

## ПРОРАЧУНСКИ МОДЕЛ ЗА ДРВЕНЕ НОСАЧЕ ОЈАЧАНЕ КАРБОНСКИМ ТРАКАМА

Бошко Стевановић<sup>1</sup>

Иван Глишовић<sup>2</sup>

Марија Тодоровић<sup>3</sup>

УДК: 624.011.1:624.074.6

DOI: 10.14415/konferencijaGFS2014.024

**Резиме:** У раду је описан прорачунски модел развијен за предвиђање носивости и крутости дрвених носача ојачаних карбонским тракама. Модел је калибрисан на основу добијених резултата испитивања неојачаних носача и модификован како би се узео у обзир ефекат карбонског ојачања. На примеру ојачаних носача од лепљеног ламелираног дрвета, теоријски резултати су упоређени са експерименталним резултатима и забележено је добро слагање.

**Кључне речи:** Дрвени носачи, карбонска влакна, ојачање, теоријска анализа

### 1. УВОД

Код дрвених елемената напрегнутих на савијање, иницијални лом настаје углавном у затегнутој зони у близини кврга, дефеката или на местима попречног спајања ламела код лепљених ламелираних носача. Лом дрвета услед затезања је тешко предвидив и изузетно крт. Повећање носивости, крутости и дуктилности дрвених носача може се постићи ојачањем применом материјала велике чврстоће и високог модула еластичности као што су CFRP (Carbon Fibre Reinforced Polymer) композити. Развој прорачунског модела којим се може одредити крутост и гранична носивост ојачаних носача је кључан за оптималну употребу карбонских трака, као и за њихову ширу примену. Због комплексности дрвета као материјала, прорачун дрвених конструкција се обично спроводи према теорији допуштених напона. Ово подразумева да се понашање дрвета представи једноставним линеарно-еластичним моделом и да лом дрвених елемената изложених савијању увек настаје услед затезања. Међутим, ојачањем у затегнутој зони веза напон-дилатација у попречном пресеку се мења. Стога, нелинеарност услед пластичног понашања дрвета у притиснутој зони мора бити присутна у прорачунском моделу тако да што тачније описује понашање ојачаних дрвених носача.

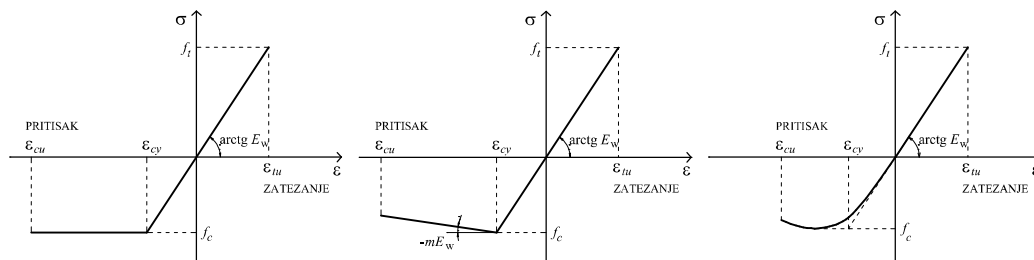
<sup>1</sup> Проф. др Бошко Стевановић, дипл.инж.грађ., Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Булевар краља Александра 73, Београд, Србија, тел: 011 3218 545, e-mail: [bole@imk.grf.bg.ac.rs](mailto:bole@imk.grf.bg.ac.rs)

<sup>2</sup> Асист. др Иван Глишовић, дипл.инж.грађ., Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Булевар краља Александра 73, Београд, Србија, тел: 011 3218 545, e-mail: [ivang@imk.grf.bg.ac.rs](mailto:ivang@imk.grf.bg.ac.rs)

<sup>3</sup> Асист. Марија Тодоровић, маст.инж.грађ., Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Булевар краља Александра 73, Београд, Србија, тел: 011 3218 545, e-mail: [marijat@grf.bg.ac.rs](mailto:marijat@grf.bg.ac.rs)

## 2. КОНСТИТУТИВНИ МОДЕЛИ ЗА МАТЕРИЈАЛЕ

Анализа нелинеарног понашања ојачаних носача од дрвета захтева дефинисање везе напон-дилатација за дрво при затезању и при притиску. Генерално, конститутивно понашање дрвета може се описати кроз различите моделе (слика 1), које карактерише различит степен апроксимације. Модел 3, у односу на наведене моделе, даје најбољи опис стварног понашања дрвета, али је најкомпликованији.



