

UNIVERZITET U BEOGRADU

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Mr Svetlana M. Kostić

**MODEL GENERALISANE
PLASTIČNOSTI KOD NELINEARNE
ANALIZE PROSTORNIH OKVIRNIH
KONSTRUKCIJA**

doktorska disertacija

Beograd, 2013.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

MSc Svetlana M. Kostić

**GENERALIZED PLASTICITY MODEL
FOR NONLINEAR SPACE FRAME
ANALYSIS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2013.

Mentori: Dr Dragoslav Šumarac, redovni profesor, Građevinski fakultet
Univerziteta u Beogradu

Dr Biljana Deretić-Stojanović, vanredni profesor, Građevinski fakultet
Univerziteta u Beogradu

Članovi komisije:

Dr Dragoslav Šumarac, redovni profesor, Građevinski fakultet
Univerziteta u Beogradu

Dr Aleksandar Prokić, redovni profesor, Građevinski fakultet Subotica,
Univerzitet u Novom Sadu

Dr Biljana Deretić-Stojanović, vanredni profesor, Građevinski fakultet
Univerziteta u Beogradu

Dr Mira Petronijević, vanredni profesor, Građevinski fakultet
Univerziteta u Beogradu

Dr Saša Stošić, docent, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

Datum odbrane:

ZAHVALNICA

Zahvaljujem se mojim mentorima, prof. dr Biljani Deretić-Stojanović i prof. dr Dragoslavu Šumarcu na podršci i razumevanju tokom izrade ove teze. Profesorka Biljana Deretić-Stojanović mi je bila veliki oslonac tokom čitavog posle diplomskog školovanja i tokom izrade ove disertacije. Ona je sjajan profesor, ali i izuzetan čovek i zaista smatram svojom velikom privilegijom to što sam imala i imam priliku da radim sa njom.

Ogromnu zahvalnost dugujem i prof. dr Filip C. Filippou sa fakulteta Berkeley u Kaliforniji koji mi je ukazao veliku čast i poverenje prihvativši me kao svog studenta. Podelio je samnom nebrojeno mnogo sati razgovora, usmeravao, hrabrio i bodrio me tokom istraživanja i izrade ove disertacije. Moram da naglasim da je on za mene mentor podjednako koliko i moja prethodna dva profesora. Zaista sam ponosna što sam imala priliku da upoznam i saradujem sa profesorom Filippou-om.

Zahvaljujem se svojim roditeljima, ocu Miroslavu i majci Ljiljani, što su uvek verovali u mene i pomagali mi kada god je to bilo potrebno.

Konačno, veliko hvala mom suprugu Saši za nesebičnu podršku, ljubav i ogromno strpljenje tokom svih ovih godina rada.

MODEL GENERALISANE PLASTIČNOSTI KOD NELINEARNE ANALIZE PROSTORNIH OKVIRNIH KONSTRUKCIJA

Rezime

Predmet disertacije je efikasna nelinearna analiza okvirnih konstrukcija grednim konačnim elementima sa težištem na modeliranju materijalnih nelinearnosti. Geometrijska nelinearnost se uzima u obzir poznatim metodama. U tezi su analizirana i unapređena dva gredna konačna elementa: fiber element i element koncentrisane plastičnosti i napisan je sopstveni kompjuterski program kojim su elementi implementirani u postojeći open-source program za analizu konstrukcija – FEDEASLab.

Tokom rada na tezi, ostvareni su sledeći ciljevi. Izvršena je optimizacija integracije poprečnog preseka čeličnih i armirano-betonskih elemenata u cilju poboljšanja efikasnosti fiber elemenata kako pri cikličnom pseudo-statičkom opterećenju, tako i pri nelinearnoj dinamičkoj analizi pojedinih delova i čitave konstrukcije. Formulirana su praktična pravila i definisane jasne smernice za diskretizaciju poprečnog preseka čeličnog I profila i pravougaonog armirano-betonskog preseka, u zavisnosti od vrste analize koja se sprovodi i željene tačnosti. Razvijen je novi konačni elementa iz grupe elemenata koncentrisane plastičnosti koji prevazilazi ograničenja postojećeg elasto-plastičnog elementa kao što su nemogućnost opisivanja postepene plastifikacije poprečnog preseka i opisivanja ponašanja materijala sa ojačanjem. Pri tome, element je zadržao svoju veliku kompjutersku efikasnost koja je osnovna prednost elemenata koncentrisane plastičnosti. Za određivanje stanja elementa razvijena su dva algoritma prema “general closest point projection” i “convex cutting plane” return mapping algoritmima i analizirana je zavisnost konvergencije od implementiranog algoritma. Mogućnosti novog elementa za modeliranje okvirnih konstrukcija pri delovanju statičkog i dinamičkog opterećenja su potvrđene kroz niz numeričkih primera. Specijalna pažnja je posvećena primeni novog GP elementa za modeliranje CFT stubova spregnutih konstrukcija.

U tezi su predložena i prikazana dva moguća pristupa analizi okvirnih konstrukcija pomoću grednih konačnih elemenata: primenom fiber elementa sa optimizovanom integracijom poprečnog preseka i primenom novog GP konačnog elementa koncentrisane plastičnosti. Oba ova pristupa daju, za primenu u praksi, rezultate dovoljne tačnosti, a istovremeno imaju i visok stepen kompjuterske efikasnosti.

Ključne reči: gredni konačni element, poprečni presek, nelinearna analiza, generalisana plastičnost, rezultatna plastičnost, kompjuterska efikasnost

Naučna oblast: Građevinarstvo

Uža naučna oblast: Teorija konstrukcija

UDK broj: 624.04 (043.3)

GENERALIZED PLASTICITY MODEL FOR NONLINEAR SPACE FRAME ANALYSIS

Summary

The objective of this study is the efficient nonlinear analysis of space frames with beam/column finite elements considering material nonlinearity. Geometric nonlinearity is taken into account using known methods. Two different nonlinear beam/column elements are analyzed and improved: a fiber element and a concentrated plasticity element. Own computer code is written and implemented into the existing matlab toolbox for nonlinear structural analysis - FEDEASLab.

During this study, the following objectives are achieved. By the optimization of the number and position of material integration points at monitored steel and reinforced concrete cross-sections, the significant improvement in efficiency of the fiber beam-column element under cyclic static and dynamic loading conditions is gained. The practical rules for an efficient discretization of steel wide-flange sections and rectangular reinforced-concrete sections are defined, depending on the desired level of accuracy and the type of analysis. In addition, the new three-dimensional nonlinear beam-column element is formulated. The element is of concentrated plasticity type and overcomes the common limitations of the existing elasto-plastic elements, such as the inability to describe gradual plastification of a cross-section and the hardening behavior. Also, the element keeps its high computational efficiency which is one benefit of concentrated plasticity elements. Two algorithms for element state determination are developed in accordance with the general closest point and convex cutting plane return mapping algorithms. Their influence on element convergence is studied. The ability of the element to simulate frame behavior is confirmed on a number of numerical examples. The special attention is devoted to model CFT composite column behavior.

In the study, two different approaches for space frame analysis with beam/column elements are proposed: using fiber element with optimized integration of cross-section and using new developed concentrated plasticity element. Both of these approaches are suitable for use in practice since they ensure results of enough accuracy and are computationally very efficient.

Key words: beam/column element, cross-section, nonlinear analysis, generalized plasticity, resultant plasticity, computational efficiency

Scientific field: Civil engineering

Field of scientific specialization: Theory of structures

UDK number: 624.04 (043.3)

SADRŽAJ

1. POGLAVLJE	1
UVOD	1
1.1. <i>VRSTE LINIJSKIH KONAČNIH ELEMENATA</i>	2
1.1.1. ELEMENTI KONCENTRISANE PLASTIČNOSTI (Concentrated plasticity elements)	2
1.1.2. ELEMENTI RASPODELJENE PLASTIČNOSTI (Distributed inelasticity elements)	7
1.2. <i>PREDMET I ZADACI OVOG ISTRAŽIVANJA</i>	12
2. POGLAVLJE	14
INTEGRACIJA POPREČNOG PRESEKA KOD FIBER ELEMENTA	14
2.1. <i>UVOD</i>	14
2.2. <i>DISKRETIZACIJA ČELIČNOG I PROFILA</i>	16
2.2.1. UTICAJ DISKRETIZACIJE POPREČNOG PRESEKA NA POVRŠ TEČENJA	16
2.2.2. NUMERIČKE SIMULACIJE	23
(a) Konzolni stub	23
(b) 3D analiza čelične okvirne konstrukcije	33
(c) 2D analiza El-Zanaty okvira	36
(d) 2D analiza Ziemian okvira	37
(e) 2D analiza šestospratnog Vogel rama	38
2.2.3. OGRANIČENJA PRIMENE DISKRETIZACIJE I PRESEKA SA MALO TAČAKA INTEGRACIJE I PRAVILA ZA PROGUŠČENJE DISKRETIZACIJE	40
2.3. <i>DISKRETIZACIJA PRAVOUGAONOG BETONSKOG PRESEKA</i>	43
2.3.1. ŠEME DISKRETIZACIJE	43
2.3.2. NUMERIČKE SIMULACIJE	44
(a) Konzolni stubovi prema eksperimentima Low i Moehle-ja	44
(b) Konzolni stubovi prema eksperimentima Bousias-a	46
(c) 2D analiza AB rama	48
(d) 3D analiza AB rama	52
(e) 2D analiza stuba AB mosta	57
2.3.3. OGRANIČENJA PRIMENE DISKRETIZACIJE PRAVOUGAONOG BETONSKOG PRESEKA SA MALO TAČAKA INTEGRACIJE I PRAVILA ZA PROGUŠČENJE DISKRETIZACIJE	71
2.4. <i>NUMERIČKI PROBLEMI KOD DISKRETIZACIJE PRESEKA SA MALO TAČAKA INTEGRACIJE</i>	73
3. POGLAVLJE	75
KONAČNI ELEMENT ZA ANALIZU OKVIRNIH KONSTRUKCIJA ZASNOVAN NA MODELU GENERALISANE PLASTIČNOSTI	75
3.1. <i>UVOD</i>	75
3.2. <i>MODEL GENERALISANE PLASTIČNOSTI (GP)</i>	76
3.3. <i>FORMULACIJA GP KONAČNOG ELEMENTA</i>	78
3.3.1. OSNOVNE JEDNAČINE	78
3.3.2. ALGORITAM INTEGRACIJE	82
3.3.3. RETURN MAPPING ALGORITAM	83
3.3.4. ODREĐIVANJE STANJA GP ELEMENTA PRIMENOM GENERAL CLOSEST POINT PROJECTION (GCPP) ALGORITMA	85
ODREĐIVANJE TANGENTNE MATRICE KRUTOSTI	89

3.3.5.	ODREĐIVANJE STANJA GP ELEMENTA PRIMENOM CONVEX CUTTING PLANE (CCP) ALGORITMA	90
	ODREĐIVANJE TANGENTNE MATRICE KRUTOSTI	93
3.3.6.	NAPOMENE O KONVERGENCIJI GP ELEMENTA SA GCPP I CCP ALGORITMIMA..	95
3.4.	GEOMETRIJSKE NELINEARNOSTI	96
3.4.1.	KALIBRACIJA PARAMETARA GP ELEMENTA.....	104
3.5.	NUMERIČKI PRIMERI.....	105
3.5.1.	KONZOLNI STUB	106
3.5.2.	PRIMER EL-ZANATY OKVIRA	109
3.5.3.	PRIMER DVOSPRATNOG OKVIRA	111
3.5.4.	PRIMER ČETVOROSPRATNOG OKVIRA	113
3.6.	PRIMENA GP ELEMENTA U ANALIZI SPREGNUTIH STUBOVA	114
3.6.1.	ODREĐIVANJE KRUTOSTI CFT PRESEKA.....	117
3.6.2.	FUNKCIJA TEČENJA ZA CFT PRESEK.....	118
3.6.3.	PARAMETRI OJAČANJA.....	121
3.6.4.	VERIFIKACIJA GP MODELA KOD ANALIZE CFT STUBOVA	121
4.	POGLAVLJE	130
	REZIME	130
4.1.	REZIME.....	130
4.2.	ZAKLJUČAK	131
4.3.	MOGUĆNOSTI DALJEG RAZVOJA PRIKAZANIH ELEMENATA	131
5.	LITERATURA	133
A.	PRILOG (na CD-).....	138
	SKRAĆENA PRAVILA INTEGRACIJE.....	138
B.	PRILOG (na CD-u).....	141
	REZULTATI TESTOVA KONZOLNOG STUBA ČELIČNOG I PRESEKA.....	141
C.	PRILOG (na CD-u).....	239
	REZULTATI TESTOVA KONZOLNOG STUBA PRAVOUGAONOG BETONSKOG PRESEKA	239

1. POGLAVLJE

UVOD

Aktuelni trend u analizi konstrukcija jeste uvođenje nelinearne analize u svakodnevnu inženjersku praksu. Usvajanje koncepta programiranog ponašanja pri projektovanju seizmički otpornih konstrukcija podrazumeva primenu nelinearne analize u zemljotresnom inženjerstvu budući da su potrebne mnogo detaljnije informacije o ponašanju konstrukcije, poput neelastičnih deformacija, nego što je to slučaj kod projektovanja tradicionalnim metodama.

Dva osnovna izvora nelinearnog ponašanja konstrukcija su: prvo, materijalna (fizička) nelinearnost koja potiče od nelinearne veze napona i deformacija materijala, i drugo, geometrijska nelinearnost uslova kompatibilnosti i jednačina ravnoteže usled velikih deformacija i pomeranja. Težište ovog rada jeste uzimanje u obzir materijalnih nelinearnosti pri analizi ramovskih konstrukcija. Pored toga, bice objašnjeno i kako se geometrijske nelinearnosti mogu uzeti u obzir pri proračunu primenom metode konačnih elemenata koja je danas primarno korišćena numerička metoda.

Za ocenu otpornosti postojećih konstrukcija kao i za projektovanje novih seizmički otpornih konstrukcija izuzetno je važno primeniti dovoljno tačan i pouzdan, ali istovremeno i kompjuterski efikasan numerički model konstrukcije. Dok modeliranje 2D i 3D konačnim elementima može biti korisno pri analizi pojedinih kritičnih delova u konstrukciji, ovakvo modeliranje čitave konstrukcije u zemljotresnom inženjerstvu je veoma skupo pri analizi većih konstruktivnih sistema, kada je, na primer, kod nelinearne dinamičke analize potrebno analizirati uticaje više različitih zemljotresa. Stoga se, pri numeričkom modeliranju okvirnih konstrukcija, i dalje primarno koriste gredni konačni elementi koji predstavljaju dobar kompromis između jednostavnosti koju

poseduju linijski konačni elementi i dovoljne tačnosti koja je potrebna za sagledavanje ponašanja okvirnih konstrukcija.

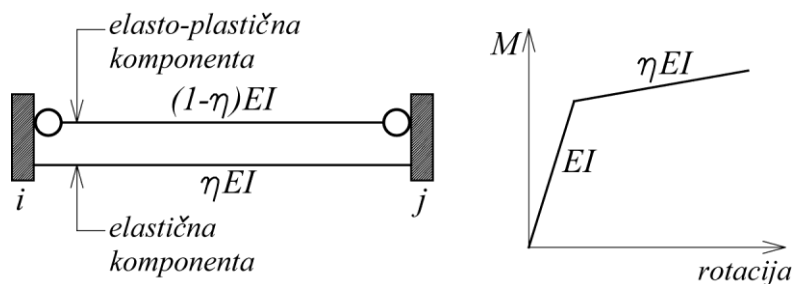
1.1. VRSTE LINIJSKIH KONAČNIH ELEMENATA

Do danas su razvijeni brojni modeli linijskih konačnih elemenata koji na različite načine tretiraju problem materijalne i geometrijske nelinearnosti. Oni se, generalno, mogu svrstati u dve grupe: elementi koncentrisane plastičnosti i elementi raspodeljene plastičnosti.

1.1.1. ELEMENTI KONCENTRISANE PLASTIČNOSTI (Concentrated plasticity elements)

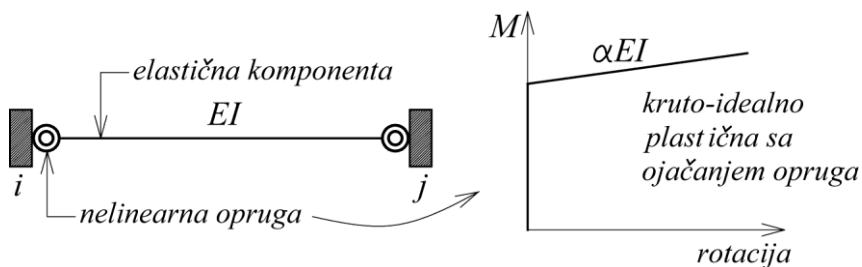
Modeli sa koncentrisanim plastičnim zglobovima se, zbog svoje velike ekonomičnosti i efikasnosti, dosta koriste za modeliranje okvirnih konstrukcija pri cikličnom opterećenju. Kod ovih elemenata, neelastične (plastične) deformacije se mogu javiti samo na krajevima elementa dok se ostali deo elementa ponaša elastično. Ponašanje plastičnih zglobova se uglavnom predstavlja nelinearnim oprugama koje se povezuju serijski ili paralelno.

Jedan od prvih elemenata iz ove grupe, koji je razvijen sa ciljem da pored elastično - idealno plastičnog ponašanja materijala obuhvati i ojačanje materijala, je dvo-komponentni paralelni model [1]. Element se sastoji iz elastično-idealno plastičnog elementa, koji opisuje tečenje, i paralelno vezanog linearno elastičnog elementa za opisivanje efekta ojačanja, slika 1.1. Određivanje stanja elementa, tj. određivanje sila i matrice krutosti za poznata pomeranja, je jednostavno kod ovog elementa. Njegov osnovni nedostatak je kalibracija parametra ojačanja η za različite slučajeve opterećenja.



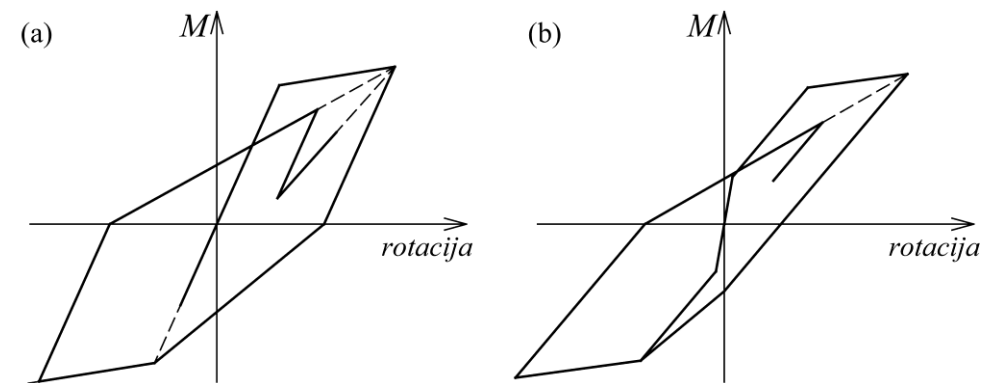
Slika 1.1: Dvo-komponentni paralelni model [1]

Jedno-komponentni serijski model [2], slika 1.2, je napredniji model u odnosu na dvo-komponentni model. Sastoji se od linearno-elastičnog elementa serijski vezanog sa nelinearnim oprugama na krajevima elementa. Opruge opisuju kruto-idealno plastično ponašanje sa ojačanjem. Adekvatnim izborom veze moment-rotacija za opruge na krajevima elementa može se postići opisivanje kompleksnog histerezisnog ponašanja. Međutim, u poređenju sa dvo-komponentnim paralelnim modelom, proces određivanja stanja elementa je komplikovaniji budući da zahteva rešavanje nelinearnog sistema jednačina.



Slika 1.2: Jedno-komponentni serijski model [2]

Pored ovih prvih modela, razvijeni su i brojni drugi koji usvajaju različite moment-rotacija konsititivne relacije za nelinearne opruge, npr. Clough-ov model [3], slika 1.3(a), i Takeda model [4], slika 1.3(b), za modeliranje betonskih konstrukcija. Ovi elementi obično zanemaruju interakciju aksijalne sile i momenta savijanja.

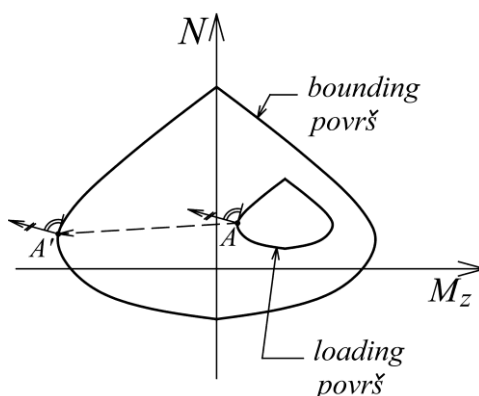


Slika 1.3: (a) Clough i (b) Takeda modeli nelinearnih opruga

Interakcija aksijalne sile i momenata savijanja pri jednoosnom ili dvoosnom savijanju, koja je naročito značajna pri analizi stubova, se eksplicitno uzima u obzir kod tzv. elemenata „rezultantne plastičnosti“ (resultant plasticity elements) [5-7]. Kod ovih elemenata usvojen je koncept klasične teorije plastičnosti za opisivanje veze između sile i deformacije elementa. Interakcija aksijalne sile i dva momenta savijanja oko glavnih centralnih osa inercije poprečnog preseka se opisuje preko površi tečenja izražene u funkciji od sile u preseku (rezultanti napona). Postoje brojni izrazi za površi tečenja za različite vrste poprečnih preseka [5,8,9]. Osnovna pretpostavka elemenata iz ove grupe je da je, ukoliko se sile na krajevima elementa nalaze unutar površi tečenja, ponašanje elementa linearno-elastično, odnosno, bez neelastičnih deformacija. Ukoliko je uslov tečenja prekoračen, tj. sile na krajevima elementa su van površi tečenja, tada može doći do pojave neelastičnih deformacija. Takođe, razvijeni su brojni algoritmi za određivanje stanja elementa kako bi se sprečila ovakva stanja i sile na krajevima elementa odredile tako da se nalaze na površi tečenja ili unutar nje. Orbison [5] je, za opisivanje površi tečenja čeličnog I profila, koristio jedan izraz u obliku polinoma i razvio je algoritam koji se sastoji iz pet koraka za određivanje sile koje zadovoljavaju uslov tečenja i leže na površi tečenja. Kao mera odstupanja konačnih sile od površi tečenja, uveden je novi parametar D koji meri udaljenost tačke koja predstavlja sile na kraju elementa od površi tečenja. Osnovni nedostaci ovog algoritma su potreba podele svakog inkrementa sile na manje inkremente kako bi se izbegle velike greške. Takođe,

element može da opiše ponašanje elastično-idealno plastičnog materijala, ali ne i materijala sa ojačanjem. Pored toga i postepena plastifikacija poprečnog preseka elementa se ne uzima u obzir budući da krajevi elementa imaju ili elastično ili plastično ponašanje.

Tokom poslednjih 15 godina, nekoliko modela koji poboljšavaju nedostatke Orbison-ovog elementa je predloženo. Koncept dve površi (loading surface – površ opterećenja i bounding surface – granična površ) koji su prvi uveli Dafalias i Popov [10] za opisivanje ponašanja materijala, uspešno je primenjen i kod linijskih elemenata koncentrisane i raspodeljene plastičnosti (o ovim elementima će kasnije biti više reči) [11-15]. Osnovu ovih modela čine dve površi tečenja koje se nalaze jedna unutar druge (loading površ se nalazi unutar bounding površi), slika 1.4.

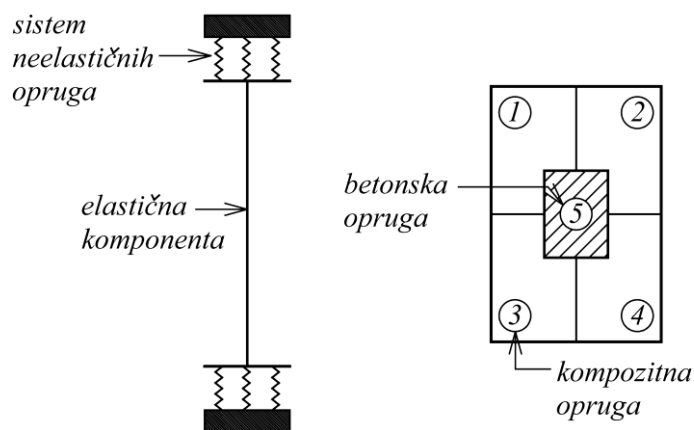


Slika 1.4: Bounding i loading N-Mz krive interakcije

Najčešće se, da bi se izbeglo preklapanje površi, usvaja da su obe površi istog oblika, ali različitih veličina. Algoritam određivanja stanja elementa je uglavnom sledeći: kada sile na kraju elementa „dotaknu“ loading površ (površ opterećenja), npr. u tački A (slika 1.4), pri daljem prirastu opterećenja dolazi do pojave plastičnih deformacija i tačka koja predstavlja sile na kraju štapa se pomera duž prave koja povezuje tačku A i njenu konjugovanu tačku A' koja leži na bounding površi. Konjugovana tačka A' je tačka koja ima isti pravac normale kao i tačka A. Na ovaj način, može se opisati postepena plastifikacija krajeva elementa, odnosno, poprečnog preseka kod elemenata raspodeljene

plastičnosti. Takođe, uvođenjem odgovarajućih zakona pomeranja dve površi i promene njihovih veličina, može se prikazati i ponašanje materijala sa ojačanjem (kinematičko i izotropno). Ovo poboljšanje karakteristika elementa, je zbog složenijeg algoritma, praćeno njegovom nešto manjom efikasnošću u poređenju sa elementima sa jednom površi tečenja.

U grupi elemenata koncentrisane plastičnosti, treba pomenuti i model koji je razvio Lai sa saradnicima [16] za modeliranje armirano-betonskih stubova. Ovaj model nije zasnovan na primeni teorije plastičnosti za opisivanje interakcije između aksijalne sile i momenata savijanja. Model se sastoji od linearno-elastičnog elementa na čijim krajevima se nalaze neelastični elementi, slika 1.5. Ovi neelastični elementi (na neki način, preteče modela vlaknastog zgloba) se sastoje od pet neelastičnih aksijalnih opruga. Po jedna (kompozitna) opruga se nalazi na uglovima pravougaonog armirano-betonskog preseka i simulira ponašanje $\frac{1}{4}$ armature pri zatezanju, odnosno, ponašanje dela spregnutog armirano-betonskog preseka pri pritisku. U sredini preseka se nalazi peta neelastična opruga koja predstavlja ponašanje preostalog betona i efektivna je samo pri pritisku. Na ovaj način se pomoću pet opruga simulira interakcija aksijalne sile i momenata savijanja kod AB elemenata.



Slika 1.5: Lai-jev model sa 5 opruga [16]

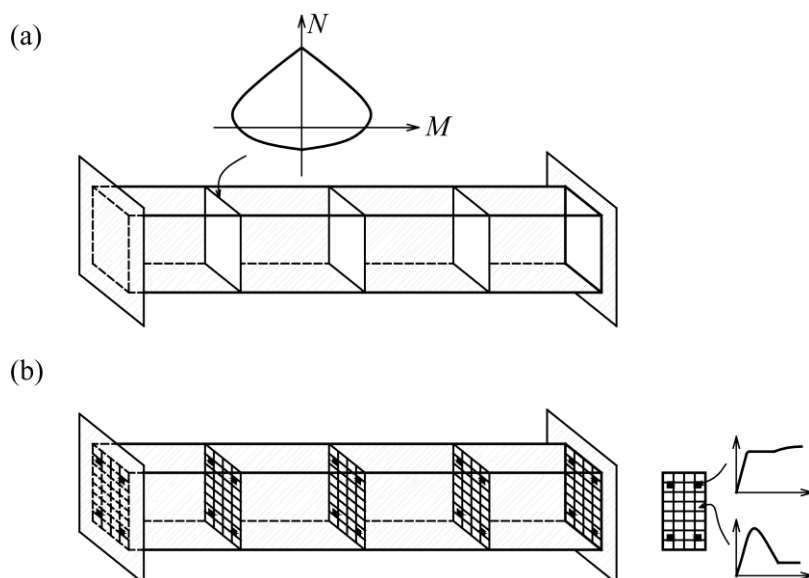
Uopšteno govoreći, najveći nedostatak elemenata koncentrisane plastičnosti je to što unapred određuju moguća mesta pojave neelastičnih deforacija - najčešće na krajevima elementa. Iako je ovo pojednostavljenje uglavnom prihvatljivo

kod stubova okvirnih konstrukcija, kod greda situacija može biti drugačija i neelastične deformacije se mogu javiti i unutar elementa. Stoga su razvijeni elementi raspodeljene plastičnosti (distributed inelasticity elements) koji omogućavaju opisivanje širenja plastičnih deformacija duž elementa.

1.1.2. ELEMENTI RASPODELJENE PLASTIČNOSTI (Distributed inelasticity elements)

Kod elemenata raspodeljene plastičnosti, neelastične deformacije se mogu javiti u bilo kom od nekoliko posmatranih poprečnih preseka u kojima se proverava ponašanje elementa. Odgovor poprečnog preseka se može dobiti bilo primenom teorije plastičnosti, ali na nivou poprečnog preseka tj. uspostavljanjem veza između rezultanti napona (sila u preseku) i generalisanih deformacija poprečnog preseka (dilatacija i krivine poprečnog preseka) [17-19], slika 1.6 (a), ili numerički integracijom po površini poprečnog preseka kao što je to slučaj kod tzv. fiber preseka [20], slika 1.6(b). Kod fiber (vlaknastog) poprečnog preseka, vrši se diskretizacija poprečnog preseka i u svakoj tački integracije tako diskretizovanog poprečnog preseka određuje se odgovor materijala koji je dodeljen posmatranoj tački integracije. Zatim se, integracijom po čitavom poprečnom preseku dobija odgovor poprečnog preseka, tj. matrica krutosti (fleksibilnosti) i sile u preseku za poznate deformacije preseka.

Postoje dve varijante fiber linijskih elemenata. Kod prve, položaj poprečnih preseka koji se posmatraju i „numerička težina“ se određuje na osnovu predznanja o mestima na kojima će se javiti najveće neelastične deformacije unutar elementa. Kada se kod ove varijante posmatraju samo dva poprečna preseka na krajevima elementa, dok je linearno-elastična zona između njih, element spada u grupu elemenata koncentrisane plastičnosti i naziva se element sa vlaknastim zglobovima (fiber hinge model). Ovi elementi su pogodni za modeliranje ponašanja stubova.

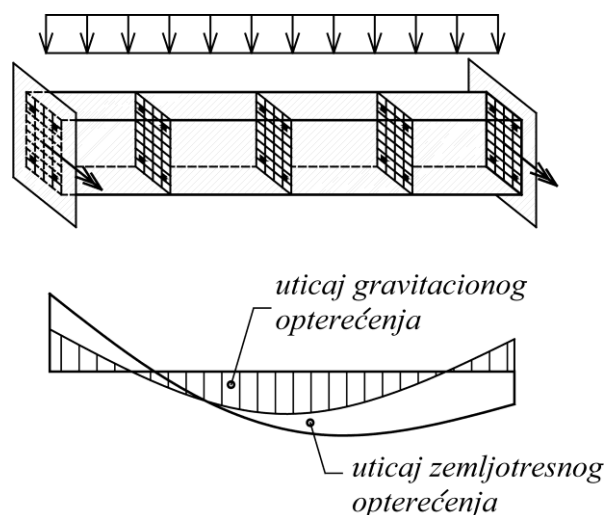


Slika 1.6: Elementi raspodeljene plastičnosti:

(a) zasnovan na teoriji plastičnosti; (b) vlaknasti (fiber) element

Kod druge varijante, položaj posmatranih poprečnih preseka duž ose elementa se određuje izborom pravila numeričke integracije. Najpogodnija pravila numeričke integracije su Gauss-ovo ili Gauss-Lobatto s obzirom na broj tačaka integracije i postignutu tačnost. Gauss-Lobatto pravilo je naročito pogodno kada treba obuhvatiti preseke na krajevima elementa budući da se, uglavnom pri analiziranju konstrukcija na dejstvo zemljotresa, maksimalne neelastične deformacije javljaju upravo na ovim mestima. Ova varijanta pruža mnogo veću fleksibilnost pri modeliranju elemenata konstrukcije u slučajevima kada pojava neelastičnih deformacija nije ograničena samo na krajeve elementa. To je npr. slučaj kod greda opterećenih velikim raspodeljenim gravitacionim opterećenjem, slika 1.7, gde se maksimalni uticaju mogu javiti i unutar raspona.

Jasno je da se sa povećanjem broja posmatranih poprečnih preseka, smanjuje efikasnost elementa. Za modeliranje ponašanja stubova dovoljno je usvojiti četiri tačke integracije, dok se pet tačaka integracije, čime se uzima u obzir i presek na sredini elementa, obično preporučuje kod modeliranja greda opterećenih raspodeljenim gravitacionim opterećenjem [20].



Slika 1.7: Greda opterećena velikim raspodeljenim opterećenjem i odgovarajući dijagram momenta savijanja

U formulaciji elemenata raspodeljene plastičnosti uobičajena su dva pristupa: metoda deformacija i metoda sila. Kod metode deformacija, pomeranja u proizvoljnoj tački konačnog elementa izražavaju se preko usvojenih interpolacionih funkcija i pomeranja (odnosno obrtanja) na krajevima elementa. Kod elemenata sa dva čvora se interpolacione funkcije usvajaju kao Hermite-ovi polinomi prve vrste i predstavljaju rešenja diferencijalne jednačine elastičnog prizmatičnog štapa. Deformacije u proizvoljnoj tački štapa (dilatacija i krivine) se mogu odrediti primenom veza klasične teorije štapa, pa je dilatacija jednaka prvom izvodu pomeranja u pravcu ose štapa, a krivine drugom izvodu pomeranja upravnih na osu štapa. Stoga je, s obzirom na usvojene interpolacione funkcije za poprečna pomeranja u obliku polinoma trećeg stepena, promena krivine duž elementa linearna, što je prihvatljivo u slučaju linearnog odgovora. Međutim, sa pojavom nelinearnih deformacija, promena krivine postaje izrazito nelinearna u zonama neelastičnosti. Stoga je, da bi se dobili zadovoljavajući rezultati, neophodna finija diskretizacija konačnim elementima u ovim oblastima, što za posledicu ima neekonomičnost ovih elemenata pri nelinearnoj analizi.

Sa druge strane, određivanje stanja elementa od poznatih deformacija do sila na krajevima štapa je direktno i zahvaljujući tome je i implementacija ovih

elementa u kompjuterske programe za analizu konstrukcija koji su najvećim brojem i bazirani na metodi deformacija, direktna. Dakle na osnovu poznatih pomeranja, preko interpolacionih funkcija se određuju deformacije iz kojih se direktno preko konstitutivnih relacija za poprečni presek dobijaju sile u preseku. Sile na krajevima elementa se određuju primenom principa virtualnih pomeranja odnosno principa o minimumu potencijalne energije. Zahvaljujući tome je primena ovih elemenata rasprostranjena, što, međutim, ne umanjuje njihovo pomenuto ograničenje nastalo kao posledca aproksimativne prirode usvojenih interpolacionih funkcija za pomeranja.

Kod formulacije elemenata zasnovane na metodi sila, sile u preseku se određuju preko sila na krajevima štapa i usvojenih interpolacionih funkcija. Primenom principa virtualnih sila odnosno principa o minimumu komplementarne energije dobijaju se pomeranja i obrtanja krajeva elementa. Pri tome, potrebno je za poznate sile u preseku, odrediti deformacije poprečnog preseka. Budući da ovakve relacije nisu dostupne, već njima inverzne, onda se mora rešiti nelinearan sistem jednačina da bi se odredile deformacije poprečnog preseka. Dakle, sam postupak određivanja stanja elementa kod metode sila nije direktan kao što je to slučaj kod metode deformacija.

Kao što je već napomenuto, najveći broj kompjuterskih programa za proračun konstrukcija po metodi konačnih elemenata je zasnovan na metodi deformacija. Zbog toga je implementacija elemenata formulisanih metodom sila u postojeće kompjuterske programe komplikovanija. Međutim, do danas su razvijeni brojni algoritmi za određivanje stanja ovih elemenata koji omogućavaju njihovu uspešnu primenu u nelinearnoj analizi konstrukcija [21,22].

Zahvaljujući tome što interpolacione funkcije kod metode sila zadovoljavaju jednačine ravnoteže, dakle veze između sila u preseku i sila na krajevima štapa su takve da su uslovi ravnoteže uvek zadovoljeni, dokle god se oni mogu napisati u nedeformisanoj konfiguraciji (dakle, pri linearnoj geometriji), bez

obzira na prisutne materijalne nelinearnosti, elementi raspodeljene plastičnosti zasnovani na metodi sila su u prednosti u odnosu na odgovarajuće elemente formulisane prema analizi deformacija [21,23-25]. Naime, dovoljan je po jedan element za modeliranje stuba ili grede, a tačnost lokalnih deformacija elementa zavisi od broja posmatranih poprečnih preseka (tj. tačaka integracije) duž ose elementa. Fiber elementi formulisani metodom sila su se pokazali kao vrlo uspešni pri modeliranju čeličnih, betonskih i spregnutih konstrukcija pri cikličnom opterećenju [12,26-28]. Međutim, uprkos svim ovim prednostima, primena ovog elementa u inženjerskoj praksi je slaba prvenstveno zbog pogrešnog mišljenja o njegovoj maloj kompjuterskoj efikasnosti. Ovakvo mišljenje je nastalo uglavnom zbog toga što je u većini do sada urađenih studija korišćen jako veliki broj vlakana (fiber-a), tj. tačaka integracije za diskretizaciju poprečnog preseka elementa konstrukcije.

Postoji svega par studija u kojima je pokušano da se optimizuje broj tačaka integracije potreban za adekvatnu diskretizaciju poprečnog preseka stuba odnosno grede. Prvi takavi pokušaji su, već pomenuti, model Lai-ja sa pet neelastičnih opruga [16] i Jiang i Saidi-ja sa četiri opruge za modeliranje ponašanja armirano-betonskih stubova [29]. Campbell [30] je analizirao različite rasporede vlakana kod elasto-plastičnog elementa koji može da ima do tri plastična zgloba. Pri tome, karakteristike vlakana (površina i tačan položaj) su određeni rešavanjem sistema jednačina iz uslova da se granična aksijalna nosivost preseka, granični plastični momenti nosivosti i krutost preseka nakon pojave plastičnih deformacija poklapaju sa ovim karakteristikama stvarnog poprečnog preseka. Prihvatljivi rezultati su dobijeni kod čeličnog I preseka, dok to nije slučaj kod armirano-betonskih preseka. Berry [28] je u svojoj doktorskoj disertaciji analizirao modeliranje kružnih armirano-betonskih stubova i dao je predloge za efikasnu diskretizaciju njihovih poprečnih preseka.

1.2. PREDMET I ZADACI OVOG ISTRAŽIVANJA

Predmet ove disertacije je unapređenje elemenata koncentrisane plastičnosti zasnovanog na modelu resultantne plastičnosti i integracije poprečnog preseka kod fiber elementa, pre svega sa stanovišta njihove kompjuterske efikasnosti, a time i praktične primene pri nelinearnoj analizi okvirnih konstrukcija. Nelinearnost koja se razmatra prvenstveno potiče od materijalne nelinearnosti, dok se geometrijska nelinearnost uzima u obzir poznatim metodama.

Zadaci disertacije se sastoje u sledećem:

- Poboljšanje efikasnosti fiber elemenata optimizacijom integracije poprečnog preseka čeličnih i armirano-betonskih elemenata – stubova i greda. Istraživanje obuhvata parametarsku analizu ponašanja pri cikličnom pseudo-statičkom opterećenju i pri nelinearnoj dinamičkoj analizi, kako izdvojenih elemenata konstrukcije tako i čitave konstrukcije. Posmatra se ne samo globalni već i lokalni odgovor konstrukcije (plastične deformacije, dilatacije najudaljenijih tačaka poprečnog preseka itd.).
- Formulisanje jasnih smernica i praktičnih pravila za diskretizaciju određenih grupa poprečnog preseka kod fiber elementa, u zavisnosti od vrste analize koja se sprovodi i željene tačnosti.
- Razvijanje novog konačnog elementa iz grupe elemenata koncentrisane plastičnosti koji će unaprediti ograničenja postojećeg elasto-plastičnog elementa kao što su nemogućnost opisivanja postepene plastifikacije poprečnog preseka i opisivanja ponašanja materijala sa ojačanjem (kinematičkim i izotropnim). Pri tome, element treba da zadrži osnovnu prednost elemenata koncentrisane plastičnosti – efikasnost. Novi element je baziran na principima teorije generalisane plastičnosti. Za određivanje stanja elementa je primenjena Ojlerova numerička metoda i

predloženim algoritmima je sačuvana kvadratna konvergencija elementa.

- Ilustrovanje mogućnosti novo-razvijenog elementa za modeliranje (čeličnih i spregnutih) okvirnih konstrukcija pri delovanju statičkog i dinamičkog opterećenja kroz niz numeričkih primera.
- Razvijanje sopstvenog kompjuterskog programa i njegova implementacija u postojeći program namenjen prvenstveno istraživanju FEDEASLab (Matlab toolbox for nonlinear analysis).

2. POGLAVLJE

INTEGRACIJA POPREČNOG PRESEKA KOD FIBER ELEMENTA

U ovom poglavlju razmatraće se numerička integracija po površini poprečnog preseka koja se sprovodi kod fiber elementa i njena optimizacija u odnosu na broj tačaka integracije koji se koristi za diskretizaciju preseka. Razmatrana su dva tipa poprečnog preseka: čelični I profili i pravougaoni armirano-betonski poprečni preseki. Kroz vrlo opsežnu parametarsku analizu, formulisana su pravila za efikasnu diskretizaciju preseka.

2.1. UVOD

Posmatra se poprečni presek grednog elementa izložen dvoosnom savijanju u prisustvu aksijalne sile. Usvaja se pretpostavka o ravnom preseku. Sile u preseku koje se posmatraju su aksijalna sila N i momenti savijanja M_y i M_z oko referentnih koordinatnih osa y i z . Ove sile su grupisane u vektor sila u preseku \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Deformacije poprečnog preseka (dilatacija ε i krivine κ_y i κ_z) su grupisane u vektor deformacije preseka \mathbf{e} :

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \kappa_z \\ \kappa_y \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Da bi se odredio odgovor poprečnog preseka usled proizvoljnog opterećenja, potrebno je, za poznate deformacije preseka \mathbf{e} , odrediti matricu krutosti preseka \mathbf{k}_s i vektor sila u preseku \mathbf{s} . Matrica krutosti preseka se određuje prema izrazu:

$$\mathbf{k}_s = \int_A E_t \begin{bmatrix} 1 & -y & z \\ -y & y^2 & -yz \\ z & -yz & z^2 \end{bmatrix} dA \quad (2.3)$$

gde je E_t modul elastičnosti materijala od kojih je presek sastavljen, a A je površina poprečnog preseka. Za modul elastičnosti E_t se najčešće usvaja njegova tangentna vrednost, jer se time obezbeđuje kvadratna konvergencija iterativnog postupka za zadovoljenje uslova ravnoteže na nivou poprečnog preseka. Vektor sila u preseku \mathbf{s} se određuje na osnovu izraza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{pmatrix} = \int_A \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \end{pmatrix} \sigma dA \quad (2.4)$$

gde je σ normalni napon.

Za određivanje vrednosti integrala u izrazima (2.3) i (2.4) kod vlaknastog (fiber) preseka primenjuje se numerička integracija. Stoga se integrali zamenjuju sumama po svim tačkama integracije poprečnog preseka:

$$\mathbf{k}_s = \sum_{i=1}^{Nfib} E_{ti} \begin{bmatrix} 1 & -y_i & z_i \\ -y_i & y_i^2 & -y_i z_i \\ z_i & -y_i z_i & z_i^2 \end{bmatrix} A_i \quad (2.5)$$

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{Nfib} \begin{pmatrix} 1 \\ -y_i \\ z_i \end{pmatrix} \sigma_i A_i \quad (2.6)$$

gde je $Nfib$ broj vlakana (fiber-a).

Numerička tačnost sračunavanja vrednosti u izrazima (2.5) i (2.6) zavisi od broja vlakana kojima je izvršena diskretizacija poprečnog preseka i od tačnosti metode numeričke integracije koja je primenjena, a kojom su određeni položaj svakog vlakna i njegova površina (numerička težina). Stoga bi, za posmatrani

problem, najbolje pravilo numeričke integracije bilo ono kojim se, za dati broj tačaka integracije, dobija najveći stepen tačnosti izraza (2.5) i (2.6).

Budući da se kod fiber elemenata, naročito kada je broj posmatranih poprečnih preseka duž ose elementa veći od dva, integracija poprečnog preseka vrši više puta (u slučaju nelinearnog odgovora, u svakom koraku, kroz više iteracija), efikasnost ovog elementa direktno zavisi od efikasnosti integracije poprečnog preseka. Stoga je optimizacija ovog koraka pri određivanju stanja elementa vrlo značajna.

2.2. DISKRETIZACIJA ČELIČNOG I PROFILA

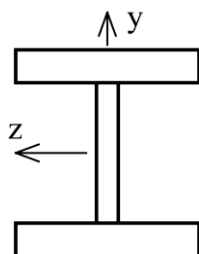
2.2.1. UTICAJ DISKRETIZACIJE POPREČNOG PRESEKA NA POVRŠ TEČENJA

Kod okvirnih čeličnih konstrukcija najčešće korišćeni poprečni presek je I presek. Pored njega, koriste se i šuplji preseki kružnog i pravougaonog oblika, ali oni nisu obuhvaćeni ovim istraživanjem. Međutim, neki od izvedenih zaključaka za I presek se pod određenim uslovima mogu primeniti i na šuplje pravougaone preseke kao što će biti objašnjeno.

Kako bi se rezultati ove parametarske analize odnosili na što veći broj standardnih čeličnih I profila, istraživanje je sprovedeno na sledeća dva I profila: W14x426 US profil ($d=474$ mm, $b=424$ mm, $t_w=47.6$ mm, $t_f=77.1$ mm) koji se smatra predstavnikom „teških” I profila, sobzirom na relativno veliku debljinu flanše i rebra, i W12x30 US profil ($d=313$ mm, $b=166$ mm, $t_w=6.6$ mm, $t_f=11.2$ mm) koji je predstavnik „lakih” i „srednje-teških” I profila [5]. Usvojeno je da su čelični profili napravljeni od homogenog, elastično-idealno plastičnog materijala.

Za diskretizaciju poprečnog preseka razmatrana su sledeća pravila numeričke integracije: pravilo pravougaonika, trapezno pravilo, Simpsonovo pravilo, Gauss-Legendre-ovo pravilo, Gauss-Lobatto-ovo pravilo, kao i tzv. „skraćeno”

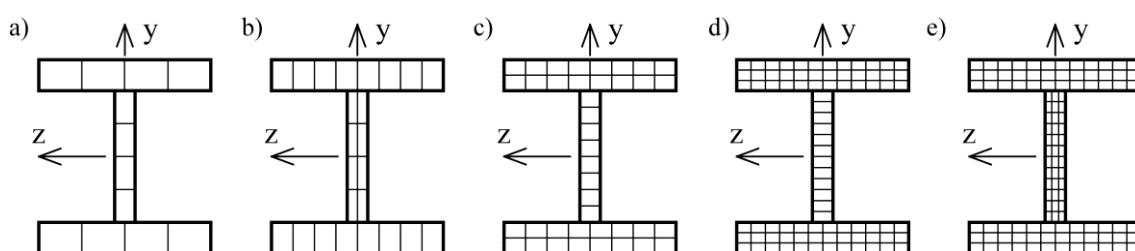
pravilo integracije koje je predložio Majorana sa saradnicima [31]. Pri svim navedenim integracijama, izvršena je dekompozicija površine I preseka na tri pravougaone oblasti – po jedna za svaku od flanši i za rebro (slika 2.1). Treba napomenuti da u slučaju cikličnih neelastičnih deformacija, u zavisnosti od usvojenog modela materijala, raspodela modula elastičnosti po površini poprečnog preseka može biti diskontinualna. Od navedenih pravila integracije, pravilo pravougaonika je najjednostavnije i najčešće korišćeno kod diskretizacije poprečnih preseka. Ostala pravila integracije imaju veći stepen tačnosti pri integraciji kontinualnih funkcija – trapezno pravilo, Simpsonovo pravilo, kao i pravila iz grupe Gauss-ovih postupaka integracije, među kojima su Gauss-Legendre-ovo i Gauss-Lobatto-ovo pravilo najčešće korišćena pravila u metodi konačnih elemenata. Sa druge strane, pravilo skraćene integracije je interesantno za posmatrani problem budući da je njegova osnovna ideja da se željeni stepen tačnosti dobije sa smanjenim brojem tačaka integracije u odnosu na standardna pravila integracije. Više detalja o ovom pravilu integracije je dato u Prilogu A.



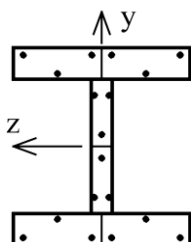
Slika 2.1: Dekompozicija I profila na tri pravougaone oblasti

Ovo istraživanje je obuhvatilo više različitih šema diskretizacije I preseka sa svih šest nabrojanih pravila integracije. Cilj istraživanja je bio određivanje, u kompjuterskom smislu, efikasne šeme, tj. šeme sa što manjim brojem tačaka integracije koja obezbeđuje dovoljno tačno predstavljanje I preseka u slučaju nelinearnog odgovora. Na slikama 2.2 i 2.3 je predstavljeno samo šest odabranih šema diskretizacije na kojima se mogu ilustrovati dobijeni zaključci. Pet šema koje su prikazane na slici 2.2 koriste pravilo pravougaonika dok šesta šema sa slike 2.3 koristi skraćeno pravilo integracije. Tokom istraživanja pokazalo se da

šeme diskretizacije sa manje od 12 tačaka neprihvatljivo grubo predstavljaju I presek, dok se 12 tačaka pokazalo kao minimum prihvatljiv za primenu u praktičnim aplikacijama. Takođe, pravila integracije veće tačnosti nego što je to pravilo pravougaonika, koja su pogodna pri integraciji kontinualnih funkcija, ovde se nisu pokazala kao superiornija u odnosu na najjednostavnije pravilo pravougaonika budući da, kao što je već pomenuto, raspodela modula elastičnosti može biti diskontinualna pri neelastičnim deformacijama. Ovaj zaključak će biti ilustrovan kasnije u delu 2.2.2.



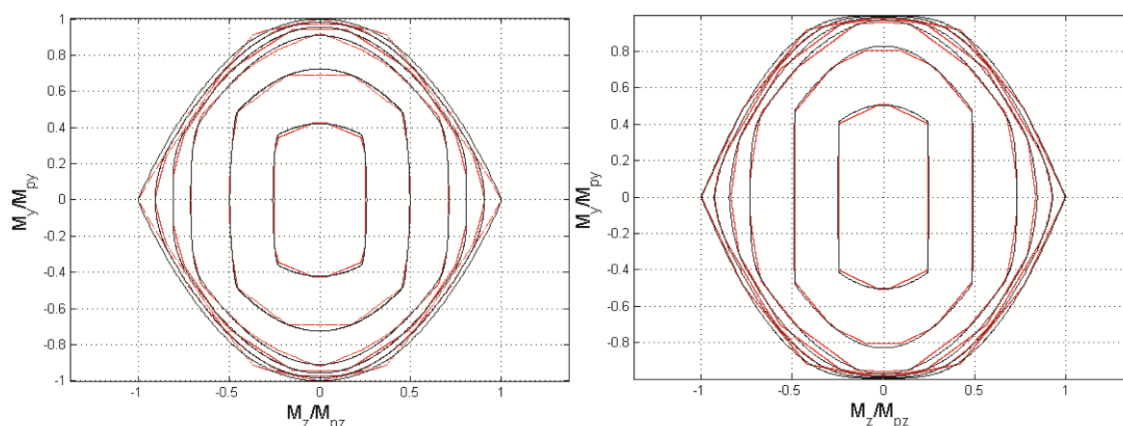
Slika 2.2: Diskretizacija I profila korišćenjem pravila pravougaonika pomoću (a) 12 vlakana (12MP), (b) 24 vlakna (24MP), (c) 40 vlakana (40MP), (d) 84 vlakna (84MP) i (e) 108 vlakana (108MP)



Slika 2.3: Diskretizacija I profila korišćenjem skraćenog pravila integracije pomoću 18 vlakana (18SI)

Ipak, šema diskretizacije sa skraćenim pravilom integracije i 6 tačaka integracije u svakoj od tri pravougaone oblasti I preseka, dakle, sa ukupno 18 vlakana (2.3) je pokazala neke svoje prednosti budući da postiže isti stepen tačnosti sa manjim brojem vlakana. Ova šema, sa oznakom 18SI gde SI označava specijalnu (skraćenu) integraciju, daje tačne vrednosti površine i momenata inercije oko glavnih osa inercije y i z . Takodje, plastični otporni moment oko glavne ose inercije z se takođe tačno određuje, dok je greška pri određivanju plastičnog otpornog momenta oko ose y za sve standardne US I profile manja od 1.5%. Moguća primena ove šeme diskretizacije za određivanje plastične površi tečenja

i pri tzv. pushover analizi je ilustrovana na slici 2.4. Kao što se može videti, čitava površ tečenja za oba posmatrana preseka je određena sa velikom tačnošću. Na ovoj slici je „tačno“ rešenje dobijeno numerički korišćenjem vlaknastog preseka sa 288 tačaka integracije, budući da dalje povećanje tačaka integracije nije uticalo na promenu dobijenih krivih. Nažalost, pri cikličnom opterećenju, ova šeme diskretizacije nije pokazala nikakve prednosti pri korišćenju.

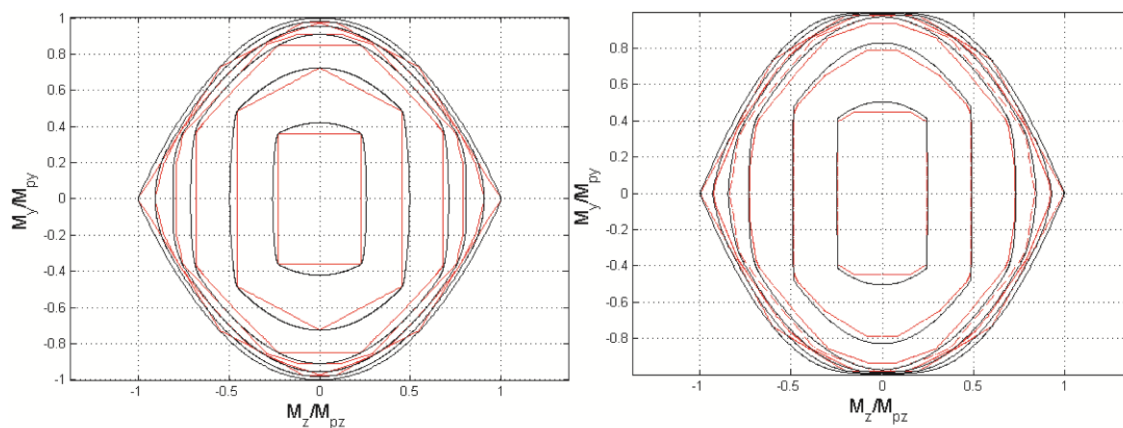


Slika 2.4: Poređenje aproksimativne krive tečenja dobijene 18SI diskretizacijom (crvena kriva) i tačne krive tečenja (crna kriva) za $N=0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6$ i $0.8 N_p$:
(a) W14x426 presek i (b) W12x30 presek

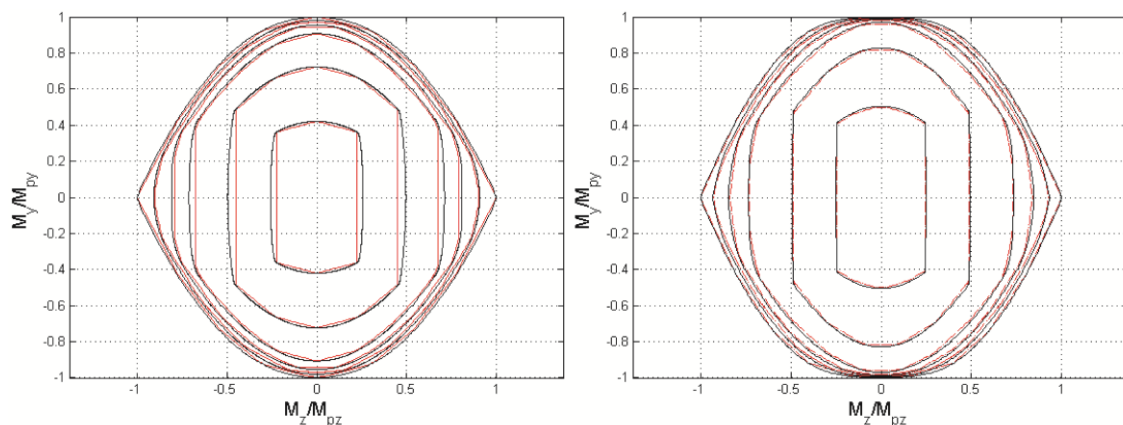
Stoga je, zbog svega prethodno navedenog, dalje istraživanje bilo usmereno na šeme diskretizacije koje koriste pravilo pravougaonika i na postizanje željene tačnosti (slika 2.2). U ovim šemama diskretizacije, povećavan je broj tačaka integracije u svakoj od tri pravougaone oblasti (flanše i rebro), pri čemu su vlakna u njima raspoređena na pravilan način i, u svakoj od oblasti, imaju istu pripadajuću površinu (težinu), tj. bez „favorizovanja“ pojedinih vlakana.

Među šemama diskretizacije sa pravilom pravougaonika koje su prikazane na slici 2.2, najjednostavnija a praktično funkcionalna šema je šema sa 12 tačaka integracije, sa po 4 tačke integracije u svakoj od flanši i u rebru. Ova šema je obeležena kao 12MP šema, pri čemu MP označava metodu pravougaonika. Aproksimativna površ tečenja dobijena ovom šemom ima zadovoljavajuću tačnost (slika 2.5) iako su ovi rezultati dosta lošiji u odnosu na rezultate

pomenute 18SI šeme koji su prikazani na slici 2.4. Ostale četiri šeme sa slike 2.2 imaju veću tačnost pri cikličnom neelastičnom odgovoru I preseka pri čemu je njihova „cena“, u kompjuterskom smislu, praktično proporcionalna broju upotrebljenih tačaka integracije. Na slici 2.6 prikazana je površ tečenja za šemu 24MP koja ima 8 vlakana u svakoj od flanši i 4x2 vlakna u rebru, slika 2.2(b). Evidentan je veći stepen tačnosti ove šeme nego 12MP šeme. Takođe, ovde se može videti i prednost korišćenja 18SI šeme u odnosu na 24MP šemu za određivanje granične površi tečenja, naročito kod W14x426 preseka sa debljim nožicama, pri čemu je to postignuto sa 25% manjim brojem vlakana.

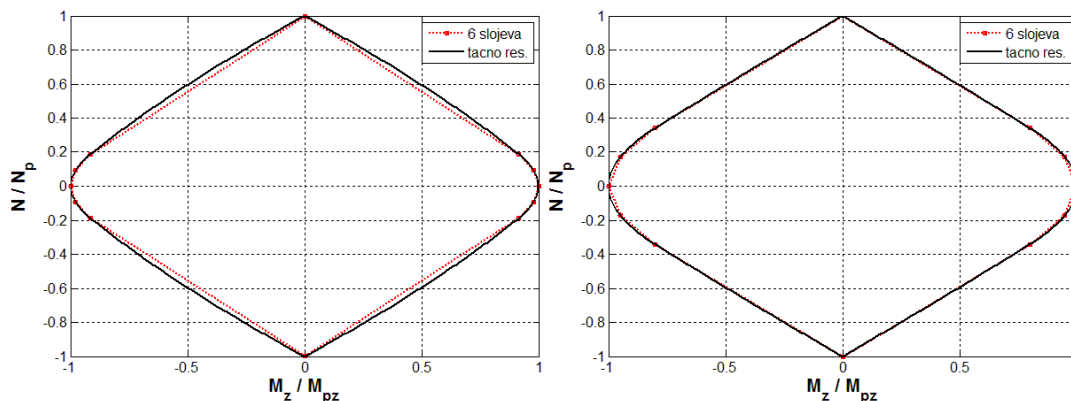


Slika 2.5: Poređenje aproksimativne krive tečenja dobijene 12MP diskretizacijom (crvena kriva) i tačne krive tečenja (crna kriva) za $N=0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6$ i $0.8 N_p$: (a) W14x426 presek i (b) W12x30 presek



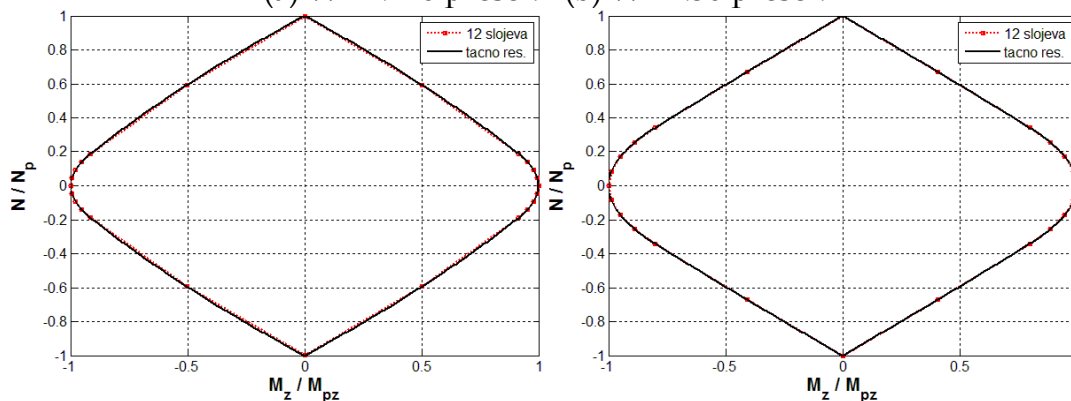
Slika 2.6: Poređenje aproksimativne krive tečenja dobijene 24MP diskretizacijom (crvena kriva) i tačne krive tečenja (crna kriva) za $N=0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6$ i $0.8 N_p$: (a) W14x426 presek i (b) W12x30 presek

Pri jednoosnom savijanju, tri šeme prikazane na slici 2.2 (a), (c) i (e) se svode na šeme sa 6, 12 i 18 slojeva pri savijanju oko glavne z ose inercije preseka. Odgovarajuće N - M krive interakcije su prikazane na slikama 2.7, 2.8 i 2.9.



