2.16)$$

Konstante K i G imaju jasan mehanički smisao. Konstanta K predstavlja meru kojom se izotropni materijal suprotstavlja promeni zapremine, dok konstanta G se može shvatiti kao mera suprotstavljanja izotropnog tela promeni oblika. Između modula K' i G' i E' i ν postoje jednoznačne veze.

Da bi se što vernije opisalo ponašanje tla elastičnim modelima najčešće se pristupa iznalaženju ekvivalentnih modula tla. Naime u laboratoriji se izvedu opiti uz primenu takvih tragova napona koji na najbolji mogući način oponašaju tragove napona koji se očekuju na terenu. Na osnovu ovako sprovedenih opita odrede se ekvivalentni elastični moduli tla, koji bi za iste inkremente napona izazvali iste deformacije i u elastičnom materijalu i u tlu. Ovakva metoda (Lambe 1967) naziva se metoda traga napona.

Često se u praksi za proračun deformacija izabira sekantni modul E_{50} koji odgovara tački na polovini čvrstoće pri lomu na naponsko deformacijskoj krivoj. Naravno da ovakav jednostavan inženjerski pristup problemu sadrži u sebi niz nedoslednosti.

Bitna karakteristika granularnih materijala je ta da njihovi moduli zavise od srednjeg efektivnog napona. Ova promena se najčešće izražava preko modula smicanja. Kod glinenih materijala veličina G/p_0^* zavisi bitno i od stepena prekonsolidacije gline OCR. Ova zavisnost se prema Ladd-u (1964) može prikazati na sledeći način:

$$G/p_0^* = (G/p_0^*)_{nc} \cdot [1 + c \ln(OCR)] \quad (2.17)$$

gde je c - bezdimenzionalna konstanta koja se mora odrediti za svako pojedinačno tlo. Nedostatak ovakvog načina je u tome što on zahteva poznavanje srednjeg napona p_0^* koji u najvećem broju slučajeva nije poznat.

Kod peska se za elastične osobine tla najčešće primenjuje kontaktna Hertzian-teorija. Ova teorija se bavi kontaktom dva elastična tela i pretpostavlja da su deformacije lokalne na mestu kontakta. Modul kompresije peska obično se izražava kao:

$$\frac{K}{p_a} = A \cdot \left(\frac{p^*}{p_a} \right)^n \quad (2.18)$$

gde je A - bezdimenzionalna konstanta a n - eksponent reda veličine $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ i koji zavisi od oblika zrna.

Kada se smičuće sile nanesu na zaobljeno telo u kontaktu dolazi do malog klizanja na kontaktu što ima za posledicu malu disipaciju energije. Takođe redukcija kontaktnog pritiska pri konstantnom smičućem naponu će izazvati dodatno klizanje.

I u ovom slučaju može se zaključiti da se modul smicanja može izraziti stepenom funkcijom pritiska. Pri ovome svakoj promeni napona odgovara određena mala disipacija energije tj. ovo predstavlja ne konzervativno ponašanje.

$$G/p_a = B \left(\frac{p^*}{p_a} \right)^m \quad (2.19)$$

Iwasaki (1978) je predložio sledeći izraz za sračunavanje modula smicanja peska

$$G/p_a = 70000 \frac{(2.17 - e)^2}{1 + e} (p^*/p_a)^{0,50} \quad (2.20)$$

U gornjem izrazu figuriše koeficijent poroznosti kojim se obuhvata promena

modula smicanja peska u zavisnosti od njegove zbijenosti.

Primenom linearnih elastičnih konstitutivnih jednačina za tlo, ne opisuje se dobro ponašanje tla. Osnovni nedostatak sastoji se u tome što su ovi modeli nezavisni od tragova napona. Pomoću njih se ne može opisati dilataciono svojstvo tla (pojam promene zapremine pri čistom smicanju).

Da bi se bolje opisalo ponašanje tla predloženi su različiti nelinearni elastični modeli. Medjutim, i primena ovakvih modela je ograničena jer i oni nisu u stanju da prevaziđu mnoge nedostatke koji se javljaju kod linearnih modela.

2.3. HIPOELASTIČNI MODELI TLA

Na osnovu predhodnih razmatranja može se zaključiti da se kompleksno ponašanje tla ne može uspešno opisati linearnim elastičnim modelima. Zbog toga se došlo na ideju da se izvesna poboljšanja mogu postići sako se za male inkremente napona, naponsko deformacijska kriva aproksimira linearnim segmentima. Kod ovakvih modela veze se uspostavljaju između inkrementa napona i inkrementa deformacija tj.

$$d\epsilon_{ij} = C_{ijkl} \cdot d\sigma_{kl} \quad (2.21)$$

gde su: C_{ijkl} konstante materijala koje su funkcija stanja napona. Od velikog broja predloženih modela najčešće se primenjuju modeli Duncan and Changa (1979) i K, G model Naylor (1975).

Teoriju koja čini osnov hipoelastičnih modela razradili su Trucsdell, Noll (1965). Kako su kod ovih modela moduli materijala funkcije trenutnog naponskog stanja, njihove deformacije zavise od traga napona što nije bio slučaj kod elastičnih materijala.

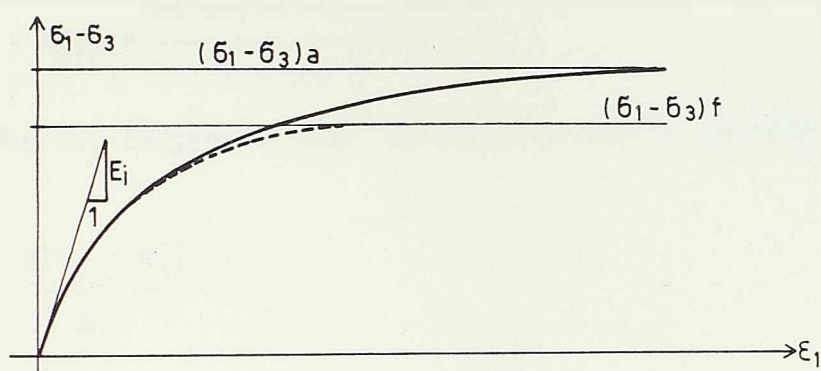
U narednom tekstu daće se nešto detaljniji prikaz modela Duncan and Changa (1970). Konder (1963) je uočio da se naponsko deformacijske krive iz standardnih triaksijalnih opita mogu uspešno aproksimirati hiperboličkim zavisnostima.

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\epsilon_1}{a + b\epsilon_1} \quad (2.22)$$

gde su a i b konstante materijala koje se odredjuju na osnovu dobijenih rezultata triaksijalnog opita. Najčešće se za njihovo odredjivanje koristi metoda najmanjih kvadrata. Ove konstante su u opštem slučaju funkcije poprečnog napo-

na σ_3 .

Na sl. 3 prikazana je jedna standardna kriva koja se dobija triaksi-
jalnim opitima.



Sl. 3

Na osnovu jednačine (2.22) dobija se

$$(\sigma_1' - \sigma_3')_a = \frac{1}{E_i} \quad (2.23)$$

$$E_i = \frac{1}{a}$$

Asimptotska vrednost $(\sigma_1' - \sigma_3')_a$ je obično veća od čvrstoće $(\sigma_1' - \sigma_3')_f$, pa se zbog toga uvodi korekcijski faktor R_f tako da je:

$$(\sigma_1' - \sigma_3')_f = R_f \cdot (\sigma_1' - \sigma_3')_a \quad (2.25)$$

Za većinu tla faktor R_f kreće se u granicama od 0,75 - 1,00. Imajući u vidu jednačine (2.23), (2.24) i (2.25) Konderova jednačina (2.2) može se napisati u sledećem obliku:

$$\sigma_1' - \sigma_3' = \frac{\epsilon_1}{\frac{1}{E_i} + \frac{R_f}{(\sigma_1' - \sigma_3')_f} \cdot \epsilon_1} \quad (2.26)$$

E_i je inicijalni modul i prema Jambu (1963) on se može prikazati kao eksponencijalna funkcija na sledeći način:

$$E_i = K \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3'}{p_a} \right)^n \quad (2.27)$$

gde su:

K - modulski broj koji je bez dimenzija i on predstavlja parametar tla

n - eksponent

Koristeći Mohr-Coulmbo-ov uslov loma čvrstoća materijala može se prikazati u sledećem obliku

$$(\sigma_1' - \sigma_3')_f = \frac{2c \cos \phi + 2\sigma_3' \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (2.28)$$

Pri const σ_3' naponu, tangenti modul deformacije dobija se diferenciranjem izraza (2.22)

$$E_t = \frac{d(\sigma_1' - \sigma_3')}{d\epsilon_1} \quad (2.29)$$

odnosno posle izvršenog diferenciranja dobija se

$$E_t = \frac{a}{(a + b\epsilon_1)^2} \quad (2.30)$$

Zamenom predhodnih izraza u jednačinu (2.30) i posle sredjivanja dobija se konačno

$$E_t = k p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3'}{p_a} \right)^n \left[1 - \frac{R_f (\sigma_1' - \sigma_3') (1 - \sin \phi)}{2c \cos \phi + 2\sigma_3' \sin \phi} \right]^2 \quad (2.31)$$

Na sličan način može se odrediti i tangenti Poissonov broj. Poprečna dilatacija ϵ_3 može se na osnovu CID-opita prikazati sledećom hiperboličkom zavisnošću.

$$\epsilon_3 = \epsilon_1 \cdot f / (1 - \epsilon_1 \cdot d) \quad (2.32)$$

gde je

$$f = G - F \log \left(\frac{\sigma_3'}{p_a} \right) \quad (2.33)$$

Parametri d , G i F takodje se mogu odrediti na osnovu rezultata triaksijalnih opita. Kako je

$$\nu_t = - \frac{d\epsilon_3}{d\epsilon_1} \quad (2.34)$$

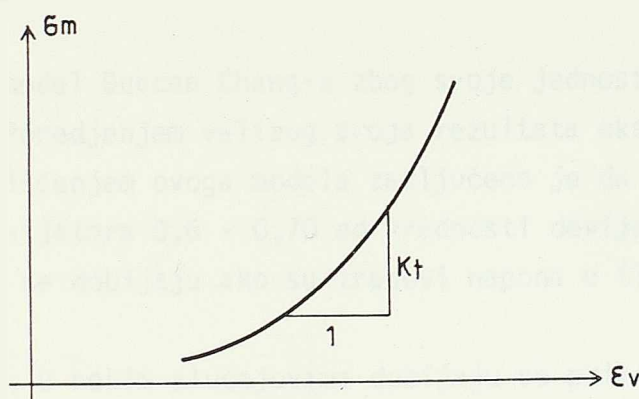
to se posle diferenciranja i sredjivanja napred prikazanih izraza dobija sledeći izraz za tangenti vrednost Poisson-ovog broja

$$v_t = (G - F \log \left(\frac{\sigma_3'}{p_a} \right)) \cdot \left[1 - \frac{d(\sigma_1' - \sigma_3')}{K p_a \left(\frac{\sigma_3'}{p_a} \right)^n \left[1 - \frac{R_f(\sigma_1' - \sigma_3')(1 - \sin \phi)}{2c \cos \phi + 2\sigma_3' \sin \phi} \right]} \right]^{-2} \quad (2.35)$$

Ovakav model se često naziva dvoparametarski model jer je za kompletno uspostavljanje veza između stanja napona i stanja deformacije potrebno poznavati samo dva parametra i to E_t i v_t .

Često se umesto sračunavanja tangentsnog Poissonovog koeficijenta kao drugi parametar koristi tangenti modul kompresije K_t .

Karakteristična zavisnost između srednjeg napona σ_m i zapreminske deformacije ϵ_v prikazana na sl. 4.



Sl. 4

Tangenti modul kompresije K_t može se izraziti na sledeći način:

$$K_t = k_B \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_m}{p_a} \right)^m \quad (2.36)$$

gde su:

k_B - broj modula kompresije

m - eksponent modula kompresije.

Zavisnost između promene zapremine (zapreminska dilatacija ϵ_v) i srednjeg normalnog napona usled konsolidacije može se prikazati na sledeći način:

$$\epsilon_v = a (\sigma_m)^{1-m} \quad (2.37)$$

Kombinacijom izraza (2.36) i (2.37) se dobija sledeći izraz za sračunavanje moduskog broja kompresije

$$\kappa_B = \frac{1}{a(1-m) + p_a^{1-m}} \quad (2.38)$$

Ako su nam poznate tangentne vrednosti modula elastičnosti i modula kompresije, tangentna vrednost Poisson-ovog broja može se odrediti iz sledećeg izraza

$$\nu_t = \frac{1}{2} - \frac{E_t \text{ (ili } E_{ur})}{6K_t} \quad (2.39)$$

Za rasterećenje se predlaže sledeći izraz za modul deformacije

$$E_{ur} = \kappa_{ur} \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m \quad (2.40)$$

Opisani model Duncan Chang-a zbog svoje jednostavnosti našao je široku primenu u MKE. Poredjenjem velikog broja rezultata eksperimenata sa rezultatima proračuna korišćenjem ovoga modela zaključeno je da on daje dobre rezultate za vrednosti devijatora 0,6 - 0,70 od vrednosti devijatora pri lomu. Naročito dobri rezultati se dobijaju ako su tragovi napona u tlu slični tragovima napona u DIC-opitu.

Medjutim, u nekim slučajevima dobijaju se primenom ovoga modela veoma loši rezultati. Na primer ako se radi o materijalima koji imaju izražena dilataciona svojstva kao i u slučajevima tragova napona koji su bitno različiti od tragova napona u CID-optima. Takodje, izvesne se teškoće javljaju i u numeričkoj implementaciji ovoga modela jer je kod njega teško sračunavati neuravnoteženo opterećenje kod iterativnih postupaka u MKE.

Zbog svega napred iznetog u novije vreme predlaže se izvesna poboljšanja ovoga modela.

Najčešće se ugao unutrašnjeg trenja ϕ smatra materijalnom konstantom. Medjutim, veliki broj objavljenih radova pokazuju da ugao trenja zavisi od napona pa ga u tom slučaju treba posmatrati kao promenljivu stanja. Prema Vesić and Clough (1968) zavisnost promene ugla ϕ od promene napona može se izraziti na sledeći način:

$$\phi = \phi_1 - \Delta\phi \cdot \log\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right) \quad (2.41)$$

gde su:

ϕ_1 - ugao unutrašnjeg trenja za vrednost napona

$$\sigma_3 = 100 \text{ kN/m}^2$$

$\Delta\phi$ - je redukcija ugla smicanja za desetrostruko povećanje napona σ_3 .

Zavisnošću (2.41) nije obuhvaćena promena ugla ϕ za vrednosti napona $\sigma_3 \leq 100 \text{ kN/m}^2$, a što je veoma čest slučaj pri proračunu geotehničkih objekata.

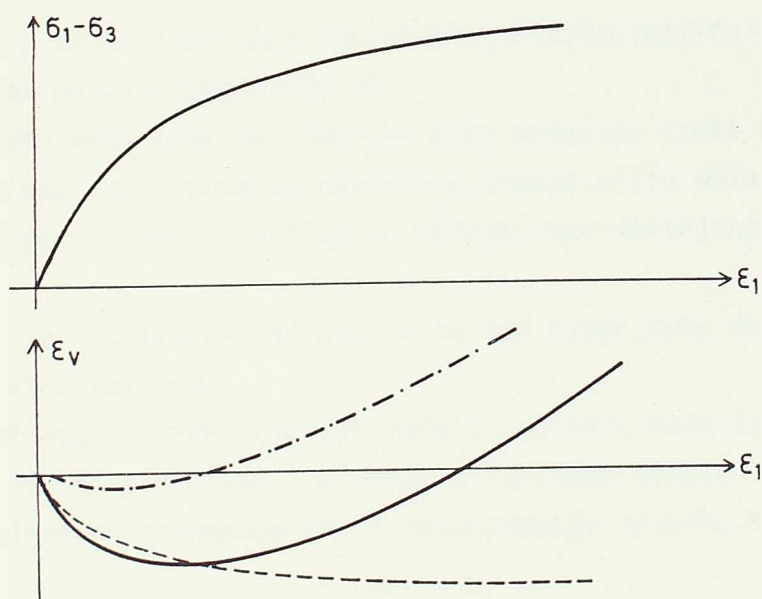
Postoje i izrazi kod kojih se predlaže hiperbolička zavisnost za promenu ugla trenja od normalnog napona.

Ovakvim izrazima mogu se obuhvatiti i promene ugla unutrašnjeg trenja, i pri malim vrednostima srednjeg normalnog napona.

Kao što je napred rečeno predloženim dvoparametarskim hipoelastičnim modelom ne može se obuhvatiti dilataciono svojstvo materijala. Kod nekih materijala na primer zbijeni pesak, dolazi do znatne promene zapremine pri smicanju. Zbog toga se predlaže uvođenje trećeg parametra, tangentsnog dilatacionog parametra D_t , kojim se uspostavlja zavisnost između inkrementa promene zapremine i inkrementa smičuće deformacije

$$d\varepsilon_v = D_t \cdot d\gamma \quad (2.42)$$

Na slici 5 prikazani su tipični dijagrami koji se dobijaju u triaksijalnom CID opitu srednje zbijenog peska.



Sl. 5

Pri malim smičućim deformacijama najveći deo promene zapremine nastaje usled promene srednjeg normalnog napona (isprekidana linija). Razlika između pune linije i isprekidane linije predstavlja promenu zapremine koja je nastala usled smicanja. Vidi se da je u ovom slučaju promena zapremine izazvana smicanjem veoma značajna i da bi njeno zanemarivanje u numeričkoj analizi izazvalo velike greške. Naravno da dilataciono svojstvo nije podjednako izraženo

no kod svih materijala. Znatna dilatacionna svojstva pokazuju zbijeni peskovi rogljastog oblika zrna kao i prekonsolidovane gline.

Vrednosti tangentsnog dilatacionog parametra D_t mogu se odrediti na osnovu rezultata eksperimenta (sl. 5) ili specificiranjem dilatacije kao funkcije dilatacionog ugla v , koji se može sračunati na osnovu modifikovane Rowe-ove naponsko dilatacionne teorije.

Na ovaj način kompletno naponsko deformacijsko ponašanje materijala može se opisati pomoću tri parametra E_t , v_t i D_t . Detalji oko konkretne primene ovakvog modela u MKE biće prikazani u poglavlju 4.

2.4. ELASTOPLASTIČNI MODELI TLA

2.4.1. Uvod

Ponašanje realnog tla može se uspešno opisati elastoplastičnim modelima. Medjutim, kako je teorija plastičnosti originalno razvijena za metale modifikacije i proširenja moraju se izvršiti kada se primenjuje kod modeliranja tla. Do danas je u svetu predložen veliki broj elastoplastičnih modela koji sa različitim uspehom opisuju ponašanje tla.

Navešćemo samo neke od fenomena koje modelima treba obuhvatiti:

- Priilikom svake promene naponskog stanja u tlu dolazi do izvesne disipacije energije što ima za posledicu permanentno nastojanje plastičnih deformacija.
- Kako je tlo zrnaste strukture to kod njega može doći do promene zapremine i pri čistom smicanju.
- U ciklusu rasterećenja opterećenja nastaju plastične deformacije znatno pre nego što se povratimo u prvobitno naponsko stanje.
- Problemi anizotropije kao i anizotropije nastale tokom plastičnog deformisanja.
- Fenomeni ojačanja ili slabljenja materijala sa promenom plastičnih deformacija itd.

Na osnovu velikog broja eksperimenata zaključeno je da elastoplastični modeli sa jednom površi popuštanja ne mogu uspešno da opišu kompleksno ponašanje tla.

Zato se u novije vreme predlaže upotreba modela sa dve i više površi popuštanja. Svaka od ovih površi treba da ima odgovarajuću funkciju plastičnog potencijala. Ove funkcije potrebno je da budu neprekidne i da potrebnog reda

diferencijabilne i da su konveksne u odnosu na koordinatni početak u prostoru napona. Efekti ojačanja ili slabljenja mogu se ubaciti u svaku od površi čime se uspešno mogu modelirati različiti aspekti ponašanja geološkog materijala.

Pre nego što predjemo na opisivanje nekih karakterističnih elastoplastičnih modela tla koji su naišli na široku primenu, ukratko ćemo opisati osnovne pojmove koji se uvode u matematičkoj teoriji plastičnosti i dati uopšteni prikaz formiranja elastoplastičnih konstruktivnih jednačina tla.

Površ popuštanja (tečenja) razdvaja stanje napona koje izaziva samo elastične deformacije od stanja napona koje izaziva i elastične i plastične deformacije. Drugim rečima, kod elastoplastičnih modela predpostavlja se da postoji deo prostora u kome se ponašanje tla može opisati samo elastičnim zakonima i ovaj prostor je ograničen površinama popuštanja, ali ne može ležati izvan nje, što znači da se površ popuštanja može shvatiti kao granica mogućeg naponskog stanja. Najčešće se površ popuštanja definiše u prostoru glavnih napona ili preko invarijantata napona.

Pored funkcije popuštanja u teoriji plastičnosti uvodi se i funkcija plastičnog potencijala. Pomoću ove funkcije definiše se raspodela inkremenata plastične deformacije za vreme plastičnog tečenja.

Veoma je važno napraviti razliku između termina "lom" i "popuštanje" koji se obično pogrešno upotrebljavaju u mehanici tla. Lom se dešava kada uslovi popuštanja dostižu svoje granično stanje. Prema tome, površ loma obuhvata sukcesivne površi popuštanja i predstavlja geometrijsku granicu u prostoru napona van koje ne može postojati naponsko stanje, niti površi popuštanja.

Površ loma ne mora biti geometrijski slična niti definisana na isti način kao površ popuštanja. Ako je naponsko stanje uzorka na granici loma dolazi do velikih plastičnih deformacija i uzorak se može slomiti ili nastaviti da se plastično deformiše bez elastičnih deformacija.

Zakonom tečenja uspostavlja se veza između pravca vektora plastičnih deformacija i funkcije plastičnog potencijala. Obično se uvodi princip normalnosti koji kaže da je inkrement plastične deformacije upravan na pravac plastičnog potencijala, odnosno leži duž spoljašnje normale na površ plastičnog potencijala.

Posmatrajmo neki elastoplastični materijal koji se pod dejstvom spoljašnjih sila nalazi u ravnotežnom stanju. Neka je usled promene spoljašnjih sila došlo do promene naponskog stanja a zatim usled rasterećenja do ponovnog vraćanja naponskog stanja u prvobitno stanje. Rad spoljašnjih sila (utrošak

energije koja dolazi od drugih tela) u ciklusu opterećenja rasterećenja je ne negativan. Ovakav zaključak je poznat kao Drucker-ov postulat koji se matematički može formulirati na sledeći način:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \cdot d\varepsilon_{ij}^{(p)} \geq 0 \quad (2.43)$$

$$d\sigma'_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^{(p)} \geq 0 \quad (2.44)$$

Da bi uslov (2.44) bio zadovoljen potrebno je da skalarni proizvod priraštaja napona i vektora priraštaja plastičnih deformacija bude pozitivan.

Ovaj uslov biće zadovoljen samo u slučaju ako je vektor plastičnih deformacija normalan na površ plastičnog potencijala odnosno u slučaju asocijativne plastičnosti na površi popuštanja. Odavde proizilazi poznati uslov normalnosti u teoriji plastičnosti.

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.45)$$

U slučaju singularnih tačaka, odnosno tačaka u kojima dolazi do preseka više površi ovaj uslov se može prikazati u sledećem obliku:

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \sum_{K=1}^m \lambda_K \frac{\partial Q_K}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.46)$$

Ukoliko je ponašanje materijala opisano sa više površi popuštanja i plastičnih potencijala onda je tečenje asocijativno na svim površima gde su površi tečenja i plastičnog potencijala indentične.

Zakon ojačavanja poredi veličine inkrementa plastičnih deformacija sa veličinama inkremenata napona, pošto se stanje napona nalazi na površini popuštanja.

Širenje površi popuštanja usled akumuliranih plastičnih deformacija poznato je kao deformacijsko ili radno ojačanje materijala. Znači, osobina materijala da se površ popuštanja širi sa povećanjem plastičnih deformacija naziva se ojačanje materijala. Za materijale sa ojačanjem uslov tečenja može se napisati u sledećem obliku:

$$F(\sigma'_{ij}, \varepsilon_{ij}^{(p)}, \kappa) = 0 \quad (2.47)$$

Veličina κ zavisi od kompletne plastične deformacije kao i od načina deformisanja materijala. Prema Hilu (1950) kao parametar ojačavanja može se kori-

stiti rad plastičnog deformisanja po jedinici zapremine u posmatranoj tački:

$$W_p = \int_0^t \sigma_{ij} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} \cdot dt = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{(p)} \quad (2.48)$$

ili preko ekvivalentne plastične deformacije

$$\bar{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} dt = \sqrt{\frac{2}{3}} \int d\epsilon_{ij}^{(p)} \cdot d\epsilon_{ij}^{(p)} \quad (2.49)$$

Zavisnost funkcija F i Q od plastičnog rada ili plastične deformacije ukazuje na činjenicu da ponašanje materijala u svakom trenutku zavisi od plastičnih deformacija akumuliranih do tog trenutka. Znači da materijal "pamti" prethodno opterećenje pomoću date vrednosti tenzora plastičnih deformacija.

Klasifikacija modela plastičnosti može da napravi s obzirom na predložene prirode funkcija popuštanja i plastičnog potencijala.

a) Najjednostavniji slučaj je kada funkcija F i Q ne zavise od plastične deformacije. Ovaj slučaj odgovara idealnoj plastičnosti bez ojačanja.

b) Ako funkcija F i Q mogu da se izraze kao funkcije od invarijanata plastičnih deformacija I_i^P ($i=1,2,3$) i plastičnog rada, u kom slučaju rotacija materijalnog elementa nema uticaja na konstitutivne relacije, materijal ostaje uvek izotropan.

Generalno izotropni plastični materijal sa ojačanjem opisan je sledećim funkcijama

$$F = F(\sigma'_{ij}, I_i^P, W^P) = 0 \quad (2.50)$$

$$Q = Q(\sigma'_{ij}, I_i^P, W^P) \quad i=1,2,3 \quad (2.51)$$

Kod generalnog materijala sa ojačanjem funkcija F i Q menjaju i svoj oblik i veličinu, dok kod modela sa izotropnim ojačanjem menja se samo veličina ovih funkcija.

Model sa izotropnim ojačanjem dobija se ukoliko se konstitutivne funkcije izaberu u obliku

$$F = F(\sigma'_{ij}, \epsilon^P, W^P) = F_1(\sigma'_{ij}) - F_2(\epsilon^P, W^P) = 0 \quad (2.52)$$

$$Q = Q(\sigma'_{ij}, \epsilon^P, W^P) = Q_1(\sigma'_{ij}) - Q_2(\epsilon^P, W^P) \quad (2.53)$$

Kako funkcija plastičnog potencijala u konstitutivnim jednačinama učestvuje samo preko njenih izvoda po naponima, najčešće se usvaja da je funkcija $Q_2 \equiv 0$. Sa ovim uprošćenjem konstitutivne funkcije F i Q za materijal sa izotropnim ojačanjem svode se na sledeći oblik:

$$F = F_1(\sigma') - F_2(\epsilon^P, W) = 0 \quad (2.54)$$

$$Q = Q(\sigma') \quad (2.55)$$

U zavisnosti od funkcije F_2 razlikujemo dva tipa materijala sa izotropnim ojačanjem.

- Ako funkcija F_2 zavisi samo od ϵ^P za materijal se kaže da je sa deformacijskim ojačanjem.

- Ako funkcija F_2 zavisi samo od W^P za materijal se kaže da je sa radnim ojačanjem.

Napomenimo još da se u teoriji plastičnosti koriste i materijali sa kinematičkim ojačanjem. Ovaj materijal se može opisati sledećim konstitutivnim funkcijama

$$F = F((\sigma - a\epsilon^P), W^P) = 0 \quad (2.56)$$

$$Q = Q((\sigma - a\epsilon^P), W^P) \quad (2.57)$$

U ovim jednačinama veličina (a) je parametar koji ne mora biti konstantan a ima dimenzije napona.

Da bi se što bolje opisalo ponašanje realnog tla u mehanici tla se često puta predlažu modeli kod kojih se koristi kombinacija izotrošnog i kinematičkog ojačanja. Kod ovakvih modela površ popuštanja može translatorno da se pomera u prostoru napona i pri tome da se širi zavisno od akumuliranih plastičnih deformacija.

Ako je naponsko stanje takvo da je zadovoljena funkcija $F(\sigma'_{ij}, \epsilon^P_{ij}, W^P) = 0$, tada se u zavisnosti od inkrementa napona mogu javiti sledeći slučajevi:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma'_{ij}} \cdot d\sigma'_{ij} \leq 0 \quad \text{rasterećenje}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma'_{ij}} \cdot d\sigma'_{ij} = 0 \quad \text{neutralno opterećenje}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma'_{ij} \geq 0 \quad \text{opterećenje}$$

Ovakvo jednostavne definicije rasterećenja, neutralnog opterećenja i opterećenja, mogu se primeniti samo u slučaju jednostrukih funkcija popuštanja. U slučaju modela sa više površi popuštanja uvodi se pojam aktiviranja mehanizama. Ako su svi mehanizmi aktivni to predstavlja slučaj totalnog opterećenja, i obrnuto ako nijedan od mehanizama nije aktivan imamo slučaj totalnog rasterećenja. Između ova dva ekstremna slučaja postoje i parcijalna opterećenja kada su samo neki od mehanizama aktivni. Ovakvu teoriju razvio je Mandel (1965) kod koje usled aktiviranja različitih mehanizama dolazi do sprežanja između različitih površi popuštanja.

U daljem tekstu biće prikazana generalna matematička procedura za generisanje inkrementalnih elastoplastičnih konstitutivnih jednačina kod modela sa višestrukim površima popuštanja koje se međusobno presecaju.

Svaka od n - površi popuštanja proizvodi inkrement plastične deformacije čija suma zajedno sa inkrementom elastične deformacije čini inkrement ukupne (totalne) deformacije. Ovo se matematički može prikazati na sledeći način:

$$\{d\epsilon\} = \{d\epsilon^e\} + \{d\epsilon^{P_1}\} + \{d\epsilon^{P_2}\} + \dots + \{d\epsilon^{P_n}\} \quad (2.58)$$

Kako je $\{d\epsilon\}$ vektor sa šest komponentata i pošto je jedan inkrement deformacija elastičan, maksimalni broj inkremenata plastične deformacije je 5. ($1 \leq n \leq 5$).

Da bi se ovakav model sa n -površi popuštanja mogao da primeni u MKE potrebno je da se uspostavi veza između inkremenata napona i inkrementa totalnih deformacija na sledeći način:

$$\{d\sigma\} = [C^{EP}] \cdot \{d\epsilon\} \quad (2.59)$$

gde je $[C^{EP}]$ elastoplastična matrica krutosti materijala.

Ako samo jedna od površi popuštanja nije sa asocijativnim uslovom tečenja matrica $[C^{EP}]$ nije simetrična

Inkrement napona i inkrement elastične deformacije povezani su elastičnom simetričnom matricom $[C^E]$

$$\{d\sigma\} = [C^E] \cdot \{d\epsilon^E\} \quad (2.60)$$

Inkrement plastične deformacije koji postoji na k -toj površi tečenja

($1 \leq K \leq 5$) može se odrediti na osnovu zakona tečenja na sledeći način:

$$\{d\varepsilon^{PK}\} = \lambda_K \left\{ \frac{\partial Q_K}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.61)$$

gde je: $Q_K = Q_K\{\sigma, \varepsilon_{IJ}^P\}$ funkcija plastičnog potencijala koja odgovara k-toj funkciji popuštanja $F_K = F_K(\sigma, \{\varepsilon^{PK}\}) = 0$, λ_K - su pozitivni multiplikatori koje treba odrediti.

Osnovni koncept u inkrementnoj proceduri teorije plastičnosti je da sve funkcije F_K koje zadovoljavaju uslov tečenja, ostaju jednake nuli za bilo koji inkrement napona ili deformacije. Matematički ovaj uslov se svodi na zahtev da je totalni diferencijal funkcije $F_K = 0$ odnosno:

$$dF_K = 0 \quad (K=1,2,\dots,n) \quad (2.62)$$

$$\left\{ \frac{\partial F_K}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot \{d\sigma\} + \left\{ \frac{\partial F_K}{\partial \varepsilon^{PK}} \right\}^T \cdot \{d\varepsilon^{PK}\} = 0 \quad (2.63)$$

Zamenom izraza za $\{d\sigma\}$ iz jednačine (2.60) dobija se:

$$\left\{ \frac{\partial F_K}{\partial \sigma} \right\}^T [C^E] \cdot \{d\varepsilon^E\} + \left\{ \frac{\partial F_K}{\partial \varepsilon^{PK}} \right\}^T \{d\varepsilon^{PK}\} = 0 \quad (2.64)$$

Zamenom izraza za $\{d\varepsilon^E\}$ iz jednačine 2.58) u jednačinu (2.64) imamo:

$$\left\{ \frac{\partial F_K}{\partial \sigma} \right\}^T [C^E] (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^{P1}\} - \{d\varepsilon^{P2}\} - \dots - \{d\varepsilon^{Pn}\}) + \left\{ \frac{\partial F_K}{\partial \varepsilon^{PK}} \right\}^T \{d\varepsilon^{PK}\} = 0 \quad (K=1,2,\dots,n) \quad (2.65)$$

Unošenjem zakona tečenja (2.61) u jednačinu (2.65) dobija se:

$$\left\{ \frac{\partial F_K}{\partial \sigma} \right\}^T [C^E] (\{d\varepsilon\} - \lambda_1 \left\{ \frac{\partial Q_1}{\partial \sigma} \right\} - \lambda_2 \left\{ \frac{\partial Q_2}{\partial \sigma} \right\} - \dots - \lambda_n \left\{ \frac{\partial Q_n}{\partial \sigma} \right\}) + \lambda_K \left\{ \frac{\partial F_K}{\partial \varepsilon^{PK}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial Q_K}{\partial \sigma} \right\} = 0 \quad (2.66)$$

Nepoznate veličine λ_K ($K=1,2,\dots,n$) mogu se dobiti rešavanjem sistema jednačine (2.66) koje se u matricnoj formi mogu izraziti na sledeći način:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]^T [C^E] (\{d\varepsilon\} - \left[\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right] \{\lambda\}) + [D] \{\lambda\} = 0 \quad (2.67)$$

U ovoj matricnoj jednačini uvedene su sledeće oznake:

$[\frac{\partial F}{\partial \sigma}]$ - je matrica reda $6 \times n$ čije elemente čine izvodi $\{ \frac{\partial F_K}{\partial \sigma} \}$

$[\frac{\partial Q}{\partial \sigma}]$ - je matrica reda $6 \times n$ čije elemente čine izvodi $\{ \frac{\partial Q_K}{\partial \sigma} \}$

$[D]$ - je dijagonalna matrica reda $(n \times n)$ sa članovima na dijagonali $\{ \frac{\partial F_K}{\partial \epsilon} \}^T \{ \frac{\partial Q_K}{\partial \sigma} \}$.

$\{\lambda\}$ - je nepoznati vektor od n - komponentata.

Jednačina (2.67) može da se sredi po nepoznatoj $\{\lambda\}$ tako da postaje:

$$([\frac{\partial F}{\partial \sigma}]^T [C^E] [\frac{\partial Q}{\partial \sigma}] - [D])\{\lambda\} = [\frac{\partial F}{\partial \sigma}]^T [C^E] \{d\epsilon\} \quad (2.68)$$

Uvodjenjem oznake:

$$[L] = [\frac{\partial F}{\partial \sigma}]^T [C^E] [\frac{\partial Q}{\partial \sigma}] - [D] \quad (2.69)$$

konačno odbijamo:

$$\{\lambda\} = [L]^{-1} [\frac{\partial F}{\partial \sigma}]^T [C^E] \{d\epsilon\} \quad (2.70)$$

Kombinovanjem jednačina (2.58) i (2.60) dobija se:

$$\{d\sigma\} = [C^E] (\{d\epsilon\} - \{\lambda\} [\frac{\partial Q}{\partial \sigma}]) \quad (2.71)$$

Unošenjem u ovaj izraz vrednosti $\{\lambda\}$ dobijene jednačine (2.70) dobija se zahtevana veza izmedju inkrementa napona i inkremenata totalne deformacije.

$$\{d\sigma\} = ([C^E] - [C^E] [\frac{\partial Q}{\partial \sigma}] [L]^{-1} [\frac{\partial F}{\partial \sigma}]^T [C^E]) \{d\epsilon\} \quad (2.72)$$

odnosno tražena elastoplastična matrica krutosti materijala može se napisati u sledećem obliku:

$$[C^{EP}] = [C^E] - [C^E] [\frac{\partial Q}{\partial \sigma}] [L]^{-1} [\frac{\partial F}{\partial \sigma}]^T [C^E] \quad (2.73)$$

Može se primetiti da će ova matrica biti simetrična samo u slučaju kada je

$\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right] = \left[\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right]$ a to čini uslov asocijativne plastičnosti na svim površima tečenja. Ukoliko je matrica $|D| = 0$, materijal je bez ojačanja pa elastoplastična matrica postaje singularna. Ovo fizički znači da totalni inkrement deformacije može postojati i bez bilo kakve promene napona, odnosno plastično tečenje se dešava pri konstantnom naponskom stanju. Ukoliko svih n -površni popuštanja nisu istovremeno aktivne tada sve veličine λ_k neće biti pozitivne. Sa promenom broja aktivnih površni popuštanja menjaju se i dimenzije matrica $|L|$, $\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]$ i $\left[\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right]$ a što ima za posledicu i znatnu promenu elastoplastične matrice krutosti materijala.