Слика 1 - Конститутивни материјали за дрво

CFRP материјал се може идеализовати линеарно-еластичним моделом са кртим обликом лома.

## 3. ПРОРАЧУН НОСИВОСТИ

Инспирисани рачунским моделима за армирани бетон, различити аутори су предложили рачунске моделе за ојачане дрвене носаче изложене савијању [1, 2]. Ови модели узимају у обзир реално понашање материјала, а капацитет носивост се одређује у зависности од могућих облика лома. На основу датих истраживања и сопствених експерименталних испитивања, теоријски модел је развијен у циљу предвиђања понашања дрвених носача ојачаних карбонским тракама.

Основне претпоставке и упрошћења усвојеног модела:

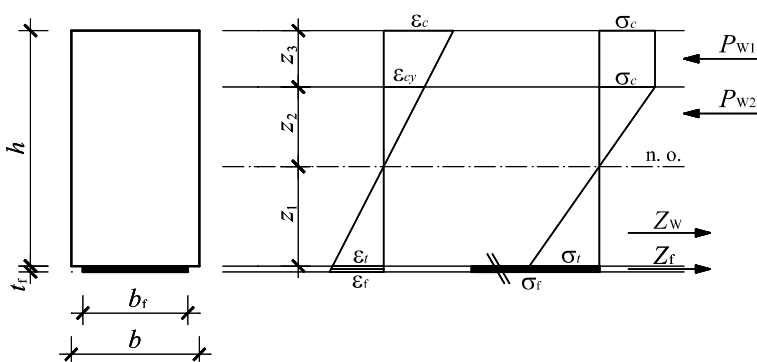
- Попречни пресеци при деформацији остају равни;
- Остварени лепљени спој између дрвета и карбонске траке је идеалан;
- Еластична својства лепка се не узимају у обзир;
- Понашање дрвета је линеарно-еластично при затезању и еласто-идеално пластично при притиску (модел 1, слика 1);
- Понашање карбонске траке при затезању је линеарно-еластично;
- Утицај слабљења попречног пресека услед пластификације се занемарује.

Прорачуном се одређује момент савијања у најоптерећенијем пресеку носача за одређени ниво дилатације затезања ивичних дрвених влакана. На основу срачунате вредности момента савијања даље се може израчунати вредност оптерећења.

Експериментална испитивања су показала да је најчешћи механизам лома ојачаних носача онај при коме се јавља лом дрвета у затегнутој зони, са или без делимичне пластификације притиснуте зоне. Дрво се понаша линеарно-еластично до достизања дилатације течења дрвета на горњој ивици пресека. Као што је

дефинисано конститутивним моделом, када дилатације притиска пређу границу еластичности јавља се пластификација притиснуте зоне и напони притиска не могу више расти. Ово проузрокује померање неутралне осе тако да услови равнотеже буду задовољени. Понашање ојачаног носача у овој фази је пластично до лома који настаје достизањем граничне вредности напона затезања на доњој ивици пресека, уколико пре тога није дошло до лома услед достизања граничне дилатације притиска на горњој ивици дрвеног пресека.

Идеализована расподела дилатација и напона по висини ојачаног носача правоугаоног пресека, ширине  $b$  и висине  $h$ , ојачаног карбонском траком, ширине  $b_f$  и дебљине  $t_f$ , приказана је слици 2.



Слика 2 - Расподела дилатација и напона у оквиру попречног пресека

Познавајући дилатације  $\epsilon_t$  и  $\epsilon_{cy}$  из услова компатибилности могу се одредити карактеристичне дилатације у попречном пресеку:

$$\epsilon_c = (z_3 + z_2) / z_2 \cdot \epsilon_{cy}, \quad (1)$$

$$\epsilon_f = (z_1 + t_f / 2) / z_1 \cdot \epsilon_t \quad (2)$$

са

$$z_2 = (\epsilon_{cy} / \epsilon_t) \cdot z_1, \quad (3)$$

$$z_3 = h - (z_1 + z_2), \quad (4)$$

где је:

$\epsilon_c$  - дилатација затезања на доњој ивици дрвеног пресека;

$\epsilon_{cy}$  - дилатација пластичног течења дрвета;

$\epsilon_t$  - дилатација притиска на горњој ивици дрвеног пресека;

$\epsilon_f$  - дилатација затезања у карбонској траци;

$z_1$  - удаљење неутралне осе од доње ивице дрвеног пресека;

$z_2$  - удаљење неутралне осе од зоне пластификације дрвеног пресека;

$z_3$  - висина зоне пластификације дрвеног пресека;