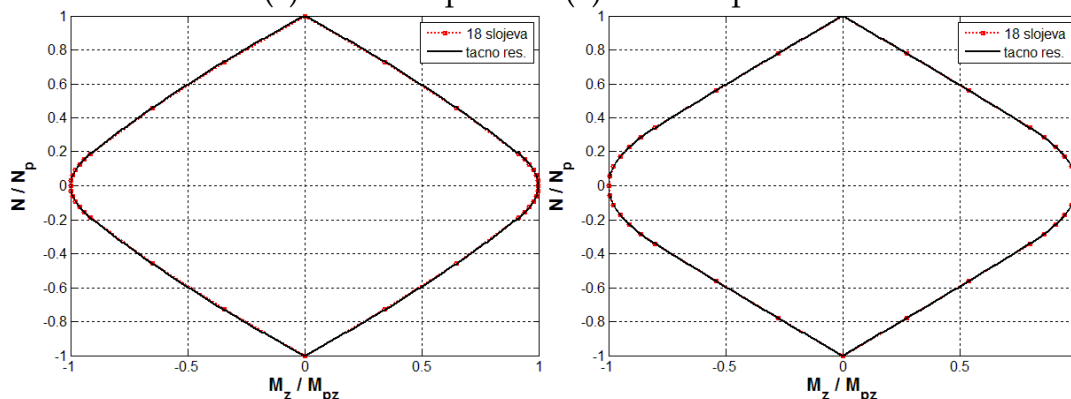
Slika 2.7: Poređenje aproksimativne krive tečenja dobijene diskretizacijom sa 6 slojeva – 12MP šema i tačne krive tečenja za savijanje oko glavne z ose inercije:

(a) W14x426 presek i (b) W12x30 presek



Slika 2.8: Poređenje aproksimativne krive tečenja dobijene diskretizacijom sa 12 slojeva – 40MP šema i tačne krive tečenja za savijanje oko glavne z ose inercije:

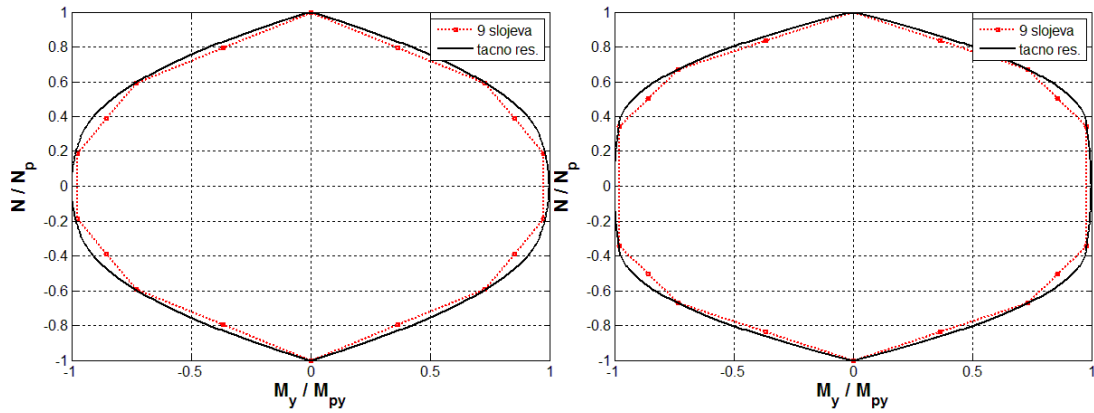
(a) W14x426 presek i (b) W12x30 presek



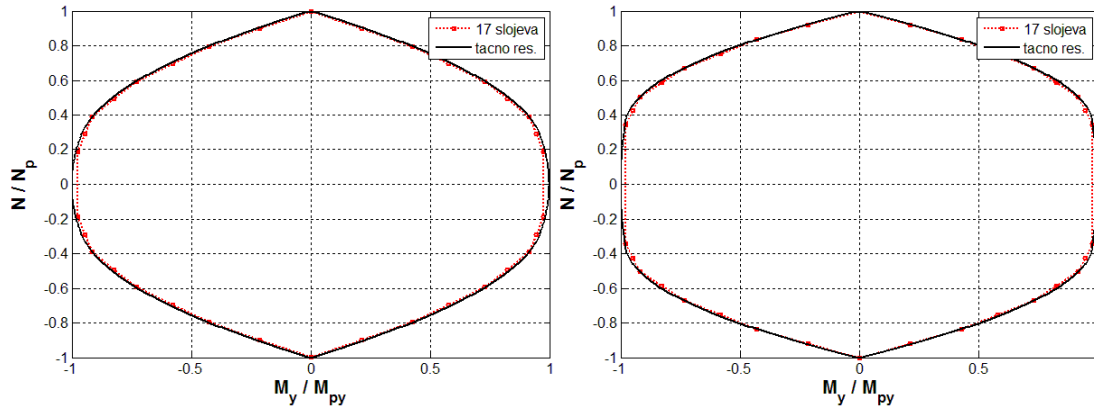
Slika 2.9: Poređenje aproksimativne krive tečenja dobijene diskretizacijom sa 18 slojeva – 108MP šema i tačne krive tečenja za savijanje oko glavne z ose inercije:

(a) W14x426 presek i (b) W12x30 presek

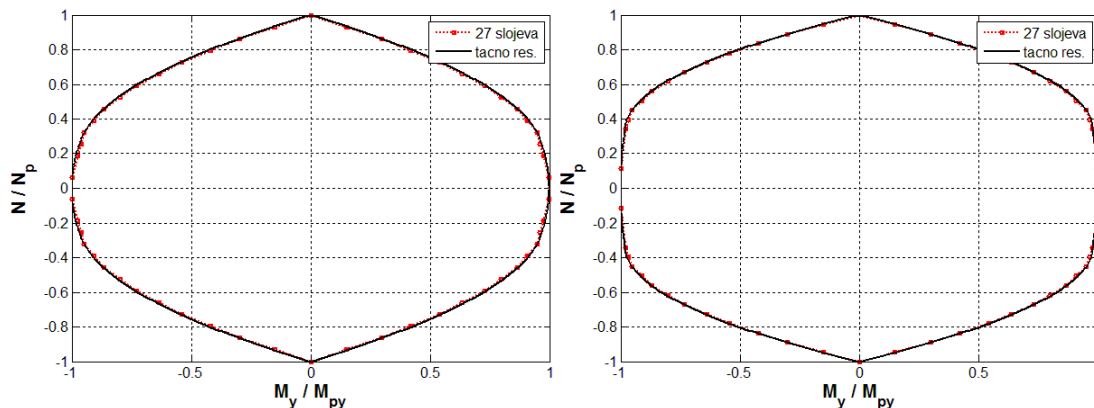
Pri savijanju oko druge glavne ose inercije (ose y), odgovarajuće diskretizacije imaju 9, 17 i 27 slojeva i njihove krive su prikazane na slikama 2.10, 2.11 i 2.12.



Slika 2.10: Poređenje aproksimativne krive tečenja dobijene diskretizacijom sa 9 slojeva – 12MP šema i tačne krive tečenja za savijanje oko glavne y ose inercije:
(a) W14x426 presek i (b) W12x30 presek



Slika 2.11: Poređenje aproksimativne krive tečenja dobijene diskretizacijom sa 17 slojeva – 40MP šema i tačne krive tečenja za savijanje oko y ose inercije:
(a) W14x426 presek i (b) W12x30 presek



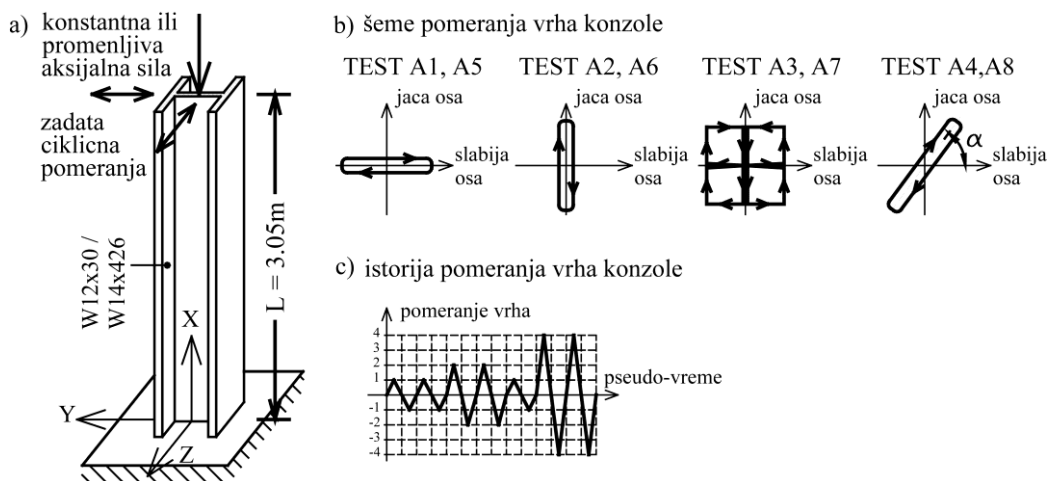
Slika 2.12: Poređenje aproksimativne krive tečenja dobijene diskretizacijom sa 27 slojeva – 108MP šema i tačne krive tečenja za savijanje oko y ose inercije:
(a) W14x426 presek i (b) W12x30 presek

Na osnovu prikazanih rezultata, može se zaključiti da se dosta tačne aproksimativne krive tečenja mogu dobiti diskretizacijama I preseka sa malim brojem tačaka integracije. Adekvatnost ovih šema diskretizacije za primenu kod nelinearne analize konstrukcija će biti potvrđena u parametarskoj studiji koja je prikazana u nastavku ovog poglavlja.

2.2.2. NUMERIČKE SIMULACIJE

(a) Konzolni stub

Radi ocene tačnosti i praktične upotrebljivosti šema diskretizacije I poprečnog preseka prikazanih na slici 2.2, izvršeno je numeričko simuliranje ponašanja konzolnog stuba (slika 2.13(a)) usled nelinearnih deformacija. Pri tome, slobodni kraj posmatrane konzole je izložen širokom spektru cikličnih pomeranja u pravcu jedne ili obe ose poprečnog preseka, uz prisustvo aksijalne sile koja je ili konstantna ili se menja sa pomeranjima vrha konzole. Kao inspiracija za ovakve numeričke simulacije su poslužili prethodno sprovedeni eksperimenti [32,33]. Numeričke simulacije su izvršene korišćenjem FEDEASLab-a [34], Matlab toolbox-a za nelinearnu analizu konstrukcija koji je razvijen na fakultetu Berkli u Kaliforniji.



Slika 2.13: (a) Konzolni stub; (b) šeme pomeranja vrha konzole; (c) istorija pomeranja vrha konzole

Analiza obuhvata stubove I čeličnih poprečnih preseka, pomenutih profila: W14x426 profil – stubovi serije A i W12x30 profil – stubovi serije B. Za svaki od ove dve grupe stubova, posmatrano je osam različitih opterećenja. Pri tome, kod testova br. od 1 do 4 aksijalna sila pritiska u stubu je bila konstantna i iznosila je 20% od aksijalne nosivosti stuba N_p , dok je kod testova br. 5 do 8 aksijalna sila pritiska bila promenljiva i kretala se u opsegu od 5% do 45% od aksijalne nosivosti stuba N_p . Pri tome, promena sile je pratila pomeranja vrha stuba u Y pravcu u testovima br. 5, 7 i 8, odnosno, pratila je pomeranja vrha stuba u pravcu ose Z u testu broj 6. U testovima br. 4 i 8 zadržan je konstantan odnos pomeranja u pravcima osa Y i Z. U tabeli 2.1 prikazan je ugao α koji zaklapa vektor pomeranja vrha konzole sa osom Y (slika 2.13(b)) za devet odabranih slučajeva. Vrednosti ugla α su određene tako da odnos normiranog momenta savijanja oko ose Z, M_z/M_{pz} , i normiranog momenta savijanja oko ose Y, M_y/M_{py} , na početku analize unutar elastične oblasti, iznosi redom 10, 5, 2.5, 2, 1.5, 1, 0.5, 0.25 i 0.125 u testovima br. 4_1 do 4_9 (kao i testovima 8_1 do 8_9). Pomeranje vrha konzole koje odgovara tzv. “cloverleaf” modelu je u tabeli 2.1 obeleženo kao “CL” model. Referentno pomeranje (za testove sa komponentama pomeranja u pravcu obe ose to je pomeranje u pravcu ose Z) iznosilo je 2.54 cm za testove br. 4_1 do 4_3 (i 8_1 do 8_3), i 5.08 cm za ostale testove.

Materijal od koga su sačinjeni čelični profili je elasto-plastičan sa granicom tečenja $\sigma_T=345$ MPa i modulom elastičnosti $E=200$ GPa. Da bi se izbegli eventualni numerički problemi kod šema diskretizacije sa vrlo malim brojem tačaka integracije, pri simulacijama je zadat mali modul ojačanja materijala od 0.01%, nakon što je provereno da ovaj iznos ima zanemarljiv uticaj na dobijene rezultate. Takođe, eventualni problemi konvergencije se mogu izbeći i korišćenjem modela generalisane plastičnosti za materijale koji opisuju postepen prelaz iz elastične oblasti u plastičnu oblast i o kojima će biti više reči u narednom poglavlju. Konzolni stub je modeliran jednim fiber konačnim

elementom formulisanim prema metodi sila, sa četiri Gauss-Lobatto tačke integracije duž ose elementa. Rezultati svih testova su prikazani na slikama B.1-B.292 u Prilogu B, pri čemu su X, Y i Z ose globalnog koordinatnog sistema koje su prikazane na slici 2.13(a). "Tačno" rešenje je dobijeno pomoću vrlo fine diskretizacije poprečnog preseka sa 288 tačaka integracije, 3x32 tačke u svakoj od flanši i 32x3 tačke integracije u rebru.

Tabela 2.1: Konzolni stub – podaci o testovima

Test	Aksijalna sila	Ugao α
A1(B1)	$-0.2N_p$	0°
A2(B2)	$-0.2N_p$	90°
A3(B3)	$-0.2N_p$	CL šema
A4_1 (B4_1)	$-0.2N_p$	8.0° (14.5°)
A4_2 (B4_2)	$-0.2N_p$	15.6° (27.4°)
A4_3 (B4_3)	$-0.2N_p$	29.2° (46.0°)
A4_4 (B4_4)	$-0.2N_p$	33.5° (52.4°)
A4_5 (B4_5)	$-0.2N_p$	43.0° (60.0°)
A4_6 (B4_6)	$-0.2N_p$	52.9° (68.9°)
A4_7 (B4_7)	$-0.2N_p$	69.3° (79.1°)
A4_8 (B4_8)	$-0.2N_p$	79.9° (84.5°)
A4_9 (B4_9)	$-0.2N_p$	84.9° (87.2°)
A5(B5)	$(-0.05; -0.45)N_p$	0°
A6(B6)	$(-0.05; -0.45)N_p$	90°
A7(B7)	$(-0.05; -0.45)N_p$	CL šema
A8_x (B8_x)	$(-0.05; -0.45)N_p$	isto kao A4_x (B4_x)

Prilikom ove analize pokazalo se da su najzahtevniji testovi br. 4 i 8, pa su zato rezultati sa finijim diskretizacijama 40MP, 84MP i 108MP prikazani samo za ove testove. Takođe, za testove sa dominantnim savijanjem oko slabije ose inercije preseka (testovi br. 2, 4_7 do 4_9, 6 i 8_7 do 8_9) prikazani su i rezultati dobijeni sa 24MP diskretizacijom preseka. Promene dilatacije najudaljenijeg vlakna kroz (pseudo)vreme su prikazane za šeme diskretizacije 12MP, 24MP i 108MP. Pri tome, budući da je konzolni stub bio izložen izuzetno velikim pomeranjima u simulacijama, prikazani dijagrami su ograničeni na prvih nekoliko sekundi kada se vrednosti dilatacija nalaze u uobičajenim granicama.

Ocena greške

Adekvatna ocena greške neelastičnog odgovora dobijena pomoću različitih šema driskretizacije prikazanih na slici 2.2 je predstavljala izvestan problem. Poređenje samo maksimalne dobijene nosivosti preseka i početne krutosti aproksimativnog i "tačnog" rešenja je pogodno u slučaju monotonog odgovora. Međutim, ovakvo poređenje pojedinačnih vrednosti ne prikazuje na odgovarajući način složenost odgovora u prisustvu interakcije normalne sile i momenata savijanja niti može da prikaže uzajamno dejstvo koje postoji između sila i deformacija elementa. Nakon pažljivog razmatranja, odlučeno je da se disipacija energije elementa usvoji kao najmerodavnija mera greške pri složenom cikličnom neelastičnom odgovoru elementa, budući da se na taj način uzima u obzir doprinos svih rezultanti napona (sila u preseku) i njihovih odgovarajućih deformacija. Da bi se došlo do same vrednosti greške pri cikličnom odgovoru, najpre je definisana greška između aproksimativnog rešenja u odnosu na "tačno" rešenje, e_i , unutar ciklusa i na sledeći način:

$$e_i (\%) = \frac{W_{t,i} - W_{a,i}}{W_{t,i}} \cdot 100 \quad (2.7)$$

gde je W_a rad ostvaren aproksimativnim rešenjem, a W_t rad "tačnog" rešenja koje odgovara diskretizaciji sa 288 tačaka integracije. Apsolutna vrednost greške je zatim pomnožena koeficijentima težine koji odgovaraju doprinosu ciklusa i ukupnom radu ostvarenom pri čitavoj istoriji opterećenja $W_{t,tot}$ i tako je dobijena prosečna (srednja) greška e u disipaciji energije pri čitavom odgovoru elementa, tj.:

$$e = \frac{\sum_{i=1}^N |e_i| \cdot W_{t,i}}{W_{t,tot}} \quad (2.8)$$

gde N predstavlja broj ciklusa opterećenja. Greška e i apsolutna vrednost maksimalne greške e_i za sve cikluse (u zagradi) za šeme diskretizacije sa slike 2.2 prikazane su u tabeli 2.2 za testove serije A i u tabeli 2.3 za testove serije B.

Tabela 2.2: Prosečna greška e (maksimalna greška e_i) za čelični konzolni stub sa W14x426 I profilom

Test	Greška (%)				
	12MP	24MP	40MP	84MP	108MP
A1	1.87 (2.73)				0.01 (0.06)
A2	2.60 (13.38)	0.44 (2.78)			0.35 (1.28)
A3	1.51 (2.28)				0.10 (0.21)
A4_1	1.63 (2.99)		0.25 (0.35)	0.13 (0.16)	0.09 (0.10)
A4_2	0.94 (1.78)		0.50 (0.63)	0.27 (0.31)	0.25 (0.31)
A4_3	0.41 (1.48)		0.08 (0.49)	0.14 (0.21)	0.11 (0.17)
A4_4	1.10 (1.56)		0.09 (0.37)	0.18 (0.27)	0.09 (0.17)
A4_5	3.38 (7.45)		0.57 (1.34)	0.17 (0.44)	0.12 (0.32)
A4_6	4.22 (4.68)		1.86 (2.79)	0.43 (0.54)	0.31 (0.42)
A4_7	4.15 (6.64)	0.42 (3.36)	0.60 (2.38)	0.67 (0.87)	0.34 (0.54)
A4_8	5.33 (8.94)	1.71 (2.27)	1.96 (2.20)	1.24 (1.36)	0.65 (1.14)
A4_9	2.39 (11.89)	1.77 (3.53)	2.84 (3.32)	2.14 (2.57)	0.23 (0.93)
A5	0.58 (0.81)				0.47 (1.03)
A6	4.65 (12.17)	3.70 (5.22)			0.73 (0.90)
A7	0.95 (3.73)				0.08 (0.18)
A8_1	1.05 (1.84)		0.20 (0.34)	0.14 (0.72)	0.14 (0.72)
A8_2	0.62 (0.86)		0.18 (0.34)	0.02 (0.05)	0.01 (0.04)
A8_3	0.92 (1.44)		0.29 (0.33)	0.14 (0.18)	0.07 (0.16)
A8_4	4.54 (7.52)	1.82 (3.20)	0.34 (0.49)	0.13 (0.19)	0.09 (0.14)
A8_5	1.38 (2.56)		0.38 (0.64)	0.19 (0.23)	0.10 (0.13)
A8_6	1.61 (2.79)		0.52 (0.89)	0.30 (0.51)	0.20 (0.34)
A8_7	3.51 (6.35)	1.72 (2.77)	1.19 (2.11)	0.75 (1.10)	0.28 (0.53)
A8_8	6.04 (10.08)	1.03 (2.54)	1.68 (2.06)	1.27 (1.54)	0.67 (1.00)
A8_9	4.91 (11.27)	1.13 (1.97)	1.76 (2.36)	0.93 (1.35)	0.21 (1.18)

Dijagrami moment-plastična rotacija i aksijalna sila-aksijalna plastična deformacija za sve testove sa čeličnim I profilom dati su u Prilogu B.

Tabela 2.3: Prosečna greška e (maksimalna greška e_i) za čelični konzolni stub sa W12x30 I profilom

Test	Greška (%)				
	12MP	24MP	40MP	84MP	108MP
B1	2.41 (2.71)				0.07 (0.19)
B2	7.51 (18.70)	2.37 (4.46)			0.52 (1.18)
B3	0.59 (1.38)				0.12 (0.21)
B4_1	2.67 (2.78)		0.48 (0.54)	0.15 (0.23)	0.15 (0.23)
B4_2	2.21 (2.55)		0.45 (0.52)	0.07 (0.17)	0.07 (0.15)
B4_3	1.94 (10.00)		0.65 (1.05)	0.09 (0.84)	0.09 (0.83)
B4_4	2.46 (4.30)		0.38 (1.55)	0.23 (0.31)	0.20 (0.28)
B4_5	2.07 (4.69)		0.64 (1.18)	0.33 (0.58)	0.32 (0.56)
B4_6	2.69 (13.00)		0.64 (1.97)	0.37 (1.69)	0.36 (1.01)
B4_7	5.04 (11.75)	1.80 (5.06)	1.65 (4.88)	0.58 (1.44)	0.57 (1.10)
B4_8	6.85 (13.33)	1.74 (4.52)	1.74 (4.59)	0.46 (2.82)	0.37 (1.28)
B4_9	7.98 (19.48)	1.60 (5.21)	1.53 (5.24)	0.65 (2.83)	0.75 (1.99)
B5	1.45 (2.14)				0.06 (0.10)
B6	4.68 (19.08)	2.03 (5.52)			1.15 (1.88)
B7	1.17 (1.33)				0.09 (0.21)
B8_1	1.02 (2.25)		0.92 (2.65)	0.38 (1.10)	0.09 (0.15)
B8_2	1.32 (2.78)		1.21 (2.56)	0.04 (0.29)	0.03 (0.27)
B8_3	0.73 (3.02)		0.33 (1.14)	0.03 (0.45)	0.03 (0.45)
B8_4	2.80 (4.01)		0.27 (1.01)	0.14 (0.27)	0.10 (0.23)
B8_5	2.15 (5.70)		0.28 (1.05)	0.20 (0.41)	0.15 (0.32)
B8_6	1.52 (8.35)		0.86 (1.77)	0.18 (0.59)	0.16 (0.61)
B8_7	4.02 (9.15)	1.19 (4.56)	1.04 (4.32)	0.46 (0.91)	0.41 (0.89)
B8_8	7.27 (14.12)	1.27 (3.29)	1.25 (3.25)	0.75 (2.04)	0.52 (1.12)
B8_9	5.91 (18.93)	1.14 (3.07)	1.23 (3.08)	0.50 (1.99)	0.50 (1.86)

Na osnovu ovih rezultata može se zaključiti da 12MP šema integracije predstavlja dobar kompromis između postignute tačnosti i kompjuterske efikasnosti. Prosečna greška je veća od 5% samo u par izolovanih slučajeva iz razloga što diskretizacija flanše pomoću samo 4 tačke integracije nije dovoljna za opisivanje savijanja oko slabije ose inercije pri konstantnoj ili promenljivoj aksijalnoj sili (testovi A/B 2 i A/B 6) ili zbog netačnog opisivanja dvoosnog naprezanja i to uglavnom kada dominantno naprezanje oko slabije ose inercije (testovi A/B 4_8, A/B 4_9 sa konstantnom aksijalnom silom i A/B 8_8, A/B 8_9

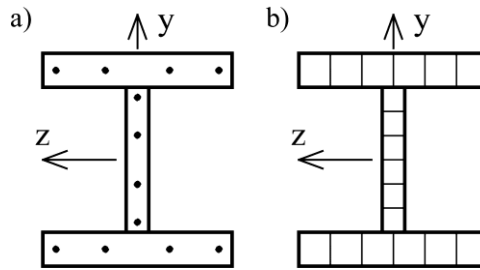
sa promenljivom aksijalnom silom). Za sve navedene slučajeve, značajna redukcija greške u ukupnoj disipaciji energije na manje od 5% se može postići 24MP šemom diskretizacije prikazanom na slici 2.2(b). Takođe treba naglasiti da budući da se ovakvi specifični slučajevi opterećenja mogu javiti u izolovanim (pojedininim) elementima konstrukcije kao što su npr. ugaoni stubovi, značajne uštede u kompjuterskom smislu se mogu postići korišćenjem 12MP šeme integracije za većinu elemenata konstrukcije. Ostale šeme integracije prikazane na slici 2.2(c)-(e) pružaju viši stepen tačnosti. Pri tome, šema 40MP omogućava naročito poboljšanje odgovora pri savijanju oko jače ose inercije, dok 84MP i 108MP šeme obezbeđuju sveukupno visoku tačnost, kao što je rezimirano u narednom odeljku ovog poglavlja.

U slučaju aksijalnog naprezanja i jednoosnog savijanja, I preseki i šuplji pravougaoni preseki su ekvivalentni. Stoga se na šuplje pravougaone preseke može primeniti šema diskretizacije koja odgovara predloženoj 12MP diskretizaciji I profila i koja ima 16 tačaka integracije, po 4 tačke u svakoj od četiri pravougaone oblasti. Na isti način dobijene odgovarajuće šeme integracije za 40MP, 84MP i 108MP šeme obezbediće veći stepen tačnosti.

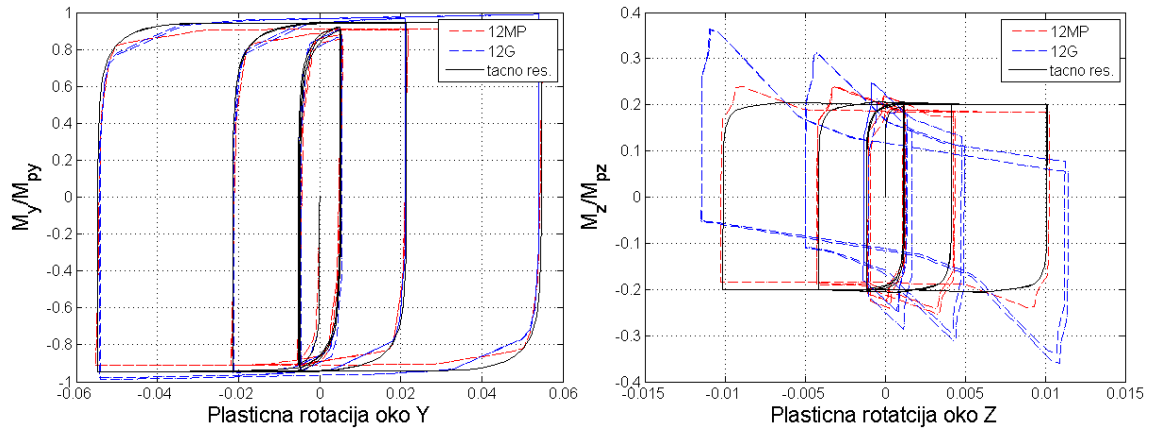
Pravilo pravougaonika i pravila integracije višeg reda

Kao što je već napomenuto, zbog moguće vrlo nepravilne raspodele modula elastičnosti po poprečnom preseku u slučaju cikličnog neelastičnog odgovora, pravila integracije višeg reda u ovom slučaju nisu u prednosti u odnosu na najjednostavnije pravilo pravougaonika pri diskretizaciji poprečnog preseka istim brojem tačaka integracije. Za posmatrani konzolni stub, ovo je ilustrovano kroz dva primera.

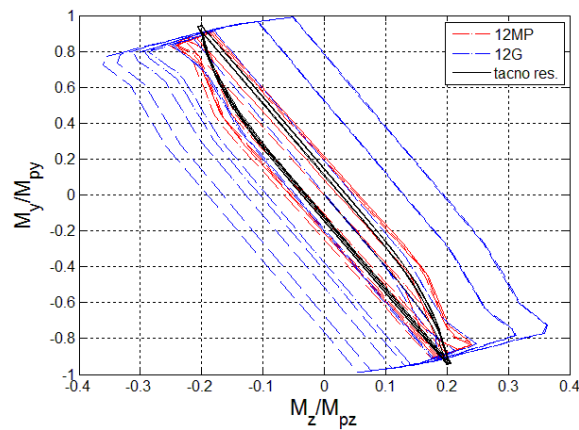
Najpre su rezultati 12MP šeme integracije upoređeni sa rezultatima diskretizacije sa 12 tačaka prema Gauss-Legendre pravilu numeričke integracije koje je prikazano na slici 2.14(a) i obeleženo oznakom 12G. Na slikama 2.15-2.18 su prikazani rezultati za testove br. A4_8 i A8_6.



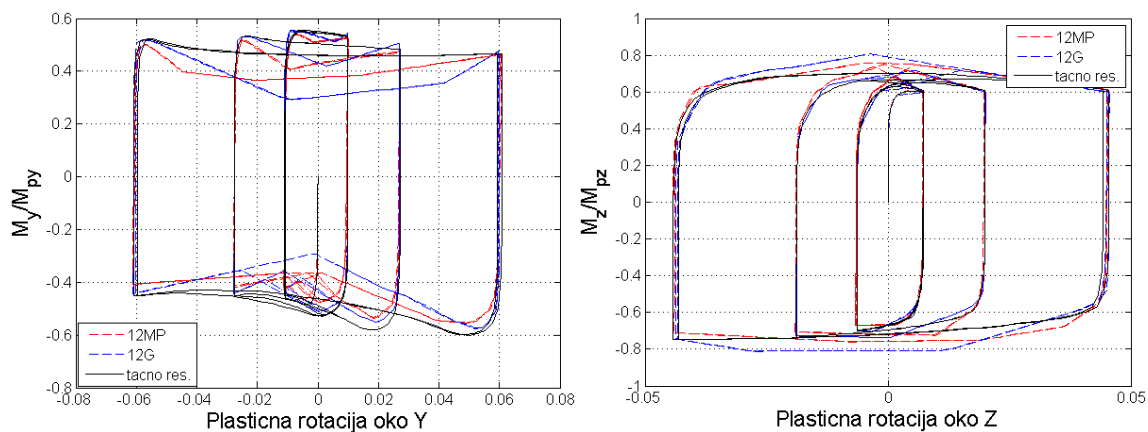
Slika 2.14: Diskretizacija I preseka pomoću (a) 12 vlakana prema Gauss-ovom pravilu integracije (12G); (b) 18 vlakana prema pravilu pravougaonika (18MP)



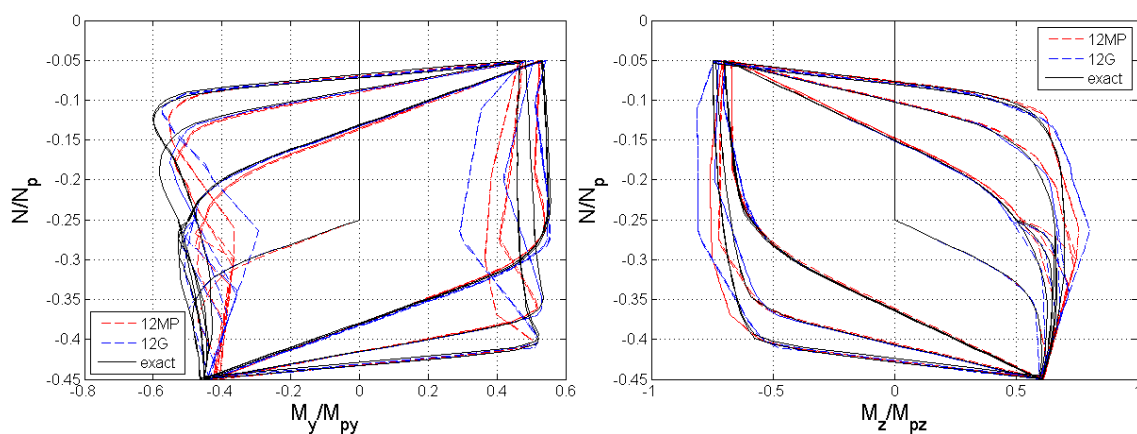
Slika 2.15: Test A4_8: Normiran moment-plastična rotacija dijagram za šeme 12MP i 12G



Slika 2.16: Test A4_8: Putanja normiranih momenata za šeme 12MP i 12G

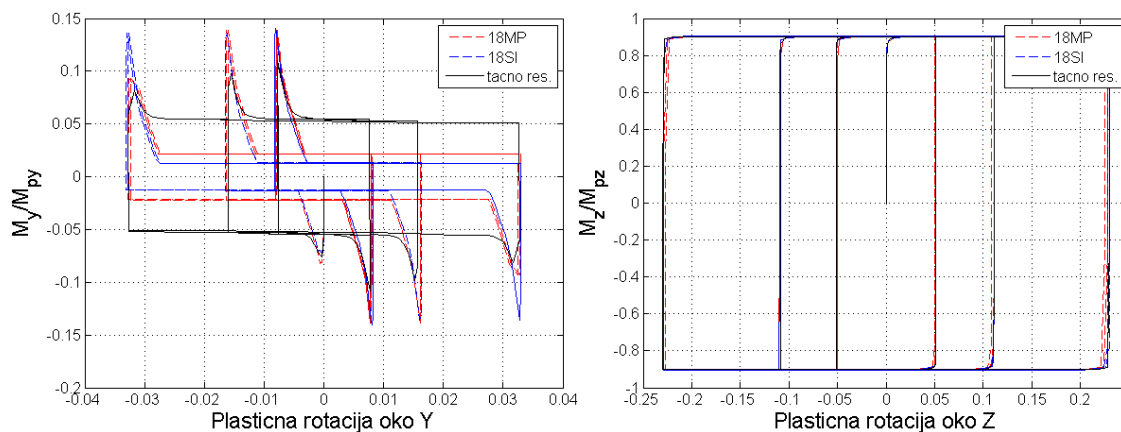


Slika 2.17: Test A8_6: Normiran moment-plastična rotacija dijagram za šeme 12MP i 12G

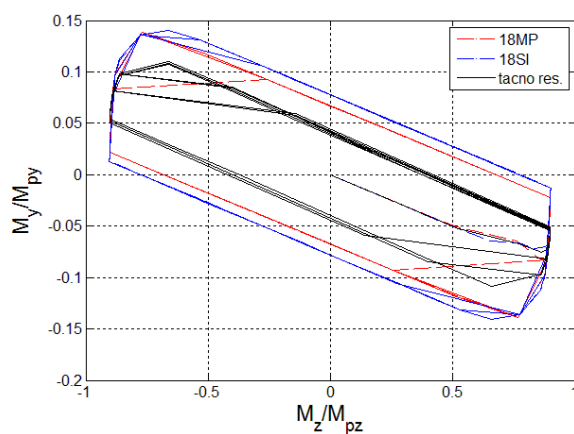


Slika 2.18: Test A8_6: Normiran moment-normirana aksijalna sila dijagram za šeme 12MP i 12G

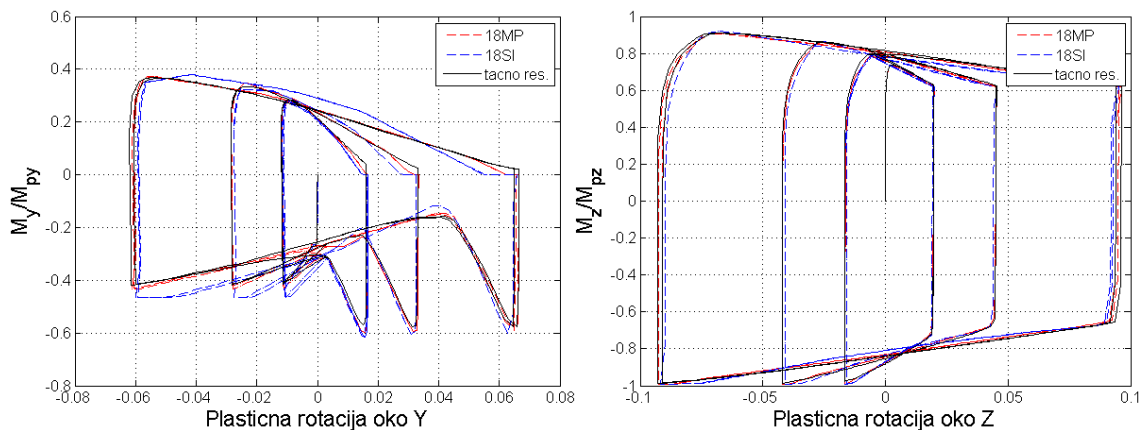
U drugom primeru, rezultati prethodno opisane šeme 18SI (slika 2.3) sa skraćenim pravilom integracije su upoređeni sa rezultatima 18MP šeme koja koristi metodu pravougaonika i ima po 6 tačaka integracije u svakoj od flanši i u rebru (slika 2.14(b)). Rezultati za testove A4_1 i A8_4 su prikazani na slikama 2.19-2.22.



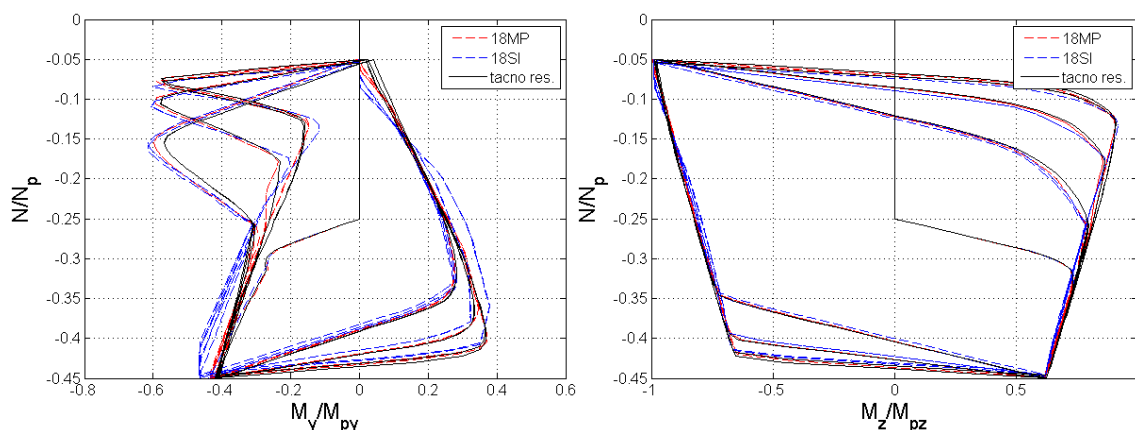
Slika 2.19: Test A4_1: Normiran moment-plastična rotacija dijagram za šeme 18MP i 18SI



Slika 2.20: Test A4_1: Putanja normiranih momenata za šeme 18MP i 18SI



Slika 2.21: Test A8_4: Normiran moment-plastična rotacija dijagram za šeme 18MP i 18SI



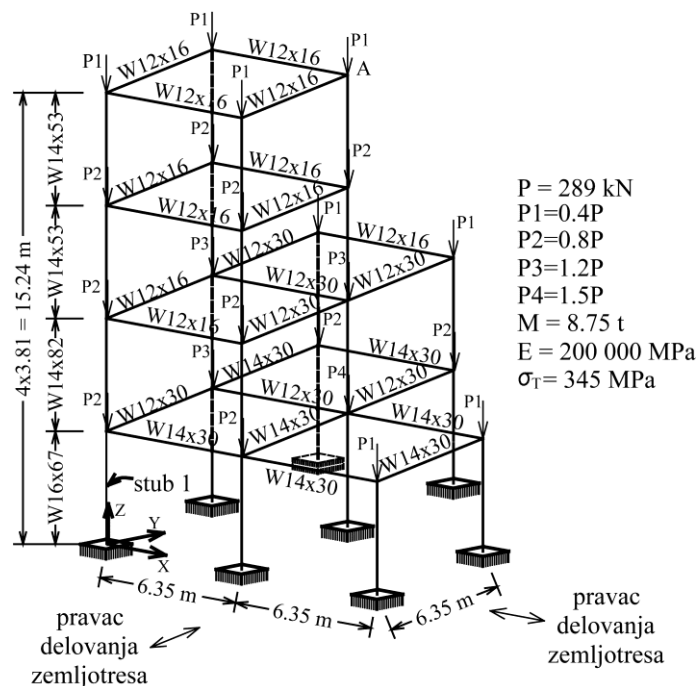
Slika 2.22: Test A8_4: Normiran moment-normirana aksijalna sila dijagram za šeme 18MP i 18SI

Treba naglasiti da su rezultati dobijeni pomoću šema sa 18 tačaka integracije veće tačnosti nego oni dobijeni sa 12MP šemom. Međutim, ova neznatno veća tačnost je ostvarena povećanjem broja tačaka integracije za 50% u odnosu na broj tačaka 12MP šeme. Stoga 12MP šema predstavlja ekonomičniji izbor, koji ima zadovoljavajuću tačnost.

(b) 3D analiza čelične okvirne konstrukcije

Tačnost predložene šeme integracije čeličnog I profila pri određivanju kako globalnog tako i lokalnog odgovora konstrukcije je analizirana na primeru nelinearne dinamičke analize 3D okvira prikazanog na slici 2.23. Nešto izmenjenu verziju ovog okvira je prvi analizirao Campbell [30]. Okvir je najpre bio izložen uticaju statičkog gravitacionog opterećenja koje je prikazano na slici 2.23, a zatim dejstvu zemljotresnog opterećenja u pravcima X i Y usled 1940 El Centro zapisa koji je skaliran tako da maksimalno ubrzanje tla (PGA) iznosi 0.9565 g. Kako je cilj bila analiza uticaja diskretizacije poprečnog preseka na velike neelastične deformacije stubova prizemlja, ostali elementi konstrukcije su modelirani kao elastični elementi. Stubovi prizemlja su modelirani po jednim fiber konačnim elementom (formulisanim prema metodi sila) i četiri Gauss-Lobatto tačke integracije duž ose elementa, uz diskretizaciju poprečnog preseka

prema 12MP šemi ili pomoću 288 tačaka integracije za dobijanje “tačnog” rešenja. Stubovi okvira su tako orijentisani da se slabija osa inercije I preseka poklapa sa osom Y usvojenog globalnog koordinatnog sistema. U svim čvorovima sistema su koncentrisane mase intenziteta 8.75 t. Pretpostavljeno je viskozno prigušenje u iznosu od 4% za prva dva svojstvena tona oscilovanja elastične konstrukcije. Za simulaciju je korišćen FEDEASLab.



Slika 2.23: Četvorospratni 3D čelični ram

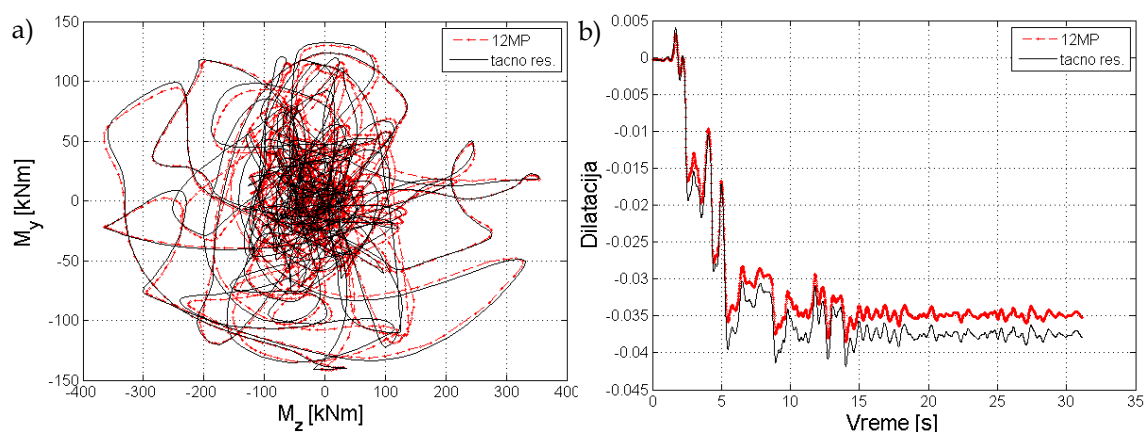
Rezultati ove analize su sumirani u tabeli 2.4. Prikazana je relativna greška 12MP rešenja u odnosu na “tačno” rešenje. Putanje momenata savijanja za presek u uklještenju stuba 1 su prikazane na slici 2.24(a). Zahvaljujući velikom momentu obrtanja koji se javio, došlo je do značajne varijacije aksijalne sile u stubu 1. Ona se kretala između 9% i 48% aksijalne nosivosti stuba N_p tokom analize. Promena dilatacije najudaljenijeg vlakna preseka u uklještenju stuba 1 za 12MP i “tačnu” diskretizaciju je prikazana na slici 2.24(b).

Rezultati prikazani u tabeli 2.4 i na slici 2.24 takođe potvrđuju adekvatnost 12MP šeme integracije. Greška kod ekstremnih vrednosti pomeranja konstrukcije (globalni odgovor) ne prelazi 3%, a takođe i posmatrani parametri

lokalnog odgovora konstrukcije (aksijalna sila i dilatacije najudaljenijeg vlakna) su određeni sa velikom tačnošću. Treba napomenuti da se položaj najudaljenijeg vlakna kod dve diskretizacije preseka ne poklapa i ne predstavlja istu tačku poprečnog preseka. Naime, najudaljenije vlakno kod "tačne" diskretizacije se nalazi bliže ivici I profila i stoga ima i veće dilatacije. Imajući to na umu, sposobnost vrlo "retke" 12MP diskretizacije za opisivanje istorije dilatacije ekstremno udaljenog vlakna je izuzetna.

Tabela 2.4: Ekstremne vrednosti sila i pomeranja kod nelinearne dinamičke analize 3D rama usled ElCentro zemljotresa skaliranog na 0.9565 g PGA

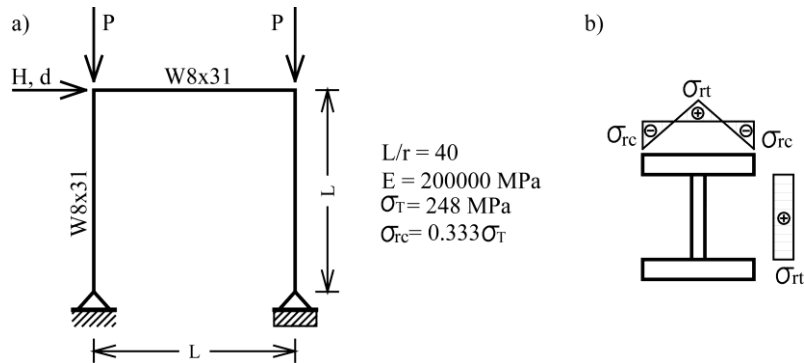
			12MP	"Tačno"	Greška (%)
Tačka A	dX (cm)	Max	48.1	48.8	1.40
		Min	-23.2	-24.0	3.33
	dY (cm)	Max	37.1	37.2	0.31
		Min	-44.9	-45.1	0.31
Stub 1	Mz (kNm)	Max	355.0	354.9	-0.02
		Min	-365.2	-363.4	-0.49
	My (kNm)	Max	129.8	132.3	1.88
		Min	-141.6	-140.6	-0.76
	N (kN)	Max	-7.5	-7.5	0.09
		Min	-38.1	-38.1	0.01



Slika 2.24: (a) Putanja momenata savijanja za presek u ukleštenju stuba 1; (b) promena dilatacije kroz vreme

(c) 2D analiza El-Zanaty okvira

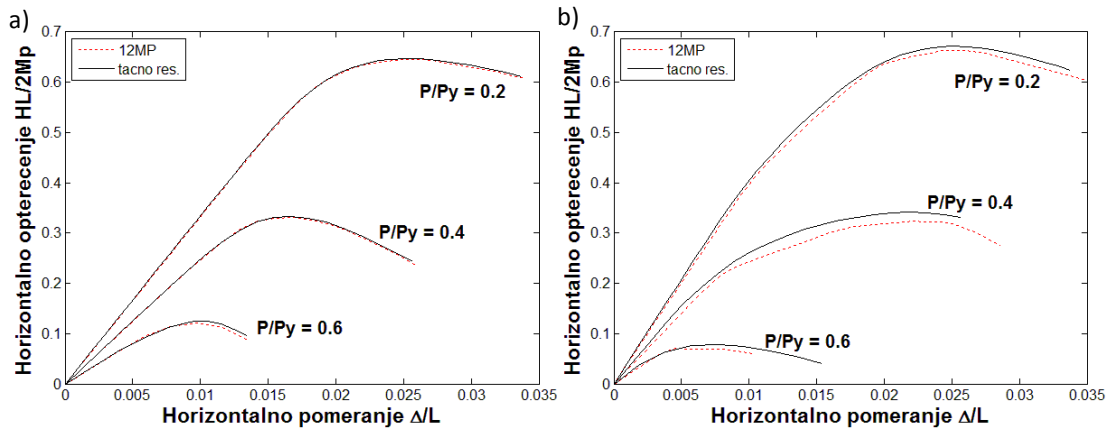
Adekvatnost 12MP diskretizacije za opisivanje N - M interakcije u prisustvu nelinearne geometrije i rezidualnih napona je analizirana na primeru El-Zanaty [35] rama prikazanog na slici 2.25(a).



Slika 2.25: (a) El-Zanaty okvir; (b) raspodela rezidualnih napona

Najpre je na ram naneto gravitaciono opterećenje koje je, zatim, bilo konstantno tokom dalje analize. Potom je horizontalno opterećenje postepeno povećavano. Pretpostavljeno je da se rezidualni naponi menjaju linearno u flanšama sa maksimalnom vrednosti pri pritisku u iznosu od $0.333 \sigma_T$, dok je napon zatezanja konstantan u rebru (slika 2.25(b)). Kod fiber elementa, uticaj rezidualnih napona je uzet u obzir zadavanjem inicijalnih vrednosti napona u vlaknima preseka na početku analize. Iako je u ovom primeru u pitanju 2D analiza rama, budući da je promena rezidualnih napona po površini poprečnog preseka 2D, bila je neophodna diskretizacija poprečnog preseka i u y i z pravcu.

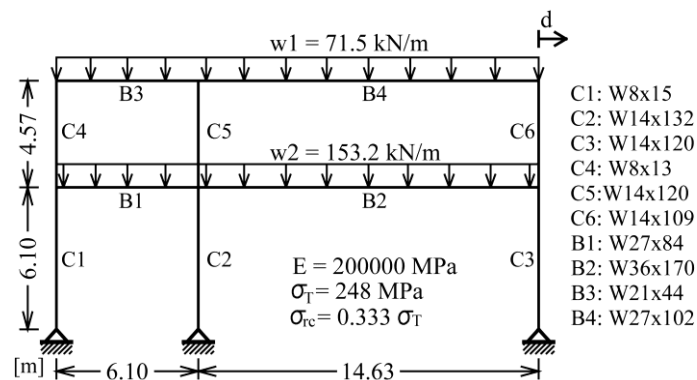
Pri modeliranju rama, svaki element je predstavljen jednim fiber elementom (formulisanim prema metodi sila). Nelinearna geometrija je uzeta u obzir primenom korotacione (corotational) formulacije [20,36]. Materijal je modeliran kao elastičan-idealno plastičan. Rezultati dobijeni pri tri različita nivoa vertikalnog opterećenja u iznosu od 20%, 40% i 60% od granične vertikalne nosivosti stubova pri pritisku, pri savijanju oko jače i slabije ose inercije preseka su prikazani na slici 2.26.



Slika 2.26: Sila-pomeranje dijagrami El-Zanaty okvira:
 (a) savijanje oko jače ose; (b) savijanje oko slabije ose

(d) 2D analiza Ziemian okvira

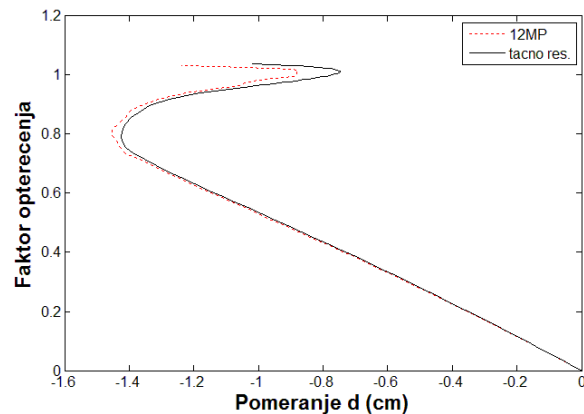
Višestruka mogućnost primene 12MP šeme diskretizacije je potvrđena i na primeru dvospratnog rama gde je, pored rezidualnih napona i nelinearne geometrije, prisutno i raspodeljeno opterećenje duž greda. Ram prikazan na slici 2.27 je prvi analizirao Ziemian [37]. Karakteristika ovog rama je značajna redistribucija sila koja nastaje nakon formiranja plastičnih zglobova [38].



Slika 2.27: Dvospratni Ziemian okvir

Na ovom primeru se, takođe, mogu sagledati i prednosti elemenata formulisanih prema metodi sila u odnosu na metodu deformacija, budući da elementi formulisani prema metodi sila mogu direktno da uzmu u obzir uticaj raspodeljenog opterećenja, uz modifikovanje interpolacionih funkcija. Zahvaljujući tome, svaki od stubova i greda ovog rama je modeliran samo sa

jednim fiber elementom formulisanim prema metodi sila, dakle, ukupno sa 10 elemenata što je neuporedivo manje u odnosu na npr. 536 fiber elemenata formulisanih prema metodi deformacija koliko je Attalla [38] koristio u svojoj studiji. Isti raspored rezidualnih napona kao i u primeru El-Zanaty okvira je pretpostavljen. Materijal je modeliran kao elastičan-idealno plastičan. Nelinearna geometrija je uzeta u obzir preko korotacione (corotational) formulacije [36]. Diajagram sila-pomeranje (kod rešenja označenog kao “tačno” je dobijeno diskretizacijom sa 288 tačaka) za “tačan” i 12MP model je prikazan na slici 2.28.



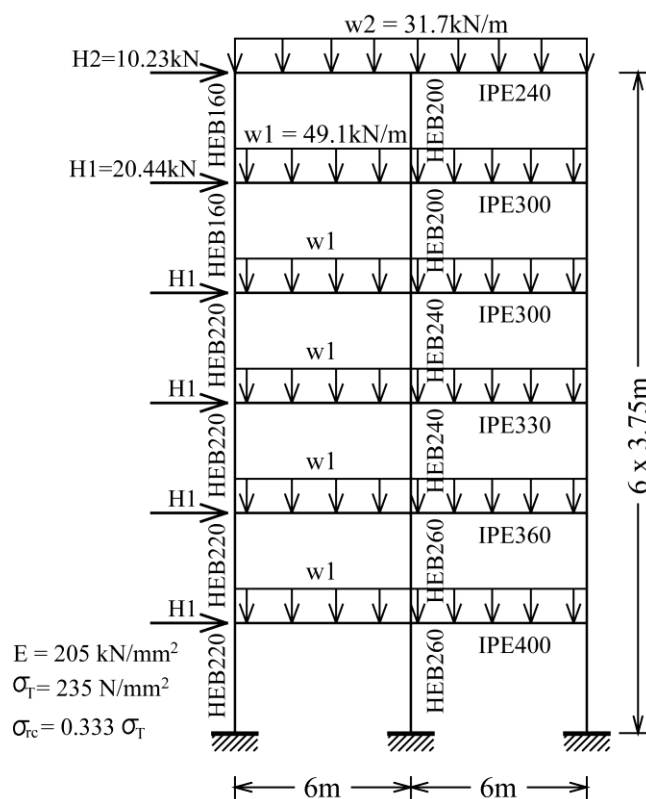
Slika 2.28: Sila-pomeranje dijagram Ziemian okvira

(e) 2D analiza šestospratnog Vogel rama

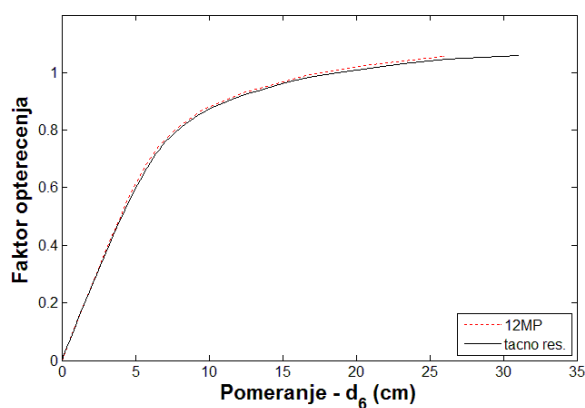
Poslednji primer je šestospratni ram prikazan na slici 2.29 koji je prvi analizirao Vogel [39]. Slično prethodnom primeru, 12MP diskretizacija je testirana u prisustvu nelinearne geometrije, rezidualnih napona i raspodeljenog opterećenja.

Svaki element konstrukcije je modeliran jednim fiber elementom formulisanim prema metodi sila. Pretpostavljen je isti raspored rezidualnih napona kao u primeru El-Zanaty okvira. Materijal je posmatran kao elastičan-idealno plastičan, a nelinearna geometrija je uzeta u obzir preko korotacione (corotational) formulacije [36]. Opterećenje sa slike 2.29 je proporcionalno

povećavano do dostizanja granične vrednosti. Rezultati su prikazani preko dijagrama sila-pomeranje za "tačan" model kod koga je poprečni presek diskretizovan pomoću 288 tačaka integracije i za 12MP model (slika 2.30). Ovi rezultati ponovo potvrđuju adekvatnost primene 12MP modela za praktične probleme.



Slika 2.29: Vogel-ov šestospratni okvir

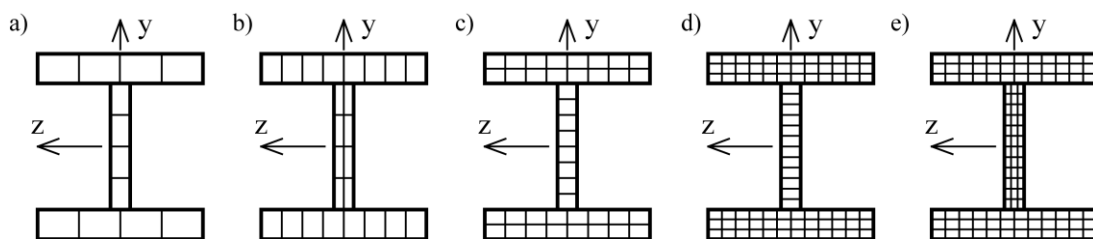


Slika 2.30: Sila-pomeranje dijagram šestospratnog okvira

2.2.3. OGRANIČENJA PRIMENE DISKRETIZACIJE I PRESEKA SA MALO TAČAKA INTEGRACIJE I PRAVILA ZA PROGUŠĆENJE DISKRETIZACIJE

Na osnovu rezultata prethodno prikazane parametarske analize može se zaključiti da se upotrebom tzv. retke diskretizacije poprečnog preseka čeličnog I profila, tj. diskretizacijom sa malo tačaka integracije po površini poprečnog preseka, dobijaju rezultati visoke tačnosti i to ne samo za parametre globalnog odgovora konstrukcije poput horizontalnog pomeranja vrha konstrukcije, nego i za parametre lokalnog odgovora poput relacija moment-rotacija. Stoga 12MP šema, u većini slučajeva, predstavlja odličan kompromis između ostvarene tačnosti i kompjuterske efikasnosti, budući da je vreme potrebno za proračun jedan do dva puta manjeg reda veličine nego kod "tačnog" rešenja. Zbog toga se ova šema diskretizacije preporučuje za upotrebu u praksi.

Rezultati, takođe, pokazuju i da značajnija greška 12MP diskretizacije nastaje u slučaju dominantnog savijanja oko slabije glavne ose inercije preseka. Međutim, budući da samo pojedini elementi prostorne okvirne konstrukcije mogu biti izloženi isključivo ovakvoj vrsti naprezanja, npr. ugaoni stubovi, to nema preveliki praktični značaj. Takođe, malo je verovatno da će ova greška koja se javlja pri određivanju momenta savijanja pri dominantnom savijanju oko slabije glavne ose inercije, uticati na značajnu grešku kod globalnog, pa čak i lokalnog odgovora konstrukcije. Ipak, u slučajevima kada odgovor konstrukcije određuju pojedini elementi konstrukcije koji jesu izloženi isključivo ovom "nepoželjnom" slučaju opterećenja, preporučuju se sledeće finije diskretizacije. Ove "progušćene" diskretizacije se mogu koristiti i samo kod onih elemenata konstrukcije koji su izloženi opisanom "nepoželjnom" slučaju opterećenja.



Slika 2.31: Šeme diskretizacije I čeličnog preseka pri dvoosnom savijanju:
 (a) 12MP; (b) 24MP; (c) 40MP; (d) 84MP i (e) 108MP

Na osnovu svega izloženog, za 3D odgovor čeličnog I profila preporučuju se sledeće šeme diskretizacije (slika 2.31):

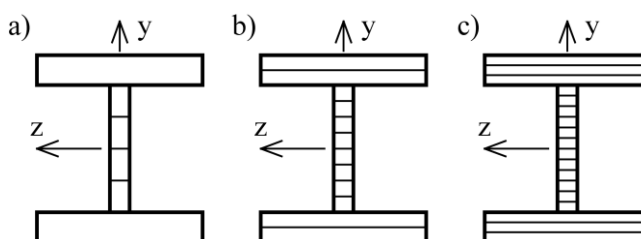
- Diskretizacija pomoću 1x8 tačaka u svakoj od flanši i 4x2 tačke u rebru, ukupno 24 tačke integracije, popravlja ponašanje 12MP šeme u slučajevima sa dominantnim naprezanjem oko slabije ose inercije. U ovim slučajevima, maksimalna greška elementa u ukupnoj disipaciji energije ide do 5%. Treba napomenuti da je ova greška proporcionalna sa greškom u disipaciji energije poprečnog preseka u uklještenju konzole.
- Diskretizacija pomoću 2x8 tačaka u svakoj od flanši i 8x1 tačke u rebru, ukupno 40 tačaka integracije, rezultira maksimalnom greškom elementa u ukupnoj disipaciji energije koja ide do 3% uz 3.5 puta veći broj tačaka diskretizacije. Pri tome, ostvarena tačnost pri dominantnom savijanju oko slabije ose inercije je manja.
- Diskretizacija pomoću 3x12 tačaka u svakoj od flanši i 12x1 tačaka u rebru, ukupno 84 tačke integracije, rezultira maksimalnom greškom elementa u ukupnoj disipaciji energije u svim razmatranim slučajevima koja ide do 3% uz 7 puta veći broj tačaka diskretizacije.
- Diskretizacija pomoću 3x12 tačaka u svakoj od flanši i 12x3 tačke u rebru, ukupno 108 tačaka integracije, rezultira maksimalnom greškom elementa u ukupnoj disipaciji energije od 2% uz 9 puta veći broj tačaka diskretizacije.

Ovi rezultati su pregledno prikazani i u tabeli 2.5.

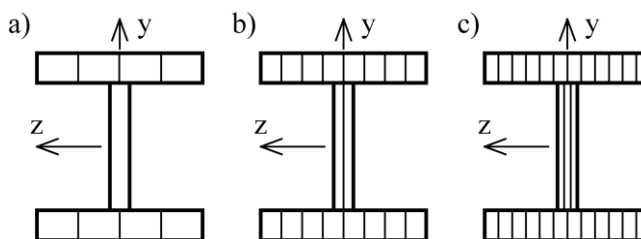
Tabela 2.5: Tačnost predloženih šema diskretizacije čeličnog I preseka pri dvoosnom naprezanju

Broj vlakana	Da li je od značaja tačnost pri savijanju oko slabije ose?	nyfl	nzfl	nyw	nzw	Max greška (%)
24	Da	1	8	4	2	5
40	Ne	2	8	8	1	3
84	Da	3	12	12	1	3
108	Da	3	12	12	3	2

Za 2D odgovor čeličnog I profila odgovarajuće šeme diskretizacije za slučajeve a, c i d ili e sa slike 2.31 obuhvataju 6, 12 i 18 slojeva pri savijanju oko jače ose inercije (slika 2.32). Pri savijanju oko slabije ose inercije, a, b i e šemama diskretizacije sa slike 2.31 odgovaraju redom diskretizacije sa 9, 18 i 27 slojeva (slika 2.33).



Slika 2.32: Šeme diskretizacije I čeličnog preseka pri savijanju oko jače ose: (a) 6; (b) 12 i (c) 18 slojeva



Slika 2.33: Šeme diskretizacije I čeličnog preseka pri savijanju oko slabije ose: (a) 9; (b) 18 i (c) 27 slojeva

Kao što je ranije napomenuto, pri jednoosnom savijanju i aksijalnom naprezanju, šuplji pravougaoni profili i I profili su ekvivalentni, pa se stoga

prethodna pravila za savijanje I profila oko jače ose inercije mogu direktno primeniti. U tom slučaju, predloženoj 12MP semi diskretizacije kod čeličnog I profila odgovara 16MP diskretizacija kod homogenog čeličnog šupljeg pravougaonog preseka koja ima 4 tačke integracije u svakoj od četiri pravougaone oblasti.

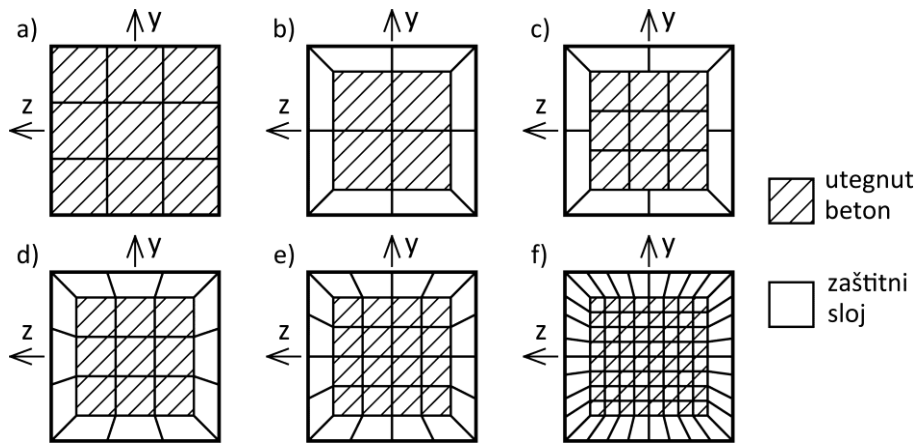
2.3. DISKRETIZACIJA PRAVOUGAONOG BETONSKOG PRESEKA

2.3.1. ŠEME DISKRETIZACIJE

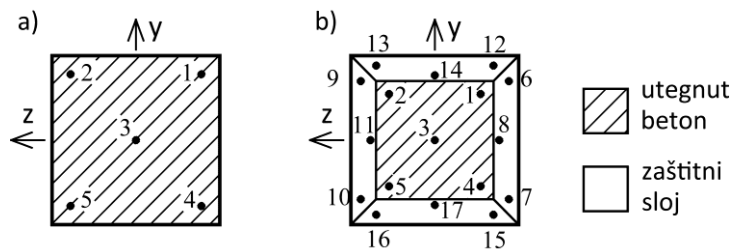
Kod armirano-betonskih (AB) linijskih elemenata, najčešći oblik poprečnog preseka je pravougaoni. Takođe, često se koriste i elementi kružnog poprečnog preseka, kao i šupljeg pravougaonog ili kružnog oblika, naročito kod stubova betonskih mostova ili specijalnih konstrukcija. Međutim, oni nisu obuhvaćeni ovim istraživanjem.