2.4.2. Mohr-Coulomb-ov model

Polazeći od činjenice da lom u tlu nastaje kada napon smicanja u određenoj ravni dostigne neku kritičnu vrednost Coulomb je 1773 ovo izrazio dobro poznatom jednačinom

$$\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \phi \quad (2.74)$$

Kasnije je Mohr ovaj isti zakon izrazio u funkciji od glavnih napona σ_1 i σ_3 na sledeći način:

$$F = |\sigma_1 - \sigma_3| - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \quad (2.75)$$

Jednačina (2.74) može se u funkciji glavnih napona prikazati preko 6 relacija sledećeg oblika:

$$\sigma_i \leq \sigma_j m + b \quad \begin{array}{l} (\sigma_i > \sigma_j) \\ (i, j=1, 2, 3) \end{array} \quad (2.76)$$

gde su uvedene sledeće oznake:

$$m = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad b = \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (2.77a, b)$$

Praveći sve kombinacije glavnih napona σ_1 , σ_2 i σ_3 može se pokazati da jednačine (2.75) odnosno (2.76) predstavljaju jednu nepravilnu šestostranu piramidu u prostoru napona duž hidrostatičke ose. Prema Zienkiewicz-u (1974) površ popuštanja Mohr-Coulomb-a može se na pogodan način prikazati u sledećem obliku:

$$F = \sigma_m \sin \phi + \left(\cos \theta - \frac{\sin \phi \sin \theta}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{J_{2D}} - c \cos \phi = 0 \quad (2.78)$$

gde su uvedene sledeće oznake:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (a)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m \quad (b)$$

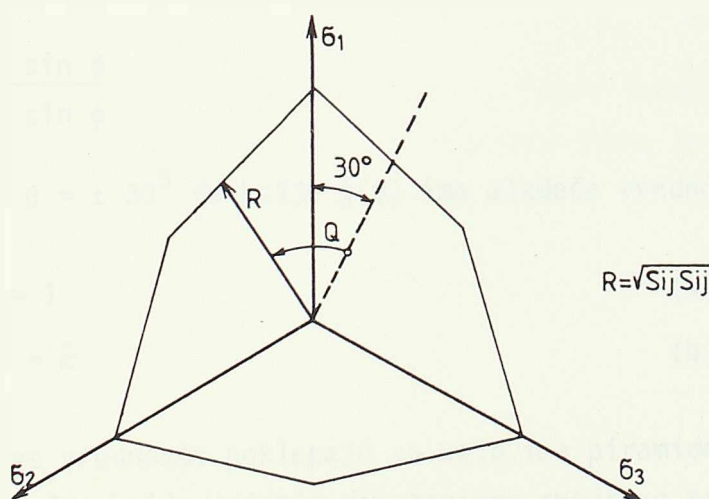
$$J_{2D} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (c) \quad (2.79)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(- \frac{3 \sqrt{3} J_{3D}}{J_{2D}^{3/2}} \right) \quad (d)$$

$$J_{3D} = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} = \det S_{ij} \quad (e)$$

Pošto je površ popuštanja funkcija samo napona a ne i plastičnih deformacija, ovakav model može se uvrstiti u grupu idealnih elasto-plastičnih modela. Sve dok su naponi unutar piramide materijal se ponaša elastično. Kada je naponsko stanje takvo da leži na površi popuštanja materijal poprima samo plastične deformacije.

Na slici 6 prikazan je presek Mohr-Coulomb-ovog uslova popuštanja sa π ravni.



S1. 6

Jednačina (2.76) u opštem slučaju može se prikazati u sledećem obliku:

$$F = f(\sigma_m) + h(R/g(\theta)) = 0 \quad (2.80)$$

Za $\sigma_m = \text{const}$ dobija se veza izmedju R i θ odnosno

$$R = R(\theta) \quad (2.81)$$

što predstavlja presek površi popuštanja i π - ravni. Za slučaj Monr-Coulomb-ovog uslova popuštanja funkcija $g(\theta)$ je sledećeg oblika:

$$g(\theta) = \frac{\cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \phi \frac{1}{\sqrt{3}}}{\cos \theta - \sin \theta \sin \phi \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (2.82)$$

Za vrednosti $\theta = \pm 30^\circ$ javljaju se singulariteti u površi popuštanja. Ovi singulariteti čine velike teškoće kod numeričke primene ovoga modela. Da bi se ovo prevazišlo obično se vrši zaobljenje uglova piramide za vrednosti θ bliske 30° . Postoji veliki broj predloga kako se ovo može uraditi, navešćemo jedan od njih. Prema Gudehus-u (1973) funkcija $g(\theta)$ može se prikazati u sledećem obliku:

$$g(\theta) = \frac{2\bar{\kappa}}{(1 + \bar{\kappa}) - (1 - \bar{\kappa}) \sin 3\theta} \quad (2.83)$$

gde je uvedena sledeća oznaka

$$\bar{\kappa} = \frac{3 - \sin \phi}{3 + \sin \phi} \quad (2.84)$$

Za vrednosti ugla $\theta = \pm 30^\circ$ funkcija $g(\theta)$ ima sledeće vrednosti

$$\begin{aligned} g(30^\circ) &= 1 & (a) \\ g(-30^\circ) &= \bar{\kappa} & (b) \end{aligned} \quad (2.85)$$

što znači da se ove vrednosti poklapaju sa uglovima piramide.

Da bi se što bolje opisalo dilataciono svojstvo materijala obično se predlaže da se funkcija plastičnog potencijala usvoji u sledećem obliku:

$$Q = \sigma_m \sin \psi + (\cos \theta - \sin \theta \frac{\sin \psi}{\sqrt{3}}) - c \cos \psi \quad (2.86)$$

gde se vrednost ugla ψ kreće u sledećim granicama

$$0 \leq \psi \leq \phi \quad (2.87)$$

Ovako predloženi model spada u grupu ne-asocijativnih modela. Iz napred izloženog može se zaključiti da se ovako jednostavnim modelom kod koga površ popuštanja nije funkcija plastičnih deformacija već ostaje fiksna u prostoru napona, ne mogu uspešno obuhvatiti fenomeni ponašanja realnog tla. I pored napred navedenih nedostataka ovaj model je naišao na veoma široku primenu kod rešavanja velikog broja geotehničkih problema.

2.4.3. Drucker-Prager-ov model

Navešćemo samo u najkraćim crtama neke osnovne karakteristike ovoga modela, koji je nastao kao uprošćenje Mohr-Coulomb-ovog modela. U prostoru glavnih napona površi popuštanja ovoga modela predstavlja konus sa hidrostatičkom osom.

Jedinična površi popuštanja može se prikazati na sledeći način:

$$F = 3\alpha \sigma_m + \bar{\sigma} - K = 0 \quad (2.88)$$

Vrh konusa nalazi se u tački

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m = \frac{K}{3\alpha} \quad (2.89)$$

Za različite vrednosti ugla θ mogu se dobiti različiti preseći konusa i Mohr-Coulomb-ove piramide. Na primer za $\theta = 30^\circ$ dobijamo konus koji obuhvata piramidu i parametri α i κ imaju sledeće vrednosti:

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (a) \quad (2.90)$$

$$\kappa = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (b)$$

Za $\theta = -30^\circ$ dobija se:

$$\alpha = \frac{\sin \phi}{(9 + 3 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (a) \quad (2.91)$$

$$\kappa = \frac{3c \cos \phi}{(9 + 3 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (b)$$

Jasno je da se ovim modelom dosta grubo opisuje ponašanje realnog tla, mada se i on zbog svoje jednostavnosti često koristi.

2.4.3. Cam-Clay model

Kao što je u uvodnom delu rečeno šezdesete godine ovoga veka predstavljaju veoma buran period u ispitivanju i teoriskom razumevanju ponašanja tla.

Naročito plodotvoran rad razvijao je se u V. Britaniji na Combridge-skom univerzitetu. Profesor K.H. Roscoe sa svojim saradnicima i učesnicima je dao predlog prvog potpuno konzistentnog modela za opisivanje naponsko deformacijskog ponašanja mekih glina. Ovi radovi su zasnovani kako na teoriskom radu, tako i na velikom broju veoma kvalitetno izvedenih eksperimenata. Do danas je na ovom konceptu "mehanike tla kritičnih stanja", uradjeno mnogo, i predloženo je više modela koji su u stanju da veoma kvalitetno opišu ponašanje mekih glina pri različitim putanjama napona.

U ovom radu daće se kratak opis modela kao i prikaz kako se predloženi model može u kontestu teorije plastičnosti prikazati u formi pogodnoj za primenu u MKE.

Stanje uzorka može se definisati kao tačka u prostoru p' , q' i e .

Gde su uvedene sledeće oznake:

$$p' = \sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3') \quad (2.92)$$

$$q = \bar{\sigma} = \left[\frac{1}{2} (\sigma_1' - \sigma_2')^2 + \frac{1}{2} (\sigma_2' - \sigma_3')^2 + \frac{1}{2} (\sigma_3' - \sigma_1')^2 \right]^{1/2} \quad (2.93)$$

U slučaju triaksijalnog stanja napona ove veličine postaju

$$p' = \sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_1' + 2\sigma_3') \quad (2.94)$$

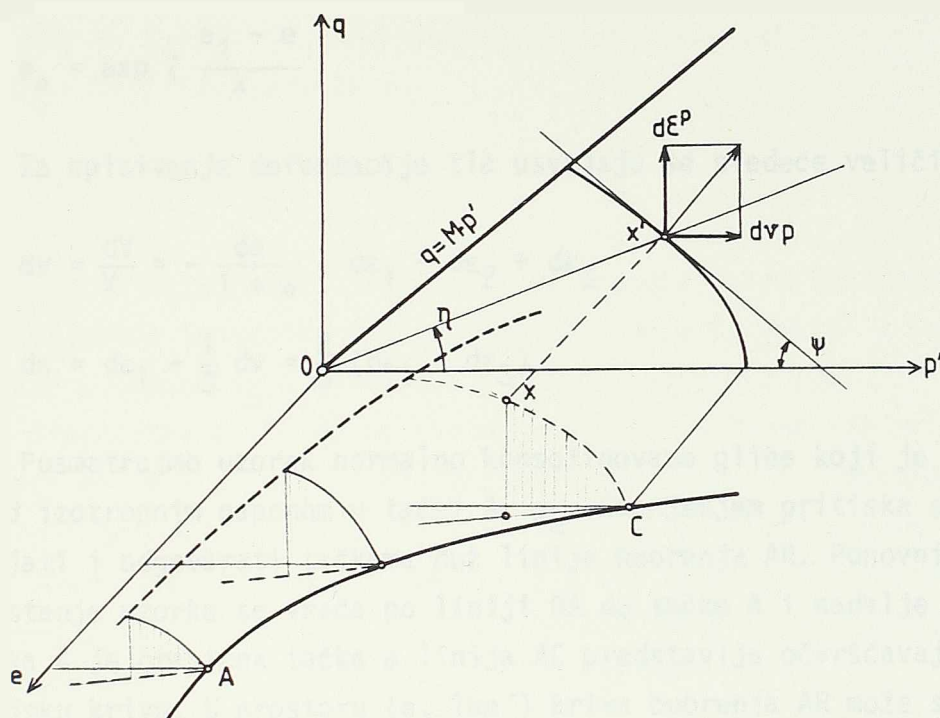
$$q = \sigma_1' - \sigma_3' \quad (2.95)$$

Ako se u predloženom prostoru nacrtaju stanja uzorka koja se dobijaju u triaksijalnom aparatu na uzorcima normalno konsolidovane gline, dobija se površ koja se naziva "granična površ stanja". Za dati uzorak ova površ razdvaja stanja uzorka koja se moguća od onih koja to nisu. Na sl. 7. prikazana je jedna ovakva površ za uzorak meke gline.

Za $q = 0$ dobija se dobro poznata Terzagh-jeva jednačina izotropne konsolidacije:

$$e = e_1 - \lambda \ln p' \quad (2.96)$$

Svaka tačka koja leži na liniji AC predstavlja stanje normalno konsolidovanog



Sl. 7

uzorka. Tačka bliže koordinatnom početku predstavlja stanje prekonsolidovanog uzorka, dok stanje dalje od linije AC za uzorak nije moguće. Ako se uzorak izloži ravnomerno smicanju on dostiže kritično stanje pri kome on nastavlja da se dalje deformiše bez promene efektivnih napona. Uslovi kritičnog stanja prikazani su na slici 7 linijom EF. Projekcija ove krive na ravan p, q može se opisati jednačinom

$$q = M p' \quad (2.97)$$

Projekcijom ove krive na ravan $(e, \ln p')$ dobija se kriva koja je paralelna liniji izotropne konsolidacije.

$$e = \Gamma - \lambda \ln p'$$

Veličina Γ predstavlja kritični koeficijent poroznosti kada je $p' = 1$.

Površ graničnog stanja može se na pogodan način normalizovanjem prikazati kao jedinstvena linija u sistemu $(p/p_e, q/p_e)$. Jedna krajnja tačka ove

krive predstavlja krivu izotropne konsolidacije a druga krajnja tačka liniju kritičnog stanja.

Parametar p_e predstavlja vrednost pritiska p' na liniji izotropne konsolidacije za bilo koju vrednost koeficijenta poroznosti e .

Iz jednačine (2.96) dobija se:

$$p_e = \exp \left(\frac{e_1 - e}{\lambda} \right) \quad (2.99)$$

Za opisivanje deformacije tla usvajaju se sledeće veličine:

$$dv = \frac{dV}{V} = - \frac{de}{1+e} = d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3 \quad (2.100)$$

$$d\epsilon = d\epsilon_1 - \frac{1}{3} dv = \frac{2}{3} (d\epsilon_1 - d\epsilon_3) \quad (2.101)$$

Posmatrajmo uzorak normalno konsolidovane gline koji je postigao ravnotežu pod izotropnim naponom u tački A, p_a . Smanjenjem pritiska stanje uzorka će se menjati i odgovarati tačkama duž linije bubrenja AR. Ponovnim povećanjem pritiska stanje uzorka se vraća po liniji RA do tačke A i nadalje po liniji AC. Znači tačka A je granična tačka a linija AC predstavlja očvršćavajuću naponsko deformacijsku krivu. U prostoru $(e, \ln p')$ kriva bubrenja AR može se opisati sledećom jednačinom

$$e = e_a - \kappa \ln p'$$

Da bi se uključio uticaj devijatora napona (q) posmatrajmo uzorak koji se nalazi u početnom stanju tačka B na liniji bubrenja ABR. Sve dakle stanje uzorka odgovara tačkama koje su ispod površi graničnog stanja, deformacija koje nastaju usled promene q su elastične. Roscoe uvodi sledeće pretpostavke:

1) Predpostavlja se da je elastična površina (zid) vertikalna, odnosno granična elastična linija (AF) leži tačno iznad linije bubrenja (ABR).

2) Ne postoji povratna energija koja odgovara smicanju odnosno $d\epsilon^r = 0$. Dosledno, ukoliko je stanje zorka unutar elastičnog zida tada nastaju samo zapreminske povratne deformacije:

$$dv = dv^e \quad ; \quad d\epsilon = d\epsilon^r \equiv 0 \quad . \quad (2.103 \text{ a,b})$$

Na osnovu predhodnog za oredjivanje elastičnih deformacija mogu se izvesti sledeće jednačine:

$$de^e = -\kappa (\ln p) = -\kappa \frac{dp'}{p} = -\kappa \frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m} \quad (2.104)$$

$$dv^e = \frac{de^e}{1+e_0} = -\frac{\kappa}{1+e_0} \frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m} \quad (2.105)$$

Ako se tangenti modul kompresije definiše kao $K_b = \frac{d\sigma'_m}{dv^e}$ i kombinacijom sa $K_b = E/3(1-2\nu)$ dobija se:

$$E = \frac{3\sigma'_m}{\kappa} (1 + e_0)(1 - 2\nu) \quad (2.106)$$

Ako se na odredjen način odabere pogodno tangenta vrednost Poisson-ovog koeficijenta, tangenti Young-ov model E može se dobiti u funkciji srednjeg normalnog napona σ'_m i parametra κ pomoću izraza (2.106).

Predpostavka (2) da ne postoje povratne deformacije smicanja odgovara predpostavci da je $\nu = -1$. Ovakva predpostavka je veoma diskutabilna. Takodje vrednost Poisson-ovog koeficijenta $\nu = -1$ stvara probleme u numeričkoj analizi. Medjutim, kako su elastične deformacije tla obično male u poredjenju sa totalnim deformacijama u tlu, svaka vrednost Poisson-ovog koeficijenta u okviru $-1 \leq \nu \leq 0,50$ može se usvojiti sa relativno malom greškom.

Posmatrajmo sada uzorak tla koji je u stanju koje odgovara tački na graničnoj površini, kao na primer tačka X koja leži na graničnoj elastičnoj liniji AF . Ako se na uzorak nanese inkrement napona (dp', dq) tako da je rezultanta ovoga napona usmerena van površi, uzorak će poprimiti nepovratne deformacije.

S obzirom na Drucker-ov postulat (uslov normalnosti), vektor plastičnih deformacija (dv^P, de^P) biće normalan na liniju AF u tački X . Dosledno, za idealno elastoplastičnu vlažnu glinu uslov normalnosti daje:

$$\frac{de^P}{dv^P} = - \left(\frac{dq}{dp'} \right)_{AF} = -\psi \quad (2.107)$$

Veličina ψ je funkcija samo $\eta = q/p'$, a ne zavisi od inkrementa napona. Ako se izvrše naznačena diferenciranja u jednačini (2.107) dobija se sledeća diferencijalna jednačina granične površi stanja.

$$\frac{dp'}{p'} + \frac{d\eta}{\psi + \eta} = 0 \quad (2.108)$$

odnosno, posle izvršene integracije dobija se sledeća jednačina:

$$\ln p' + \int_0^{\eta} \frac{d\psi}{\psi + \eta} = \ln p'_0 \quad (2.109)$$

Veličina p'_0 - odgovara pritisku gde elastična granična linija seče liniju izotropne konsolidacije.

Posle nanetog inkrementa napona dp' , dq (odnosno dp' , $d\eta$) uzorak će poprimiti totalne deformacije i zauzeće ravnotežu u nekoj tački Y. Elastična granična linija koja prolazi kroz tačku Y je A_2F_2 i njoj odgovara druga vrednost pritiska p_0 , $p_0 + dp_0$.

Jednačina (2.108) sada se može napisati u sledećem obliku

$$\frac{dp'_0}{p'_0} - \frac{dp'}{p'} - \frac{d\eta}{\psi + \eta} = 0 \quad (2.110)$$

Gde dp_0 predstavlja meru rastojanja izmedju elastičnih zidova kroz tačke X i Y. Ovo se poklapa sa bazičnom pretpostavkom Cambridge-ske teorije koja kaže: "Kada se stanje uzorka menja iz bilo koje tačke na elastičnom zidu $A_1F_1R_1$ u bilo koju tačku na zidu $A_2F_2R_2$, plastična komponenta promene koeficijenta poroznosti je uvek ista. Prema tome, intenzitet ove promene može se dobiti razmatranjem čiste izotropne konsolidacije pri promeni od tačke A_1 do tačke A_2 .

$$de = -\lambda \left(\frac{dp'_0}{p'_0} \right) \quad (2.111)$$

Kako je $de^e = -K \left(\frac{dp'_0}{p'_0} \right)$ dobija se:

$$de^p = de - de^e = -(\lambda - \kappa) \frac{dp'_0}{p'_0} \quad (2.112)$$

Kombijacijom jednačina (2.110) i (2.112) dobija se:

$$de^p = -(\lambda - \kappa) \left(\frac{dp'}{p'} + \frac{d\eta}{\psi + \eta} \right) \quad (2.113)$$

odnosno

$$dv^p = -\frac{de^p}{1+e} = \frac{\lambda - \kappa}{1+e} \left(\frac{dp'}{p'} + \frac{d\eta}{\psi + \eta} \right) \quad (2.114)$$

Pošto je $dv^e = \frac{\kappa}{1+e} \frac{dp'}{p'}$ totalna zapreminska deformacija postaje:

$$dv = dv^e + dv^p = \frac{\kappa}{1+e} \left[\frac{dp'}{p'} + \left(1 - \frac{\kappa}{\lambda} \right) \frac{d\eta}{\psi + \eta} \right] \quad (2.115)$$

Uzimajući u obzir uslov normalni, za totalnu deformaciju smicanja dobija se sledeći izraz:

$$d\epsilon = \frac{\lambda - K}{1 + e} \left[\frac{dp'}{p'} + \frac{d\eta}{\psi + \eta} \right] \frac{1}{\psi} \quad (2.116)$$

Jednačine (2.115) i (2.116) mogu se iskoristiti za sračunavanje zapreminskih i smičućih deformacija usled inkrementa napona dp' , $d\eta$ na element tla u početnom stanju p' , q , e na graničnoj površi stanja. Parametar ψ može se na pogodan način izraziti u funkciji η . Roscoe (1965) je predložio jednu relaciju izmedju ψ i η iz razmatranja unutrašnjeg rada, na osnovu kojih je on dobio naponsko-deformacijske veze koje je kasnije nazvao Cam-Clay.

Kada se na element tla, koji je predhodno u stanju ravnoteže pod efektivnim naponima (p' i q), nanese inkrement napona (dp' , dq) on će poprimiti inkrement deformacija (dv , $d\epsilon$). Ukupna energija po jedinici zapremine koja se predaje skeletu tla preko njegove površine biće

$$dE = p' dv + q d\epsilon \quad (2.117)$$

Ova energija se može rastaviti na dva dela, deo dU koji je smešten unutar skeleta tla i koji je povratan i deo dW koji je utrošen, nepovratan.

$$dU = p' dv^e + q d\epsilon^e \quad (2.118 \text{ a,b})$$

$$dW = p' dv^p + q d\epsilon^p$$

Kombinujući izraz (2.118) i (2.119), može se dobiti izraz kojim se uspostavlja veza izmedju η i ψ .

$$\frac{1}{\psi} = \frac{d}{dv^p} = \frac{1}{M - \eta} \quad (2.120)$$

Ukoliko se ovaj izraz zameni u osnovne jednačine Cambridge-teorije dobijaju se sledeće jednačine kojim se opisuje Cam-Clay model:

$$dv = \frac{1}{1+e} \left(\frac{\lambda - K}{M} d\eta + \lambda \frac{dp'}{p'} \right) \quad (2.121 \text{ a,b})$$

$$d\epsilon = \frac{\lambda - K}{1 + e} \left[\frac{p' d\eta + M dp'}{M_p (M - \eta)} \right]$$

Na sličan način mogu se dobiti i jednačine graničnih elastičnih linija, odnosno

granične površi stanja.

$$\eta = M \cdot \ln \frac{p_0'}{p'} \quad (2.122,a,b)$$

$$\eta = \frac{M}{1 - \frac{k}{\lambda}} \ln \frac{p_e'}{p'}$$

U zavisnosti od dobijenih eksperimentalnih rezultata mogu se usvojiti različiti izrazi za utrošeni rad. Jedan od njih može se prikazati u sledećem obliku:

$$dW = \sqrt{(dV^P)^2 + M \cdot d\varepsilon^P} \cdot p' \quad (.123)$$

Na sličan način kao i u predhodnom slučaju za vezu između ψ i η dobija se sledeća jednačina:

$$\frac{1}{\psi} = \frac{d\varepsilon}{dV^P} = \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} \quad (2.124)$$

Zamenom jednačine (2.124) u osnovne jednačine Cambridge, dobijaju se konstitutivne jednačine "modifikovanog Cam-Clay" modela:

$$dV^P = \frac{\lambda - k}{1 + e} \left[\frac{2 \, d}{M^2 + \eta^2} + \frac{dp'}{p'} \right]$$

$$dV = \frac{1}{1 + e} \left[(\lambda - k) \frac{2\eta \, d\eta}{M^2 + \eta^2} + \lambda \frac{dp'}{p'} \right] \quad (2.125a,b,c)$$

$$d\varepsilon = d\varepsilon^P = \frac{\lambda - k}{1 + e} \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} \left[\frac{2\eta \, d\eta}{M^2 + \eta^2} + \frac{dp'}{p'} \right]$$

Granične elastične linije postaju:

$$\frac{p'}{p_0'} = \frac{M^2}{M^2 + \eta^2} \quad (2.126)$$

dok se granična površina stanja opisuje jednačinom

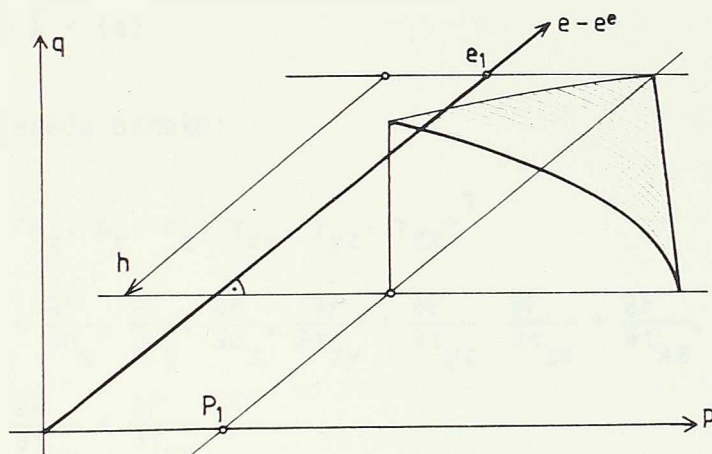
$$\frac{p'}{p_e'} = \left(\frac{M^2}{M^2 + \eta^2} \right) \left(1 - \frac{k}{\lambda} \right) \quad (2.127)$$

Jednačinama (2.121a) (2.121b) odnosno (2.125a) (2.125b) mogu se sračunati inkrementi deformacija za uzorke koji se nalaze na graničnoj površi stanja, kada se na njih nanese inkrementi napona.

Medjutim, u MKE potrebno je odrediti naponsko stanje u elementu kada su nam poznati inkrementi deformacija kao i uspostavi elasto-plastičnu matricu krutosti tla. Zahtevani izrazi mogu se dobiti korišćenjem asocijativne teorije plastičnosti. Pogodno je parametar ojačanja definisati na sličan način:

$$h = e_1 - e^p \quad (2.128)$$

U prostoru $(p', q, e - e^e)$ Roscoe-ov elastični zid postaje upravan na osu $(e - e^e)$, kako je prikazano na sl. 8.



Sl. 8

Uzimajući u obzir jednačine (2.96) i (2.128) parametar ojačanja h postaje

$$h = e_1 - (e - e^e) = e_1 - e - k \ln \frac{p'}{p_1} \quad (2.129)$$

U slučaju asocijativne plastičnosti površ popuštanja je opisana istom jednačinom kao i funkcija plastičnog potencijala.

$$F(\sigma_m^p, \bar{\sigma}) = h \quad (2.130)$$

Za Cam-Clay model i modifikovani Cam-Clay model površi graničnog stanja respektivno postaju:

$$(\lambda - k) \left(\ln \frac{p'}{p_1} + \frac{\eta}{M} \right) = h \quad (2.131)$$

$$(\lambda - k) \ln \left[\frac{p}{p_1} \left(1 + \frac{n^2}{M^2} \right) \right] = h \quad (2.132)$$

Komponente plastičnih deformacija mogu se sračunati iz uslova tečenja

$$d\epsilon_{ij}^p = \bar{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.133)$$

što se u matricnoj formi može izraziti kao:

$$\{\epsilon\}^p = \bar{\lambda} \cdot \{a\} \quad (2.134)$$

gde su uvedene sledeće oznake:

$$\begin{aligned} \{\epsilon\}^T &= \langle \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx} \rangle^T \\ \{a\}^T &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{zy}} + \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}} + \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}}, \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} + \frac{\partial F}{\partial \tau_{yx}} \right\rangle^T \end{aligned} \quad (2.135a,b)$$

Inkrement elastičnih deformacija sračunava se korišćenjem elastične matrice krutosti

$$\{d\epsilon^e\} = [C^E]^{-1} \cdot \{d\sigma\} \quad (2.136)$$

gde su elementi matrice C^E izraženi u funkciji κ , σ_m i ν . Sabiranjem jednačina (2.134) i (2.136) dobija se inkrement totalne deformacije:

$$\{d\epsilon\} = \{d\epsilon^e\} + \{d\epsilon^p\} = [C^E]^{-1} \cdot \{d\sigma\} + \bar{\lambda} \{a\} \quad (2.137)$$

Diferenciranjem jednačine (2.130) dobija se

$$dF = dh \quad (2.138)$$

odnosno uvodjenjem parametra $A = \frac{dh}{\bar{\lambda}}$ ova jednačina dobija oblik

$$dF - \bar{\lambda} A = 0 \quad (2.139)$$

Kombinacijom jednačina (2.137) i (2.139) dobija se fundamentalni sistem jedna-

čina asocijativnih problema plastičnosti.

$$\begin{Bmatrix} \{d\varepsilon\} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C^E]^{-1} & \{a\} \\ \{a\}^T & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\sigma\} \\ \bar{\lambda} \end{Bmatrix} \quad (2.140)$$

Ako se iz ovog sistema jednačina eliminiše nepoznati parametar $\bar{\lambda}$ dobija se eksplicitni izraz za sračunavanje inkrementa napona ako su poznati inkrementi deformacija.

$$\{d\sigma\} = ([C^E] - \frac{1}{\beta} \{d\} \{d\}^T) \{d\varepsilon\} \quad (2.141)$$

gde su uvedene sledeće oznake:

$$\{d\} = [C^E] \{a\} \quad (2.142a, b)$$

$$\beta = A + \{a\}^T \{d\}$$

Iz jednačina (2.140) jasno je da se različiti zakoni plastičnog tečenja razlikuju samo u formi veličina A i $\{a\}$ koje zavise od izabranih površi popuštanja. Za određene površi popuštanja mogu se dobiti eksplicitni izrazi za sračunavanje elemenata $\{a\}$ i A .

Tako za Cam-Clay model se dobijaju sledeće jednačine:

$$a_i = \frac{\lambda-k}{\sigma'_m} \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{\eta}{M} \right) - \frac{3}{2\sigma M} (\sigma'_i - \sigma'_m) \right] \quad i=x, y, z$$

$$a_i = - \frac{\lambda-k}{\sigma'_m} \frac{3}{\sigma M} \cdot \tau_i \quad i=xy, yz, zx \quad (143a, b, c)$$

$$A = - (1 + e_0) \left(\frac{\lambda-k}{\sigma'_m} \right) \left(1 - \frac{\eta}{M} \right)$$

U slučaju modifikovanog Cam-Clay modela ove jednačine postaju:

$$a_i = \frac{\lambda-k}{\sigma'_m} \left[\frac{(M^2 - \eta^2 - 9)\sigma'_m + 9\sigma'_i}{3\sigma'_m(M^2 + \eta^2)} \right] \quad i=x, y, z$$

$$a_i = \frac{\lambda-k}{\sigma'_m} \left[\frac{\tau}{\sigma'_m(M^2 + \eta^2)} \right] \quad i=yz, zx, xy \quad (2.144a, b, c)$$

$$A = - (1 + e_0) \frac{\lambda-k}{\sigma'_m} \left(\frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} \right)$$

Na ovaj način dobijeni su svi potrebni izrazi za sračunavanje inkrementa napona iz inkrementa poznatih totalnih deformacija.

Predloženi modeli Cam-Clay i modifikovani Cam-Clay u kontekstu teorije plastičnosti mogu se svrstati u asocijativne modele za izotropnim ojačanjem. Za opisivanje ovih modela potreban je relativno mali broj parametara (λ , κ , M) koji se mogu dobiti iz standardnih triaksijalnih opita. Parametar, λ se može odrediti sa znatno većom tačnošću nego parametar κ . Ovim se modelima može znatno bolje obuhvatiti rasterećenje uzorka. Na osnovu brojnih eksperimenata zaključeno je da se ovim modelima tačnije predviđaju deformacije uzorka pri velikim vrednostima devijatora napona. Tako su ovi modeli prevashodno namenjeni za opisivanje ponašanja mekih glina, oni se često mogu uspešno primeniti i za opisivanje ponašanja tvrdih glina i peskova.

Naravno, ovi modeli sadrže i neke nedostatke. Na primer iz jednačina kojima su oni opisani, vidi se da je zanemaren uticaj treće invarijante napona, što znači da se jednačina svake površi popuštanja, kada se opisuje u prostoru glavnih napona dobija rotiranjem granične elastične linije oko prostorne dijagonale.

Takodje je na osnovu velikog broja kvalitetno izvedenih eksperimenata zaključeno, da koncept elastičnog graničnog zida daje znatno bolje aproksimacije za proračun zapreminskih deformacija, dok se njime ne mogu obuhvatiti značajne distorzionne deformacije koje se javljaju pre dostizanja granične površi stanja. Na usavršavanju ovih modela još uvek u svetu radi veliki broj naučnika.

2.4.5. Model sa kapom

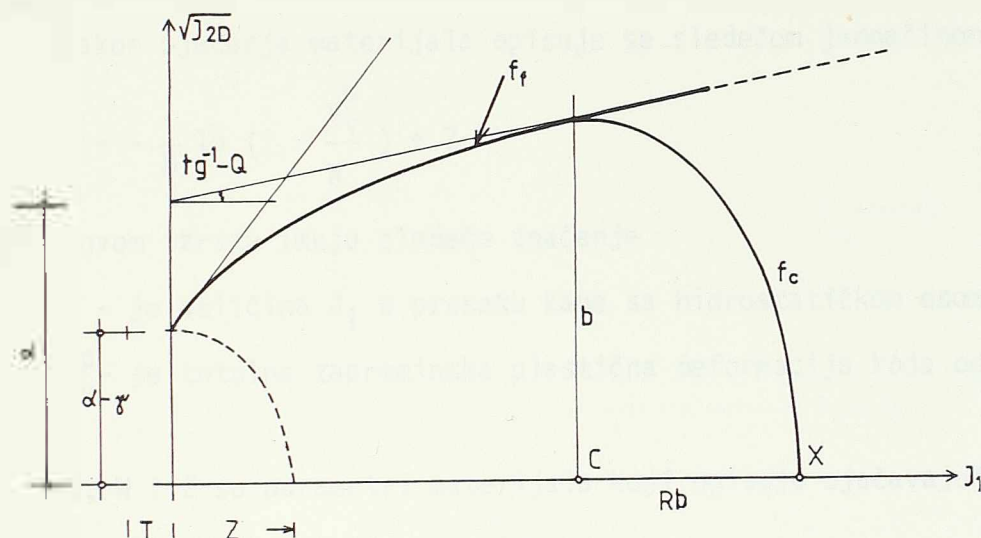
Kao što je napredrečeno, kompleksno ponašanje različitih geoloških materijala najuspešnije se može opisati korišćenjem inkrementalne teorije plastičnosti. Pri ovome, podjednako je važno obuhvatiti smičuće i zapreminske plastične deformacije. Ovo se može postići samo uvodjenjem modela sa više površi popuštanja koje se medjusobno presecaju. Iz ovoga je proistekla ideja za uvodjenjem modela sa kapom. Drucker, Prager & Hencch (1955). Osnovna ideja ovih modela je, da se pored površi popuštanja koje definišu naponsko stanje pri kome dolazi do loma usled napona smicanja, uvede još jedna površ popuštanja (kapa) koja zavisi od plastičnih zapreminskih deformacija. Ova površ se širi u prostoru napona čime se postiže ojačanje materijala u funkciji plastičnih zapreminskih deformacija.

U grupu ovih modela mogu se ubrojati i modeli plastičnosti koji se baziraju na mehanici tla kritičnih stanja od kojih su Cam-Clay i modifikovani

Cam-Clay model već opisan u predhodnom poglavlju.

Postoji veliki broj modela koji se mogu svrstati u ovu grupu Di Maggio (1971), Sandler (1976), Baladi (1979). U ovom radu biće detaljnije opisan "Cap model" (koji su predložili Di Maggio & Sandler (1971).

Na slici 9. šematski su prikazane funkcije popuštanja modela sa kapom.



S1. 9

Funkcija popuštanja koja je najčešće i obvojnica loma F_F prikazuje se u sledećem obliku:

$$F_F(J_1, \sqrt{J_{2D}}) = \sqrt{J_{2D}} - \alpha - \theta J_1 + \gamma e^{-\beta J_1} \quad (2.145)$$

gde su uvedene sledeće oznake:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.146a, b)$$

$$J_{2D} = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

i predstavljaju prvu invarijantu tenzora napona i drugu invarijantu devijatorskog dela tenzora napona respektovano, dok su α , β , θ i γ parametri materijala koje treba odrediti. Površ loma usvojena u obliku (2.145) sastoji se iz dve Drucker-Prager-ove površi koje su medjusobno spojene jednom prelaznom površi. Ovakva površ ne zavisi od treće invarijante tenzora napona. Ona je konveksna prema hidrostatičkoj osi što je neophodan uslov za uspešno opisivanje geološ-

kih materijala.

Druga površ popuštanja "kapa" usvaja se u obliku

$$F_c(J_1, \sqrt{J_{2D}}, \epsilon_V^p) = R^2 J_{2D} + (J_1 - C)^2 - R^2 b^2 = 0 \quad (2.147)$$

koja u prostoru $(J_1, \sqrt{J_{2D}})$ predstavlja elipsu sa polu osama R_b i b respektivno. Parametar materijala R najčešće se usvaja kao constanta i on predstavlja faktor oblika elipse, odnosno odnos izmedju njenih osa.

Zakon ojačanja materijala opisuje se sledećom jednačinom

$$X = -\frac{1}{D} \ln \left(1 - \frac{\epsilon_V^p}{W} \right) + Z \quad (2.148)$$

Veličine u ovom izrazu imaju sledeće značenje

X - je veličina J_1 u preseku kape sa hidrostatičkom osom

ϵ_V^p - je totalna zapreminska plastična deformacija koja odgovara veličini X .

D , W i Z su parametri materijala koji opisuju ojačavajuće ponašanje kape.

Veličina W karakteriše maksimalnu zapreminsku plastičnu deformaciju, odnosno deformaciju koja svodi poroznost materijala na veličinu blizu nuli.

Parametar D karakteriše brzinu promene zapreminske plastične deformacije. Veličina Z karakteriše inicijalno pokretanje plastičnih zapreminskih deformacija u uslovima hidrostatičkog opterećenja.

U zavisnosti od naponskog stanja i predhodnih zapreminskih plastičnih deformacija postoje 3 različita načina ponašanja ovog modela.