За познате вредности дилатација, одговарајуће вредности напона у попречном пресеку се могу израчунати према усвојеним везама напон-дилатација:

$$\sigma_t = E_w \cdot \epsilon_t, \quad (5)$$

$$\sigma_c = E_w \cdot \varepsilon_{cy} = f_c, \quad (6)$$

$$\sigma_f = E_f \cdot \varepsilon_f, \quad (7)$$

где је:

$\sigma_t$  - напон затезања на доњој ивици дрвеног пресека;

$\sigma_c$  - напон притиска у оквиру зоне пластификације дрвеног пресека;

$\sigma_f$  - напон затезања у карбонској траци;

$E_w$  - модул еластичности дрвета;

$E_f$  - модул еластичности карбонске траке;

$f_c$  - чврстоћа дрвета на притисак.

Положај неутралне осе (непозната  $z_1$ ) одређује се из услова равнотеже унутрашњих сила у правцу подужне осе носача:

$$P_{w1} + P_{w2} = Z_w + Z_f, \quad (8)$$

при чему су унутрашње силе дефинисане у складу са дијаграмом напона у попречном пресеку, и то силе у притиснутој зони као:

$$P_{w1} = (z_3 \cdot b) \cdot \sigma_c, \quad (9)$$

$$P_{w2} = (0,5 \cdot z_2 \cdot b) \cdot \sigma_c, \quad (10)$$

а силе у затегнутој зони као:

$$Z_w = (0,5 \cdot z_1 \cdot b) \cdot \sigma_t, \quad (11)$$

$$Z_f = (b_f \cdot t_f) \cdot \sigma_f. \quad (12)$$

Резултујући момент савијања,  $M$ , може се израчунати као сума момената унутрашњих сила око неутралне осе:

$$M = \left(\frac{2}{3} z_1\right) \cdot Z_w + \left(z_1 + \frac{t_f}{2}\right) \cdot Z_f - \left(z_2 + \frac{z_3}{2}\right) \cdot P_{w1} - \left(\frac{2}{3} z_2\right) \cdot P_{w2}. \quad (13)$$

#### 4. ПРОРАЧУН КРУТОСТИ

Крутост на савијање ојачаних носача се може израчунати користећи конвенцијални метод трансформисаног попречног пресека, према теорији круто спрегнутих пресека за линеарно-еластично стање. Пластичне деформације се не разматрају, јер се крутост користи за проверу граничног стања употребљивости.

Положај неутралне осе трансформисаног пресека у односу на тежиште дрвеног пресека ( $z_w$ ) и тежиште карбонске траке ( $z_f$ ) се рачуна према следећим изразима:

$$z_w = \frac{E_f \cdot A_f \cdot 0,5 \cdot (h + t_f)}{E_w \cdot A_w + E_f \cdot A_f}, \quad (14)$$

$$z_f = 0,5 \cdot (h + t_f) - z_w, \quad (15)$$

где су  $A_w$  и  $A_f$  површине попречног пресека дрвеног носача и карбонске траке:

$$A_w = b \cdot h, \quad (16)$$

$$A_f = b_f \cdot t_f. \quad (17)$$

Крутост,  $EI$ , ојачаног носача се рачуна према изразу:

$$EI = E_w \cdot I_w + E_f \cdot I_f + E_w \cdot A_w \cdot z_w^2 + E_f \cdot A_f \cdot z_f^2 \quad (18)$$

где су  $I_w$  и  $I_f$  сопствени моменти инерције попречног пресека дрвеног носача и карбонске траке:

$$I_w = b \cdot h^3 / 12, \quad (19)$$

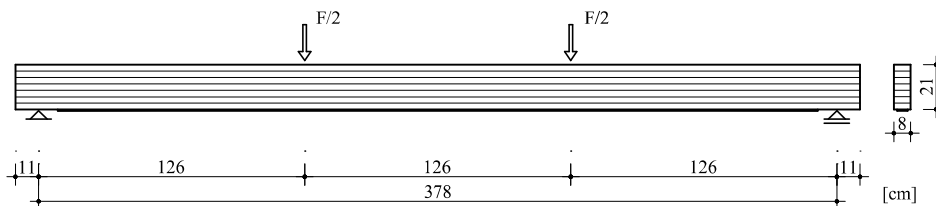
$$I_f = b_f \cdot t_f^3 / 12. \quad (20)$$

## 5. ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ИСТРАЖИВАЊЕ

Експериментално истраживање је спроведено са циљем утврђивања понашања носача од лепљеног ламелираног дрвета ојачаних карбонским тракама [3]. Десет носача ојачаних са једном траком постављеном са спољашње стране у затегнутој зони и пет контролних неојачаних носача испитано је на савијање до лома.