Tri sastavna dela svakog AB poprečnog preseka su: zaštitni sloj betona, koji nije "utegnut" poprečnom armaturom (uzengijama), utegnuto betonsko jezgro i čelična armatura. U ovom istraživanju, svaka šipka armature je modelirana jednim vlaknom, odnosno bez pokušaja da se smanji ukupan broj vlakana kojima se modelira podužna armatura. Istraživanje je, stoga, bilo fokusirano na pronalaženju efikasne šeme diskretizacije za betonski deo preseka (zaštitni sloj i jezgro). Koristeći zaključke do kojih se došlo pri prethodno opisanom modeliranju čeličnog I preseka, parametarska analiza obuhvata samo šeme diskretizacije koje koriste pravilo pravougaonika i skraćeno pravilo integracije.

Na slikama 2.34 i 2.35 su prikazane neke istraživane šeme diskretizacije za modeliranje pravougaonog AB preseka. Svaka od ovih šema ima odgovarajuću skraćenicu koja sadrži oznaku BMP, za betonski presek - metoda pravougaonika, ili BSI za betonski presek - skraćena integracija.



Slika 2.34: Šeme diskretizacije za betonski deo AB pravougaonog preseka korišćenjem pravougaonog pravila integracije: (a) 9BMP; (b) 12BMP; (c) 17BMP; (d) 21BMP; (e) 32BMP i (f) 96BMP



Slika 2.35: Šeme diskretizacije za betonski deo AB pravougaonog preseka korišćenjem skraćenog pravila integracije: (a) 5BSI i (b) 17BSI

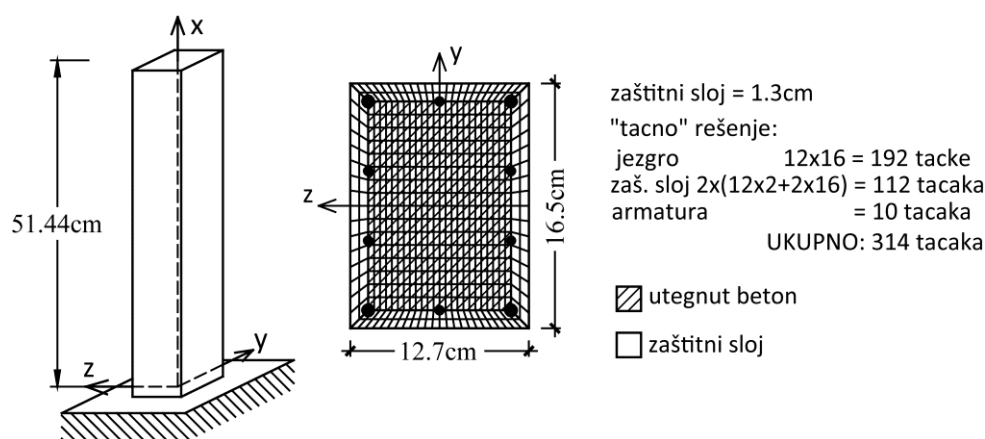
2.3.2. NUMERIČKE SIMULACIJE

Za izvođenje numeričkih simulacija korišćen je OpenSees [40] i fiber element raspodeljene plastičnosti formulisan prema metodi sila [41].

(a) Konzolni stubovi prema eksperimentima Low i Moehle-ja

Slično kao kod diskretizacije čeličnog I preseka, izvršena je evaluacija prikazanih šema diskretizacije kroz niz numeričkih simulacija. Prvu grupu ovih testova čini serija konzolnih stubova koje su eksperimentalno ispitivali Low i Moehle [32]. Eksperiment je obuhvatio pet uzoraka, istih geometrijskih karakteristika poprečnog preseka napravljenih od istih materijala, koji su bili izloženi različitim opterećenjima. Karakteristike materijala korišćene u

numeričkoj simulaciji su preuzete iz izveštaja [32,41]. Tačna geometrija uzoraka kao i diskretizacija poprečnog preseka čije je rešenje označeno kao "tačno" je prikazana na slici 2.36. Konzolni stub je modeliran jednim linijskim fiber elementom sa četiri Gauss-Lobatto tačke integracije duž ose elementa. Za opisivanje histerezisnog ponašanja utegnuto i neutegnuto betona korišćen je modifikovani model Kent-Scott-Park bez čvrstoće pri zatezanju (Concrete01 u OpenSees-u). Za modeliranje čelika korišćen je model Giuffré-Menegotto-Pinto (Steel02 u OpenSees-u). Rezultati ove grupe numeričkih simulacija, za sve šeme diskretizacije sa slika 2.34 i 2.35 su date u Prilogu C, slike C.1-C.77. Promene dilatacija najudaljenijih vlakana armature i jezgra betona kroz (pseudo)vreme su prikazane samo za 17BMP i 96BMP šeme i ograničene su na prvih nekoliko ciklusa kada se one nalaze unutar uobičajenih opsega.



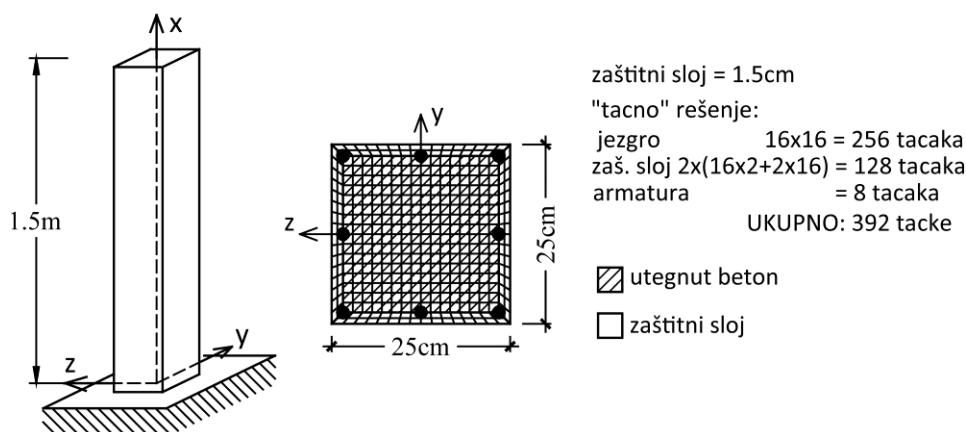
Slika 2.36: Dimenzije i diskretizacija "tačnog" rešenja kod Low/Moehle testova

Rezultati prikazani u Prilogu C pokazuju da se uglavnom zadovoljavajuća tačnost odgovora poprečna sila - pomeranje vrha stuba može postići 17BMP diskretizacijom. Tačnost određivanja aksijalnih pomeranja korišćenjem ove šeme je takođe prihvatljiva, iako su razlike u odnosu na tačno rešenje u ovom slučaju nešto veće. Međutim, treba imati na umu da su ova pomeranja vrlo osetljiva na određivanje položaja neutralne ose, pa se u slučaju vrlo retke 3x3 diskretizacije betonskog jezgra kakva je prisutna kod 17BMP diskretizacije

mogu posmatrati više kao mera lokalnog nego globalnog odgovora, slično kao što je to objašnjeno kod dilatacije najudaljenijeg vlakna čeličnog I preseka.

(b) Konzolni stubovi prema eksperimentima Bousias-a

Drugu grupu numeričkih simulacija na konzolnim stubovima čini serija od 12 stubova koje je eksperimentalno ispitivao Bousias sa saradnicima [33]. Svi stubovi su bili istih geometrijskih karakteristika poprečnog preseka napravljeni od istih materijala, ali izloženi različitim opterećenjima. U ovom istraživanju korišćeni su stubovi obeleženi sa S1, S5, S7 i S9. Konzolni stub je modeliran jednim linijskim fiber elementom sa četiri Gauss-Lobatto tačke integracije duž ose elementa. Za opisivanje histerezisnog ponašanja utegnuto i neutegnuto betona korišćen je modifikovani model Kent-Scott-Park bez čvrstoće pri zatezanju (Concrete01 u OpenSees-u). Za modeliranje čelika korišćen je model Giuffrè-Menegotto-Pinto (Steel02 u OpenSees-u). Tačna geometrija uzoraka kao i diskretizacija poprečnog preseka čije je rešenje označeno kao "tačno" je prikazana na slici 2.37. Rezultati ove grupe numeričkih simulacija su dati u Prilogu C, slike C.78-C.145. Ponovo su rezultati 17BMP šeme vrlo zadovoljavajuće tačnosti.



Slika 2.37: Dimenzije i diskretizacija "tačnog" rešenja kod Bousias testova

Na osnovu prikazanih rezultata numeričkih simulacija konzolnih stubova može se zaključiti da kod pravougaonog AB preseka, 17BMP šema diskretizacije daje

rezultate vrlo zadovoljavajuće tačnosti za praktičnu primenu, slično šemi 12MP kod čeličnog I preseka. Obe ove šeme pokazuju izvanrednu kompjutersku efikasnost uz sposobnost da prikazu nekoliko karakteristika značajnih za adekvatno opisivanje 3D odgovora elemenata konstrukcije: interakcija normalne sile i momenata savijanja, promena nosivosti i krutosti pri cikličnom opterećenju, kao i uticaj rezidualnih napona kod čeličnih konstrukcija. Nasuprot očekivanju, šeme diskretizacije koje koriste skraćeno pravilo integracije nisu pokazale nikakve prednosti u odnosu na jednostavne BMP šeme.

Greška e (2.8) i apsolutna vrednost maksimalne greške e_i (2.7) za sve cikluse za šeme 17BMP, 32BMP i 96BMP su prikazane u tabeli 2.6. Najveća vrednost greške se javlja u prvom ciklusu zbog greške pri određivanju inicijalne krutosti kod diskretizacija sa malim brojem tačaka. Ovo takođe može imati značajniju ulogu kod dinamičke analize konstrukcija, kao što će biti kasnije prikazano. Šeme diskretizacije sa više tačaka, poput 32BMP i 96BMP šema, daju rezultate veće tačnosti.

Tabela 2.6: Prosečna greška e (maksimalna greška e_i) za AB konzolni stub pravougaonog poprečnog preseka

Test	Error (%)		
	17CMP	32CMP	96CMP
LM 1	1.98 (9.06)	0.67 (1.90)	0.66 (1.54)
LM 2	1.73 (2.32)	0.28 (1.30)	0.16 (0.30)
LM 3	0.76 (4.31)	0.32 (0.48)	0.10 (0.34)
LM 4	1.47 (2.66)	0.81 (1.12)	0.20 (0.28)
LM 5	1.19 (2.00)	0.14 (0.65)	0.13 (0.39)
S1	1.94 (8.50)	1.66 (3.29)	0.51 (0.96)
S5	0.83 (3.06)	0.99 (1.68)	0.37 (0.66)
S7	1.03 (1.27)	1.02 (1.32)	0.24 (0.56)
S9	1.14 (4.09)	0.64 (1.85)	0.37 (1.12)

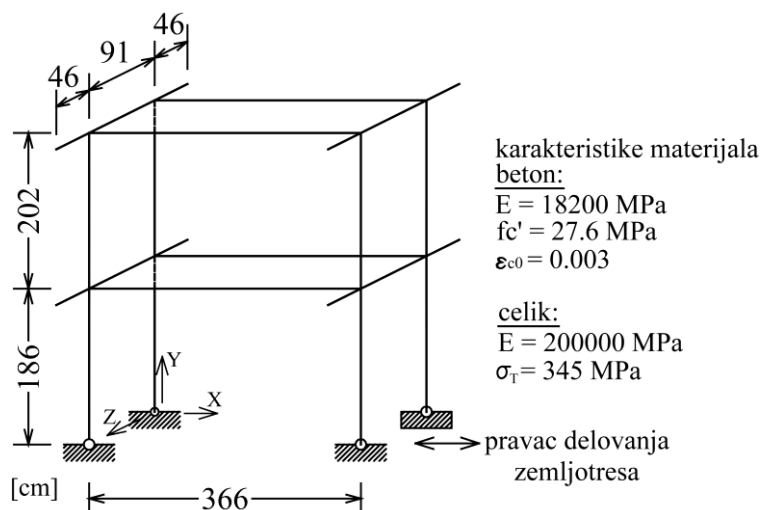
Adekvatnost upotrebe predložene 17BMP šeme kod dinamičke nelinearne 3D analize okvirnih konstrukcija je ispitana na sledećim primerima.

(c) 2D analiza AB rama

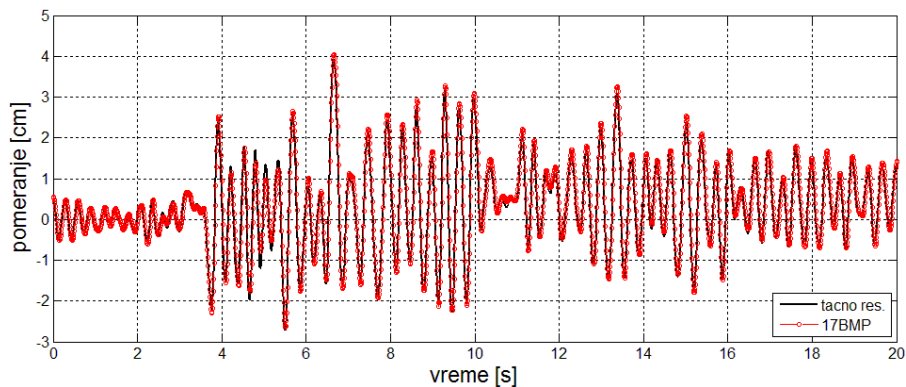
Prvi primer analize okvirne konstrukcije je 2D dinamička nelinearna analiza dvospratnog AB rama prikazana na slici 2.38. Ovaj ram je bio eksperimentalno ispitivan na "shaking-table" testovima pri dejstvu više različitih pomeranja oslonaca [42]. Takođe, postoje i analitičke studija koje obrađuju dati primer [43]. Budući da je odgovor ovog rama prvenstveno određen ponašanjem stubova pri savijanju, on je adekvatan primer za posmatrani problem diskretizacije poprečnog preseka kod fiber elementa. Podaci o dimenzijama elemenata konstrukcije, armiranju, vrsti opterećenja i testiranja su preuzeti iz izveštaja [42,43]. Svaki element konstrukcije je modeliran sa po jednim fiber elementom sa tri tačke integracije duž ose elementa kod stubova, odnosno, četiri tačke integracije duž ose elementa kod greda. Nelinearna geometrija je uzeta u obzir preko korotacione formulacije [36]. Ram je najpre izložen dejstvu gravitacionog opterećenja, prema studiji [43], a zatim i ubrzanju osnove u X pravcu prema 1952 N69W Taft zapisu zemljotresa skaliranom prema dvema vrednostima: u prvoj analizi je ekstremna vrednost ubrzanja osnove iznosila 0.57g, kao i u eksperimentu (slike 2.39 i 2.40), dok je u drugoj analizi ekstremna vrednost ubrzanja osnove bila 0.2g kako bi se ispitao dinamički odgovor konstrukcije pri malim i umerenim deformacijama (slike 2.41-2.46). Viskozno prigušenje u iznosu od 5% za prva dva tona oscilovanja elastične konstrukcije je usvojeno u obe analize.

Rešenje obeleženo kao "tačno" je dobijeno korišćenjem diskretizacije sa 384 tačke za betonski deo poprečnog preseka svakog stuba, odnosno 52 tačke za betonski deo poprečnog preseka svake grede. Svaka šipka armature je modelirana jednim vlaknom (tačkom integracije) i kod stubova i kod greda. Usvojena "dvoosna" diskretizacija preseka (diskretizacija poprečnog preseka u oba pravca) odgovara opštem slučaju dvoosnog naprezanja stubova, što u ovom primeru nije slučaj. Stoga je mogla biti upotrebljena i diskretizacija preseka slojevima, tj. u jednom pravcu. Aproksimativno rešenje je dobijeno

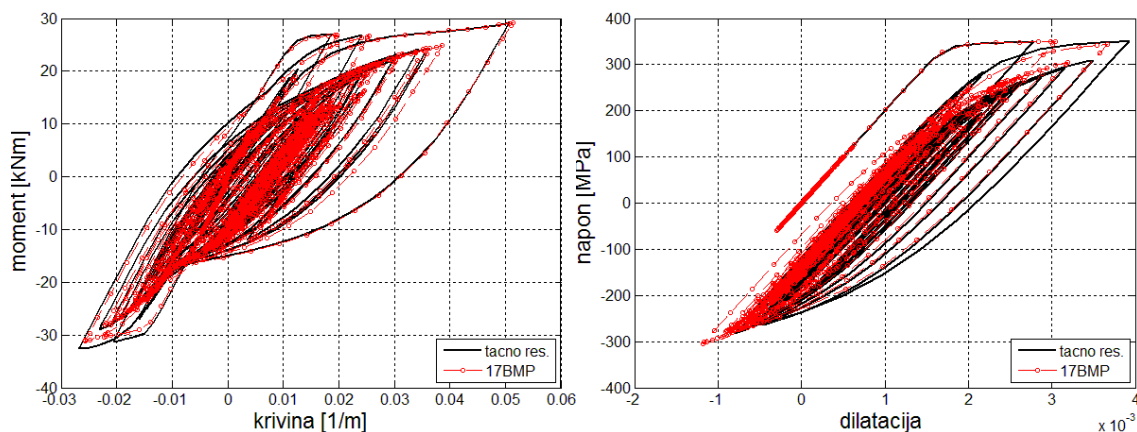
korišćenjem 17BMP šeme za stubove, i odgovarajuće “jednoosne” 9BMP šeme za grede, uz predstavljanje svake šipke podužne armature sa po jednim vlaknom. Kod analize pri zemljotresu maksimalnog ubrzanja 0.2g, prikazana su i rešenja dobijena korišćenjem druge dve aproksimativne šeme: 32BMP i 96BMP, što je objašnjeno pri kraju ovog poglavlja.



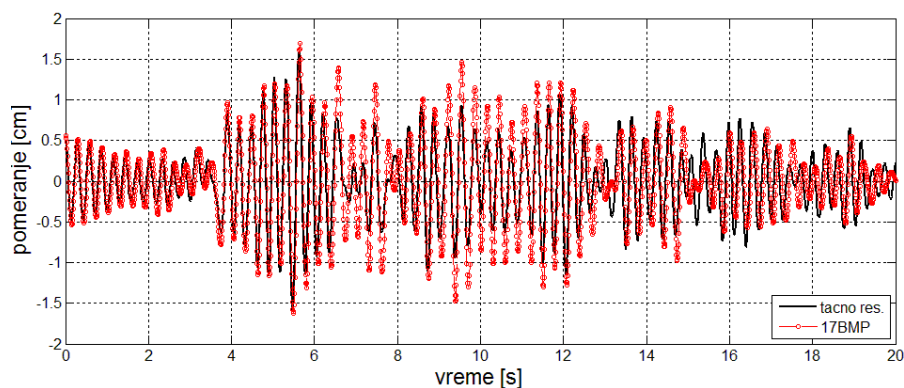
Slika 2.38: Dvospratni AB ram



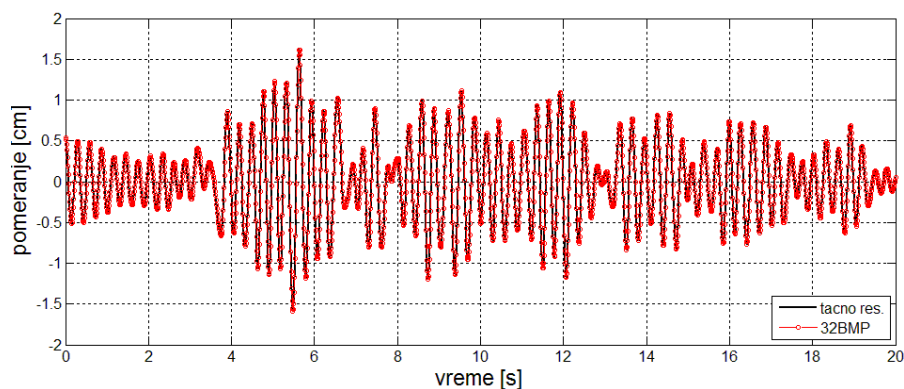
Slika 2.39: Pomeranje vrha rama usled zemljotresa Taft sa maksimalnim ubrzanjem od 0.57g



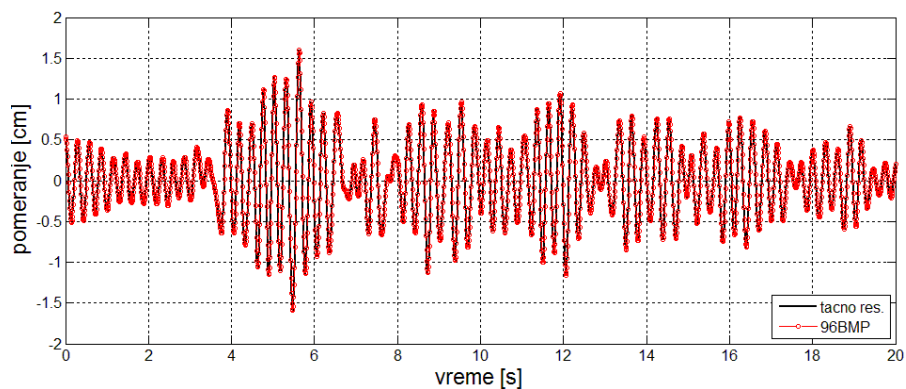
Slika 2.40: Moment-krivina dijagram i za vlakno armature napon-dilatacija dijagram za presek kod oslonca stuba prizemlja usled zemljotresa Taft sa maksimalnim ubrzanjem od 0.57g



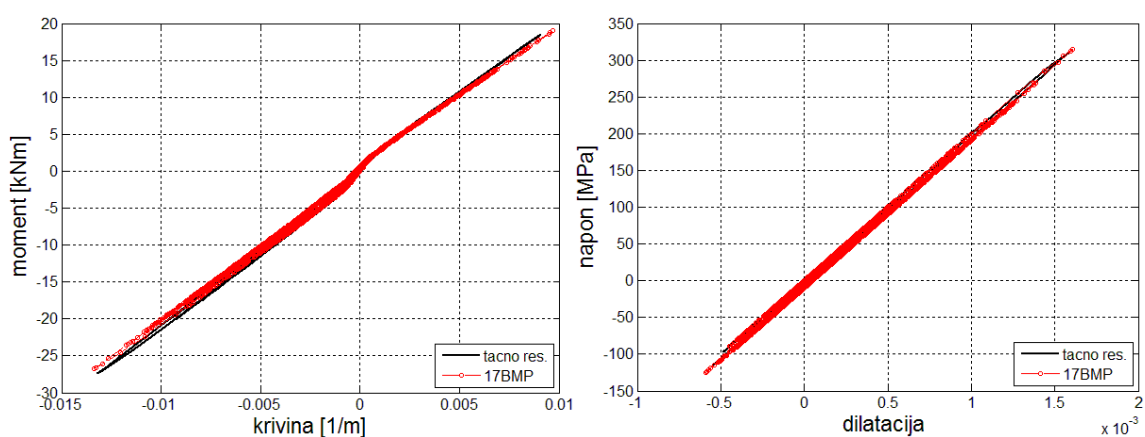
Slika 2.41: Pomeranje vrha rama usled zemljotresa Taft sa maksimalnim ubrzanjem od 0.2g za šemu 17BMP



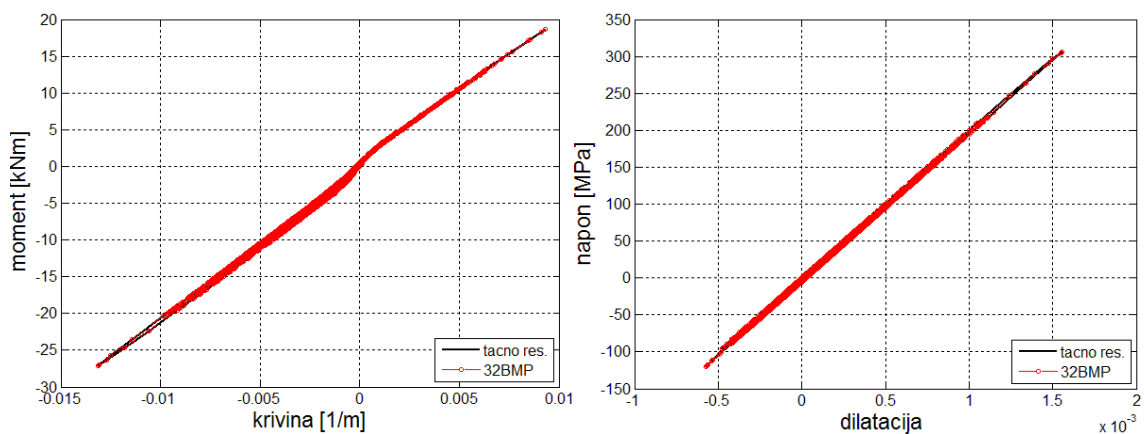
Slika 2.42: Pomeranje vrha rama usled zemljotresa Taft sa maksimalnim ubrzanjem od 0.2g za šemu 32BMP



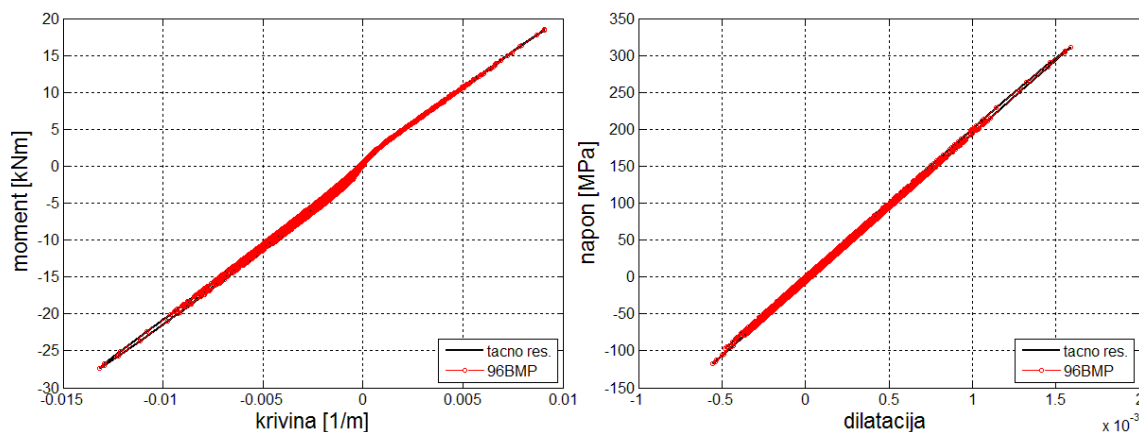
Slika 2.43: Pomeranje vrha rama usled zemljotresa Taft sa maksimalnim ubrzanjem od 0.2g za šemu 96BMP



Slika 2.44: Moment-krivina dijagram i za vlakno armature napon-dilatacija dijagram za presek kod oslonca stuba prizemlja usled zemljotresa Taft sa maksimalnim ubrzanjem od 0.2g za šemu 17BMP



Slika 2.45: Moment-krivina dijagram i za vlakno armature napon-dilatacija dijagram za presek kod oslonca stuba prizemlja usled zemljotresa Taft sa maksimalnim ubrzanjem od 0.2g za šemu 32BMP



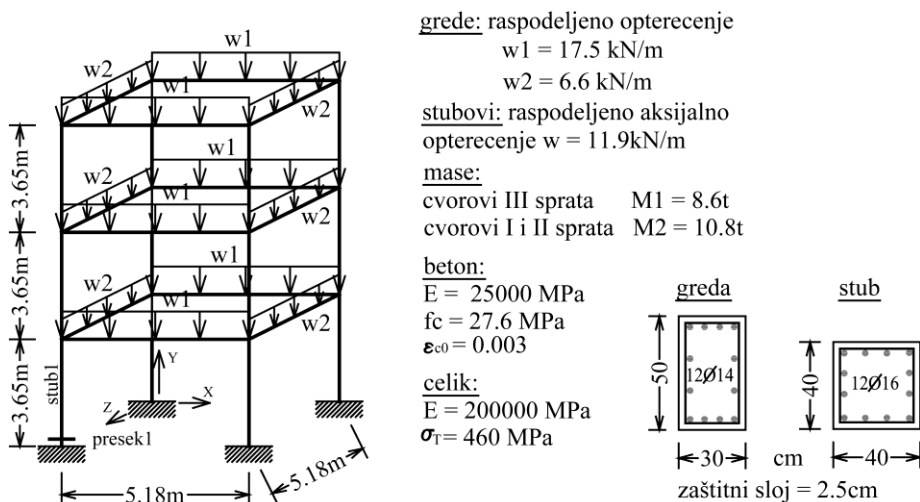
Slika 2.46: Moment-krivina dijagram i za vlakno armature napon-dilatacija dijagram za presek kod oslonca stuba prizemlja usled zemljotresa Taft sa maksimalnim ubrzanjem od 0.2g za šemu 96BMP

(d) 3D analiza AB rama

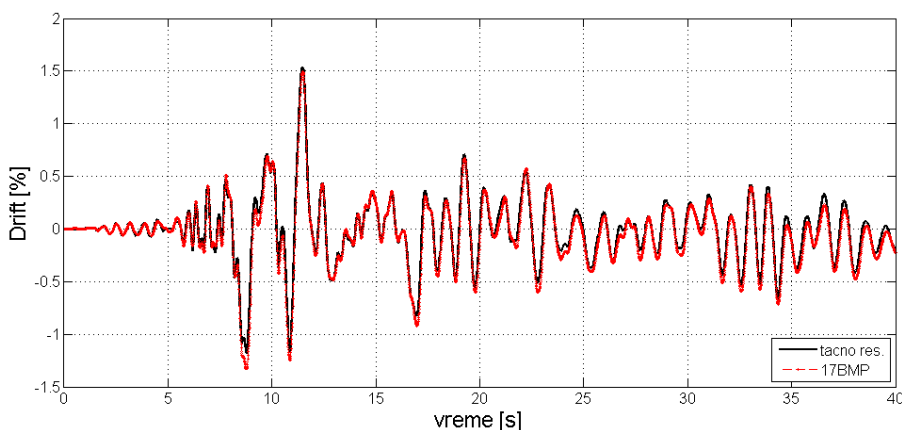
Trospratni ram prikazan na slici 2.47 je analiziran pod dejstvom zemljotresa koji deluje u oba pravca, X i Z. Svaki od elemenata konstrukcije je modeliran jednim fiber elementom, sa četiri tačke integracije duž ose kod stubova, odnosno, pet tačaka integracije duž ose kod greda. Ram je najpre izložen uticaju gravitacionog opterećenja prema slici 2.47, a zatim ubrzanju osnove prema 1940 El Centro zapisu zemljotresa koji je skaliran na maksimalno ubrzanje od 0.98g kod prve analize (slike 2.48-2.50), odnosno, 0.14g kod druge analize (slike 2.51-2.59) radi određivanja odgovora konstrukcije pri umerenim deformacijama. Viskozno prigušenje u iznosu od 2% za prva dva tona oscilovanja elastične konstrukcije je usvojeno u obe analize. Za opisivanje histerezisnog ponašanja betona korišćen je modifikovani model Kent-Scott-Park bez čvrstoće pri zatezanju (Concrete01 u OpenSees-u), dok je za modeliranje čelika korišćen model Giuffré-Menegotto-Pinto (Steel02 u OpenSees-u).

Rešenje obeleženo kao "tačno" dobijeno je korišćenjem diskretizacije sa 384 tačke integracije za betonski deo poprečnog preseka stuba, odnosno 52 tačke integracije za betonski deo poprečnog preseka svake grede. Kao i u prethodnom primeru, svaka šipka podužne armature je predstavljena sa po jednim vlaknom.

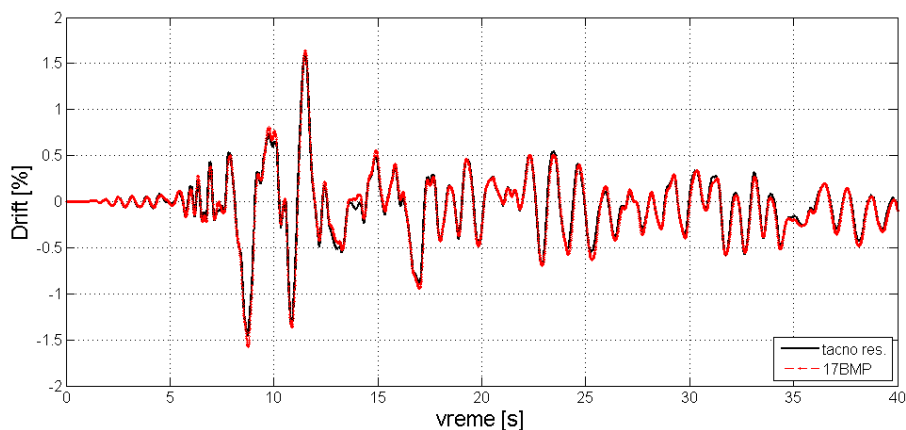
Aproksimativno rešenje je dobijeno korišćenjem 17BMP šeme za stubove, i odgovarajuće "jednoosne" 9BMP šeme za grede, takođe uz predstavljanje svake šipke podužne armature sa po jednim vlaknom. Kod analize pri zemljotresu maksimalnog ubrzanja 0.14g, prikazana su i rešenja dobijena korišćenjem druge dve aproksimativne šeme: 32BMP i 96BMP, odnosno odgovarajućim jednoosnim šemama sa 14 i 26 slojeva za grede, respektivno.



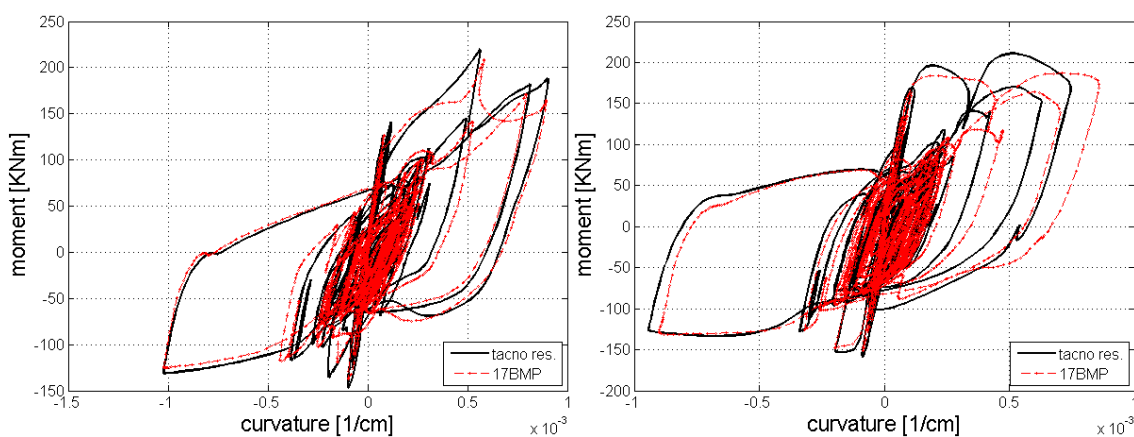
Slika 2.47: Trospratni AB ram



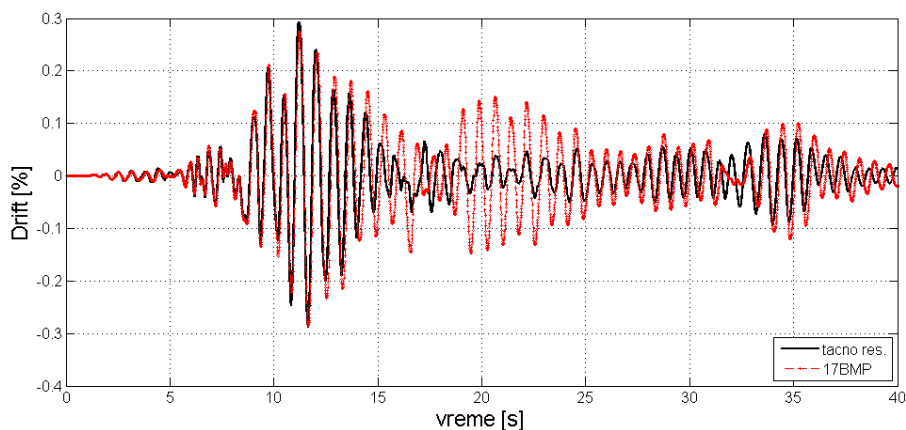
Slika 2.48: Drift u X pravcu usled zemljotresa El Centro sa maksimalnim ubrzanjem od 0.98g



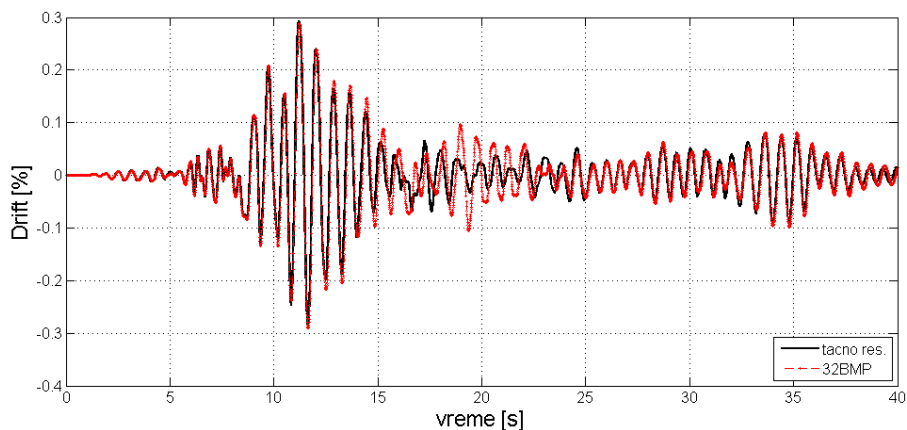
Slika 2.49: Drift u Z pravcu usled zemljotresa El Centro sa maksimalnim ubrzanjem od 0.98g



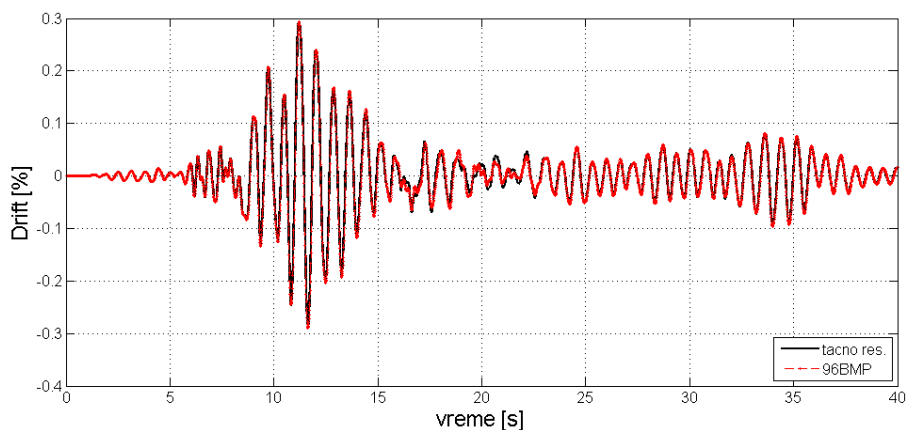
Slika 2.50: Moment-krivina dijagrami oko X i Z ose za presek 1 stuba 1 usled zemljotresa El Centro sa maksimalnim ubrzanjem od 0.98g



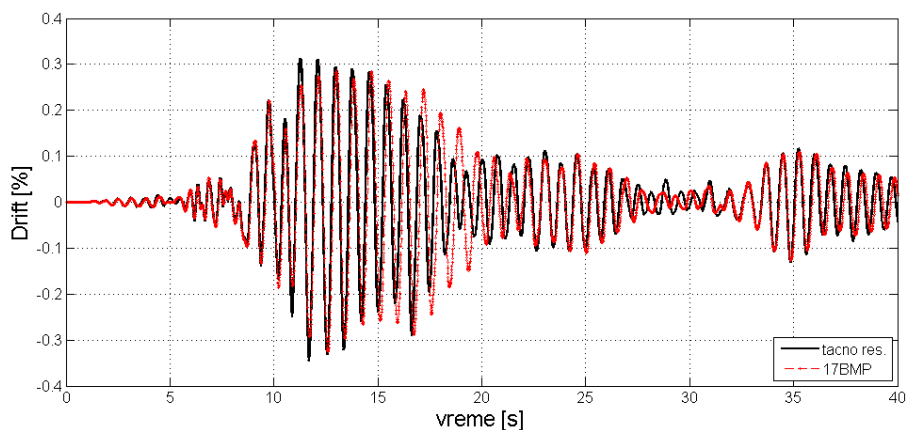
Slika 2.51: Drift u X pravcu usled zemljotresa El Centro sa maksimalnim ubrzanjem od 0.14g za šemu 17BMP



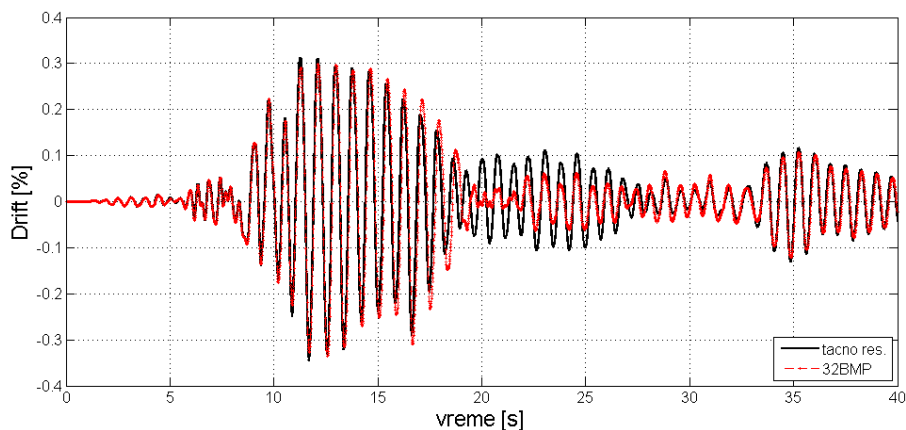
Slika 2.52: Drift u X pravcu usled zemljotresa El Centro sa maksimalnim ubrzanjem od 0.14g za šemu 32BMP



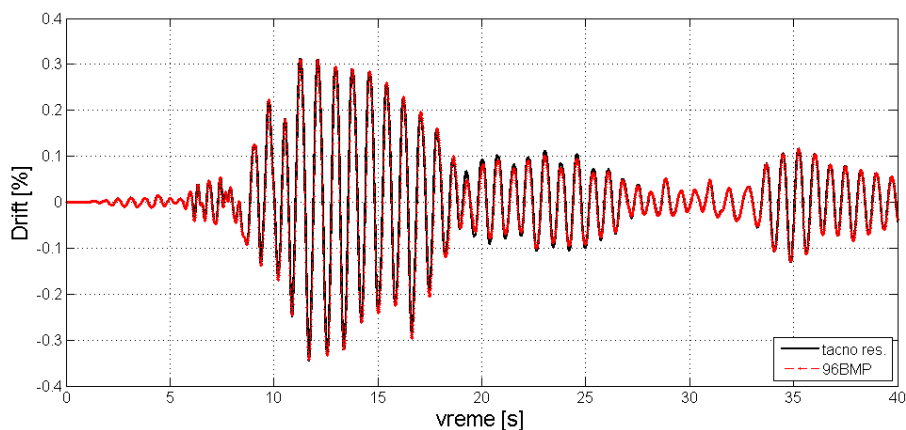
Slika 2.53: Drift u X pravcu usled zemljotresa El Centro sa maksimalnim ubrzanjem od 0.14g za šemu 96BMP



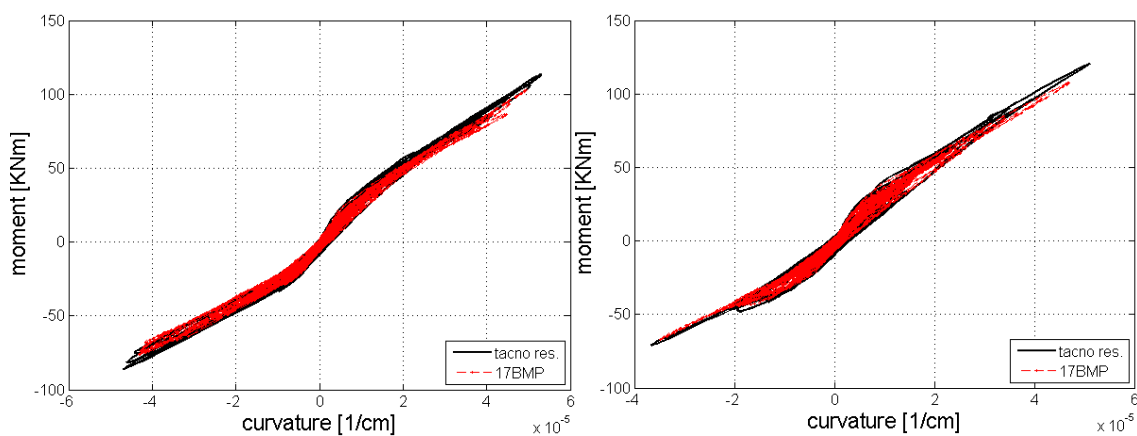
Slika 2.54: Drift u Z pravcu usled zemljotresa El Centro sa maksimalnim ubrzanjem od 0.14g za šemu 17BMP



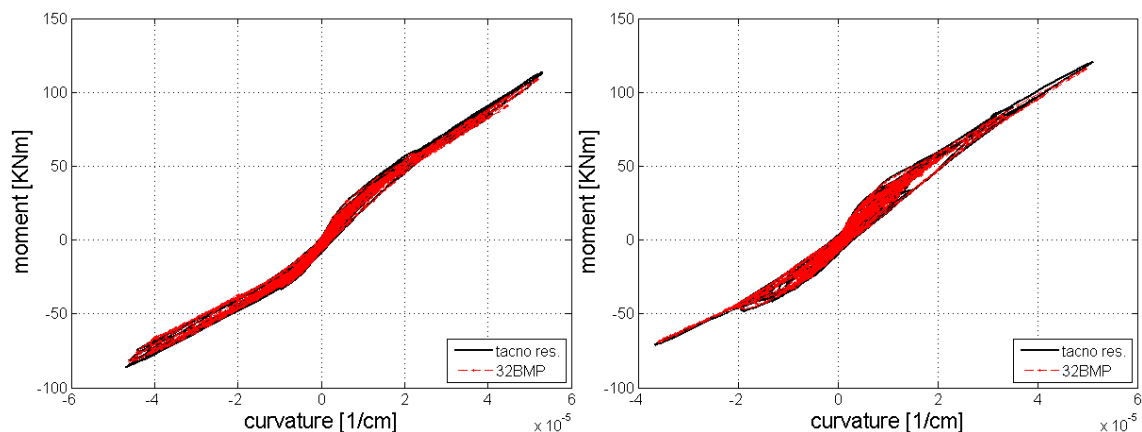
Slika 2.55: Drift u Z pravcu usled zemljotresa El Centro sa maksimalnim ubrzanjem od 0.14g za šemu 32BMP



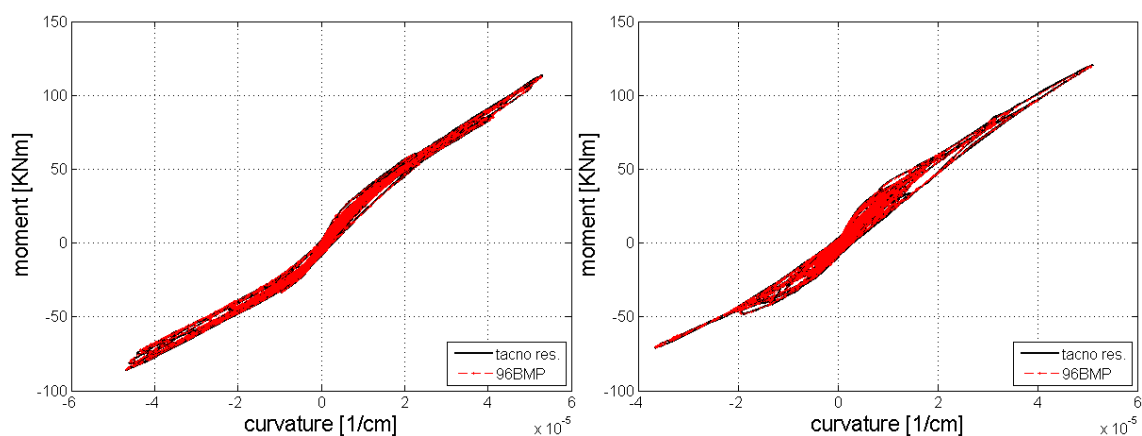
Slika 2.56: Drift u Z pravcu usled zemljotresa El Centro sa maksimalnim ubrzanjem od 0.14g za šemu 96BMP



Slika 2.57: Moment-krivina dijagrami oko X i Z ose za presek 1 stuba 1 usled zemljotresa El Centro sa maksimalnim ubrzanjem od 0.14g za šemu 17BMP



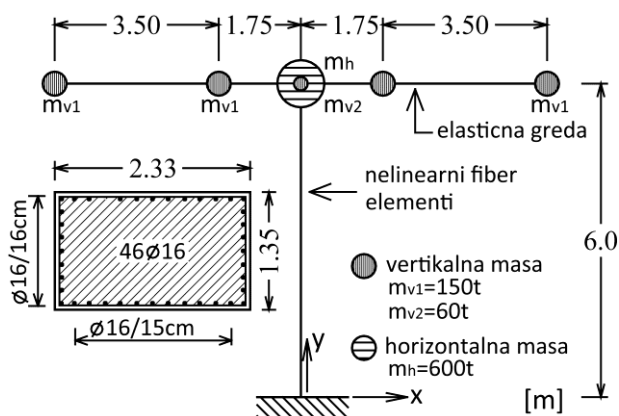
Slika 2.58: Moment-krivina dijagrami oko X i Z ose za presek 1 stuba 1 usled zemljotresa El Centro sa maksimalnim ubrzanjem od 0.14g za šemu 32BMP



Slika 2.59: Moment-krivina dijagrami oko X i Z ose za presek 1 stuba 1 usled zemljotresa El Centro sa maksimalnim ubrzanjem od 0.14g za šemu 96BMP

(e) 2D analiza stuba AB mosta

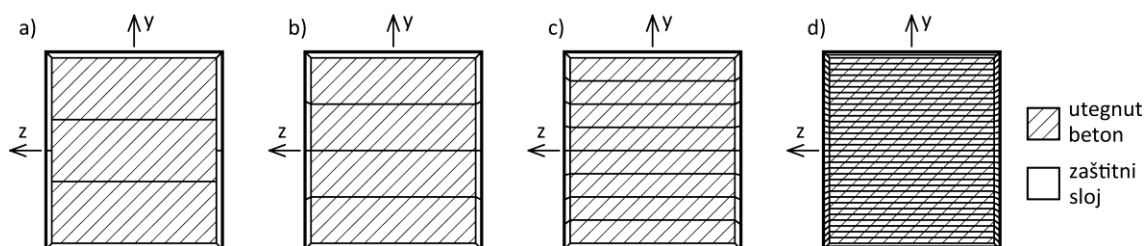
Kod diskretizacije preseka sa malo tačaka integracije svaka tačka (vlakno) ima značajnu ulogu pri određivanju karakteristika i odgovora poprečnog preseka. U tom slučaju, promena modula elastičnosti jednog vlakna ima velikog uticaja na krutost čitavog poprečnog preseka, pa samim tim, utiče i na kompletan dinamički odgovor. Radi detaljnije analize ovog efekta, analiziran je primer 2D stuba mostovske konstrukcije koji su prethodno razmatrali Ranzo i saradnici [44], slika 2.60, sa posebnim osvrtom na fenomen aksijalnih vibracija koje nastaju kao posledica savijanja stuba.



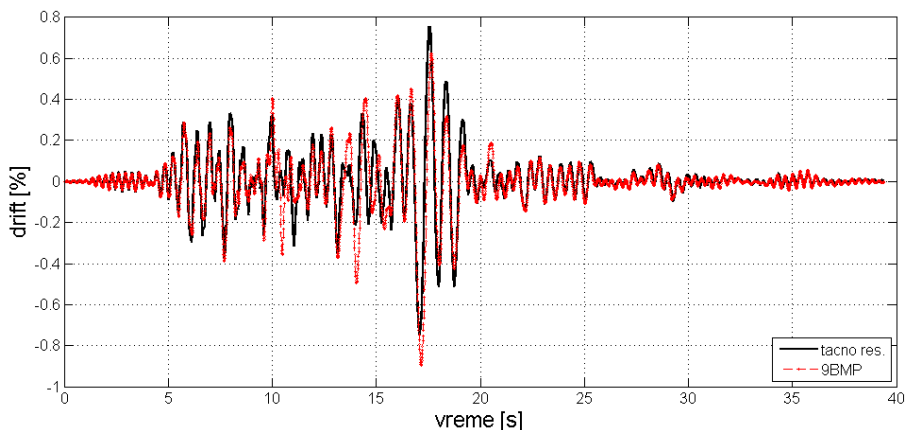
Slika 2.60: Model stuba mosta

Model prikazan na slici 2.60 je modifikovan u odnosu na originalni primer [44] tako što je pretpostavljeno da je širina elastične grede konstantnog pravougaonog preseka dimenzija 150x170 cm i poprečni presek stuba mosta je zamenjen punim pravougaonim presekom dimenzija 135x233cm. Stub je modeliran sa dva fiber elementa sa po tri Gauss-Lobatto tačke integracije duž ose. Na spoju grede i stuba su postavljeni kruti delovi (offset-i). Za opisivanje ponašanja armature korišćen je model Steel02 iz OpenSees-a, a za opisivanje ponašanja betona modifikovan Kent-Scott-Park-ov model (Concrete01 iz OpenSees-a). Mehaničke karakteristike čelika su: granica tečenja 400 MPa, modul elastičnosti 200000 MPa, modul ojačanja 1%. Mehaničke karakteristike betona su: čvrstoća pri pritisku neutegnutog betona 35 MPa, čvrstoća pri pritisku utegnutog betona 42 MPa, modul elastičnosti 30000 MPa. Pretpostavljeno je viskozno prigušenje od 3% (proporcionalno sa masom) za prvi ton oscilovanja elastične konstrukcije. Model je izložen delovanju dva različita zemljotresna zapisa u horizontalnom pravcu: Northridge zapis (stanica Baldwin Hills) sa maksimalnim ubrzanjem tla od 0.239 g, skaliran na 0.717 g i Loma Preata zapis (Diamond Heights stanica) sa maksimalnim ubrzanjem tla od 0.113 g skaliran na 0.22 g. Rešenje označeno kao "tačno" je prikazano na slici 2.61 (d) korišćenjem diskretizacije sa 100 slojeva (32 sloja za betonsko jezgro, 2x32 sloja za zaštitni skoj betona sa strane preseka i 2x2 sloja za zaštitni sloj betona sa gornje i donje strane preseka). Svaka šipka podužne armature je modelirana sa po jednim vlaknom istog položaja i površine kao što su

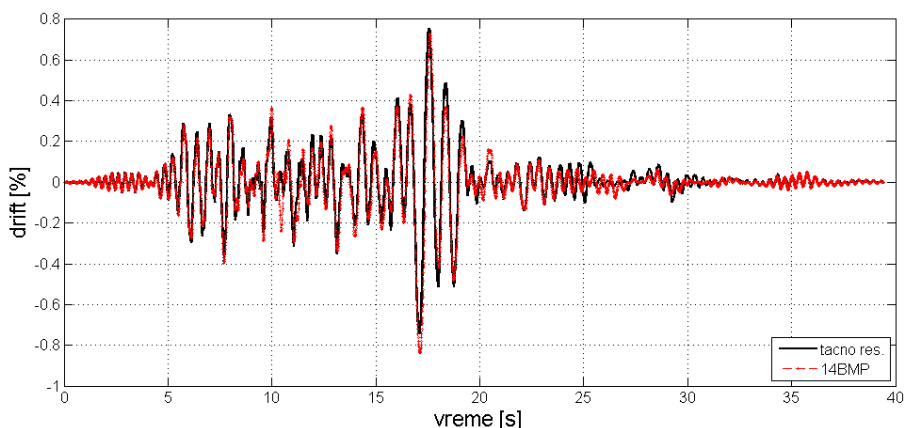
karakteristike stvarne armature. Aproksimativna rešenja su dobijena korišćenjem šema 9BMP, 14BMP i 26BMP za betonski deo preseka, koje predstavljaju odgovarajuće jednoosne šeme za 17BMP, 32BMP i 96BMP šeme (slika 2.61(a-c)). Takođe, svaka šipka armature je predstavljena jednim vlaknom.