Elastično ponašanje modela je onda kada se naponska tačka nalazi unutar anvelope loma i ojačavajuće kape. Promene napona proizvode priraštaje deformacija koje su u potpunosti povratne. Mogu se razmatrati različiti slučajevi nelinearnog elastičnog ponašanja. Moduli kompresije i smicanja mogu se usvojiti u obliku:

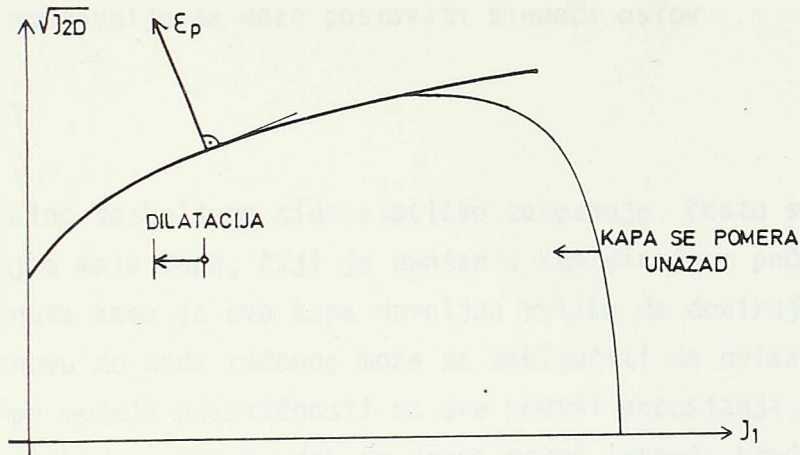
$$K = K(J_1, \kappa) \quad (2.149)$$

$$G = G(\sqrt{J_{2D}}, \kappa) \quad (2.150)$$

U elastičnom režimu ponašanja, ne dolazi do sprežanja zapreminskih i smičućih deformacija, tako da čisto zapreminske deformacije ne izazivaju devijatorske

napone, odnosno promene devijatorskih komponenata deformacije ne izazivaju promene hidrostatičkih komponenata tenzora napona.

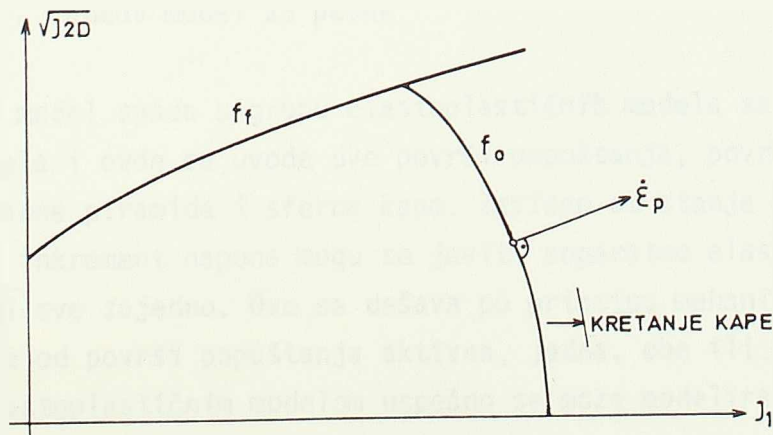
Ako se naponska tačka nalazi na površi loma, usled neutralne varijacije napona dolazi do pojave plastičnih deformacija. Kako je prikazano na slici 10, asocijativni zakon tečenja zahteva da vektor inkrementa plastičnih deformacija bude usvojen u pravcu spoljašnje normale na površ popuštanja.



Sl. 10

Pošto je površ loma konveksna, vektor inkrementa plastične deformacije sastoji se iz devijatorske ili smičuće komponente i zapreminske ili dilatacione komponente. Zbog povećanja zapremine usled dilatacione komponente vektora plastične deformacije dolazi do pomeranja kape unazad.

Kada se naponska tačka nalazi na površi popuštanja "kapi", usled inkrementa napona dolazi do pojave inkrementa plastičnih deformacija. Prema Drucker-ovom postupku ovaj inkrement plastičnih deformacija je upravan na kapu kako je to prikazano na sl. 11.



Sl. 11

Kretanje kape napolje definisano je zakonom ojačanje jednačina (2.148), odnosno zavisno je od istorije plastičnih deformacija.

Vektor inkrementa plastične deformacija sadrži komponentu nepovratne promene zapremine, odnosno dolazi do zbijanja što je karakteristično za većinu geoloških materijala. Usled ovog zbijanja kapa se pomera udesno, i povećava se opseg elastičnog zida.

Kod ovakvih modela, ograničenje napona zatezanja može imati različite forme. Najjednostavnije se može postaviti sledeći uslov

$$J_1 \leq T \quad (2.151)$$

gde je T maksimalno dozvoljeno hidrostatičko zatezanje. Često se pri niskim naponima uvodi pojam male kape, čiji je centar u koordinatnom početku. Prelazna tačka je dostignuta kada je ova kapa dovoljno velika da dodiruje površ loma.

Na osnovu do sada rečenog može se zaključiti da opisani model sa kapom spada u grupu modela plastičnosti sa dve površi popuštanja. Jedna površ je fiksirana u naponskom prostoru, dok se druga površ (kapa), kreće u zavisnosti od promene zapreminskih plastičnih deformacija. Inače za obe površi usvojen je asocijativni zakon tečenja. Ovim modelom se može uspešno opisati mehaničko ponašanje pri niskim i visokim naponima. Za kompletno opisivanje modela potrebno je poznavati 10 parametara materijala i svi se oni mogu uspešno odrediti na osnovu rezultata laboratorijskih opita ili opita na terenu. Za odredjivanje ovih parametara razvijeni su posebni algoritmi. Nedostatak ovakvog modela je taj što on ne uzima u obzir uticaj treće invarijante tenzora napona. Kod nekih složenijih modela sa kapom ovaj uticaj treće invarijante tenzora napona se ne zamenjuje.

2.4.6. Ladeov model za pesak

Ovaj model spada u grupu elastoplastičnih modela sa kapom. Kao i kod predhodnog modela i ovde se uvode dve površi popuštanja, površi u obliku zakrivljene šestougaoe piramide i sferna kapa. Zavisno od stanja napona i deformacija za naneti inkrement napona mogu se javiti separatno elastične i plastične deformacije ili sve zajedno. Ovo se dešava po principu mehanizama u zavisnosti od toga koja je od površi popuštanja aktivna, jedna, obe ili nijedna. Sa ovako kompleksnim elastoplastičnim modelom uspešno se može modelirati ponašanje peskova kao i normalno konsolidovanih glina.

$$f_1(\{\sigma\}, \{\varepsilon^{p1}\}) = (I_1^3/I_3 - 27)(I_1/p_a)^m - a e^{-b W_{p1}} \cdot (W_{p1}/p_a)^{1/q} \quad (2.152)$$

pri čemu je

$$(I_1^3/I_3 - 27)(I_1/p_a)^m = \eta_1$$

gde su uvedene sledeće oznake:

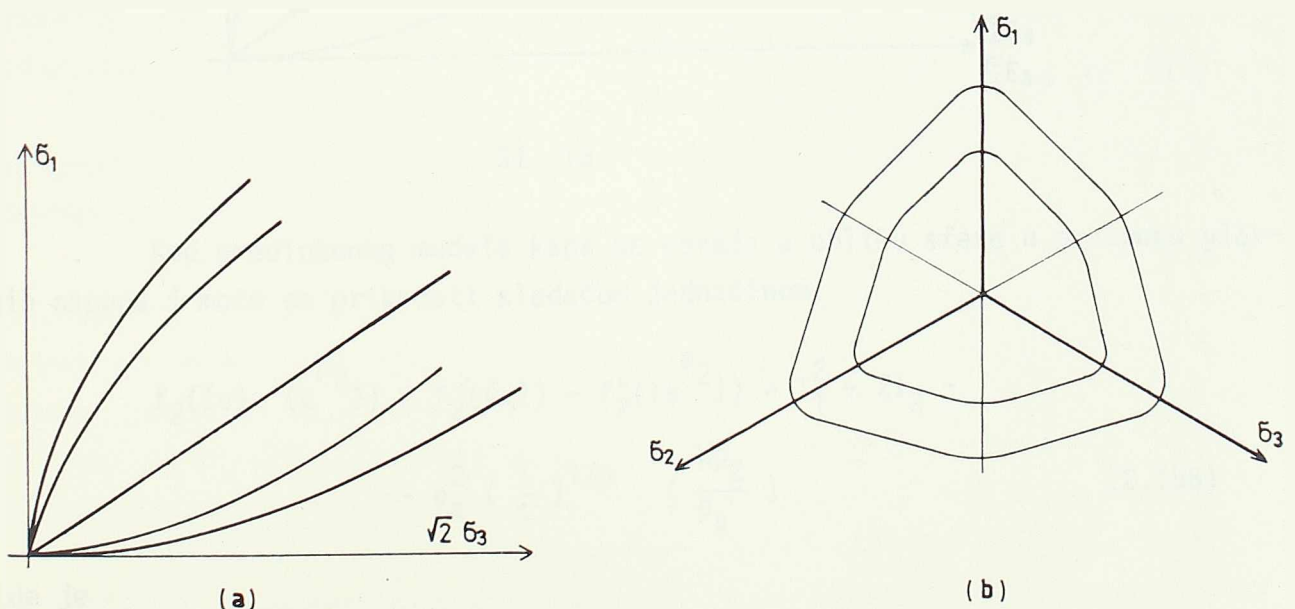
$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2.153a,b)$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} + \tau_{yx} \tau_{zy} \tau_{xz} - (\sigma_x \tau_{yz} \tau_{zy} + \sigma_y \tau_{xz} \tau_{zx} + \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yx})$$

i predstavljaju prvu i treću invarijantu tenzora napona respektivno.

$W_{pk} = (\int \{\sigma\}^T \cdot \{\varepsilon^{pk}\})$ je plastični rad na površi K veličine m, a, b, q i η_1 su konstante materijala koje se određuju na osnovu eksperimenata.

Na osnovu izraza (2.152) može se zaključiti da funkcija popuštanja f_1 je funkcija koja se širi u prostoru napona u zavisnosti od veličine plastičnog rada i ostaje samo sebi slična što znači da je to slučaj izotropnog ojačanja. Na slici 12 prikazane su površi popuštanja i to a) presek površi popuštanja i triaksijalne ravni i b) presek površi popuštanja i π (oktoedarske) ravni.



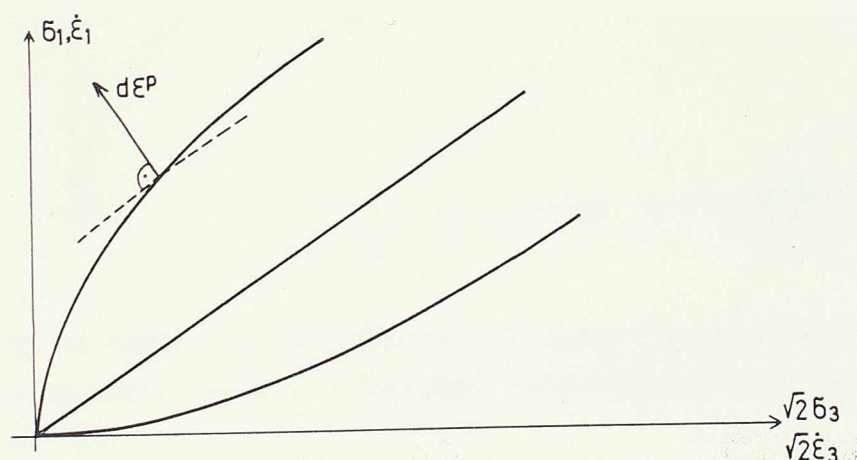
Veličinom parametra η_1 definiše se otvor piramide dok se veličinom m definiše njegoza zakrivljenost. Za $m = 0$ krive na sl. 12a postaju prave linije.

Izrazom $I_1^3/I_3 = \text{const}$ definišu se preseči površi popuštanja i π ravni. Sa sl. 12b vidi se da je ovaj oblik sličan obliku nepravilnog šestougona koji se dobija u Mohr-Coloumb-ov uslovu loma stim što su ivice zaobljene, odnosno za vrednosti $\theta = \pm 30^\circ$ nema singulariteta, što znatno olakšava numeričku analizu.

Funkcija plastičnog potencijala usvaja se u sledećem obliku:

$$g_1 = I_1^3 - (27 + \eta_2(p_a/I_1)^m) \cdot I_3 \quad (2.154)$$

Pošto je funkcija plastičnog potencijala različitog oblika od funkcije popuštanja na ovoj površi se dešava ne-asocijativno tečenje, odnosno inkrement plastične deformacije nije upravan na površ popuštanja kako je to prikazano na sl. 13.



Sl. 13

Kod predloženog modela kapa se usvaja u obliku sfere u prostoru glavnih napona i može se prikazati sledećom jednačinom.

$$f_2(\{\sigma\}, \{\epsilon^{p_2}\}) = f_2^*(\{\epsilon\}) - f_2^{**}(\{\epsilon^{p_2}\}) = I_1^2 + 2I_2 - p_a^2 \left(\frac{1}{c}\right)^{1/p} \left(\frac{wp_2}{p_a}\right) \quad (2.155)$$

gde je

$$I_2 = \tau_{xy}\tau_{yx} + \tau_{yz}\tau_{zy} + \tau_{zx}\tau_{xz} - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) \quad (2.156)$$

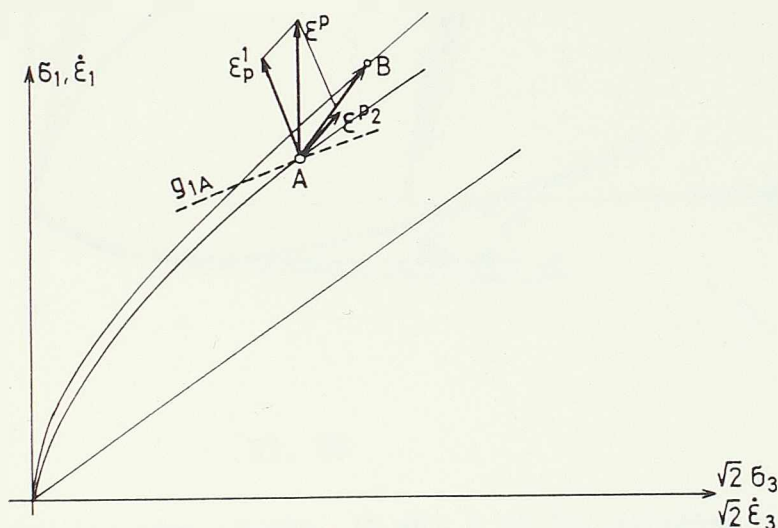
druga invarijanta tenzora napona, P i C su konstante materijala.

Funkcija plastičnog potencijala

$$g_2 = I_1^2 + 2I_2 \quad (2.157)$$

je istog oblika kao i funkcija popuštanja što znači da je tečenje asocijativno i inkrement plastičnih deformacija na ovoj površi je upravan na kapu.

Na sl. 14 prikazano je kako se vrši vektorsko sabiranje inkrementa plastičnih deformacija koje nastaju u tački A u kojoj su obe površi aktivne, pri nanošenju inkrementa napona AB.



Sl. 14

Da bi se dobio totalni inkrement deformacije totalnom plastičnom inkrementu treba vektorski dodati i inkrement elastične deformacije, a što nije prikazano na sl. 14.

Na slici 15 prikazane su tipične promene devijatora napona ($\sigma_1 - \sigma_3$) i zapreminske deformacija ϵ_V u zavisnosti od glavne dilatacije ϵ_1 pri konstantnoj vrednosti napona σ_3 , koji se dobijaju u CID opitima.

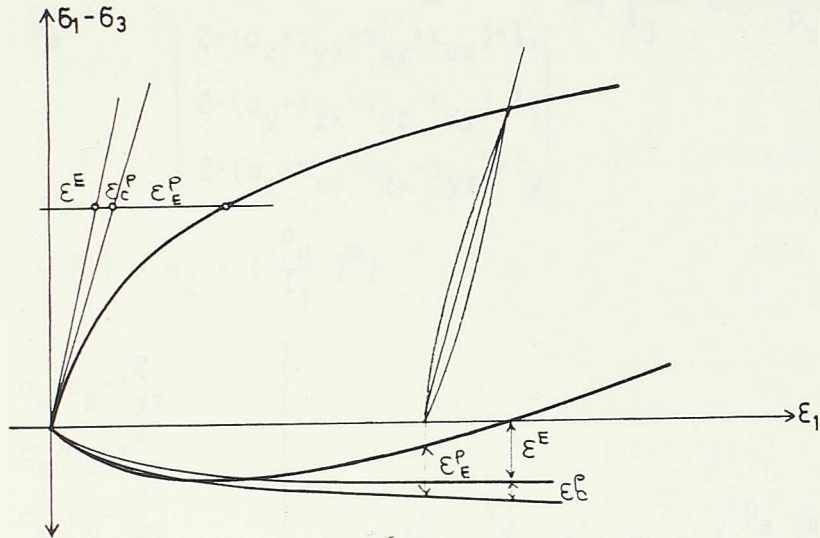
Može se zaključiti da se obe elastične i plastične deformacije dešavaju od samog početka nanošenja opterećenja. Pri nižim vrednostima devijatora napona zapreminske deformacije su zbijanja, dok se pri višim vrednostima devijatora, javlja širenje materijala. Pri višim vrednostima devijatora napona dominantne su plastične deformacije koje nastaju na kontaktu površi popuštanja, dok su komponente plastičnih deformacija koje odgovaraju kapi znatno manje.

U sledećem tekstu daće se prikaz kako se korišćenjem napred izložene inkrementalne procedure mogu dobiti eksplicitni izrazi za elemente elastoplastične matrice koja odgovara Lade-ovom modelu.

Za određivanje nepoznatih veličina λ_1 i λ_2 može se postaviti sledeći sistem jednačina

$$L_{11}\lambda_1 + L_{12}\lambda_2 = T_1 \quad (2.158)$$

$$L_{21}\lambda_1 + L_{22}\lambda_2 = T_2$$



Sl. 15

Gde prema izrazima (2.68), (2.69) i (2.70) veličine L_{ik} i T_{ik} imaju sledeće vrednosti:

$$L_{11} = \left\{ \frac{\partial f_1'}{\partial \sigma} \right\}^T [C^E] \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} \right\} + \frac{\partial f_1''}{\partial Wp_1} \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.159a,b)$$

$$L_{22} = \left\{ \frac{\partial f_2'}{\partial \sigma} \right\}^T [C^E] \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial \sigma} \right\} + \frac{\partial f_2''}{\partial Wc_2} \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial \sigma} \right\}$$

$$L_{12} = \left\{ \frac{\partial f_1'}{\partial \sigma} \right\}^T [C^E] \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial \sigma} \right\}$$

$$L_{21} = \left\{ \frac{\partial f_2'}{\partial \sigma} \right\}^T [C^E] \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} \right\}$$

(2.159 c,d,e,f)

$$T_1 = \left\{ \frac{\partial f_1'}{\partial \sigma} \right\}^T [C^E] \{d\varepsilon\}$$

$$T_2 = \left\{ \frac{\partial f_2'}{\partial \sigma} \right\}^T [C^E] \{d\varepsilon\}$$

Imajući u vidu predložene funkcije popuštanja i plastičnog potencijala date izrazima (2.152), (2.154), (2.155) i (2.157). Za naznačene izvode u izrazima (2.159a,f) dobijaju se sledeći izrazi:

$$\left\{ \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right\} = \frac{I_1^2}{I_3} \cdot \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^m \cdot \begin{vmatrix} 3 \cdot I_3 - (\sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{yz}^2) \cdot I_1 \\ 3 \cdot I_3 - (\sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{zx}^2) \cdot I_1 \\ 3 \cdot I_3 - (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2) \cdot I_1 \\ 2 \cdot (\sigma_x \cdot \tau_{yz} - \tau_{xy} \cdot \tau_{zx}) \cdot I_1 \\ 2 \cdot (\sigma_y \cdot \tau_{zx} - \tau_{yz} \cdot \tau_{xy}) \cdot I_1 \\ 2 \cdot (\sigma_z \cdot \tau_{xy} - \tau_{zx} \cdot \tau_{yz}) \cdot I_1 \end{vmatrix} + \left(\frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \cdot \frac{m}{p_a} \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^{m-1} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma} \right\} = - (27 + \eta_2 \cdot \left(\frac{p_a}{I_1} \right)^m) \quad (2.160)$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{yz}^2 \\ \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{zx}^2 \\ \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2 \\ -2 \cdot (\sigma_x \cdot \tau_{yz} - \tau_{xy} \cdot \tau_{zx}) \\ -2 \cdot (\sigma_y \cdot \tau_{zx} - \tau_{yz} \cdot \tau_{xy}) \\ -2 \cdot (\sigma_z \cdot \tau_{xy} - \tau_{zx} \cdot \tau_{yz}) \end{vmatrix} + \left(3 \frac{I_1^2}{I_3} + \frac{I_3}{I_1} \cdot m \cdot \eta_2 \cdot \left(\frac{p_a}{I_1} \right)^m \right) \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\left\{ \frac{\partial f_1}{\partial w p_1} \right\} = \frac{f_1}{p_1} \left[\frac{p_a}{q w_p} - b \cdot p_a \right] \quad (2.161)$$

$$\{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} \right\} = 3g_1 + m \cdot \eta_2 \left(\frac{p_a}{I_1} \right)^m \cdot I_3 \quad (2.163)$$

$$\left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right\} = \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial \sigma} \right\} = 2 \langle \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}, 2\tau_{xy} \rangle^T \quad (2.164)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial w p_2} = \frac{p_a}{C} \left(\frac{f_2}{p_a^2} \right)^{1-p} \quad (2.165)$$

$$\{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial \sigma} \right\} = 2I_1^2 + 4I_2 = 2g_2 \quad (2.166)$$

Inkrementalna elastoplastična matrica krutosti materijala za ovaj model postaje:

$$[C^{EP}] = [C^E] - \frac{[C^E]}{A} \left(\left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} \right\} \{b_1\}^T + \left\{ \frac{\partial g_2}{\partial \sigma} \right\} \{b_2\}^T \right) [C^E] \quad (2.167)$$

gde je

$$A = \det (L_{ij})$$

$$\{b_1\} = L_{11} \left\{ \frac{\partial f_1'}{\partial \sigma} \right\} - L_{21} \left\{ \frac{\partial f_2'}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.168a,b,c)$$

$$\{b_2\} = L_{22} \left\{ \frac{\partial f_2'}{\partial \sigma} \right\} - L_{12} \left\{ \frac{\partial f_1'}{\partial \sigma} \right\}$$

Na ovaj se način korišćenjem predhodno datih izraza može sračunati elastoplastična matrica krutosti materijala, koja je neophodna za primenu ovoga modela u MKE. Pošto je na konusnoj površi ne asocijativno tečenje, izvedena matrica neće biti simetrična. Ova ne simetrija elastoplastične matrice krutosti materijala povlači za sobom i nesimetriju u matrici krutosti sistema MKE što obično čini velike probleme pri rešavanju jednačina MKE.

Kao što se iz predhodnog može videti za opisivanje ponašanja tla predložen je veliki broj konstitutivnih modela. Još uvek nije pronadjen takav model koji će podjednako uspešno simulirati ponašanje različitih vrsta tla pri proizvoljnim putanjama napona. Zbog toga je veoma važno da se izvrši pravilan izbor modela za rešavanje odgovarajućeg problema. Postupak za izbor i testiranje konstitutivnog modela tla treba da sadrži sledeće korake:

- (1) matematička formulacija modela
- (2) utvrđivanje značajnih parametara
- (3) odredjivanje parametara iz odgovarajućih opita
- (4) provera ponašanja modela u laboratoriji pri različitim putanjama napona i fizičkim uslovima
- (5) provera valjanosti modela, poredjenjem rezultata numeričke analize sa rezultatima merenja na terenu.

3. METODE KONAČNIH I KONTAKTNIH ELEMENATA

3.1. FORMULACIJA INKREMENTALNIH JEDNAČINA KRETANJA MEHANIKE KONTINUUMA MKE

Posmatrajmo u dvodimenzionalnom prostoru oblast D koja je ograničena zatvorenom konturom S . Predpostavlja se da je posmatrana oblast deo neprekidnog materijalnog kontinuuma. Usled različitih spoljašnjih uticaja oblast D se menja i prelazi u oblast D^* . Pri ovom prelasku predpostavlja se da nije došlo do narušavanja neprekidnosti kontinuuma.

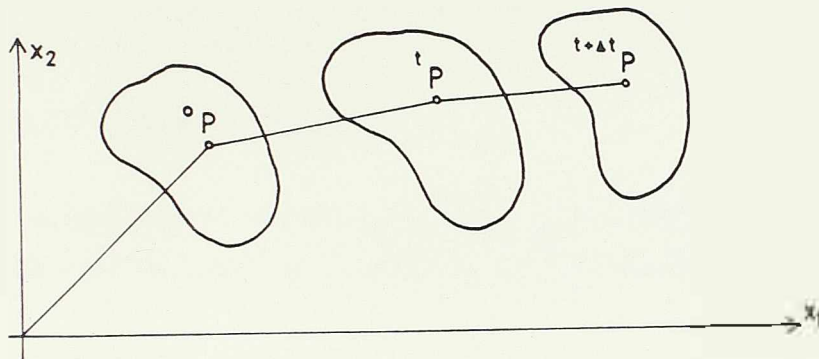
Pri ovome se ne uvode nikakva ograničenja u pogledu veličina pomeranja, rotacija i dilatacija. Takodje zavisnost izmedju napona i dilatacija mogu biti ne linearne, što čini najopštiji slučaj nelinearnog problema u statičkoj analizi.

Kod rešavanja nelinearnih problema, ravnotežu tela treba uspostaviti u tekućoj konfiguraciji, odnosno kroz kompletnu istoriju nanošenja opterećenja što predstavlja Lagrangean (materijalnu) formulaciju problema. Zbog toga je veoma pogodno da se kao promenljiva veličina uvede vreme t , pomoću koje se u statičkoj analizi može definisati intenzitet opterećenja, odnosno tekuća konfiguracija sistema. Najčešće se za rešavanje ovakvih problema koristi inkrementalna formulacija MKE. U ovoj formulaciji problema pretpostavlja se da su sve statičke i kinematičke veličine poznate u konfiguracije t , a da se rešenje traži u narednoj konfiguraciji $t+\Delta t$. Pri tome je Δt pogodno izabran inkrement vremena odnosno opterećenja. Za razliku od jednačina ravnoteže u MKE sa pomeranjima kao nepoznatim veličinama, koje su nelinearne, inkrementalne jednačine ravnoteže su linearne i u njima su nepoznati inkrementi pomeranja.

Zbog velikog broja promenljivih važno je koristiti efikasnu notaciju. Najpogodnije je koristiti indeksnu notaciju gde indeksi sa desne strane označavaju odredjenu komponentu posmatrane veličine, dok gornji levi indeks označava oblast kojoj data veličina pripada a donji levi oblast i referentni sistem u odnosu na koji se data veličina definiše (meri).

Na slici broj 1. prikazane su tri karakteristične konfiguracije oblasti D . 0D je početna konfiguracija, tD je trenutna i ${}^{t+\Delta t}D$ predstavlja narednu nepoznatu konfiguraciju. Proizvoljna tačka P u ovim konfiguracijama ima koordinate ${}^0x_1, {}^0x_2, {}^tx_1, {}^tx_2$ i ${}^{t+\Delta t}x_1, {}^{t+\Delta t}x_2$ respektivno. Na isti način mogu

se opisati i pomeranja tačke P. Izmedju koordinata i pomeranja proizvoljne tačke P mogu se uspostaviti sledeće zavisnosti



Sl. 1

$${}^t x_i = {}^0 x_i + {}^t u_i \quad (i=1,2)$$

$${}^{t+\Delta t} x_i = {}^t x_i + \Delta u_i \quad (3.1)$$

$${}^{t+\Delta t} u_i = {}^t u_i + \Delta u_i$$

gde je Δu_i inkrement pomeranja pri prelasku iz konfiguracije t u konfiguraciju $t+\Delta t$.

Najčešće se jedinične ravnoteže uspostavljaju korišćenjem principa virtualnih pomeranja. Korišćenjem tenzorske notacije ovaj princip može se izraziti na sledeći način:

$${}^{t+\Delta t} \int_D \tau_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} e_{ij} \cdot d {}^{t+\Delta t} D = {}^{t+\Delta t} R \quad (3.2)$$

Unutrašnji rad prikazan na levoj strani izraza (3.2) jednak je radu stvarnih napona pri virtualnim deformacijama (koje odgovaraju zadatim virtualnim pomeranjima). Na desnoj strani izraza (3.2) prikazan je rad stvarnih zadatah spoljnih sila na virtualnim pomeranjima.

Osnovna teškoća u primeni izraza (3.2) jeste u tome što konfiguracija u $t+\Delta t$ nije poznata, što ujedno predstavlja i osnovnu razliku od linearne analize u kojoj se smatra da se razmatrana konfiguracija tela ne menja i da su konstitutivne jednačine linearne.

Činjenica da se konfiguracija tela menja kontinualno i da telo pri tome može imati velika pomeranja, velike rotacije kao i velike dilatacije uvodi potrebu za korišćenjem odgovarajućih mera napona i deformacija kao i uvođenje

adekvatnih konstitutivnih relacija.

U narednom delu ukratko će biti prikazani tenzori deformacija i napona koji se najčešće koriste u inkrementalnoj formulaciji MKE.

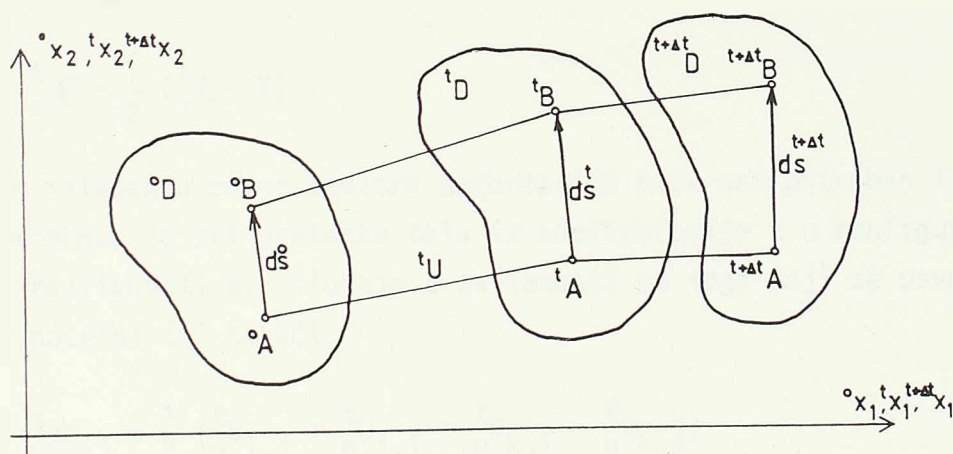
3.1.1. Tenzor deformacije

U sistemu materijalnih koordinata tzv. Lagrange-ov tenzor deformacije definiše se kao polurazlika metričkih tenzora posle i pre deformacije

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij}^* - g_{ij}) \quad (3.3)$$

Tenzor deformacije može se prikazati i u zavisnosti od komponenta pomeranja kako se najčešće čini i u linearnoj teoriji elastičnosti.

Posmatrajmo u dvodimenzionalnom pravouglom Dekartovom sistemu koordinata tri karakteristične konfiguracije oblasti D, početnu, tekuću i narednu (sl. 2).



Sl. 2

Za analizu deformacije razmatramo promenu rastojanja između dve beskonačno bliske tačke A i B pre i posle deformacije.

$$d^0 S^2 = d^0 x_1^2 + d^0 x_2^2 = d^0 x_i d^0 x_i \quad (3.4)$$

$$d^t S^2 = d^t x_1^2 + d^t x_2^2 = d^t x_i * d^t x_i \quad (3.5)$$

Razlika kvadrata diferencijala linijskog elementa posle i pre deformacije može se prikazati na sledeći način:

$$[d^t S^2 - d^0 S^2] = 2 {}_0^t \mathbf{E}_{ij} d^0 x_i d^0 x_j \quad (3.5)$$

odnosno korišćenjem relacije

$$d^t x_i = \frac{\partial^t x_i}{\partial^0 x_j} d^0 x_j \quad (3.7)$$

dobijamo:

$$\frac{1}{2} [d^t S^2 - d^0 S^2] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t x_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^t x_k}{\partial^0 x_j} - \delta_{ij} \right) d^0 x_i d^0 x_j \quad (3.8)$$

Prvi član u zagradi na desnoj strani jednačine (3.8) predstavlja Cauchy-Greenov tenzor deformacije. Količnici $\partial^t x_k / \partial^0 x_i$ i $\partial^t x_k / \partial^0 x_j$ nazivaju se gradijenti deformacije pa je prema definiciji, Cauchy-ev tenzor deformacije odredjen kao proizvod gradijenta deformacije. Ovaj tenzor deformacije nije objektivan jer njegove komponente nisu jednake nuli u slučaju pomeranja tela kao krutog. Korišćenjem izraza (3.6) i (3.8) može se uspostaviti veza izmedju Lagrange-ovog i Cauchy-evog tenzora deformacije

$${}_0^t \mathbf{E} = \frac{1}{2} ({}_0^t \mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (3.9)$$

U daljnjem izlaganju pored tenzora deformacije biće nam potreban i inkrementi tenzora deformacije pri prelasku tela iz konfiguracije t u konfiguraciju $t+\Delta t$. Ovde ćemo razlikovati dva slučaja u zavisnosti od toga koji se usvoji kao referentni, početni ili tekući.

$${}_0^t \mathbf{E}_{ij} = \frac{1}{2} ({}_{0,i,j}^t u + {}_{0,j,i}^t u + {}_{0,k,i}^t u \cdot {}_{0,k,j}^t u) \quad (3.10)$$

$${}_{0,t+\Delta t} \mathbf{E} = \frac{1}{2} ({}_{0,i,j}^{t+\Delta t} u + {}_{0,j,i}^{t+\Delta t} u + {}_{0,k,j}^{t+\Delta t} u \cdot {}_{0,k,j}^{t+\Delta t} u + {}_{0,k,i}^{t+\Delta t} u) \quad (3.11)$$

Pa je inkrement tenzora deformacije jednak:

$${}_{0,t+\Delta t} \mathbf{E}_{ij} = {}_{0,t+\Delta t} \mathbf{E}_{ij} - {}_0^t \mathbf{E}_{ij} \quad (3.12)$$

Posle elementarnih sredjivanja izraza (3.12) možemo napisati u konačnoj formi:

$$\begin{aligned} {}_{0,t+\Delta t} \mathbf{E}_{ij} = & \frac{1}{2} [{}_{0,i,j}^{\Delta u} + {}_{0,j,i}^{\Delta u} + {}_{0,k,i}^t u \cdot {}_{0,k,j}^{\Delta u} + {}_{0,k,j}^t u \cdot {}_{0,k,i}^{\Delta u} + \\ & + {}_{0,k,i}^{\Delta u} \cdot {}_{0,k,j}^t u] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ako se kao referentna konfiguracija usvoji tekuća konfiguracija inkrement tenzora deformacije postaje:

$${}^t\Delta\epsilon_{ij} = {}^t\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t\Delta u_{i,j} + {}^t\Delta u_{j,i} + {}^t\Delta u_{k,i} \cdot {}^t\Delta u_{k,j}) \quad (3.14)$$

3.1.2. Tenzori napona

Stanje napona u nekoj tački deformisanog tela određeno je Cauchy-evim tenzorom napona σ^{ij} koji se definiše u odnosu na deformisanu konfiguraciju t i meri u odnosu na tu istu konfiguraciju.

Pored Cauchy-ovog tenzora napona koristi se i Piola-Kirchhoff-ov tenzor napona druge vrste.

Između ova dva tenzora napona može se uspostaviti sledeća zavisnost:

$${}^t_s{}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g^*/g} \quad (3.15)$$

gde količnik g^*/g predstavlja odnos determinante matrice tenzora posle i pre deformacije. Ova zavisnost može se u sistemu Dekartovih koordinata prikazati na sledeći način:

$${}^t_s{}_{ij} = \frac{\rho}{t_\rho} \cdot {}^0x_{i,k} \cdot t_{\sigma_{kl}} \cdot {}^0x_{j,l} \quad (3.16)$$

ili u matricnom obliku:

$${}^t_s = \frac{\rho}{t_\rho} \cdot {}^0x \cdot t_\sigma \cdot {}^0x^T \quad (3.17)$$

gde je 0x gradijent deformacije.

Treba naglasiti da se Piola-Kirchhoff-ovi naponi druge vrste definišu u odnosu na bazisne vektore posle deformacije a mere po jedinici površi pre deformacije. Ovi naponi nemaju jasno fizičko značenje pa je zbog toga neophodno sračunavati Cauchy-eve napone.

Ukoliko se zanemari geometrijska nelinearnost problema tada je vrednost količnika g^*/g jednaka jedinici, ovi naponi postaju međusobno jednaki i jednaki su takozvanim tehničkim naponima σ_{ij} .

3.1.3. Formulacije rešenja nelinearnih problema MKE

Kao što je napred rečeno u Lagrange-ovoj nelinearnoj formulaciji, ravnotežu tela u konfiguraciji $t+\Delta t$ možemo izraziti korišćenjem principa virtualnih pomeranja.

$${}^{t+\Delta t}\delta R_u = {}^{t+\Delta t}\delta R_s \quad (3.18)$$

U opštem slučaju nelinearnosti, telo može imati velika pomeranja, velike deformacije i konstitutivne relacije nisu linearne. Zbog toga rešenje jednačine (3.18) ne može se dobiti direktno. Ako se sve promenljive veličine izraze u funkciji neke predhodno sračunate ravnoteže konfiguracija i izvrše potrebne linearizacije, tada se može dobiti približno rešenje jednačine (3.18). Ovako dobijeno rešenje može se poboljšati korišćenjem nekog iterativnog postupka. Da bi smo izveli potrebne jednačine za aproksimativno rešenje linearizovanog problema koristimo rešenja iz predhodnih konfiguracija $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$. Tenzore napona i deformacija potrebno je izraziti u odnosu na jednu predhodno sračunatu konfiguraciju. U principu se za ovo može iskoristiti bilo koja predhodno sračunata konfiguracija. U praksi se međjutim najčešće koriste dve formulacije problema, totalna Lagrange-ova (TL) i korigovana Lagrange-ova (UL).

Da li će se primeniti jedna ili druga formulacija zavisi od prirode razmatranog problema, rešenja se dobijaju ista, samo što je obim numeričkog rada za dobijanje rešenja različit.