Лепљени ламелирани дрвени носачи су израђени од четинарске грађе (смрека) I класе квалитета. Носачи су димензија 8x21x400 cm, а формиран су спајањем 7 ламела ширине 8 cm и дебљине 3 cm. Ојачање лепљених ламелираних дрвених носача извршено је карбонским тракама Sika CarboDur S613, ширине 60 mm и дебљине 1,3 mm. Карбонске траке су залепљене за носаче лепком Sikadur-30.

Сви носачи испитани су на савијање као просте греде распона 378 cm (18 пута висина носача) оптерећене концентрисаним силама у трећинама распона, у складу са EN 408. Шематски приказ диспозиције испитивања је дат на слици 3.



Слика 3 - Диспозиција испитивања носача

## 6. КАЛИБРАЦИЈА МОДЕЛА

За примену усвојеног модела неопходно је познавати вредности напона и дилатација који дефинишу конститутивне моделе материјала. Управо, критична тачка прорачунског поступка је избор најадекватније вредности за граничне вредности напона за дрво. Чињеница да је гранични напон затезања при савијању већи од граничног напона затезања при аксијалном затезању узета је у обзир усвајањем да до лома у затегнутој зони долази при достизању чврстоће дрвета на савијање. Присуство карбонског ојачања омогућава већу чврстоћу дрвета на савијање. Сходно резултатима анализе мерених дилатација затезања код неојачаних и ојачаних носача, усвојено је повећање чврстоће дрвета на савијање за 25% услед присуства хоризонтално постављене карбонске траке.

Табела 1 - Механичке карактеристике материјала

Карактеристика		Вредност
$f_m$	Чврстоћа дрвета на савијање	42,5 МПа
$f_c$	Чврстоћа дрвета на притисак	36,3 МПа
$\varepsilon_{cy}$	Дилатација на граници течења за дрво	3,3‰
$\varepsilon_{cu}$	Гранична дилатација притиска за дрво	10‰
$E_w$	Модул еластичности дрвета	11080 МПа
$E_f$	Модул еластичности карбонске траке	165543 МПа

Механичке карактеристике за дрво и CFRP композит коришћене у прорачуну дате су у табели 1. Приказане вредности су базиране на добијеним експерименталним резултатима испитивања материјала према одговарајућим EN стандардима.

## 7. ПОРЕЂЕЊЕ МЕРЕНИХ И РАЧУНСКИХ ВРЕДНОСТИ

У табели 2 приказане су просечне вредности експерименталних резултата за максимални момент и крутост на савијање, као и вредности датих величина одређене према аналитичком прорачуну.

Табела 2 - Поређење експерименталних и теоријских резултата

	Максимални момент савијања (kNm)	Крутост на савијање $EI$ (kNm <sup>2</sup> )
Експериментално испитивање	37,2	772,7
Аналитички прорачун	35,6	818,9
Разлика (%)	-4,5	6,0

Може се закључити да аналитички прорачун даје задовољавајуће предвиђање које се добро слаже са експерименталним резултатима. То значи да модел може бити примењен у реалним прорачунским ситуацијама. Додатна испитивања би требало да комплетирају поступак прорачуна усвајањем фактора сигурности, тако да се успостави сигуран, поуздан и тачан модел који се може примењивати у свакодневной инжењерској пракси.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Blass, H. J., Romani, M.: Desing model for FRP reinforced glulam beams. *In: CIB-W18 Meeting 34*, Venice, Italy, 2001, 34-12-3.
- [2] Borri, A., Corradi, M., Grazini, A: A method for flexural reinforcement of old wood beams with CFRP materials. *Composite: Part B*, 2005, 36, p. 143-153.
- [3] Стевановић, Б., Глишовић, И., Петровић, М.: Примена карбонских трака за ојачање дрвених носача. *Грађевински календар 2013*, 2012, 45, с. 167-200.

## DESIGN MODEL FOR TIMBER BEAMS REINFORCED WITH CFRP PLATES

***Summary:** This paper describes design model developed to predict the flexural capacity and stiffness of timber beams reinforced with CFRP plates. The model is calibrated using the results of the unreinforced beams tests and modified to account for the effect of the CFRP reinforcement. Theoretical results of reinforced glulam beams were compared to experimental results and they match well.*

***Keywords:** Timber beams, carbon fibers, reinforcement, theoretical analysis*