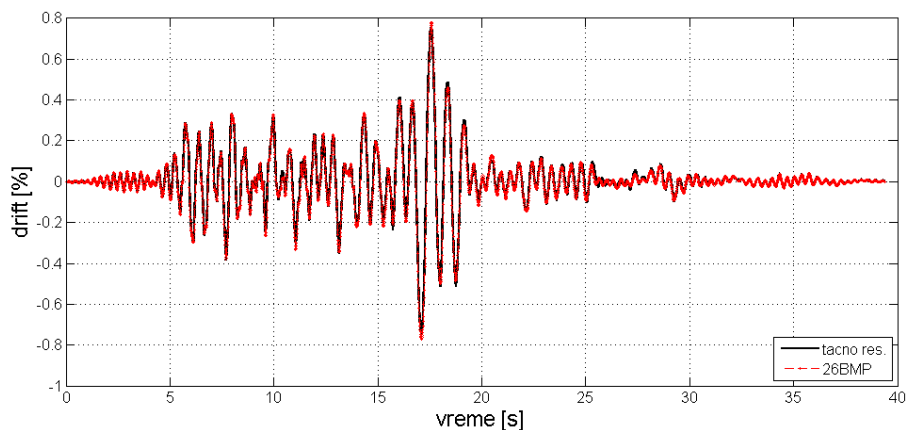
Slika 2.61: Šeme diskretizacije betonskog dela pravougaonog AB preseka kod 2D analize korišćenjem pravila pravougaonika:
(a) 9BMP; (b) 14BMP; (c) 26BMP i (d) "tačno" rešenje



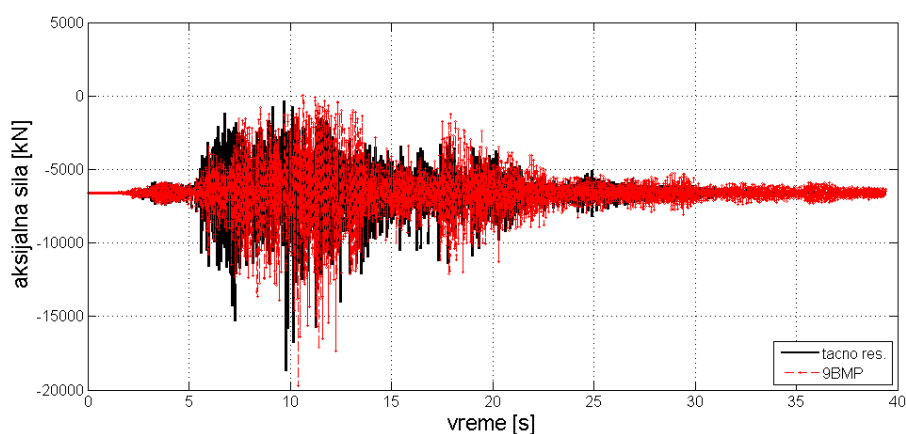
Slika 2.62: Drift usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 9BMP



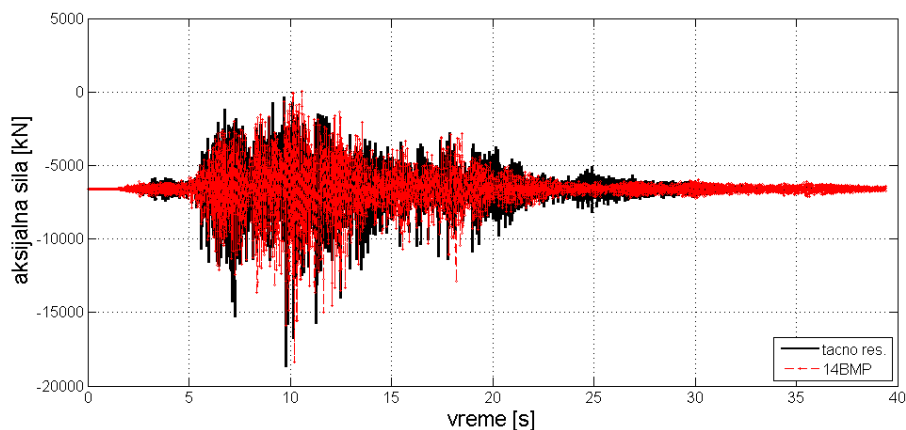
Slika 2.63: Drift usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 14BMP



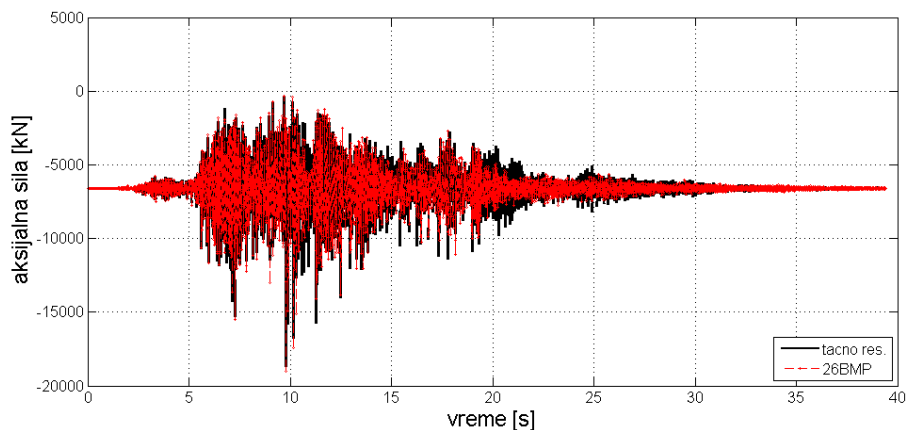
Slika 2.64: Drift usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 26BMP



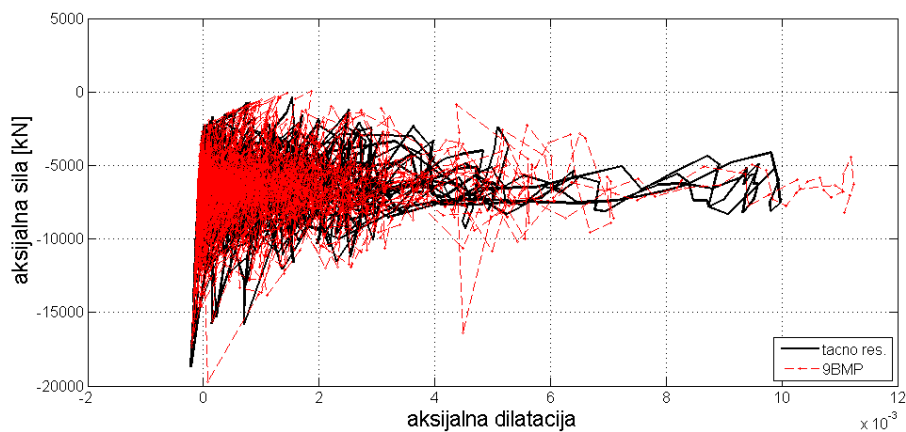
Slika 2.65: Promena aksijalne sile kroz vreme usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 9BMP



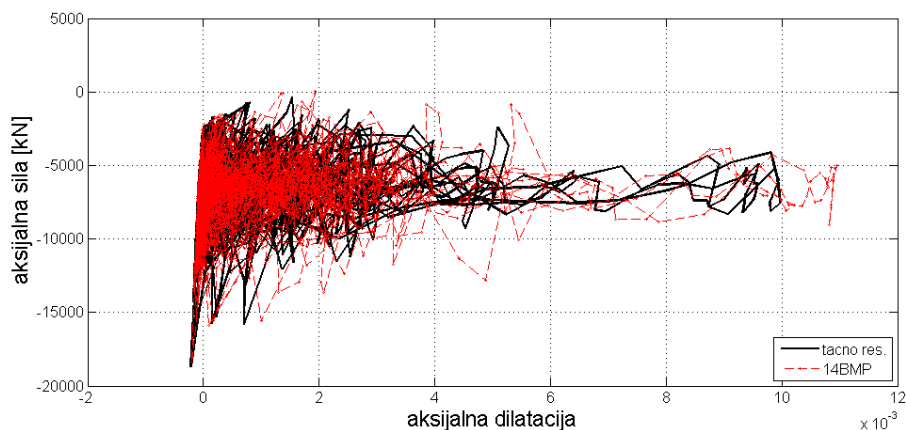
Slika 2.66: Promena aksijalne sile kroz vreme usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 14BMP



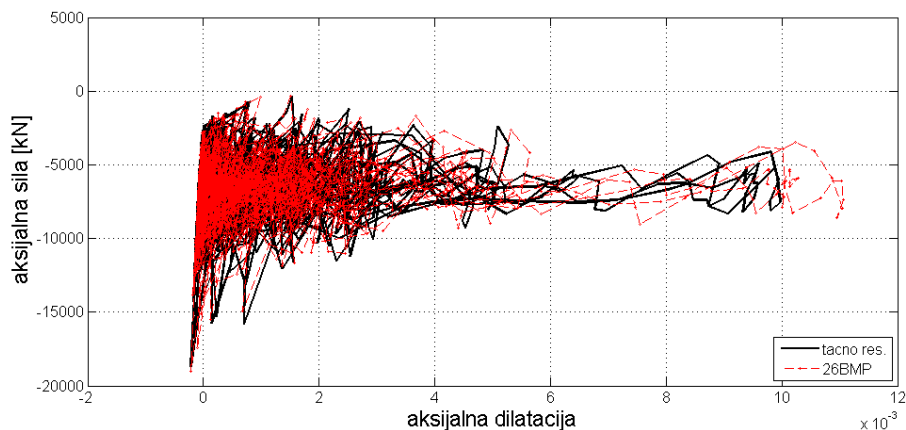
Slika 2.67: Promena aksijalne sile kroz vreme usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 26BMP



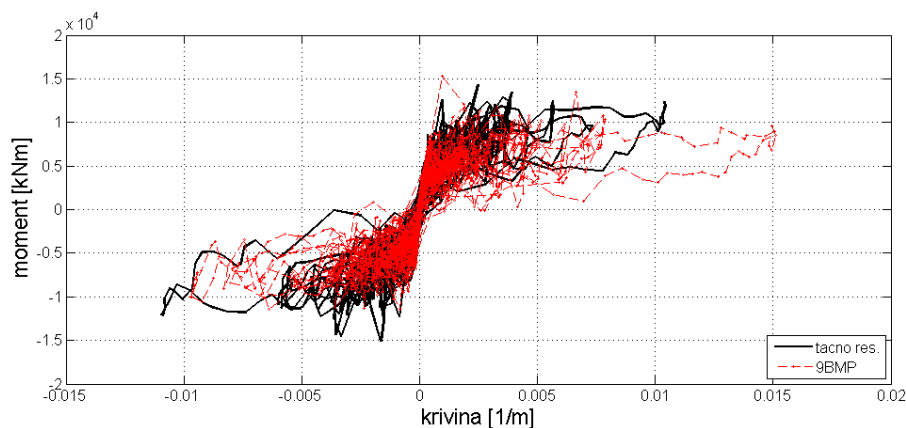
Slika 2.68: Aksijalna sila – dilatacija usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 9BMP



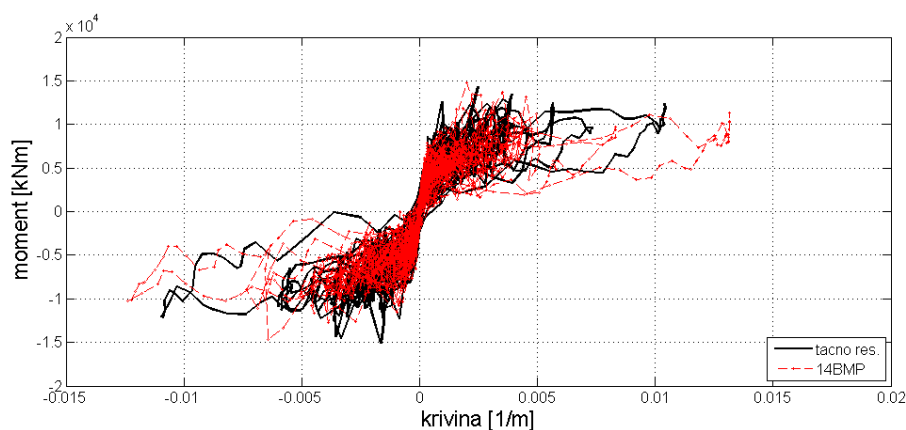
Slika 2.69: Aksijalna sila – dilatacija usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 14BMP



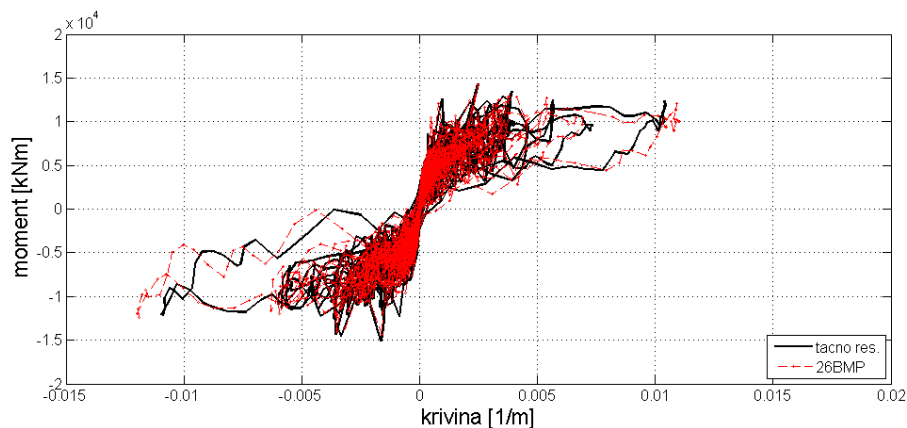
Slika 2.70: Aksijalna sila – dilatacija usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 26BMP



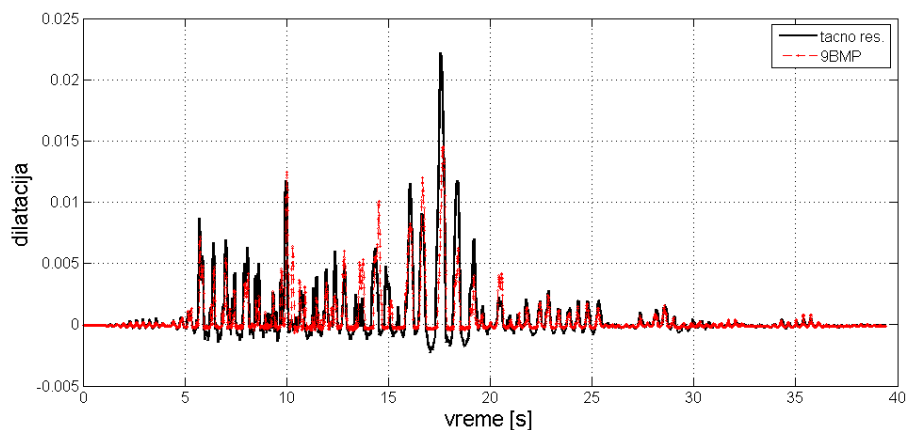
Slika 2.71: Moment-krivina za presek stuba kod uklještenja zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 9BMP



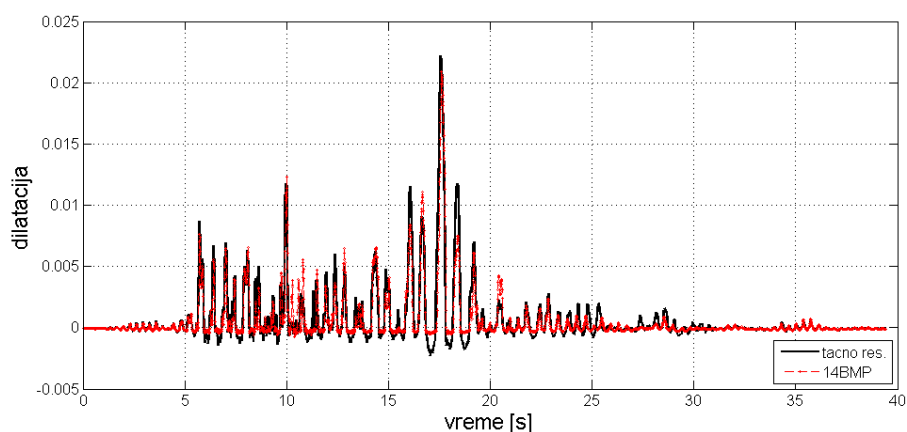
Slika 2.72: Moment-krivina za presek stuba kod uklještenja usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 14BMP



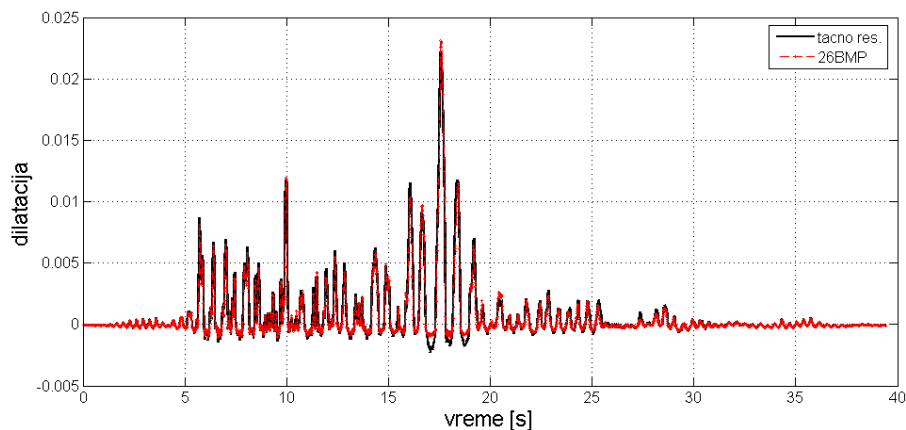
Slika 2.73: Moment-krivina za presek stuba kod uklještenja usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 26BMP



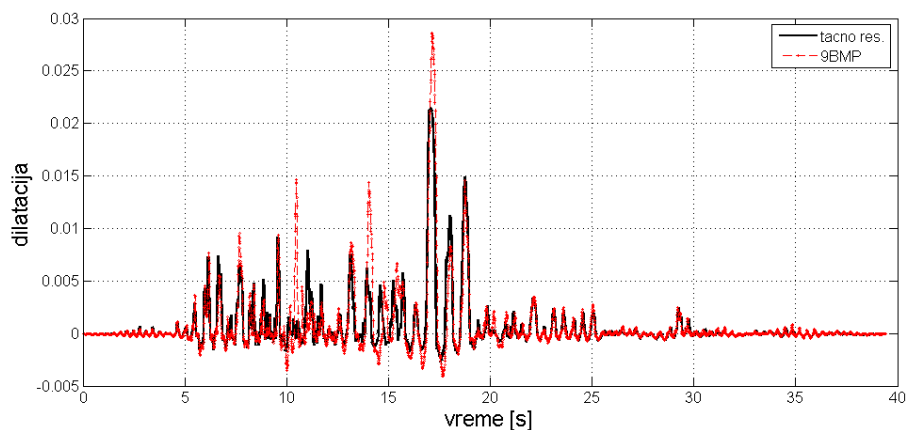
Slika 2.74: Dilatacija najudaljenijeg vlakna betonskog jezgra za presek stuba kod uklještenja usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 9BMP



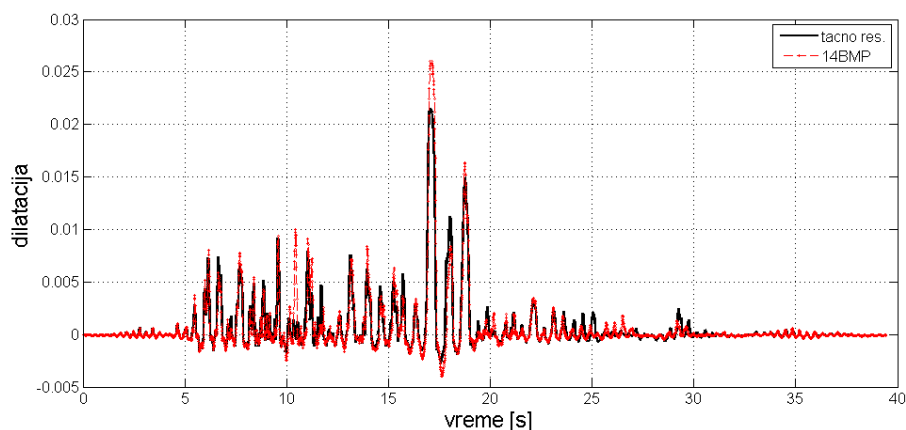
Slika 2.75: Dilatacija najudaljenijeg vlakna betonskog jezgra za presek stuba kod uklještenja usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 14BMP



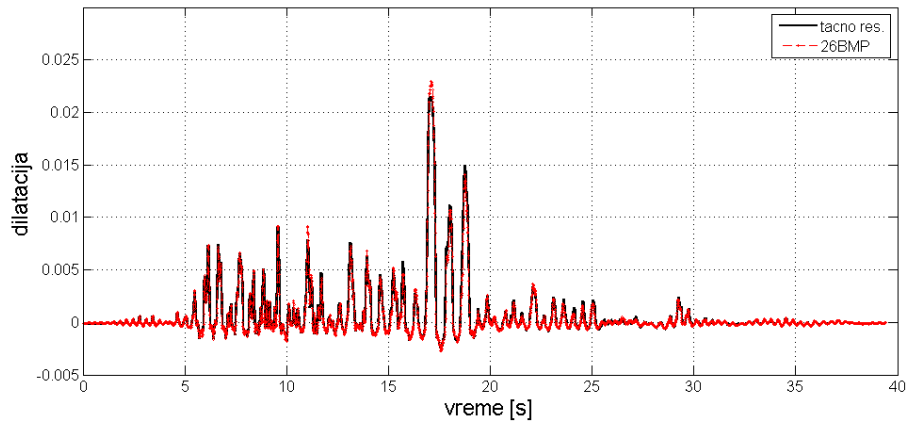
Slika 2.76: Dilatacija najudaljenijeg vlakna betonskog jezgra za presek stuba kod uklještenja usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 26BMP



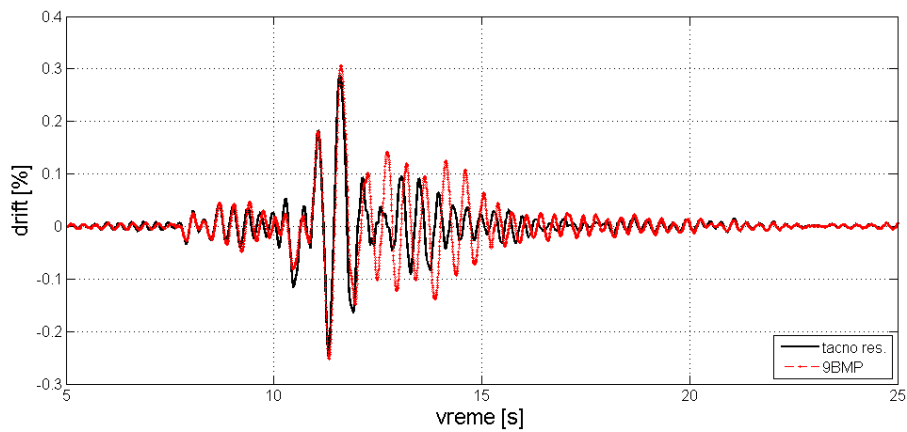
Slika 2.77: Dilatacija najudaljenijeg vlakna armature za presek stuba kod uklještenja usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 9BMP



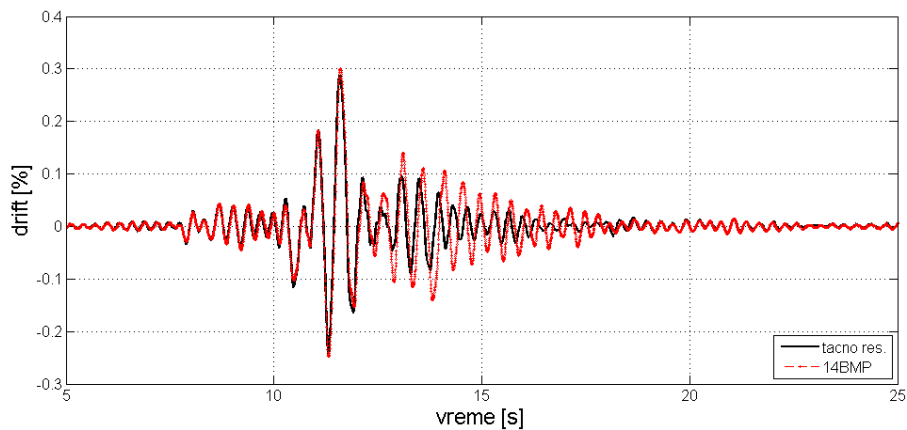
Slika 2.78: Dilatacija najudaljenijeg vlakna armature za presek stuba kod uklještenja usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 14BMP



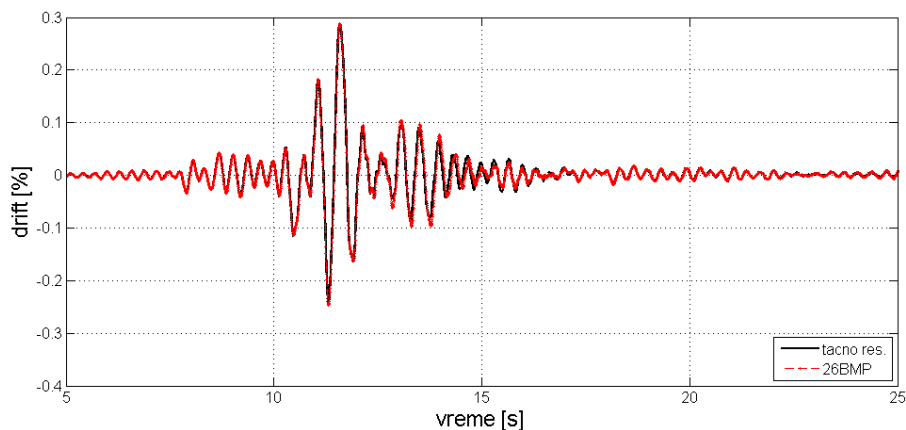
Slika 2.79: Dilatacija najudaljenijeg vlakna armature za presek stuba kod uklještenja usled zemljotresnog zapisa Northridge Baldwin Hills stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.717g za šemu 26BMP



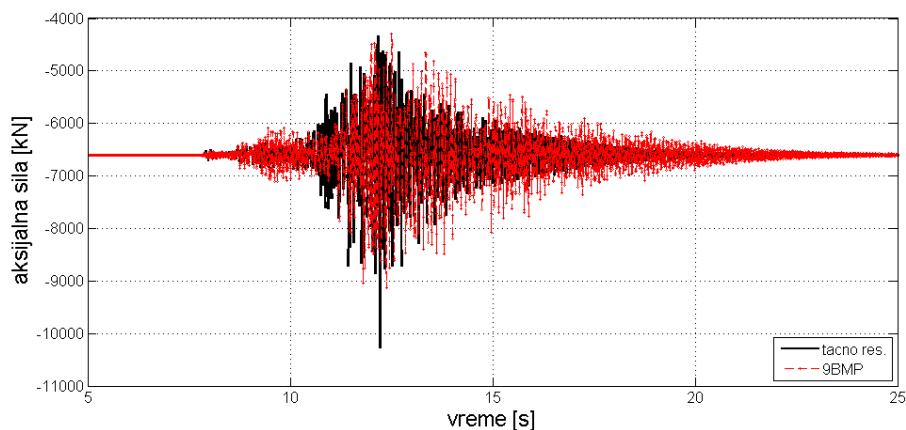
Slika 2.80: Drift usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 9BMP



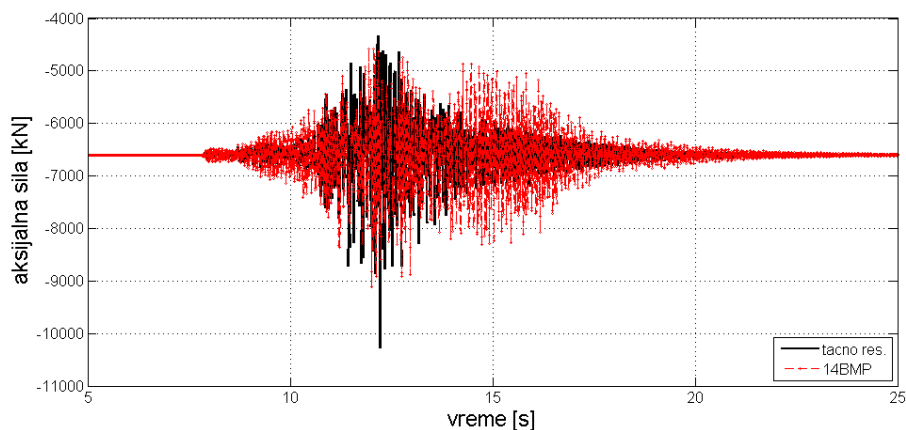
Slika 2.81: Drift usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 14BMP



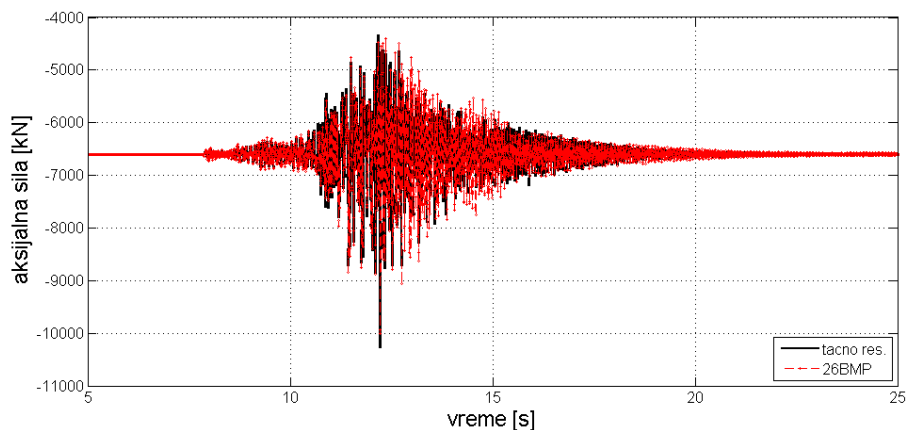
Slika 2.82: Drift usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 26BMP



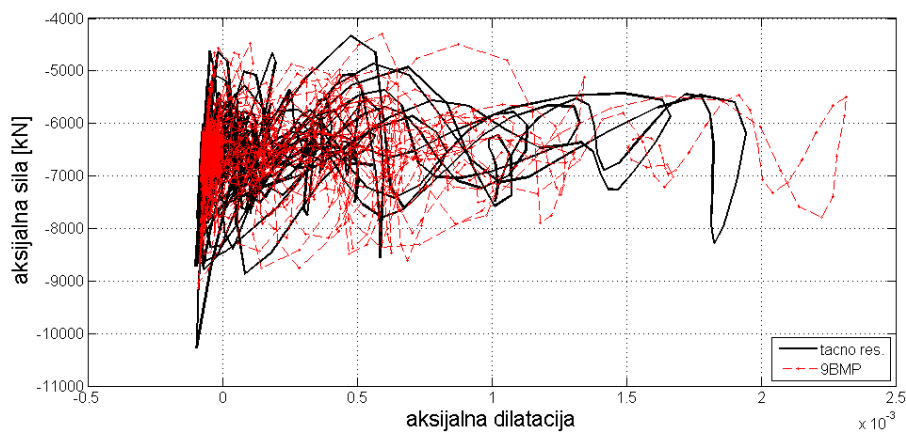
Slika 2.83: Promena aksijalne sile kroz vreme usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 9BMP



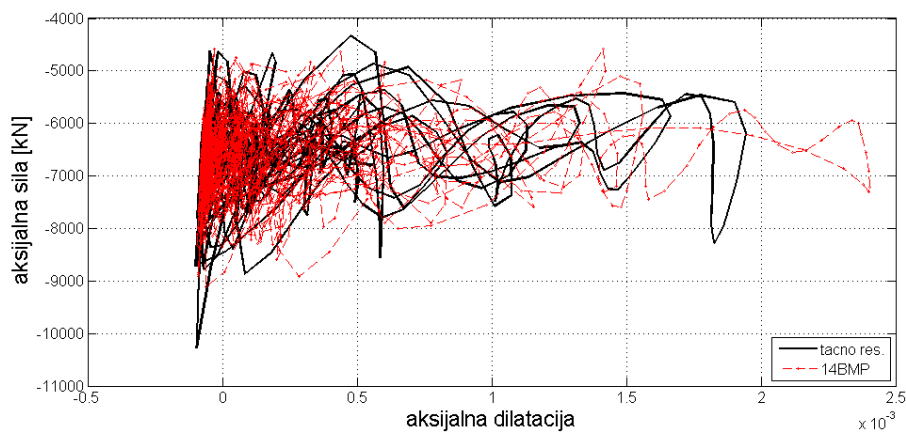
Slika 2.84: Promena aksijalne sile kroz vreme usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 14BMP



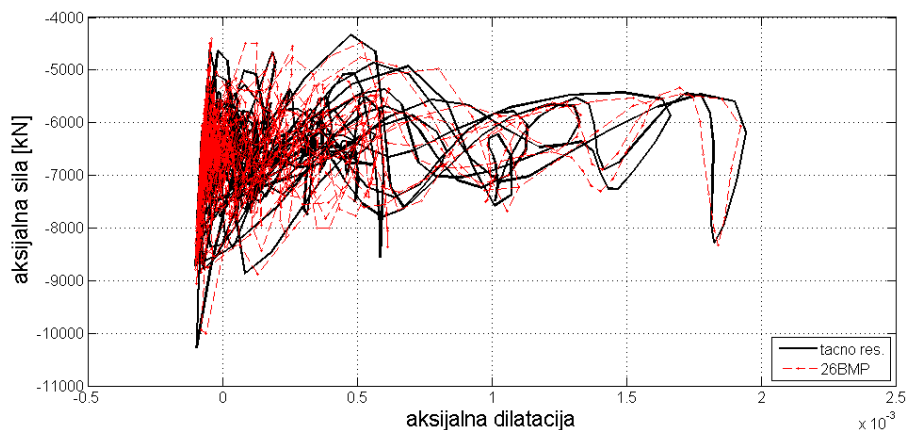
Slika 2.85: Promena aksijalne sile kroz vreme usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 26BMP



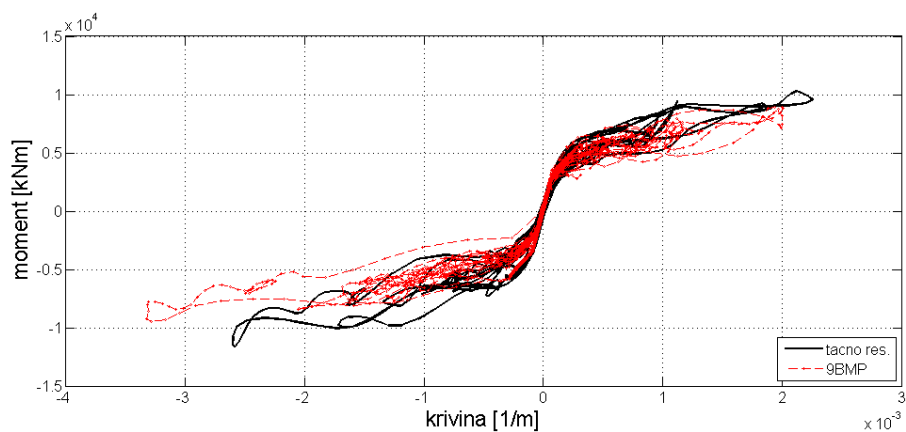
Slika 2.86: Aksijalna sila - dilatacija usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 9BMP



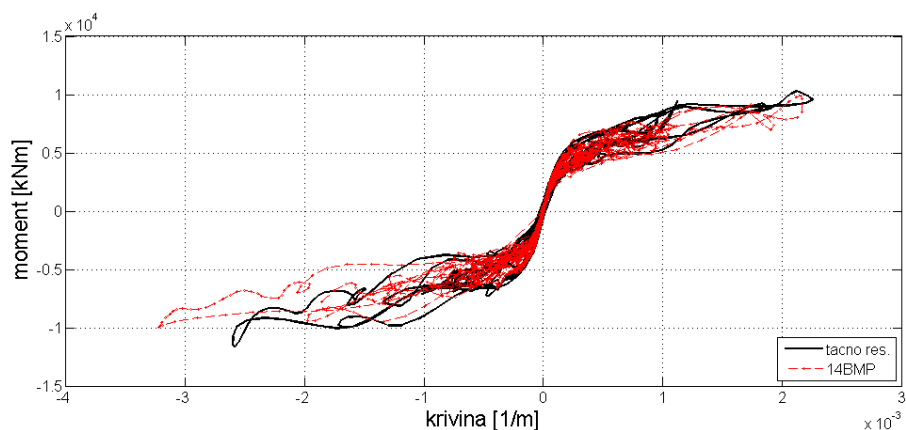
Slika 2.87: Aksijalna sila - dilatacija usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 14BMP



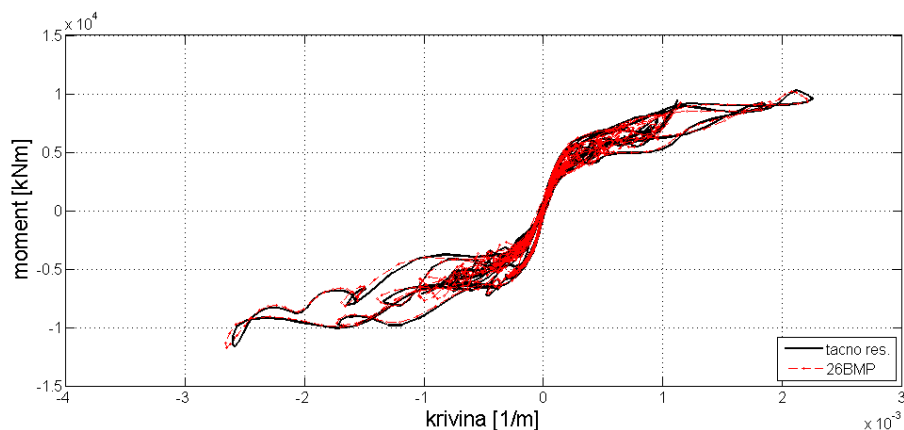
Slika 2.88: Aksijalna sila – dilatacija usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 26BMP



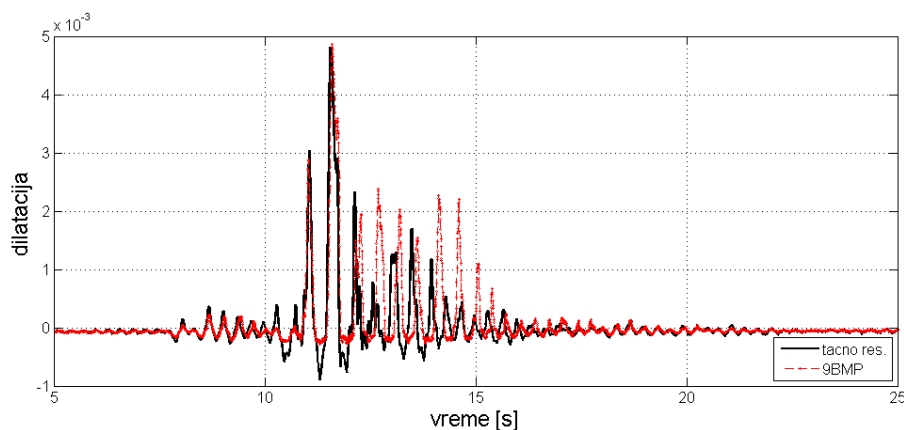
Slika 2.89: Moment-krivina za presek stuba kod uklještenja zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 9BMP



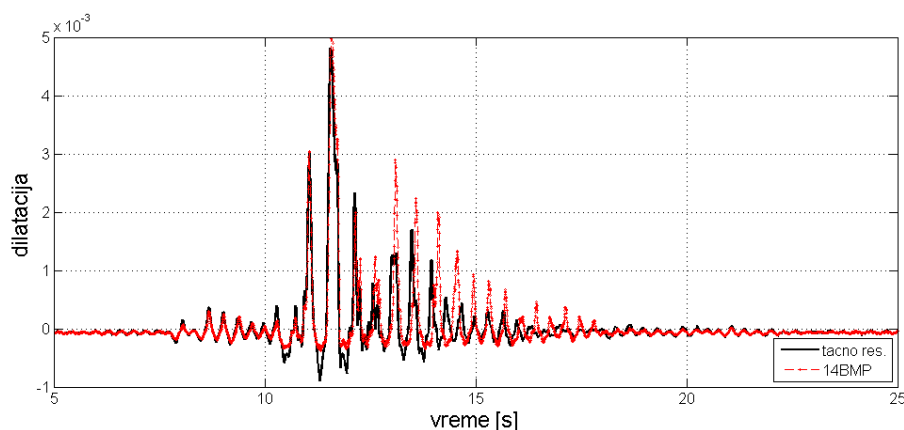
Slika 2.90: Moment-krivina za presek stuba kod uklještenja usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 14BMP



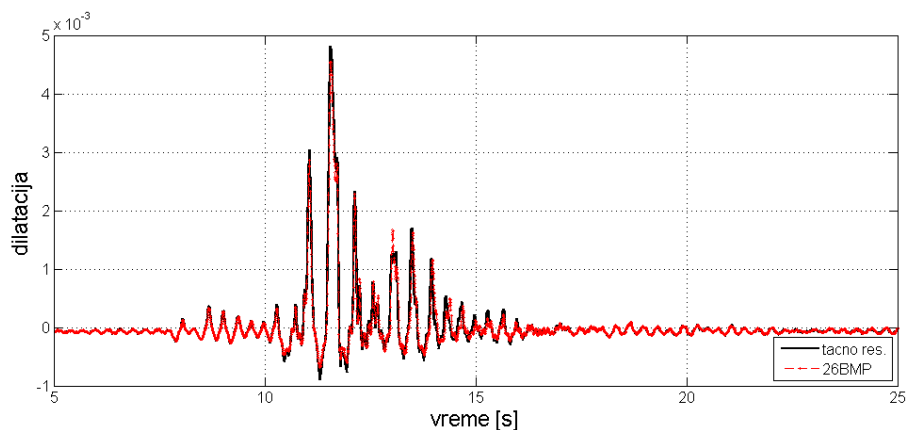
Slika 2.91: Moment-krivina za presek stuba kod uklještenja usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 26BMP



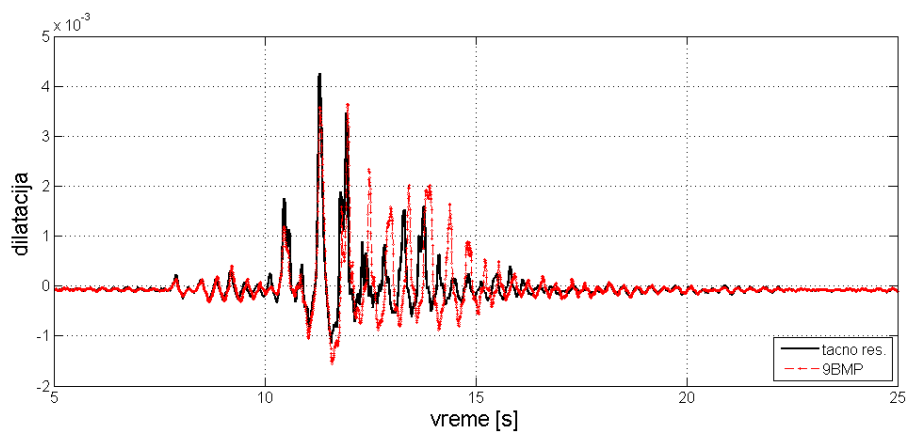
Slika 2.92: Dilatacija najudaljenijeg vlakna betonskog jezgra za presek stuba kod uklještenja usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 9BMP



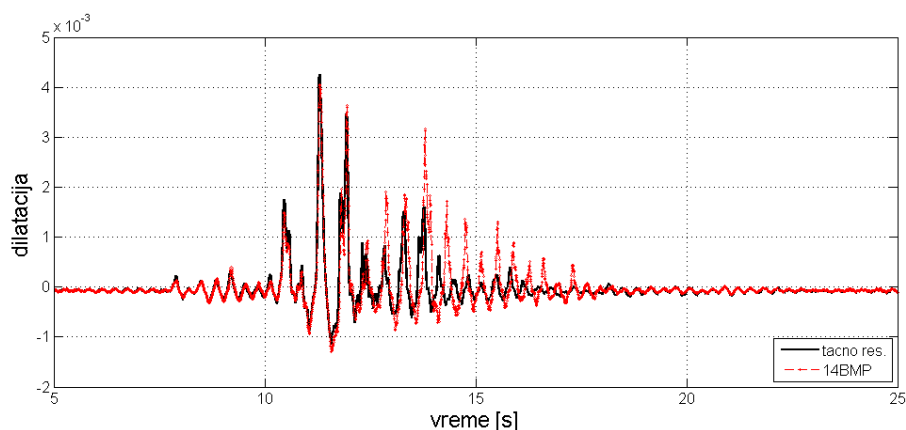
Slika 2.93: Dilatacija najudaljenijeg vlakna betonskog jezgra za presek stuba kod uklještenja usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 14BMP



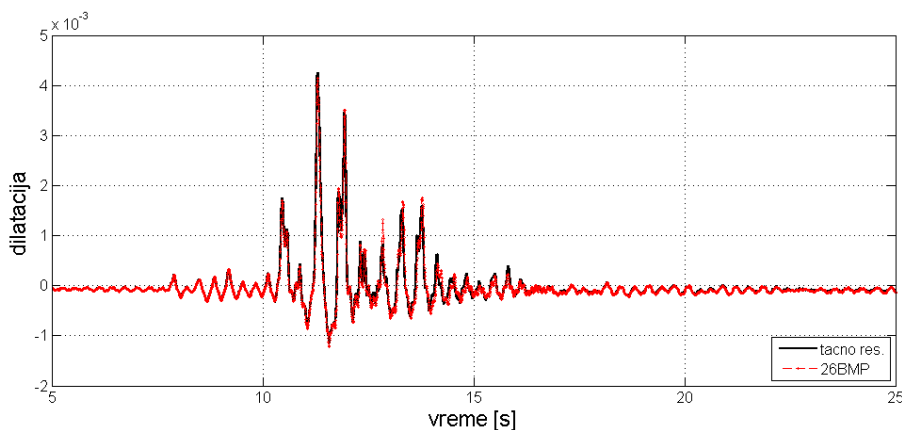
Slika 2.94: Dilatacija najudaljenijeg vlakna betonskog jezgra za presek stuba kod ukleštenja usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 26BMP



Slika 2.95: Dilatacija najudaljenijeg vlakna armature za presek stuba kod ukleštenja usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 9BMP



Slika 2.96: Dilatacija najudaljenijeg vlakna armature za presek stuba kod ukleštenja usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 14BMP



Slika 2.97: Dilatacija najudaljenijeg vlakna armature za presek stuba kod uklještenja usled zemljotresnog zapisa Loma Prieta Diamond Heights stanice sa maksimalnim ubrzanjem od 0.22g za šemu 26BMP

Rezultati prve analize su prikazani na slikama 2.62-2.79, a druge na slikama 2.80-2.97. Kod druge analize, drift, aksijalna sila i dilatacija vlakna su prikazane za period od 5-te do 25-te sekunde kada se javljaju ekstremne vrednosti.

Na osnovu prikazanih rezultata može se zaključiti da su i u slučaju ovog vrlo masivnog poprečnog preseka stuba izloženog značajnoj varijaciji aksijalne sile rezultati dobijeni vrlo "retkom" 9BMP diskretizacijom uglavnom zadovoljavajuće tačnosti kod obe analize, dakle i u slučaju malih, ali i vrlo velikih neelastičnih deformacija. Međutim, za dobijanje vernijih rezultata lokalnog odgovora (npr. aksijalna deformacija, krivina, dilatacija), potrebno je koristiti finije diskretizacije betonskog dela preseka, tj. šeme 14BMP ili 26BMP.

2.3.3. OGRANIČENJA PRIMENE DISKRETIZACIJE

PRAVOUGAONOG BETONSKOG PRESEKA SA MALO TAČAKA INTEGRACIJE I PRAVILA ZA PROGUŠĆENJE DISKRETIZACIJE

Na osnovu svih izloženih rezultata može se zaključiti da diskretizacije preseka pomoću malo tačaka integracije daju rezultate vrlo visoke tačnosti za praktičnu primenu ne samo kada je reč o globalnim parametrima odgovora konstrukcije, poput horizontalnog pomeranja vrha ili međuspratnog pomeranja, već i kod lokalnih parametara odgovora poput relacija moment-krivina ili promene dilatacije najudaljenijih vlakana. U najvećem broju slučajeva, šema diskretizacije

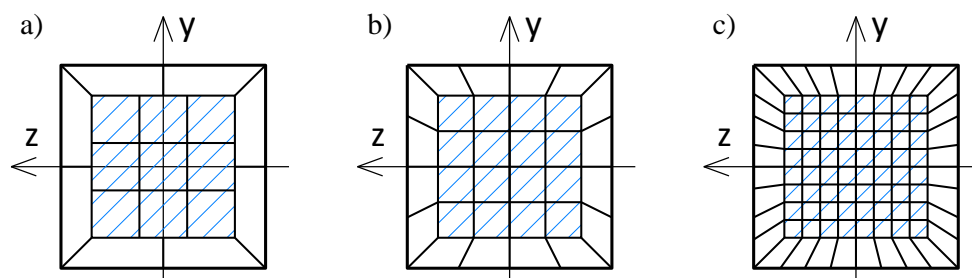
17BMP kod pravougaonog betonskog poprečnog preseka predstavlja odličan kompromis između ostvarene tačnosti i kompjuterske efikasnosti budući da je vreme proračuna oko dva reda veličine kraće nego kod "tačnog" rešenja. Stoga je to dobar izbor za praktičnu primenu.

Sa druge strane, primeri dinamičkih odgovora konstrukcije su pokazali da je u slučajevima kada su od primarnog interesa lokalni parametri odgovora konstrukcije ipak neophodno izvršiti nešto finiju diskretizaciju poprečnog preseka. U tim slučajevima, isuviše "retka" diskretizacija može rezultirati većom greškom kod određivanja tangentne matrice krutosti preseka. Stoga se, radi dobijanja rezultata veće tačnosti, sledeće "finije" šeme diskretizacije mogu preporučiti.

Za 3D odgovor pravougaonog betonskog preseka:

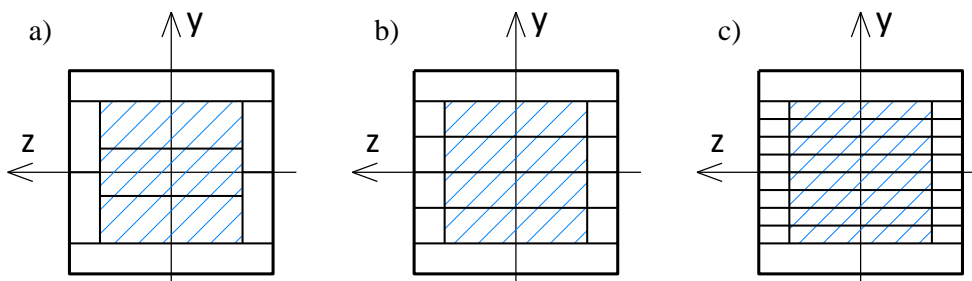
- 32BMP šema koja ima 4x4 tačke integracije za betonsko jezgro, 4x1 tačku integracije za svaki od četiri dela zaštitnog sloja betona, dakle ukupno 32 tačke integracije za betonski deo preseka, daje maksimalnu grešku elementa u ukupnoj disipaciji energije od 4% za preseke sa uobičajenim procentom armiranja.
- 96BMP šema koja ima 8x8 tačkaka integracije za betonsko jezgro, 8x1 tačku integracije za svaki od četiri dela zaštitnog sloja betona, dakle ukupno 96 tačkaka integracije za betonski deo preseka, daje maksimalnu grešku elementa u ukupnoj disipaciji energije od 1.5% za preseke sa uobičajenim procentom armiranja.

Ove šeme diskretizacije su prikazane na slici 2.98.



Slika 2.98: Šeme diskretizacije pravougaonog AB preseka pri dvoosnom savijanju: (a) 17BMP; (b) 32BMP i (c) 96BMP

Za 2D odgovor pravougaonog betonskog preseka, pomenutim 3D šemama odgovaraju šeme sa 9, 14 i 26 slojeva koje su prikazane na slici 2.99.



Slika 2.99: Šeme diskretizacije pravougaonog AB preseka pri jednoosnom savijanju: (a) 9 slojeva; (b) 14 slojeva i (c) 26 slojeva

2.4. NUMERIČKI PROBLEMI KOD DISKRETIZACIJE PRESEKA SA MALO TAČAKA INTEGRACIJE

Tokom izvođenja opisanih numeričkih simulacija korišćenjem fiber elementa pri čemu su za diskretizaciju poprečnih preseka korišćene šeme sa malo tačaka integracije, pokazalo se da konvergencija elementa zavisi od broja tačaka integracije (vlakana) budući da je u slučaju korišćenja većeg broja tačaka odgovor poprečnog preseka gladak i bez skokovitih i naglih promena stanja pojedinačnih vlakana. To naročito dolazi do izražaja u slučaju kompleksnih opterećenja kao što su opterećenja iz prikazanih numeričkih simulacija. Međutim, tokom ovog istraživanja, takođe, je utvrđeno da se problemi lokalne i globalne konvergencije koji eventualno mogu nastati uspešno mogu prevazići korišćenjem tehnike automatske podele inkrementa pomeranja pojedinačnog

elementa ili čitave konstrukcije, kao i korišćenjem modifikovane Newton-Raphson-ove metode kod iteracija, u slučaju da je u određenom koraku prekoračen propisani maksimalni broj iteracija. Pomoću nabrojanih postupaka kod određivanja stanja elementa/konstrukcije, problemi konvergencije se mogu svesti na svega par pojedinačnih slučajeva koji se javljaju kod vrlo "retkih" diskretizacija i pri vrlo kompleksnim slučajevima cikličnog opterećenja. Dakle, problem, eventualno, može nastati kod analize dinamičkog odgovora konstrukcije, ali ne i kod statičkih tzv. "push-over" analiza. U ovim slučajevima dalje poboljšanje konvergencije se može ostvariti korišćenjem modela generalisane plastičnosti za materijale, o kojima će biti više reči u narednom poglavlju, kod kojih je prelaz iz elastične zone u plastičnu zonu postepen čime se značajno smanjuju nagle promene stanja pojedinih tačaka (vlakana), a time i eliminišu problemi konvergencije bilo kod određivanja stanja poprečnog preseka ili kod određivanja stanja čitavog elementa.

3. POGLAVLJE

KONAČNI ELEMENT ZA ANALIZU OKVIRNIH KONSTRUKCIJA ZASNOVAN NA MODELU GENERALISANE PLASTIČNOSTI

U ovom poglavlju će biti prikazana formulacija linijskog konačnog elementa baziranog na principima modela generalisane plastičnosti kod materijala. Biće prikazane dve metode određivanja stanja elementa i njihov uticaj na konvergenciju samog elementa. Takođe, objašnjena je implementacija ovog elementa u klasične programe za analizu konstrukcija koji su bazirani na metodi deformacije u okviru metode konačnih elemenata.

Takođe, pored suštine razmatranog problema koji predstavlja određivanje $\mathbf{q-v}$ veze unutar elementa, tj. određivanje sila na krajevima elementa usled zadatih deformacija na krajevima, pri čemu razmatrane nelinearnosti potiču od materijalne nelinearnosti, objašnjeno je uzimanje u obzir i geometrijskih nelinearnosti.

Kroz niz numeričkih primera, potvrđena je tačnost i efikasnost novog elementa za praktičnu upotrebu u analizi čeličnih i spregnutih okvirnih konstrukcija.

3.1. UVOD

Kao što je već napomenuto u uvodnom delu, elementi koncentrisane plastičnosti kod kojih se plastične deformacije mogu javiti samo na krajevima elementa imaju danas veliku primenu u nelinearnoj analizi konstrukcija, i to, prvenstveno, zahvaljujući svojoj velikoj efikasnosti u odnosu na druge savremenije elemente veće tačnosti. Među njima su naročito zastupljeni elementi rezultatne plastičnosti, koji se zasnivaju na osnovnim principima klasične teorije plastičnosti.

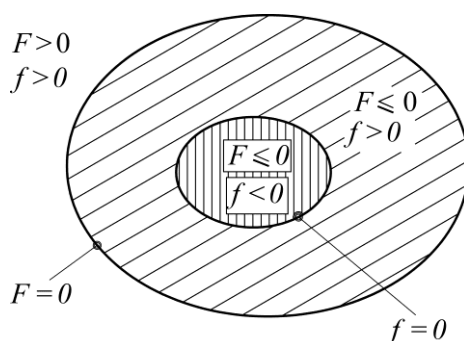
Osnovni nedostaci elemenata rezultatne plastičnosti, čijim se predstavnikom može smatrati model Orbisona [5], su nemogućnost opisivanja postepene plastifikacije poprečnog preseka elementa kao i ponašanje materijala sa

ojačanjem. Takođe, često algoritam određivanja stanja ovih elemenata nije dosledan, pa je i sama implementacija elementa dosta komplikovana. Stoga je motivacija pri razvijanju novog elementa koji je definisan u okviru ove teze bila da se otklone nabrojani nedostaci koji postoje kod elemenata rezultantne plastičnosti, ali da se, istovremeno, zadrži njihova visoka efikasnost u kompjuterskom smislu. Takođe, posebna pažnja je posvećena i samoj implementaciji konačnog elementa. Kao polazna osnova upotrebljen je model generalisane plastičnosti materijala, pa će najpre ovaj model biti ukratko objašnjen.

3.2. MODEL GENERALISANE PLASTIČNOSTI (GP)

Model generalisane plastičnosti kod opisivanja ponašanja materijala, u obliku u kome je korišćen u ovoj tezi, uveo je Jacob Lubliner [45]. Razvijeni model je dalje obrađen u radovima [46-49]. Model je nazvan generalisana plastičnost budući da se klasična plastičnost može definisati kao specijalan slučaj ovog modela.

Osnovna pretpostavka modela generalisane plastičnosti je postojanje dve kontinualne funkcije: funkcije tečenja f (yield function) i granične funkcije F (limit function) [48], slika 3.1.



Slika 3.1: Funkcija tečenja f i granična funkcija F

Funkcija tečenja f ograničava oblast elastičnog ponašanja i predstavlja granicu između elastične i neelastične oblasti:

$$f < 0 \rightarrow \text{elastično ponašanje, nema neelastičnih deformacija}$$

$f \geq 0 \rightarrow$ neelastično ponašanje, neelastične deformacije se mogu javiti u zavisnosti od toga da li je reč o opterećenju ili rasterećenju

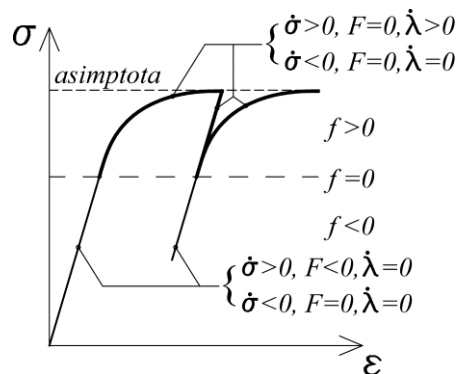
Za funkciju tečenja f može biti usvojena i bilo koja od standardnih funkcija tečenja klasične teorije plastičnosti – npr. Mises, Tresca itd.

Granična funkcija F razdvaja dozvoljena (moguća) stanja napona od nedozvoljenih (nemogućih) stanja:

$F \leq 0 \rightarrow$ dozvoljeno (moguće) stanje napona

$F > 0 \rightarrow$ nedozvoljeno stanje napona

Ova funkcija (F) obezbeđuje postepenu asimptotsku tranziciju između elastičnih i neelastičnih stanja tokom opterećenja (slika 3.2).



Slika 3.2: Funkcija tečenja f i granična funkcija F za slučaj jednoosnog naprezanja, materijal bez ojačanja

Osnovne karakteristike modela generalisane plastičnosti, osim pomenutog postepenog prelaza iz oblasti elastičnih u oblast neelastičnih deformacija, su i [48]:

- Elastoplastična napon-dilatacija kriva je kontinualna, glatka kriva (prvi izvod je neprekidna funkcija) u oblasti tranzicije.
- Brzina kojom model teži ka asimptotskoj vrednosti zavisi od parametra δ .

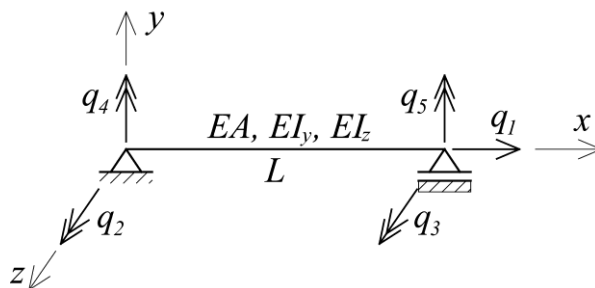
- U slučaju opterećenja, rasterećenja, pa novog opterećenja pre dostizanja plastičnih deformacija u suprotnom smeru, kod modela će se javiti plastične deformacije pre dostizanja napona pri kome je nastalo rasterećenje (slika 3.2). Ovakvo ponašanje odgovara realnom ponašanju metala.
- Implementacija modela je jednostavna budući da je potrebno rešiti kvadratnu jednačinu, što je neznatno komplikovanije u odnosu na model klasične plastičnosti gde se rešava linearna jednačina.
- U odnosu na algoritme klasične teorije plastičnosti, potrebno je samo par dodatnih linija programa.

Dakle, ovaj model pruža više mogućnosti za modeliranje, njegovi parametri imaju jasno fizičko značenje, a implementacija modela je jednostavna.

3.3. FORMULACIJA GP KONAČNOG ELEMENTA

3.3.1. OSNOVNE JEDNAČINE

Posmatramo linijski konačni element pravog štapa dužine L u prostoru, slika 3.3. Ose lokalnog koordinatnog sistema su x , y i z . EA predstavlja aksijalnu krutost štapa, a EI_z i EI_y su, redom, krutost štapa na savijanje oko ose z , odnosno, oko ose y .



Slika 3.3: Osnovni sistem i statički nepoznate

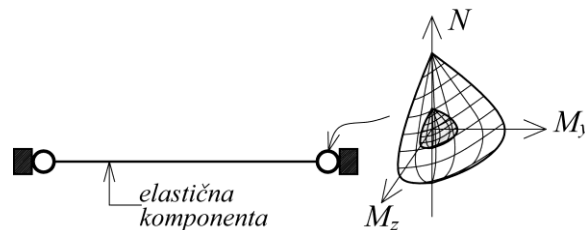
Prikazan je osnovni sistem, odnosno statički određen sistem kod koga su sprečena pomeranja elementa kao krutog tela. U ovom radu je pretpostavljeno da je torzioni odgovor elementa elastičan i nezavistan od ostalih stepeni slobode. Stoga je, radi pojednostavljenja izraza, torzija izostavljena (slika 3.3), pa statički nezavisnih veličina ima pet: normalna sila, dva momenta savijanja u čvoru i , i dva momenta savijanja u čvoru j . Ove veličine su grupisane u vektor \mathbf{q} :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ M_{zi} \\ M_{zj} \\ M_{yi} \\ M_{yj} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Odgovarajuće deformacije (izduženje štapa i obrtanja krajeva štapa oko koordinatnih osa) grupisane su u vektor deformacije \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta l \\ \varphi_{zi} \\ \varphi_{zj} \\ \varphi_{yi} \\ \varphi_{yj} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Plastični zglobovi se mogu formirati na jednom ili na oba kraja elementa, dok je ponašanje ostatka elementa elastično, kao što je prikazano na slici 3.4.



Slika 3.4: Plastični zglobovi na krajevima elementa

Kod linijskih elemenata rezultatne plastičnosti, principi teorije plastičnosti su modifikovani tako da opišu interakciju normalne sile i momenata savijanja pri neelastičnim deformacijama. Sledeće jednačine određuju ponašanje elementa:

1. Deformacije elementa \mathbf{v} se predstavljaju kao zbir linearno elastične komponente \mathbf{v}^e i plastične komponente \mathbf{v}^p :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^e + \mathbf{v}^p \quad (3.3)$$

2. Veza između statički nezavisnih veličina štapa \mathbf{q} i elastične komponente deformacija \mathbf{v}^e je linearna:

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_e \mathbf{v}^e = \mathbf{k}_e (\mathbf{v} - \mathbf{v}^p) \quad (3.4)$$

gde je \mathbf{k}_e elastična matrica krutosti elementa.

3. Na svakom kraju elementa, funkcija tečenja f zavisi od statički nepoznatih veličina štapa \mathbf{q} , vektora \mathbf{a} koji opisuje položaj centra površi tečenja i parametra ojačanja α koji opisuje izotropno ojačanje materijala. Bezdimenzioni parametri izotropnog i kinematičkog ojačanja su obeleženi, redom, sa H_{iso} i H_{kin} .

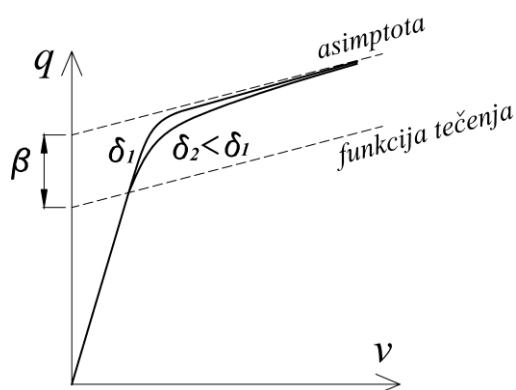
$$f(\mathbf{q}, \mathbf{a}, \alpha) = \Phi(\mathbf{q} - \mathbf{a}) - H_{iso} \alpha \quad (3.5)$$

4. Granična funkcija F zavisi od nenegativnog parametra plastičnosti λ i usvojena je u obliku predloženom u modelu generalisane plastičnosti:

$$F = h(f) \frac{d}{dt} (\Phi) - \lambda \quad (3.6)$$

$$h(f) = \frac{f}{\delta(\beta - f) + (H_{iso} + H_{kin})\beta} \quad (3.7)$$

gde su δ i β dve bezdimenzione konstante. Parametar δ meri brzinu dostizanja asimptote, a parametar β predstavlja rastojanje između površi tečenja i asimptote. Grafička prezentacija značenja ovih parametara je data na slici 3.5.



Slika 3.5: Dostizanje granične vrednosti statički nepoznate q sa povećanjem deformacije elementa v

5. Pretpostavlja se asocijativni zakon plastičnog tečenja sa sledećom vezom između inkrementa plastičnih deformacija i statički nezavisnih veličina:

$$\dot{\mathbf{v}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.8)$$

6. Pomeranje površi tečenja čime se predstavlja kinematičko ojačanje materijala je usvojeno prema sledećoj relaciji:

$$\dot{\mathbf{a}} = H_{kin} \mathbf{\Pi} \dot{\mathbf{v}}^p = H_{kin} \mathbf{\Pi} \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.9)$$

gde je $\mathbf{\Pi}$ matrica proporcionalnosti kojom se uzimaju u obzir različite dimenzije vektora \mathbf{a} i \mathbf{v}^p . U ovoj tezi usvojena je sledeća vrednost matrice $\mathbf{\Pi}$:

$$\mathbf{\Pi} = \text{diag} \left\{ \frac{EA}{L}, \frac{EI_z}{L}, \frac{EI_z}{L}, \frac{EI_y}{L}, \frac{EI_y}{L} \right\} \quad (3.10)$$

7. Zakon izotropnog ojačanja materijala je usvojen u sledećem obliku, u skladu sa ekvivalentnom plastičnom deformacijom:

$$\dot{\alpha} = \|\dot{\mathbf{v}}^p\| = \lambda \left\| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right\| \quad (3.11)$$

gde je:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right\| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \Lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right]^{1/2} \quad (3.12)$$

pri čemu je Λ matrica proporcionalnosti definisana kao:

$$\Lambda = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L^2}, 1, 1, 1, 1 \right\} \quad (3.13)$$

Kuhn-Tucker-ovi uslovi optimizacije glase:

$$\lambda \geq 0, \quad F \leq 0, \quad \lambda F = 0 \quad (3.14)$$

Ovim uslovima se problem plastičnosti svodi na problem optimizacije sa ograničenjima kod konveksnog matematičkog programiranja.

Uslovna jednačina za određivanje parametra plastičnosti se može napisati u sledećem obliku:

$$\lambda - h(f) \frac{d}{dt}(\Phi) = 0 \quad (3.15)$$

Integracijom ove jednačine na intervalu vremena (t_n, t_{n+1}) , dobija se sledeći diskretan oblik uslovne jednačine:

$$\Delta \lambda - h(f)(\Phi_{n+1} - \Phi_n) = 0 \quad (3.16)$$

gde je $\Delta \lambda$ priraštaj parametra plastičnosti u intervalu vremena (t_n, t_{n+1}) .

3.3.2. ALGORITAM INTEGRACIJE

Radi rešavanja jednačina prethodno prikazanog modela, on se, primenom Ojlerove numeričke metode, može transformisati u diskretni matematički problem optimizacije sa ograničenjima. Ovde će biti prikazana dva algoritma rešavanja: „general closest point projection“ i „convex cutting plane“ algoritmi [50].

Pretpostavimo da je stanje elementa poznato u trenutku vremena t_n , tj. poznate su vrednosti promenljivih $\{\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n^p, \mathbf{a}_n, \alpha_n\}$. Odgovarajuće vrednosti statički nepoznatih sila na krajevima elementa su određene jednačinom (3.4):

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{k}_e (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^p) \quad (3.17)$$

Za dati inkrement deformacije elementa $\Delta \mathbf{v}$ u trenutku vremena t_{n+1} , ukupna deformacija je poznata i iznosi $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta \mathbf{v}$. Problem koji treba rešiti jeste određivanje stanja elementa i vrednosti ostalih promenljivih $\mathbf{v}_{n+1}^p, \mathbf{a}_{n+1}, \alpha_{n+1}$ u trenutku vremena t_{n+1} .

Primenom implicitne Ojlerove metode dobijamo sledeće izraze:

$$\mathbf{v}_{n+1}^p = \mathbf{v}_n^p + \mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}) \Delta \lambda \quad (3.18)$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + H_{kin} \mathbf{\Pi} \mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}) \Delta \lambda \quad (3.19)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \|\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1})\| \Delta \lambda \quad (3.20)$$

gde je $\Delta \lambda = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \lambda dt$ i $\mathbf{g} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}$. Kuhn-Tucker-ovi uslovi (3.14) u

diskretnom obliku glase:

$$\Delta \lambda \geq 0, \quad F_{n+1} \leq 0, \quad \Delta \lambda F_{n+1} = 0 \quad (3.21)$$

Za rešavanje datog sistema jednačina može se koristiti „return mapping“ algoritam koji se sastoji iz dva koraka: prediktor i korektor.

3.3.3. RETURN MAPPING ALGORITAM

Kod numeričkih šema za rešavanje problema elasto-plastičnosti pojavljuje se potreba integracije konstitutivnih jednačina kojima se opisuje ponašanje materijala, odnosno u slučaju elemenata rezultatne plastičnosti, integracija relacija između sila u preseku - deformacije elementa. Stoga i tačnost numeričke šeme zavisi od tačnosti kojom se ova integracija izvodi.

Do danas je razvijeno više algoritama za integraciju konstitutivnih jednačina elasto-plastičnosti koji spadaju u grupu return mapping algoritama [50]. Jedan od prvih algoritama iz ove grupe je radial return mapping algoritam koji su predložili Maenchen i Sack, i Wilkins 1964. god [46] kod modela klasične plastičnosti sa Mises-ovim uslovom tečenja. Ovaj algoritam je vrlo efikasna i stabilna metoda čiju osnovu čini zadovoljenje uslova tečenja $f \leq 0$ u diskretnom obliku. Kasnije su razvijeni i drugi algoritmi, među kojima i “general closest point projection” (GCPP) i “convex cutting plane” (CCP) [50] koji su modifikovani i primenjeni u ovom radu.