U TL formulaciji koja je u stvari klasična Lagrange-ova formulacija, referenta konfiguracije je početna i ona je poznata. Uslovi ravnoteže se ispisuju za konfiguraciju $t+\Delta t$ smatrajući da su sve kinematičke i statičke veličine u konfiguraciji t poznate.

Princip virtualnih pomeranja, izraz (3.18) može se prikazati na sledeći način:

$$\int {}_o^{t+\Delta t} S_{ij} \cdot \delta {}_o^{t+\Delta t} E_{ij} \cdot d^o D = {}^{t+\Delta t} R \quad (3.19)$$

U ovom izrazu ${}_o^{t+\Delta t} S_{ij}$ i ${}_o^{t+\Delta t} E_{ij}$ su Piola-Kirchhoff-ov tenzor napona i Green-Lagrange-ov tenzor deformacije u konfiguraciji $t+\Delta t$ a mereni u odnosu na površinu i koordinate u oblasti (o) . Sa ${}^{t+\Delta t} R$ je obeležen rad spoljanih sila pri virtualnim pomeranjima.

Inkrement tenzora deformacije izraz (3.13), može se rastaviti na linearni i nelinearni deo:

$${}_0^{\Delta} \epsilon_{ij} = {}_0^{\Delta} e_{ij} + {}_0^{\Delta} n_{ij} \quad (3.20)$$

gde su:

$${}_0^{\Delta} e_{ij} = \frac{1}{2} [{}_0^{\Delta} U_{i,j} + {}_0^{\Delta} U_{j,i} + {}_0^t U_{k,i} {}_0^{\Delta} U_{k,j} + {}_0^t U_{k,j} {}_0^{\Delta} U_{k,i}] \quad (3.21)$$

$${}_0^{\Delta} n_{ij} = \frac{1}{2} [{}_0^{\Delta} U_{k,i} \cdot {}_0^{\Delta} U_{k,j}] \quad (3.22)$$

Piolo-Kirchhorff - tenzor napona u konfiguraciji $t+\Delta t$ može se prikazati na sledeći način:

$${}_0^{t+\Delta t} S_{ij} = {}_0^t S_{ij} + {}_0^{\Delta} S_{ij} \quad (3.23)$$

Koristeći izraze (3.20) i (3.23) uz vodjenje računa da je

$$\delta({}_0^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}) = \delta({}_0^t \epsilon_{ij} + {}_0^{\Delta} \epsilon_{ij}) = \delta {}_0^{\Delta} \epsilon_{ij} \quad (3.24)$$

Uslovi ravnoteže postaju:

$$\int_0^D {}_0^{\Delta} S_{ij} \cdot \delta {}_0^{\Delta} \epsilon_{ij} d^0 D = {}_0^{t+\Delta t} R - \int_0^D {}_0^t S_{ij} \delta {}_0^{\Delta} \epsilon_{ij} \quad (3.25)$$

Korišćenjem konstitutivnog tenzora može se uspostaviti veza između inkrementa napona i deformacije

$${}_0^{\Delta} S_{ij} = {}_0^t D_{ijkl} \cdot {}_0^{\Delta} \epsilon_{ij} \quad (3.26)$$

Smenom (3.26) u (3.25) dobijamo:

$$\begin{aligned} & \int_0^D {}_0^t D_{ijkl} {}_0^{\Delta} \epsilon_{kl} \cdot \delta {}_0^{\Delta} \epsilon_{ij} d^0 D + \int_0^D {}_0^t S_{ij} \delta {}_0^{\Delta} n_{ij} d^0 D = \\ & + {}_0^{t+\Delta t} R - \int_0^D S_{ij} \delta \Delta \epsilon_{ij} d^0 D \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ovaj izraz je nelinearan, njegova linearizacija može se sprovesti na sledeći način

$${}_0^{\Delta} \epsilon_{ij} \approx {}_0^{\Delta} e_{ij} \quad (3.28)$$

pa dobijamo:

$$\int_{o^0D} t_D^{ijk} \delta_o \Delta e_{ij} d^0D = \int_{o^0D} s_{ij} \delta_o \Delta n_{ij} d^0D =$$

$$= {}^{t+\Delta t}R - \int_{o^0D} t_{ij} \delta_o \Delta e_{ij} d^0D \quad (3.29)$$

Ovo je linearna jednačina sa nepoznatim inkrementima pomeranja.

Ako se umesto početne konfiguracije kao referentna usvoji tekuća konfiguracija, slično predhodnim razmatranjima dobijaju se osnovni izrazi korigovane Lagrangeove formulacije (UL).

$$\int_{t^0D} t_D^{ijk} \delta_t \Delta e_{ij} d^tD + \int_{t^0D} \sigma^{ij} \delta_t \Delta n_{ij} d^tD =$$

$$= {}^{t+}R - \int_{t^0D} \sigma_{ij} \delta_t \Delta e_{ij} d^tD \quad (3.30)$$

Linearne jednačine (3.29) i (3.30) Lagrangeove inkrementalne formulacije predstavljaju polaznu osnovu za primenu MKE u analizi nelinearnih problema.

Kao što je predhodno rečeno pri rešavanju problema geotehnike od posebnog su značaja problemi samo materijalne nelinearnosti. Dilatacije i pomeranja su male veličine tako da se uslovi ravnoteže mogu razmatrai u odnosu na nedeformisanu strukturu, kako se to radi u linearnoj teoriji elastičnosti.

Pokažimo sada kako se sa jednačina (3.29) i (3.30) može preći na linearnu inkrementalnu jednačinu kojom je obuhvaćena samo materijalna nelinearnost problema.

Inkrement tenzora deformacije postaje:

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} [\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}] \quad (3.31)$$

$$\Delta n_{ij} = 0 \quad (3.32)$$

Piola Kirchhoffa napon postaje jednak Cauchy-evom tenzoru napona i jedn. tzv. fizičkom tenzoru napona:

$$t_{ij} = t_{\sigma}^{ij} = t_{\sigma_{ij}} \quad (3.33)$$

Izrazi (3.29) i (3.30) svode se na jednu istu jednačinu, uzimajući u obzir jednačine (3.31) i (3.33) dobijamo

$$\int_D D_{ijkl} \Delta e_{kl} \delta \Delta e_{ij} dD = {}^{t+\Delta t}R - \int_D {}^t\sigma_{ij} \delta \Delta e_{ij} dD \quad (3.34)$$

Jednačina (3.34) predstavlja linearnu inkrementalnu jednačinu ravnoteže kojom je obuhvaćena samo materijalna nelinearnost problema. Iz ove jednačine može se sračunati inkrement pomeranja koji se zatim koristi za sračunavanje pomeranja, dilatacija i napona u konfiguraciji $t + \Delta t$. Obeležimo ove veličine sa indeksom (1)

$$\Delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^{(1)}; \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}^{(1)}; \quad {}^{t+\Delta t}u_i^{(1)}$$

Sada se može proveriti kolika razlika postoji između spoljašnjeg virtualnog rada i virtualnog rada sa sračunatim statičkim i kinematičkim veličinama u konfiguraciji $t + \Delta t$

$$E_r = {}^{t+\Delta t}R - \int_D {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}^{(1)} \delta \Delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^{(1)} dD \quad (3.35)^*$$

Desna strana jednačine (3.34) predstavlja virtualni rad "neuravnoteženog opterećenja" pre sračunavanja inkrementa pomeranja, dok desna strana jednačine (3.35) predstavlja isti taj rad posle sračunavanja inkrementa pomeranja odnosno u konfiguraciji $t + \Delta t$.

Da bi se virtualni rad neuravnoteženog opterećenja dalje redukovao potrebno je dalje nastaviti iterativni postupak, sve dok greška ne postane prihvatljivo mala. Na osnovu ovog jednačina (3.34) svodi se na sledeću iterativnu jednačinu:

$$\int_D D_{ijkl} \cdot \Delta e_{kl}^{(K)} \cdot \delta e_{ij}^{(K)} dD = {}^{t+\Delta t}R - \int_D \sigma_{ij}^{(K-1)} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^{(K-1)} dD \quad (K=1,2,3,\dots,n) \quad (3.36)$$

Korekcija pomeranja vrši se na sledeći način:

$${}^{t+\Delta t}u_i^{(K)} = {}^{t+\Delta t}u_i^{(K-1)} + \Delta u_i^{(K)} \quad (3.37)$$

Za dobijanje sistema odgovarajućih algebarskih jednačina primenjuje se uobičajena procedura MKE. Obično se koristi izoparameterska formulacija, prema kojoj se koordinate i pomeranja odnosno inkrementi pomeranja tačaka unutar elementa, prikazuju pomoću istih interpolacionih funkcija.

$$x_i = \sum_{k=1}^N H_k x_i^k$$

$$U_i = \sum_{k=1}^N H_k U_i^k \quad (3.38a-c)$$

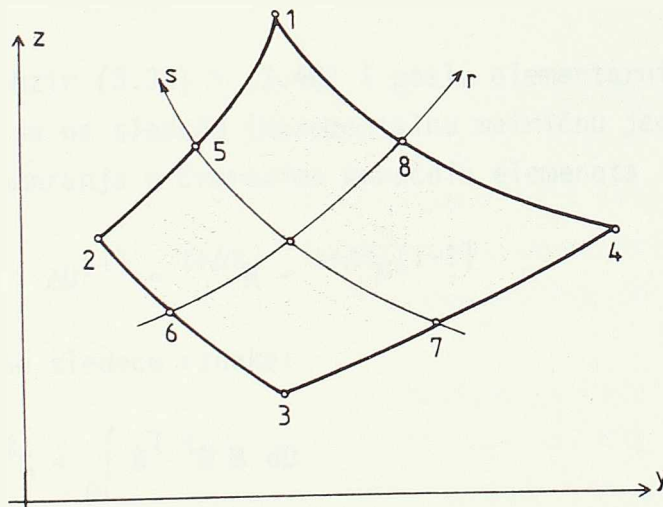
$$\Delta U_i = \sum_{k=1}^N H_k \Delta U_i^k$$

H_k su interpolacione funkcije za čvor k u sistemu prirodnih koordinata, dok je N ukupan broj čvorova u elementu. U MKE najčešće se primenjuje matična notacija pa ove jednačine postaju:

$${}^tU = H {}^tU_k \quad (3.39a,b)$$

$$\Delta U = H \Delta U_k$$

Za potrebe ovog rada korišćen je izoparametarski dvodimenzionalni element sa promenljivim brojem čvornih tačaka od 4 - 8.



Sl. 3

gde su interpolacione funkcije (H_i) prikazane u sledećoj tabeli

		K=5	K=6	K=7	K=8
H_1	$\frac{1}{4} (1+r)(1+S)$	$-\frac{1}{2} H_5$			$-\frac{1}{2} H_8$
H_2	$\frac{1}{4} (1-r)(1+S)$	$-\frac{1}{2} H_5$	$-\frac{1}{2} H_6$		
H_3	$\frac{1}{4} (1-r)(1-S)$		$-\frac{1}{2} H_6$	$-\frac{1}{2} H_7$	
H_4	$\frac{1}{4} (1+r)(1-S)$			$-\frac{1}{2} H_7$	$-\frac{1}{2} H_8$
H_5	$\frac{1}{2} (1-r^2)(1+S)$				
H_6	$\frac{1}{2} (1-r)(1-s^2)$				
H_7	$\frac{1}{2} (1-r^2)(1-S)$				
H_8	$\frac{1}{2} (1+r)(1-S^2)$				

Koristeći izraze (3.38) mogu se dobiti izrazi i za dilatacije

$$\Delta \epsilon = \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{U}_k \quad (3.40)$$

Uzimajući u obzir (3.39) i (3.40) i posle elementarnih sredjivanja jednačina (3.36) svodi se na sledeću inkrementalnu matricnu jednačinu, sa nepoznatim inkrementima pomeranja u čvorovima konačnih elemenata

$${}^t \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{U}(i) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(i-1) \quad (3.41)$$

gde su uvedene sledeće oznake:

$$\begin{aligned} - {}^t \mathbf{K} &= \int_D \mathbf{B}^T {}^t \mathbf{D} \mathbf{B} \, dD \\ - {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} &= \int_D \mathbf{0}_D \times \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} \, dD + \int_L \mathbf{H}^{LT} {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} \, dL \\ - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(i) &= \int_D \mathbf{B}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{t}_\sigma(i) \, dD \end{aligned} \quad (3.42a, b, c)$$

i predstavljaju matricu krutosti sistema u konfiguraciji (t) , vektor spoljnjih čvornih sila u konfiguraciji $t+\Delta t$ i vektor čvornih sila koji odgovaraju unutrašnjim naponima u konfiguraciji $t+\Delta t$ posle i -te iteracije respektivno. Treba napomenuti da su elementi matrica u izrazima (42a-c) funkcije prirodnih

koordinata elemenata i da se odgovarajući integrali sračunavaju najčešće numerički, koristeći se transformacijom Descartes-ovih koordinata u prirodne koordinate. Tako na primer matrica krutosti sračunava se na sledeći način:

$${}^t\mathbf{K} = \int_D \mathbf{B}^T {}^t\mathbf{D} \mathbf{B} dD = \int_D \mathbf{B}^T {}^t\mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} dr ds = \int_D \phi(r,s) dr ds \quad (3.43)$$

gde je \mathbf{J} matrica transformacije ili Jacobian. Za sračunavanje integrala u izrazu (3.43) najčešće se koristi Gaussova numerička integracija.

$${}^t\mathbf{K} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} {}^t\phi_{ij} \quad (3.44)$$

gde su ϕ_{ij} vrednosti funkcije u tačkama r_i, S_j a α_{ij} su odgovarajuće konstante (težine) koje se odabiraju tako da se dobije maksimalna tačnost numeričke integracije. Na isti način sračunavaju se i svi ostali integrali u izrazima (3.42).

3.2. KONTAKTNI PROBLEMI

3.2.1 Uvod

Pri rešavanju različitih inženjerskih problema često se susrećemo sa problemom kontakta izmedju dva ili više tela. Ovakvi problemi se veoma često javljaju i pri rešavanju različitih geotehničkih problema. Na primer problemi kontakta konstrukcije i tla ili u mehanici stena problematika simuliranja pukotina ili stenskih masiva sa proslojcima mekih materijala najčešće po ravnima folijacije itd.

Kako se većina kontaktnih problema ne može rešiti analitičkim metodama, i za njihovo rešavanje se najčešće koristi MKE. Mada su neki kompleksni kontakti problemi već rešeni, potrebno je još puno napora i truda da bi se dobio realan, generalan i efikasan algoritam za praktičnu analizu ovakvih problema.

Analiza kontaktnih problema je veoma komplikovana i to najviše zbog činjenice da granični uslovi nisu poznati unapred. U ovome radu daće se kratak prikaz opštije formulacije kontaktnih problema a zatim će se detaljnije opisati neki postupci koji se najčešće koriste u analizi kontakta kod geotehničkih problema. U radu će biti razmatrani dvodimenzionalni problemi, mada se bez većih teškoća oni mogu proširiti i na trodimenzijalne probleme.

3.2.2. Formulacija kontaknog problema

Posmatrajmo dva tela koja se pod dejstvom spoljašnjih sila deformišu. Neka je izvršena diskretizacija ovih tela na konačne elemente. U jednom trenutku dolazi do spoja ovih tela u određenom broju čvorova. Kao rezultat, na kontaktu ovih tela generišu se kontaktne sile koje su međusobno jednake a i su suprotnih smerova. Pri ovome normalno opterećenje može biti samo pritisujuće dok tangencijalno opterećenje mora zadovoljiti zakon smičuće otpornosti. U opštem slučaju mogu postojati tri vida kontakta: priljubljeni kontakt, kontakt u kome dolazi do klizanja i rastavljanje kontakata. Kod priljubljenog kontakta ne dolazi do relativnih pomeranja između tačaka kontakta. Ako su smičuće sile dostigle smičuću otpornost dolazi do klizanja duž kontakta. Ovo klizanje prestaje u ovom trenutku kada smičuće sile postanu manje od otpornosti na smicanje. Ako se u analizi koristi kruto plastični model tada u tangencijalnoj ravni ne postoje pomeranja sve dok nije postignuta smičuća otpornost.

Pošto su kontaktni problemi po svojoj prirodi nelinearni za njihovu formulaciju kao i u predhodnom odeljku koristi se inkrementalna procedura. Ova nelinearnost može biti i geometrijska i materijalna.

Za dobijanje jednačina kojima se opisuje određeni kontaktni problem najčešće se koristi Lagrange-ovi metod neodređenih multiplikatora. Ovi multiplikatori se usvajaju tako da oni odgovaraju opterećenju na kontaktu.

Da bi smo dobili jednačine MKE kojime se opisuju kontaktni problemi koriste se modifikovani varijacioni princip:

$$\Pi_1 = \Pi - \sum_k W_k \quad (3.45)$$

gde je: Π uobičajena inkrementalna potencijalna energija sistema bez uračunavanja kontaktnih sila

W_k je inkrementalni potencijal sila na kontaktima.

Veličina $\sum_k W_k$ dobija se sumiranjem po svim čvorovima koji su u kontaktu. S obzirom da se broj čvorova koji su u kontaktu menja, menjaće se i veličina

$\sum_k W_k$

U zavisnosti od vrste kontakta dobijaju se različiti izrazi za veličinu W_k (K.J. Bathe & A. Chaudhary 1983).

Predpostavimo da je inkrementalno rešenje poznato u vremenu t i da je $(i-1)$ iteracija učinjena da bi se našlo rešenje u vremenu $t+\Delta t$. Iz uslova stacionarne vrednosti funkcijonala Π_1

$$\delta\Pi_1 = 0 \quad (3.46)$$

korišćenjem uobičajene procedure u MKE dobija se sledeći sistem inkrementalnih jednačina:

$$\begin{bmatrix} t+\Delta t_{\mathbf{K}}(i-1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t+\Delta t_{\mathbf{K}_c}(i-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(i) \\ \Delta \lambda(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+\Delta t_{\mathbf{R}}(i) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t+\Delta t_{\mathbf{F}}(i) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t+\Delta t_{\mathbf{R}_c}(i-1) \\ t+\Delta t_{\Delta_c}(i-1) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

gde su uvedene sledeće oznake:

$\Delta \mathbf{u}(i)$ - je vektor inkrementalnih pomeranja u iteraciji (i)

$\lambda(i)$ - je vektor inkrementa kontaktnih sila u iteraciji (i)

$t+\Delta t_{\mathbf{K}}(i-1)$ - je uobičajena matrica krutosti sistema uključujući i materijalnu i geometrijsku nelinearnost.

$t+\Delta t_{\mathbf{K}_c}(i-1)$ - je kontaktna matrica krutosti

$t+\Delta t_{\mathbf{F}}(i-1)$ - je vektor čvornih sila koje su ekvivalentne naponima u konačnim elementima posle iteracije (i-1)

$t+\Delta t_{\mathbf{R}}$ - je vektor spoljašnjih sila u trenutku $t+\Delta t$

$t+\Delta t_{\mathbf{R}_c}(i-1)$ - je vektor korigovanih kontaktnih sila posle iteracije (i-1)

$t+\Delta t_{\Delta_c}(i-1)$ - je vektor utiskivanja posle iteracije (i-1).

Osnovne teškoće koje se javljaju pri rešavanju sistema jednačina (3.47) leže u činjenici da ovaj sistem jednačina nije simetričan i da se broj jednačina menja zavisno od broja čvorova koji su u kontaktu. Značajna pojednostavljenja mogu se postići ako se umesto kontakta u čvorovima razmatraju kontakti duž stranica kontaktnih elemenata.

Izraz za rad sila na kontaktu tada postaje:

$$\bar{W}_c = \int_{(S_c)_M} U_M f_M dS + \int_{(S_c)_F} U_F f_F dS \quad (3.48)$$

gde S_c označava površinu kontakta, a indeksi (M) i (F) se koriste da bi se razdvojile strane kontakta. Korišćenjem funkcije oblika veličine pomeranja u i sila f duž kontakta mogu se interpolovati na sledeći način:

$$\{U\} = [H] \{U_c\} \quad (3.49a, b)$$

$$\{f\} = [H] \{f_c\}$$

Unošenjem jednačina (3.49) u jednačinu (3.48) dobija se:

$$\bar{W}_c = \{U_M\}^T \int_{(S_c)_M} [H]^T [H] dS \cdot \{f_M\} + \{U_F\}^T \int_{(S_c)_F} [H]^T [H] dS \cdot \{f_F\} \quad (3.50)$$

Ukoliko se čvorovi na kontaktnoj površi poklapaju tada $\{f_M\}$ i $\{f_F\}$ imaju iste veličine a suprotne znake. Medjutim, češći je slučaj da se čvorovi susednih kontaktnih površina ne poklapaju, jer mreže mogu biti različite ili različiti tipovi elemenata itd. U ovom slučaju može se uspostaviti veza između vektora $\{f_M\}$ i $\{f_F\}$ korišćenjem matrice transformacije $[T]$ (Y.W. Kwon & J.E. Akim 1986).

Kao i u predhodnom slučaju jednačine ravnoteže kontaktnog elementa dobijaju se iz uslova stacionarnosti veličine (Π_1) .

Pri rešavanju kontaktnih problema elastoplastičnih sredina mora se koristiti inkrementalni metod. Za svaki inkrement opterećenja rade se dve vrste iteracija. Jedna vrsta iteracija radi se za elasto-plastični model a druga za kontaktnu granicu. Pri ovome je kao osnovna nepoznata kontaktno opterećenje.

Ovo opterećenje se ne može jednostavno sabrati sa totalnim kontaktnim opterećenjima jer promena u kontaktnim uslovima rezultira u promeni kontaktnog opterećenja.

3.2.3. Dvočvorni kontaktni element

Kao što se iz predhodnog može videti analiza kontaktnih problema je veoma složena i kao takva nepodesna je za rešavanje inženjerskih problema.

U ovom delu daće se prikaz jednog uprošćenog kontaktnog elementa koji se često koristi u analizi geomehaničkih problema za simuliranje kontakta različitih sredina.

Ovaj kontakt može biti kontakt konstrukcije i tla ili kontakt različitih geoloških sredina sa ili bez ispune između njih.

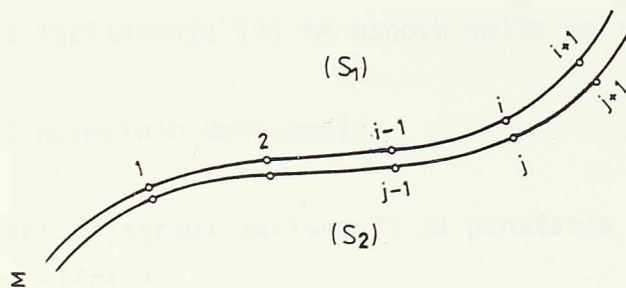
Najčešće se u ovakvim analizama zanemaruje geometrijska nelinearnost problema i zadržava se samo materijalna nelinearnost. Kao i kod ostalih nelinearnih problema i ovde se primenjuje inkrementalna analiza. Ovakvom analizom mogu se uspešno obuhvatiti složeni procesi kao što su opterećenje rasterećenje i ponovno opterećenje. Da bi se uspešno obuhvatilo ponašanje kontakta kao što

su: lom usled zatezanja, opadanje napona smicanja sa porastom pomeranja, efekat sprezanja smičućih i normalnih uticaja, potrebno je u svakom inkrementu vršiti odredjene popravke iteracije.

Goodman (1968) je prvi predložio dvočvorni element za simuliranje ponašanja kontakta. Slične kontaktne elemente su predložili i Balaam, and Poulos (1976), Herman (1979). Ee Xiunun (1979),

Posmatrajmo ponašanje diskontinuiteta, kontakta Σ između dve srednje S_1 i S_2 čija je diskretizacija izvršena MKE. Duž kontakta ovih dvaju tela, može se javiti klizanje sa trenjem, tela se mogu odvijati ili ponovo doći u međusobni kontakt.

Model se sastoji od serije dvočvornih kontaktnih elemenata koji spajaju jednu tačku sredine S_1 sa odgovarajućom tačkom sredine S_2 (sl. 4).



Sl. 4

Ovakav model je kompatibilan sa svim elementima koji se koriste za modeliranje sredina S_1 i S_2 .

Ovakav model u ovome radu mi koristimo za modeliranje kontakta konstrukcije i tla, mada se isti model može uspešno prilagoditi i za modeliranje kontakta sa ispunom,

Između inkrementa čvornih sila kontaktnog elementa i inkrementa pomeranja čvorova mogu se uspostaviti sledeće zavisnosti:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{x1} \\ \Delta F_{xj} \\ \Delta F_{y1} \\ \Delta F_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sn} \\ K_{ns} & K_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta U_j \\ \Delta U_j \\ \Delta V_1 \\ \Delta V_j \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

gde su K_{ss} , K_{sn} , K_{nn} podmatrice, matrice krutosti kontaktnog elementa. Podmatricama K_{nn} i K_{ss} simuliraju se dve opruge, normalna i tangencijalna, dok se

podmatricom K_{Sn} simulira njihovo sprezanje. Korišćenjem ovakvog elementa ne dolazi do promene u inkrementalnim uslovima jednačinama u MKE, tako da se one mogu napisati u sledećoj formi:

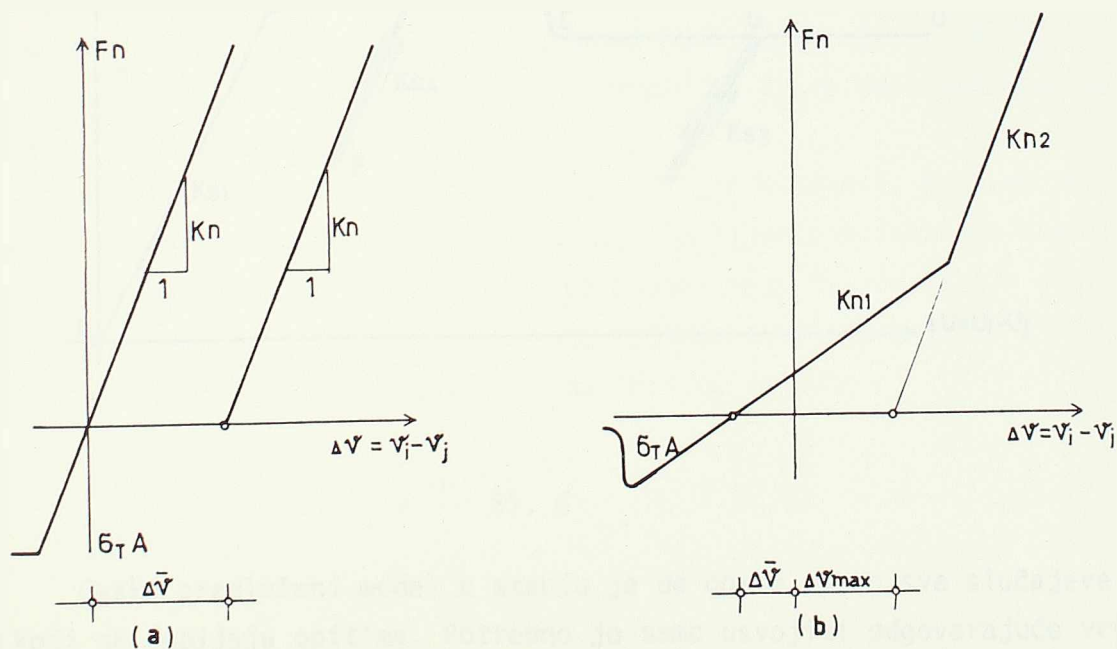
$${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)} \cdot \Delta U^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (3.52)$$

gde su ${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}$ i ${}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}$ matrica krutosti i vektor ekvivalentnih čvornih sila kao i u predhodnom, s tim što su ovde pridodati i članovi koji se javljaju od kontaktnih elemenata. Na ovaj način definisan kontaktni element ne utiče na promenu broja nepoznatih u sistemu jednačina (3.52).

Da bi predloženi model mogao da se primeni potrebno je uspostaviti zavisnosti izmedju smičućih napona i relativnog tangencijalnog pomeranja tačka kontakta kao i odgovarajuće zavisnosti za normalne napone i deformacije. Ovakve zavisnosti u svakom konkretnom slučaju mogu se dobiti na osnovu rezultata laboratorijskih ispitivanja ili na osnovu opita na terenu.

a) Model normalnih deformacija

Uobičajeni dijagrami zavisnosti za ponašanje kontakta u pravcu normale prikazani su na slici 5.



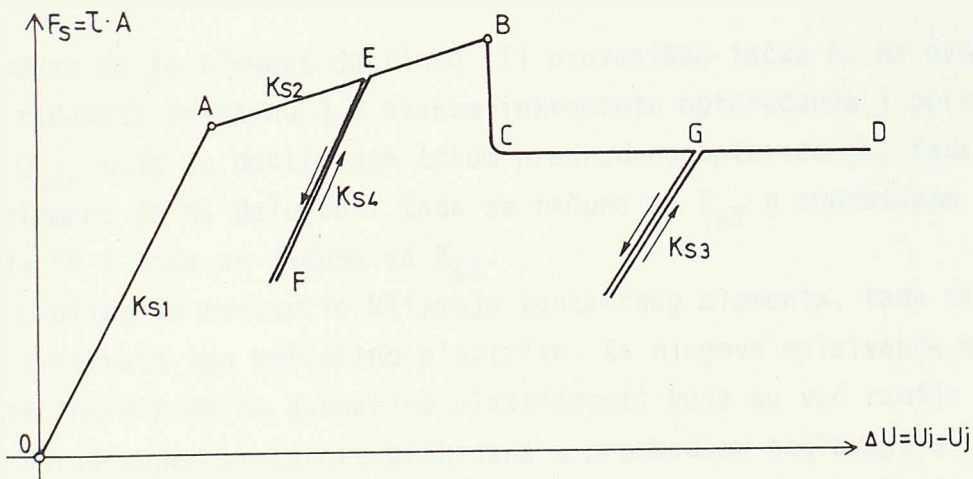
S1. 5

Slika 5.a se odnosi na ponašanje kontakta izmedju konstrukcije i tla

u normalnom pravcu. Naponom σ_T definisana je zatežuća otpornost kontaktnog elementa. Ukoliko kontakt ne može primiti napone zatezanja $\sigma_T = 0$. Kada je $\sigma \leq \sigma_T$ smatra se da je element pretrpeo lom usled zatezanja i normalni napon u tom slučaju opada na nulu. Veličina Δv koristi se kod elemenata sa inicijalnim otvorom, a na sl. 5.b tj. kod elemenata sa ispunom veličina Δv pokazuje da li je se otvoreni element ponovo zatvorio. Sve dok se ispuna deformiše računa se sa manjom krutošću K_{n1} . Kada $\Delta v = \Delta v_{max}$ element ulazi u granično stanje pritiska i nadalje se deformiše sa znatno većom krutošću. Ako ne postoji mogućnost deformisanja kontakta u pravcu normale za K_n se može usvojiti proizvoljno veliki broj i na taj način se dobija da je relativno pomeranje čvorova kontakta u pravcu normale jednako nuli.

b) Smičući model

Za opisivanje smičućeg ponašanja kontakta uspostavljaju se zavisnosti izmedju napona smicanja i relativnog pomeranja čvorova kontakta u pravcu tangente. Jedna generalna zavisnost izmedju τ i ΔU prikazano je na slici 6.



Sl. 6

Ovako predloženi model u stanju je da opiše skoro sve slučajeve smicanja koji se dobijaju opitima. Potrebno je samo usvojiti odgovarajuće vrednosti parametra čime se definišu položaji tačaka A, B, C i D.

Za različite vrednosti napona σ_n dobija se familija krivih koje su po obliku slične krivoj prikazanoj na sl. 6. Zavisnost izmedju smičuće krutosti K_s i normalnog napona σ_n može se opisati sledećim izrazima

$$K_s = K_{s0} + \alpha \left(\frac{\sigma_n}{p_a} \right)^m \quad (3.53)$$

parametri K_{s0} , α i m mogu se odrediti na osnovu familije krivih $(\tau, \Delta u)$ koje se dobijaju na osnovu eksperimenata pri različitim vrednostima napona σ_n .

Korišćenjem predloženog smičućeg modela može se lako napraviti razlika izmedju vršene i rezidualne otpornosti.

Tako na primer ako je ispunjen sledeću uslov:

$$f = |\tau| - \sigma \operatorname{tg} \phi_p - C_p \geq 0 \quad (3.54)$$

to znači da je kontaktni element smican do sloma tako da nadalje treba raditi sa rezidualnim otpornostima. U slučaju opterećenja rasterećenja i ponovnog opterećenja vršna čvrstoća se ne može povratiti. Zato se koristi rezidualna otpornost kao kriterijumi čvrstoće i pri tome se za smičuću krutost koristi K_{s3} . Pre i posle tačke A na krivoj $(\tau, \Delta u)$ ponašanje smičućeg elementa je različito. Ako je ispunjen uslov:

$$Q = |\tau| - \sigma \operatorname{tg} \phi_A - C_A \geq 0 \quad (3.55)$$

to podrazumeva da je element dostigao ili prevazišao tačku A. Na ovome delu potrebno je računati veličinu Q u svakom inkrementu opterećenja i porediti je sa veličinom Q_{\max} koja je dostignuta tokom predhodnog opterećenja. Kada je $Q > Q_{\max}$ element je na delu EB i tada se računa sa K_{s2} u suprotnom element je u stanju EF i tada se računa sa K_{s4} .

Ukoliko je nastupilo klizanje kontaktnog elementa, tada se ovaj problem može tretirati kao perfektno plastičan. Za njegovo opisivanje mogu se iskoristiti inkrementalne jednačine plastičnosti koje su već ranije izvedene.

Korišćenjem procedure prikazane u predhodnom poglavlju u slučaju ne asocijativne plastičnosti elastoplastična matrica postaje:

$$[C^{EP}] = \frac{1}{H} \begin{bmatrix} K_s H - K_s^2 \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial G}{\partial \tau} & -K_n K_s \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial G}{\partial \tau} \\ -K_s K_n \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial G}{\partial \sigma} & K_n H - K_n^2 \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial G}{\partial \sigma} \end{bmatrix}$$

$$\text{gde je } H = K_s \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial G}{\partial \tau} + K_n \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (3.57)$$

Elastična matrica $[C^E]$ je usvojena u obliku

$$[C^E] = \begin{bmatrix} K_s & \\ & K_n \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Elementi matrice $[C^{EP}]$, K_{sn} i K_{ns} predstavljaju sprezanje izmedju smičućeg i normalnog ponašanja i pomoću njih se u izvesnom smislu obuhvata efekat dilancije. Da li će se koristiti matrica $[C^E]$ ili $[C^{EP}]$ zavisi od toga da li smo u stanju opterećenja ili rasterećenja.

Uzrok se nalazi u stanju opterećenja ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$|\tau| - \sigma \operatorname{tg} \phi_r - C_r \geq 0 \quad (3.59)$$

$$dW = K_{s3} \frac{\partial F}{\partial \tau} du + K_n \frac{\partial F}{\partial \sigma} dv \geq 0$$

gde druga jednačina predstavlja uslov da je rad pri plastičnom deformisanju ne negativan. U slučaju rasterećenja koristi se matrica $[C^E]$ umesto $[C^{EP}]$.

Ako se usvoji Coulomb-ov uslov smicanja elementi elastoplastične matrice postaju:

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{K_{s3} \cdot \operatorname{tg}^2 \phi_r}{H} \\ K_n &= \frac{K_{s3} \cdot K_n}{H} \\ K_{sn} = K_{ns} &= \frac{\pm K_{s3} \cdot K_n \cdot \operatorname{tg} \phi_r}{H} \\ H &= K_{s3} + K_n \operatorname{tg}^2 \phi_r \end{aligned} \quad (3.60)$$

Na osnovu napred izloženog može se zaključiti da se na ovaj način dvočvornim kontaktnim elementima može uspešno simulirati kontakt izmedju konstrukcije i tla kao i izmedju dveju ili više različitih geoloških sredina. Ovakav model je jednostavan za primenu i ne zahteva bitne promene u programima koji se koriste za rešavanje problema MKE. Potrebno je samo u biblioteci elementa dodati novi kontaktni element.

3.2.4. Tanak kontaktni element

Simuliranje ponašanja kontakta dveju različitih sredina uspešno se može ostvariti korišćenjem dvočvornih kontaktnih elemenata kako je to u predhodnom tekstu objašnjeno. Medjutim, ovako definisani model sadrži u sebi i izvesne nedostatke. Jedan od nedostataka modela je taj što se njime opisuje stanje samo u čvorovima kontakta, dok se između čvorova usvaja da je stanje nepromenjeno u svim tačkama koje pripadaju tom čvoru. I pored svoje jednostavnosti ovi elementi ipak zahtevaju da se njihove matrice krutosti računaju na drugačiji način od sračunavanja matrica krutosti elementa kojima je izvršena diskretizacija sredina čiji se kontakt razmatra. Zbog toga se često za opisivanje ponašanja kontakta predlaže upotreba tankih KE stin što se njihove karakteristike usvajaju tako da što vernije opisuju ponašanje kontakta. Tako je Zienkiewicz (1970) predložio izoparametarski kontaktni elementi koji se u suštini ne razlikuju od KE kojima se diskretizuju tela.

Ghaboussi, Wilson & Insenberg (1973) su predložili izoparametarski KE kod koga se kao osnovne nepoznate usvajaju relativna pomeranja čvorova na kontaktu sredina, čiji se kontakt razmatra.

Pored navedenim u literaturi se može naći još veliki broj sličnih modela.

Za opisivanje kontakta konstrukcije i tla najčešće je od interesa smičuće ponašanje. Ovo ponašanje se može opisati nelinearnim elastičnim ili elasto-plastičnim modelima. Za ponašanje upravno na kontakt obično se usvajaju velike krutosti čime se praktično uslovljava da pomeranja čvorova u tom pravcu budu jednaka.

Pored navedenih elemenata, za opisivanje kontakta uspešno se može iskoristiti i tanak element tela. Ovim elementom se obuhvata tanka zona na kontaktu dveju sredina (tela). Ideja da se usvoji tanak element izgleda sasvim logično, jer se na kontaktu dveju sredina najčešće formira tanka zona čije se karakteristike bitno razlikuju od karakteristika sredina čiji se kontakt razmatra (Desai & Zaman 1984).