Return mapping algoritmi se sastoje iz dva koraka: elastičnog prediktor koraka i plastičnog korektor koraka. Kod GP elementa koji je razvijen u okviru ove teze, u prvom, prediktor, koraku pretpostavlja se elastično stanje i sračunava probna (trial) vrednost sila na krajevima štapa q_{n+1}^{trial} . Ako ova vrednost narušava graničnu jednačinu $F \leq 0$, tj. predstavlja nedozvoljeno stanje napona, onda je u narednom, korektor koraku koji je iterativan, potrebno izvršiti korekciju sila na krajevima štapa polazeći od probnog (trial) stanja kao početnog uslova. U suprotnom, drugi, korektor korak nije potreban budući da probno rešenje predstavlja rešenje u trenutku vremena t_{n+1} .

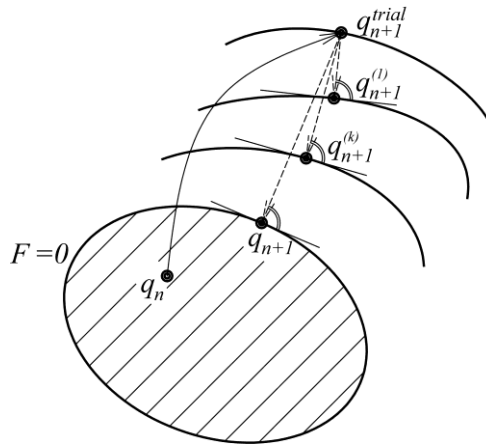
S obzirom na to da GP konačni element ima dva čvora, plastične deformacije na njemu se mogu javiti na jednom ili na oba kraja. Stoga su funkcije tečenja f_1 i f_2 , granične funkcije F_1 i F_2 , priraštaji parametara plastičnosti $\Delta\lambda_1$ i $\Delta\lambda_2$ kao i promenljive kojima se opisuje ojačanje materijala a_1 i a_2 grupisani u odgovarajuće vektore obeležene sa \mathbf{f} , \mathbf{F} , $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ i $\boldsymbol{\alpha}$, respektivno. Dijagonalna matrica 2x2 koja ima vrednosti funkcije tečenja f_1 i f_2 na dijagonali je obeležena sa $\text{diag}(\mathbf{f})$. Ista konvencija obeležavanja važi i za ostale matrice: $\text{diag}(\mathbf{F})$, $\text{diag}(\Delta\boldsymbol{\lambda})$, itd.

U slučaju kada se na oba kraja elementa formiraju plastični zglobovi, \mathbf{g} je 5x2 matrica čija je prva kolona jednaka $\partial_q f_1 = \mathbf{g}_1$, a druga kolona $\partial_q f_2 = \mathbf{g}_2$. Ukoliko se plastičan zglob formira samo na jednom kraju, \mathbf{g} je vektor 5x1 koji je jednak

\mathbf{g}_1 ili \mathbf{g}_2 , u zavisnosti od toga u kom čvoru elementa je formiran plastični zglob. U tom slučaju, parametar plastičnosti $\Delta\lambda$ za čvor u kome se nisu pojavile plastične deformacije je nula.

3.3.4. ODREĐIVANJE STANJA GP ELEMENTA PRIMENOM GENERAL CLOSEST POINT PROJECTION (GCPP) ALGORITMA

Geometrijska interpretacija iterativnog GCPP algoritma određivanja stanja GP konačnog elementa je prikazana na slici 3.6. Kod ovog algoritma, određuje se najbliža tačka projekcije probnog (trial) stanja na odgovarajuću graničnu površ F u svakoj iteraciji.



Slika 3.6: Geometrijska interpretacija korektor koraka prema GCPP algoritmu

1. Prediktor korak: Pretpostavlja se čisto elastično ponašanje (plastične deformacije su "zamrznute" na nivou vrednosti iz prethodnog trenutka vremena t_n). Sračunavaju se probne (trial) vrednosti:

$$\mathbf{q}_{n+1}^{trial} = \mathbf{k}_e (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n^p) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{v}_{n+1}^{p,trial} = \mathbf{v}_n^p \quad (3.23)$$

$$\mathbf{a}_{n+1}^{trial} = \mathbf{a}_n \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\alpha}_n \quad (3.25)$$

$$\mathbf{f}_{n+1}^{trial} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}^{trial}, \mathbf{a}_{n+1}^{trial}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{trial}) = \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^{trial} - H_{iso} \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{trial} \quad (3.26)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}_{n+1}^{trial} - \mathbf{a}_{n+1}^{trial}) \quad (3.27)$$

Nakon određivanja probnog stanja, proverava se granični uslov $F \leq 0$, koji se, uz pretpostavku o elastičnom ponašanju, svodi na sledeću nejednakost: $\mathbf{f}_{n+1}^{trial}(\boldsymbol{\Phi}_{n+1}^{trial} - \boldsymbol{\Phi}_n) \leq 0$. Ukoliko je ovaj uslov zadovoljen, probno stanje je moguće (dozvoljeno) stanje i vrednosti svih promenljivih u trenutku vremena t_{n+1} su određene:

$$\mathbf{v}_{n+1}^p = \mathbf{v}_n^p \quad (3.28)$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n \quad (3.29)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n \quad (3.30)$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_{n+1}^{trial} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{k}_{n+1} = \mathbf{k}_e \quad (3.32)$$

U slučaju kada probno stanje ne zadovoljava granični uslov $\mathbf{f}_{n+1}^{trial}(\boldsymbol{\Phi}_{n+1}^{trial} - \boldsymbol{\Phi}_n) \leq 0$ ovo stanje nije moguće i ne predstavlja rešenje u trenutku vremena t_{n+1} , pa je potrebno izvršiti korekciju u narednom korektor koraku.

2. Korektor korak: Ovo je iterativni postupak. Postavljamo uslov da je ispunjen granični uslov $F=0$ u obliku datom izrazom (3.16), kao i da su ostaci $\mathbf{R}_{1,n+1}$, $\mathbf{R}_{2,n+1}$ i $\mathbf{R}_{3,n+1}$ jednaki nuli:

$$\mathbf{R}_{1,n+1} = -\mathbf{v}_{n+1}^p + \mathbf{v}_n^p + \mathbf{g}_{n+1} \Delta \lambda_{n+1} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{R}_{2,n+1} = -\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n + H_{kin} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{g}_{n+1} \Delta \lambda_{n+1} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{R}_{3,n+1} = -\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \boldsymbol{\alpha}_n + \|\mathbf{g}_{n+1}\| \Delta \lambda_{n+1} \quad (3.35)$$

Nakon linearizacije izraza (3.16), (3.33), (3.34), (3.35) i njihovog sređivanja, dobija se sistem nelinearnih jednačina za određivanje priraštaja plastičnog parametra u (k)-toj iteraciji, u sledećem obliku:

$$(\mathbf{a}\Delta\lambda)(\mathbf{b}\Delta\lambda) + \mathbf{c}\Delta\lambda + \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

Najmanje pozitivno rešenje za priraštaj plastičnog parametra u (k)-toj iteraciji $\Delta\lambda$ odgovara fizički ispravnom rešenju.

Sistem jednačina (3.36) se može rešiti Njutnovom metodom ili drugom metodom za rešavanje sistema nelinearnih jednačina. Rešenje linearnog sistema jednačina $\mathbf{c}\Delta\lambda + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ može poslužiti kao početna vrednost.

Koeficijenti \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} i \mathbf{d} u jednačini (3.36) su:

$$\mathbf{a} = \text{diag}(\delta) - \Phi\mathbf{2} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{f}\mathbf{2} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{c} = \text{diag}(\Delta\lambda\delta)\mathbf{f}\mathbf{2} + \text{diag}(\delta(\beta - \mathbf{f}\mathbf{1}) + (H_{iso} + H_{kin})\beta) + \text{diag}(\mathbf{f}\mathbf{1})\Phi\mathbf{2} + \text{diag}(\Phi\mathbf{1} - \Phi_n)\mathbf{f}\mathbf{2} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{d} = \text{diag}(\delta(\beta - \mathbf{f}\mathbf{1}) + (H_{iso} + H_{kin})\beta)\Delta\lambda - \mathbf{f}\mathbf{1}(\Phi\mathbf{1} - \Phi_n) \quad (3.40)$$

gde je

$$\mathbf{f}\mathbf{1} = \mathbf{f}^{trial} + \mathbf{g}^T(\mathbf{M} - \mathbf{P}) - H_{iso} \mathbf{T} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{f}\mathbf{2} = \mathbf{g}^T(\mathbf{N} - \mathbf{S}) - H_{iso} \mathbf{L} \quad (3.42)$$

$$\Phi\mathbf{1} = \Phi^{trial} + \mathbf{g}^T(\mathbf{M} - \mathbf{P}) \quad (3.43)$$

$$\Phi\mathbf{2} = \mathbf{g}^T(\mathbf{N} - \mathbf{S}) \quad (3.44)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{C}(-\mathbf{R}_1 + \mathbf{Q}\Delta\lambda\mathbf{B}\mathbf{R}_2) \quad (3.45)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}(\mathbf{g} - \mathbf{Q}\Delta\lambda H_{kin} \mathbf{\Pi}\mathbf{g}) \quad (3.46)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}(\mathbf{R}_2 + H_{kin} \mathbf{\Pi}\mathbf{Q}\Delta\lambda\mathbf{M}) \quad (3.47)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}H_{kin} \mathbf{\Pi}(\mathbf{Q}\Delta\lambda\mathbf{g} - \mathbf{g}) \quad (3.48)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_3 + \Delta\lambda(\mathbf{Q}\mathbf{n})^T (\mathbf{M} - \mathbf{P}) \quad (3.49)$$

$$\mathbf{L} = \Delta\lambda(\mathbf{Q}\mathbf{n})^T (\mathbf{N} - \mathbf{S}) - \|\mathbf{g}\| \quad (3.50)$$

pri čemu je $\mathbf{A} = (\mathbf{k}_e^{-1} + \mathbf{Q}\Delta\lambda)^{-1}$, $\mathbf{Q} = \partial_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^2 \mathbf{f}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{1} + H_{kin} \mathbf{\Pi}\mathbf{Q}\Delta\lambda)^{-1}$, $\mathbf{n} = \frac{\Delta\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|}$ i

$\mathbf{C} = (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{Q}\Delta\lambda H_{kin} \mathbf{\Pi}\mathbf{Q}\Delta\lambda)^{-1}$. U izrazima (3.36)-(3.50) su, radi pojednostavljenja, izostavljeni indeks (k) koji označava broj iteracije i indeks n+1 koji označava vrednost u trenutku vremena t_{n+1} .

Za vrednosti parametara $\delta=0$ i $H_{iso}=H_{kin}=0$, model se svodi na elastičan-idealno plastičan model klasične plastičnosti, kome odgovara sledeće rešenje za priraštaj plastičnog parametra u (k)-toj iteraciji:

$$\Delta\lambda_{n+1}^{(k)} = \left((\mathbf{g}_{n+1}^{(k)})^T \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} \mathbf{g}_{n+1}^{(k)} \right)^{-1} \left(\mathbf{f}_{n+1}^{(k)} - (\mathbf{g}_{n+1}^{(k)})^T \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} \mathbf{R}_{1,n+1}^{(k)} \right) \quad (3.51)$$

Rešenje klasične plastičnosti za slučaj elastičnog-idealno plastičnog ponašanja se dobija i kada su vrednosti parametara jednake $\beta=0$ i $H_{iso}=H_{kin}=0$.

U slučaju kada se plastični zglobov formira samo na jednom kraju elementa, sistem nelinearnih jednačina (3.36) se svodi samo na jednu kvadratnu jednačinu.

Kada se odredi priraštaj $\Delta\lambda$ bilo kao rešenje jedne kvadratne jednačine ili sistema nelinearnih jednačina, ažurira se vrednost parametra plastičnosti:

$$\Delta\lambda_{n+1}^{(k+1)} = \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} + \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} \quad (3.52)$$

ODREĐIVANJE TANGENTNE MATRICE KRUTOSTI

Tangentna matrica krutosti se dobija koristeći linearizovanu diskretnu uslovnu jednačinu (3.16). Nakon sređivanja, dobijaju se sledeći izrazi za tangentnu matricu krutosti \mathbf{k}_{n+1} :

$$\mathbf{k}_{n+1} = \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{v}} \Big|_{n+1} = \mathbf{C}_{n+1} - \mathbf{N}_{n+1} (\mathbf{Y}_{n+1})^{-1} \mathbf{Z}_{n+1} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{n+1} = & \text{diag}(\delta(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{f}_{n+1}) + (H_{iso} + H_{kin})\boldsymbol{\beta}) + \\ & + \text{diag}(\mathbf{f}_{n+1} + \boldsymbol{\Phi}_{n+1} - \boldsymbol{\Phi}_n + \Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}\boldsymbol{\delta})\mathbf{g}_{n+1}^T \mathbf{X}_2 - \\ & - \text{diag}(H_{iso}(\boldsymbol{\Phi}_{n+1} - \boldsymbol{\Phi}_n + \Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}\boldsymbol{\delta}))\mathbf{L}_{n+1} \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{n+1} = & \text{diag}(\mathbf{f}_{n+1} + \boldsymbol{\Phi}_{n+1} - \boldsymbol{\Phi}_n + \Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}\boldsymbol{\delta})\mathbf{g}_{n+1}^T \mathbf{X}_1 - \\ & - \text{diag}(H_{iso}\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}\boldsymbol{\delta})\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}(\mathbf{Q}_{n+1}\mathbf{n}_{n+1})^T \mathbf{X}_1 - \\ & - \text{diag}(H_{iso}(\boldsymbol{\Phi}_{n+1} - \boldsymbol{\Phi}_n))\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}(\mathbf{Q}_{n+1}\mathbf{n}_{n+1})^T \mathbf{X}_1 \end{aligned} \quad (3.55)$$

gde je:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{C}_{n+1} - \mathbf{B}_{n+1} H_{kin} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{Q}_{n+1} \Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1} \mathbf{C}_{n+1} \\ \mathbf{X}_2 &= \mathbf{N}_{n+1} - \mathbf{S}_{n+1} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Kao što je objašnjeno kod određivanja priraštaja parametra plastičnosti $\Delta\boldsymbol{\lambda}$, za vrednosti parametara $\delta=0$ i $H_{iso}=H_{kin}=0$ ili $\beta=0$ i $H_{iso}=H_{kin}=0$, model se svodi na elastično-idealno plastičan model klasične plastičnosti za koji matrica krutosti ima sledeću vrednost:

$$\mathbf{k}_{n+1} = \mathbf{A}_{n+1} - \mathbf{A}_{n+1} \mathbf{g}_{n+1} (\mathbf{g}_{n+1}^T \mathbf{A}_{n+1} \mathbf{g}_{n+1})^{-1} \mathbf{g}_{n+1}^T \mathbf{A}_{n+1} \quad (3.57)$$

Algoritam određivanja stanja GP konačnog elementa prema GCPP algoritmu je rezimiran na slici 3.7.

1. $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta \mathbf{v}$
2. Inicijalizacija: $(k)=0$, $\mathbf{v}_{n+1}^{p,(0)} = \mathbf{v}_n^p$, $\mathbf{a}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{a}_n$, $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\alpha}_n$, $\Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{0}$
3. Elastični prediktor korak:

$$\mathbf{q}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{k}_e (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n^{p,(0)})$$

$$\mathbf{f}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}^{(0)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(0)}) = \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^{(0)} - H_{iso} \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(0)}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}_{n+1}^{(0)} - \mathbf{a}_{n+1}^{(0)})$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(0)} = h(\mathbf{f}_{n+1}^{(0)}) (\boldsymbol{\Phi}_{n+1}^{(0)} - \boldsymbol{\Phi}_n) - \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(0)}$$
4. Provera graničnog uslova: IF $F_{n+1}^{(0)} \leq TOL_1$
 THEN: $\mathbf{v}_{n+1}^p = \mathbf{v}_{n+1}^{p,(0)}$, $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1}^{(0)}$, $\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(0)}$,
 $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_{n+1}^{(0)}$, $\mathbf{k}_{n+1} = \mathbf{k}_e$, END.
 ELSE: Plastični korektor GO TO 5.
5. Plastični korektor korak:

$$\mathbf{R}_{1,n+1}^{(k)} = -\mathbf{v}_{n+1}^{p,(k)} + \mathbf{v}_n^p + \mathbf{g}_{n+1}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k)}$$

$$\mathbf{R}_{2,n+1}^{(k)} = -\mathbf{a}_{n+1}^{(k)} + \mathbf{a}_n + H_{kin} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{g}_{n+1}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k)}$$

$$\mathbf{R}_{3,n+1}^{(k)} = -\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}_n + \|\mathbf{g}_{n+1}^{(k)}\| \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k)}$$
 - određivanje $\Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k)}$ rešavanjem sistema jednačina
 - sračunavanje inkrementa plastične deformacije i internih promenljivih $\Delta \mathbf{v}_{n+1}^{p,(k)}$, $\Delta \mathbf{a}_{n+1}^{(k)}$, $\Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}$
 - ažuriranje vrednosti:

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k+1)} = \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k)} + \Delta \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k)}$$

$$\mathbf{v}_{n+1}^{p,(k+1)} = \mathbf{v}_{n+1}^{p,(k)} + \Delta \mathbf{v}_{n+1}^{p,(k)}$$

$$\mathbf{a}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{a}_{n+1}^{(k)} + \Delta \mathbf{a}_{n+1}^{(k)}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}$$

$$\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{k}_e (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n^{p,(k+1)})$$

$$\mathbf{f}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(k+1)}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k+1)})$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{a}_{n+1}^{(k+1)})$$
6. Provera konvergencije: IF $F_{n+1}^{(k+1)} \leq TOL_1$ and $\|R_{i,n+1}^{(k+1)}\| \leq TOL_2$ THEN:
 $\mathbf{v}_{n+1}^p = \mathbf{v}_{n+1}^{p,(k+1)}$, $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1}^{(k+1)}$, $\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k+1)}$, $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)}$
 $\mathbf{k}_{n+1} = \mathbf{k}_e$, END.
 ELSE: $k=k+1$, GO TO 5.

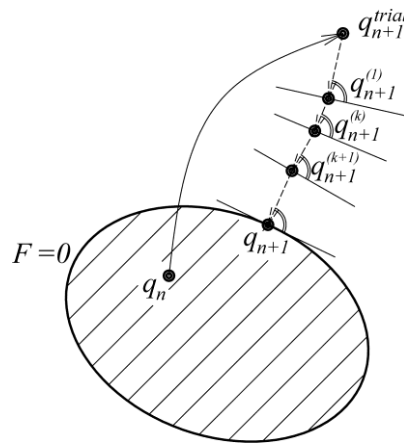
Slika 3.7: GCPP algoritam određivanja stanja elementa

3.3.5. ODREĐIVANJE STANJA GP ELEMENTA PRIMENOM CONVEX CUTTING PLANE (CCP) ALGORITMA

Generalno, GCPP algoritam je vrlo opšti postupak i može se primeniti kod različitih modela plastičnosti. Međutim, kod komplikovanijih modela, budući

da je potrebno sračunavanje gradijenata uslova plastičnog tečenja, to može predstavljati izvesnu poteškoću. Stoga su Simo i Ortiz [51,52] predložili “convex cutting plane” (CCP) algoritam kojim se zaobilazi potreba sračunavanja pomenutih gradijenata.

Geometrijska interpretacija ovog algoritma je prikazana na slici 3.8. Korekcija probnih vrednosti prediktor koraka q_{n+1} se vrši kroz niz iteracija. U svakoj iteraciji nova vrednost $q_{n+1}^{(k+1)}$ se sračunava projektujući vrednost iz prethodne iteracije $q_{n+1}^{(k)}$ na linearnu aproksimaciju granične funkcije (eng. “cut”).



Slika 3.8: Geometrijska interpretacija korektor koraka prema CCP algoritmu

1. Prediktor korak: Ovaj korak se ne razlikuje od prediktor koraka kod GCPP algoritma. Dakle, pretpostavljajući čisto elastično ponašanje, sračunavaju se probne (trial) vrednosti: \mathbf{q}_{n+1}^{trial} , $\mathbf{v}_{n+1}^{p,trial}$, \mathbf{a}_{n+1}^{trial} , $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{trial}$, \mathbf{f}_{n+1}^{trial} i Φ_{n+1}^{trial} prema izrazima (3.22)-(3.27). Ukoliko je granični uslov $F \leq 0$ zadovoljen, sračunato probno stanje je moguće stanje i predstavlja rešenje u trenutku vremena t_{n+1} (izrazi (3.28)-(3.32)). Ukoliko granični uslov nije zadovoljen, vrši se korekcija, kroz iteracije, u korektor koraku.
2. Korektor korak: Pretpostavka je da je $\mathbf{g}_{n+1}^{(k)}$ nepromenljivo (fiksirano). Stoga je:

$$\Delta \mathbf{v}_{n+1}^{p(k)} = \mathbf{g}_{n+1}^{(k)} \Delta \lambda_{n+1}^{(k)} \quad (3.58)$$

$$\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} = -\mathbf{k}_e \mathbf{g}_{n+1}^{(k)} \Delta \Delta \lambda_{n+1}^{(k)} \quad (3.59)$$

$$\Delta \mathbf{a}_{n+1}^{(k)} = H_{kin} \mathbf{\Pi} \mathbf{g}_{n+1}^{(k)} \Delta \Delta \lambda_{n+1}^{(k)} \quad (3.60)$$

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} = \left\| \mathbf{g}_{n+1}^{(k)} \right\| \Delta \Delta \lambda_{n+1}^{(k)} \quad (3.61)$$

Linearizacijom graničnog uslova (3.16) i nakon malo matematičkog sređivanja, dobija se sistem nelinearnih jednačina za određivanje priraštaja plastičnog parametra u (k)-toj iteraciji u istom obliku kao kod GCPP algoritma (3.36) i sa istim značenjem koeficijenata a, b, c i d, ali sa sledećim značenjem uvedenih smena:

$$\mathbf{f1} = \mathbf{f}^{trial} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{f2} = \mathbf{g}^T (\mathbf{N} - \mathbf{S}) - H_{iso} \mathbf{L} \quad (3.63)$$

$$\boldsymbol{\Phi}1 = \boldsymbol{\Phi}^{trial} \quad (3.64)$$

$$\boldsymbol{\Phi}2 = \mathbf{g}^T (\mathbf{N} - \mathbf{S}) \quad (3.65)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{C} \mathbf{g} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{S} = -H_{kin} \mathbf{\Pi} \mathbf{g} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{L} = \left\| \mathbf{g} \right\| \quad (3.68)$$

pri čemu je $\mathbf{C} = \mathbf{k}_e$. U izrazima (3.62)-(3.68) su, radi pojednostavljenja, izostavljeni indeks (k) koji označava broj iteracije i indeks n+1 koji označava vrednost u trenutku vremena t_{n+1} .

Slično kao kod GCPP algoritma, za vrednosti parametara $\delta=0$ i $H_{iso}=H_{kin}=0$, ili, $\beta=0$ i $H_{iso}=H_{kin}=0$ model se svodi na elastičan-idealno plastičan model klasične plastičnosti, kome odgovara sledeće rešenje za priraštaj plastičnog parametra u (k)-toj iteraciji koje se može sresti i u literaturi [15]:

$$\Delta\lambda_{n+1}^{(k)} = \left(\left(\mathbf{g}_{n+1}^{(k)} \right)^T \mathbf{k}_e \mathbf{g}_{n+1}^{(k)} \right)^{-1} \mathbf{f}_{n+1}^{(k)} \quad (3.69)$$

U slučaju kada se plastični zglob formira samo na jednom kraju elementa, sistem nelinearnih jednačina se svodi samo na jednu kvadratnu jednačinu, kao i u slučaju GCPP algoritma.

Kada se odredi priraštaj $\Delta\lambda$ bilo kao rešenje jedne kvadratne jednačine ili sistema nelinearnih jednačina, ažurira se vrednost parametra plastičnosti, kao i u slučaju GCPP algoritma:

$$\lambda_{n+1}^{(k+1)} = \lambda_{n+1}^{(k)} + \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} \quad (3.70)$$

ODREĐIVANJE TANGENTNE MATRICE KRUTOSTI

Tangentna matrica krutosti se može dobiti sličnim razmatranjem kao i kod GCPP algoritma. Nakon linearizacije uslovne jednačine (3.16) i matematičkog sređivanja izraza, dobija se izraz za tangentnu matricu krutosti \mathbf{k}_{n+1} istog oblika kao i kod GCPP algoritma (3.53) sa sledećim značenjem smena:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{n+1} = & \text{diag}(\delta(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{f}_{n+1}) + (H_{iso} + H_{kin})\boldsymbol{\beta}) + \\ & + \text{diag}(\mathbf{f}_{n+1} + \boldsymbol{\Phi}_{n+1} - \boldsymbol{\Phi}_n + \Delta\lambda_{n+1}\delta)\mathbf{g}_{n+1}^T \mathbf{X}_2 - \\ & - \text{diag}(H_{iso}(\boldsymbol{\Phi}_{n+1} - \boldsymbol{\Phi}_n + \Delta\lambda_{n+1}\delta))\mathbf{L}_{n+1} \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \text{diag}(\mathbf{f}_{n+1} + \boldsymbol{\Phi}_{n+1} - \boldsymbol{\Phi}_n + \Delta\lambda_{n+1}\delta)\mathbf{g}_{n+1}^T \mathbf{X}_1 \quad (3.72)$$

gde je:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{C}_{n+1} \\ \mathbf{X}_2 &= \mathbf{N}_{n+1} - \mathbf{S}_{n+1} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Za vrednosti parametara modela kada se on svodi na elastično-idealno plastičan model klasične plastičnosti ($\delta=0$ i $H_{iso}=H_{kin}=0$ ili $\beta=0$ i $H_{iso}=H_{kin}=0$) dobija se matrica krutosti koja ima sledeću vrednost:

$$\mathbf{k}_{n+1} = \mathbf{k}_e - \mathbf{k}_e \mathbf{g}_{n+1} \left(\mathbf{g}_{n+1}^T \mathbf{k}_e \mathbf{g}_{n+1} \right)^{-1} \mathbf{g}_{n+1}^T \mathbf{k}_e \quad (3.74)$$

Ovaj oblik izraza za matricu krutosti se takođe može sresti u literaturi [5].

Algoritam određivanja stanja GP konačnog elementa prema CCP algoritmu je rezimiran na slici 3.9.

1. $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta \mathbf{v}$
2. Inicijalizacija: $(k)=0$, $\mathbf{v}_{n+1}^{p,(0)} = \mathbf{v}_n^p$, $\mathbf{a}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{a}_n$, $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\alpha}_n$, $\Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{0}$
3. Elastični prediktor korak:

$$\mathbf{q}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{k}_e \left(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n^{p,(0)} \right)$$

$$\mathbf{f}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{f} \left(\mathbf{q}_{n+1}^{(0)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(0)} \right) = \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^{(0)} - H_{iso} \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(0)}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\Phi} \left(\mathbf{q}_{n+1}^{(0)} - \mathbf{a}_{n+1}^{(0)} \right)$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(0)} = h \left(\mathbf{f}_{n+1}^{(0)} \right) \left(\boldsymbol{\Phi}_{n+1}^{(0)} - \boldsymbol{\Phi}_n \right) - \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(0)}$$
4. Provera graničnog uslova: IF $F_{n+1}^{(0)} \leq TOL_1$
 THEN: $\mathbf{v}_{n+1}^p = \mathbf{v}_{n+1}^{p,(0)}$, $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1}^{(0)}$, $\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(0)}$,
 $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_{n+1}^{(0)}$, $\mathbf{k}_{n+1} = \mathbf{k}_e$, END.
 ELSE: Plastični korektor GO TO 5.
5. Plastični korektor korak:
 - određivanje $\Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k)}$ rešavanjem sistema jednačina
 - sračunavanje inkrementa plastične deformacije i internih promenljivih $\Delta \mathbf{v}_{n+1}^{p,(k)}$, $\Delta \mathbf{a}_{n+1}^{(k)}$, $\Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}$
 - ažuriranje vrednosti:

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k+1)} = \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k)} + \Delta \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k)}$$

$$\mathbf{v}_{n+1}^{p,(k+1)} = \mathbf{v}_{n+1}^{p,(k)} + \Delta \mathbf{v}_{n+1}^{p,(k)}$$

$$\mathbf{a}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{a}_{n+1}^{(k)} + \Delta \mathbf{a}_{n+1}^{(k)}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}$$

$$\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{k}_e \left(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n^{p,(k+1)} \right)$$

$$\mathbf{f}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{f} \left(\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(k+1)}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k+1)} \right)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\Phi} \left(\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{a}_{n+1}^{(k+1)} \right)$$
6. Provera konvergencije: IF $F_{n+1}^{(k+1)} \leq TOL_1$
 THEN: $\mathbf{v}_{n+1}^p = \mathbf{v}_{n+1}^{p,(k+1)}$, $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1}^{(k+1)}$, $\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k+1)}$, $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)}$
 $\mathbf{k}_{n+1} = \mathbf{k}_e$, END.
 ELSE: $k=k+1$, GO TO 5.

Slika 3.9: CCP algoritam određivanja stanja elementa

Obe varijante GP konačnog elementa (prema GCPP i CCP algoritmima) su implementirane u FEDEASLab [34] i izvršeno je testiranje elementa kroz niz numeričkih primera.

3.3.6. NAPOMENE O KONVERGENCIJI GP ELEMENTA SA GCPP I CCP ALGORITMIMA

Kao što je već pomenuto, osnovna prednost CCP algoritma u poređenju sa GCPP algoritmom jeste to što se njim zaobilazi potreba sračunavanja gradijenta uslova plastičnog tečenja (matrica \mathbf{Q} kod GCPP algoritma), što može biti velika prednost kod komplikovanih modela plastičnosti. Međutim, ovo pojednostavljenje izraza za određivanje parametra plastičnosti $\Delta\Delta\lambda$, kao i kod određivanja tangentne matrice krutosti \mathbf{k}_{n+1} ima uticaja na konvergenciju elementa. Naime, za razliku od GCPP algoritma koji karakteriše kvadratna konvergencija, kod CCP algoritma zbog greške koja se uvodi kod određivanja tangentne matrice krutosti zbog usvojene pretpostavke da je \mathbf{g} nepromenljivo gubi se kvadratna konvergencija u globalnim iteracijama kod elementa baziranog na ovom algoritmu. Stoga se umesto 3-4 iteracije koliko je potrebno za konvergenciju kada se koristi element zasnovan na GCPP algoritmu, broj potrebnih iteracija povećava na 4+ kada se koristi element zasnovan na CCP algoritmu. Ovo je ilustrovano na slikama 3.10 i 3.11. Stoga se, uvek kada model plastičnosti to dozvoljava, preporučuje korišćenje GCPP algoritma.

```
Iteration: 1 Relative work increment = 6.017231e-002
Iteration: 2 Relative work increment = 1.052289e-007
Iteration: 3 Relative work increment = 2.854062e-019
Number of iterations = 3

Iteration: 1 Relative work increment = 6.393661e-002
Iteration: 2 Relative work increment = 6.520952e-008
Iteration: 3 Relative work increment = 7.123537e-020
Number of iterations = 3

Iteration: 1 Relative work increment = 6.675235e-002
Iteration: 2 Relative work increment = 4.177124e-008
Iteration: 3 Relative work increment = 2.305053e-020
Number of iterations = 3
```

Slika 3.10: Prikaz broja globalnih iteracija u jednom od numeričkih testova sa GP elementom i GCPP algoritmom

```

Iteration: 1 Relative work increment = 6.565823e-005
Iteration: 2 Relative work increment = 4.126205e-009
Iteration: 3 Relative work increment = 1.969969e-013
Iteration: 4 Relative work increment = 8.481762e-018
Number of iterations = 4

Iteration: 1 Relative work increment = 7.864009e-002
Iteration: 2 Relative work increment = 1.470509e-006
Iteration: 3 Relative work increment = 8.842184e-011
Iteration: 4 Relative work increment = 4.132994e-015
Iteration: 5 Relative work increment = 1.759527e-019
Number of iterations = 5

Iteration: 1 Relative work increment = 7.887555e-002
Iteration: 2 Relative work increment = 1.226611e-006
Iteration: 3 Relative work increment = 7.035323e-011
Iteration: 4 Relative work increment = 3.226303e-015
Iteration: 5 Relative work increment = 1.360398e-019
Number of iterations = 5

```

Slika 3.11: Prikaz broja globalnih iteracija u jednom od numeričkih testova sa GP elementom i CCP algoritmom

3.4. GEOMETRIJSKE NELINEARNOSTI

U prethodnom delu ovog poglavlja, novi GP element i njegova matrica krutosti su definisani u osnovnom sistemu u kome su sprečena pomeranja elementa kao krutog tela i razmatran je problem materijalne nelinearnosti, što i predstavlja težište ove teze. Ovde ce biti objašnjen postupak uzimanja u obzir geometrijskih nelinearnosti i transformacija matrice krutosti iz lokalnog u globalni koordinatni sistem koja se dalje koristi kod dobijanja matrice krutosti sistema. Biće objašnjene osnovne postavke često korišćene korotacione formulacije [20,36] kao i aproksimativnih metoda.

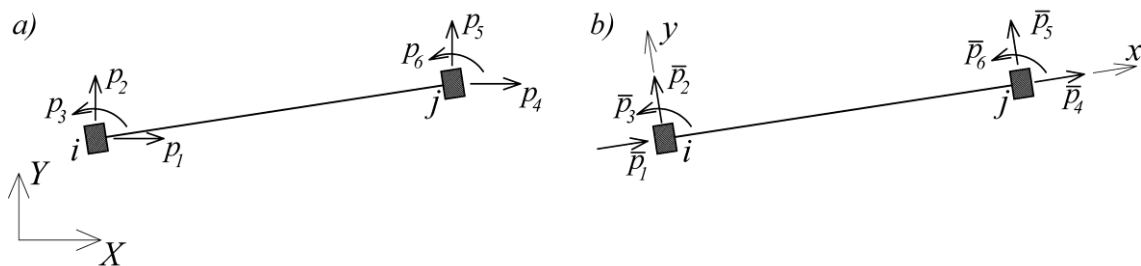
Posmatramo linijski konačni element u ravni prikazan na slici 3.12. Ose X i Y su ose globalnog koordinatnog sistema, a sile na krajevima elementa u globalnom koordinatnom sistemu su \mathbf{p} (slika 3.12(a)):

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Odgovarajuća pomeranja krajeva elementa u globalnom koordinatnom sistemu su obeležena sa \mathbf{u} . Na slici 3.12(b) su prikazane sile na krajevima elementa u lokalnom koordinatnom sistemu x,y :

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \\ \bar{p}_4 \\ \bar{p}_5 \\ \bar{p}_6 \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

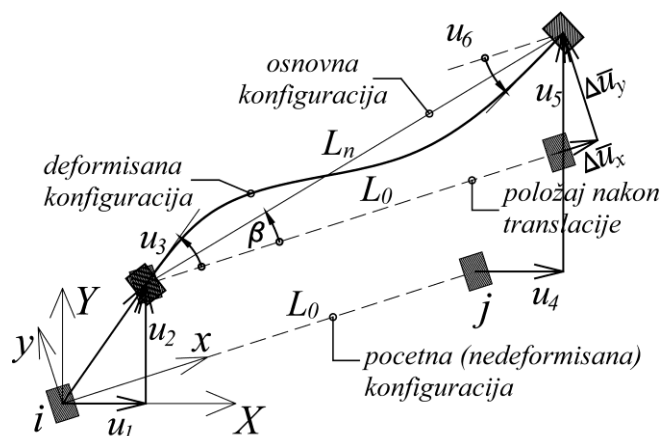
Analogno, odgovarajuća pomeranja krajeva elementa su obeležena sa $\bar{\mathbf{u}}$.



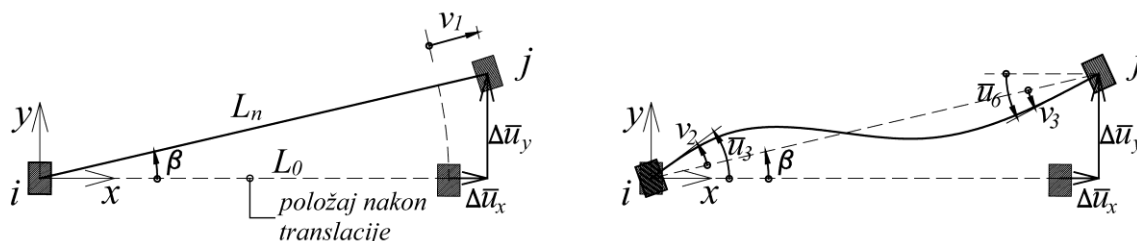
Slika 3.12: Sile na krajevima elementa u:
(a) globalnom i (b) lokalnom koordinatnom sistemu

Budući da se usled pomeranja elementa kao krutog tela ne javljaju deformacije elementa, na slici 3.13 je razdvojeno translatorno pomeranje elementa kao krutog tela od deformacije elementa. Ovakvo prikazivanje deformacije čini suštinu korotacione formulacije. Sama deformacija elementa se prikazuje u "korotacionoj" konfiguraciji, odnosno, u osnovnom sistemu. Zatim se vrše odgovarajuće transformacije veličina u globalni koordinatni sistem. Postupak je opšti i ne zavisi od vrste konačnog elementa. Ovde će, radi jednostavnosti, biti

prikazane osnovne transformacije kod korotacione formulacije u ravni (2D slučaj).



Slika 3.13: Deformacija elementa



Slika 3.14: Osnovne deformacijske veličine elementa

Osnovne deformacijske veličine linijskog konačnog elementa su prikazane na slici 3.14, i to odvojeno u slučaju samo izduženja elementa kada nema dodatnog obrtanja krajeva elementa (već samo rotacija elementa kao krutog tela) – veličina v_1 , i kada postoje i dodatna obrtanja krajeva elementa – veličine v_2 i v_3 . Veze između osnovnih deformacijskih veličina elementa \mathbf{v} i pomeranja krajeva elementa u lokalnom koordinatnom sistemu $\bar{\mathbf{u}}$, za slučaj velikih pomeranja i srednjih (ili malih) deformacija što je uglavnom slučaj kod građevinskih konstrukcija, se u korotacionoj formulaciji mogu izraziti na sledeći način. Usvajanjem nominalne (inženjerske) deformacije [53], izduženje štapa u pravcu ose štapa je (L_0 je dužina elementa pre, a L_n dužina štapa nakon deformacije):

$$v_1 = L_n - L_0 \quad (3.77)$$

$$L_n = \sqrt{(L_0 + \Delta\bar{u}_x)^2 + (\Delta\bar{u}_y)^2} \quad (3.78)$$

pri čemu je $\Delta\bar{u}_x = \bar{u}_4 - \bar{u}_1$, a $\Delta\bar{u}_y = \bar{u}_5 - \bar{u}_2$.

Obrtanja krajeva elementa osnovnog sistema su:

$$\begin{aligned} v_2 &= \bar{u}_3 - \beta \\ v_3 &= \bar{u}_6 - \beta \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\beta = \arctg \frac{\Delta\bar{u}_y}{L_0 + \Delta\bar{u}_x} \quad (3.80)$$

Veza između sila na krajevima elementa u lokalnom koordinatnom sistemu $\bar{\mathbf{u}}$ i osnovnih statički nezavisnih veličina elementa \mathbf{q} , se može dobiti primenom principa virtualnih pomeranja [20]:

$$\delta\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{p}} = \delta\mathbf{v}^T \mathbf{q} \quad (3.81)$$

Na osnovu relacija (3.77)-(3.80), varijacija $\delta\mathbf{v}$ je:

$$\delta v_1 = \frac{\partial L_n}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \delta \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} -\frac{L_0 + \Delta\bar{u}_x}{L_n} & -\frac{\Delta\bar{u}_y}{L_n} & 0 & \frac{L_0 + \Delta\bar{u}_x}{L_n} & \frac{\Delta\bar{u}_y}{L_n} & 0 \end{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}} \quad (3.82)$$

$$\delta v_2 = \frac{\partial(\bar{u}_3 - \beta)}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \delta \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta\bar{u}_y}{L_n^2} & \frac{L_0 + \Delta\bar{u}_x}{L_n^2} & 1 & \frac{\Delta\bar{u}_y}{L_n^2} & -\frac{L_0 + \Delta\bar{u}_x}{L_n^2} & 0 \end{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}} \quad (3.83)$$

$$\delta v_3 = \frac{\partial(\bar{u}_6 - \beta)}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \delta \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta\bar{u}_y}{L_n^2} & \frac{L_0 + \Delta\bar{u}_x}{L_n^2} & 0 & \frac{\Delta\bar{u}_y}{L_n^2} & -\frac{L_0 + \Delta\bar{u}_x}{L_n^2} & 1 \end{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}} \quad (3.84)$$

odnosno u matičnom obliku:

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{a}_u \delta\bar{\mathbf{u}} \quad (3.85)$$

gde je \mathbf{a}_u matrica transformacije koja u korotacionoj formulaciji glasi:

$$\mathbf{a}_u = \begin{bmatrix} -\frac{L_0 + \Delta\bar{u}_x}{L_n} & -\frac{\Delta\bar{u}_y}{L_n} & 0 & \frac{L_0 + \Delta\bar{u}_x}{L_n} & \frac{\Delta\bar{u}_y}{L_n} & 0 \\ -\frac{\Delta\bar{u}_y}{L_n^2} & \frac{L_0 + \Delta\bar{u}_x}{L_n^2} & 1 & \frac{\Delta\bar{u}_y}{L_n^2} & -\frac{L_0 + \Delta\bar{u}_x}{L_n^2} & 0 \\ -\frac{\Delta\bar{u}_y}{L_n^2} & \frac{L_0 + \Delta\bar{u}_x}{L_n^2} & 0 & \frac{\Delta\bar{u}_y}{L_n^2} & -\frac{L_0 + \Delta\bar{u}_x}{L_n^2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Unošenjem relacije (3.85) u princip virtualnih pomeranja izražen relacijom (3.81), dobija se:

$$\delta\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{p}} = \delta\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{a}_u^T \mathbf{q} \quad (3.87)$$

odakle neposredno sledi, imajući u vidu da ova relacija važi za proizvoljno polje virtualnih pomeranja $\delta\bar{\mathbf{u}}$, da je:

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{a}_u^T \mathbf{q} \quad (3.88)$$

Ova relacija je kontragradientna prethodno dobijenoj relaciji (3.85) [54].

Matrica transformacije kojom se vrši transformacija sila na krajevima elementa lokalnog koordinatnog sistema u sile na krajevima elementa globalnog koordinatnog sistema je ista kao kod linearne teorije i ne zavisi od pomeranja krajeva elementa:

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}_r^T \bar{\mathbf{p}} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{a}_r = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

gde je α ugao koji zaklapaju ose X i x globalnog i lokalnog koordinatnog sistema.

Konačno, veza između sila na krajevima elementa u globalnom koordinatnom sistemu \mathbf{p} , i osnovnih statički nezavisnih veličina elementa \mathbf{q} glasi [20]:

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}_r^T \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{a}_r^T \mathbf{a}_u^T \mathbf{q} = \mathbf{a}_{gu}^T \mathbf{q} \quad (3.91)$$

gde je uvedena smena:

$$\mathbf{a}_{gu} = \mathbf{a}_u \mathbf{a}_r \quad (3.92)$$

Matrica krutosti elementa u lokalnom koordinatnom sistemu može se dobiti na sledeći način [20]:

$$\bar{\mathbf{k}}_t = \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \frac{\partial (\mathbf{a}_u^T \mathbf{q})}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \mathbf{a}_u^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \mathbf{q} + \mathbf{a}_u^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \mathbf{a}_u^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \mathbf{q} + \mathbf{a}_u^T \mathbf{k} \mathbf{a}_u = \bar{\mathbf{k}}_g + \bar{\mathbf{k}}_m \quad (3.93)$$

gde je \mathbf{k} tangenta matrica krutosti u baznom koordinatnom sistemu data izrazima (3.53)-(3.56) kod GCPP algoritma GP elementa, odnosno, izrazima (3.53) i (3.71)-(3.73) kod CCP algoritma ovog elementa. Može se videti da je matrica krutosti $\bar{\mathbf{k}}_t$ data izrazom (3.93) sastavljena iz dva dela: geometrijske matrice krutosti $\bar{\mathbf{k}}_g$ koja nastaje kao posledica zavisnosti matrice transformacije \mathbf{a}_u od pomeranja, i materijalne matrice krutosti $\bar{\mathbf{k}}_m$ koja nastaje transformacijom bazne matrice krutosti u lokalni koordinatni sistem elementa.

Matrica krutosti elementa \mathbf{k}_{el} u globalnom koordinatnom sistemu je [20]:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{el} &= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial (\mathbf{a}_r^T \bar{\mathbf{p}})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{a}_r^T \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{a}_r^T \bar{\mathbf{k}}_t \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_r^T \left(\frac{\partial \mathbf{a}_u^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \mathbf{q} + \mathbf{a}_u^T \mathbf{k} \mathbf{a}_u \right) \mathbf{a}_r \\ \mathbf{k}_{el} &= \mathbf{a}_r^T (\bar{\mathbf{k}}_g + \mathbf{a}_u^T \mathbf{k} \mathbf{a}_u) \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_r^T \bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_r^T \mathbf{a}_u^T \mathbf{k} \mathbf{a}_u \mathbf{a}_r \end{aligned} \quad (3.94)$$

imajući u vidu da je $\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{a}_r$ na osnovu kontragradientne relacije relaciji (3.89).

Dakle, opisanim pristupom je, praktično, problem geometrijske nelinearnosti razdvojen od problema materijalne nelinearnosti koji se definiše \mathbf{q} - \mathbf{v} relacijom

izvedenom u osnovnom sistemu. Ovde prikazana matrica \mathbf{a}_u (3.86) odgovara 2D korotacionoj formulaciji. Za slucaj transformacija u prostoru (3D) matrice postaju znatno komplikovanije zbog prostornog opisivanja rotacije i mogu se naći u radu [27].

Ovaj pristup opisivanja deformacije, takođe, omogućava i primenu različitih teorija kod uzimanja u obzir geometrijske nelinearnosti izborom odgovarajuće matrice transformacije \mathbf{a}_u . Za primenu u zemljotresnom inženjerstvu, često se uvode dodatna pojednostavljenja. Ukoliko se članovi matrice \mathbf{a}_u razvijaju u Tejlorov red i zatim zanemare članovi mnogo manji u odnosu na 1, kao i uticaj transverzalnih komponenti sila \mathbf{q} (q_2 i q_3) na normalnu silu, dobija se matrica \mathbf{a}_u koja odgovara tzv. P- Δ analizi (tačno izvođenje se može naći u [20]):

$$\mathbf{a}_{P\Delta} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{\Delta\bar{u}_y}{L_0} & 0 & 1 & \frac{\Delta\bar{u}_y}{L_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_0} & 1 & 0 & -\frac{1}{L_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_0} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_0} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Ukoliko se zanemare i članovi $\frac{\Delta\bar{u}_y}{L_0}$, tj. uslovi ravnoteže se napišu u nedeformisanoj konfiguraciji, dobija se linearna geometrija gde je matrica \mathbf{a}_u jednaka:

$$\mathbf{a}_{lin} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_0} & 1 & 0 & -\frac{1}{L_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_0} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_0} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

i ne zavisi od pomeranja krajeva elementa. Zbog toga je $\frac{\partial \mathbf{a}_u^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}}$ u izrazu (3.93) nula, pa je i geometrijska matrica krutosti $\bar{\mathbf{k}}_g$ jednaka nuli i $\bar{\mathbf{k}}_t$ postaje jednaka samo materijalnoj matrici krutosti $\bar{\mathbf{k}}_m$.

Ovde će još biti prikazana geometrijska matrica krutosti $\bar{\mathbf{k}}_g = \frac{\partial \mathbf{a}_u^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \mathbf{q}$ za slučaj korotacione 2D formulacije. U tom slučaju, treba odrediti odgovarajuće izvode $\frac{\partial \mathbf{a}_u^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}}$ koji se množe sa osnovnim statički nepoznatim q_1, q_2 i q_3 . Pri tome, izvod $\frac{\partial L_n}{\partial \bar{\mathbf{u}}}$ koji se pojavljuje kod određivanja $\frac{\partial \mathbf{a}_u^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}}$ je prethodno već određen i dat je kod izraza (3.82). Radi preglednijeg prikaza, ovde su razdvojeni delovi matrice krutosti $\bar{\mathbf{k}}_g$ koji se množe sa q_1 (obeležen sa $\bar{\mathbf{k}}_{g1}$), odnosno, sa $\frac{(q_2 + q_3)}{L_n}$ (obeležen sa $\bar{\mathbf{k}}_{g23}$) [20]:

$$\bar{\mathbf{k}}_{g1} = q_1 \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \begin{bmatrix} -\frac{L_0 + \Delta \bar{u}_x}{L_n} \\ \frac{\Delta \bar{u}_y}{L_n} \\ 0 \\ \frac{L_0 + \Delta \bar{u}_x}{L_n} \\ \frac{\Delta \bar{u}_y}{L_n} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{q_1}{L_n} \begin{bmatrix} s^2 & -cs & 0 & -s^2 & cs & 0 \\ -cs & c^2 & 0 & cs & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s^2 & cs & 0 & s^2 & -cs & 0 \\ cs & -c^2 & 0 & -cs & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

gde je: $c = \frac{L_0 + \Delta \bar{u}_x}{L_n}$, a $s = \frac{\Delta \bar{u}_y}{L_n}$.

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{k}}_{g23} = q_2 \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \begin{bmatrix} -\frac{\Delta \bar{u}_y}{L_n^2} \\ L_0 + \Delta \bar{u}_x \\ \frac{L_n^2}{1} \\ \frac{\Delta \bar{u}_y}{L_n^2} \\ L_0 + \Delta \bar{u}_x \\ -\frac{L_n^2}{L_n^2} \\ 0 \end{bmatrix} + q_3 \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \begin{bmatrix} -\frac{\Delta \bar{u}_y}{L_n^2} \\ L_0 + \Delta \bar{u}_x \\ \frac{L_n^2}{0} \\ \frac{\Delta \bar{u}_y}{L_n^2} \\ L_0 + \Delta \bar{u}_x \\ -\frac{L_n^2}{L_n^2} \\ 1 \end{bmatrix} = \\
\frac{q_2 + q_3}{L_n} \cdot \frac{1}{L_n} \begin{bmatrix} -2cs & c^2 - s^2 & 0 & 2cs & -c^2 + s^2 & 0 \\ c^2 - s^2 & 2cs & 0 & -c^2 + s^2 & -2cs & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2cs & -c^2 + s^2 & 0 & -2cs & c^2 - s^2 & 0 \\ -c^2 + s^2 & -2cs & 0 & c^2 - s^2 & 2cs & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.98}$$

3.4.1. KALIBRACIJA PARAMETARA GP ELEMENTA

Parametri GP elementa zavise od karakteristika materijala i dimenzija poprečnog preseka koji treba modelirati. Od usvojenih vrednosti zavisi tačnost dobijenih rezultata. Stoga je potrebno izvršiti kalibraciju parametara GP elementa, i to: funkcije tečenja, parametara β , δ , H_{iso} i H_{kin} .

Budući da funkcija tečenja f ograničava oblast elastičnog ponašanja, odnosno predstavlja granicu između elastične i neelastične oblasti, za ovu funkciju je najpogodnije usvojiti izraz kojim se što tačnije opisuje inicijalna površ plastifikacije (tj. površ kada započinje plastifikacija preseka). Pri tome, treba voditi računa i o tome kakav je prelaz elastičnog odgovora u neelastičan, tj. da li je on npr. dosta "brz" kao što je to slučaj kod savijanja čeličnog I preseka oko jače ose inercije ili je on postepen kao što je to npr. slučaj kod savijanja čeličnog I preseka oko slabije ose inercije.

U ovoj tezi je korišćena funkcija tečenja u obliku polinoma:

$$f(p, m_z, m_y) = \sum_i k_{1i} p^{k_{2i}} m_z^{k_{3i}} m_y^{k_{4i}} - c - H_{iso} \alpha \quad (3.99)$$

gde su $k_{1i}, k_{2i}, k_{3i}, k_{4i}$ koeficijenti polinoma (ni u jednom članu polinoma k_{2i}, k_{3i}, k_{4i} nisu svi istovremeno jednaki 0), $p=(N-a_p)/N_p$, $m_z=(M_z-a_z)/M_z$, $m_y=(M_y-a_y)/M_y$. N_p je aksijalna plastična nosivost preseka, M_{pz} je plastični moment nosivosti pri savijanju oko z (jače) ose inercije preseka, a M_{py} je plastični moment nosivosti pri savijanju oko y (slabije) ose inercije preseka. a_p, a_z i a_y su komponente vektora koji određuje položaj centra površi tečenja u N - M_z - M_y prostoru. Promenom ovog vektora tokom opterećenja uzima se u obzir kinematičko ojačanje materijala. Parametar c određuje veličinu površi tečenja i za vrednost $c = 1.0$ ova površ treba što tačnije da aproksimira tačnu površ tečenja dobijenu analizom pomoću fiber poprečnog preseka. Vrednost parametra c ($c < 1.0$) treba usvojiti, kao što je već rečeno, tako da se približno aproksimira inicijalna površ plastifikacije. Parametar β se, zatim, određuje kao razlika $\beta=(1.0-c)$. Parametar δ kojim se opisuje brzina dostizanja asimptote takođe treba odrediti kalibracijom pomoću fiber poprečnog preseka. Većim vrednostima δ odgovara brže dostizanje asimptote.

Parametri ojačanja materijala H_{iso} i H_{kin} su u ovoj tezi određeni kalibracijom pomoću fiber elementa. Kao što će biti prikazano kroz naredne numeričke primere, ovako određeni parametri daju rezultate visoke tačnosti i u ostalim opštijim slučajevima opterećenja.

3.5. NUMERIČKI PRIMERI

Adekvatnost novog GP elementa za nelinearnu analizu okvirnih konstrukcija je ispitana kroz niz numeričkih primera. U njima je odgovor ovog elementa (obeležnog sa GP) upoređen sa odgovorom elastično-idealno plastičnog elementa koncentrisane plastičnosti (obeležnog sa EPP) koji je formulisan prema principima klasične teorije plastičnosti i sa implementiranim return mapping algoritmom [55], i fiber elementom [20] (obeležnog FIBER) čije

rešenje je uzeto kao referentna vrednost. Simulacije su urađene korišćenjem FEDEASLab-a [34].

3.5.1. KONZOLNI STUB

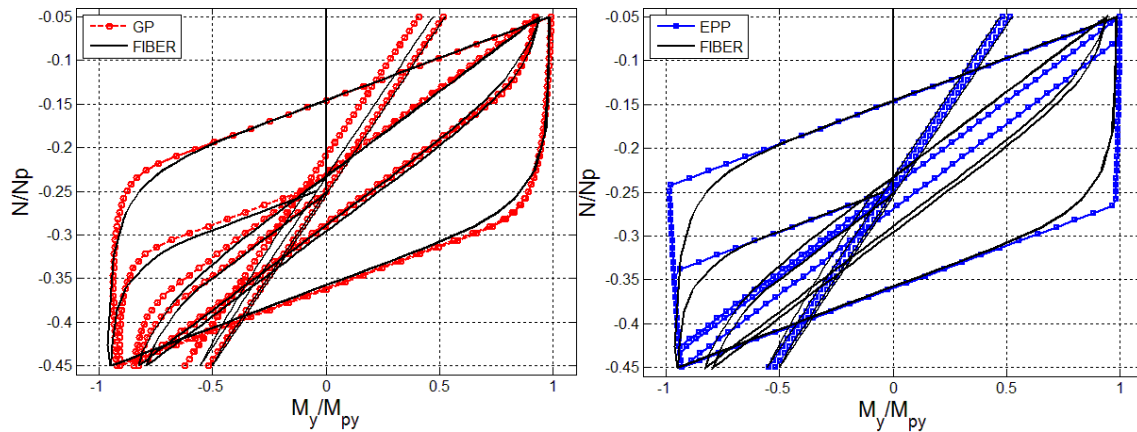
Prvi numerički primer je konzolni čelični stub prethodno opisan u delu 2.2.2, slika 2.13. Radi prezentovanja implementiranih poboljšanja GP elementa, u ovom radu su prikazani samo rezultati testova sa oznakom B6 i B8_7 sa promenljivom aksijalnom silom u intervalu od $-0.05N_p$ do $-0.45N_p$ i savijanjem oko jedne (test B6), odnosno obe ose inercije preseka (test B8_7).

Odgovor homogenog čeličnog stuba od elastično-idealno plastičnog materijala modeliranog fiber elementom raspodeljene plastičnosti sa diskretzacijom poprečnog preseka pomoću 288 tačaka integracije i četiri Gauss-Lobatto tačke integracije duž ose elementa, upoređen je sa odgovorima elemenata koncentrisane plastičnosti - GP i EPP elemenata. Za N - M_z - M_y funkciju tečenja ovih elemenata, usvojena je sledeća funkcija:

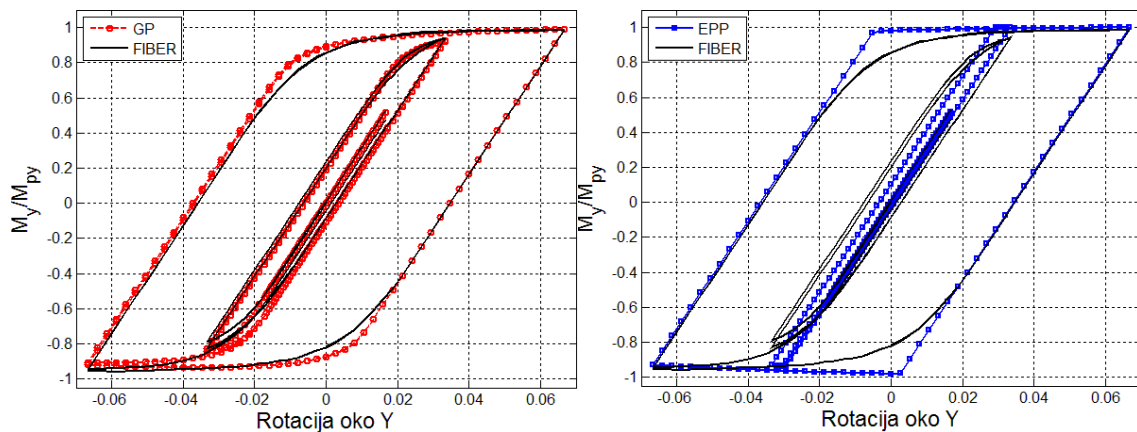
$$f(p, m_z, m_y) = 1.15p^2 + m_z^2 + m_y^4 + 3.67p^2m_z^2 + 3p^6m_y^2 + 4.65m_z^4m_y^2 - c \quad (3.100)$$

gde su značenja promenljivih p , m_z , m_y prethodno objašnjena u delu 3.4.1. Promenljiva c određuje veličinu površi tečenja.

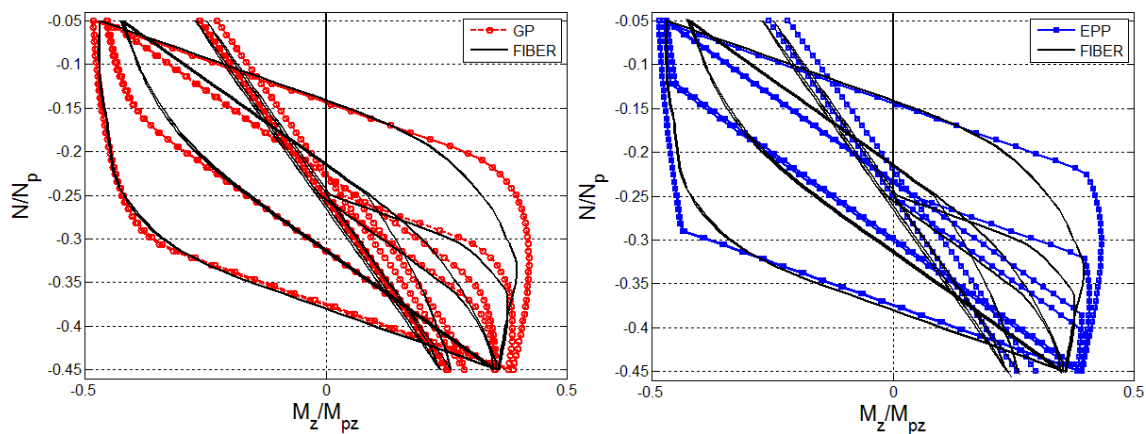
Koeficijenti jednačine (3.100) su određeni kalibracijom tako da, za vrednost $c=1.0$, odgovaraju površi tečenja čeličnog US I profila W12x30 [5]. Stoga je kod EPP elementa vrednost koeficijenta c uzeta kao 1.0, dok kod GP elementa ova vrednost iznosi 0.3. Dodatni parametri GP modela su: $\delta=0.15$, $\beta=0.70$ i $H_{iso}=H_{kin}=0$. Za test B6 su rezultati prikazani na slikama 3.15-3.16, i na slikama 3.17-3.20 za test B8_7.



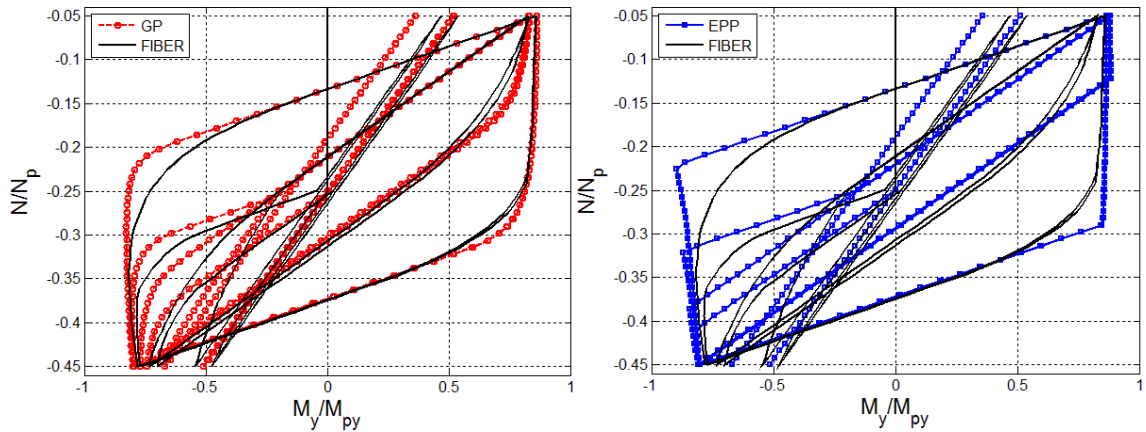
Slika 3.15: Test B6: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za (a) GP i FIBER; (b) EPP i FIBER elemente



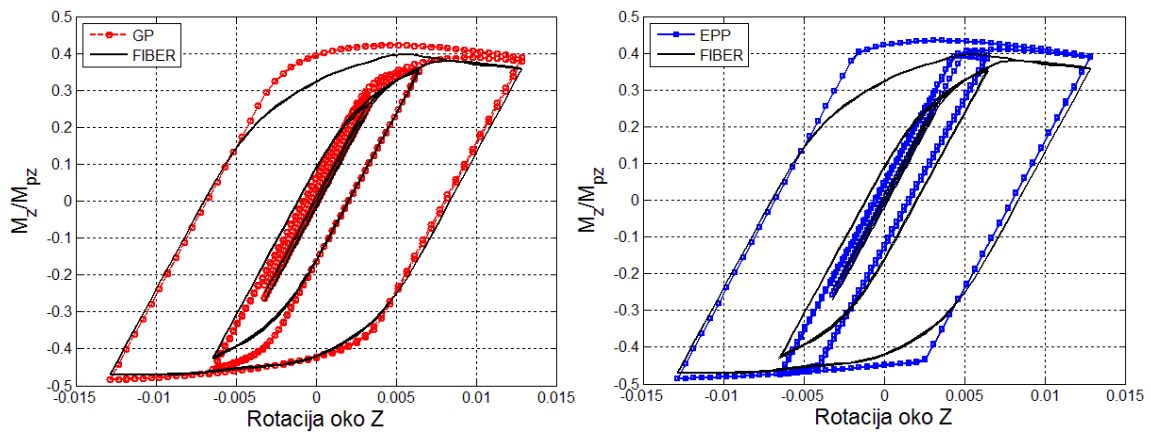
Slika 3.16: Test B6: Normirani moment –rotacija dijagram za (a) GP i FIBER; (b) EPP i FIBER elemente



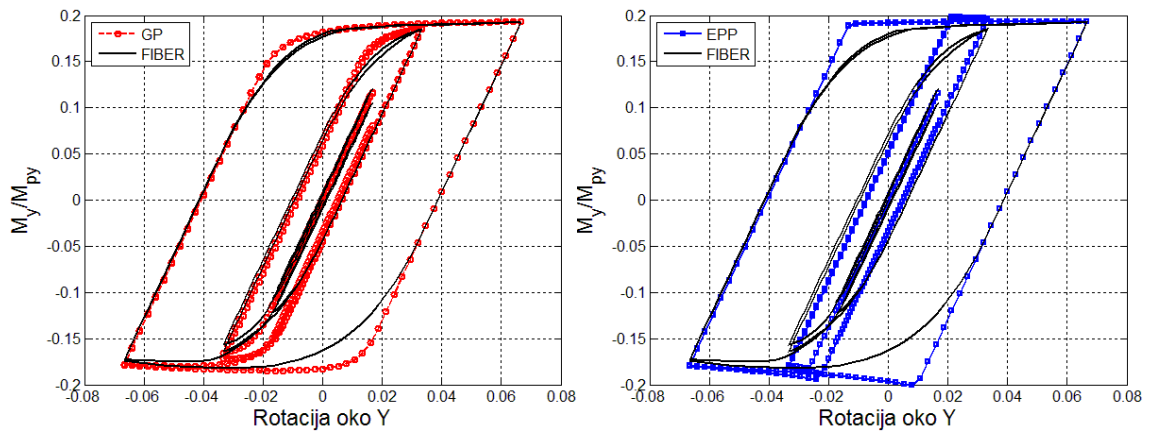
Slika 3.17: Test B8_7: Normirani moment oko Z ose – normirana aksijalna sila dijagram za (a) GP i FIBER; (b) EPP i FIBER elemente



Slika 3.18: Test B8_7: Normirani moment oko Y ose – normirana aksijalna sila dijagram za (a) GP i FIBER; (b) EPP i FIBER elemente



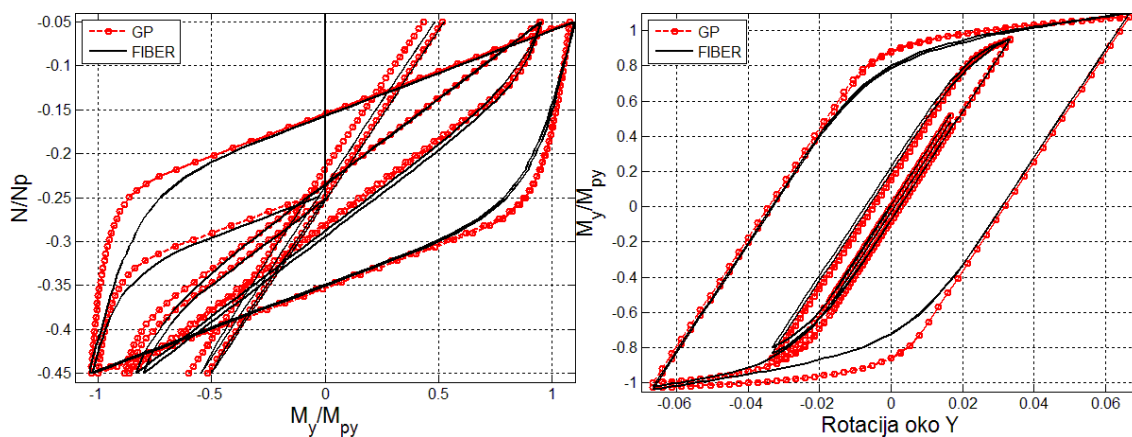
Slika 3.19: Test B8_7: Normirani moment oko ose Z- rotacija dijagram za (a) GP i FIBER; (b) EPP i FIBER elemente



Slika 3.20: Test B8_7: Normirani moment oko ose Y- rotacija dijagram za (a) GP i FIBER; (b) EPP i FIBER elemente

Kako bi se prikazala mogućnost GP elementa da predstavi ponašanje materijala sa ojačanjem, test B6 je ponovo urađen sa materijalom kome odgovara kinematičko ojačanje od 3% kod FIBER modela. Parametar H_{kin} GP modela ima

vrednost od 0.08, dok su sve ostale vrednosti iste kao u testu B6 bez ojačanja. Rezultati su prikazani na slici 3.21. Rešenje EPP modela ovde nije prikazano, budući da ovaj element nema mogućnost opisivanja ojačanja materijala.



Slika 3.21: Test B6 sa ojačanjem – GP i FIBER elementi: (a) normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram; (b) normirani moment –rotacija dijagram
Trebalo napomenuti da je vreme trajanja numeričke analize konzolnog stuba, aproksimativno, u odnosu 1:1.15:21, redom, za EPP, GP i FIBER elemente.

3.5.2. PRIMER EL-ZANATY OKVIRA

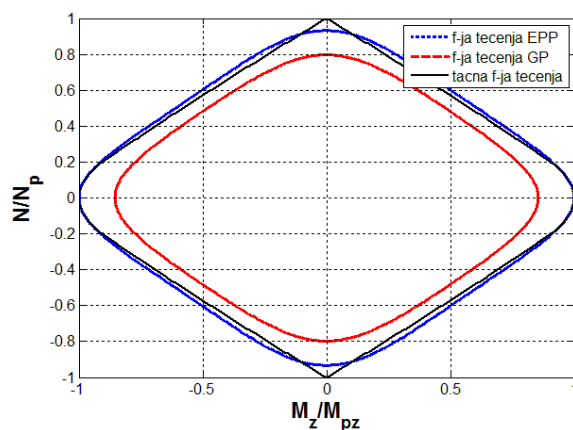
Drugi primer je jednospratni okvir prethodno objašnjen i analiziran u poglavlju 2, slika 2.25 (a). Efekat rezidualnih napona sada nije uzet u obzir budući da EPP element nema mogućnost opisivanja ovog uticaja. Kod GP elementa se ovaj uticaj može obuhvatiti promenom veličine elastičnog domena (tj. funkcije tečenja) [56].

Geometrijske nelinearnosti su uzete u obzir primenom korotacione formulacije [36]. U svakom od tri modela (EPP, GP i FIBER), svaki element konstrukcije je predstavljen sa po jednim konačnim elementom. Materijal je modeliran kao elastičan-idealno plastičan.

Isti izraz za funkciju tečenja kao u prethodnom primeru konzolnog stuba je usvojen. Za slučaj savijanja oko jače ose inercije, ova funkcija tečenja se svodi na sledeći oblik:

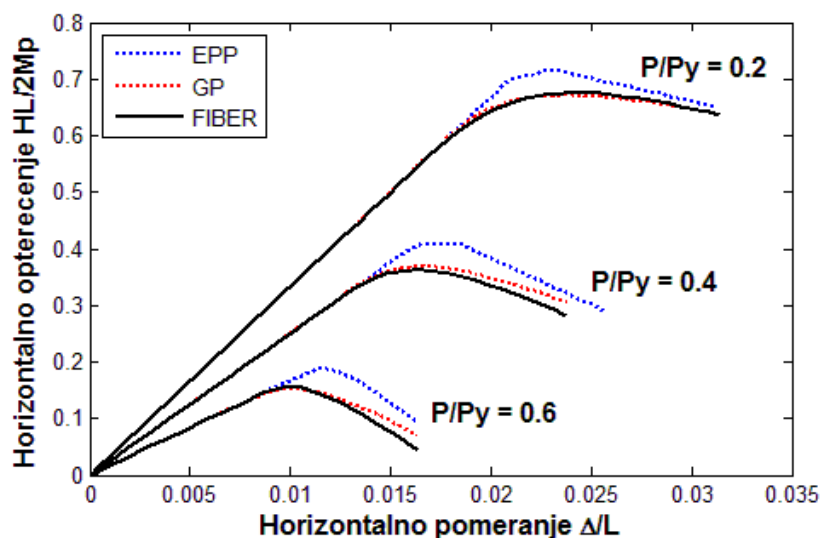
$$f(p, m_z) = 1.15p^2 + m_z^2 + 3.67p^2m_z^2 - c \quad (3.101)$$

gde je značenje promenljivih p i m_z ranije definisano. Usvojena vrednost parametra c kod EPP modela iznosi 1.0, a kod GP modela 0.73. Vrednosti dodatnih parametara GP modela su: $\delta=0.1$, $\beta=0.27$. Numerički tačna površ tečenja, prikazana na slici 3.22 u poređenju sa dve aproksimativne površi tečenja elemenata koncentrisane plastičnosti, EPP i GP, je dobijena analizom fiber poprečnog preseka diskretizovanog sa 288 tačaka integracije.



Slika 3.22: Poređenje usvojene $N-M_z$ krive tečenja za EPP i GP elemente sa tačnom krivom tečenja za čelični W8x31 US I profil

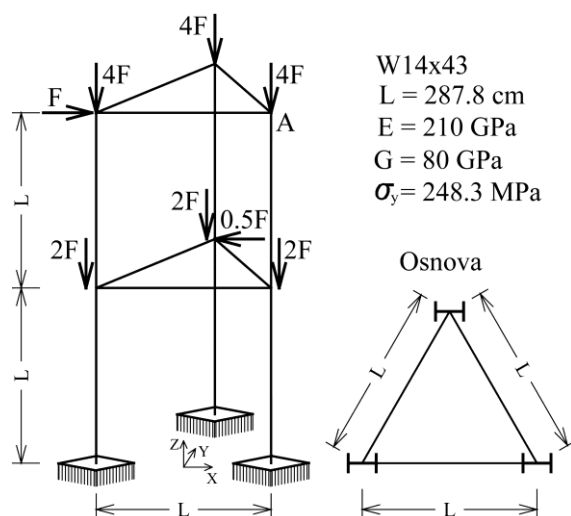
Rezultati za savijanje oko jače ose inercije preseka stubova, za tri nivoa opterećenja (20%, 40% i 60% od granične vertikalne nosivosti stubova) su prikazani na slici 3.23. Oni pokazuju da je odgovor GP elementa, zahvaljujući njegovoj sposobnosti da opiše postepenu plastifikaciju poprečnog preseka, mnogo bliže numerički tačnom FIBER rešenju u odnosu na odgovor EPP elementa.



Slika 3.23: Sila-pomeranje dijagrami El-Zanaty okvira za savijanje oko jače ose inercije preseka

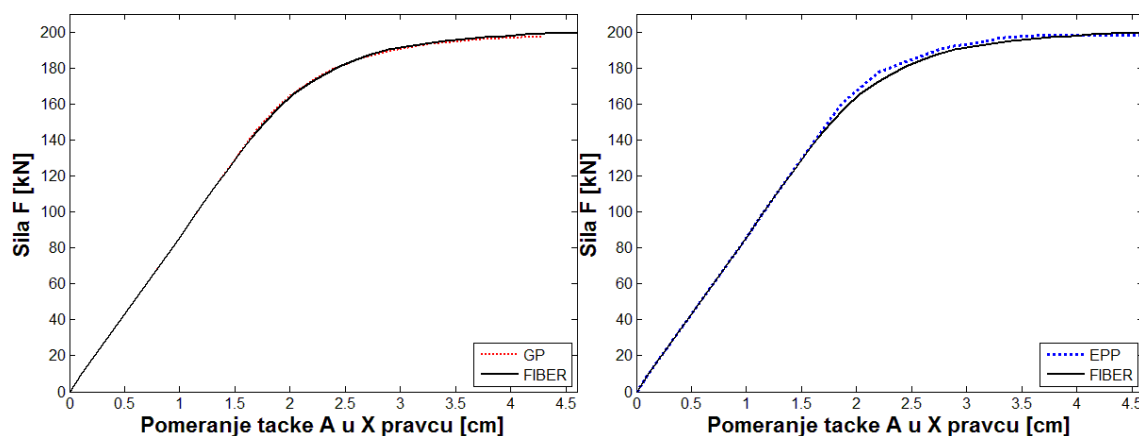
3.5.3. PRIMER DVOSPRATNOG OKVIRA

Treći primer je dvospratni okvir prikazan na slici 3.24 koji je prethodno analizirao Vogel [57]. Svi stubovi i grede ovog okvira su istog poprečnog preseka: W14x43 US I profila. Okvir je izložen dejstvu opterećenja sa slike 3.24 koje je postepeno srazmerno povećavano. Model materijala je elastičan-idealno plastičan. Nelinearna geometrija i uticaj rezidualnih napona nisu uzeti u obzir. Svaki od elemenata konstrukcije je modeliran jednim konačnim elementom u sva tri modela.



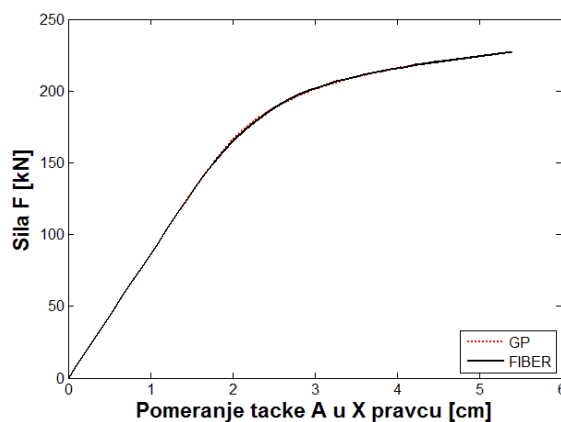
Slika 3.24: 3D ram

Kod dva modela sa elementima koncentrisane plastičnosti, usvojen je isti oblik funkcije tečenja dat izrazom (3.100). Parametar c je jednak 0.7 kod GP modela, odnosno, 1.0 kod EPP modela. Dodatni parametri GP modela su: $\delta=0.02$, $\beta=0.30$ i $H_{iso}=H_{kin}=0$. Dijagram sila-pomeranje tačke A u X pravcu prikazan je na slici 3.25. Kao što se može videti sa ove slike, u datom primeru je i odgovor EPP modela odličan i leži vrlo blizu numerički tačnog FIBER rešenja. Sa druge strane, odgovor GP modela se praktično poklapa sa numerički tačnim rešenjem.



Slika 3.25: Sila – pomeranje dijagram za Vogel-ov ram – bez ojačanja materijala za: (a) GP i FIBER; (b) EPP i FIBER elemente

Da bi se analizirao uticaj ojačanja materijala, ponovo je analiziran posmatrani ram. Pretpostavljen je materijal sa izotropnim ojačanjem od 3% kod FIBER modela. Parametar izotropnog ojačanja H_{iso} kod GP modela je 0.03 , dok su ostale vrednosti parametara usvojene kao u analizi bez efekta ojačanja materijala.

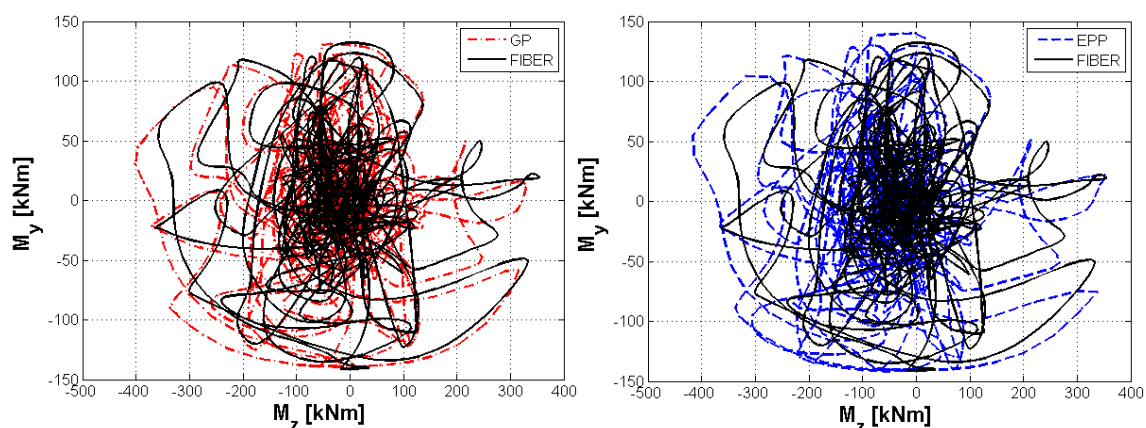


Slika 3.26: Sila – pomeranje dijagram za Vogel-ov ram – sa izotropnim ojačanjem materijala za GP i FIBER elemente

Rezultati prikazani na slici 3.26 ponovo pokazuju izuzetno poklapanje odgovora GP i FIBER modela.

3.5.4. PRIMER ČETVOROSPRTNOG OKVIRA

Naredni primer se odnosi na nelinearnu 3D dinamičku analizu četvorospratnog okvira prethodno analiziranog u poglavlju 2 (slika 2.23) gde su objašnjeni i detalji analize. U tri posmatrana modela (EPP, GP i FIBER) stubovi prvog sprata su modelirani odgovarajućim nelinearnim elementima istog imena, dok je ostatak konstrukcije linearno-elastičan. Usvojeni parametri i funkcija tečenja su isti kao u analizi konzolnog stuba bez ojačanja materijala u delu 3.4.1.



Slika 3.27: Putanja momenata savijanja za presek u uklještenju stuba 1 za: (a) GP i FIBER; (b) EPP i FIBER elemente

Tabela 3.1: Ekstremne vrednosti pomeranja tačke A kod nelinearne dinamičke analize 3D rama usled ElCentro zemljotresa sa 0.9565 g PGA

		EPP	GP	FIBER	Greška EPP (%)	Greška GP (%)
dX (cm)	Max	53.39	49.74	48.75	9.52	2.03
	Min	-23.60	-24.15	-24.01	1.71	0.58
dY (cm)	Max	37.34	36.01	37.18	0.43	3.15
	Min	-45.88	-45.00	-45.07	1.80	0.16

Rezultati analize su prikazani na slici 3.27 i u tabeli 3.1. Promena momenta savijanja elementa 1 kod uklještenja je prikazana na slici 3.27. Kao što je već

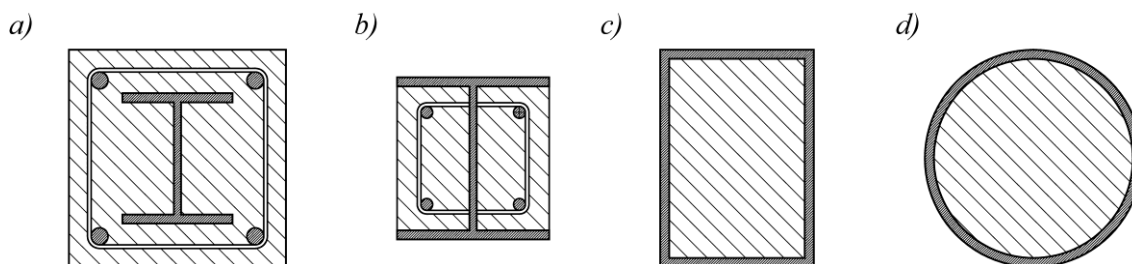
rečeno u poglavlju 2, zbog velikog momenta koji se javlja usled zemljotresnog opterećenja, u stubu postoji značajna varijacija aksijalne sile pritiska: ona se kreće u rasponu od 9% do 48% od aksijalne nosivosti stuba. Stoga je primer interesantan kako bi se testiralo ponašanje GP elementa u ovakvim uslovima značajne promene aksijalne sile. Na osnovu rezultata sa slike 3.27 mogu se jasno videti sličnosti u odgovoru EPP i GP elementa, budući da su oba elementa zasnovana na istim principima teorije plastičnosti. Međutim, zahvaljujući sposobnosti GP elementa da opiše postepenu plastifikaciju poprečnog preseka, odgovor ovog modela je bliži referentnom odgovoru FIBER modela. Iz istog razloga, su i greške u globalnom odgovoru okvira koje su date u tabeli 3.1 za ekstremne vrednosti pomeranja tačke A vrha zgrade u X i Y pravcu, manje kod GP modela.

3.6. PRIMENA GP ELEMENTA U ANALIZI SPREGNUTIH STUBOVA

Spregnute konstrukcije se danas sve više koriste u građevinarstvu zbog brojnih prednosti koje poseduju u odnosu na klasične armirano-betonske i čelične konstrukcije. Takođe, u razvijenim zemljama poput Japana i Sjedinjenih Američkih Država sve češća je i upotreba tzv. kompozitnih (hibridnih) konstrukcija kod kojih se kombinuju armirano-betonski i/ili čelični elementi konstrukcije sa spregnutim elementima, najčešće od čelika i betona. U ovom slučaju svoju veliku primenu su našli spregnuti stubovi od čelika i betona.

Postoje dva osnovna tipa poprečnih preseka spregnutih stubova od čelika i betona (slika 3.28), i to su:

- poprečni preseci sa ubetoniranim čeličnim profilom (potpuno ili delimično), eng. SRC stubovi od steel-reinforced concrete,
- poprečni preseci sa šupljim čeličnim profilom kružnog ili pravougaonog poprečnog preseka ispunjenim betonom (eng. CFT stubovi od concrete-filled steel tube).



Slika 3.28: Osnovni tipovi spregnutih stubova: (a) i (b) sa potpuno ili delimično ubetoniranim čeličnim profilom - SRC; (c) i (d) sa šupljim pravougaonim ili kružnim čeličnim profilom ispunjenim betonom - CFT

Sve veća upotreba CFT stubova u sklopu okvirnih konstrukcija, kod ojačanja stubova postojećih armirano-betonskih konstrukcija, kao i kod stubova mostovskih konstrukcija je posledica brojnih prednosti koje ovi stubovi poseduju [58,59]. Kombinacijom čelika i betona dobija se presek velike nosivosti kako pri pritisku (najvećim delom zahvaljujući velikoj nosivosti betona pri pritisku), tako i pri zatezanju, kada je efektivan prvenstveno čelični deo preseka. Takođe, dodatno, betonsko jezgro koje se nalazi unutar šupljeg čeličnog profila sprečava lokalno izbočavanje čeličnog dela preseka, čime se ostvaruje znatno veća nosivost, ali i povećava deformabilnost što je vrlo značajno u zemljotresnom inženjerstvu. Sa druge strane, čelični presek deluje poput uzengija, tj. uteže beton koji se nalazi unutar čeličnog profila, te se beton nalazi u višeoosnom naponskom stanju što povećava njegovu čvrstoću pri pritisku. Ovo je naročito izraženo kod kružnog poprečnog preseka, dok je efekat utezanja kod pravougaonih CFT stubova manji. CFT stubove karakteriše velika krutost i nosivost zahvaljujući i povoljnom rasporedu čeličnog i betonskog dela preseka budući da se čelični deo preseka nalazi po obodu čime se postiže njegova maksimalna iskorišćenost pri zatezanju i pri savijanju. S obzirom na znatno veći modul elastičnosti čelika u odnosu na beton, na ovaj način se postiže i velika krutost preseka, jer su čelični delovi preseka maksimalno udaljeni od težišta čime se ostvaruje najveći doprinos momentu inercije preseka. Takođe, bitna karakteristika CFT stubova je i to da pri cikličnom opterećenju odgovor ovih stubova obrazuje pun histerezis kome odgovara značajna disipacija energije, što je od velikog značaja u zemljotresnom

inženjerstvu. U pogledu izvođenja konstrukcija, primenom CFT stubova je, takođe, moguće postići značajne uštede i u utrošku materijala i rada i u brzini izvođenja, budući da čelični presek istovremeno služi i kao oplata. Kod CFT stubova pravougaonog poprečnog preseka, veze sa čeličnim gredama su relativno jednostavne, dok su ove veze nešto komplikovanije kod CFT stubova kružnog poprečnog preseka.

Do danas je izveden veliki broj eksperimenata širom sveta, a naročito u Japanu i Sjedinjenim Američkim Državama u kojima je ispitivano ponašanje elemenata i čitavih konstrukcija sa CFT stubovima pri različitim vrstama opterećenja [58]. Kroz ove eksperimente je potvrđeno nelinearno ponašanje CFT stubova usled brojnih efekata poput pojave pukotina u betonu, tečenja čeličnog dela preseka, prisustva rezidualnih napona u čeliku, efekta utezanja betona, viskoznih deformacija betona – tečenja i skupljanja, proklizavanja na spoju čeličnog i betonskog dela preseka itd. Međutim, za razliku od brojnih eksperimenatalnih podataka koji postoje, razvoju odgovarajućih numeričkih modela za opisivanje ponašanja CFT stubova je posvećeno mnogo manje pažnje. Obično se, u nelinearnoj analizi konstrukcija, za detaljno modeliranje veza CFT stubova sa gredama koriste 3D konačni (solid) elementi, što je, u pogledu cene i efikasnosti, neprihvatljivo za modeliranje čitave konstrukcije. Zato se linijski konačni elementi i dalje prvenstveno koriste kod modela čitave konstrukcije, i to najčešće fiber elementi o kojima je bilo više reči u prvom poglavlju [60] ili modeli koncentrisane plastičnosti sa dve površi o kojima je takođe bilo reči u uvodnom delu [11,12]. Ovde će biti prikazano kako se uz odgovarajuće modifikacije novog GP elementa, on može uspešno primeniti kod nelinearne analize CFT stubova.

Oblast primene GP elementa kod modeliranja CFT stubova obuhvata CFT stubove koji su potpuno ispunjeni betonom. Pretpostavlja se da ne postoje moždanici na spoju čeličnog i betonskog dela i da nema proklizavanja na spoju ova dva materijala. Vremenske deformacije betona se zanemaruju, budući da su

eksperimenti pokazali da one najčešće nemaju veliki uticaj na ponašanje CFT stubova, kao ni lokalno izbočavanje čeličnog preseka budući da se, zbog prisustva betona, ono dešava dosta kasnije (pri znatno višim opterećenjima) u odnosu na čisto čelični presek ili je potpuno sprečeno do dostizanja granične nosivosti. Rezidualni naponi se uzimaju u obzir indirektno, kroz odgovarajući izbor površi tečenja.

3.6.1. ODREĐIVANJE KRUTOSTI CFT PRESEKA

Tačnost opisivanja ponašanja CFT stubova zavisi od usvojene krutosti preseka. Budući da je presek sastavljen od dva različita materijala, potrebno je na odgovarajući način uzeti u obzir doprinose svakog od njih.

Aksijalna krutost $(EA)_{CFT}$ se aproksimira zbirom aksijalne krutosti svake od komponenti – čeličnog i betonskog dela preseka:

$$(EA)_{CFT} = E_s \cdot A_s + E_c \cdot A_c \quad (3.102)$$

gde su E_s i E_c redom moduli elastičnosti čelika i betona, a A_s i A_c su, površine čeličnog, odnosno betonskog dela poprečnog preseka.

Za sračunavanje krutosti na savijanje CFT preseka postoji više predloga. Jedan od prvih je predlog koji su dali Tomii i Sakino [61] gde se krutost na savijanje sračunava kao zbir krutosti na savijanje čeličnog preseka i redukovane krutosti na savijanje betonskog dela preseka, zbog ispugalosti zategnutog betona:

$$(EI)_{CFT} = E_s \cdot I_s + \beta \cdot E_c \cdot I_c \quad (3.103)$$

Faktor redukcije β se određuje prema izrazu:

$$\beta = 0.311 + 0.619 \cdot \frac{P}{P_0} + 0.457 \cdot \left(\frac{P}{P_0} \right)^2 \quad (3.104)$$

i zavisi od nivoa aksijalne sile P ; P_0 je aksijalna nosivost preseka pri pritisku:

$$P_0 = A_s \cdot f_y + A_c \cdot f_c' \quad (3.105)$$

gde su, redom f_y i f_c' napon tečenja čelika, odnosno, čvrstoća pri pritisku betona.

Postoje i brojni drugi predlozi za sračunavanje faktora redukcije β [62]. U analizi koja je urađena u okviru ove teze, usvojena je konstantna vrednost $\beta=0.6$ koju predlaže EC4 [63].

Torziona krutost se, za male uticaje torzije, dovoljno tačno može sračunati kao torziona krutost samo čeličnog dela preseka [11], tj.:

$$(GI_t)_{CFT} = G_s \cdot I_{t,s} \quad (3.106)$$

3.6.2. FUNKCIJA TEČENJA ZA CFT PRESEK

Za N - M_z - M_y funkciju tečenja GP elementa usvojen je izraz:

$$f(p, m_z, m_y) = c_1 \cdot (m_y^2 + m_z^2) + c_2 \cdot p^2 + c_3 \cdot (m_y^2 \cdot p^2 + m_z^2 \cdot p^2) + c_4 \cdot m_y^2 \cdot m_z^2 - c \quad (3.107)$$

Ovaj izraz su, za vrednost $c=1.0$, predložili Hajjar i Gourley [64] za CFT stubove pravougaonog poprečnog preseka, a dobijen je kalibracijom pomoću fiber preseka. Koeficijenti c_1 , c_2 , c_3 i c_4 zavise od odnosa visine čeličnog preseka i njegove debljine zida (D/t) i od odnosa čvrstoće betona pri pritisku i napona tečenja čelika (f_c'/f_y) [64]:

$$c_1 = 1.08 - 0.00265 \cdot x + 0.0000230 \cdot x^2 - 1.13 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 + 0.374 \cdot y - 1.30 \cdot y^2 - 0.0419 \cdot y^3 - 0.0691 \cdot x \cdot y + 0.000234 \cdot x^2 \cdot y + 0.0754 \cdot x \cdot y^2 \quad (3.108)$$

$$c_2 = 0.628 + 0.0259 \cdot x - 0.000367 \cdot x^2 + 1.99 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 + 4.50 \cdot y - 14.9 \cdot y^2 + 22.4 \cdot y^3 + 0.164 \cdot x \cdot y - 0.000756 \cdot x^2 \cdot y - 0.126 \cdot x \cdot y^2 \quad (3.109)$$

$$c_3 = 0.420 + 0.0892 \cdot x - 0.00122 \cdot x^2 + 5.13 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 + 4.90 \cdot y - 16.5 \cdot y^2 + 16.2 \cdot y^3 - 0.165 \cdot x \cdot y + 0.000713 \cdot x^2 \cdot y + 0.120 \cdot x \cdot y^2 \quad (3.110)$$

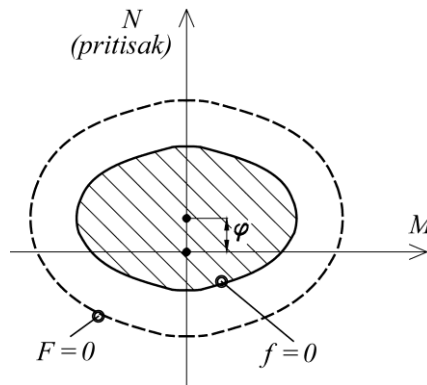
$$c_4 = 0.346 + 0.0912 \cdot x - 0.000127 \cdot x^2 + 4.98 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 0.391 \cdot y + 4.55 \cdot y^2 - 10.3 \cdot y^3 - 0.0592 \cdot x \cdot y + 0.000245 \cdot x^2 \cdot y + 0.0659 \cdot x \cdot y^2 \quad (3.111)$$

gde je $x = D/t$, a $y = f_c'/f_y$.

U izrazu (3.107) p , m_y i m_z imaju slično značenje kao što je to objašnjeno u poglavlju 3.5, s tim što je, zbog asimetričnosti površi tečenja ona sada postavljena ekscentrično [64], tj. (slika 3.29):

$$p = \frac{P - \varphi \cdot P_0}{P_0}, m_y = \frac{M_y}{M_{y0}}, m_z = \frac{M_z}{M_{z0}} \quad (3.112)$$

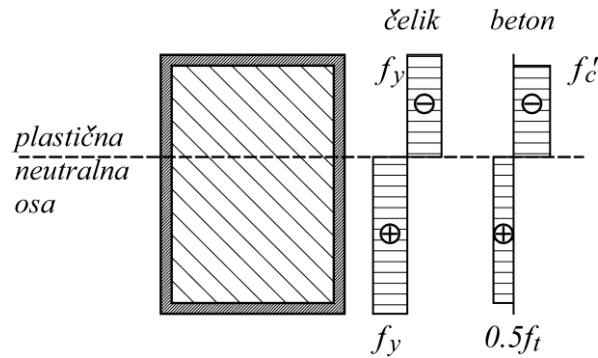
gde su M_{y0} i M_{z0} granični momenti nosivosti CFT preseka na savijanje ($N=0$) određeni iz uslova da je čitav presek plastifikovan, pri čemu se pritisnuta površina betona uzima u punom iznosu, dok se površina zategnutog betona uzima sa faktorom 0.5 [64], slika 3.30. Čvrstoća betona pri zatezanju je uzeta kao $f_t = 0.623 \sqrt{f_c'}$ (u MPa).



Slika 3.29: Šematski prikaz ekscentričnog položaja površi tečenja u 2D slučaju kod CFT stubova

Veličina φ je određena prema izrazu [64]:

$$\varphi = \frac{0.5 \cdot (A_c \cdot f_c' - A_c \cdot f_t)}{P_0} \quad (3.113)$$



Slika 3.30: Raspored napona potpuno plastifikovanog preseka kod određivanja graničnog momenta nosivosti M_0

Veličina površi tečenja je određena parametrom c u izrazu (3.107). Za slučaj monotonog opterećenja, za vrednost parametra c je usvojena vrednost:

$$c = R_{LS,init}^2 = \left(\frac{M_{yld}}{M_0} - 0.3 \cdot \frac{P_{c0}}{P_0} \right)^2 \quad (3.114)$$

gde je $R_{LS,init}$ radijus inicijalne površi opterećenja kod modela sa loading i bounding površima predstavljеним u radu [12]. M_{yld} je granični moment nosivosti čeličnog profila, a P_{c0} je aksijalna nosivost pri pritisku betonskog dela preseka $P_{c0} = A_c \cdot f'_c$.

Za slučaj cikličnog opterećenja, elastična oblast ponašanja se smanjuje (funkcija tečenja se skuplja). Stoga se bolji odgovor GP elementa može dobiti usvajanjem manje vrednosti za parameter c nego za slučaj monotonog opterećenja. Analizom je utvrđeno da je adekvatna vrednost za parameter c :

$$c = \left(\frac{R_{LS,init} + R_{LS,fin}}{2} \right)^2 \quad (3.115)$$

gde $R_{LS,fin}$ konačni radijus elastične oblasti, za koji je usvojena vrednost od 0.1 koju su predložili Hajjar i Gourley [12]. Uticaj parametra c na odgovor GP elementa je prikazan u jednom od narednih numeričkih primera.

Parametar β GP modela je određen kao razlika $\beta = (1.0 - c)$.

3.6.3. PARAMETRI OJAČANJA

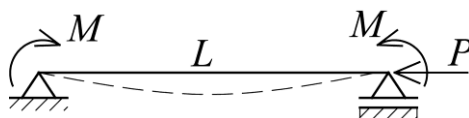
Za adekvatno modeliranje ponašanja CFT stubova od značaja su i sledeće dve karakteristike CFT stubova.

- Bauschinger-ov efekat je, najvećim delom, posledica ponašanja čeličnog dela preseka [11]. Ovaj efekat se opisuje mehanizmom kinematičkog ojačanja. Kod GP elementa se on zadaje preko parametra H_{kin} .
- U slučaju cikličnog opterećenja, čvrstoća CFT stubova opada usled pojave pukotina u betonu i lokalnog izbočavanja čeličnog dela preseka [11]. Ovo za posledicu ima smanjenje dimenzija granične površi. Kod GP elementa, ova pojava je aproksimirana izotropnim ojačanjem, tj. omekšanjem zadavanjem negativne vrednosti za parametar H_{iso} .

3.6.4. VERIFIKACIJA GP MODELA KOD ANALIZE CFT STUBOVA

Sa prethodno prikazanim modifikacijama i parametrima GP elementa, izvršena je verifikacija ovog modela kroz poređenje rezultata dobijenih numeričkim simulacijama uz modeliranje CFT stubova GP konačnim elementom, i rezultata eksperimenata iz literature. Numeričke simulacije su urađene korišćenjem FEDEASLab Matlab toolbox-a [34].

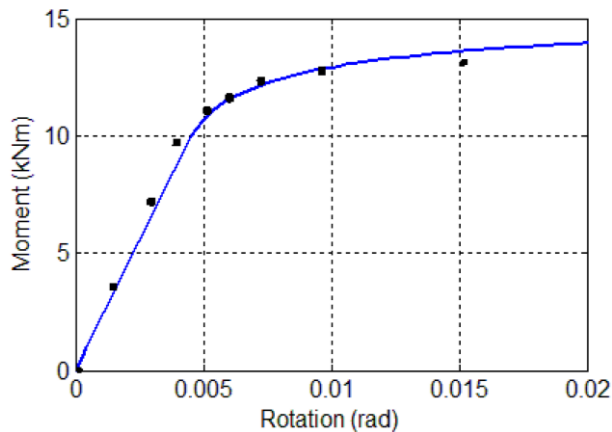
Prva grupa testova se odnosi na eksperimente koje su izveli Tomii i Sakino [65]. U analiziranim testovima, prosta greda $L=300mm$ je opterećena konstantnom aksijalnom silom pritiska i monotono rastućim momentima na krajevima (slika 3.31). Podaci o poprečnom preseku, opterećenju i materijalu su dati u tabeli 3.2. Na slikama 3.32-3.38 su prikazani dobijeni moment - rotacija dijagrami za testove sa oznakama II-2, II-3, II-5, II-6, IV-3, IV-5 i IV-6. Eksperimentalni rezultati su preuzeti iz rada [12]. Rezultati dobijeni korišćenjem GP elementa su prikazani punom plavom linijom. Ojačanje čelika je iznosilo $\sim 1\%$ i u numeričkoj analizi je modelirano kinematičkim ojačanjem sa parametrom $H_{kin}=0.006$.



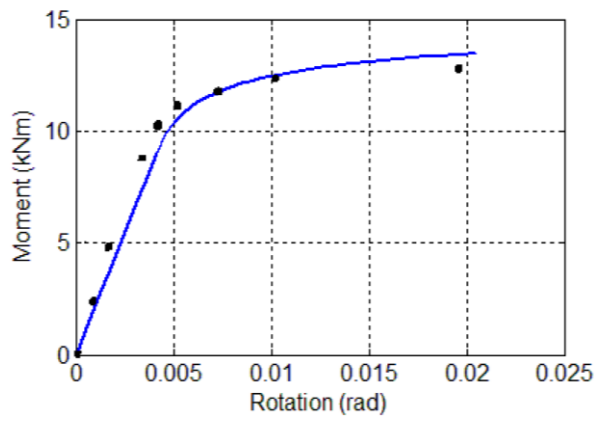
Slika 3.31: Šematski prikaz nosača i opterećenja u testovima Tomii i Sakino [65]

Tabela 3.2: Podaci o CFT testovima Tomii i Sakino [65]

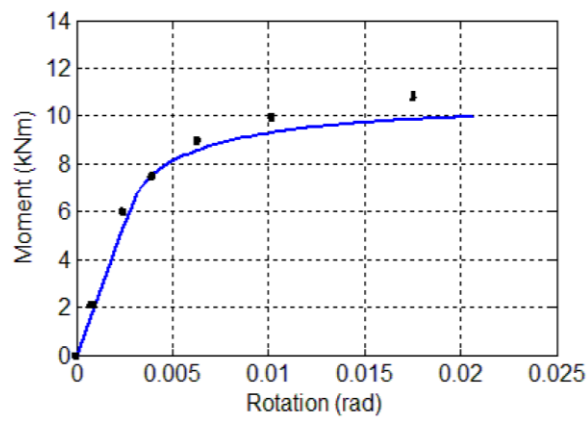
Test	Dimenzije (mm)	D/t	f'_c (MPa)	f_y (MPa)	P/P ₀
II-2	100x100x2.27	44.0	25.9	339.0	0.18
II-3	100x100x2.20	44.0	25.9	339.0	0.26
II-5	100x100x2.22	44.0	25.9	289.0	0.48
II-6	100x100x2.22	44.0	25.9	289.0	0.57
IV-3	100x100x4.25	24.0	22.4	288.0	0.29
IV-5	100x100x4.25	24.0	23.8	285.0	0.48
IV-6	100x100x4.26	24.0	23.8	288.0	0.57



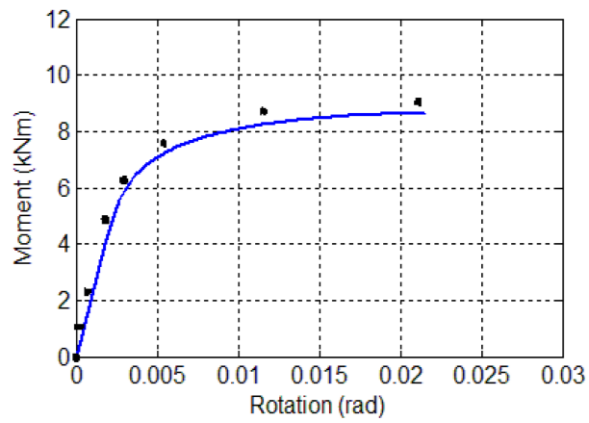
Slika 3.32: Tomii i Sakino test II-2



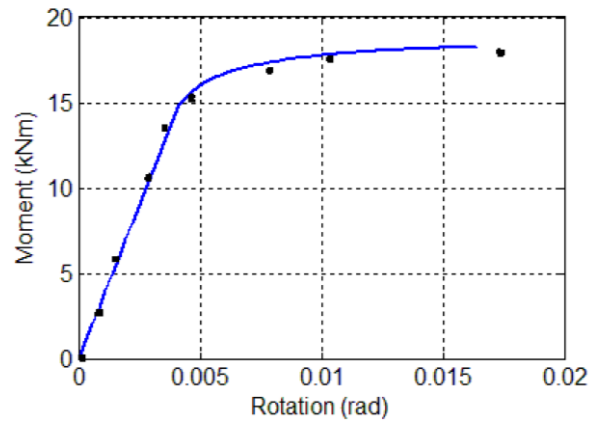
Slika 3.33: Tomii i Sakino test II-3



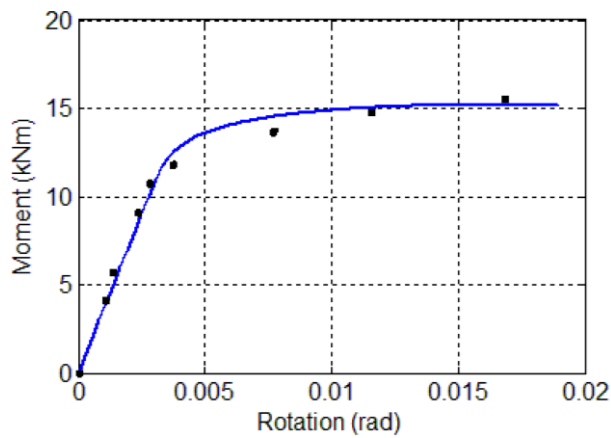
Slika 3.34: Tomii i Sakino test II-5



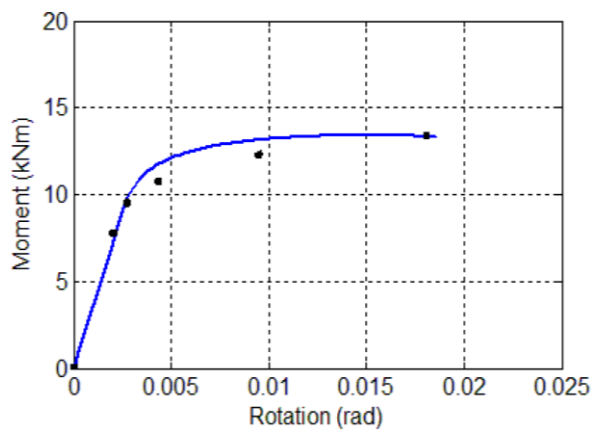
Slika 3.35: Tomii i Sakino test II-6



Slika 3.36: Tomii i Sakino test IV-3



Slika 3.37: Tomii i Sakino test IV-5



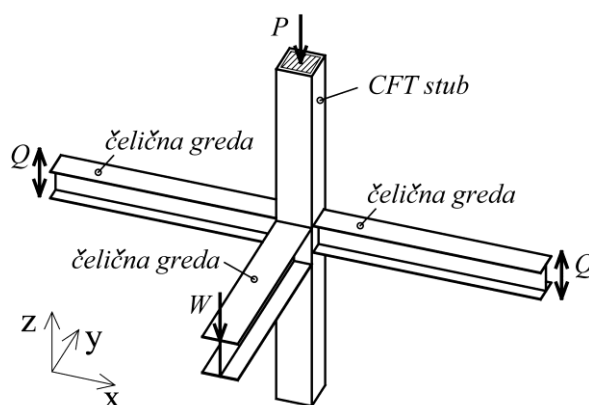
Slika 3.38: Tomii i Sakino test IV-6

Kao što se može videti, postoji dobra korelacija numerički i eksperimentalno dobijenih vrednosti, kako u pogledu inicijalne krutosti (iako je ona kod GP modela određena na osnovu vrlo jednostavnog izraza predloženog EC4 [63]),

tako i u pogledu dostizanja graničnih vrednosti momenata za sve nivoe aksijalne sile pritiska.

Drugi primer je 3D analiza ponašanja dela okvirne konstrukcije sa CFT stubovima. Kawaguchi i Morino [66] su eksperimentalno analizirali elasto-plastično ponašanje 3D okvira sa CFT stubovima. Testirani su delovi okvira sastavljeni od CFT stuba i čeličnih greda od I profila upravni na stub. Primer koji je ovde numerički analiziran odgovara uzorku I-15C20 (slika 3.39). CFT stub je izložen dejstvu konstantne sile pritiska u iznosu od $0.15P_0$, a na gredu postavljenu u y-z ravni, na slobodnom kraju, deluje konstantna sila $W=21$ kN što simulira uticaj stalnog opterećenja. Na krajeve greda postavljene u x-z ravni deluju, asimetrično, sile Q , čime se simulira delovanje zemljotresnog opterećenja. Sile se povećavaju do dostizanja vrednosti rotacije R u iznosu od 0.005, 0.01, 0.02 i 0.03, pri čemu su za svaki nivo vrednosti R izvedena dva puna ciklusa. Rotacija R se određuje na osnovu pomeranja tačaka A (vertikalno pomeranje D_1) i B (vertikalno pomeranje D_2) čiji je položaj i rastojanje L prikazano na slici 3.40(a). Rotacija R se sračunava prema relaciji:

$$R = \frac{D_1 + D_2}{L} \quad (3.116)$$



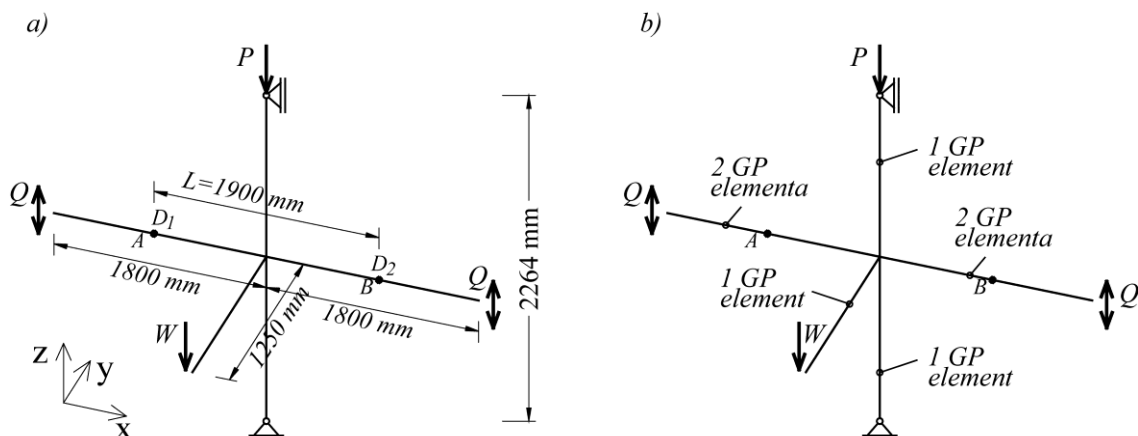
Slika 3.39: 3D model unutrašnjeg stuba okvira

Usled ovakvog opterećenja, CFT stub je izložen dejstvu cikličnog dvoosnog savijanja uz prisustvo aksijalne sile pritiska. Dimenzije čeličnog profila CFT stuba su 125 x 125 x 5.74 mm. Izmerena čvrstoća betona pri pritisku je

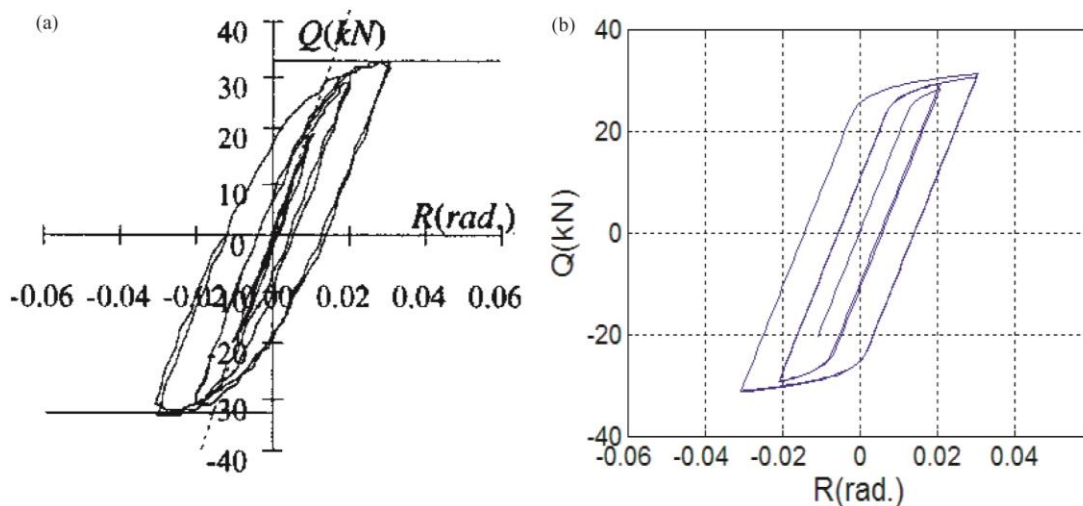
$f'_c=20$ MPa, a napon tečenja čelika je $f_y=395$ MPa. Čelične grede su sledećih karakteristika: flanše su 125 x 9 mm, rebro 231 x 6 mm, a napon tečenja čelika $f_y=400$ MPa. Više podataka se može naći u radu [66]. Elementi su tako dimenzionisani da u ovom primeru dolazi do iscrpljenja nosivosti CFT stuba, dok čelične grede ostaju unutar elastične oblasti ponašanja.

Numerički model sa graničnim uslovima je prikazan na slici 3.40(a). Svaki od delova CFT stuba iznad i ispod zajedničkog čvora je modeliran jednim GP elementom. Grede u x-z ravni su modelirane sa po dva GP elementa, levo i desno od zajedničkog čvora, dok je greda u y-z ravni modelirana jednim GP elementom (slika 3.40(b)). Parametri GP elementa za čelične grede su: površ tečenja je data izrazom (3.100), $c=0.8$, $\delta=0.1$, $\beta=0.2$, $H_{iso}=0.02$ i $H_{kin}=0$, mada ovi podaci nisu od značaja budući da se grede ponašaju elastično. U testu je ojačanje čeličnog dela preseka CFT stubova iznosilo 1%, što je kod GP modela uzeto u obzir parametrom kinematičkog ojačanja $H_{kin}=0.06$. Malo skupljanje granične površi je apriksimirano sledećom vrednosti parametra izotropnog ojačanja $H_{iso}=-0.05$.

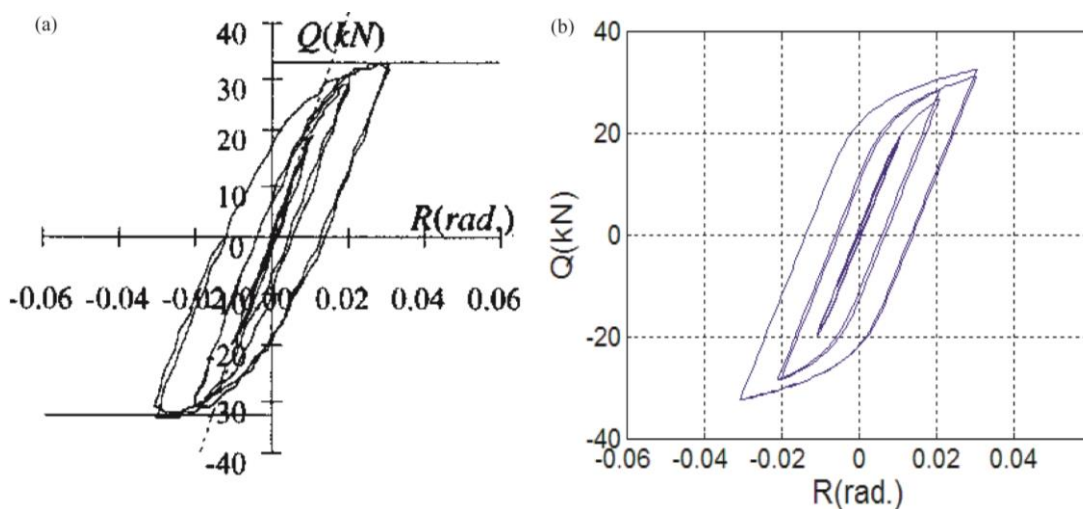
Na slici 3.41 su prikazani eksperimentalni i numerički rezultati za sila-rotacija (Q - R) relaciju. Eksperimentalni podaci su preuzeti iz rada [66]. Kao što se može videti, GP model dosta dobro predstavlja čitavu histerezisnu krivu. Inicijalna krutost, kao i konačna čvrstoća preseka su takođe određene sa visokom tačnošću. Međutim, kao što je prethodno napomenuto, pri cikličnom opterećenju CFT stuba smanjuje se zona elastičnog ponašanja što za posledicu, u ovom slučaju, ima sporije dostizanje granične vrednosti Q . Stoga se tačniji odgovor GP elementa može dobiti usvajanjem predložene manje vrednosti parametra c date izrazom (3.115). Ovo je ilustrovano na slici 3.42.



Slika 3.40: (a) Numerički model i dimenzije; (b) Broj upotrebljenih konačnih elemenata u modelu

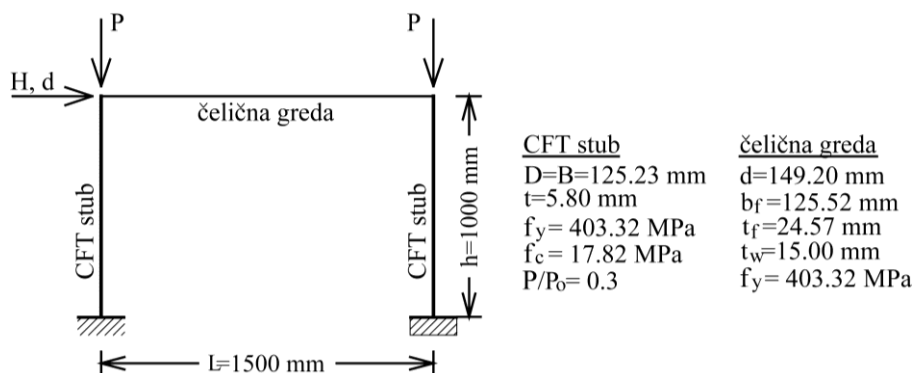


Slika 3.41: Q-R dijagrami: (a) Eksperimentalni rezultati; (b) Rezultat numeričke simulacije sa c prema izrazu (3.114)

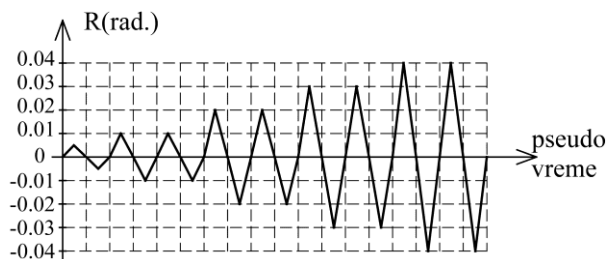


Slika 3.42: Q-R dijagrami: (a) Eksperimentalni rezultati; (b) Rezultat numeričke simulacije sa c prema izrazu (3.115)

Poslednji primer je okvir prikazan na slici 3.43 koji je eksperimentalno analizirao Kawaguchi sa saradnicima [67]. Nosač se sastoji od dva kvadratna CFT stuba i čelične grede I profila. Ram je najpre izložen dejstvu gravitacionog opterećenja, a zatim cikličnom lateralnom opterećenju preko zadatih pomeranja. Način opterećenja stuba je prikazan na slici 3.44 gde je prikazana istorija ugla rotacije ose stuba R ($R=d/h$). Korišćenjem GP elementa numerički je analiziran ram sa oznakom 21SCC30. U ovom testu je čelična greda dimenzionisana tako da ostane u oblasti elastičnog ponašanja do kraja testa, dok se plastične deformacije javljaju u stubovima. Nelinearna geometrija je uzeta u obzir preko korotacione formulacije [20]. Ojačanje materijala čelika stuba je 1%. Parametri GP modela su isti kao u prethodnom primeru.



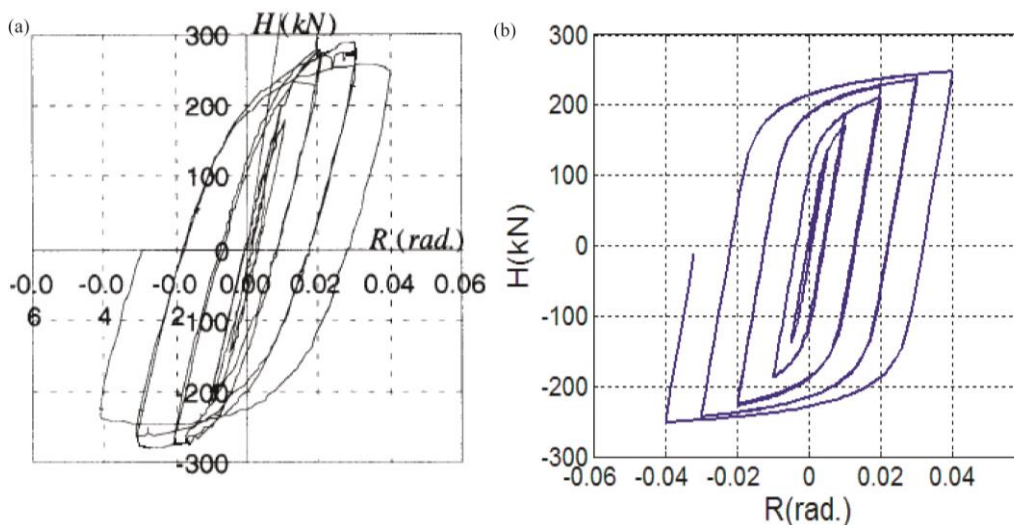
Slika 3.43: Okvir sa CFT stubovima



Slika 3.44: Istorija rotacije ose štapa

Na slici 3.45(a) su prikazani rezultati eksperimenta preuzeti iz rada [67]. Rezultati numeričke simulacije su prikazani na slici 3.45(b). Prikazan je dijagram zavisnosti horizontalne sile H od ugla rotacije ose stuba R . Generalno gledano, GP model dobro predstavlja eksperimentalno ponašanje okvira. Granična nosivost i inicijalna krutost su određeni sa visokom tačnošću.

Dobijena histerezisna kriva je nešto manje tačnosti zbog brže postepene redukcije krutosti CFT stuba nego što je to opisano GP modelom. Ovo je, u manjoj meri, prisutno i u prethodnom primeru na slici 3.42. Za očekivati je da bi se bolje opisivanje ovog efekta postiglo uključivanjem parametara mehanike oštećenja u formulaciju GP elementa. Međutim, uprkos ovim odstupanjima, generalno, rezultati GP modela su prihvatljive tačnosti i u ovom primeru.



Slika 3.45: H-R relacija za Kawaguchi okvir [67]:

(a) Eksperimentalni rezultat; (b) Rezultat numeričke simulacije

Konačno, na osnovu svih prikazanih rezultata, može se zaključiti da se GP model uspešno može primeniti i kod modeliranja elemenata i konstrukcija sa CFT stubovima. Izborom odgovarajućih parametara, prvenstveno krive tečenja, model se može primeniti i kod analize SRC stubova, što je jedna od tema koja će u budućnosti biti obrađena. Takođe, dodavanjem parametara mehanike oštećenja za opisivanje ispucalosti betona i degradacije krutosti, odgovor GP elementa bi se dodatno poboljšao. To je drugi pravac daljeg unapređenja ovog elementa.

4. POGLAVLJE

REZIME

4.1. REZIME

Predmet ove disertacije je efikasna nelinearna analiza okvirnih konstrukcija linijskim konačnim elementima sa težištem na modeliranju materijalnih nelinearnosti, dok se geometrijske nelinearnosti uzimaju u obzir poznatim metodama. Analizirana su i unapređena dva linijska konačna elementa: fiber element i element koncentrisane plastičnosti i napisan je sopstveni kompjuterski program kojim su elementi implementirani u postojeći program za analizu konstrukcija – FEDEASLab.

Ostvareni su sledeći ciljevi u okviru ovog rada:

- Optimizacijom integracije poprečnog preseka čeličnih i armirano-betonskih elemenata ostvareno je poboljšanje efikasnosti fiber elementa kako pri cikličnom pseudo-statičkom opterećenju, tako i pri nelinearnoj dinamičkoj analizi pojedinih delova i čitave konstrukcije.
- Formulirana su praktična pravila i definisane jasne smernice za diskretizaciju poprečnog preseka čeličnog I profila i pravougaonog armirano-betonskog preseka, u zavisnosti od vrste analize koja se sprovodi i željene tačnosti.
- Razvijen je novi konačni elementa iz grupe elemenata koncentrisane plastičnosti koji prevazilazi ograničenja postojećeg elasto-plastičnog elementa kao što su nemogućnost opisivanja postepene plastifikacije poprečnog preseka i opisivanja ponašanja materijala sa ojačanjem. Pri tome, element je zadržao svoju veliku kompjutersku efikasnost koja je osnovna prednost elemenata koncentrisane plastičnosti. Za određivanje stanja elementa razvijena su dva algoritma prema “general closest point

projection” i “convex cutting plane” return mapping algoritmima i analizirana je zavisnost konvergencije od implementiranog algoritma.

- Verifikovane su kroz niz numeričkih primera mogućnosti novo-razvijenog elementa za modeliranje okvirnih konstrukcija pri delovanju statičkog i dinamičkog opterećenja.
- Specijalna pažnja je posvećena mogućnosti primene novog GP elementa za analizu CFT stubova spregnutih konstrukcija koje karakteriše visok stepen nelinearnosti ponašanja.

4.2. ZAKLJUČAK

Savremeni trend u analizi konstrukcija podrazumeva sve veću primenu nelinearne analize u svakodnevnoj inženjerskoj praksi. Pri tome je veoma značajno postići dobar balans i kompromis između tačnosti usvojenog numeričkog modela i postignute kompjuterske efikasnosti. U ovoj tezi su predložena i prikazana dva moguća pristupa analizi okvirnih konstrukcija pomoću linijskih konačnih elemenata: primenom fiber elementa sa optimizovanom integracijom poprečnog preseka, i primenom novog GP konačnog elementa koncentrisane plastičnosti. Oba ova pristupa daju, za primenu u praksi, rezultate dovoljne tačnosti, a istovremeno imaju i visok stepen kompjuterske efikasnosti.

4.3. MOGUĆNOSTI DALJEG RAZVOJA PRIKAZANIH ELEMENATA

Neki od mogućih pravaca budućeg istraživanja su:

- Parametarska analiza integracije još nekih oblika poprečnog preseka: šuplji čelični i AB preseci kružnog i pravougaonog oblika, puni kružni AB preseci. Definisane odgovarajućih pravila za izbor broja i položaja tačaka integracije.

- Analiza ponašanja fiber elementa sa malim brojem tačaka integracije poprečnog preseka u kombinaciji sa materijalima koji opisuju oštećenje materijala ili viskozne deformacije.
- Analiza ponašanja GP elementa za drugačije oblike granične funkcije F od oblika usvojenog u ovoj tezi, kao i za promenljive vrednosti parametara δ i β tokom analize. Definisane izraza funkcije tečenja f za različite vrste čeličnih, armirano-betonskih i spregnutih poprečnih preseka.
- Proširenje formulacije GP elementa uvođenjem parametara mehanike oštećenja radi adekvatnog opisivanja ponašanja armirano-betonskih i spregnutih elemenata konstrukcije.
- Proširenje formulacije GP elementa radi adekvatnog opisivanja viskoznih deformacija prisutnih kod armirano-betonskih i spregnutih elemenata konstrukcije.
- Proširenje formulacije GP elementa radi uzimanja u obzir N-M-V interakcije, tj. interakcije normalne sile, momenta savijanja i smičuće sile.