U osnovi matrica krutosti ovakvih elemenata sračunava se na isti način kao i kod ostalih KE

$$t_K = \int_V B^T [C^{EP}] B dV \quad (3.61)$$

Zbog nelinearnosti problema i ovde se postavljaju inkrementalne jednačine ravnoteže

$$t_{K \Delta U}^{(i)} = t + \Delta t_R - t + \Delta t_F^{(i-1)} \quad (3.62)$$

Za slučaj ravnog stanja deformacije elastična matrica krutosti materijala može se napisati u sledećem obliku

$$[C^E] = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & & \\ C_2 & C_1 & & \\ & & G_1 & \\ & & & \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

gde su uvedene sledeće oznake:

$$C_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.64)$$

$$C_2 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

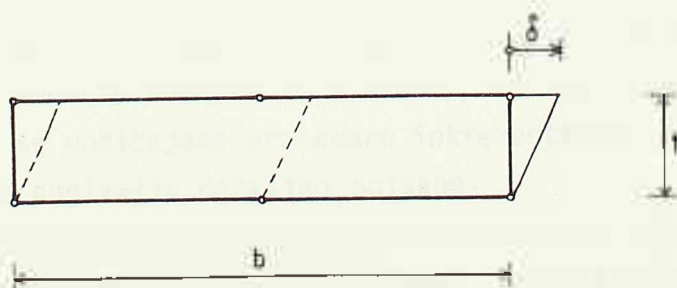
Pri ovome se predpostavlja da je smičuće ponašanje nezavisno od normalnog ponašanja, što se može shvatiti kao anizotropno ponašanje.

Za nelinearno elastično ponašanje veličine E , G i ν definišu se kao promenljive a njihove vrednosti se odredjuju na osnovu eksperimenata najčešće trijaksijalnog opita i opita direktnog smicanja. Ako se usvoji hiperbolička zavisnost, tada se tangenti modul smicanja može izraziti u sledećoj formi

$$G_t = K \gamma_w \left(\frac{\sigma_n}{p_a} \right)^n \left[1 - \frac{R_f \tau}{C_a + \sigma_n \operatorname{tg} \phi_a} \right]^2 \quad (3.65)$$

gde su: K , n i R_f parametri materijala.

Na slici 7 prikazan je tanak kontaktni element debljine t koji je usled smicanja poprimio relativno pomeranje čvorova δ .

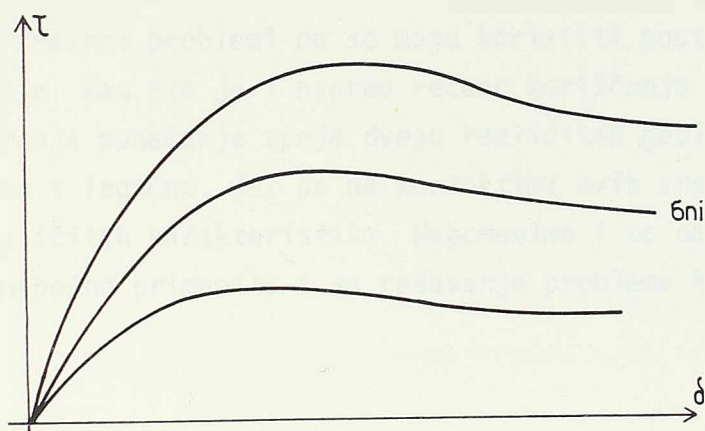


Sli. 7

Na osnovu rezultata direktnog smicanja kao i na osnovu sl. 7 može se odrediti tangenta vrednost modula smicanja.

$$G_t(\sigma_m, \tau, \delta) = \frac{\partial [\tau(\sigma_n, \delta)]}{\partial \delta} \cdot t|_{\sigma_n} \quad (3.66)$$

Tipični rezultati opita direktnog smicanja prikazani su na sl. 8.



Sl. 8

Krive prikazane na sl. 8 uspešno se mogu opisati polinomom sledećeg oblika:

$$\tau = \alpha_1 \delta + \alpha_2 \sigma_n \cdot \delta + \alpha_3 \delta^2 + \alpha_4 \sigma_n^2 \delta^2 \quad (3.67)$$

gde se konstante α_i određuju metodama matematičke statistike tako da odstupanja izmerenih i aproksimiranih vrednosti budu minimalna, na primer metoda najmanjih kvadrata. Kada su određene vrednosti ovih koeficijenata, tangente vrednosti modula smicanja dobijaju se na jednostavan način diferenciranjem, kako je to naglašeno u izrazu (3.66).

Pored nelinearnih elastičnih modela za formiranje matrice krutosti tankih kontaktnih elemenata koriste se i elastoplastični modeli. Za formiranje ovih modela koriste se uobičajene procedure inkrementalne teorije plastičnosti koja je u predhodnom poglavlju detaljno opisane.

Za rešavanje ovih fizički nelinearnih problema takodje se moraju koristiti inkrementalni postupci sa poboljšanjima u iteracijama. O ovome će biti reči u narednom poglavlju kada se bude govorilo o implementaciji predloženih modela.

Da bi se korišćenjem tankih kontaktnih elemenata dobili zadovoljavajući rezultati, veoma je važno usvojiti pravilno debljinu tih elemenata. Detaljna ispitivanja koja su sprovedeli Desai & Zaman pokazala su da se zadovoljavajući rezultati dobijaju ako se odnos t/b usvoji u granicama 0.01 - 0.1.

Na kraju može se zaključiti da se tanki kontaktni elementi mogu uspešno primeniti za simuliranje kontaktne konstrukcije i tla i to podjednako kod dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih problema.

Njima se uspešno mogu obuhvatiti svi karakteristični oblici smičućih deformacija. Ovi elementi se ne razlikuju od ostalih elemenata kojima se razmatraju fizički nelinearni problemi pa se mogu koristiti postojeći programi bez ikakvih korekcija. Kao što je i napred rečeno korišćenje tankog kontaktnog elementa za simuliranja ponašanja spoja dveju različitih geoloških sredina i fizički je opravdano i logično, jer se na kontaktima ovih sredina obično formira tanak sloj različitih karakteristika. Napomenimo i to da se ovako definisani element može uspešno primeniti i za rešavanje problema kontakta u mehanici stena.

4. REŠAVANJE MATERIJALNO NELINEARNIH PROBLEMA MKE

4.1. METODE ZA REŠAVANJE NELINEARNIH JEDNAČINA MKE

4.1.1. Uvod

Kao što se iz predhodnog izlaganja može zaključiti pri formiranju jednačina MKE za rešavanje materijalno nelinearnih problema, matrica krutosti elemenata zavisi od trenutnog naponsko deformacijskog stanja. Prema tome jednačine MKE postaju nelinearne. Za rešavanje ovih jednačina razvijen je veliki broj različitih metoda ili postupaka i one se mogu svrstati u tri osnovne grupe: inkrementalne metode, iterativne metode i mešovite metode. Koja će se od ovih metoda primeniti zavisi od prirode nelinearnog problema koji se razmatra. Medjutim, kao zajednička karakteristika ovih metoda je ta da se rešenje nelinearnog problema svodi na odredjivanje odgovarajućeg niza rešenja linearnih problema.

4.1.2. Inkrementalne metode

Osnovna ideja inkrementalne metode sastoji se u podeli ukupnog opterećenja na niz manjih delova inkremenata. U okviru svakog inkrementa, vrši se linearizacija problema. Na taj način, rešenje posmatranog nelinearnog problema dobija se kao zbir rešenja niza linearnih problema.

Pretpostavimo da je rešenje problema u konfiguraciji t poznato a da se traži rešenje u narednoj konfiguraciji $t+\Delta t$.

U konfiguraciji t obeležimo veličine: pomeranja, čvornih sila koje se ekvivalentne naponima i spoljašnje sile sa tU , tF i ${}^t\lambda R$ respektivno.

Vektor neuravnoteženog opterećenja u konfiguraciji t je jednak nuli pa se može pisati

$${}^t\psi = \psi({}^tU, {}^t\lambda) = {}^t\lambda R - {}^tF = 0 \quad (4.1)$$

Da bi smo našli neuravnotežno opterećenje u konfiguraciji $t+\Delta t$ možemo iskoristiti Taylorov red na sledeći način:

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}\psi &= \psi({}^tU+\Delta U, {}^t\lambda + \Delta\lambda) = \\
&= \psi({}^tU, {}^t\lambda) + \frac{\partial\psi}{\partial U} \Big|_t \Delta U + \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \Big|_t \Delta\lambda + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial U_i \partial U_j} \Big|_t \Delta U_i \Delta U_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial U_i \partial\lambda} \Big|_t \Delta U_i \Delta\lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} \Delta\lambda^2 + \dots
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Ako pretpostavimo da je uslov ravnoteže zadovoljen u konfiguraciji $t+\Delta t$ i ako se zanemare izvodi višeg reda u izrazu (4.2) dobija se:

$$\frac{\partial\psi}{\partial U} \Big|_t \Delta U + \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \Delta\lambda = 0 \tag{4.3}$$

Izvodi u izrazu (4.3) imaju sledeće značenje

$$\frac{\partial\psi}{\partial U} \Big|_t = - \frac{\partial {}^tF}{\partial U} = - {}^tK \tag{4.4}$$

što predstavlja tangentnu matricu krutosti u konfiguraciji t , dok izvod $\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$ s obzirom na (4.1) postaje

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda} ({}^t\lambda R - {}^tF) = R \tag{4.5}$$

Unošenjem izraza (4.4) i (4.5) u jednačinu (4.3) dobija se

$${}^tK \Delta U = ({}^{t+\Delta t}\lambda - {}^t\lambda) R \tag{4.6}$$

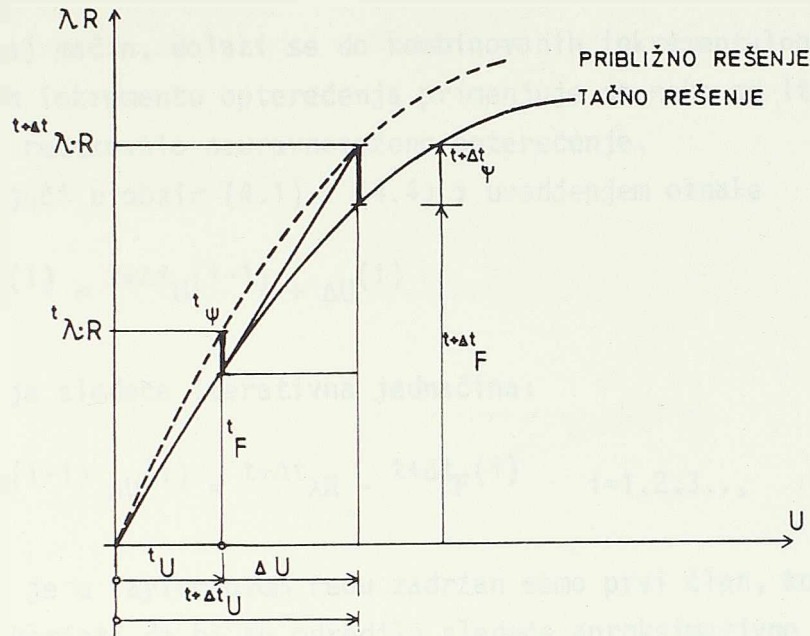
Zbog usvojene linearizacije, odnosno zanemarivanja izvoda višeg reda, dobija se rešenje koje je približno. Korišćenjem jednačine (4.6) dolazi do akumulirana greške. Ukoliko se usvoji dovoljno mala veličina inkrementa, rešenje koje se dobija na ovaj način, u opštem slučaju, konvergira na tačnom rešenju.

Kolika je greška može se zaključiti na osnovu kontrole uslova ravnoteže u svakom inkrementu. Ovo omogućava da se izvrše korekcije u inkrementalnoj metodi čime se povećava tačnost rešenja. Ovo poboljšanje može se postići ako se desnoj strani jednačine (4.6) doda neuravnoteženo opterećenje ${}^t\psi$, na taj način konačno se dobija:

$${}^tK \Delta U = ({}^{t+\Delta t}\lambda - {}^t\lambda)R + {}^t\lambda R - {}^tF = \tag{4.7}$$

$${}^tK \Delta U = {}^{t+\Delta t}\lambda R - {}^tF$$

Ovaj postupak je šematski prikazan na sl. 1.



Sl. 1

4.1.3. Iterativne metode

Često se za rešavanje nelinearnih jednačina pored inkrementalnih metoda koriste i iterativne metode. Ove metode se najčešće primenjuju u slučajevima kada nije potrebno pratiti proces deformisanja tela, već se za određeno opterećenje traži njegovo ravnotežno stanje. Najjednostavnija iterativna metoda je metoda direktne iteracije (metoda sukcesivnih aproksimacija). Zavisno od prirode problema može se desiti da postupak iteracija nije konvergentan.

Najčešće prikazivani iterativni postupak je Newton-Raphson-ov postupak. Vektor neuravnoteženog opterećenja (rezidualnih sila) $\psi(u)$ može se razviti u Taylor-ov red u okolini tačke ${}^t U$ na sledeći način:

$$\psi({}^{t+\Delta t}U) = \psi({}^tU) + \left. \frac{\partial \psi}{\partial U} \right|_t \Delta U + \dots \quad (4.8)$$

pri čemu su zanemareni svi članovi koji sadrže izvode višeg reda. Postavljajući uslov da rešenje ${}^{t+\Delta t}U$ ispunjava uslov ravnoteže iz (4.8) se dobija

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial U} \right|_t \Delta U + \psi({}^tU) = 0 \quad (4.9)$$

Ovim postupkom može se odrediti rešenje nelinearnog problema za ukupno opterećenje, međutim ova metoda se češće kombinuje sa inkrementalnim meto-

dama.

Na ovaj način, dolazi se do kombinovanih inkrementalno-iterativnih metoda. U svakom inkrementu opterećenja primenjuje se neka od iterativnih metoda kako bi se redukovalo neuravnoteženo opterećenje.

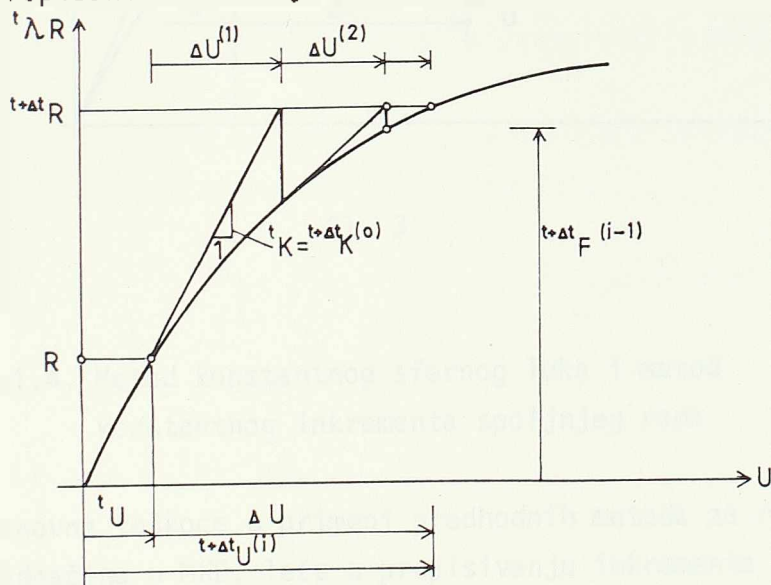
Uzimajući u obzir (4.1) i (4.4) i uvođenjem oznake

$$t+\Delta t_U(i) = t+\Delta t_U(i-1) + \Delta U(i) \quad (4.10)$$

konačno se dobija sledeća iterativna jednačina:

$$t+\Delta t_{K(i-1)} \Delta U(i) = t+\Delta t_{\lambda R} - t+\Delta t_F(i) \quad i=1,2,3\dots \quad (4.11)$$

Pošto je u Taylor-ovom redu zadržan samo prvi član, korekcija priraštaja $\Delta U^{(i)}$ se koristi da bi se odredilo sledeće aproksimativno rešenje kako je to naznačeno u jednačini (4.10). Iterativni postupak se nastavlja dotle dok priraštaj pomeranja ili vektor neuravnoteženog opterećenja ne postanu mali prema unapred propisanim kriterijumima.



Sl. 2

Dobra osobina Newton-Raphson-ove metode je što veoma brzo konvergira ka tačnom rešenju, tj. metoda ima kvadratnu konvergenciju.

Sa gledišta programiranja ova metoda ima nepogodnost jer zahteva sračunavanje nove matrice krutosti i rešavanje sistema jednačina u svakoj iteraciji. Zbog toga je utrošak vremena rada računara kod ove metode veliki.

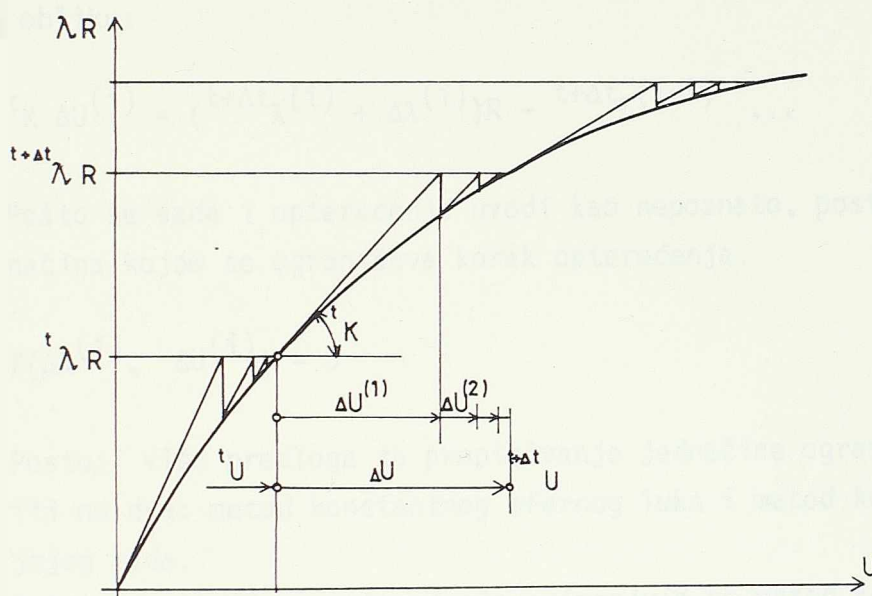
Jedna od najčešćih primenjivanih inkrementalno-iterativnih metoda jeste modifikovana Newton-Rapson-ova metoda. Kod ove metode se tangentna matrica krutosti određuje na početku svakog inkrementa ili posle određenog bro-

ja iteracija unutar inkrementa.

Jednačine MKE za primenu ovoga postupka mogu se prikazati u sledećem obliku

$$\tau_K \cdot \Delta U^{(i)} = t+\Delta t \lambda_R - t+\Delta t F^{(i)} \quad (4.12)$$

Grafički prikaz ove metode prikazan je na sl. 3.



Sl. 3

4.1.4. Metod konstantnog sfernog luka i metod konstantnog inkrementa spoljnjeg rada

Osnovne teškoće u primeni predhodnih metoda za rešavanje sistema nelinearnih jednačina u MKE, leže u propisivanju inkrementa opterećenja. Ako se usvoji suviše mali inkrement utrošak rada računara je veliki, ako se pak usvoji veliki inkrement može doći do teškoća u konvergenciji rešenja. Najbolje je u početnoj fazi ići sa većim inkrementima a kasnije bliže lomu sa manjim inkrementima.

Takodje kod rešavanja nelinearnih jednačina za elasto plastične modele sa omekšanjem može doći do problema u konvergenciji rešenja, jer neuravnoteženo opterećenje postaje veće od inkrementa opterećenja.

Riks & Wempner (1972) su predložili a kasnije modifikovali Crisfield & Ramm (1981) metod konstantnog sfernog luka koji se uspešno može primeniti za rešavanje nelinearnih jednačina MKE.

Osnovni cilj je u pronalaženju algoritma za automatsko nalaženje inkrementa opterećenja.

Za razliku od predhodnih postupaka, kod metode inkrementa konstantnog sfernog luka u iteracijama se određuje unutar inkrementa i pomeranje i opterećenje. Na razvoju ovih metoda koje se baziraju na iteracijama u prostoru pomeranje-opterećenje radi veliki broj istraživača.

Iterativna jednačina za opisivanje ovoga postupka može se napisati u sledećem obliku:

$$\tau_K \Delta U^{(i)} = ({}^{t+\Delta t} \lambda^{(i)} + \Delta \lambda^{(i)})_R - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \dots \quad (4.13)$$

Pošto se sada i opterećenje uvodi kao nepoznato, postavlja se i dopunska jednačina kojom se ograničava korak opterećenja.

$$f(\Delta \lambda^{(i)}, \Delta U^{(i)}) = 0 \quad (4.14)$$

Postoji više predloga za propisivanje jednačine ograničenja. Mi ćemo se ograničiti na dva: metod konstantnog sfernog luka i metod konstantnog inkrementa spoljnog rada.

Dalje od graničnog opterećenja primenjuje se metod konstantnog sfernog luka. U tom slučaju jednačina (4.14) postaje

$$\{({}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} - t_\lambda) + \Delta \lambda^{(i)}\}^2 + \mathbf{u}^{(i)T} \cdot \mathbf{u}^{(i)} = \Delta l^2 \quad (4.18)$$

gde su uvedene sledeće oznake:

$$\mathbf{u}^{(i)} = {}^{t+} t_{\mathbf{u}}^{(i)} - t_{\mathbf{u}} \quad (4.16)$$

Δl - je dužina luka

Blizu graničnog opterećenja koristi se jednačina ograničenja kojom se ograničava priraštaj spoljašnjeg rada. Za prvu iteraciju ova jednačina se može napisati u obliku:

$$({}^t \lambda + \frac{1}{2} \Delta \lambda^{(1)})_R^T \cdot \Delta U^{(1)} = W \quad (4.17)$$

dok se u ostalim iteracijama koristi jednačina oblika:

$$({}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} + \frac{1}{2} \Delta \lambda^{(i)})_R^T \Delta U^{(i)} = 0 \quad (4.18)$$

Kod primene ovih postupaka najčešće se u prvom inkrementu umesto op-

terecenja $\Delta t \lambda R$ propisuje veličina pomeranja za neki stepen slobode pomeranja $\Delta t U_k^*$. Zatim se procesom iteracija unutar ovog inkrementa odrede, srazmerno spoljašnjem opterećenju, sva ostala pomeranja kao i veličina opterećenja koje je ta pomeranja prouzrokovalo. U ovome radu neće se davati detaljan prikaz toga iteracija a što je detaljno učinjeno u literaturi K.J. Bathe (1980), Bathe & Dvorkin (1983), Crisfield (1983) itd.

U ostalim konfiguracijama $2\Delta t$, $3\Delta t$, ..., na početku svakog inkrementa sračunava se dužina koraka opterećenja Δl

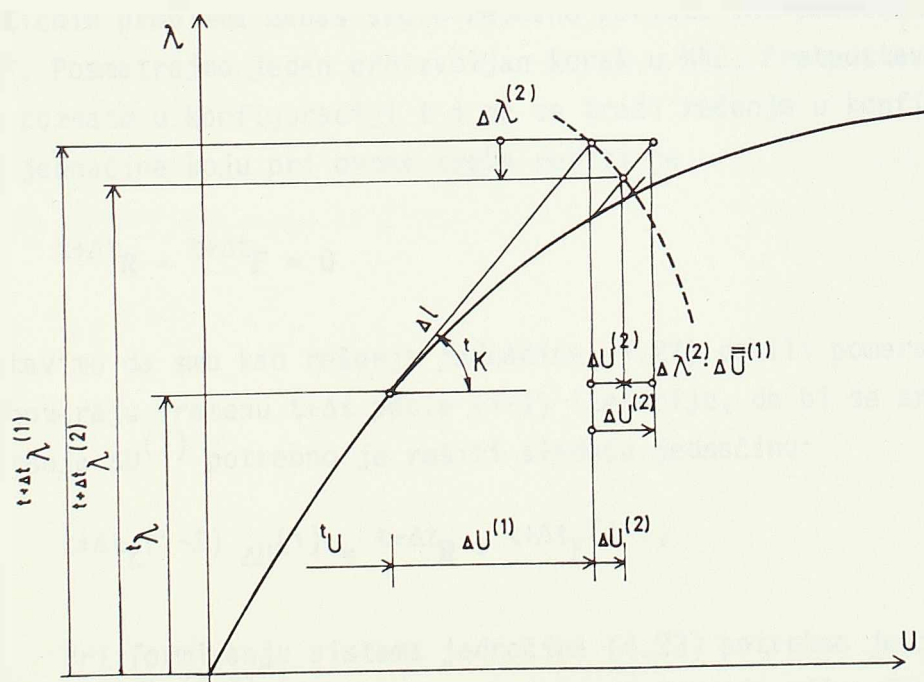
$$\Delta l = \beta \sqrt{\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \lambda^2} \quad (4.19)$$

Gde su uvedene oznake:

$$\mathbf{U} = \mathbf{t}_U - \mathbf{t} - \Delta t \mathbf{U} \quad (4.20a-b)$$

$$\lambda = t_\lambda - t + \Delta t \lambda$$

Konstantom β poredi se dužina koraka opterećenja predhodnog inkrementa sa dužinom koraka tekućeg inkrementa opterećenja. Proces iteracija, šematski je prikazan na sl. 4. Sa procesom iteracija se završava kada priraštaj rada ne-



Sl. 4

uravnoteženog opterećenja u odnosu na rad u prvoj iteraciji, bude manji od unapred propisanog odstupanja.

Ovaj uslov može se opisati sledećom jednačinom:

$$\frac{\Delta U^{(i)T} \cdot ({}^{t+\Delta t}t_{\lambda}^{(i)} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}t_{\mathbf{F}}^{(i-1)})}{\Delta U^{(1)} \cdot (\Delta \lambda^{(1)}) \cdot \mathbf{R}} < \text{TOL} \quad (4.21)$$

4.2. ALGORITMI ZA INTEGRACIJU ELASTO-PLASTIČNIH KONSTITUTIVNIH JEDNAČINA

4.2.1. Uvod

U predhodnom delu prikazani su postupci za rešavanje nelinearnih jednačina MKE. Ovi postupci su opšti i mogu se koristiti za rešavanje problema geometrijske nelinearnosti i problema materijalne nelinearnosti. Na početku MKE na rešavanju materijalno nelinearnih problema najčešće su korišćene metode početnih deformacija (initial strain) i metode početnih napona (initial stress). Od tada do danas razvijen je veliki broj metoda i postupaka kojima se ovakvi problemi znatno pouzdanije i efikasnije rešavaju. Zbog velikih razlika u ponašanju različitih materijala teško je naći jedinstven metod koji je stabilan, tačan i efikasan pri rešavanju. Uopšteno može se reći da se za rešavanje elasto-plastičnih problema danas skoro redovno koriste inkrementalno-iterativni postupci. Posmatrajmo jedan proizvoljan korak u MKE. Pretpostavimo da nam je rešenje poznato u konfiguraciji t i da se traži rešenje u konfiguraciji $t+\Delta t$. Osnovna jednačina koju pri ovome treba rešiti je

$${}^{t+\Delta t}t_{\mathbf{R}} - {}^{t+\Delta t}t_{\mathbf{F}} = 0 \quad (4.22)$$

Pretpostavimo da smo kao rešenja jednačine (4.22) dobili pomeranja ${}^{t+\Delta t}t_{\mathbf{U}}^{(i-1)}$ koja odgovaraju vremenu $t+\Delta t$ posle $(i-1)$ iteracije, da bi se sračunao inkrement pomeranja $\Delta U^{(i)}$ potrebno je rešiti sledeću jednačinu:

$${}^{t+\Delta t}t_{\mathbf{K}}^{(i-1)} \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}t_{\mathbf{R}} - {}^{t+\Delta t}t_{\mathbf{F}}^{(i-1)} \quad (4.23)$$

Pri formiranju sistema jednačina (4.23) potrebno je sračunati matriцу krutosti ${}^{t+\Delta t}t_{\mathbf{K}}^{(i-1)}$ i vektor ekvivalentnih čvornih sila. Uz pretpostavku da spoljašnje opterećenje ne zavisi od pomeranja iz jednačine (4.23) se dobija:

$${}^{t+\Delta t}t_{\mathbf{K}}^{(i-1)} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{{}^{t+\Delta t}t_{\mathbf{U}}^{(i-1)}} \quad (4.24)$$

Vektor ekvivalentnih čvornih sila sračunava se iz sledeće jednačine:

$$t+\Delta t F_{(i-1)} = \int_V \mathbf{B}^T \cdot t+\Delta t \sigma_{(i-1)} \cdot dV \quad (4.25)$$

Da bi smo mogli da sračunamo ove sile potrebno je predhodno da sračunamo napone u svim tačkama numeričke integracije. Ovi naponi se sračunavaju iz sledećeg izraza:

$$t+\Delta t \sigma_{(i-1)} = t_e \sigma + \int_{t_e}^{t+\Delta t} \sigma_e^{(i-1)} C \cdot de \quad (4.26)$$

Znači pri rešavanju elastoplastičnih problema javljaju se dve osnovne teškoće:

1) Odredjivanje naponskog stanja na osnovu početnog stanja i poznatih inkremenata deformacije,

2) Odredjivanje dovoljno tačno naponsko deformacione zavisnosti, neophodne za sračunavanje tangentne matrice krutosti.

Tačnost sračunavanja tangentne matrice krutosti može se odraziti na brzinu konvergencije, dok preciznost sa kojom se sračunavaju naponi ima direktan uticaj na tačnost čitave analize. Svaka greška koja nastane pri sračunavanju napona ne može se eliminisati kasnije u procesu rešavanja a kod kompleksnih problema veoma ju je teško identifikovati.

Problem sračunavanja napona na osnovu poznatih inkremenata deformacija svodi se na integraciju konstitutivnih jednačina elastoplastičnih problema kojima se opisuje ponašanje materijala.

Konstitutivne jednačine kojima se opisuje elastoplastično ponašanje različitih materijala mogu se u generalnoj formi prikazati na sledeći način:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \\ \sigma_{ij} &= D_{ijkl} \cdot \epsilon_{ij}^e \end{aligned} \quad (4.27 \text{ a-d})$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} r_{ij}(\sigma, q)$$

$$\dot{q} = \dot{\lambda} h(\sigma, q)$$

Jednačinom a) izraženo je svojstvo aditivne dekompozicije tenzora deformacije na elastičan i plastičan deo. Jednačinom b) definisan je generalisani Hooke-ov zakon pomoću koga je uspostavljena veza između tenzora napona i tenzora elastičnih deformacija preko tenzora krutosti materijala D_{ijkl} .

Jednačinom c) izražava se generalno neasocijativni zakon tečenja za inkremente plastičnih deformacija. I konačno jednačine d) definišu neki pogodan skup zakona ojačanja. Veličinom r_{ij} definisan je pravac plastičnog tečenja, h su plastični moduli i λ je parametar plastičnosti koga treba odrediti.

Za vreme procesa plastičnog tečenja moraju biti zadovoljeni uslovi plastične konzistencije tj.

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \dot{q} = \eta_{ij} \dot{\sigma}_{ij} + \xi_{\alpha} \cdot \dot{q}_{\alpha} = 0 \quad (4.28)$$

kojima se postavlja uslov da korigovani napon može doseći do površi popuštanja. Prihvatljiv algoritam integracije konstitutivnih jednačina treba da zadovolji sledeće zahteve:

- a) treba da bude konzistentan sa konstitutivnim relacijama koje se integrišu,
- b) da je numerički stabilan, c) mora da zadovolji uslove plastične konzistencije i d) da je dovoljne tačnosti.

Postoji više predloga za integraciju konstitutivnih jednačina, od kojih se najviše primenjuju tri i to: 1) eksplicitna Euler-ova integracija unapred, 2) implicitna integracija koja se zasniva na trapeznom pravilu i 3) implicitna integracija koja se zasniva na pravilu središne tačke.

4.2.2. Euler-ova integracija unapred

Algoritmi koji se zasnivaju na Euler-ovoj integraciji unapred za integraciju konstitutivnih jednačina mogu se opisati sledećim skupom jednačina:

$$\begin{aligned} t+\Delta t \sigma &= \mathbf{D} : (t+\Delta t \epsilon - t+\Delta t \epsilon_p) \\ t+\Delta t \epsilon_p &= t \epsilon_p + \lambda t r \\ t+\Delta t q &= t q + t_{\lambda} \cdot h \\ t+\Delta t \phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.29 \text{ a-d})$$

Simbolom $(:)$ označen je dvostruko kontrakovani tenzorski proizvod. U jednačinama (4.29, a-d) veličine označene sa indeksom t su poznate veličine: napona, deformacija, plastičnih deformacija i plastičnih promenljivih u konfiguraciji t .

Veličine $t+\Delta t \epsilon_p$, $t+\Delta t \epsilon$, $t+\Delta t q$ su nepoznate u konfiguraciji $t+\Delta t$, dok nam je u ovoj konfiguraciji poznata veličina totalne deformacije $t+\Delta t \epsilon$.

λ je parametar koji se može odrediti iz uslova plastične konzistencije.

Jednačine (4.29 a-d) mogu se napisati na sledeći način:

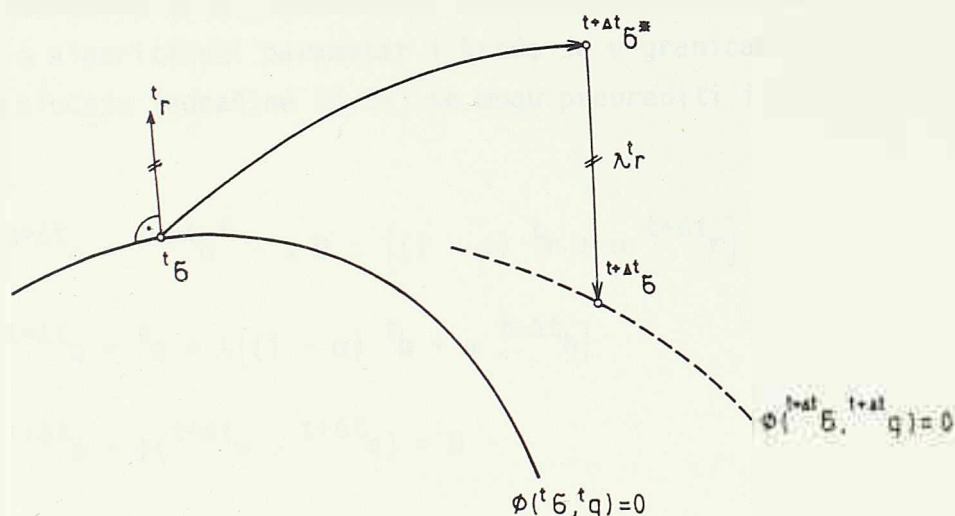
$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma^* - \lambda \mathbf{D} : {}^t r$$

$${}^{t+\Delta t}q = {}^t q + \lambda {}^t h \quad (4.30 \text{ a-c})$$

$${}^{t+\Delta t}\psi = 0$$

Geometrijsko značenje jednačina (4.30) prikazano je na slici 5, pri čemu je uvedena sledeća oznaka:

$${}^{t+\Delta t}\sigma^* = {}^t\sigma + \mathbf{D} : ({}^{t+\Delta t}\epsilon - {}^t\epsilon)$$



Sl. 5

Korekcija napona vrši se u dva koraka. U prvom koraku sračunava se napon ${}^{t+\Delta t}\sigma^*$ koji se dobija integracijom elastičnih konstitutivnih relacija.

Ovaj napon pretstavlja elastično predviđanje. Zatim se u drugom koraku vrši korekcija ovoga napona tako da se zadovolje uslovi plastične konzistencije i da se napon spusti na korigovanu površ popuštanja u konfiguraciji $t+\Delta t$. Osnovni nedostatak ovoga postupka je u tome što se uslovi tečenja zadovoljavaju u konfiguraciji t a ne u konfiguraciji $t+\Delta t$, tako da i u slučaju asocijativne plastičnosti inkrement plastične deformacije neće biti uspravan na površ popuštanja. Greška je utoliko veća ukoliko je veći inkrement opterećenja i ukoliko je zakrivljenost površi popuštanja veća.

4.2.3. Trapezno pravilo

Klasa algoritama koji se zasnivaju na trapeznom pravilu za integraciju konstitutivnih relacija (4.27) mogu se opisati sledećim skupom jednačina:

$${}^{t+\Delta t}\sigma = \mathbf{D} : ({}^{t+\Delta t}\epsilon - {}^{t+\Delta t}\epsilon_p)$$

$${}^{t+\Delta t}\epsilon_p = \epsilon_p + \lambda [(1 - \alpha) \mathbf{r} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}]$$

(4.31 a-d)

$${}^{t+\Delta t}q = q + \lambda [(1 - \alpha) \mathbf{h} + \alpha {}^{t+\Delta t}\mathbf{h}]$$

$${}^{t+\Delta t}\phi = 0$$

Jednačina (4.31) definisano je prošireno trapezno pravilo integracije. Gde je α algoritamski parametar i kreće se u granicama $\alpha \in [0,1]$. Kao i u predhodnom slučaju jednačine (4.31) se mogu preurediti i napisati u sledećoj formi

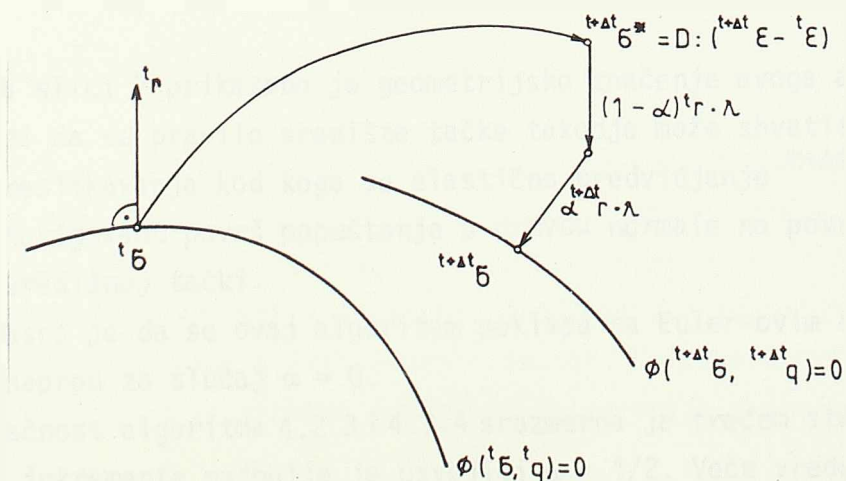
$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma^* - \lambda \mathbf{D} : [(1 - \alpha) \mathbf{r} + \alpha {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}]$$

$${}^{t+\Delta t}q = q + \lambda [(1 - \alpha) \mathbf{h} + \alpha {}^{t+\Delta t}\mathbf{h}]$$

(4.32 a-c)

$${}^{t+\Delta t}\phi = \phi({}^{t+\Delta t}\sigma, {}^{t+\Delta t}q) = 0$$

Grafička interpretacija jednačina (4.32) prikazana je na sl. 6.