5. LITERATURA

1. Clough RW, Benuska KL, Wilson EL Inelastic Earthquake Response of Tall Buildings. In: Third World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 1965. pp 68-69
2. Giberson MF (1967) The Response of Nonlinear Multistory Structures Subjected to Earthquake Excitation. Ph.D. Dissertation, California Institute of Technology, Pasadena,
3. Clough RW, Johnston S Effect of Stiffness Degradation on Earthquake Ductility Requirements. In: Japan Earthquake Engineering Symposium, Tokyo, 1966. pp 195-198
4. Takeda T, Sozen MA, Nielsen N (1970) Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes. Journal of Structural Division, ASCE 96 (12):2557-2573
5. Orbison JG, McGuire W, Abel JF (1982) Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 33 (1-3):557-573. doi:Doi: 10.1016/0045-7825(82)90122-0
6. Hilmy SI, Abel JF (1985) Material and geometric nonlinear dynamic analysis of steel frames using computer graphics. Computers & Structures 21 (4):825-840. doi:Doi: 10.1016/0045-7949(85)90159-2
7. Powell GH, Chen PF-S (1986) 3D Beam-Column Element with Generalized Plastic Hinges. Journal of Engineering Mechanics 112 (7):627-641. doi:10.1061/(asce)0733-9399(1986)112:7(627)
8. Kitipornchai S, Zhu K, Xiang Y, Al-Bermani FGA (1991) Single-equation yield surfaces for monosymmetric and asymmetric sections. Engineering Structures 13 (4):366-370. doi:Doi: 10.1016/0141-0296(91)90023-6
9. Skallerud B (1993) Yield surface formulations for eccentrically loaded planar bolted or welded connections. Computers & Structures 48 (5):811-818. doi:Doi: 10.1016/0045-7949(93)90502-5
10. Dafalias YF, Popov EP (1977) Cyclic loading for materials with a vanishing elastic region. Nuclear Engineering and Design 41 (2):293-302. doi:Doi: 10.1016/0029-5493(77)90117-0
11. Hajjar JF, Gourley BC (1997) A cyclic nonlinear model for concrete-filled tubes. I: Formulation. Journal of Structural Engineering 123 (6):736
12. Hajjar JF, Gourley BC (1997) A cyclic nonlinear model for concrete-filled tubes. II: Verification. Journal of Structural Engineering 123 (6):745
13. El-Tawil S, Deierlein GG (2001) NONLINEAR ANALYSIS OF MIXED STEEL-CONCRETE FRAMES. I: ELEMENT FORMULATION. Journal of Structural Engineering 127 (6):647
14. El-Tawil S, Deierlein GG (2001) NONLINEAR ANALYSIS OF MIXED STEEL-CONCRETE FRAMES. II: IMPLEMENTATION AND VERIFICATION. Journal of Structural Engineering 127 (6):656
15. Jin J, El-Tawil S (2003) Inelastic Cyclic Model for Steel Braces. Journal of Engineering Mechanics, ASCE 129 (5):548-557

16. Lai S-S, Will GT, Otani S (1984) Model for Inelastic Biaxial Bending of Concrete Members. *Journal of Structural Engineering* 110 (11):2563-2584
17. El-Tawil S, Deierlein GG (1998) Stress-Resultant Plasticity for Frame Structures. *Journal of Engineering Mechanics* 124 (12):1360
18. Sumarac D, Petraskovic Z (2012) Hysteretic Behavior of Rectangular Tube (Box) Sections Based on Preisach Model. *Archive of Applied Mechanics Special Issue*. doi:10.1007/s00419-012-0663-z
19. Sumarac D, Stosic S (1996) Preisach Model for Cyclic Bending of Elastoplastic Beams. *European Journal of Mechanics A Solids* 15 (1):155-172
20. Filippou FC, Fenves GL (2004) Methods of Analysis for Earthquake-Resistant Structures. In: Bozorgnia Y, Bertero VV (eds) *Earthquake Engineering: From Engineering Seismology to Performance-Based Engineering*. CRC Press,
21. Neuenhofer A, Filippou FC (1997) Evaluation of Nonlinear Frame Finite Element Models. *Journal of Structural Engineering, ASCE* 123 (7):958-966
22. Spacone E (1994) Flexibility-based finite element models for the nonlinear static and dynamic analysis of concrete frame structures. Ph.D., University of California at Berkeley, Berkeley, CA
23. Ciampi V, Carlesimo L A Nonlinear Beam Element for Seismic Analysis of Structures. In: 8th European Conference on Earthquake Engineering, Lisbon, 1986. *Laboratorio Nacional de Engenharia Civil*, pp 6.3/73-76.73/80
24. Spacone E, Filippou FC, Taucer FF (1996) Fiber Beam-Column Model for Nonlinear Analysis of RC Frames: I: Formulation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 25 (7):711-725
25. Conte JP, Barbato M, Spacone E (2004) Finite element response sensitivity analysis using force-based frame models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 59 (13):1781-1820
26. Spacone E, Filippou FC, Taucer FF (1996) Fiber Beam-Column Model for Nonlinear Analysis of RC Frames: II: Applications. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 25 (7):727-742
27. de Souza RM (2000) Force-Based Finite Element for Large Displacement Inelastic Analysis of Frames. Ph.D., University of California, Berkeley,
28. Berry MP (2006) Performance Modeling Strategies for Modern Reinforced Concrete Bridge Columns. Ph.D, University of Washington, Seattle,
29. Jiang Y, Saiidi M (1990) Four-Spring Element for Cyclic Response of R/C Columns. *Journal of Structural Engineering* 116 (4):1018-1029. doi:10.1061/(asce)0733-9445(1990)116:4(1018)
30. Campbell SD (1994) Nonlinear Elements for Three Dimensional Frame Analysis. Ph.D., University of California, Berkeley,
31. Majorana C, Odorizzi S, Vitaliani R (1982) Shortened quadrature rules for finite elements. *Advances in Engineering Software* 4 (2):52-57. doi:10.1016/s0141-1195(82)80053-3
32. Low SS, Moehle JP (1987) Experimental Study of Reinforced Concrete Columns Subjected to Multi-Axial Cyclic Loading. *Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley,*

33. Bousias SN, Verzeletti G, Fardis MN, Gutierrez E (1995) Load-Path Effects in Column Biaxial Bending and Axial Force. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 121 (5):596-605
34. Filippou FC, Constantinides M (2004) FEDEASLab Getting Started Guide and Simulation Examples (trans: Engineering DoCaE). University of California, Berkeley,
35. El-Zanaty MH, Murray DW, Bjorhovde R (1980) Inelastic behavior of multistory steel frames. Univ. of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada
36. Crisfield MA (1991) Non-linear finite element analysis of solids and structures. John Wiley & Sons, West Sussex
37. Ziemian RD, McGuire W, Deierlein GG (1992) Inelastic limit states design. Part I: Planar frame studies. *J Struct Engrg, ASCE* 118 (2532-2549)
38. Attalla MR, Deierlein GG, McGuire W (1994) Spread of plasticity: quasi-plastic-hinge approach. *J Struct Engrg, ASCE* 120:2451-2473
39. Kim S-E, Choi S-H (2005) Practical second-order inelastic analysis for three-dimensional steel frames subjected to distributed load. *Thin-Walled Structures* 43 (1):135-160. doi:DOI: 10.1016/j.tws.2004.09.001
40. Mazzoni S, McKenna F, Scott MH, Fenves GL, al. e (2009) Open System for Earthquake Engineering Simulation User Comand-Language Manual. Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley. <http://opensees.berkeley.edu/OpenSees/manuals/usermanual/index.html>.
41. Taucer FF, Spacone E, Filippou FC (1991) A Fiber Beam-Column Element for Seismic Analysis of Reinforced Concrete Structures. Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley,
42. Blondet JM, Clough RW, Mahin SA (1980) Evaluation of a Shaking Table Test Program on Response Behavior of a Two Story Reinforced Concrete Frame. Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley,
43. Filippou FC, d' Ambrisi A, Issa A (1992) Nonlinear Static and Dynamic Analysis of RC Subassemblages. Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley,
44. Ranzo G, Petrangeli M, Pinto PE (1999) Vertical oscillations due to axial-bending coupling during seismic response of RC bridge piers. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 28 (12):1685-1704
45. Lubliner J (1991) A simple model of generalized plasticity. *International Journal of Solids and Structures* 28 (6):769-778. doi:10.1016/0020-7683(91)90155-9
46. Lubliner J, Taylor RL, Auricchio F (1993) A New Model of Generalized Plasticity and Its Numerical Implementation. *International Journal of Solids and Structures* 30 (22):3171-3184
47. Auricchio F, Taylor RL (1994) A generalized elastoplastic plate theory and its algorithmic implementation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37 (15):2583-2608. doi:10.1002/nme.1620371506

48. Auricchio F, Taylor RL (1995) Two Material Models for Cyclic Plasticity - Nonlinear Kinematic Hardening and Generalized Plasticity. *Int J Plast* 11 (1):65-98
49. Lubliner J, Auricchio F (1996) Generalized plasticity and shape memory alloys. *International Journal of Solids and Structures* 33 (7):991-1003. doi:10.1016/0020-7683(95)00082-8
50. Simo JC, Hughes TJ (1998) *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag New York, Incorporated, Secaucus, NJ, USA
51. Simo JC, Ortiz M (1985) A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 49 (2):221-245. doi:10.1016/0045-7825(85)90061-1
52. Ortiz M, Simo JC (1986) An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 23 (3):353-366. doi:10.1002/nme.1620230303
53. Deretić-Stojanović B, Dunica Š (2008) *Otpornost materijala*. Građevinski fakultet, Beograd, Beograd
54. Sekulović M (1984) *Metod konačnih elemenata*. Građevinska knjiga, Beograd
55. Kostic SM, Filippou FC, Lee C-L (2009) Evaluation of Resultant Plasticity and Fiber Beam-Column Elements for the Simulation of the 3D Nonlinear Response of Steel Structures. In: *2nd International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering - COMPDYN*, Island of Rhodes, Greece, 22-24 June, 2009 2009.
56. King WS, Chen WF (1994) Practical second-order inelastic analysis of semirigid frames. *J Struct Engrg, ASCE* 120:2156-2175
57. Chiorean CG (2009) A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3D semi-rigid steel frameworks. *Engineering Structures* 31 (12):3016-3033. doi:10.1016/j.engstruct.2009.08.003
58. Gourley BC, Tort C, Denavit M, Schiller PH, Hajjar JF (2008) *A Synopsis of Studies of the Monotonic and Cyclic Behavior of Concrete-Filled Steel Tube Members, Connections, and Frames*. NSEL Report Series. Department of Civil and Environmental Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign,
59. Denavit M, Hajjar JF (2010) *Nonlinear Seismic Analysis of Circular Concrete-Filled Steel Tube Members and Frames*. NSEL Report Series. Department of Civil and Environmental Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign,
60. Tort C, Hajjar JF (2010) *Mixed Finite-Element Modeling of Rectangular Concrete-Filled Steel Tube Members and Frames under Static and Dynamic Loads*. *Journal of Structural Engineering* 136 (6):654-664. doi:10.1061/(asce)st.1943-541x.0000158
61. Gourley BC, Hajjar JF (1994) *Cyclic Nonlinear Analysis of Concrete-Filled Steel Tube Beam-Columns and Composite Frames*. *Structural Engineering*

Report No. ST-93-5.2. Department of Civil Engineering, Institute of Technology, University of Minnesota,

62. Moon J, Roeder CW, Lehman DE, Lee H-E (2012) Analytical modeling of bending of circular concrete-filled steel tubes. *Engineering Structures* 42 (0):349-361. doi:10.1016/j.engstruct.2012.04.028

63. Standardization ECf (2004) Design of Composite Steel and Concrete Structures - Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings, Eurocode 4. European Comitee for Standardization, Brussels

64. Hajjar JF, Gourley BC (1996) Representation of concrete-filled steel tube cross-section strength. *Journal of Structural Engineering* 122 (11):1327

65. Tomii M, Sakino K (1979) Experimental Studies on the Ultimate Moment of Concrete Filled Square Steel Tubular Beam-Columns. *Trans Arch Inst of Japan* (275):55-63

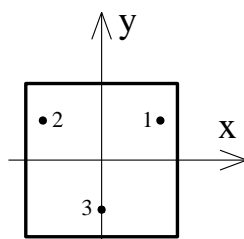
66. Kawaguchi J, Morino S (2001) Experimental Study on Post-Local Buckling Behavior of CFT Beam-Columns Under Cyclic Loading, Elasto-Plastic Behavior of Square CFT Beam-Columns: Part 1. *J Struct Constr Eng, Architectural Inctitute of Japan* (540):141-148

67. Kawaguchi J, Morino S, Sugimoto T, Shirai J (1997) Structural Behavior and Characteristics of Concrete-Filled Tubular Frames. vol 22. Faculty of Engineering, Mie University,

A. PRILOG

SKRAĆENA PRAVILA INTEGRACIJE

Osnovna ideja tzv. skraćenih pravila integracije je da se eliminišu članovi polinoma koji ne utiču značajno na vrednost integrala pri određenoj poziciji tačaka integracije [31]. Određivanje položaja (koordinata) tačaka, kao i numeričkih težina kod skraćenog pravila integracije sa tri tačke, u izoparametarskim (prirodnim) koordinatama, je ovde prikazano (slika A.1).



Slika A.1: Skraćeno pravilo integracije sa tri tačke

Kompletan polinom 4-tog reda u x pravcu i 2-og reda u y pravcu je:

$$P(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6x^2y + b_7x^3y + b_8x^4 \quad (\text{A.1})$$

Vrednost integrala ovog polinoma po domenu $-1 \leq x \leq 1$ i $-1 \leq y \leq 1$ je:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P(x, y) dx dy = 4b_0 + \frac{4}{3}b_4 + \frac{4}{3}b_5 + \frac{4}{5}b_8 \quad (\text{A.2})$$

Usvojeni su sledeći položaji za tri tačke integracije:

Tačka 1: koordinate (x_1, y_1) , težina W_1 ;

Tačka 2: koordinate $(-x_1, y_1)$, težina $W_2 = W_1$;

Tačka 3: koordinate $(0, y_3)$, težina W_3 ;

Postoji pet nepoznatih čije vrednosti treba odrediti: x_1 , y_1 , y_3 , W_1 i W_3 . Numerička vrednost integrala (A.2) je u ovom slučaju:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^3 P(x_i, y_i) W_i \quad (\text{A.3})$$

Izjednačavanjem tačne vrednosti integrala (A.2) i približne (A.3), dobija se sledeći sistem od šest jednačina:

$$2W_1 + W_3 = 4 \quad (\text{A.4})$$

$$2W_1 y_1 + W_3 y_3 = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$2W_1 x_1^2 = \frac{4}{3} \quad (\text{A.6})$$

$$2W_1 y_1^2 + W_3 y_3^2 = \frac{4}{3} \quad (\text{A.7})$$

$$2W_1 x_1^2 y_1 = 0 \quad (\text{A.8})$$

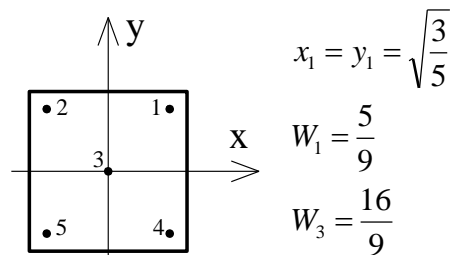
$$2W_1 x_1^4 = \frac{4}{5} \quad (\text{A.9})$$

Jednačine (A.4)-(A.9) su dobijene izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata uz b_i . Kao posledica pretpostavljenog položaja tačke 3, tj. $x_3=0$, tri jednačine se svode na identitete, tj. izraze $0=0$ (za koeficijente uz b_1, b_3 i b_7).

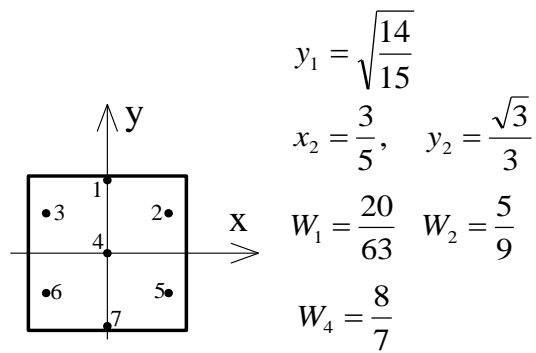
Dakle, treba odrediti vrednosti pet nepoznatih koje zadovoljavaju navedenih šest jednačina. Ukoliko se zadrže članovi polinoma sa nižim stepenom, preostaju dve mogućnosti za uklanjanje jednog člana, tj. jednačina: jednačina (A.8) ili jednačina (A.9). Jednačina (A.8) je će biti zadovoljena ukoliko je bar jedna od nepoznatih W_1, x_1 ili y_1 jednaka nuli, što ne predstavlja traženo rešenje, pa se stoga ova jednačina eliminiše. Rešenje preostalog sistema od pet jednačina sa pet nepoznatih je:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad y_1 = -\frac{2}{\sqrt{15}}, \quad y_3 = \sqrt{\frac{5}{12}}, \quad W_1 = \frac{10}{9}, \quad W_3 = \frac{16}{9}$$

Na sličan način, određuju se koordinate i težine kod pravila sa više tačaka integracije. Rezultati za pravila sa pet i sedam tačaka integracije su prikazani na slikama Slika A.2 i Slika A.3.



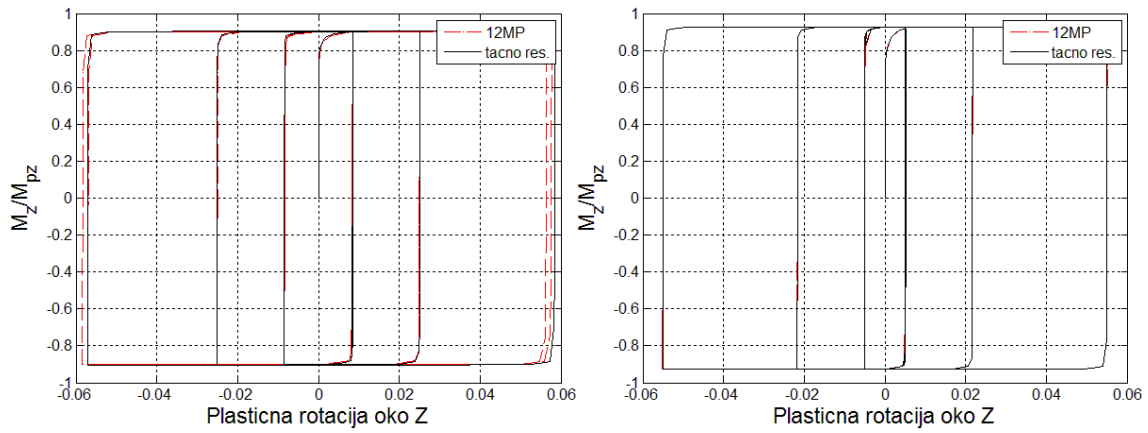
Slika A.2: Skraćeno pravilo integracije sa pet tačaka



Slika A.3: Skraćeno pravilo integracije sa sedam tačaka

B. PRILOG

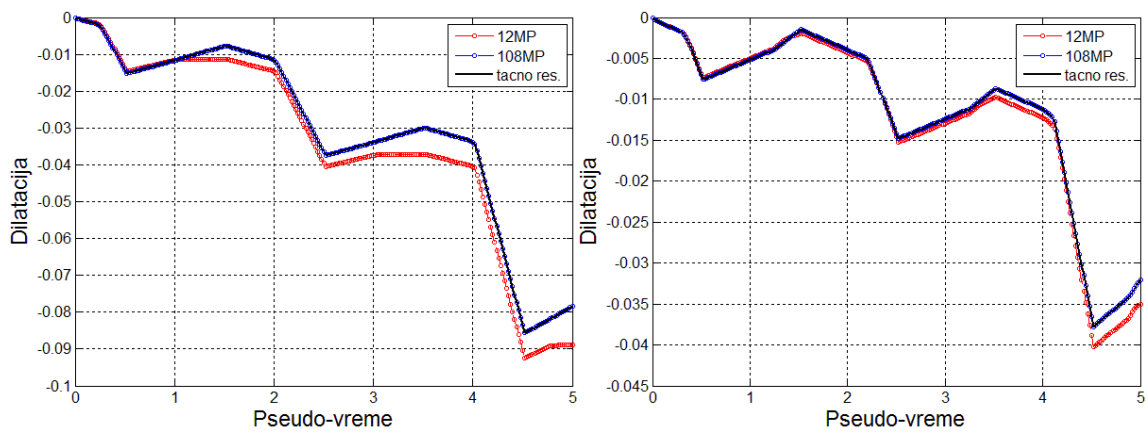
REZULTATI TESTOVA KONZOLNOG STUBA ČELIČNOG I PRESEKA



TEST A1

TEST B1

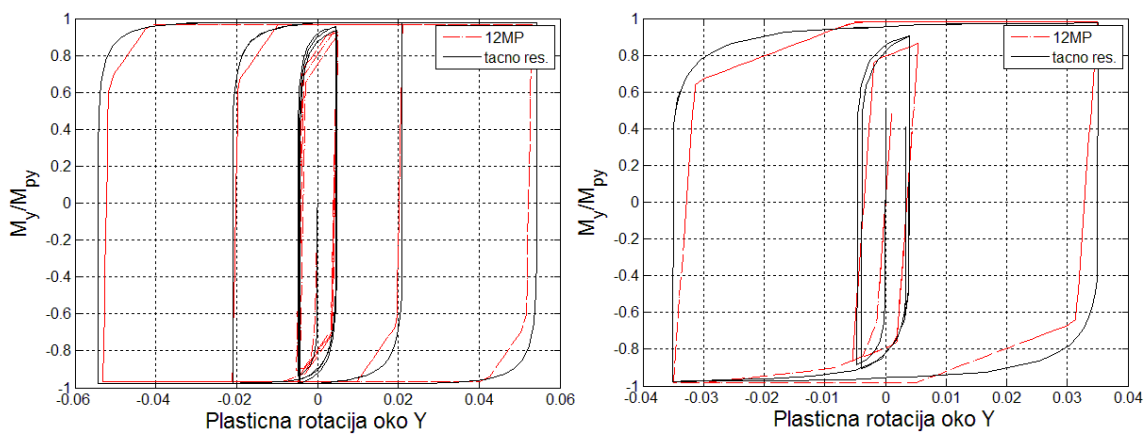
Slika B.1: Normirani moment – plastična rotacija dijagram



TEST A1

TEST B1

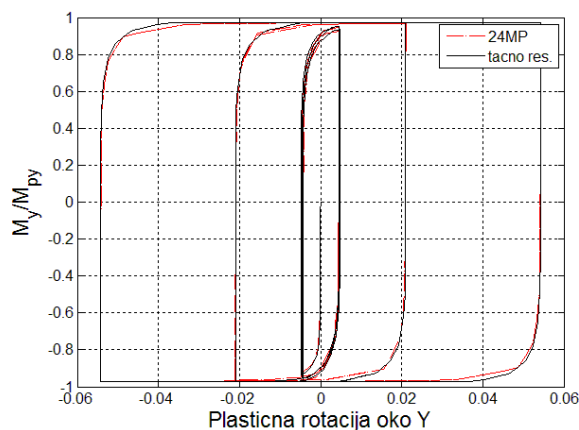
Slika B.2: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna



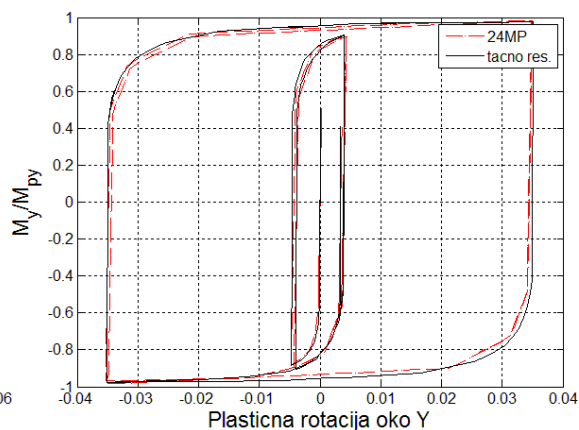
TEST A2

TEST B2

Slika B.3: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

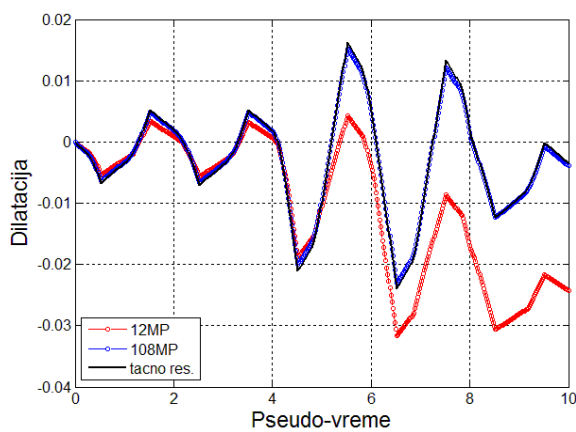


TEST A2

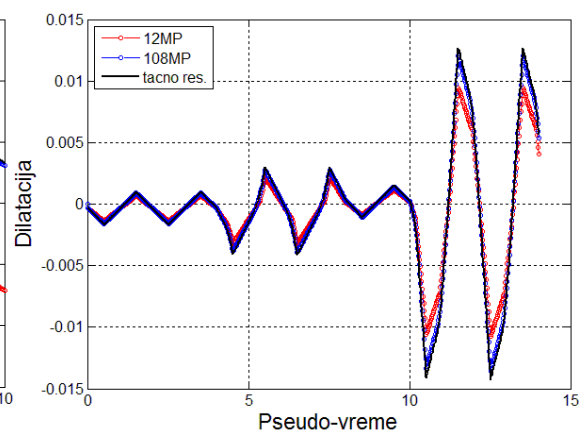


TEST B2

Slika B.4: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 24MP

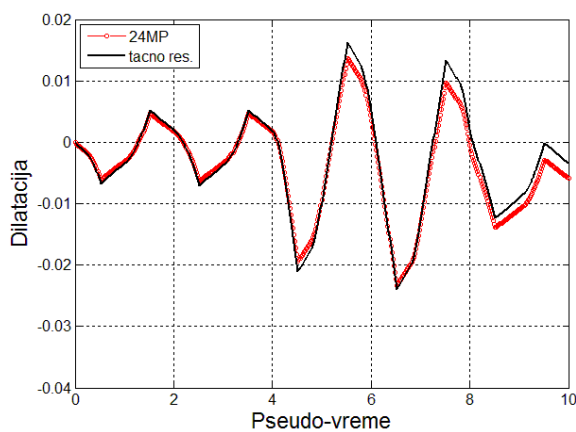


TEST A2

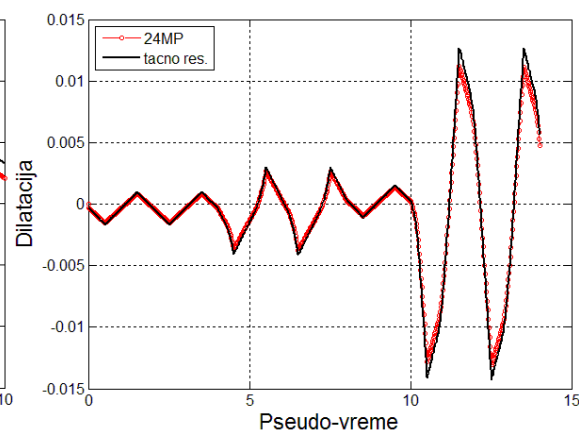


TEST B2

Slika B.5: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 12MP i 108MP šeme

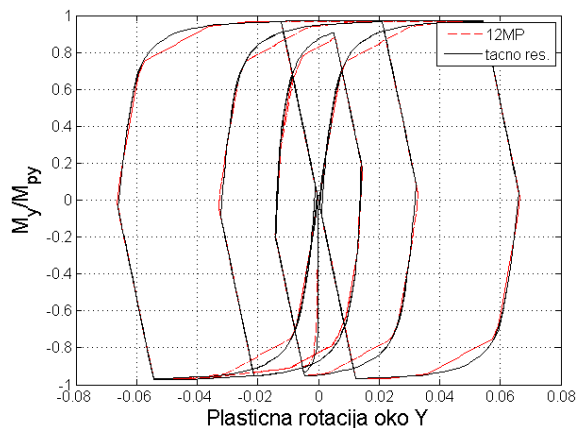


TEST A2

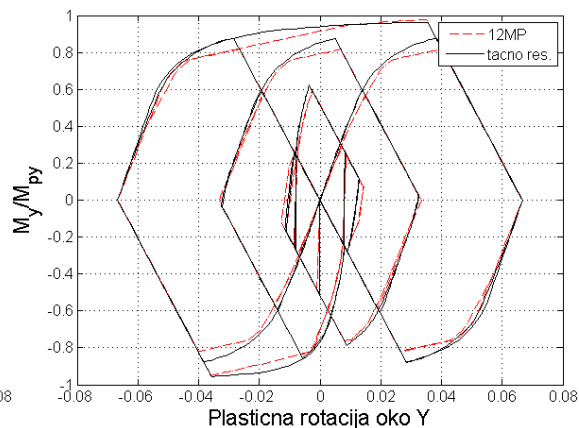


TEST B2

Slika B.6: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 24MP šemu

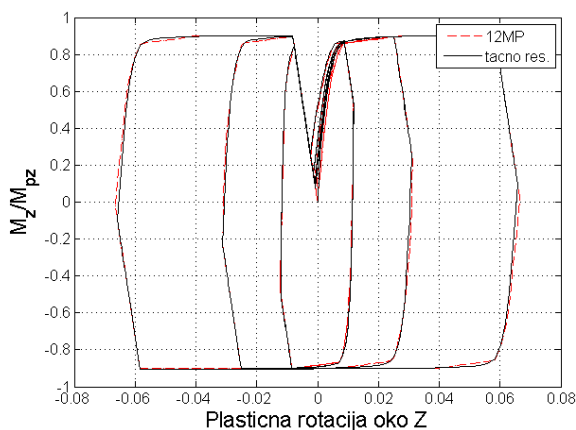


TEST A3

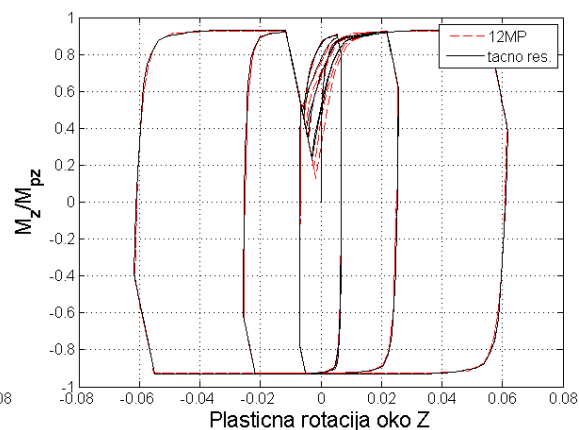


TEST B3

Slika B.7: Normirani moment – plastična rotacija dijagram

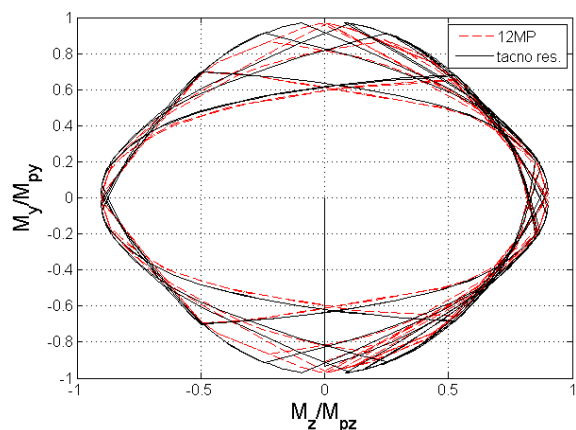


TEST A3

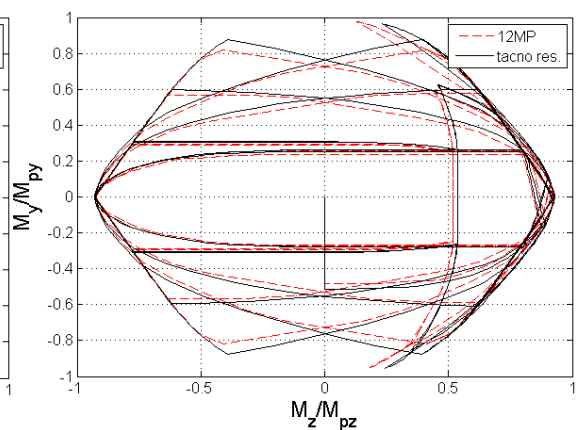


TEST B3

Slika B.8: Normirani moment – plastična rotacija dijagram

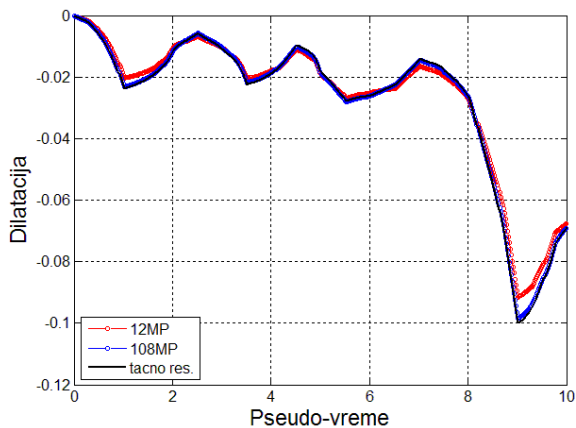


TEST A3

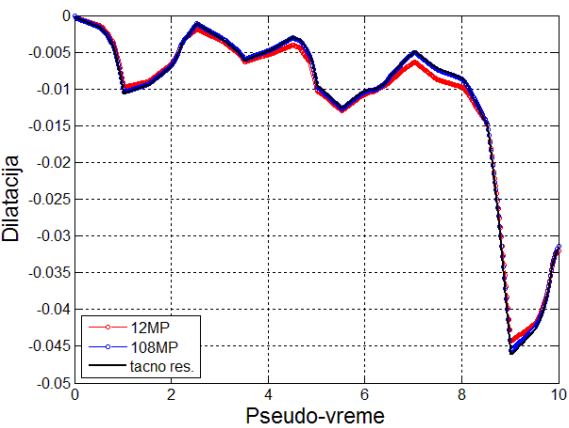


TEST B3

Slika B.9: Putanja normiranih momenata

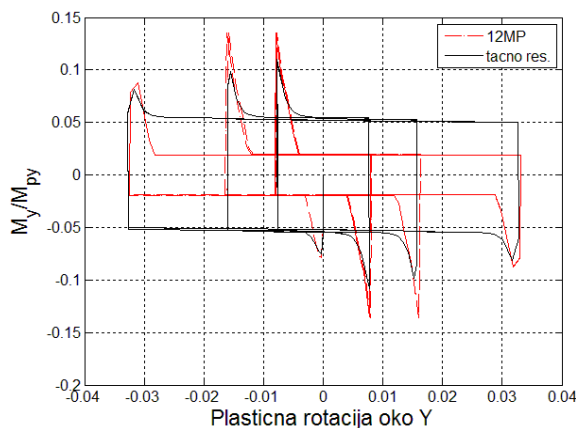


TEST A3

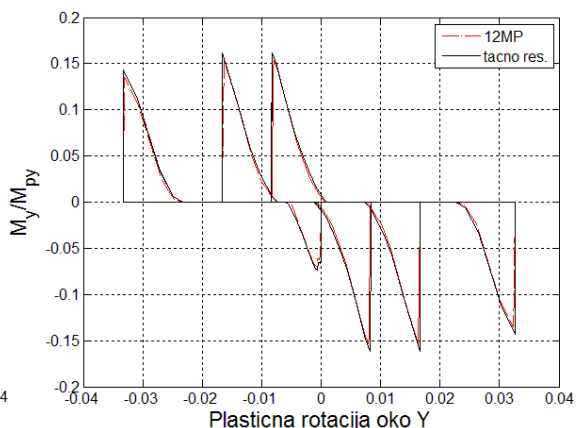


TEST B3

Slika B.10: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna

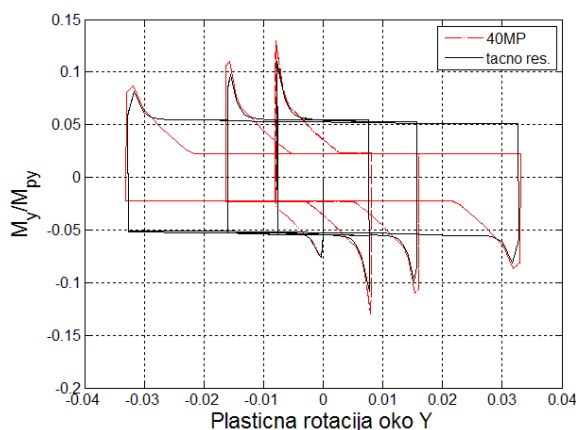


TEST A4_1

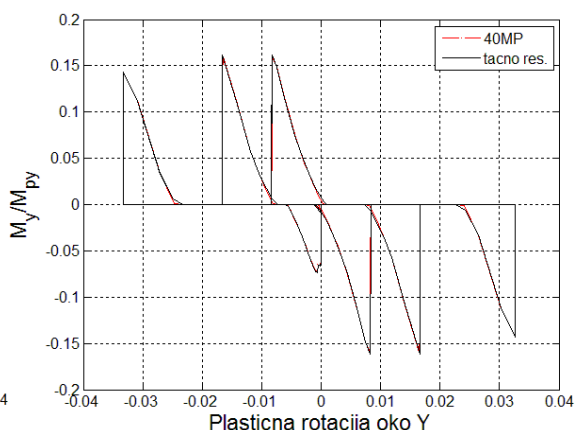


TEST B4_1

Slika B.11: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

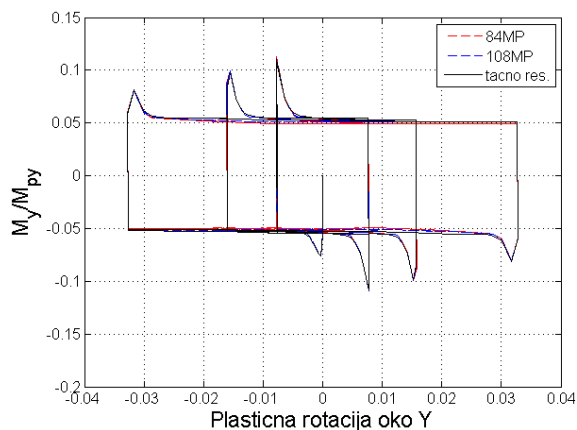


TEST A4_1

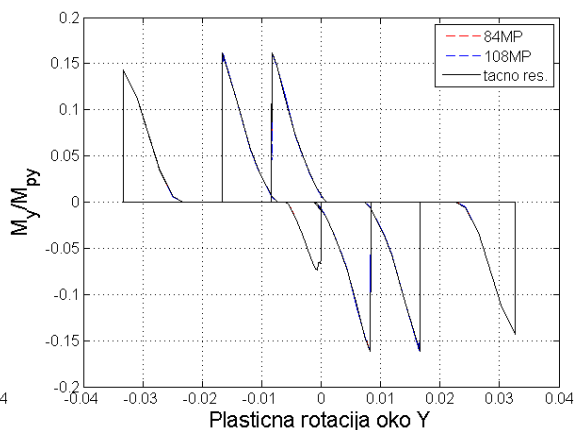


TEST B4_1

Slika B.12: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

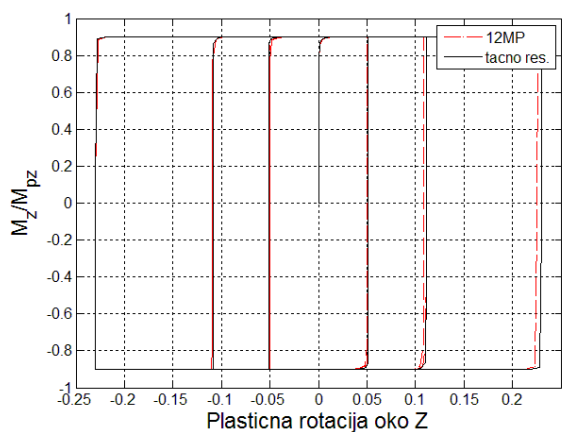


TEST A4_1

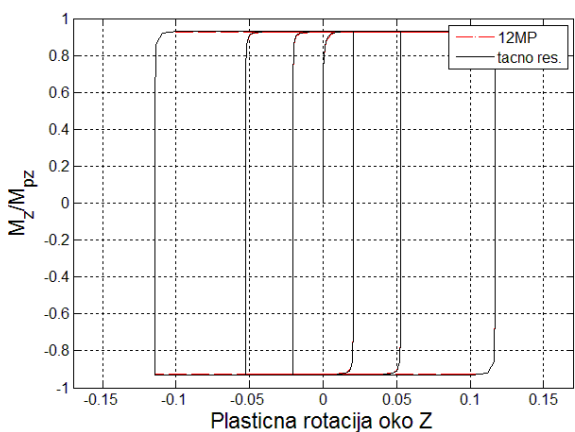


TEST B4_1

Slika B.13: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

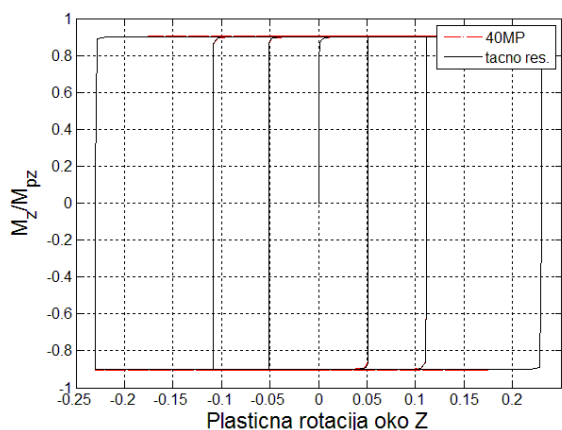


TEST A4_1

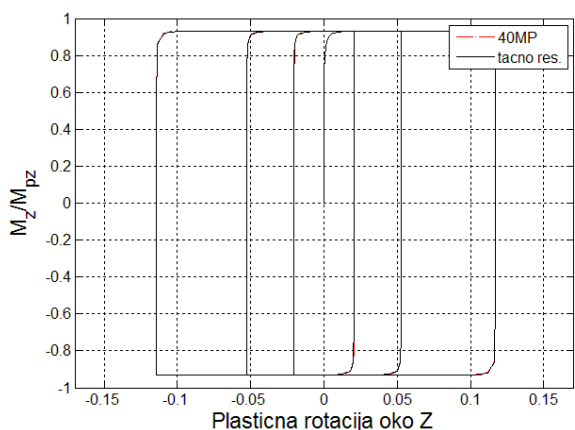


TEST B4_1

Slika B.14: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

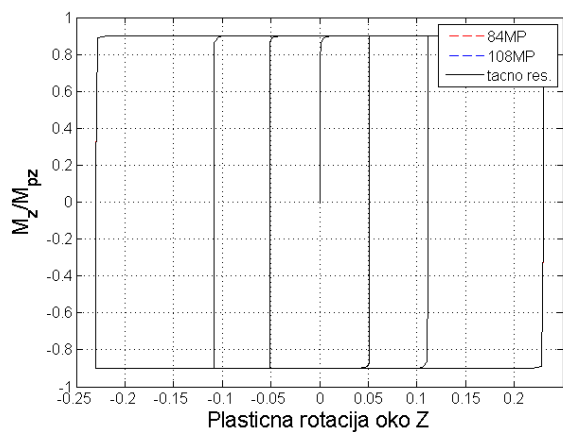


TEST A4_1

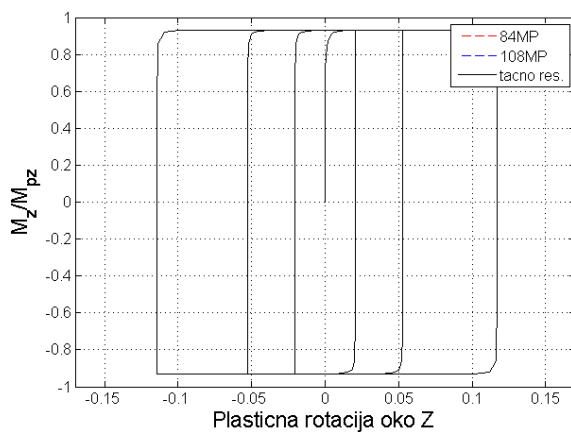


TEST B4_1

Slika B.15: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

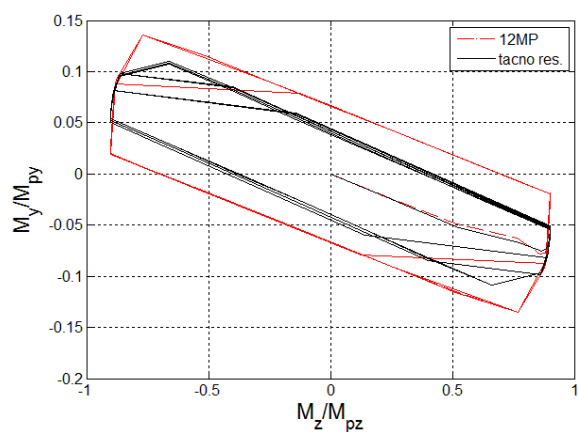


TEST A4_1

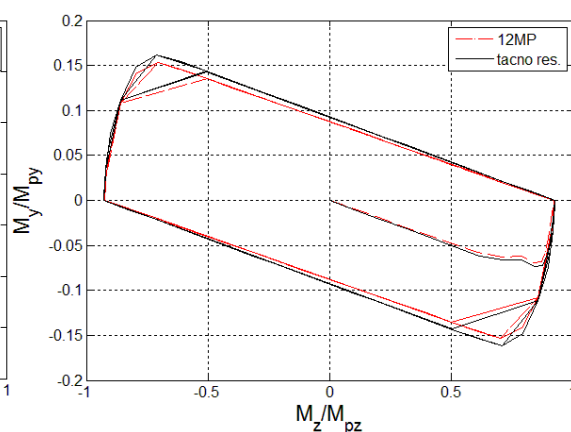


TEST B4_1

Slika B.16: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

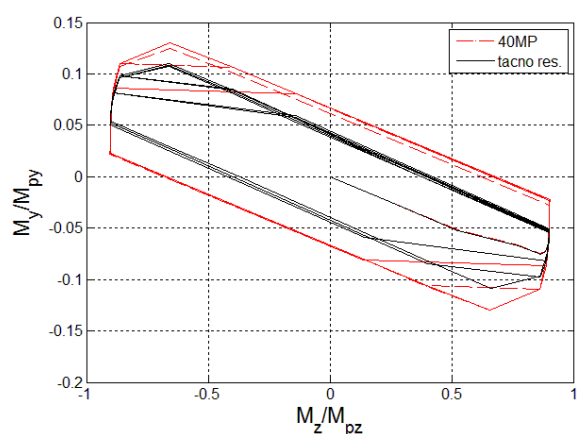


TEST A4_1

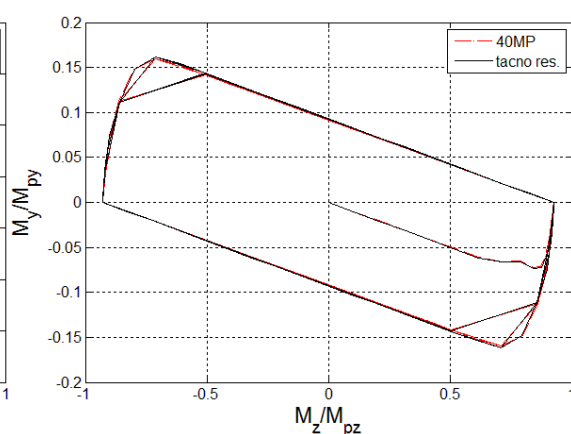


TEST B4_1

Slika B.17: Putanja normiranih momenata za šemu 12MP

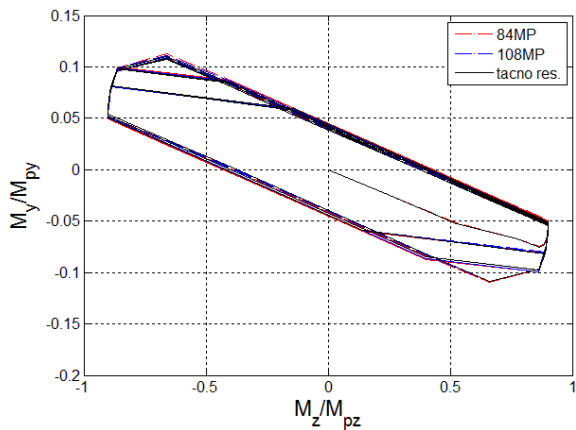


TEST A4_1

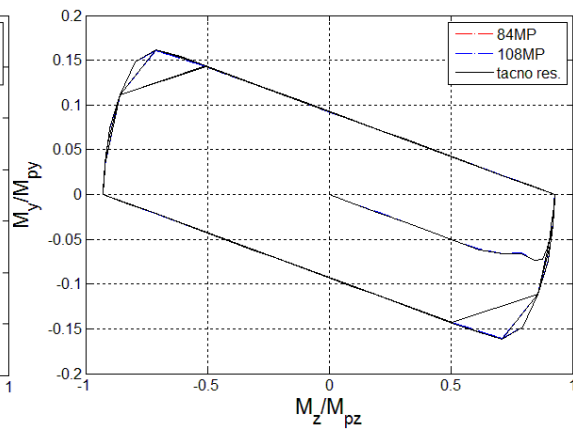


TEST B4_1

Slika B.18: Putanja normiranih momenata za šemu 40MP

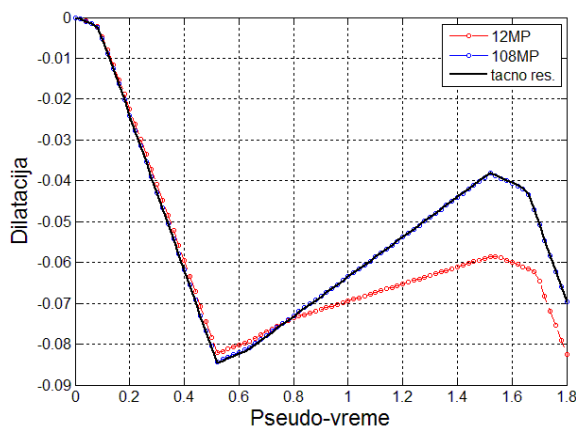


TEST A4_1

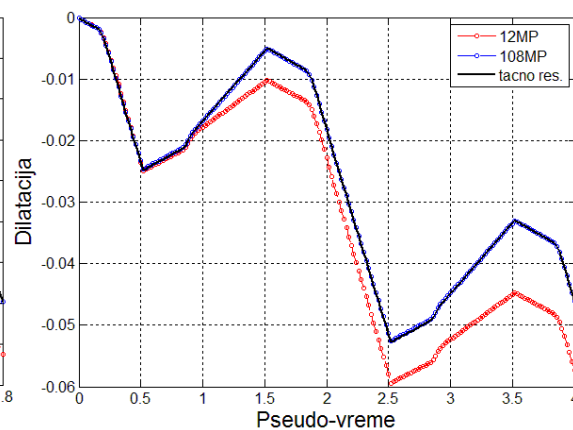


TEST B4_1

Slika B.19: Putanja normiranih momenata za 84MP i 108MP šeme

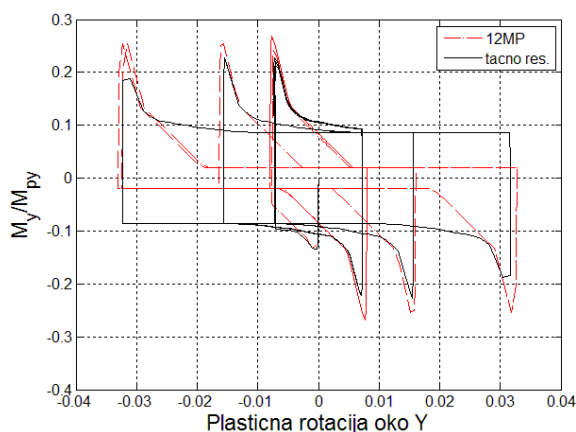


TEST A4_1

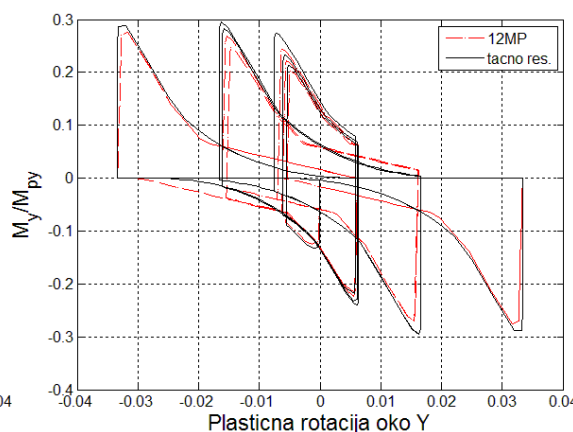


TEST B4_1

Slika B.20: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna

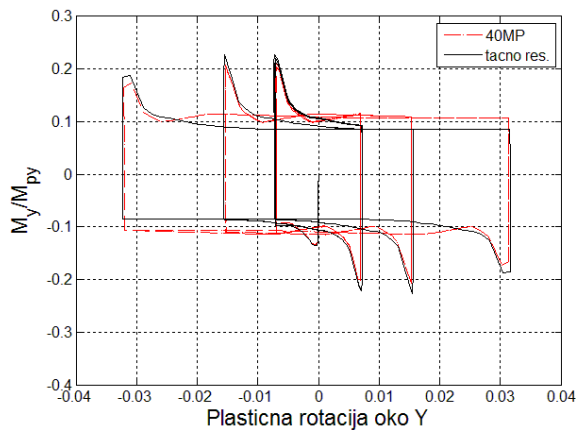


TEST A4_2

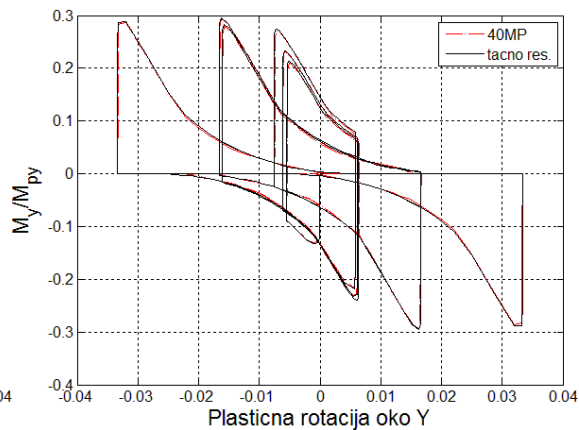


TEST B4_2

Slika B.21: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

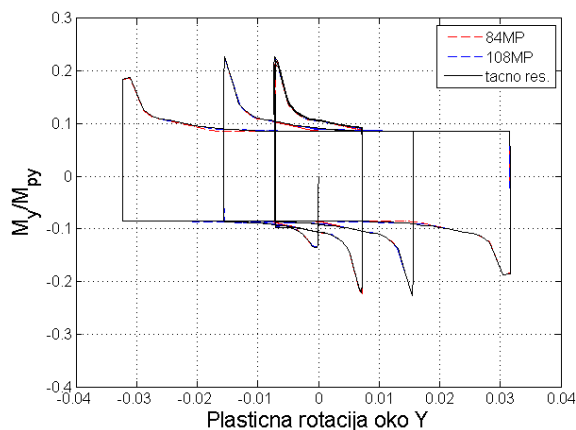


TEST A4_2

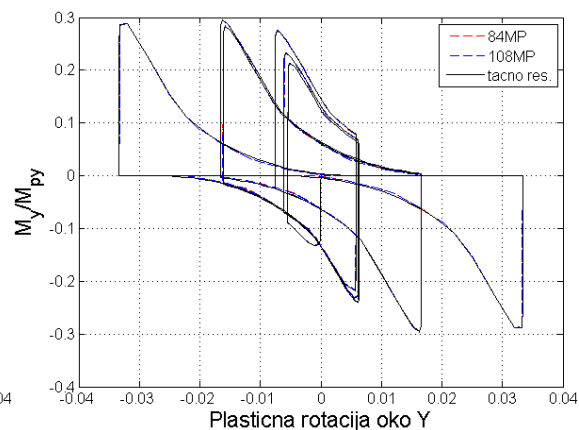


TEST B4_2

Slika B.22: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

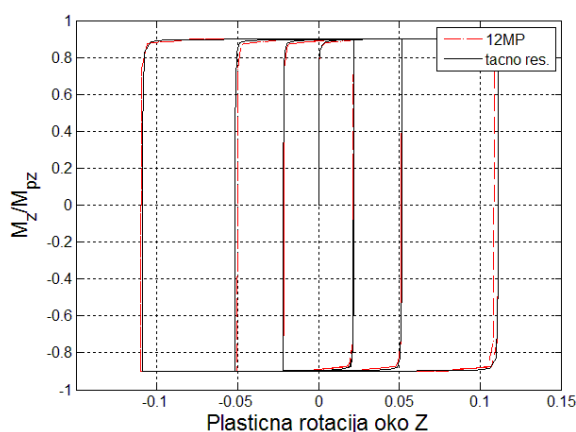


TEST A4_2

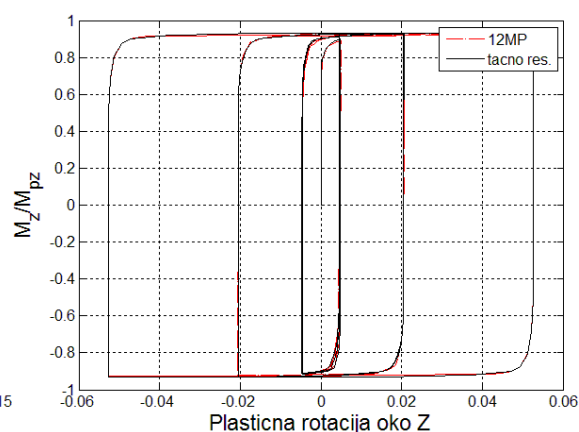


TEST B4_2

Slika B.23: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

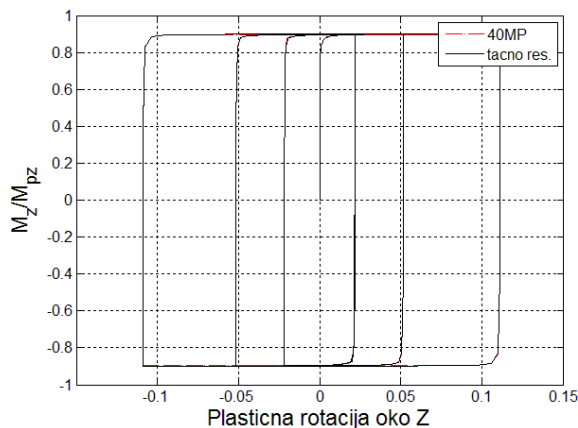


TEST A4_2

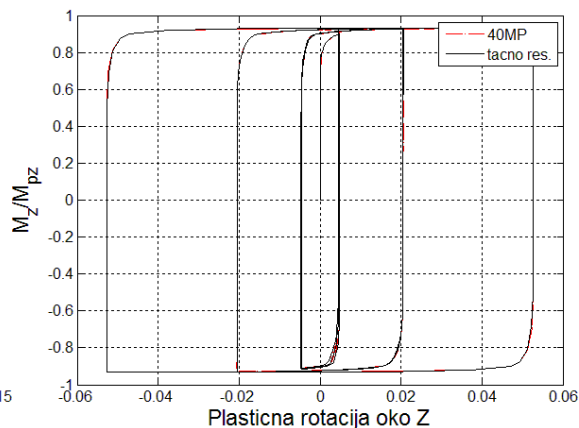


TEST B4_2

Slika B.24: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

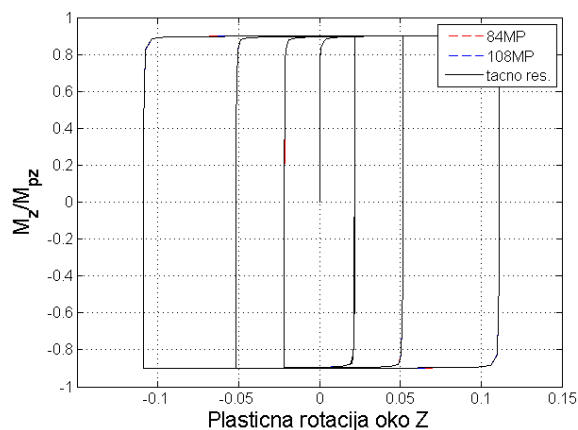


TEST A4_2

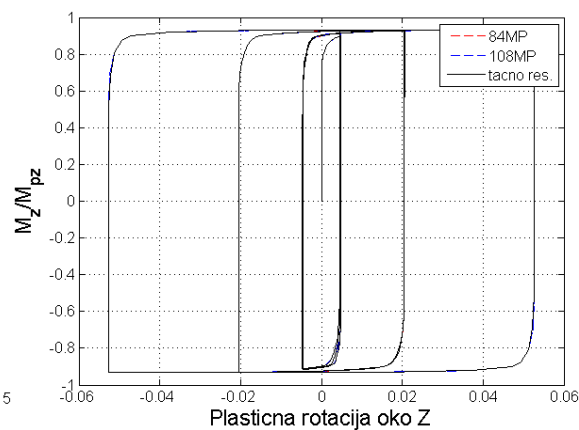


TEST B4_2

Slika B.25: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

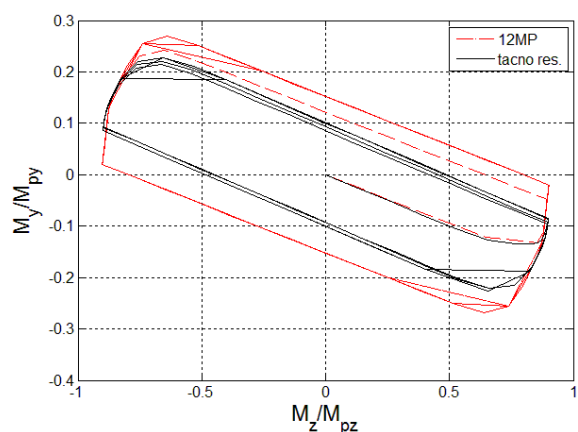


TEST A4_2

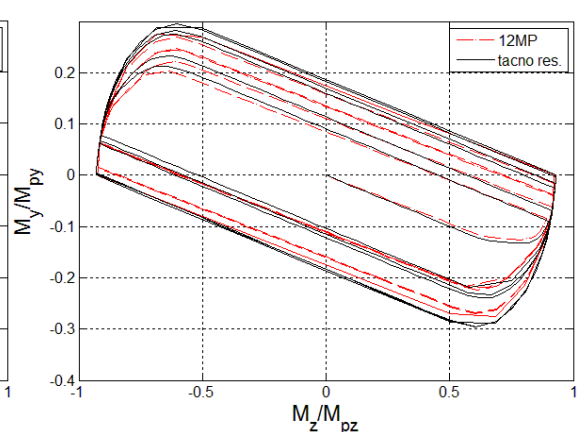


TEST B4_2

Slika B.26: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

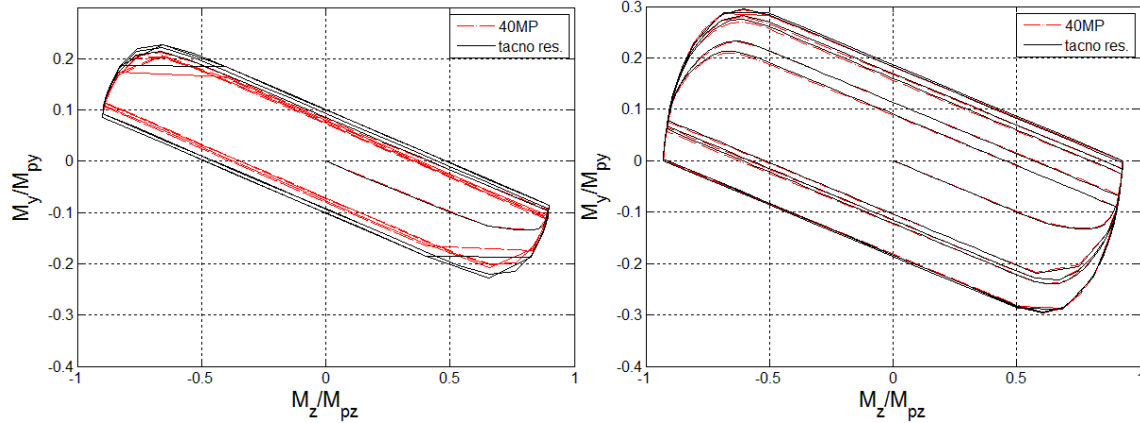


TEST A4_2



TEST B4_2

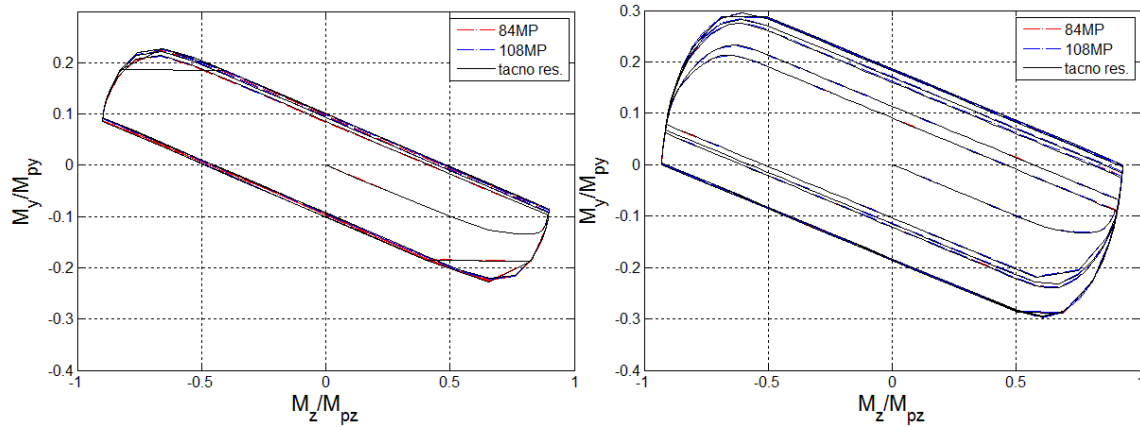
Slika B.27: Putanja normiranih momenata za šemu 12MP