Sl. 6

U ovom slučaju napon se sa elastičnog predviđanja u dva podkoraka preslikava na korigovanu površ popuštanja. U prvom podkoraku napon se projektuje u pravcu normale na površ popuštanja u trenutku t a u drugom, tako korigovan napon se preslikava na površ popuštanja u pravcu normale u trenutku $t+\Delta t$.

Predloženi algoritam može se svrstati u grupu algoritama sa povratnim preslikavanjem i njega je prvo predložio Wilkins (1964). Ovim algoritmom mogu se razmatrati modeli sa nesocijativnim tečenjem i proizvoljnim zakonom ojačanja. Pogodnim izborom parametra α može se uticati na povećanje tačnosti integracije.

4.2.4. Pravilo središne tačke

Ova klasa algoritama može se opisati sledećim skupom jednačina:

$${}^{t+\Delta t}\sigma = D : ({}^{t+\Delta t}\epsilon - \epsilon)$$

$${}^{t+\Delta t}\epsilon_p = \epsilon_p + \lambda {}^{t+\alpha}r$$

$${}^{t+\Delta t}q = q + \lambda {}^{t+\alpha}h$$

$${}^{t+\Delta t}\phi = 0$$

(4.33 a-d)

pri čemu su uvedene sledeće oznake:

$${}^{t+\alpha}r = r[(1-\alpha)\sigma^t + \alpha {}^{t+\Delta t}\sigma, (1-\alpha)q^t + \alpha {}^{t+\Delta t}q]$$

$${}^{t+\alpha}h = h[(1-\alpha)\sigma^t + \alpha {}^{t+\Delta t}\sigma, (1-\alpha)q^t + \alpha {}^{t+\Delta t}q]$$

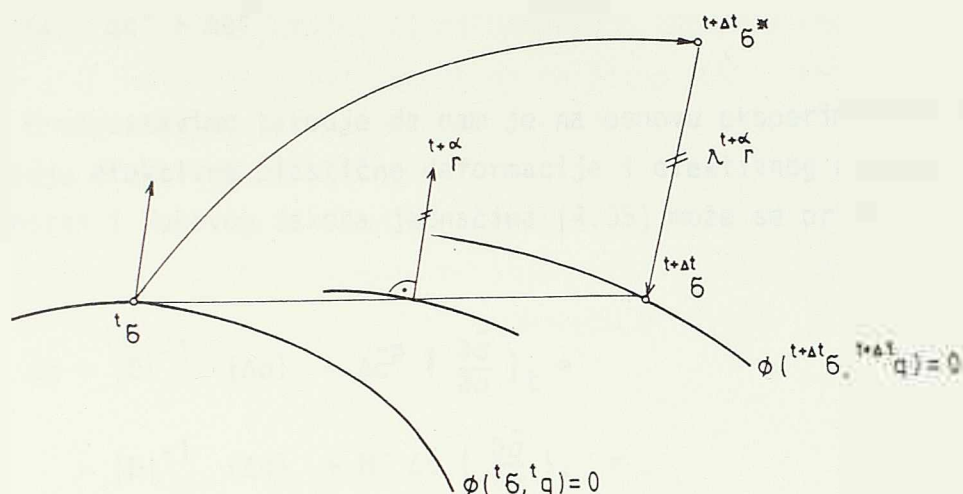
(4.34 a-b)

Na slici 7 prikazano je geometrijsko značenje ovoga algoritma. Sa slike se vidi da se pravilo središne tačke takodje može shvatiti kao algoritam povratnog preslikavanja kod koga se elastično predviđanje ${}^{t+\Delta t}\sigma^*$ preslikava na pogodno korigovanu površ popuštanja u pravcu normale na površ popuštanja dobijene u središnjoj tački.

Jasno je da se ovaj algoritam poklapa sa Euler-ovim algoritmom integracije unapred za slučaj $\alpha = 0$.

Tačnost algoritma 4.2.3 i 4.3.4 srazmerna je trećem stepenu inkrementa Δt . Za male inkremente najbolje je usvojiti $\alpha = 1/2$. Veće vrednosti α mogu dati izvesne prednosti u tačnosti i stabilnosti pri većim inkrementima opterećenja. Pravilo središne tačke bezuslovno je stabilno za $\alpha \geq 1/2$ nezavisno od

zakrivljenosti površi popuštanja. Zbog toga pri izboru algoritma za integraci-



Sl. 7

zakrivljenosti površi popuštanja. Zbog toga pri izboru algoritma za integraciju konstitutivnih jednačina prednost treba dati pravilu središne tačke.

U dosadašnjem izlaganju opisane su u najopštijem obliku metode integracije elastoplastičnih konstitutivnih jednačina. Na osnovu ovih generalnih postupaka razradjene su posebne metode koje su neophodne za konkretnu implementaciju pri rešavanju elasto-plastičnih problema MKE.

Pokazano je na osnovu velikog broja istraživanja da se dobija znatna ušteda u radu računara ako se usvoji manji broj većih inkremenata. Da bi se pri ovome dobila zadovoljavajuća tačnost potrebno je posebnu pažnju posvetiti tačnosti integracije elasto-plastičnih jednačina. Opisaćemo sada neke od metoda koje su našle primenu u konkretnom rešavanju ovim problemima.

4.2.5. Sabinkrementalna metoda

Pre nego što predjemo na prikazivanje ove metode pokažimo najpre neke od problema koji se javljaju pri integraciji u jednom koraku.

Neka je u trenutku t poznato kompletno naponsko deformacijsko stanje. Nanosi se sledeći inkrement opterećenja i rešavanjem jednačina ravnoteže određuju inkrementi pomeranja svih čvornih tačaka. Na osnovu ovih inkremenata mogu se u svim Gauss-ovim tačkama numeričke integracije sračunati inkrementi deformacija $\Delta \epsilon$.

Na osnovu aditivnog svojstva tenzora deformacije, ukupni inkrement tenzora deformacije može se rastaviti na elastičan i plastičan deo

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon^e + \Delta \epsilon^p \quad (4.35)$$

Pretpostavimo takodje da nam je na osnovu eksperimenata poznata zavisnost izmedju efektivne plastične deformacije i efektivnog napona. Korišćenjem ove zavisnosti i Hukovog zakona jednačina (4.35) može se prikazati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon &= [D]^{-1} \{\Delta \sigma\} + \Delta \bar{\epsilon}^p \left\{ \frac{\partial \bar{\epsilon}^p}{\partial \bar{\sigma}} \right\}_t = \\ &= [D]^{-1} \{\Delta \sigma\} + H' \Delta \bar{\sigma} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}_t = \\ \Delta \epsilon &= [D]^{-1} \{\Delta \sigma\} + H' f \{\Delta \sigma\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}_t \end{aligned} \quad (4.36)$$

U jednačini (4.36) neodređena je vrednost inkrementa napona $\{\Delta \sigma\}$. Veličina H' predstavlja plastični modul i jednaka je tangensu ugla na krivu $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^p)$. Dok veličina $\left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}_t$ definiše pravac normale na površ popuštanja u trenutku t . Osnovni problemi pri rešavanju jednačine (4.36) leži u tome što se nagib na površ popuštanja računa na početku inkrementa a ne na kraju i što zavisnost $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon})$ može biti nelinearna što znatno otežava rešavanje, i smanjuje tačnost.

Da bi se prevazišli ovi problemi preporučuje se primena sabinkrementalne tehnike. Ukupan inkrement deformacije deli se na m jednakih sabinkrementa. Tako da dobijamo:

$$d\epsilon = \Delta \epsilon / m \quad (4.37)$$

sada se jednačina (4.36) može napisati u sledećem obliku:

$$d\epsilon_i = [D]^{-1} \{d\sigma_i\} + H' f(d\sigma_i) \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}_i \quad (4.38)$$

gde (i) označava broj sabinkrementa. Detaljna strategija primene sabinkrementalne tehnike prikazana je u referencama D. Bushnell (1977) i N. Ottosen & O. Gunneskov (1985).

Na osnovu jednačine (4.38) može se zaključiti da se priraštaj napona $d\sigma_i$ dodaje na postojeće naponsko stanje na početku sabinkrementa i da se pravac normale plastičnog tečenja računa na početku sabinkrementa. Prema tome ova metoda integracije spada u Euler-ovu metodu integracije unapred. Pri ovome

posebnu pažnju treba posvetiti izboru broja sabinkrementa. Ovaj broj treba da bude takav da se zavisnost $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon})$ sa dovoljnom tačnošću unutar inkrementa može linearizovati. Obično se preporučuje da veličina sabinkrementa ne treba da bude veća od 1% od veličine inkrementa deformacije.

Sa povećanjem broja sabinkrementa može se povećati veličina inkrementa opterećenja a da se pri tome ne smanji ukupna tačnost analize. Prema nekim istraživanjima udeo sabinkrementalne integracije elastoplastičnih jednačina je oko 15% od ukupnog rada računara na rešavanju problema.

4.2.6. Algoritam povratnog preslikavanja

Nedavno je u radovima Simo & Ortiz (1984) predložena čitava klasa algoritama koja se može primeniti na veoma generalne klase elastoplastičnih modela. Ovi algoritmi se zasnivaju na metodologiji rastavljanja operatora. Sa matematičkog stanovišta algoritam predstavlja kontrakcijsko preslikavanje u pogodnom Hilbert-ovom prostoru i prema tome je bezuslovno stabilan. Geometrijski algoritam povratnog preslikavanja (return mapping algorithm) sastoji se u iznalaženju minimalnog rastojanja od tačke do skupa tačaka na konvenskoj površi popuštanja. U specijalnom slučaju von Mises-ovog uslova popuštanja sa izotropnim ojačanjem nije teško pokazati da se algoritam svodi na algoritam radijalnog povratka. Predloženi algoritam ima sledeće karakteristike odnosno područje primene:

- a) nelinearno elastičan odgovor,
- b) netrivialni uslovi popuštanja koji zavise od srednjeg napona,
- c) nelinearni zakon ojačanja i
- d) modelom se može obuhvatiti ojačanje, perfektna plastičnosti i

omekšavanje.

Ovim algoritmom se dobijaju zadovoljavajuće tačnosti osim za izuzetno velike inkremente opterećenja.

Pretpostavimo da je elasto-plastični model tla opisan skupom konstitutivnih jednačina (4.27, a-d). S obzirom na aditivnu strukturu ovih relacija možemo ih rastaviti na dva podskupa:

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p = f(t)$$

$$d\sigma = D(\epsilon^e, q) \cdot d\epsilon$$

$$d\epsilon^p = 0$$

$$dq = 0$$

(4.39 a-d)

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = 0$$

$$d\sigma = -D(\varepsilon^e, q) d\varepsilon^p \quad (4.40 \text{ a-d})$$

$$d\varepsilon^p = d\lambda \mathbf{r}(\sigma, q)$$

$$dq = d\lambda \mathbf{h}(\sigma, q)$$

Može se primetiti da desne strane jednačina (4.39) i (4.40) zajedno daju desnu stranu jednačina (4.27). Dobra strana predloženog algoritma je ta što on koristi samo osnovne funkcije bez traženja njihovih izvoda, koji se u nekim slučajevima veoma teško odredjuju.

Ovo rastavljanje se može protumačiti na sledeći način: Saglasno jednačini (4.39) neelastični odgovor materijala je zamrznut. Drugim rečima plastične deformacije i promenljive stanja zadržane su nepromenjene i ukupna propisana deformacija podrazumeva se da se dešava na račun elastičnih deformacija. Ove jednačine se mogu jednostavno integraliti i odrediti napon ($\sigma = \sigma(\varepsilon^e, q)$), dok su plastične promenljive zadržane i jednake su svojim početnim vrednostima.

U jednačini 4.40 pošto je $d\varepsilon = 0$ ponašanje odgovara ponašanju krutog tela. Jednačine 4.40 b i d s obzirom na jednačinu 4.40 c mogu se napisati u sledećoj formi:

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = -\mathbf{D}(\sigma, q) : \mathbf{r}(\sigma, q) \quad (4.41 \text{ a-b})$$

$$\frac{dq}{d\lambda} = \mathbf{h}(\sigma, q)$$

Koje predstavljaju skup relaksacionih jednačina za proračun napona i plastičnih promenljivih. Ovim jednačinama se definiše naponsko spuštanje od elastičnog predviđanja na odgovarajuću površ popuštanja. Za izotropan von Mises-ov model ova putanja je radijalna. Za netrivialne modele potrebno je da se ova putanja računa numerički. Za to se može primeniti sledeći algoritam:

U svakom koraku, funkciji popuštanja ϕ se linearizuje u okolini tekućih promenljivog stanja, $\sigma^{t+\Delta t}$, $q^{t+\Delta t}$ tako da dobijamo

$$\begin{aligned}
\phi &\approx \phi(t+\Delta t_\sigma(i), t+\Delta t_q(i)) + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} (t+\Delta t_\sigma(i), t+\Delta t_q(i)) : (\sigma - t+\Delta t_\sigma(i)) + \\
&+ \frac{\partial \phi}{\partial q} (t+\Delta t_\sigma(i), t+\Delta t_q(i)) : (q - t+\Delta t_q(i)) \equiv \\
&\equiv t+\Delta t_\phi(i) + t+\Delta t_v(i) : (\sigma - t+\Delta t_\sigma(i)) + t+\Delta t_\zeta(i) : (q - t+\Delta t_q(i))
\end{aligned}
\tag{4.42}$$

Diskretizacija relaksacionih jednačina (4.41) može se izvršiti na sledeći način:

$$\begin{aligned}
t+\Delta t_\sigma(i+1) - t+\Delta t_\sigma(i) &= -\Delta\lambda \cdot (t+\Delta t_D(i) : t+\Delta t_r(i)) \\
t+\Delta t_q(i+1) - t+\Delta t_q(i) &= \Delta\lambda \cdot t+\Delta t_h(i)
\end{aligned}
\tag{4.43 a-b}$$

gde je $\Delta\lambda$ inkrement parametra plastičnosti i može se dobiti unošenjem jednačina (4.43) u jednačinu (4.42) i izjednačavanjem funkcije popuštanja sa nulom tako da se dobija:

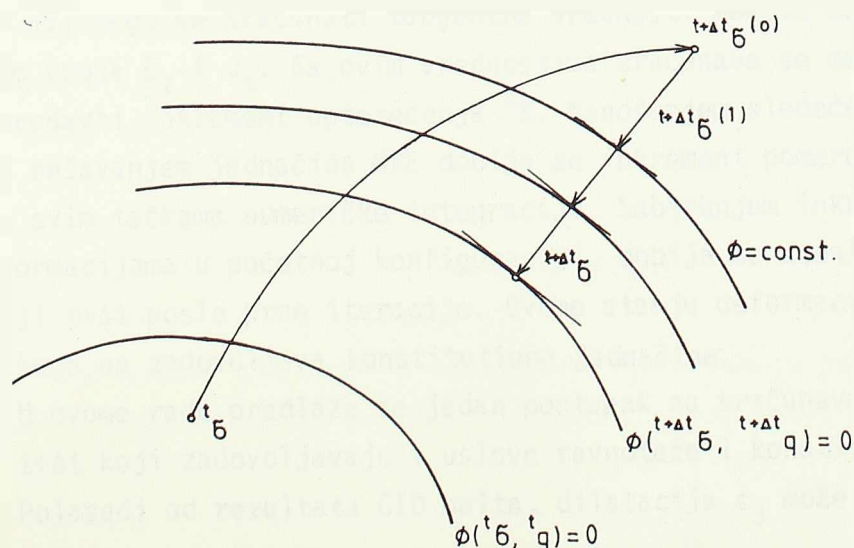
$$\Delta\lambda = \frac{t+\Delta t_\phi(i)}{t+\Delta t_v(i) : t+\Delta t_D(i) : t+\Delta t_r(i) - t+\Delta t_\zeta(i) : t+\Delta t_h(i)}
\tag{4.44}$$

Kada je određeno $\Delta\lambda$ iz jednačina (4.43) određuju se korigovane vrednosti napona i plastičnih promenljivih $t+\Delta t_\sigma(i+1)$, $t+\Delta t_q(i+1)$.

Sa ovim iteracijama se nastavlja sve dok uslovi plastične konzistencije nisu zadovoljeni do propisane tačnosti. Na primer:

$$t+\Delta t_\phi(i+1) \leq \text{TOL} \cdot t+\Delta t_\phi(0) \quad \text{gde je} \quad \text{TOL} \ll 1.
\tag{4.45}$$

Geometrijska interpretacija prikazanog algoritma data je na slici 8.



Sli. 8

U novije vreme za integraciju elastoplastičnih konstitutivnih jednačina sve se više primenjuju implicitni postupci. Kod ovih postupaka, uslovi plastičnosti se zadovoljavaju u konačnoj konfiguraciji. Na taj način, nezavisno od početnog stanja, problem se svodi na rešavanje sistema nelinearnih algebarskih jednačina.

Kada su određene vrednosti napona i plastičnih promenljivih stanja na kraju inkrementa opterećenja, nije teško odrediti tangentu elasto-plastičnu matricu krutosti materijala koja nam je potrebna za sračunavanje tangentne matrice krutosti konačnog elementa.

Napred opisani postupci integracije elastoplastičnih konstitutivnih jednačina su opšti i mogu se primeniti na sve elastoplastične modele. Medjutim, često se za određene modele razvijaju posebni postupci, odnosno algoritmi koji su podesniji za te modele.

Prikažimo sada u najkraćim crtama algoritme za rešavanje hipoeleastičnih modela i modela sa kapom u MKE.

4.2.7. Hipoeleastični model

U predhodnom poglavlju pri opisivanju *hipoeleastičnih modela* ukazano je na teškoće koje se javljaju pri sračunavanju naponskog stanja iz poznatih inkremenata deformacije. Zato se kod primene ovih modela u MKE najčešće primenjuje samo inkrementalni postupak bez poboljšanja u interacijama. Zahtevana tačnost obično se postiže povećanjem broja inkremenata opterećenja.

Pokažimo sada kako se i kod primene ovakvih modela može odrediti stanje napona koje odgovara poznatom stanju deformacije.

Pretpostavimo da su u početnoj konfiguraciji t poznate veličine tenzora napona i tenzora deformacije ${}^t\sigma_{ij}$ i ${}^t\epsilon_{ij}$ respektivno. Korišćenjem izraza (2.31) i (2.35) mogu se sračunati tangentne vrednosti modula deformacije i Poisson-ovog broja E_t i ν_t . Sa ovim vrednostima sračunava se matrica krutosti u MKE za merodavni inkrement opterećenja tK . Nanošenjem sledećih inkrementa opterećenja i rešavanjem jednačina MKE dobija se inkrement pomeranja odnosno deformacije u svim tačkama numeričke integracije. Sabiranjem inkrementa deformacije sa deformacijama u početnoj konfiguraciji, dobija se stanje deformacije u konfiguraciji $t+\Delta t$ posle prve iteracije. Ovome stanju deformacija odgovara stanje napona koje ne zadovoljava konstitutivne jednačine.

U ovome radu predlaže se jedan postupak za sračunavanje napona u konfiguraciji $t+\Delta t$ koji zadovoljavaju i uslove ravnoteže i konstitutivne jednačine.

Polazeći od rezultata CID opita, dilatacija ϵ_3 može se prikazati

sledećom hiperboličnom zavisnošću

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1 f}{(1 - \varepsilon_1 d)} \quad (4.46)$$

gde je

$$f = G - F \log \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right) \quad (4.47)$$

Parametri d , G i F se određuju na osnovu eksperimenata i za određeni materijal smatramo ih poznatim veličinama. Kada su nam poznate veličine dilatacija ε_1 i ε_3 iz jednačina 4.46 i 4.47 mogu se odrediti napon σ_3 na sledeći način:

$$\frac{\varepsilon_3(1 - \varepsilon_1 d)}{\varepsilon_1} = G - F \log \left(\frac{\sigma_3}{p_1} \right) \quad (4.48)$$

odnosno posle sredjivanja se dobija

$$\sigma_3 = p_a \cdot 10^{\frac{1}{F} \left(G - \frac{\varepsilon_3(1 - d\varepsilon_1)}{\varepsilon_1} \right)} \quad (4.49)$$

Kada je poznata vrednost napona σ_3 i poznata vrednost dilatacije ε_1 na osnovu izraza (2.22) može se sračunati i vrednost napona σ_1 . Na ovaj način određeno je stanje napona koje odgovara stanju dilatacija ε_1 i ε_3 i koje zadovoljava usvojene hipoelastične zavisnosti. Ovakav postupak treba primeniti u svim tačkama numeričke integracije. Sada se sa sračunatim naponima na poznati način mogu sračunati ekvivalentne čvorne sile u KE. Razlika ovih sila i čvornih sila od spoljašnjeg opterećenja koje se primenom nekog od napred opisanih postupaka može izbalansirati.

Ovako predloženi postupak omogućava da se i kod hipoelastičnog modela primene inkrementalno-iterativni postupci. Tačnost postupka je veća ukoliko putanje napona u tlu ne odstupaju značajnije od putanja napona u CID opitima.

Druga od teškoća koje se javljaju kod primene ovoga modela jeste kriterijum opterećenja rasterećenja. Ove teškoće nastaju zbog toga, što se pri nekoj kombinaciji opterećenja može povećavati devijatorski deo tenzora napona a smanjivati sferni i obrnuto. U takvim situacijama nije jasno da li se nalazimo u fazi opterećenja ili rasterećenja tla.

Prema Duncan and Chang-u module pri rasterećenju ponovnom opterećenju treba koristiti kada je tekući maksimalni smičući napon manji od maksimalnog smičućeg napona dostignutog od opterećenja do tada. Ovakav kriterijum je adekvatan samo kod materijala kod kojih je ugao unutrašnjeg trenja $\phi = 0$. Kod mate-

rijala kod kojih je kohezija $c = 0$, kao kriterijum treba koristiti odnos napona σ_1/σ_3 .

Često se u numeričkim analizama koristi konstativna vrednost Poissonovog broja ν . Pri malim vrednostima modula elastičnosti E_t usled velike vrednosti devijatora napona, pri malim inkrementima sferne komponente napona dolazi do značajnijih zapreminskih deformacija, što se ne dešava u realnom tlu. Da bi se izbegao ovaj nedostatak obično se modul kompresije sračunava na osnovu E_t a modul smicanja G na osnovu tangentne vrednosti modula E_t .

U ovom radu kao kriterijum opterećenja/rasterećenja predlaže se korišćenje recipročne vrednosti faktora sigurnosti na lom tla u sledećem obliku:

$$F_{sr} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) (1 - \sin \phi)}{2(c \cos \phi + \sigma_3 \sin \phi)} \quad (4.50)$$

Modul rasterećenja/ponovnog opterećenja treba koristiti u svakoj tački numeričke integracije u kojoj je F_{sr} manje od bilo koje do tada sračunate vrednosti F_{sr} .

4.2.8. Model sa kapom

Prikažimo sada nešto detaljnije algoritam modela sa kapom koji su predložili Sandler & Rubin (1978). Ulazne veličine u predloženom algoritmu su komponente stanja napona ${}^t\sigma_{ij}$ i parametar ojačanja tK u posmatranoj konfiguraciji t . Neka je u trenutku Δt došlo do priraštaja tenzora deformacije $\Delta\epsilon_{ij}$. Pomoću predloženog algoritma sračunavaju se vrednosti napona ${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}$ i ${}^{t+\Delta t}K$ u konfiguraciji $t+\Delta t$.

Prvi korak u algoritmu sastoji se u sračunavanju elastičnih napona t_z . elastično predviđjanje.

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}^E = {}^t\sigma_{ij} + (K - \frac{2G}{3})\epsilon_{KK}\delta_{ij} + 2G\Delta\epsilon_{ij} \quad (4.51)$$

U ovoj jednačini koriste se modul zapreminske deformacije i modul smicanja K i G na početku koraka, odnosno određeni su sledećim izrazima:

$$K = K({}^tJ_1, {}^tK) \quad (4.52 \text{ a-b})$$

$$G = G(\sqrt{J_{2D}^t}, {}^tK)$$

Zatim se sračunati naponi ${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}^E$ testiraju da bi se proverilo zadovoljenje sledećih kriterijuma:

- (i) granica zatezanja
- (ii) anelopa loma
- (iii) kapa

Ukoliko nijedan od napred navedenih kriterijuma nije prekoračen, materijal se ponaša elastično, parametar k ostaje nepromenjen i naponi u konačnoj konfiguraciji $t+\Delta t$ jednaki su sračunatim elastičnim naponima ${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}^E = {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}^E$.

Ukoliko je uslov (i) prekoračen, nastaje lom usled napona zatezanja. U ovom slučaju $J_1 = T$, gde je T dozvoljeno hidrostatičko zatezanje. Konačni naponi u tom slučaju postaju $J_1 = T$ i $S_{ij} = 0$. Pri ovome dolazi do promene plastične zapreminske deformacije koja se sračunava na sledeći način:

$$\Delta \epsilon_V^P = \Delta \epsilon_{KK} - (J_1^E - J_1)/3K \quad (4.53)$$

Promena parametra ojačanja k određuje se na osnovu zakona ojačanja, odnosno na osnovu poznate relacije između $\Delta \epsilon_V^P$ i k .

Ukoliko uslov (i) nije prekoračen, napon σ_{ij}^E se kontroliše s obzirom na anelopu loma, uslov (ii). Ako je $J_1^E \geq L(k)$ i $\sqrt{J_{2D}^E} \geq F_F(J_1^E)$, tada se primenjuje postupak anelope loma, koji se zasniva na sledećim jednačinama: Pretpostavimo privremeno da je za stanje napona ${}^t \sigma_{ij}$ zadovoljen uslov loma tj. da je ispunjen sledeći uslov:

$$f({}^t \sigma_{ij}) = \sqrt{J_{2D}^t} - F_F(J_1^t) = 0 \quad (4.54)$$

Za elastični pokušaj ovaj uslov nije zadovoljen pa se dobija

$$f(\sigma_{ij}^E) = \sqrt{J_{2D}^E} - F_F(J_1^E) = f^E > 0 \quad (4.55)$$

Inkrement plastične deformacije sračunava se iz zakona tečenja, koji se u ovom slučaju može prikazati u sledećoj formi

$$\Delta \epsilon_{ij}^P = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial J_1} \cdot \delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{J_{2D}}} \frac{\partial f}{(\sqrt{J_{2D}})} \cdot S_{ij} \right) \quad (4.56)$$

Parametar λ , određuje se iz uslova da je pri plastičnom tečenju totalni diferencijal funkcije popuštanja jednak nuli.

$$df = \frac{\partial f}{\partial J_1} dJ_1 + \frac{1}{2\sqrt{J_{2D}}} \frac{\partial f}{(\sqrt{J_{2D}})} S_{ij} \cdot dS_{ij} = 0 \quad (4.57)$$

Polazeći od činjenice da je inkrement totalne deformacije jednak zbiru inkremenata elastičnih i plastičnih deformacija i kombinovanjem jednačina (4.56) i (4.57), dobija se sledeći izraz za sračunavanje nepoznatog parametra λ :

$$\lambda = \frac{3K \frac{\partial f}{\partial J_1} \Delta \epsilon_{KK} + \frac{G}{\sqrt{J_{2D}}} \frac{\partial f}{(\sqrt{J_{2D}})} S_{ij} \cdot \Delta e_{ij}}{9K \left(\frac{\partial f}{\partial J_1} \right)^2 + G \left(\frac{\partial f}{\partial (\sqrt{J_{2D}})} \right)^2} \quad (4.58)$$

Na osnovu odredjenih algebarskih transformacija i korišćenjem predhodnih izraza za sračunavanje zapreminske plastične deformacije dobija se sledeći izraz:

$$\Delta \epsilon_V^p = \frac{3f^E \frac{\partial F_F}{\partial J_1}}{9K \left(\frac{\partial F_F}{\partial J_1} \right)^2 + G} \quad (4.59)$$

Može se pokazati da ova jednačina važi i u slučaju kada se napon σ_{ij}^t nalazi unutar anvelope loma. Kada smo korišćenjem izraza (4.59) sračunali inkrement zapreminske plastične deformacije, nova vrednost invarijante napona J_1 , određuje se iz sledećeg izraza:

$$J_1 = J_1^E - 3K \cdot \Delta \epsilon_V^p \quad (4.60)$$

Ako je $J_1 \leq L(t_K)$ tada se naponska tačka nalazi na preseku odvojnice loma i kape, u tom slučaju moraju biti zadovoljeni sledeći uslovi:

$$k = t_k \quad (4.61 \text{ a-b})$$

$$J_1 = L(K) = L(t_K)$$

Ako je $J_1 > L(t_K)$, naponska tačka leži na obvojnici loma, pri tome se zadržava predhodno sračunata vrednost J_1 dok se konačna vrednost parametra ojačanja K mora odrediti.

$$k = \min(J_1, 0, t_k + \frac{\partial k}{\partial \epsilon_V^p} \Delta \epsilon_V^p) \quad (4.62)$$

Pošto su veličine J_1 i k određene, proračun loma se zaključuje odredjivanjem devijatorskog dela tenzora napona

$$S_{ij} = \frac{F_c(J_1)}{\sqrt{J_{2D}^E}} \cdot S_{ij}^E \quad (4.63)$$

Ukoliko nijedan od uslova (i) i (ii) nije prekoračen tada se testira kapa. Ako su ispunjeni sledeći uslovi $X(K) \leq J_1^E \leq L(K)$ i $\sqrt{J_{2D}^E} > F_c(J_1^E, K)$ tada se primenjuje postupak kape. Ovaj algoritam je u stvari jedan iterativni postupak u kome se pretpostavlja vrednost parametra ojačanja κ a zatim se testira i podešava tako da se zadovolje potrebni uslovi. U najkredim crtama postupak se sastoji u sledećem: Za svaku pretpostavljenu veličinu parametra K sračunavaju se sledeće veličine

$$\Delta \epsilon_V^P, X(K), L(K) \text{ i } J_1 = J_1^E - 3K \cdot \Delta \epsilon_V^P \quad (4.64)$$

Ukoliko je $J_1 \leq X(K)$ potrebna je manja vrednost parametra ojačanja k , dok ukoliko je $J_1 \geq L(K)$ potrebna je veća vrednost parametra ojačanja. Postupak se nastavlja sve dok se ne zadovolje napred navedeni uslovi. Može se pokazati da je odgovarajuća vrednost parametra ojačanja k ona za koju je sa zadovoljavajućom tačnošću zadovoljena sledeća jednačina:

$$\sqrt{J_{2D}} - \frac{G \cdot \Delta \epsilon_V^P}{3d} = \sqrt{J_{2D}^E} \quad (4.65)$$

gde je uvedena sledeća oznaka:

$$d = \frac{\partial F_c}{\partial J_1} |_{J_1, K} \quad (4.66)$$

Polazeći od toga da su devijatori napona elastičnog pokušaja i stvarnih napona povezani sledećom jednačinom

$$S_{ij} + 2G \Delta \epsilon_{ij}^P = S_{ij}^E \quad (4.67)$$

i korišćenjem uslova tečenja na površi kape koji daje

$$\Delta \epsilon_{ij}^P = - S_{ij} \frac{\Delta \epsilon_V^P}{3d \sqrt{J_{2D}}} \quad (4.68)$$

dobija se jednačina (4.65).

Kada je određena vrednost parametra k koja sa zahtevanom tačnošću zadovoljava jednačinu (4.65) sračunavaju se veličine J_1 i $\sqrt{J_{2D}}$. Kombinovanjem

jednačina (4.65), (4.67) i (4.68) dobija se sledeći izraz za sračunavanje devijatorskog dela napona koji odgovara zadatom priraštaju deformacija

$$S_{ij} = \frac{\sqrt{J_{2D}}}{\sqrt{J_{2D}^E}} \cdot S_{ij}^E \quad (4.69)$$

Na ovaj način određeno je novo naponsko stanje i parametar ojačanja usled zadatog priraštaja deformacija. Zatim se prema napred opisanom postupku sračunavaju u svim KE ekvivalentne čvorne sile a iz njih i neuravnoteženo opterećenje. Sa iteracijama se nastavlja sve dok se uslovi ravnoteže ne zadovolje sa zahtevanom tačnošću. Ovim postupkom su zadovoljeni i uslovi ravnoteže i konstitutivne jednačine. Takodje je određena i veličina parametra ojačanja κ koja uzima u obzir "pamti" način nanošenja opterećenja. Pre nego što se nanese sledeći inkrement opterećenja sračunavaju se nove vrednosti u svim tačkama numeričke integracije modula $K(J_1, \kappa)$ i $G(\sqrt{J_{2D}}, \kappa)$ a na osnovu njih i matrica krutosti KE.

4.3. PROGRAM DIS

Na osnovu do sada iznetih teorijskih razmatranja napravljen je program za elektronski računar napisan na FORTRAN IV jeziku. Kao osnova za pisanje ovoga programa iskorišćeni su određeni delovi dobro poznatih programa NONSAP i ADINA autora Klaus Jürgen Bathe-a.

Celokupni proces rešavanja u programu DIS podeljen je na tri faze:

1) Ulazna faza

U ovoj fazi se učitavaju i generišu podaci o čvorovima mreže KE. Na osnovu ovih podataka za svaki čvor se formira vektor identifikacije ID i na osnovu tih vektora sračunava se broj jednačina sistema.

Spoljašnje opterećenje za svaki vremenski korak se učitava i smešta na traku. Takodje se u ovoj fazi učitavaju i generišu podaci o elementima i materijalima. Za svaki konačni element formira se po jedan vektor LM na osnovu koga se može odrediti koje čvorove koji element povezuje i koje su odgovarajuće jednačine za taj element. Ovi vektori omogućuju veoma jednostavno pakovanje globalne matrice krutosti sistema KE.

2) Formiranje i skupljanje elastičnih matrica

Organizacija programa je takva da se matrice krutosti elemenata sa linearnim vezama napona i deformacija računaju samo jedanput. Ovako sračunate matrice krutosti skupljaju se u globalnu matricu krutosti linearnih elemenata i u kompaktnoj formi se meštaju na traku.

3) Rešavanje u koracima

U ovoj fazi se formiraju matrice krutosti nelinearnih elemenata a zatim se u kompaktnoj formi meštaju na trake koje odgovaraju nelinearnim elementima. Matrice krutosti se računaju numerički korišćenjem Gaus-ove numeričke integracije. Broj tačaka numeričke integracije u elementu bira se po volji i kreće se od 4 do 16 tačaka.

Radi što efikasnijeg rada programa, proračun je napravljen tako da se vrši tzv. dinamičko otvaranje prostora za pojedine vektore i matrice. Svi elementi koji nisu trenutno neophodni za proračun meštaju se na trake tako da se stvara veći radni prostor. Na ovaj način znatno se povećava kapacitet programa i brzina rada.

Program nastavlja sa radom spajanjem linearnih i nelinearnih matrica. Zatim se nanosi prvi inkrement opterećenja i rešava sistem jednačina. Iz pomeranja čvorova se sračunavaju dilatacije u svim tačkama numeričke integracije. U zavisnosti od izabranog modela materijala sračunavaju se naponi i ekvivalentne čvorne sile. Zatim se primenom modifikovanog Newton-Raphson-ovog postupka u iteracijama dobija rešenje za pomeranja koje zadovoljava i jednačine MKE i konstruktivne relacije materijala.

Program DIS sadrži dva tipa elemenata i to: dvodimenzionalni izoparametarski element i kontaktni element.

Programom se mogu rešavati problemi koji se nalaze u uslovima rotacijske simetrije i u uslovima ravnog stanja deformacije.

U program su ugradjeni sledeći konstitutivni modeli materijala:

1) linearno elastični

- linearno elastični izotropan
- linearno elastičan anizotropan

2) hipoeleastični

- hipoeleastičan model Duncan-Chang-a
- model sa promenljivom K_t i G_t
- nelinearno elastičan model sa isključivanjem zatezanja

3) elastoplastični modeli

- elastoplastični Von Mises
- elastoplastični Drucker-Proger
- elastoplastični Mohr-Coulomb
- elastoplastični model sa kapom.

Od kontaktnih elemenata u program je ugradjen dvočvorni kontaktni element sa nelinearnim vezama izmedju napona i relativnih pomeranja.

5. PRIKAZ EKSPERIMENTALNE ANALIZE

5.1. UVOD

U okviru ovog rada izvršena su i sopstvena eksperimentalna ispitivanja ponašanja aksijalno opterećenih šipova. Mada se u literaturi može naći veliki broj publikovanih rezultata eksperimentalnih ispitivanja šipova, autor je se odlučio da izvrši sopstvena istraživanja iz sledećih razloga:

- Najčešće publikovani rezultati eksperimentalnih ispitivanja šipova nisu kompletni. Zbog ograničenosti prostora ili iz raznih drugih razloga, autori radova najčešće prikazuju samo određene delove rezultata eksperimenata koji su njima najinteresantiji.

- Skoro redovno iz ovakvih radova se izostavljaju rezultati laboratorijskih ispitivanja, uzoraka tla, već se obično prikazuju usvojeni parametri neophodni za konstituisanje odgovarajućeg modela tla.

- Po mišljenju autora, korisno je pored teoriskih razmatranja izvršiti i eksperimentalna ispitivanja jer se samo tako posmatrani problem može sagledati kompletno.

Program ispitivanja obuhvata, ispitivanje ponašanja tri bušena šipa pod aksijalnim opterećenjem do loma. Osim toga izvršeno je i detaljno laboratorijsko ispitivanje uzoraka tla neophodno za formiranje konstitutivnih modela tla.

5.2. ISPITIVANJE ŠIPOVA

5.2.1. Izvodjenje šipova

Šipovi su ispitivani u dvorištu Gradjevinskog fakulteta u Beogradu. Iz organizacijskih i finansiskih razloga odlučeno je da se ispitivanje izvrši na navedenoj lokaciji.

Ukupno je izvedeno tri bušenja šipa prečnika 0,27 m i dužine 3,0 m. Šipove je izvela radna organizacija "Geosonda" iz Beograda. Bušenje je izvršeno mašinskom garniturom, korišćenjem odgovarajućih svrdala. Na ovaj način dobijene su vertikalne bušotine sa rovnim izvodnicama, pošto je materijal u kome se izvođe šipovi les. Posebna pažnja posvećena je obradi bušotina u nivou baza šipova.

U toku istog dana izvršeno je betoniranje šipova. Šipovi su betonirani betonom MB30 sa dodatkom superplastifikatora. Na ovaj način smanjen je vodo-

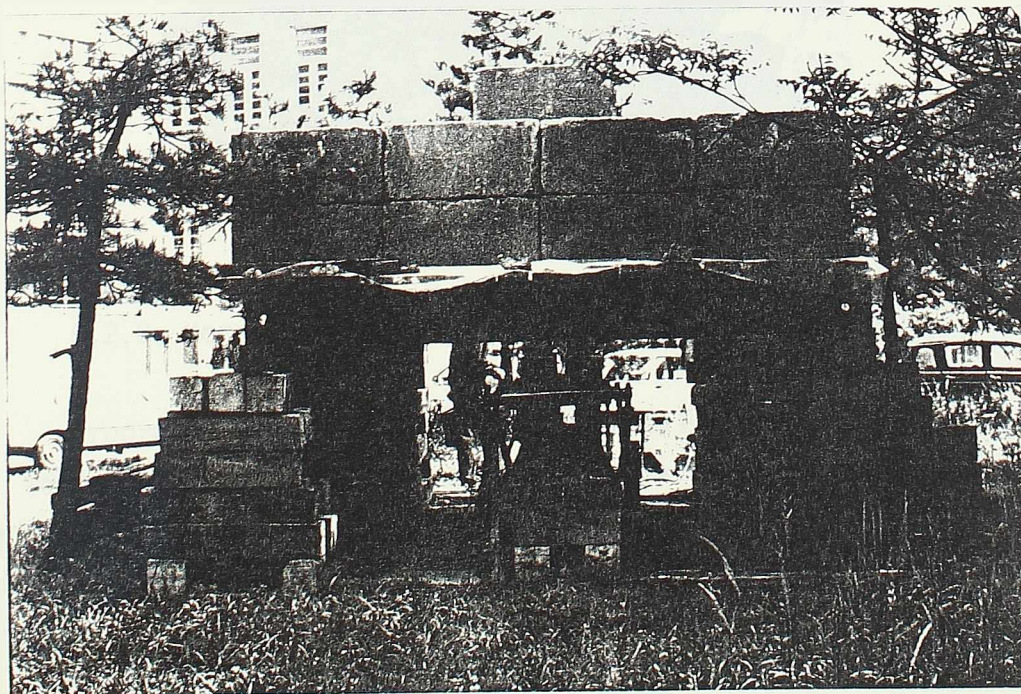
cementni faktor a povećana je ugradljivost betona. U toku betoniranja šipova u njih je ugradjena oprema za merenje raspodele aksijalne sile po dužini šipa. Šipovi su izvedeni od nearmiranog betona s tim što je u gornjoj zoni, da bi se sprečilo eventualno cepanje glave šipa, na dužini od 60 cm ugradjena spirala $\phi 6/10$.

Glave šipova su posebno obradjene, na taj način što je naknadno dobetoniran sloj exmala debljine oko 8 cm. Na ovaj način dobijene su ravne površine glava šipova koje su neophodne za nanošenje opterećenja na šip i postavljanje instrumenata.

5.2.2. Opterećenje šipova

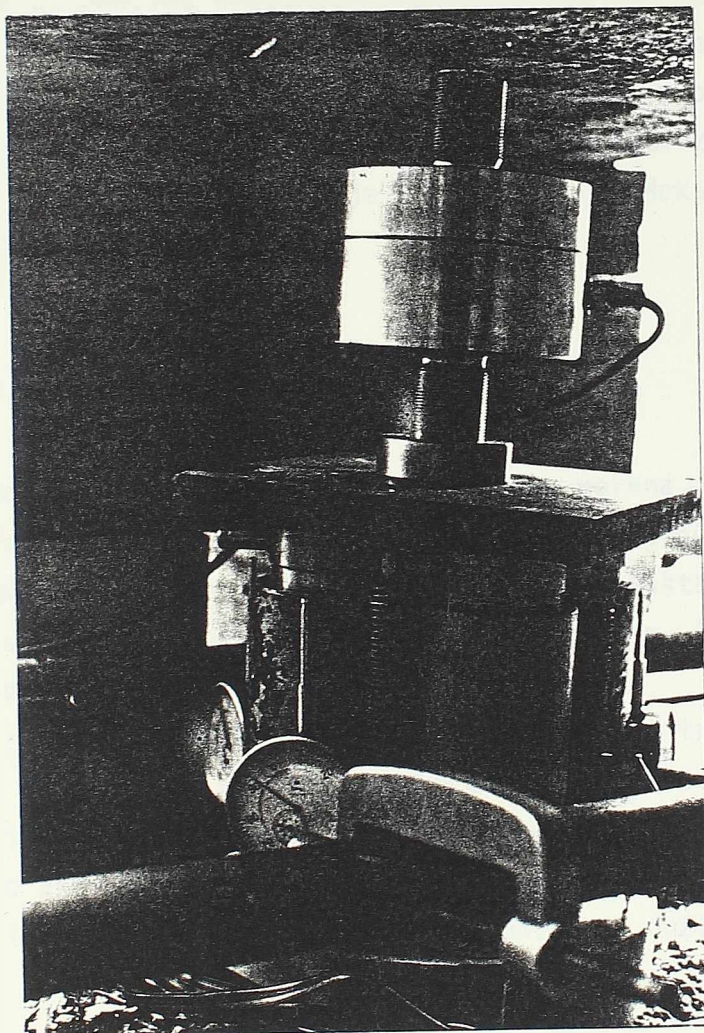
Ispitivanje šipova izvršeno je statičkom metodom, na taj način što je na glavu šipa nanošeno mirno statičko opterećenje. Iznad šipova uradjena je platforma (nanosna skela) preko koje je naslagan teret (balast) od betonskih blokova. Montažu skele i balasta od betonskih blokova izvršila je RO "Jugofund" iz Beograda.

Da bi sva tri šipa mogla da se ispita sa jednim položajem tereta, šipovi su izvedeni u jednom pravcu na medjusobnom odstojanju od po 2,50 m. Predviđeno granično opterećenje na šipu bilo je 150 kN tako da je bilo neophodno formirati balast težine preko 300 kN. Na slici 1 prikazan je izgled nanosne skele i balasta.



Sl. 1

Nanošenje opterećenja na šip izvršeno je preko hidrauličkih presa. Na šip su postavljene 4 prese kapaciteta 150 kN. Iznad ovih presa postavljena je metalna ploča, a iznad nje elektronski dinamometar za merenje sile koji se odupire u glavni nosač tereta. Svi ovi detalji prikazani su na sl.2.



Sl. 2

5.2.3. Merenje zavisnosti opterećenja i sleganja šipa

Programom za ispitivanje šipova predviđeno je da se sila na šip nanosi u inkrementima od $1/10 P_{gr}$, tako da su inkrementi iznosili 15 kN. Pošto je za merenje sile korišćen elektronski dinamometar kapaciteta 200 kN i sa tačnošću od jedne mikro-dilatacije, bilo je moguće veoma precizno kontrolisanje nanešene sile.

Sleganje glave šipa, mereno je sa četiri ugibometra, dužine hoda 50 mm i sa tačnošću od $1/100$ mm. Ugibomeri su bili pričvršćeni na nezavisnu cevastu skelu.

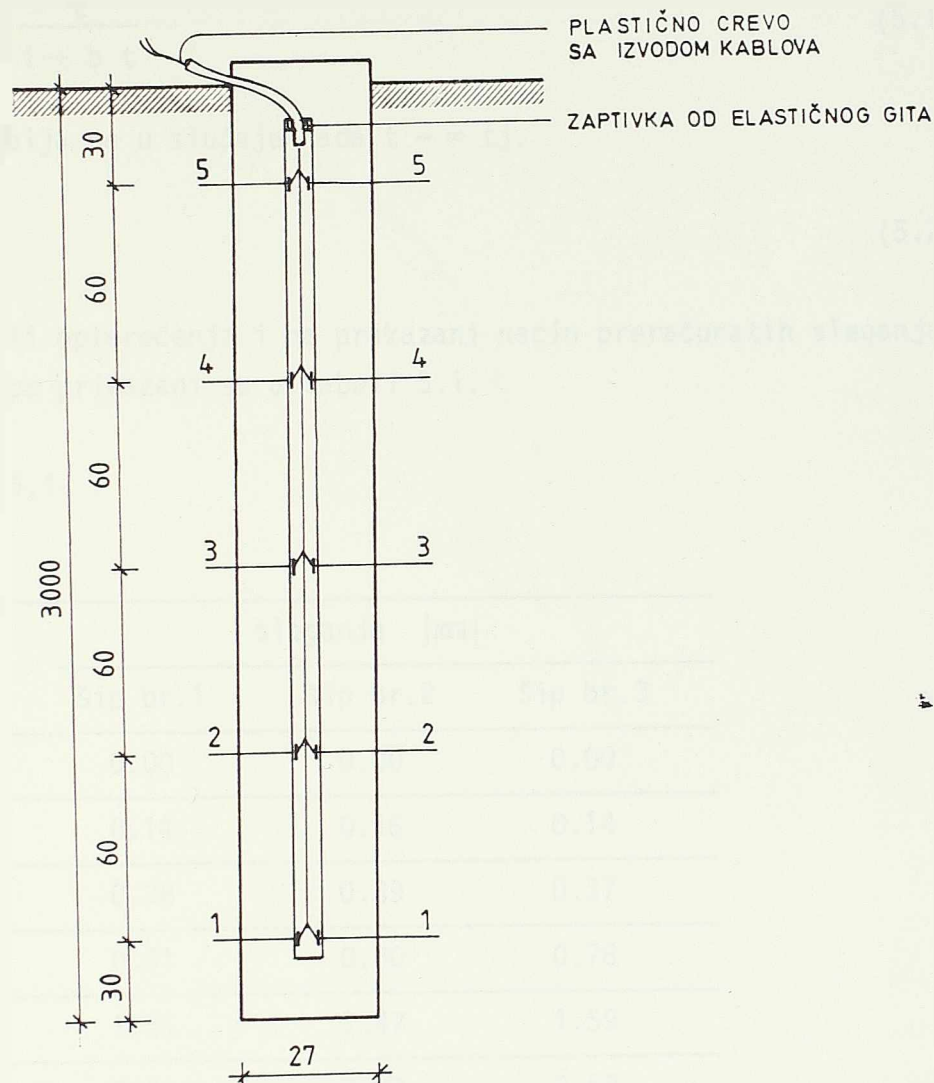
Ova skela bila je oslonjena dovoljno daleko od šipa tako da je sleganje oslonačkih tačaka skele usled sleganja šipa zanemarljivo malo.

Posle nanošenja inkrementa opterećenja u toku od jednog časa, vršeno je očitavanje sleganja na ugibomeru i to u vremenu od 5, 10, 20, 30, 45 i 60 min. Novi inkrement opterećenja nanošen je u vremenu kraćem od jednog časa u slučajevima kada su razlike sleganja na ugibomerima izmedju dva očitavanja bile manje od 0,02 mm, s tim što nijedan inkrement opterećenja nije trajao kraće od 30 min. Kod sva tri ispitivana šipa pri opterećenju preko 120 kN nastalo je naglo tonjenje šipova, tako da nije bilo moguće održati zahtevanu silu na presi, odnosno sa tonjenjem šipa sila je naglo opadala. Maksimalno sleganje šipova iznosilo je izmedju 30 i 40 mm.

5.2.4. Merenje raspodele sile po dužini šipa

Raspodela aksijalne sile po dužini šipa merena je pomoću merenih traka koje su bile ugradjene u čeličnu cev. Čelična cev prečnika 60 mm i debljine zida $\delta = 3,5$ mm uradjena je iz komada dužine 60 cm. Nastavljanje ovih komada izvršeno je pomoću narezanih navoja na njihovim krajevima, što je omogućilo dobro dihtovanje i pravilno prenošenje sile bez pomeranja.

Unutar cevi u svakom preseku zalepljene su po tri merne trake pod uglovima od 120° . Svi kablovi od traka provučeni su kroz cev. Pored ovih traka u cev su ugradjene i po dve kompenzacione merne trake. Na ovaj način merenje dilatacija odnosno aksijalnih sila po dužini šipova omogućeno je u pet preseka. Na sl. 3. šematski je prikazan raspored mernih mesta po dužini šipa.



Sl. 3

Očitavanje dilatacija u mernim trakama vršeno je neposredno pre i posle nanošenja svakog inkrementa opterećenja.

5.2.5. Prikaz i analiza dobijenih rezultata

Kao što je napred rečeno, unutar svakog inkrementa opterećenja u propisanim vremenskim razmacima vršeno je očitavanje sleganja, kao prosečna vrednost na sva četiri ugibomera. Pošto za svaki inkrement opterećenje nije stajalo podjednako dugo, vršeno je preračunavanje sleganja unutar svakog inkrementa, tj. određivano je ono sleganje koje je se moglo očekivati posle beskonačno dugog vremena u svakom inkrementu opterećenja. Između sleganja unutar inkrementa opterećenja i vremena usvojena je hiperbolička zavisnost u sledećem obliku:

$$\Delta S(t) = \frac{t}{1 + b t} \quad (5.1)$$

Konačno sleganje dobija se u slučaju kada $t \rightarrow \infty$ tj.

$$\Delta S_k = \frac{1}{b} \quad (5.2)$$

Vrednosti opterećenja i na prikazani način preračunatih sleganja za sva 3 ispitivana šipa prikazani su u tabeli 5.1.

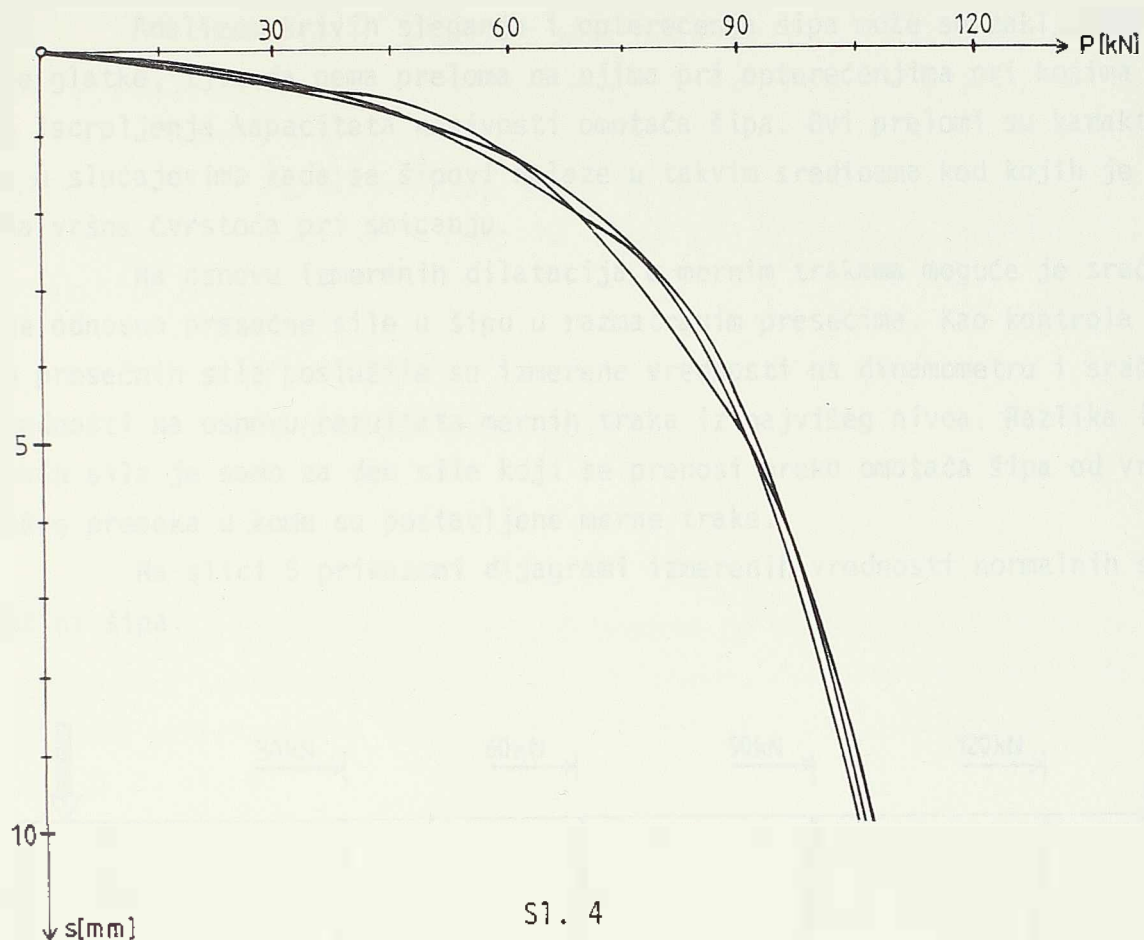
Tabela 5.1.

Sila [kN]	sleganje [mm]		
	šip br.1	šip br.2	šip br.3
0.	0.00	0.00	0.00
15.	0.14	0.16	0.14
30.	0.38	0.39	0.37
45.	0.61	0.80	0.78
60.	1.31	1.47	1.59
75.	2.31	2.83	2.53
90.	4.47	4.77	4.62
105.	9.76	9.37	9.91
120.	22.27	18.98	20.79

Na osnovu dobijenih rezultata može se zaključiti da su razlike u ponašanju ispitivanih šipova zanemarljivo male. Ovo se moglo i očekivati jer su šipovi izvedeni na isti način i relativno su blizu jedan drugome tako da se može smatrati da se nalaze u istoj sredini.

Analizom dobijenih rezultata može se zaključiti da se hiperboličkom zavisnošću mogu najbolje aproksimirati dobijene eksperimentalne krive. Prema tome zavisnost izmedju opterećenja šipa i sleganja vrha šipa može se usvojiti u sledećem obliku:

$$P = \frac{S}{a + bS} \quad (5.3)$$



Korišćenjem metoda matematičke statistike tj. metode najmanjih kvadrata mogu se odrediti parametri hiperbola a_i i b_i tako da zbir kvadrata odstupanja izmerenih i aproksimiranih vrednosti budu minimalani. Obrada ovih rezultata izvršena je na računaru, dobijene su sledeće vrednosti parametara a_i i b_i (tabela 5.2).

Tabela 5.2

	ŠIP 1	ŠIP 1	ŠIP 3	PROSEČNE VREDNOSTI
a_i	0.0110451	0.0126410	0.0121308	0.011939
b_i	0.0079523	0.0078141	0.0078849	0.00788377

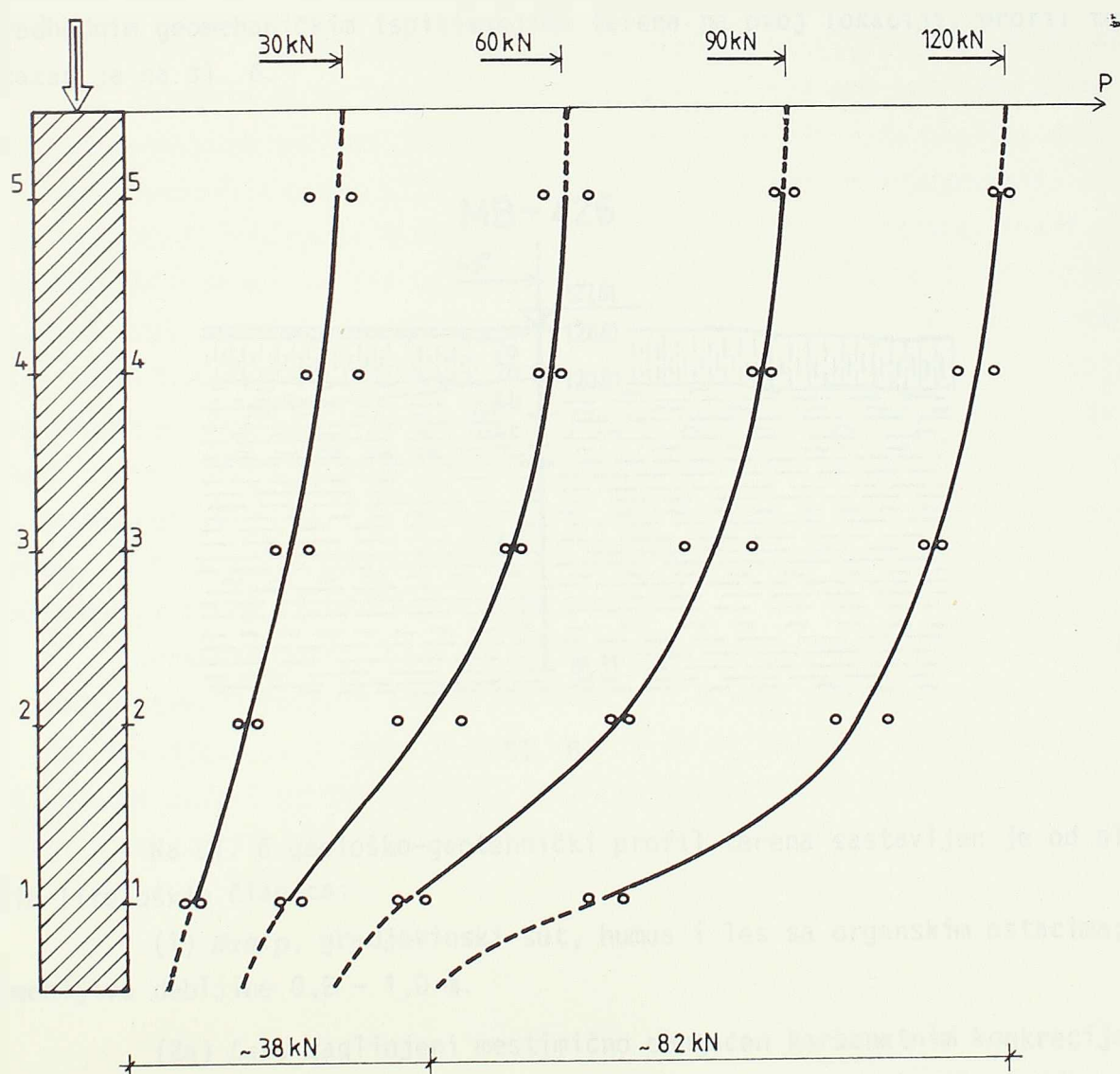
Prosečna vrednost graničnih sila za sva tri ispitivanja šipa iznosi:

$$P_{gr} = \frac{1}{b_{pr}} = \frac{1}{0,0078838} = 126.84 \text{ kN}$$

Analizom krivih sleganja i opterećenja šipa može se zaključiti da su one glatke, tj., da nema preloma na njima pri opterećenjima pri kojima dolazi do iscrpljenja kapaciteta nosivosti omotača šipa. Ovi prelomi su karakteristični u slučajevima kada se šipovi nalaze u takvim sredinama kod kojih je izražena vršna čvrstoća pri smicanju.

Na osnovu izmerenih dilatacija u mernim trakama moguće je sračunati napone odnosno presečne sile u šipu u razmatranim presecima. Kao kontrola sračunatih presečnih sila poslužile su izmerene vrednosti na dinamometru i sračunate vrednosti na osnovu rezultata mernih traka iz najvišeg nivoa. Razlika između ovih sila je samo za deo sile koji se prenosi preko omotača šipa od vrha do najvišeg preseka u kome su postavljene merne trake.

Na slici 5 prikazani dijagrami izmerenih vrednosti normalnih sila po dužini šipa.



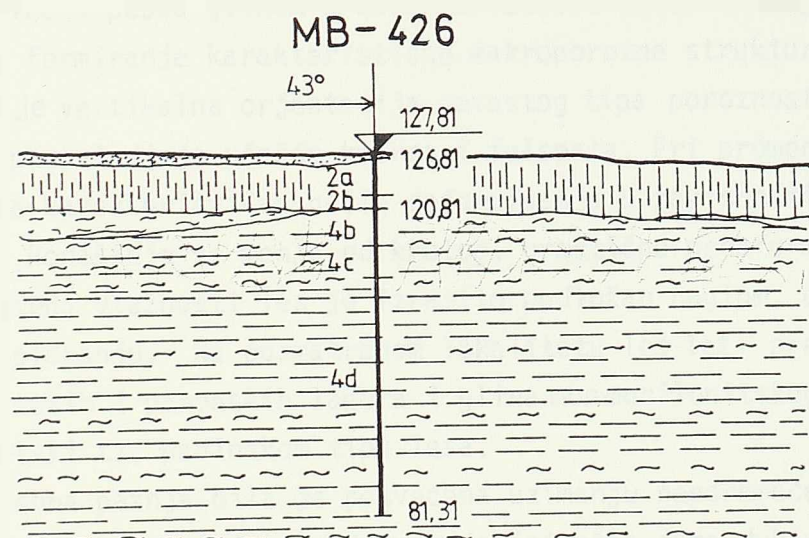
S1. 5

Sa slike 5 mogu se uočiti neke zakonitosti u prenošenju opterećenja. Pri nižim vrednostima opterećenja najveći deo opterećenja preuzima omotač šipa $\sim 85\%$, dok pri višim opterećenjima povećava se učešće baze u prenošenju opterećenja tako da omotač preuzima $\sim 70\%$ ukupnog opterećenja. Nažalost, merenje nije izvršeno u nivou baze šipa već iznad nje 30 cm pa je potrebno vršiti ekstrapolaciju (isprekidana linija).

5.3. LABORATORISKA ISPITIVANJA

5.3.1. Uvod

Pored ispitivanja šipova, programom je bilo predviđeno da se izvrši i laboratorisko ispitivanje uzoraka tla. Na osnovu raspoložive dokumentacije o predhodnim geomehaničkim ispitivanjima terena na ovoj lokaciji, profil terena prikazan je na sl. 6.



Sl. 6

Na sl. 6 geološko-geotehnički profil terena sastavljen je od sledećih litoloških članica:

(1) *Nasip*, gradjevinski šut, humus i les sa organskim ostacima; promenljive debljine 0,2 - 1,0 m.

(2a) *Les*, zaglinjeni mestimično obogaćen karbonatnim konkcijama i oksidima. Fe i Mn, neujednačene lesne strukture; pretežno kapilarne do subkapilarne poroznosti; neujednačeno osetljiv na provlažavanje i ispiranje sit-

nih frakcija. Pretežno je homogen i pojavljuje se u jednom do dva horizonta. Debljine je do 6,20 m.

(2b) *Pogrebena zemlja*, pojavljuje se kao proslojavanje u lesnom kompleksu u bazi lesa, nejednako obogaćena sadržajem karbonatnih kankrecija praha i oksida Fe i Mn; tamno mrke boje; tvrda do meka mestimično trošna; kapilarne do subkapilarne poroznosti; nejednako stišljiva i manje osetljiva na provlažavanje; delimično anizotropna; debljine do 10 m.

(4b) *Izmenjeni glinoviti lapor*

(4c) *Izmenjeni glinoviti lapor*

(4d) *Lapori*

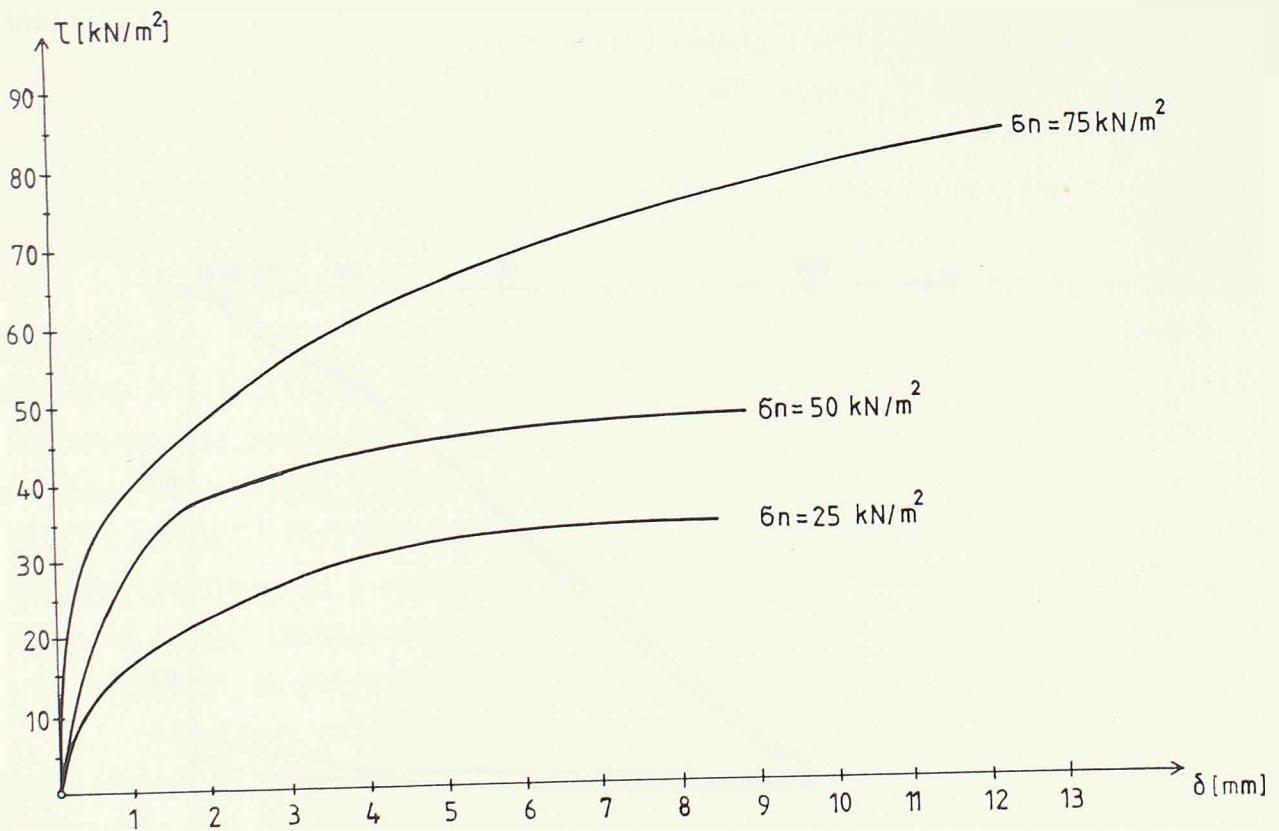
Za ponašanje ispitivanih šipova merodavne su osobine sloja lesa (2a). Bez namere da se detaljnije upuštamo u opisivanje lesa navešćemo samo neke od njegovih bitnijih karakteristika.

Danas je široko prihvaćeno shvatanje da je les eolskog porekla. Prema ovoj teoriji materijal od koga je nastao les transportovan je vetrom za vreme glacijacija. Lagano odlaganje čestica prašine u uslovima relativno male vlažnosti, dolazilo je do očvršćavanja unutrašnjih veza pre prirodne konsolidacije pod sopstvenom težinom. Očvršćavanje cementacionih veza obavlja se lepljenjem zvrna prašine i peska glinom u karakteristične mase mikroagregata. Ovakav način omogućava formiranje karakteristične makroporozne strukture lesnih naslaga. Karakteristična je vertikalna orijentacija cevastog tipa poroznosti. Od minerala u sastavu lesa preovladjuje učešće kvarca i feldspata. Pri promeni naponskih uslova les ispoljava karakterističan način deformisanja u zavisnosti od konsolidacijskog pritiska. Ponašanje se menja od krutog, praktično nedeformabilnog do plastičnog. Pri promeni vlažnosti les je izrazito podložan naglom, često neravnomernom, dopunskom sleganju. Na posmatranom lokalitetu les leži preko neogenih sedimenata, sarmatskih i panonskih lapora i glina monmorilonitskog sastava, ovaj les pripada genetski tzv. padinskom tipu lesa.

Posebna pažnja bila je posvećena uzimanju neporemećenih uzoraka tla. Neposredno pored izvedenih šipova iskopana je istražna jama dubine ~1,70 m. Iz ove jame izvadjene su 3 kocke dimenzija ~ 20 cm iz kojih su kasnije u laboratoriji uzimani uzorci za ispitivanja. Pored ovih uzoraka iz bočnih stranica jame izvadjeni su uzorci direktnim utiskivanjem okvira za opite čistog smicanja.

5.3.2. Prikaz rezultata laboratoriskih ispitivanja

Opiti direktnog smicanja uradjeni su na standardan način u kutijas-
tim aparatima. Kao što je u uvodu rečeno uzorci su uzimani iz bočnih stranica
temeljne jame tako da je smicanje vršeno po vertikalnim ravnima u tlu. Na osno-
vu rezultata ovih ispitivanja odredjeni su potrebni parametri za formiranje
kontaktnih elemenata između šipa i tla. Opiti smicanja izvršeni su u laborato-
riji za mehaniku tla, Građevinskog fakulteta u Beogradu. Uzorci su smicani pri
malim vrednostima normalnih napona, odnosno pri očekivanim bočnim pritiscima tla
na šip. Ovi normalni naponi iznosili su 25,50 i 75 kN/m². Opiti su izvodjeni ta-
ko da je svakog minuta naponsko 1/20 opterećenje pri lomu usled smicanja. Na sli-
ci 7 grafički su prikazani dobijeni rezultati opita direktnog smicanja.



Sl. 7

Na osnovu ovih rezultata za kontaktni element, interpretacijom do-
bijenih rezultata, usvojamo sledeće parametre:

$$\bar{K} = 400$$

$$m = 0.89$$

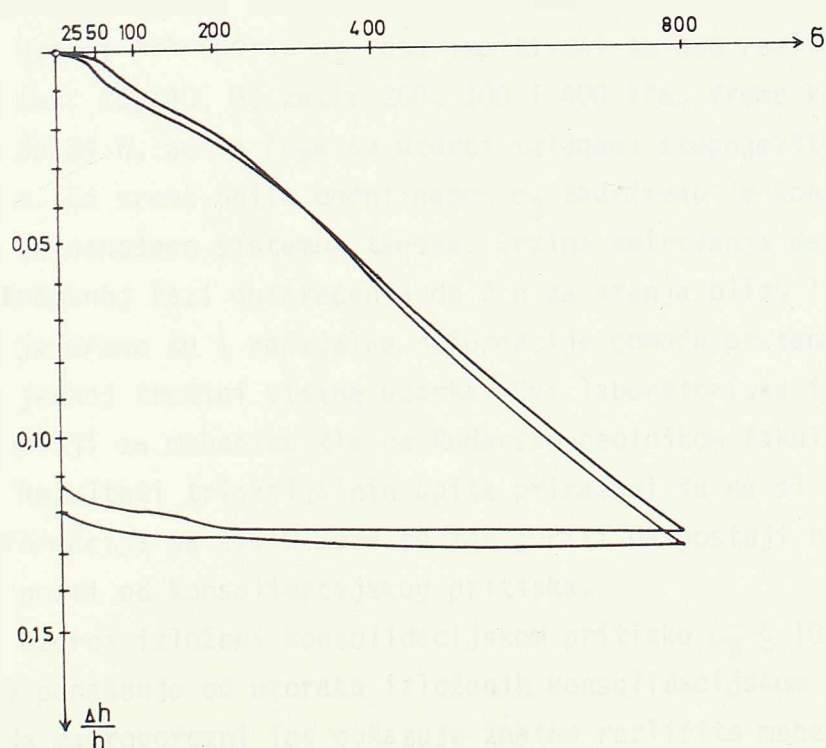
$$\phi = 29^{\circ}$$

$$C = 10 \text{ kN/m}^2$$

Dobijena vrednost ugla unutrašnjeg trenja je veća nego što su uobičajene vrednosti za ovu vrstu lesa. Medjutim, kako su opiti vršeni pri neuobičajeno malim vrednostima normalnih napona, dobijena vrednost ugla je realna. Ovakve vrednosti ukazuju na krivolinijsku obvojnici loma tla.

Opiti edometarske kompresije izvršeni su na dva neporemećena uzorka. Ispitivani su prirodno vlažni uzorci. Vlažnost uzoraka je 19% a suva zapreminska težina $\gamma_d = 14,60 \text{ kN/m}^3$.

Na sl. 8 prikazani su dijagrami edometarskog opita. Opterećenje uzoraka vršeno je stupnjevito sa 25, zatim 50, 100, 200, 400 i zaključno sa 800 kPa. Veličine modula stišljivosti za određene intervale promene napona date su u tabeli 5.3.



Sl. 8

Tabela 5.3

σ	M_{s1}	M_{s2}
0 - 25	11 286	12 346
25 - 50	9 900	9 346
50 -100	9 216	7 194
100 -200	7 968	8 247
200 -400	5 263	5 690
400 -800	5 618	5 939

Na osnovu tabele 5.3 može se zaključiti da vrednosti modula stišljivosti sa porastom napona σ imaju tendenciju naglog opadanja do područja između $\sigma_1 = 100-200 \text{ kN/m}^2$

Posle toga, tendencija opadanja modula stišljivosti ima blaži trend, odnosno dolazi do njegovog ustaljivanja i pri naponima $\sigma_1 \geq 400$ do blagog porasta.

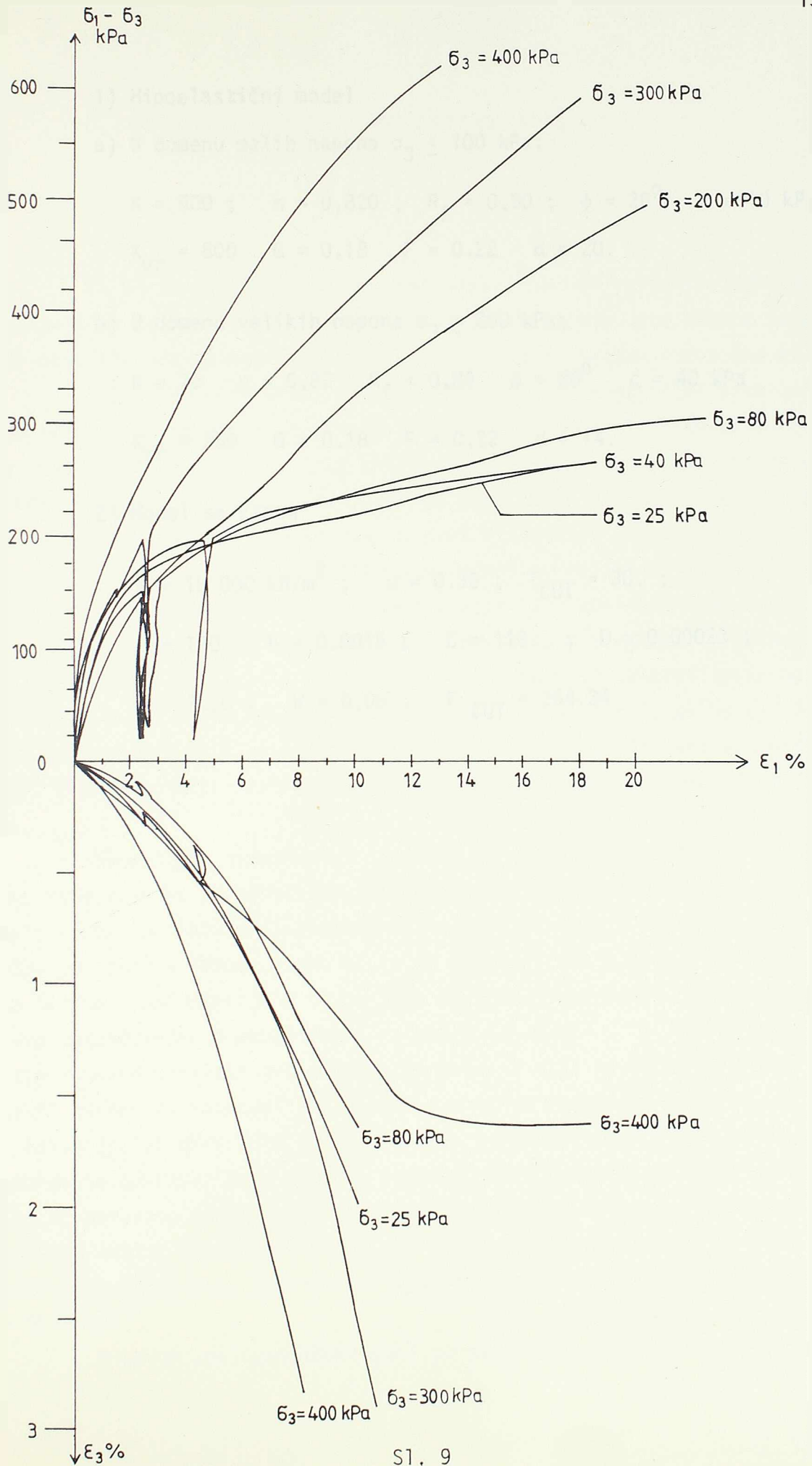
Za formiranje konstitutivnih modela tla, uzorci lesa ispitivani su i u uslovima triaksijalne kompresije CID triaksijalni opiti.

Uzorci makroporoznog lesa ispitivani su pod različitim konsolidacijskim pritiscima: 25, 40, 80 zatim 200, 300 i 400 kPa. Vreme konsolidacije bilo je maksimum do 24 h, posle čega su uzorci izlagani stupnjevitom povećanju devijatora napona. Za vreme opita bočni napon σ_3 zadržavao je konstantnu vrednost. Opterećenje je nanošeno sistemom tegova. Brzina smirivanja deformacije iznosila je od 5' u početnoj fazi opterećenja do 2 h za stanja blizu loma. Pored aksijalne deformacije mreene su i radijalne deformacije pomoću prstena koji je bio postavljen na jednoj trećini visine uzorka. Ova laboratorijska ispitivanja uradjena su u laboratoriji za mehaniku tla na Rudarsko-geološkom fakultetu u Beogradu.

Rezultati triaksijalnih opita prikazani su na sl. 9. Prateći razvoj napona i deformacija sa sl. 9 može se zaključiti da postoji različito ponašanje lesa u zavisnosti od konsolidacijskog pritiska.

Uzorci izloženi konsolidacijskom pritisku $\sigma_3 \leq 100 \text{ kPa}$, pokazuju znatno kruće ponašanje od uzoraka izloženih konsolidacijskom pritisku $\sigma_3 \geq 200 \text{ kPa}$. Znači da makroporozni les pokazuje znatno različito mehaničko ponašanje u domenu napona $\sigma_3 \leq 100 \text{ kPa}$ od ponašanja u domenu $\sigma_3 \geq 200 \text{ kPa}$.

Na poznati način interpretacijom dobijenih laboratorijskih rezultata opita, dobijamo sledeće parametre za formiranje modela tla:



1) Hipoelastični model

a) U domenu malih napona $\sigma_3 \leq 100$ kPa;

$$K = 500 ; \quad n = 0,820 ; \quad R_f = 0,80 ; \quad \phi = 26^\circ \quad c = 10 \text{ kPa}$$

$$K_{ur} = 800 \quad G = 0,18 \quad F = 0,22 \quad d = 20.$$

b) U domenu velikih napona $\sigma_3 \geq 200$ kPa;

$$K = 70 \quad n = 0,82 \quad R_f = 0,80 \quad \phi = 20^\circ \quad c = 40 \text{ kPa}$$

$$K_{ur} = 350 \quad G = 0,18 \quad F = 0,22 \quad d = 14.$$

2) Model sa kapom

$$E = 18\,000 \text{ kN/m}^2 ; \quad \nu = 0,30 ; \quad T_{CUT} = 30. ;$$

$$A = 190. \quad B = 0,0015 ; \quad C = 110. ; \quad D = 0,00023 ;$$

$$R = 2,50 ; \quad W = 0,06 ; \quad F_{CUT} = 364,34$$

6. PRIKAZ REZULTATA NUMERIČKE ANALIZE

6.1. UVOD

Da bi se izvršila provera valjanosti napred opisanih teoriskih rešenja, izvršena je numerička analiza ponašanja aksijalno opterećenog šipa. Rezultati eksperimentalne analize poredjeni su sa rezultatima numeričke analize.

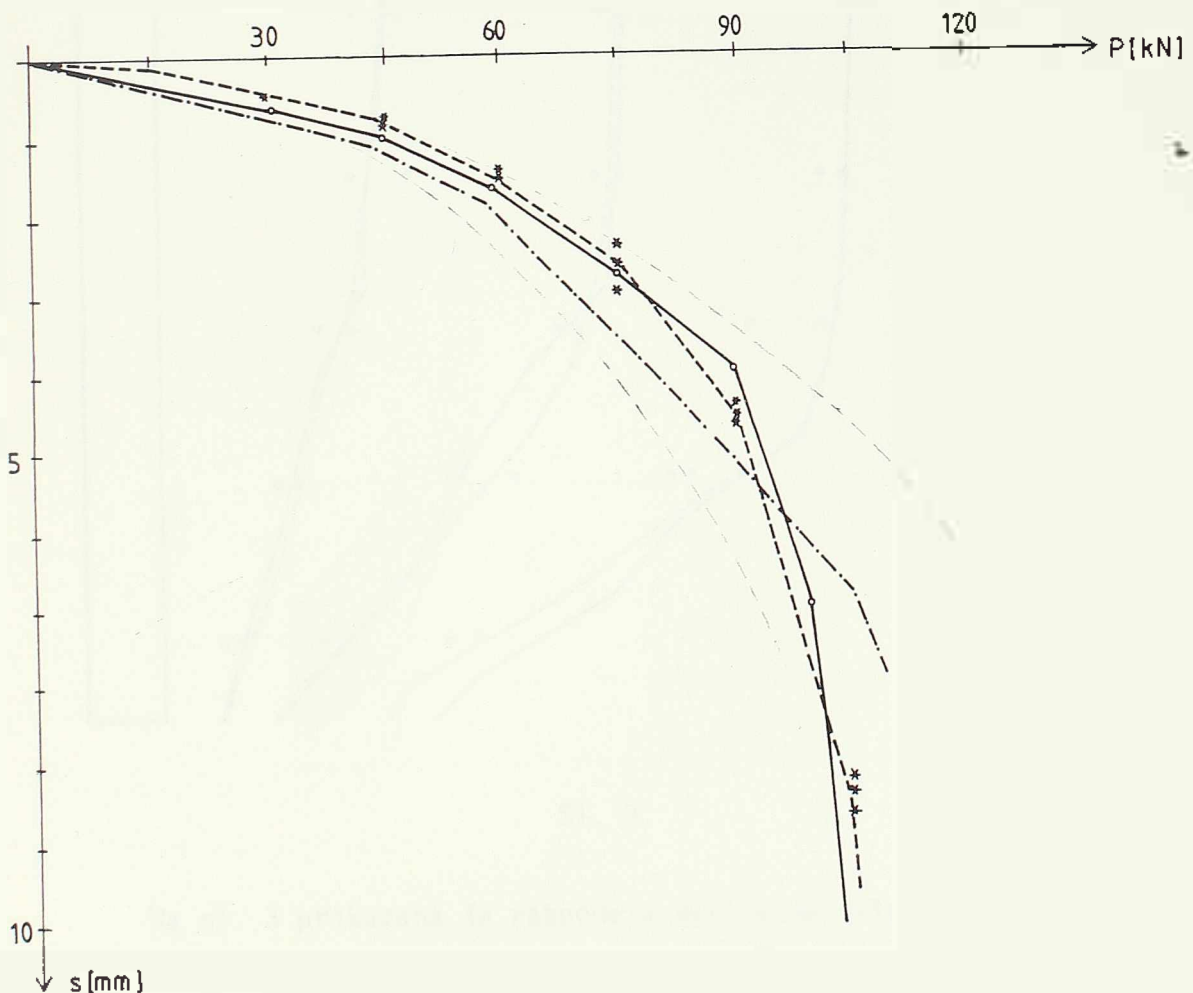
Aksijalno opterećeni šip predstavlja osno simetrični problem. Ovaj problem rešavan je korišćenjem metoda konačnih i kontaktnih elemenata. Posebna pažnja bila je posvećena pravilnoj diskretizaciji kontinuuma na konačne elemente. Mrežom konačnih elemenata obuhvaćen je onaj domen u kome se očekuje promena naponsko-deformacijskog stanja u tlu. U zoni bliže šipu u kojima su značajnije promene naponsko deformacijskih veličina usvojeni su nelinearni modeli tla, dok su u ostalom delu domena usvojeni linearno elastični konstitutivni modeli tla. Kontakt između šipa i tla aproksimiran je kontaktnim elementima. Takođe, kontaktni elementi su usvojeni i na granici domena koji je diskretizovan na konačne elemente, da bi se obuhvatio i uticaj ostalog dela prostora. Na sl. 1 prikazana je mreža konačnih i kontaktnih elemenata. Ukupan broj čvorova u mreži je $N = 701$. U ovoj analizi korišćeni su četvorougaoi konačni elementi sa 8 čvornih tačaka.

Numerička integracija vršena je unutar elemenata u 9 tačaka numeričke integracije. Od kontaktnih elemenata korišćeni su dvočvorni kontaktni elementi sa nelinearnim zavisnostima relativnog pomeranja i napona smicanja. Proračun je vršen u fazama, kako bi se na najbolji način simulirale promene stanja napona i deformacija u tlu i šipu za vreme izvodjenja šipa i za vreme njegovog opterećenja. U prvoj fazi, računaju se naponi u tlu oko šipa usled težine tla i usled pritiska sveže betonske mase na tlo. Korišćenjem restart opcije ovakvi naponi su upamćeni i u daljem proračunu korišćeni su kao početni naponi. Zatim je šip opterećen u inkrementima koncentrisanom vertikalnom silom. Inkrementi su odabrani tako da su u početnoj fazi opterećenja bili veći a kasnije su sa porastom opterećenja smanjivani. Da bi se eliminisalo neuravnoteženo opterećenje unutar inkrementa vršene su interacije kojih je bilo od 1-3. Zavisno od upotrebljenog modela, efektivno vreme rada računara DEC-20 iznosilo je $SPU = 35 - 40'$.

Ovakvom analizom obuhvaćeni su hipoeleastični modeli i elastoplastični modeli sa kapom.

6.2. PRIKAZ DOBIJENIH REZULTATA

Na sl. 2. prikazane su zavisnosti sleganja vrha šipa od opterećenja. Punom linijom prikazani su rezultati numeričke analize dobijeni upotrebom hipoelastičnog modela sa upotrebom promenljivim parametara zavisno od veličine napona σ_3 . Linijom sa tačkom označeni su rezultati numeričke analize dobijeni upotrebom modela sa kapom. Isprekidanom linijom označeni su rezultati eksperimentalne analize. Tankim isprekidanim linijama označeno je rasipanje rezultata numeričke analize pri malim promenama vrednosti parametra tla dobijenih u laboratoriji.



Sl. 2

Poredjenjem dobijenih rezultata numeričke analize sa rezultatima dobijenim pri probnom opterećenju šipova može se zaključiti da su sleganja zadovoljavajuća. U početnoj fazi ponašanje ispitivanih šipova je kruće, odnosno numeričkom analizom dobijaju se nešto veća sleganja. U domenu radnih opterećenja sleganja rezultata ovih analiza su veoma dobra. I pri većim opterećenjima

razlike su nešto veće mada još uvek prihvatljive. Bolje slaganje sa rezultatima eksperimentalne analize dobijeno je upotrebom hipoelastičnog modela nego elastoplastičnog modela sa kapom. Pošto se ispitivani šip nalazi u sloju lesa koji se različito ponaša pri niskim i visokim naponima upotrebom hipoelastičnog modela jednostavnije je napraviti korekcije kojima se ove promene mogu obuhvatiti. Kod modela sa kapom u ovoj numeričkoj analizi računato je sa osrednjenim vrednostima modula K i G a što, neminovno dovodi do većih odstupanja kod materijala kao što je les.

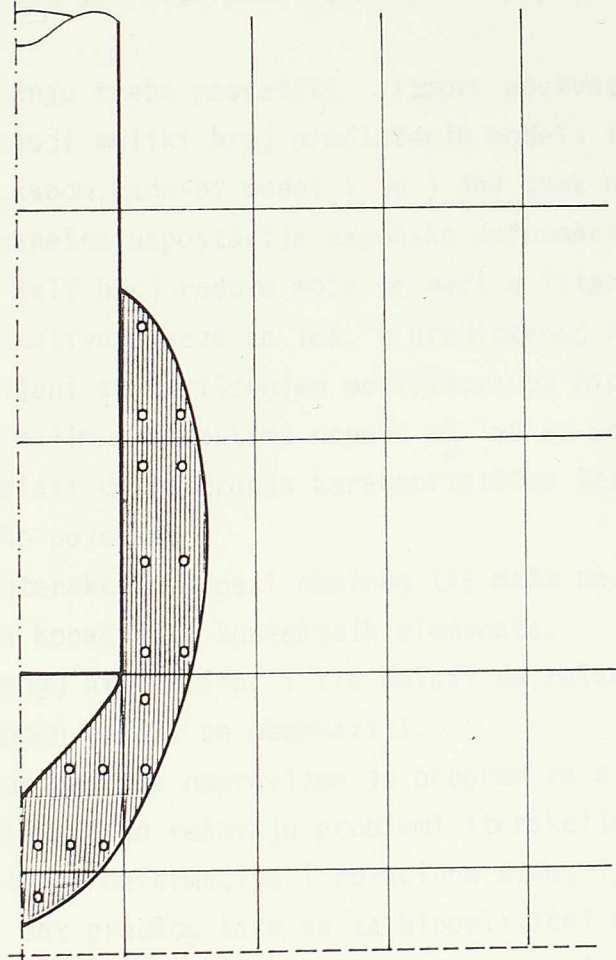


Sl. 3

Na sl. 3 prikazana je raspodela aksijalne sile po dužini šipa. Poređenjem rezultata eksperimentalne i numeričke analize može se zaključiti da su slaganja zadovoljavajuća. U početnoj fazi opterećenja najveći deo sile prenosi se preko omotača šipa na okolno tlo. U kasnijim fazama opterećenja dolazi do iscrpljenja nosivosti omotača šipa pa dodatno opterećenje prihvata baza šipa.

Na vrhu šipa dolazi do male koncentracije normalnih napona i napona smicanja. U nivou baze šipa dolazi do opadanja normalnog napona, pritiska tla na stablo šipa, pa zbog toga opada smičući napon po omotaču šipa. Pošto su ispitivani šipovi relativno kratki, ($L/D \approx 12$), uticaji ovih poremećaja su znat-

no veći nego kod dugih šipova. Pri opterećenju šipa od 60 kN u tlu oko baze šipa dolazi do plastifikacije tla. Ova zona prostire se ispod šipa do dubine $\sim d$ i $2d$ iznad baze šipa oko stabla šipa. Sa porastom opterećenja ova se zona širi. Ispod samog šipa formira se trougao u kome naponsko stanje ostaje u elastičnom domenu. Na sl. 4 prikazana je zona plastičnosti u tlu oko šipa pri opterećenju od 60 kN.



Sl. 4

7. ZAVRŠNI KOMENTARI I ZAKLJUČCI

Upoređivanjem eksperimentalnih i rezultata numeričke analize može se zaključiti da numerička analiza daje rezultate saglasne eksperimentalnim, odnosno, predloženom numeričkom analizom postavljeni problem simuliranja na ponašanja aksijano opterećenog šipa uspešno je rešen. I pored upotrebe moćnih računara ovakve analize još uvek su složene pa nisu prihvatljive za praktičnu upotrebu.

Posebnu pažnju treba posvetiti izboru adekvatnog konstitutivnog modela tla. Mada postoji veliki broj predloženih modela i to veoma kompleksnih (Cam-Clay, model sa kapom, Lade-ov model i td.) još uvek nije pronadjen takav model koji jednako uspešno uspostavlja naponsko deformacijske zavisnosti nezavisno od vrste tla. Mali broj radova može se naći u literaturi koji se bavi problematikom konstitutivnih veza za les. U predloženoj numeričkoj analizi najbolji rezultati dobijeni su korišćenjem modifikovanog hipoeslastičnog modela Duncan-Cahng-a. Pri malim vrednostima napona σ_3 les se ponaša veoma kruto, sa povećanjem napona dolazi do razaranja karakteristične lesne strukture pa se deformabilnost znatno povećava.

Problem interakcije šipa i okolnog tla može se uspešno rešiti samo kombinovanjem metoda konačnih i kontaktnih elemenata.

Pošto izmedju stabla šipa i tla dolazi do relativnog pomeranja, korišćenjem MKE ovaj fenomen nemože se obuhvatiti.

U okviru ovoga rada napravljen je program za elektronski računar pomoću koga mogu uspešno da se rešavaju problemi interakcije konstrukcije i tla u uslovima ravnog stanja deformacije i rotacione simetrije.

U radu je dat predlog kako se za hipoeslastični model tla može sračunati neuravnoteženo opterećenje, čime se omogućuje primena iterativnih postupaka pri rešavanju nelinearnih jednačina MKE.

U okviru eksperimentalnog rada ispitivana su tri probna šipa. Slaganja dobijenih rezultata su zadovoljavajuća pa se dobijeni eksperimentalni rezultati mogu smatrati reprezentativnim, odnosno mogu poslužiti za kontrolu valjanosti numeričke analize.

Da bi numerička analiza bila uspešna neophodno je da se ona sprovodi u fazama tj., neophodno je da se u analizu uključi i uticaj načina izvodjenja šipa. Kod bušenih šipova, zavisno od načina njihovog betoniranja, potrebno je računati sa pritiskom sveže betonske mase na tlo a ne sa pritiskom tla u stanju mirovanja kako se obično radi.

U početnoj fazi opterećenja šipa najveći deo opterećenja prenosi se

preko omotača šipa. Kasnije, sa porastom opterećenja sve više se aktivira baza šipa u prenošenju opterećenja.

Pri većim opterećenjima oko baze šipa formira se zona plastičnosti sa kontinualnim površinama klizanja koje su usmerene prema stablu šipa i završavaju se na kontaktu stabla šipa i tla. Lom ispod baze šipa nastaje kao lom utiskivanja sa formiranjem zone klizanja oko stabla šipa. U nivou baze šipa radijalni napon, pritisak tla na omotač šipa, značajno opada pa se zbog toga na tom delu šipa smanjuje trenje po omotaču šipa.

Pošto je ovakav način analize i pored korišćenja moćnih računara veoma složen, u praksi se koriste jednostavniji numerički modeli u kojima se u analizu uključuju samo neki od navedenih fenomena ponašanja aksijalno opterećenog šipa. Ovakve analize mogu biti uspešne samo u slučajevima kada njihov izvršilac poseduje veliko iskustvo i teorijsko znanje, pa izvrši pravilnu procenu bitnih parametara koji utiču na ponašanje aksijalno opterećenog šipa u svakom konkretnom slučaju.

L I T E R A T U R A

1. Anderson C.A. and Bridwell R.J., "A finite element method for studying the transient non-linear thermal creep of geological structures", *Inter. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol 4, 225-276 (1980).
2. Banerjee P.K. and Davies G.T., The behaviour of axially and laterally loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils *Geotechnique* 28, No 3, 309-329.
3. Braudel H.J., An implicit and incremental formulation for the solution of elastoplastic problems by the finite element method, *Computer & Structures* Vol 22 No. 5. pp 801-819, 1986.
4. Bird W.W. and Martin J.B. "A secant approximation for holonomic elastic-plastic incremental analysis with a von Mises yield condition", *Eng. Comput*, 1986, Vol. 3; September.
5. Bushnell D. "A strategy for the solution of problems involving Large deflections, plasticity and creep", *I.J.H.M. Engineering*, Vol. 11, 683-708 (1977).
6. Byrne P. Eldridge T.L., "A three parameter dilatant elastic stress-strain model for sand", *Int. Sym. N.M. Geomech. /Zurich/ 1982*.
7. Bishop A.W. and Bjerrum L., "The relevance of the triaxial test to the solution of stability problems". *Shear strength conference*.
8. Bathe K.J. and Chandhary A. "A solution method for planar and axisymmetric contact problems", *I.J.N.M. Engineering*, Vol. 21, 65-88 (1985).
9. Bathe K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
10. Brandel H.J., "An implicit incrementally objective formulation for the solution of elastoplastic problems at finite strain by the F.E.M.", *Computers & Structures* Vol. 24. No 6, pp 825-843, 1986.
11. Baladi G.Y. and Rohani B., "An elastic-plastic constitutive model for saturated sand subjected to monotonic and/or cyclic loadings" *Pros 2 rd. Int. Conf. Numer. Meth. in Geomech. Aachen, Germany 1973*.
12. Bathe K.J. Wilson E.L. and Iding R. "NONSAP" University of California Berkeley 1977.
13. Baker R. "Induced anisotropy during plastic straining", *Int. J. N.A. Meth. Geomech*, Vol. 8, 167-185 (1987).

14. Bishop, A.W. and Henkel, D.J. The measurement of soil properties in the triaxial test. London: Arnold. (1957).
15. Bishop A.W. and Henkel D.J. The Measurement of Soil Properties in the Triaxial Test, 2nd ed. London, Arnold, (1957).
16. Chandler R.J. and Martins J.P., "An experimental study of skin friction around piles in clay", *Geotechnique* 32, No 2, 119-132, 1982.
17. Chandrokant S.D., "Numerical Design-Analysis for piles in Sands", *J. Geotechnical Engineering*, GT6, (1974).
18. Chandler H.W., "Aplasticity theory with out Drucker's postulate, suitable for Granular materials", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 33, No. 3, pp. 215-226, (1985).
19. Crisfield M.A. "Plasticity computations using the Mohr-Coulomb yield criterion", *Eng. Comput.* Vo. 4. December. (1987).
20. Chandhary A. and Bathe K.J. "A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction", *Computer & Structures* Vo. 24, No 6, pp 855-873, (1986).
21. Crisfield M.A., "A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through" *J. Computers and Structures*, Vol. 13, pp. 55-62. (1981).
22. Crisfield M.A., "An arc-length method including line searches and accelerations", *I.J.N.M. Engineering*, Vol. 19. 1269-1289 (1983).
23. Carter, J.P. Predictions of the nonhomogeneous behaviour of clay in the triaxial test. *Geotechnique* (32), 55-58. (1982).
24. Davis R.O., Scott R.R., "Rapid expansion of a cylindrical cavity in a Rate-TYPE soil" *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* vol 8 125-140 (1984).
25. Desai C.S. & Phan H.V. "Procedure, selection and application of plasticity models for a soil" *Int J. Numer. Anal. Methods Geomech.* Vol. 5, 295-311 (1981).
26. Damjanić F. and Owen D.R., "Implicit time integration of elasto-viscoplastic solids subject to the Mohr-Coulomb yield criterion", *I.J.H.M. Engineering*, Vol. 18, 1873-1881 (1982).
27. Desai C.S. and Siriwardane H.J., "A concept of correction functions to account for non-associative characteristics of geologic media", *Int. J. Num. Analy. Meth. Geomech.*, Vol. 4, 377-387 (1980).

28. Desai C.S. and Zaman M.M., "Thin-layer element for interfaces and joints", Inter. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. Vol. 8, 19-43 (1984).
29. Desai C.S. "A General Basis for yield, failure and potential functions in plasticity", Inter. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., Vol. 4. (1980).
30. Desai C.S. and Siriwardane H.J. "A concept of correction functions to account for non-associative characteristics of geologic media", Inter. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., Vol. 4. No. 4. (1980).
31. Dickin E.A. & King G.J., "The behaviour of hyperbolic stress-strain models in triaxial and plane strain compression" Int. Sym. Num. Models in Geomech. /Zurich/ (1982).
32. Duncan J.M. and Chang, C.Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils. Proc. ASCE J. Soil Mech. Found. Engg, (96), SM5, 1929-1953, (1970).
33. Evgin E. and Morgenstern N.R., "A nonlinear soil model in ADINA", Computers & Structures Vol. 24, No. 4, pp. 581-587, 1986.
34. Florence A.L. and Schwer L.E. "Axisymmetric compression of a Mohr-Coulomb medium around a circular hole", Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech. Vol. 2, 367-379 (1987).
35. Frank R. and Guenot A., "Numerical analysis of contacts in geomechanics", Proc. 4rd. Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton. (1983).
36. Gdela M.S., "A modified plasticity theory for porous metals", I.J.N.M. Engineering, Vol. 15, 649-660 (1980).
37. Goncalves O.J. and Owen R.D., "Incremental elastoplastic stiffness matrix for materials obeying the principal stress yield criterion", I.J.N.M. Engineering, Vol. 20, 1477-1489 (1984).
38. Chabussi J. and Momen H. "Plasticity model for inherently anisotropic behaviour of sand" Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., Vol. 8, 1-17 (1984).
39. Gudehus G. (Ed.), Finite Element Methods in Geomechanics, Wiley Chichester (1977).
40. Graham, J. and Houlsby, G.T. Anisotropic elasticity of a natural clay. Geotechnique (33), 165-180. (1983).
41. Henkel D.J., "The shear strength of saturated remoulded clays", Shear strength conference.
42. Haidin N. "Teorija plastičnosti" Predavanja na III stepenu, Gradj. fak. Beograd.

43. Hill, R. The mathematical theory of plasticity. Oxford: Oxford University Press. (1950).
44. Henkel, D.J. The effect of overconsolidation on the behaviour of clays during shear. *Géotechnique* (6), 139-150. (1956).
45. Henkel, D.J. The shear strength of saturated remoulded clays. Proc. ASCE Conf. Shear Strength of Cohesive Soils, 533-554, Boulder. (1960).
46. Ivanović M. Ponašanje betona u oblasti granične ravnoteže, Doktorska disertacija (1965).
47. IImtiaz A.C.K. Fung: Computer design and impementation USA (1981).
48. Jetteur P., "Implicit integration algorithm for elastoplasticity in plane stress analysis" *Eng. Comput.* Vol. 3. (1986).
49. Kalajdžić M. Metod konačnih elemenata, Beograd (1978).
50. Kojić M. Primenjena teorija plastičnosti, Kragujevac, (1979).
51. Kojić M. and Bathe K.J. "The Effective-stress-function, algorithm for thermo-elasto-plasticity and creep", *I.J.N.M. Engineering*, Vol. 24, 1509-1532 (1987).
52. Krieg R.D. and Krief D.B. Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model, *J. Pressure Vessel Technology*, ASME 99 510-515. (1977).
53. Lazović M., Djordjević Z. Prilog odredjivanju raspodela aksijalne sile po dužini šipa, SASDMF Donji Milanovac 1987.
54. Lo S.H., "Stress evaluation alogorithms for kate constitutive equations in finite deformation analysis", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol 26, 121-141 (1988).
55. Loret B. and Prevost H., "Accurate numerical solutions for Drucker-Prager elastic-plastic models", *Computer meth. Appl. Mech. Engineering* 54 259-277, (1986).
56. Lade P. and Nelson R., "Incrementalization procedure for elasto-plastic constitutive model with multiple, inter secting yield surfaces", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* Vo. 8, 311-323 (1984).
57. Leland M.K. and Ray R., "Theoretical t-z curves", *J. Geot. Enginee. Division*, ASCE, GT11, november 1981.
58. Lade, P.V. and Duncen, J.M. Gubical triaxial tests on cohesionless soil. *Proc. ASCE J. Soil Mech. Found. Engg Div.* (99), SM10, 7930812. (1973).

59. Lade, P.V. and Duncan. J.M. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil. Proc. ASCE J. Geotech. Engg. Div. (101), GT10, 1037-1053. (1975),
60. Mattes N. and Poulos G. "Settlement of single compressible pile", J.S. Mechanics and Foundations division, ASCE, SM1, 1979.
61. Muhovec I. "Analitička veza $P=P(S)$ kod statičkog ispitivanja pilota", Geotehnika - Zagreb 1981.
62. Marques J.M. and Owen D.R., "Implicit-explicit time integration in quasi-static elastoviscoplasticity using finite and in finite elements", C. Methods in A. Mech. Engin. 42 (1984) 167-182.
63. Moss W.C., "On the computational significance on the strain space formulation of plasticity theory", I.J.N.M. Engineering, Vol. 20, 1703-1709 (1984).
64. Marković G. "Geotehničke karakteristike lješnih terena sa posebnim osvrtom na urbanu gradnju", Institut za puteve, Beograd 1987.
65. Meyerhof. F.F. Bearing capacity and settlement of pile foundations. J. Geotech. Engng Div. Am. Soc. Civ. Engrs 102. GT 3, 197-228. (1976).
66. Mitchell, J.K. Fundamentals of soil behaviour. New York: John Wiley. (1976).
67. Nayak G.C. and Zienkiewicz O.C. "Elasto-plastic stress analysis a generalization for various constitutive relations including strain softening", I.J. N.M. Engineering, Vol. 5, 113-135 (1972).
68. Nysson C. "An efficient and accurate iterative method, allowing large incremental steps, to Solve elasto-plastic problems", Computers & Structures. Vol. 13, pp. 63-71, 1981.
69. Ottaviani M., "Observed and predicted test pile behaviour" Int J, Numer. Anal. Methods. Geomech., Vol 3, 131-143 (1979).
70. Ortiz M. and Popev E.P. "Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations", I.J.N.M, Engineering, Vol. 21, 1561-1576 (1985).
71. Ortiz M. and Simo J.C., "An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations", I.J.N.M. Engineering, Vol. 23, 353-366 (1986).
72. Ottosen N.S. and Gunneskov O., "Nonlinear subincremental method for determination of elastic-plastic-creep behaviour", I.J.N.M, Engineering, Vo. 21, 2237-2256 (1985).

73. Parry H.G. "Pile design", Cambridge University Engineering Department, 1979.
74. Pouls H. "Settlement of single piles in nonhomogeneous soil", J. Geotechnical Engineering, ASCE, GT 5, 1979.
75. Pujević B. "Elasto-plastična analiza dvodimensionalnih problema metodom konačnih elemenata" Magistarski rad, Beograd 1983.
76. Poulos G.H. and Davis E.H. "Pile foundation analysis and design" John Wiley & Sons 1980.
77. Pender M.J. "A model for the behaviour of overconsolidated soil", Géotechnique 28, No. 1, 1-25, (1978).
78. Prevost, J. H. Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behaviour. Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech. (1), 195-216. (1977).
79. Randolph, M.F., Carther, J.P. and Wroth, C.P. Driven piles in clay - the effects of installation and subsequent consolidation. Géotechnique (29), 361-393. (1979).
80. Randolph M. and Wroth P., "Analysis of Deformation of vertically loaded Piles", J.G. Engineering division ASCE, GT 12, (1978).
81. Randolph M. and Wroth P., "An analytical solution for the consolidation around a driven Pile", Int. J. Numer. Anal. Methods. Geomech. Vol. 3, 217-229 (1979).
82. Rowe P.W., "Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil", Soil behaviour.
83. Riks E., "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, Int. J. Solids Structures, Vol. 15, (1979).
84. Roscoe, K.H., Schofield A.N. and Wroth C.P., On the yielding of soils. Géotechnique, 9, 71-83, (1958).
85. Roscoe, K.H., The influence of strains in soil mechanics. Géotechnique (20), 129-170, (1970).
86. Roscoe K.H. and Poorooscasb H.B. A theoretical and experimental study of strains in triaxial compression tests on normally consolidated clays. Géotechnique, 13, 12-38, (1963).
87. Sekulović M., Nelinearna teorija elastičnosti, Beograd 1976.
88. Smith I.M. "Programming the Finite element method", John Wilcy & Seus, 1982.

89. Spilner R.L. and Pain T.H., "Hybrid-Stress models for elasti-plastic analysis by the initial-stress approach" *Int. J.N.M. Engineering Vol. 14*, 359-378 (1979).
90. Simo J.C. and Taylor R.L., "Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity", *Compu. Meth. App. Mech. Engin. 48* (1985) 101-118 North-Holland.
91. Simo J.C. and Ortiz M., "A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive Equations", *Comp. M. A.M.E. 49* (1985) 221-245, North-Holland.
92. Skempton, A.W. Effective stresses in soils, concrete and rocks. *Proc. Conf. Pore Pressures and Suction in Soils*, 4-16, London (1960).
93. Shofield, A.N. and Wroth, C.P., *Critical state soil mechanics*. London McGraw Hill. (1968).
94. Skempton A.W. and Sowa V.A., The behaviour of saturated clays during sampling and testing. *Geotechnique*, 13, 269-290, (1965).
95. Simo J.C. and Wriggers, "A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems", *Compu. Meth. Appl. Mech. Engin. 50* (1985) 163-180 North-Holland.
96. Stevanović S. i Lazović M. "Priilog nelinearnoj analizi poprečno opterećenog šipa" *Izgradnja br. 4*, 1984.
97. Sandhu R. and Wilson L., "Finite element analysis of seepage in elastic media", *J. Enginee. Mech. Division EM. 3*. June 1969.
98. Stevanović S. i Lazović M. "Interpretacija rezultata probnih opterećenja feanki šipova".
99. Stevanović S. "Fundiranje I" *N. Knjiga*, Beograd, 1982.
100. Sekulović M., "Metod konačnih elemenata" Beograd, 1984.
101. Sture S., Desai C.S. & Janardhanam R., "Development of a constitutive law for an artificial soil", *Proc. 3rd Int. Conf. Numerical Methods in Geomech. Aachen*, 1979.
102. Sandler I.S. & Baron M.L. "Recent developments in the constitutive modeling of geological materials", *Proc. 3rd. Int Conf. Numer. Methods in Geomech. Aachen*, 1979.
103. Stojadinović R., "Reologija tla" Beograd, 1971.

104. Stevanović S., "Fundiranje III", Gradj. fak. Beograd, 1974.
105. Sandler I.S. and Rubin D., "An algorithm and a modular subroutine for the cap model" I.J. Numer. Anal. Meth. in Geomech. Vol. 3, 173-186 (1979).
106. Tracey M.D. and Freese F.G., "Adaptive load incrementation in elastic-plastic finite element analysis", Computers & Structures Vol. 13, pp. 45-53, 1981.
107. Thomas T.J. and Hair S., "A numerical study of plasticity models and finite element types" Computers & Structures Vol 16. No. 5 pp. 669-675, (1983).
108. Tomlinson M.J. "Foundation Design and Construction" Pitman Adv. Publi. Program Boston London, Melbourne , Fourth edition (1980).
109. Vesić A. "A study of bearing capacity of deep foundations" Georgia institute of Technology, 1967.
110. Vasić, A.S. Expansion of cavities in an infinite soil mass. Proc. ASCE J. Soil Mech. Found. Engg Div., (98) SM3, 265-290, (1972).
111. Wroth, C.P. Some aspects of the elastic behaviour of overconsolidated clay. Proc. Roscoe Memorial Symposium, 347-361, Foulis (1971).
112. Wroth, C.P. The interpretation of in situ soil tests (24th Tankine Lecture). Géotechnique (34) (in press). (1984).
113. Xiurun Ge. "Non-linear analysis of a joint and its application in rock engineering" Inter. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., Vol. 5, 129-245 (1981).
114. Zienkiewicz O.C., Valliappan and King, "Elasto-plastic solutions of engineering problems" Initial stress", finite element approach", I.J.N.M. Engineering, Vol 1, 75-100 (1969).
115. Zienkiewicz O.C. and Cormean I.C. "Visco-plasticity-plasticity and creep in elastic solids-a unified numerical solution approach", I.J.N.M. Engineering, Vol. 8, 821-845 (1974).
116. Zaman M.M. and Desai C.S., "An algorithm for determining parameters for cap/model from raw laboratory test data", Proc. 4rd Int. Conf. Numer. Meth. in Geomech., Edmonton (1983).
117. Zienkiewicz O.C. and Haylor D.J. "The adaptation of critical state soil mechanics theory for use in finite elements", Soil behaviour.

118. Šuklje L. Objašnjenje pravilnika o tehničkim normativima za projektovanje i izvodjenje radova kod temeljenja građevinskih objekata, časopis "Izgradnja" Beograd (1979).
119. Čorko D. Odredjivanje nosivosti i kvaliteta pilota provedbom pokusa "IN SITU", Zagreb 1978.