TEST A4_2

TEST B4_2

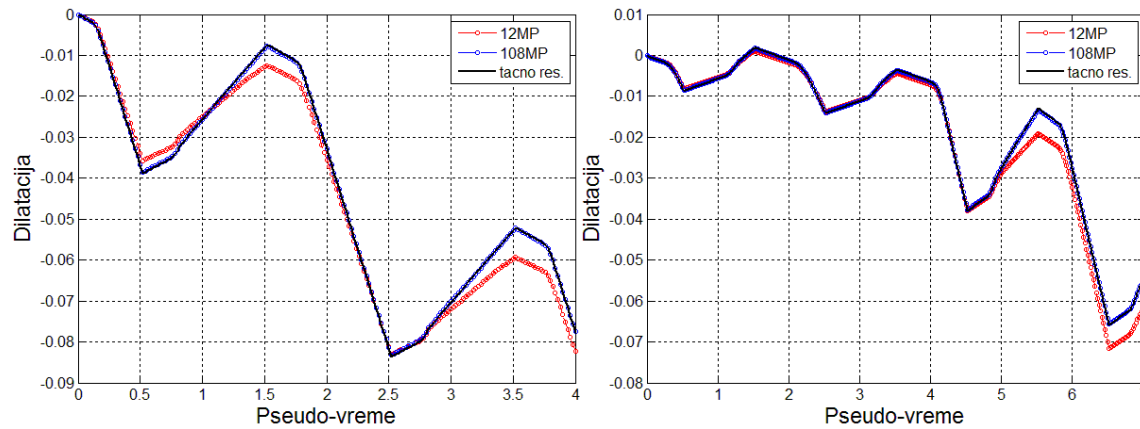
Slika B.28: Putanja normiranih momenata za šemu 40MP



TEST A4_2

TEST B4_2

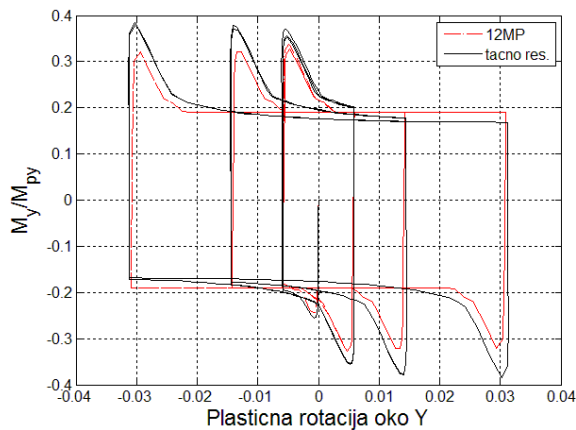
Slika B.29: Putanja normiranih momenata za 84MP i 108MP šeme



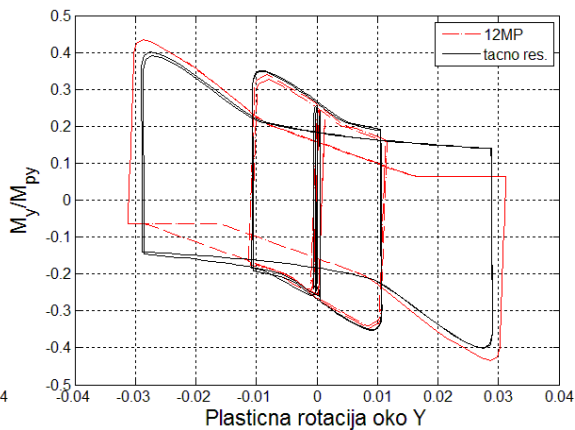
TEST A4_2

TEST B4_2

Slika B.30: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna

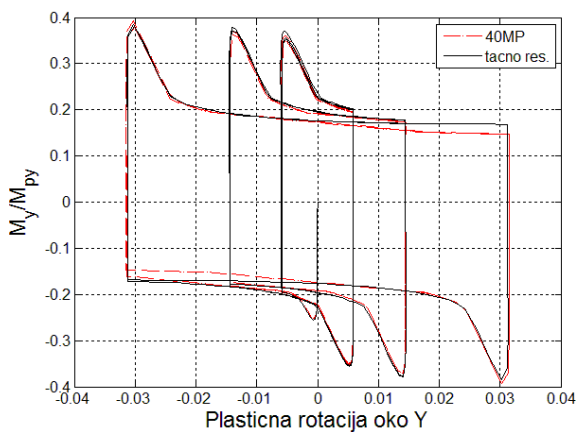


TEST A4_3

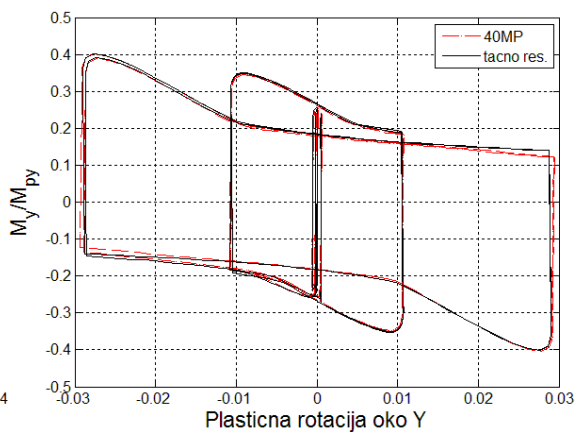


TEST B4_3

Slika B.31: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

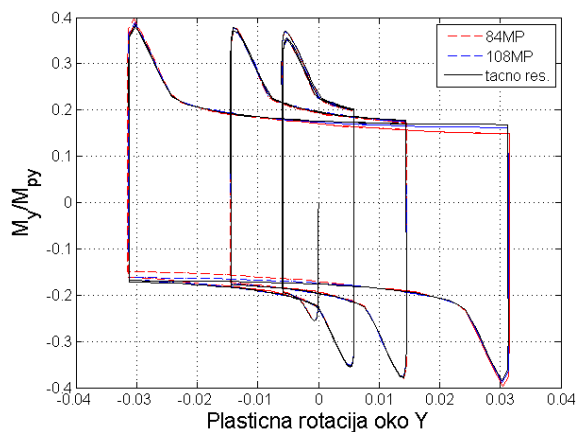


TEST A4_3

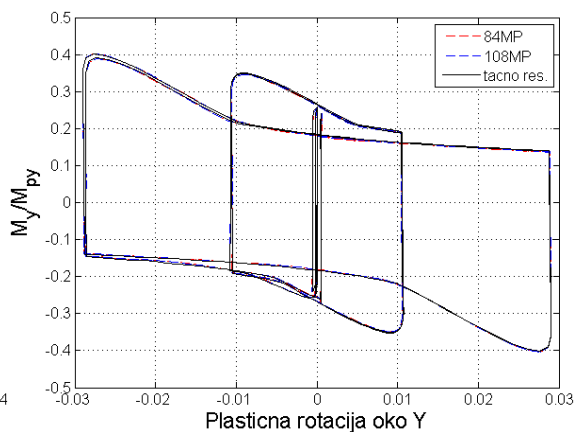


TEST B4_3

Slika B.32: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

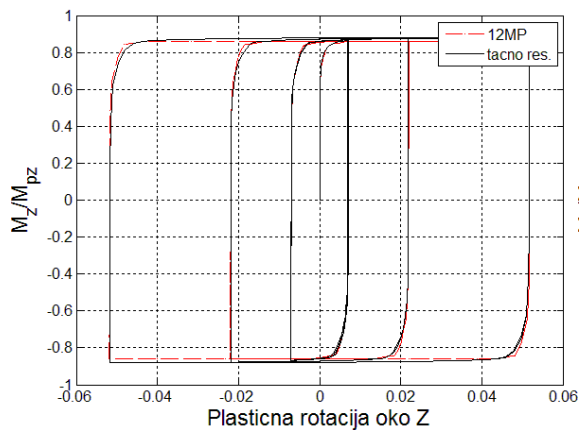


TEST A4_3

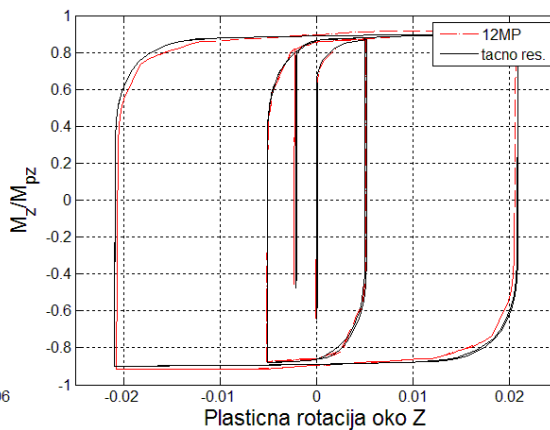


TEST B4_3

Slika B.33: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

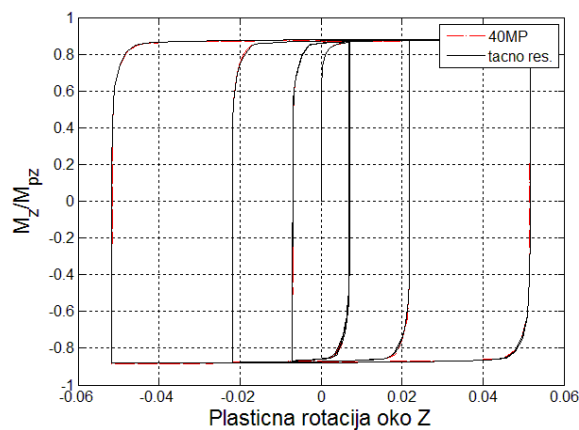


TEST A4_3

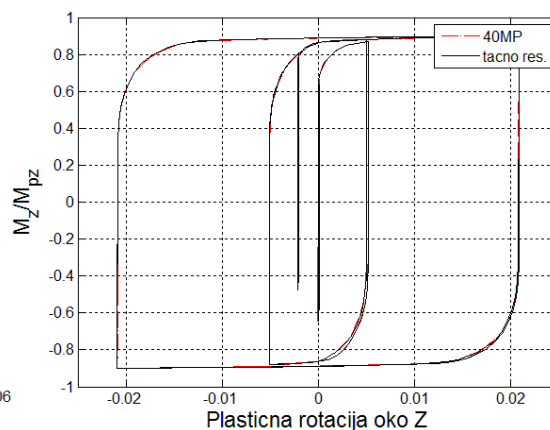


TEST B4_3

Slika B.34: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

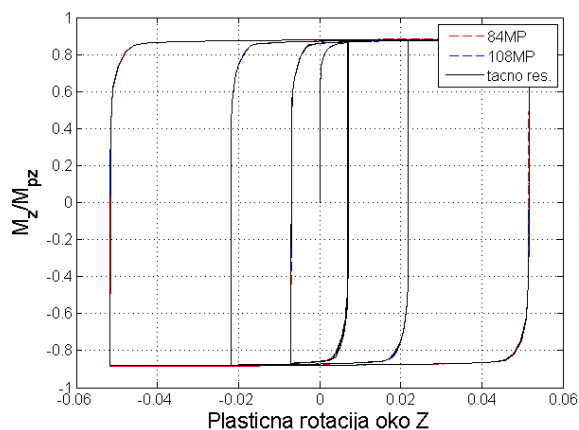


TEST A4_3

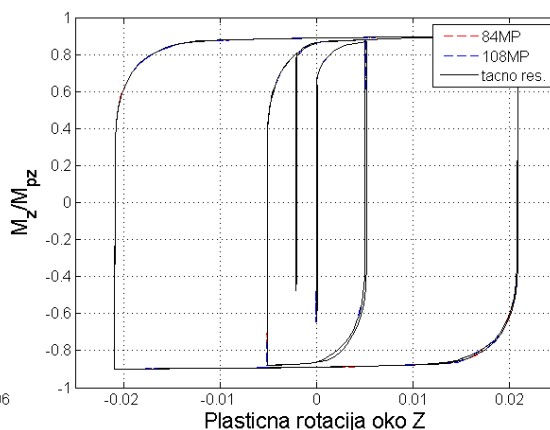


TEST B4_3

Slika B.35: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

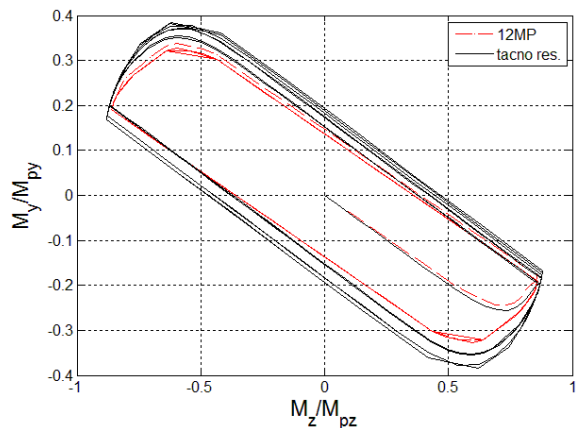


TEST A4_3

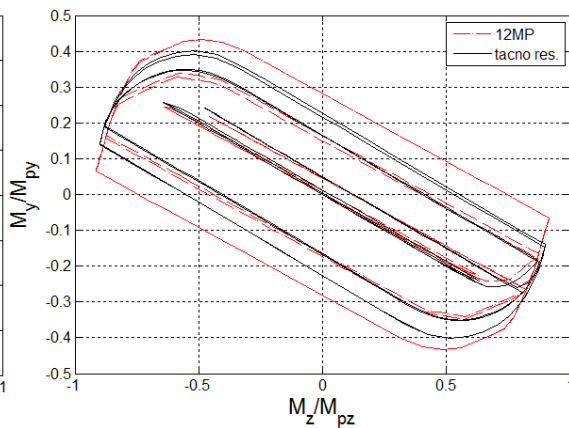


TEST B4_3

Slika B.36: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

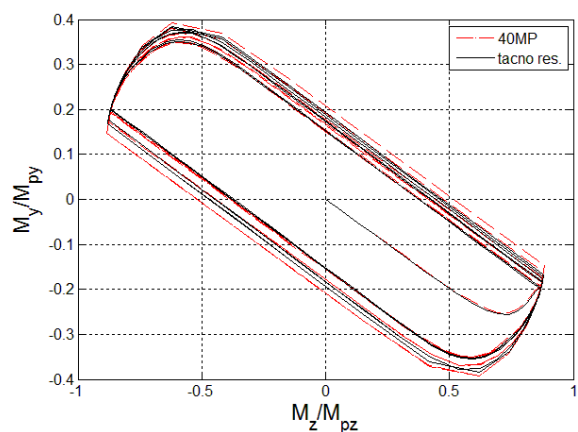


TEST A4_3

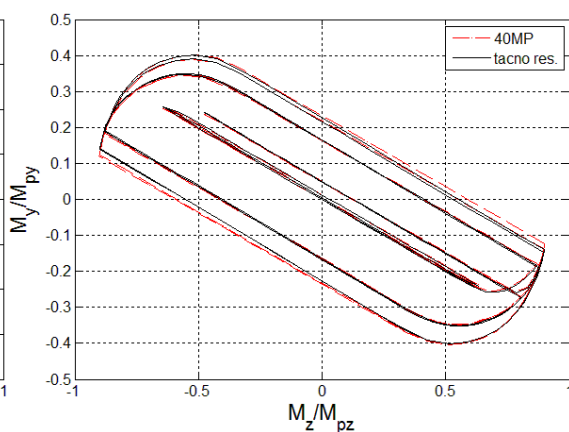


TEST B4_3

Slika B.37: Putanja normiranih momenata za šemu 12MP

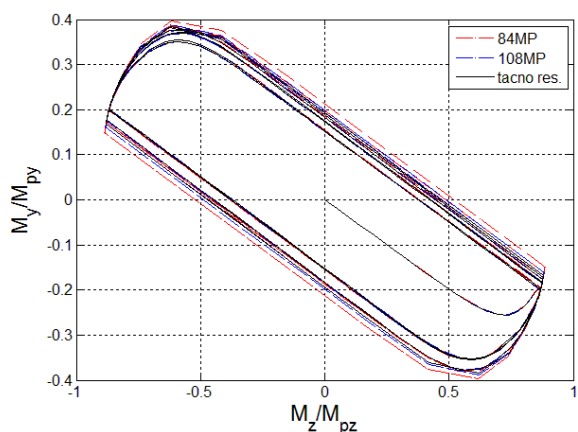


TEST A4_3

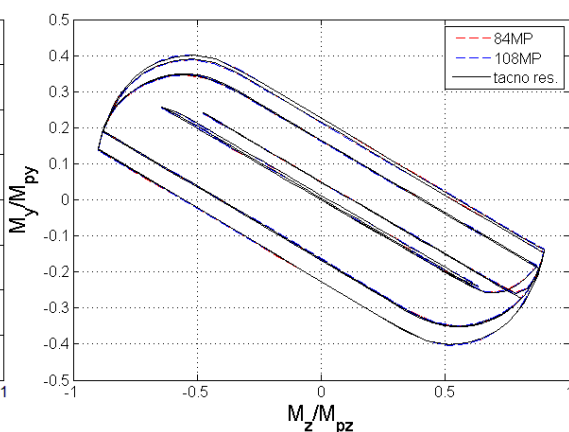


TEST B4_3

Slika B.38: Putanja normiranih momenata za šemu 40MP

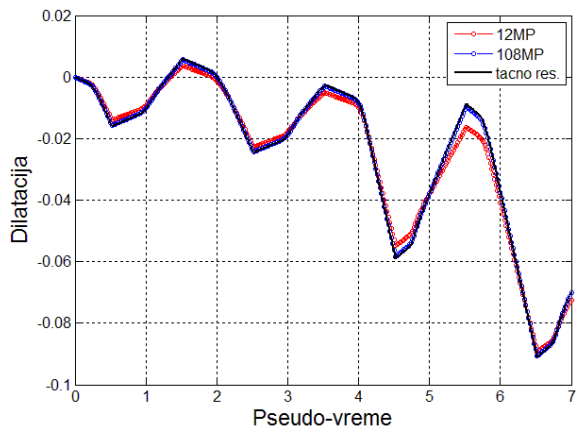


TEST A4_3

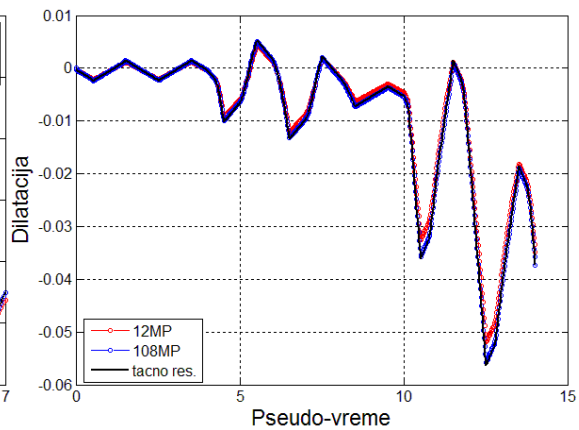


TEST B4_3

Slika B.39: Putanja normiranih momenata za 84MP i 108MP šeme

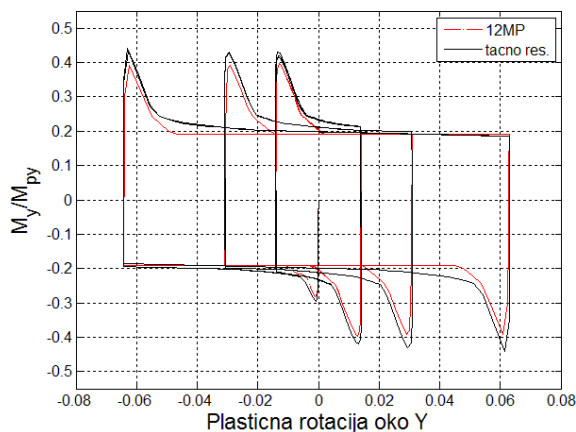


TEST A4_3

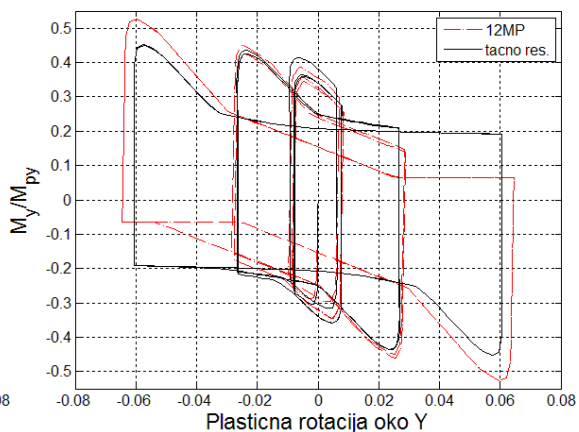


TEST B4_3

Slika B.40: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna

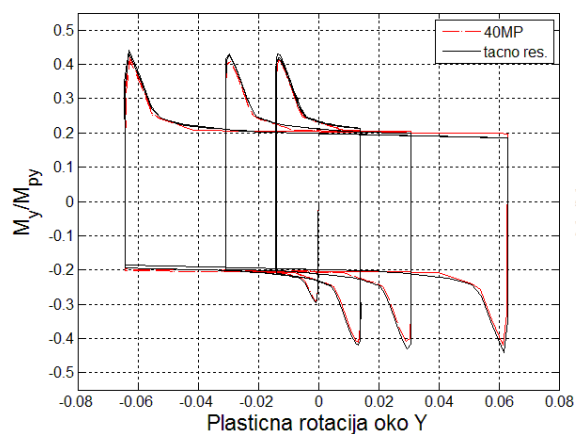


TEST A4_4

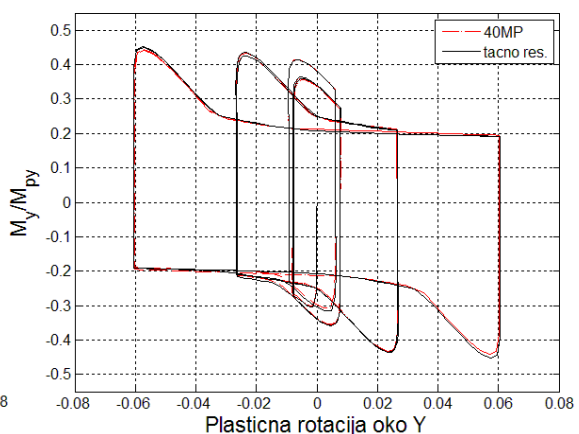


TEST B4_4

Slika B.41: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

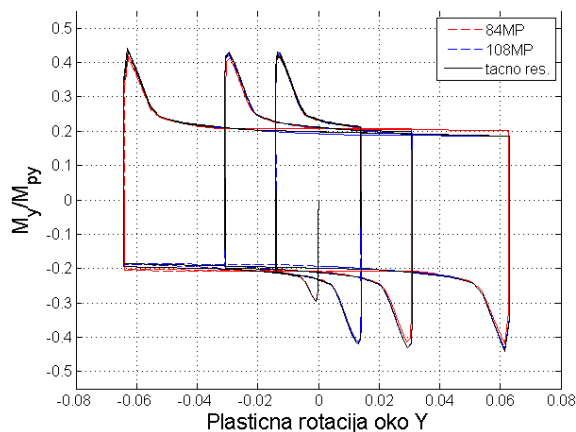


TEST A4_4

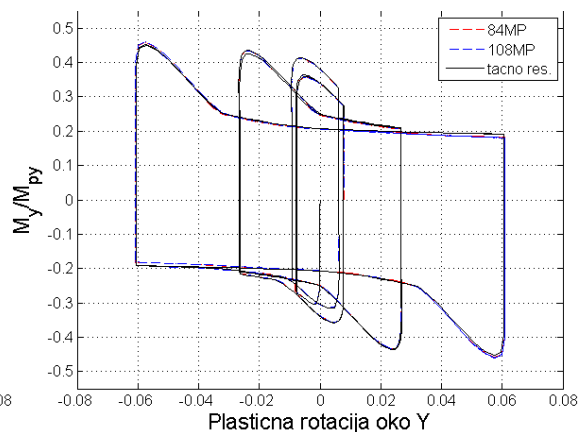


TEST B4_4

Slika B.42: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

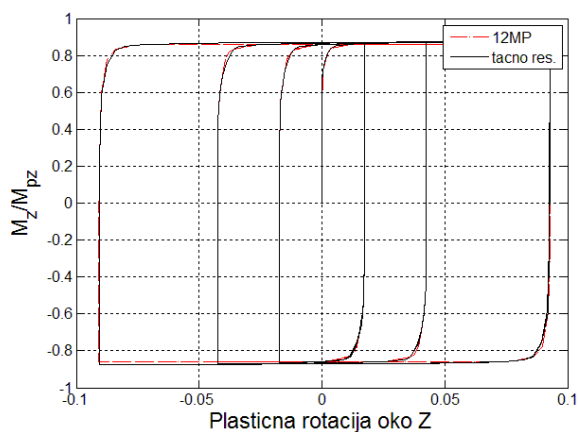


TEST A4_4

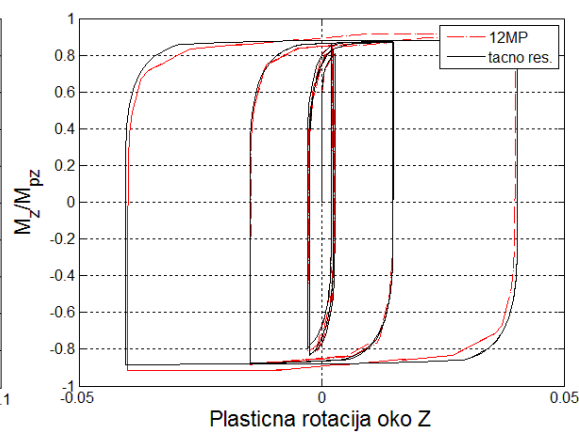


TEST B4_4

Slika B.43: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

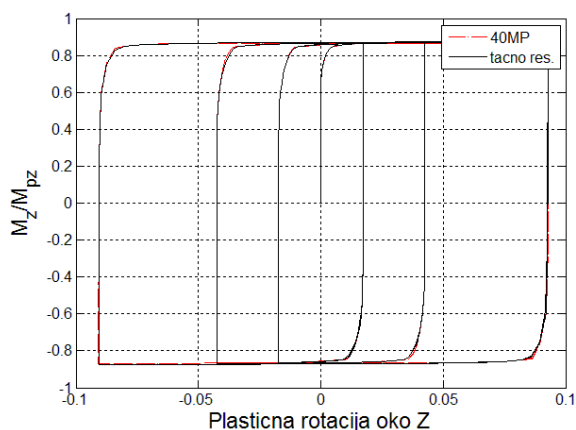


TEST A4_4

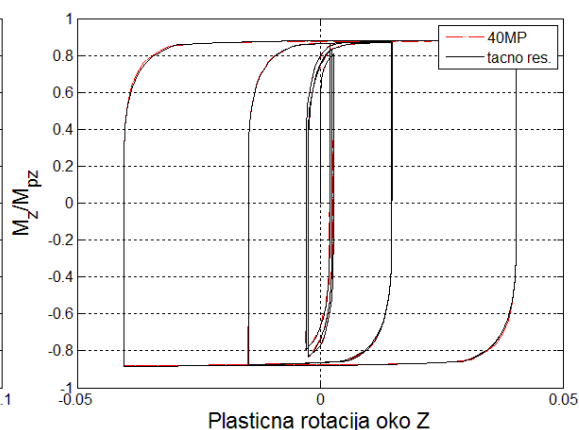


TEST B4_4

Slika B.44: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

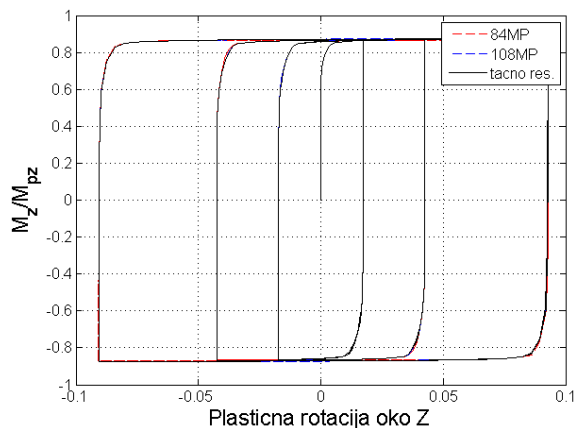


TEST A4_4

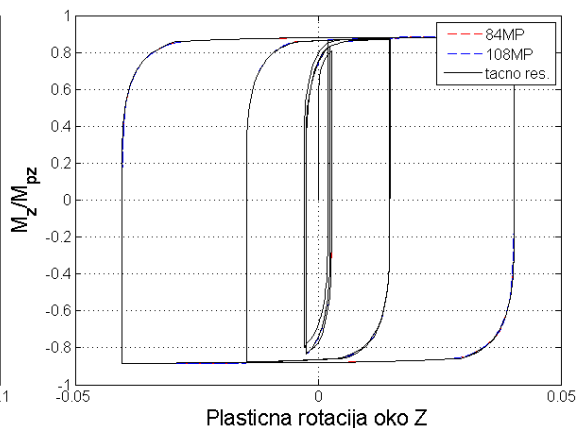


TEST B4_4

Slika B.45: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

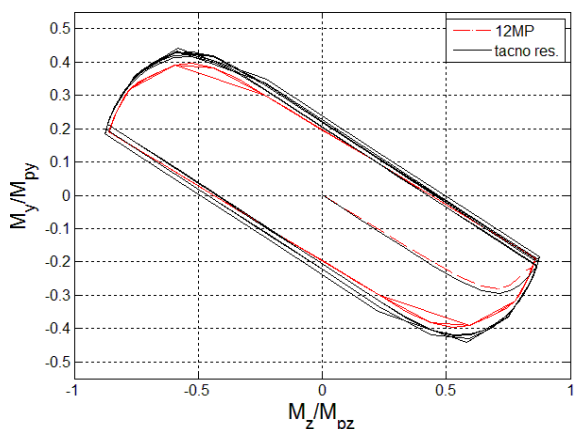


TEST A4_4

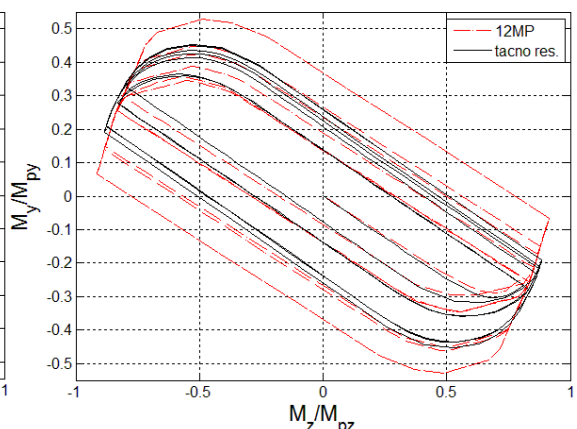


TEST B4_4

Slika B.46: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

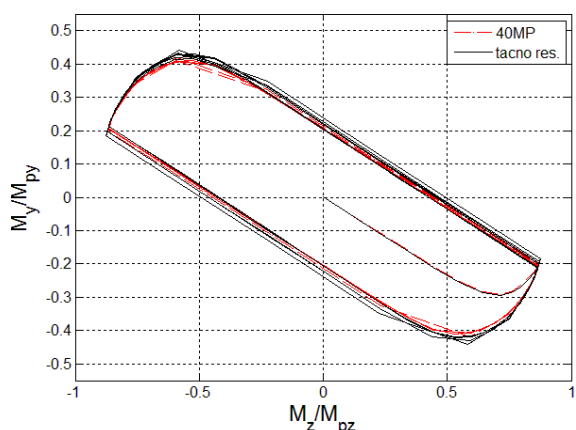


TEST A4_4

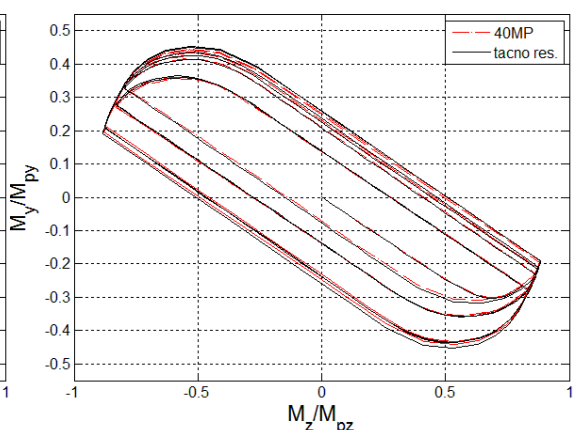


TEST B4_4

Slika B.47: Putanja normiranih momenata za šemu 12MP

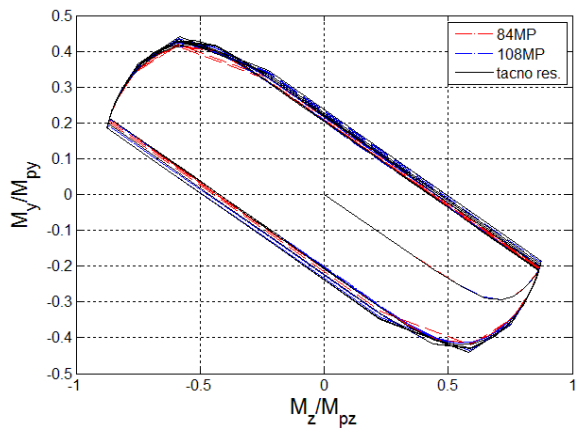


TEST A4_4

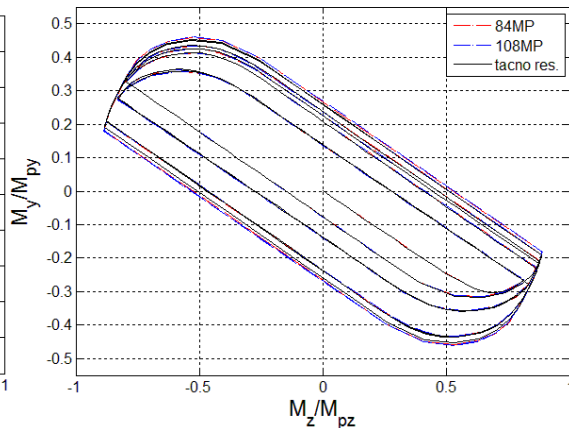


TEST B4_4

Slika B.48: Putanja normiranih momenata za šemu 40MP

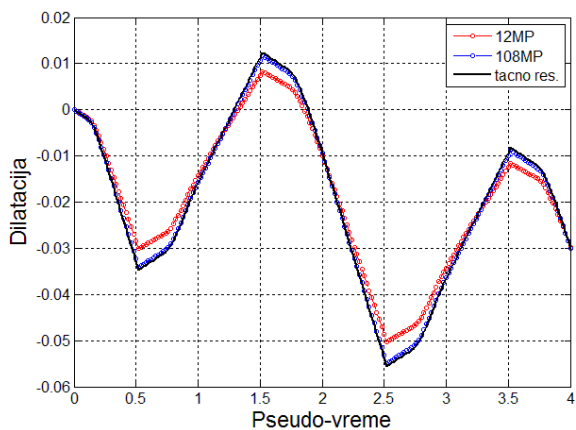


TEST A4_4

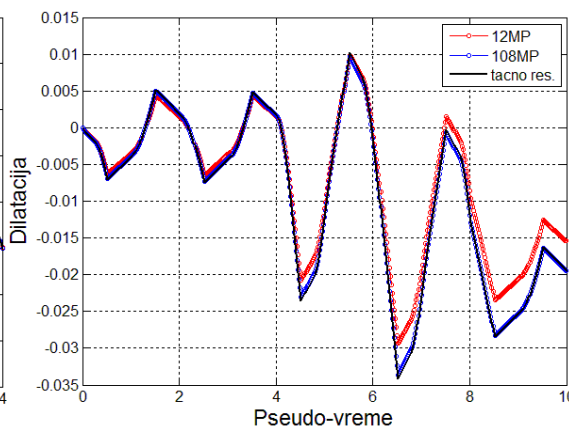


TEST B4_4

Slika B.49: Putanja normiranih momenata za 84MP i 108MP šeme

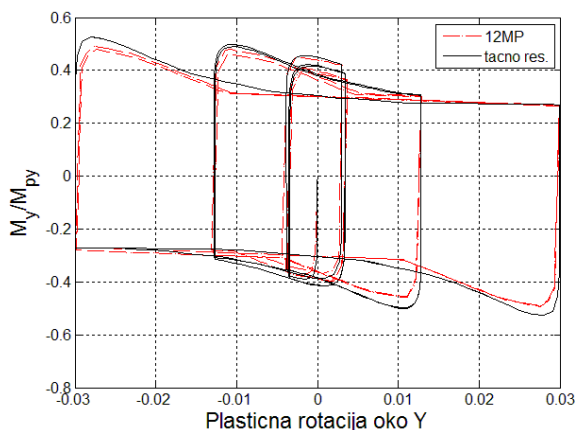


TEST A4_4

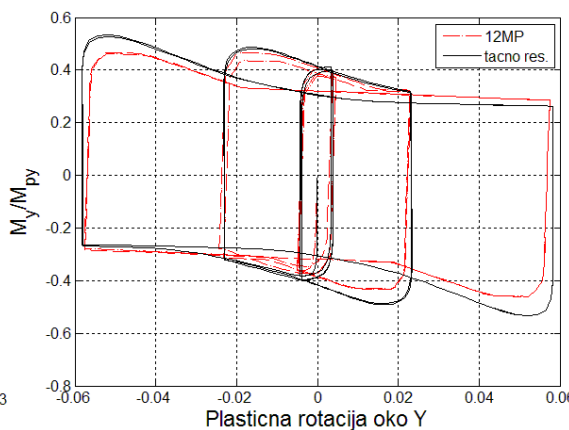


TEST B4_4

Slika B.50: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna

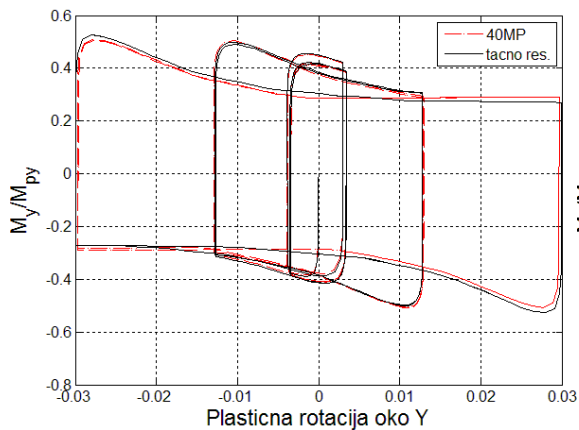


TEST A4_5

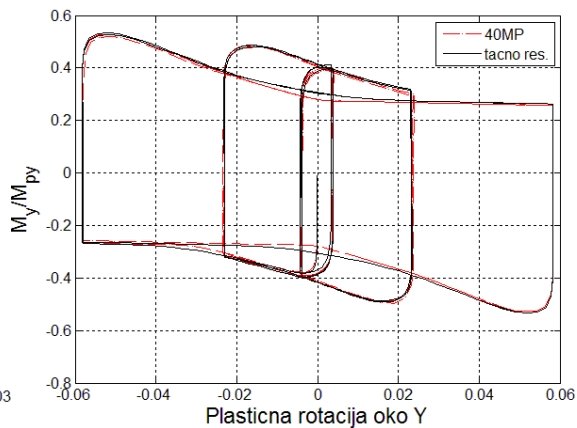


TEST B4_5

Slika B.51: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

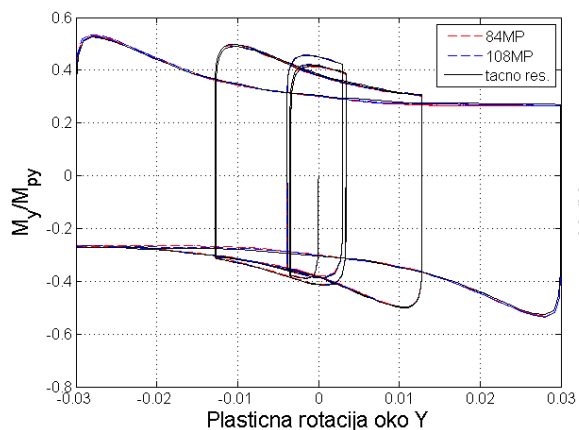


TEST A4_5

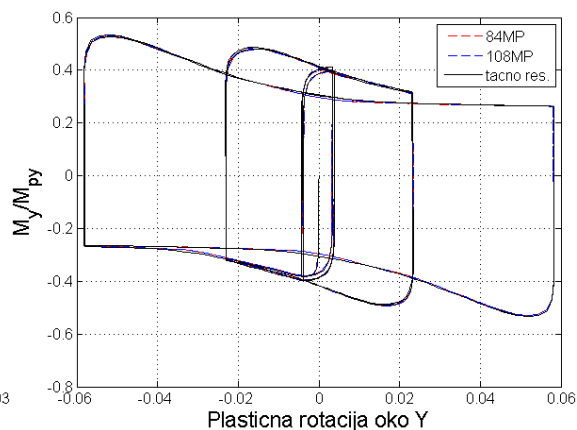


TEST B4_5

Slika B.52: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

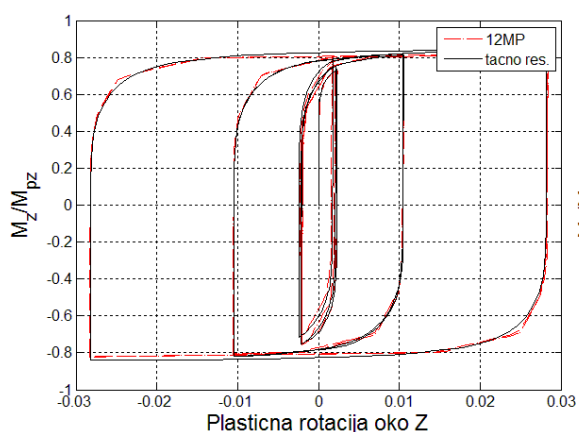


TEST A4_5

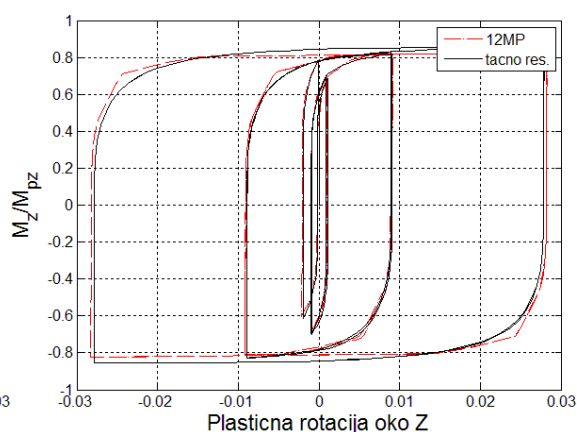


TEST B4_5

Slika B.53: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

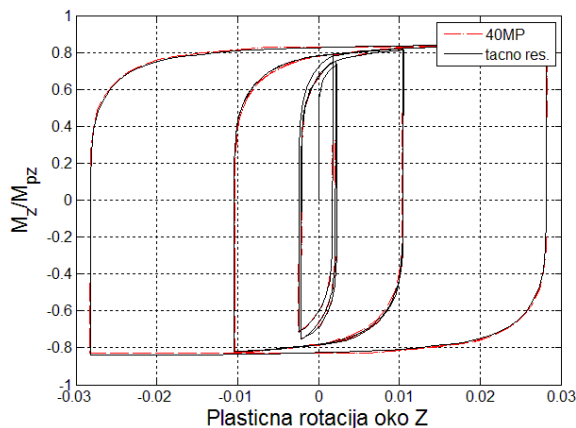


TEST A4_5

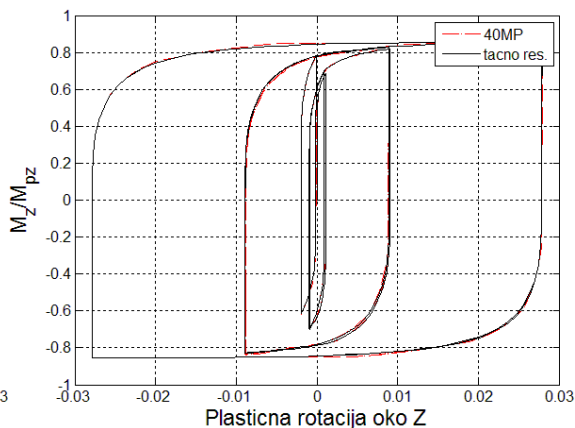


TEST B4_5

Slika B.54: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

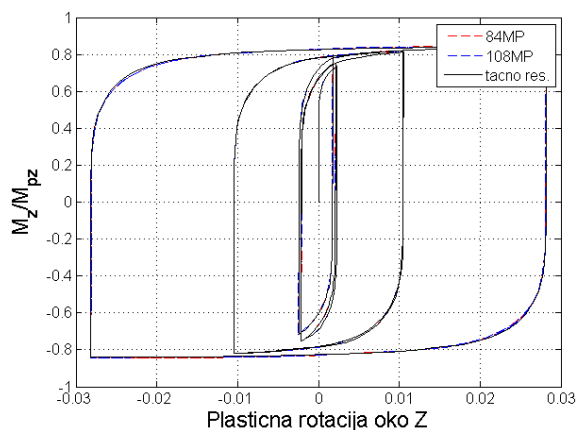


TEST A4_5

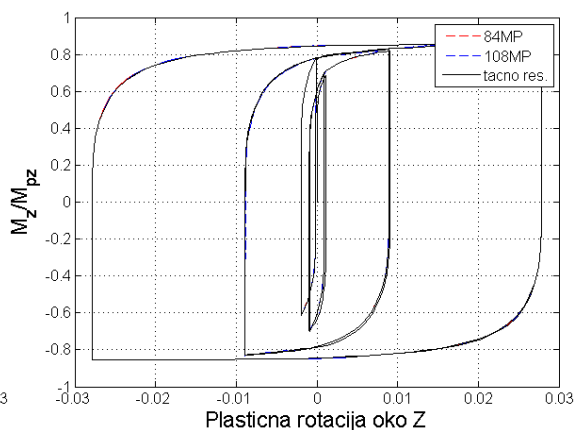


TEST B4_5

Slika B.55: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

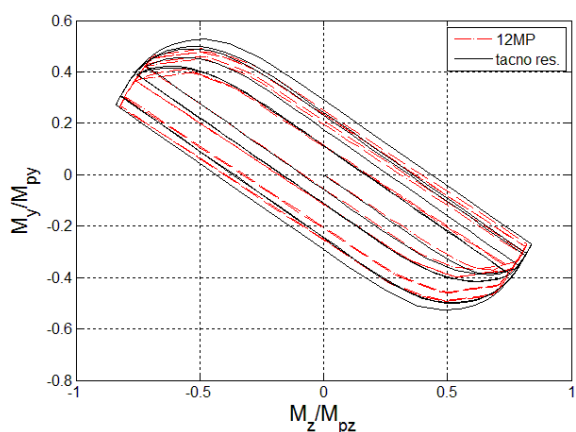


TEST A4_5

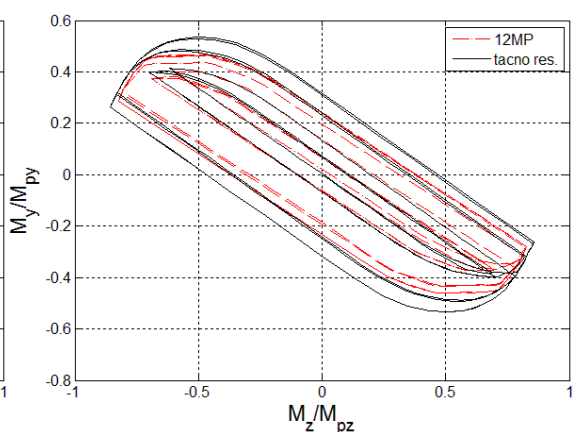


TEST B4_5

Slika B.56: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

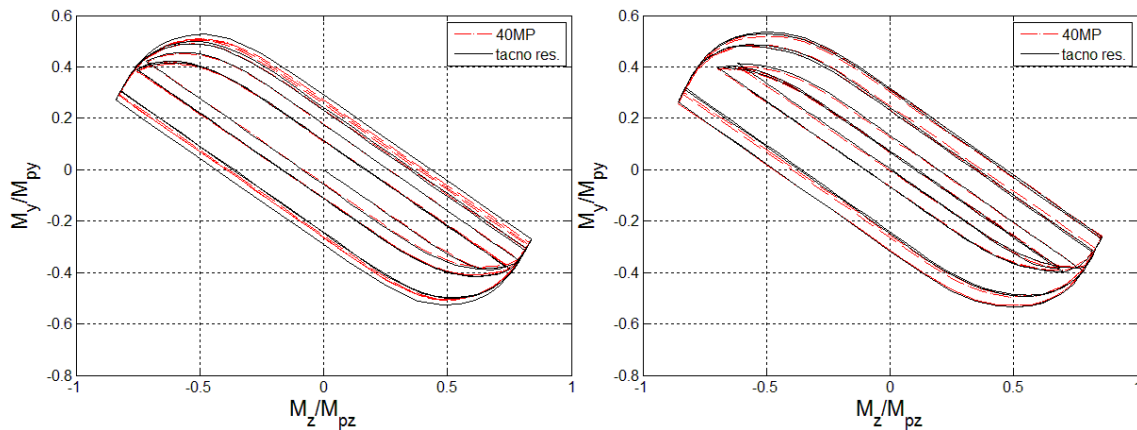


TEST A4_5



TEST B4_5

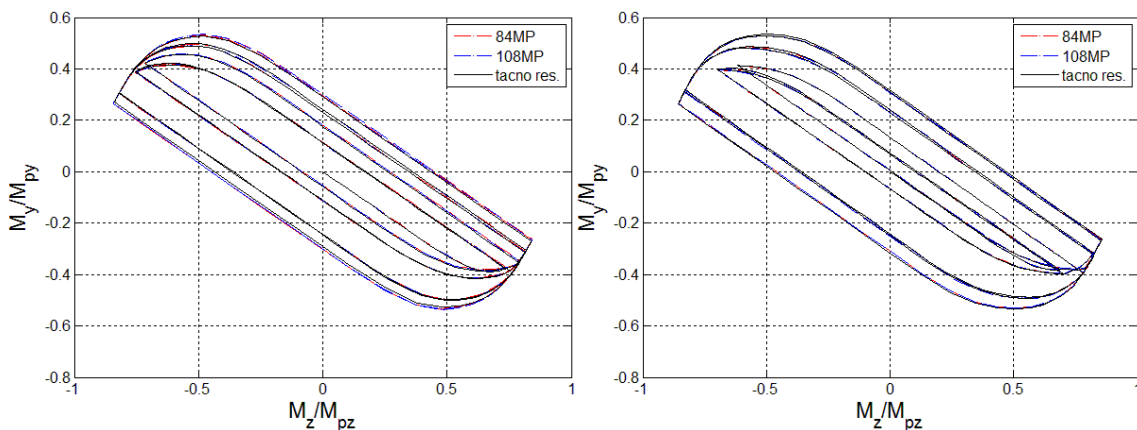
Slika B.57: Putanja normiranih momenata za šemu 12MP



TEST A4_5

TEST B4_5

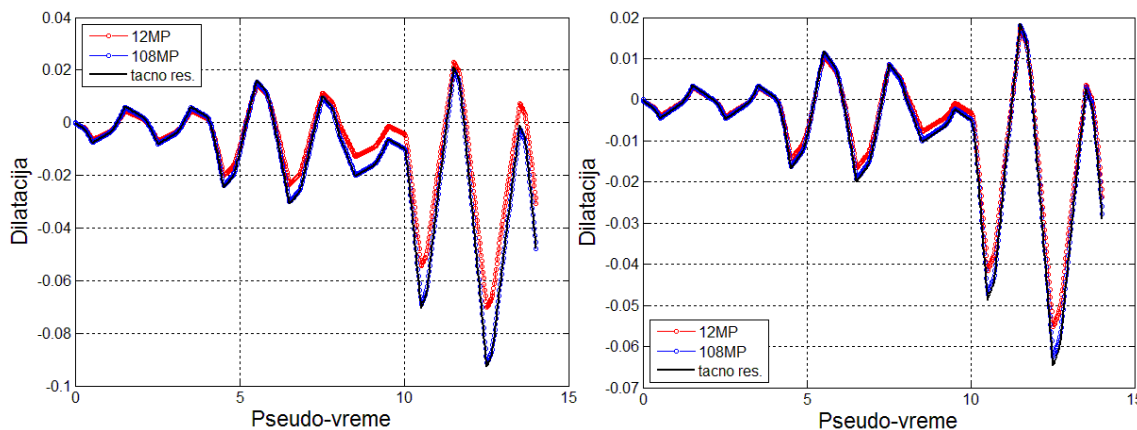
Slika B.58: Putanja normiranih momenata za šemu 40MP



TEST A4_5

TEST B4_5

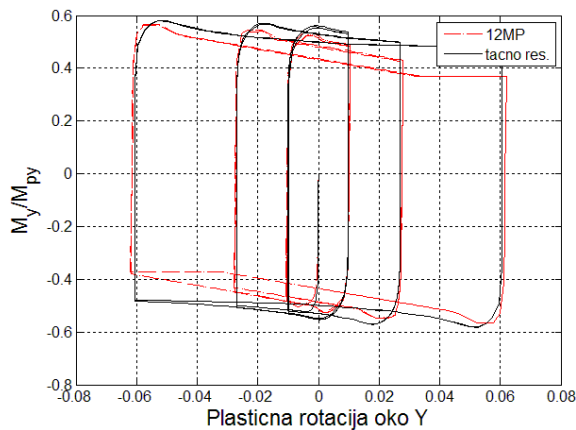
Slika B.59: Putanja normiranih momenata za 84MP i 108MP šeme



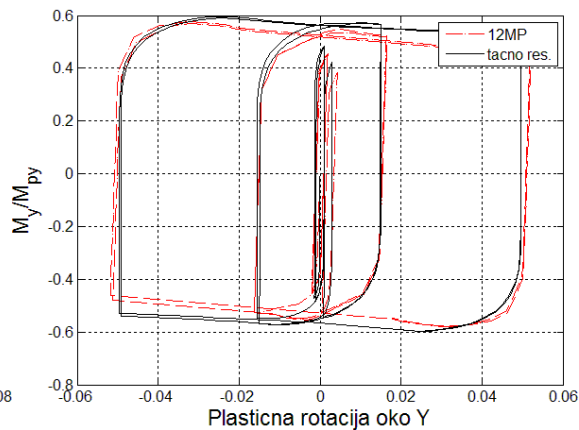
TEST A4_5

TEST B4_5

Slika B.60: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna

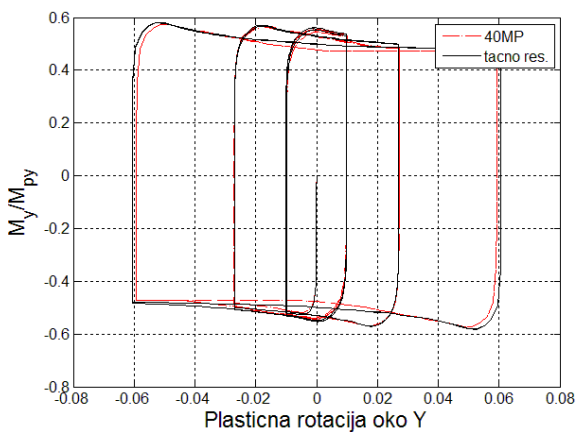


TEST A4_6

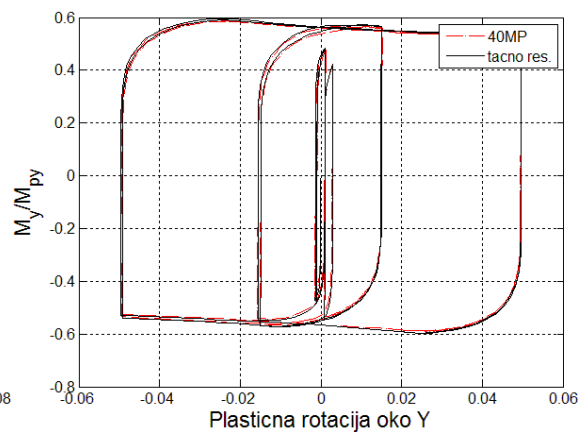


TEST B4_6

Slika B.61: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

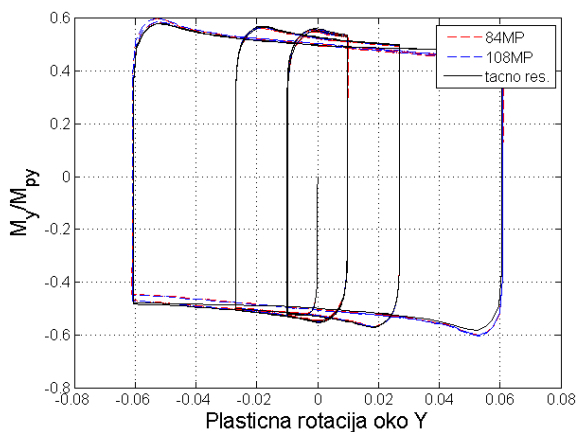


TEST A4_6

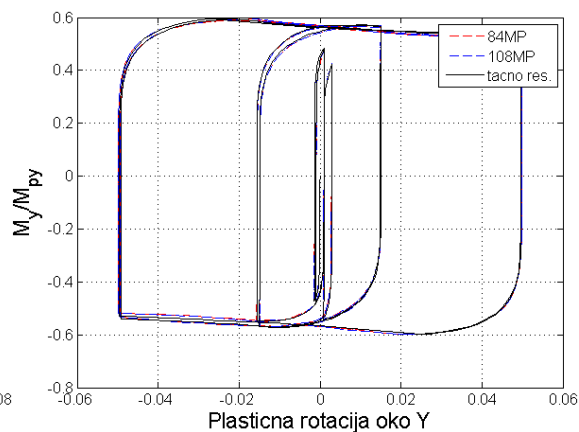


TEST B4_6

Slika B.62: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

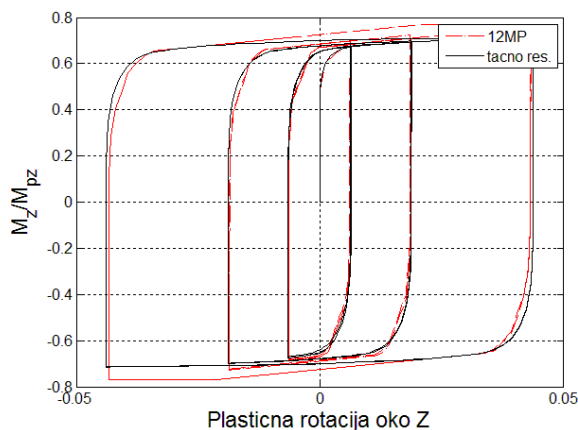


TEST A4_6

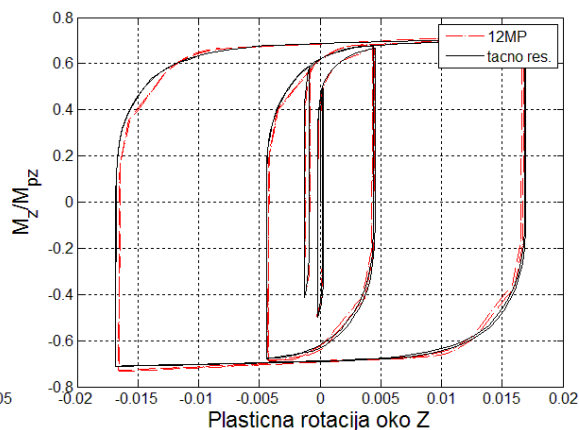


TEST B4_6

Slika B.63: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

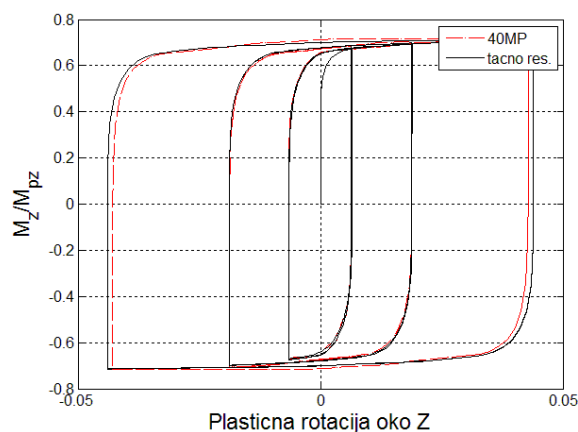


TEST A4_6

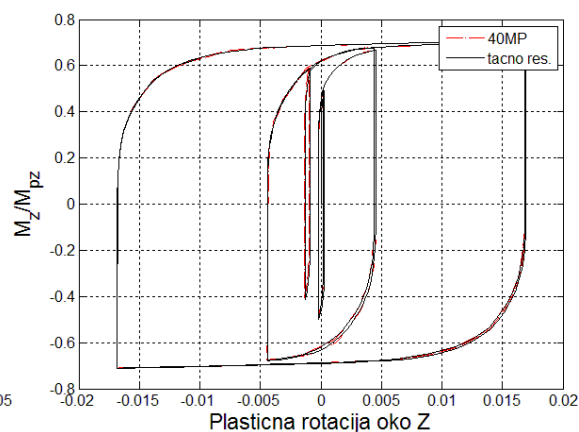


TEST B4_6

Slika B.64: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

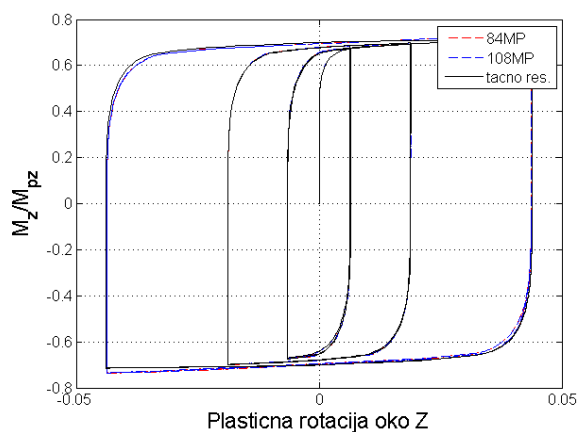


TEST A4_6

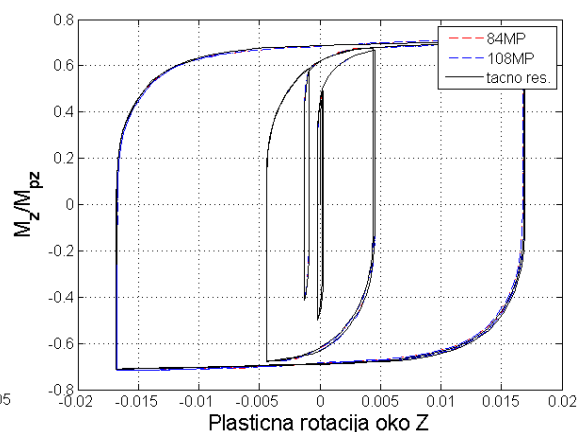


TEST B4_6

Slika B.65: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

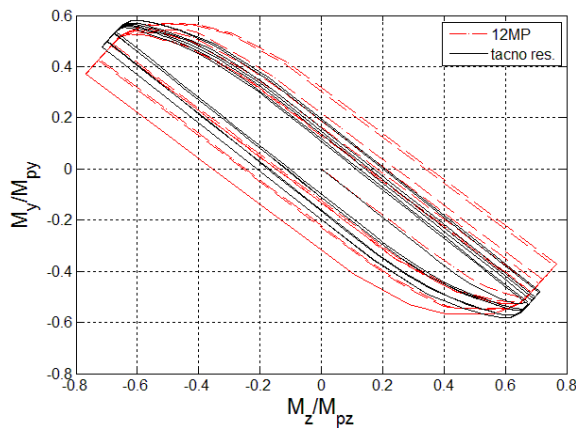


TEST A4_6

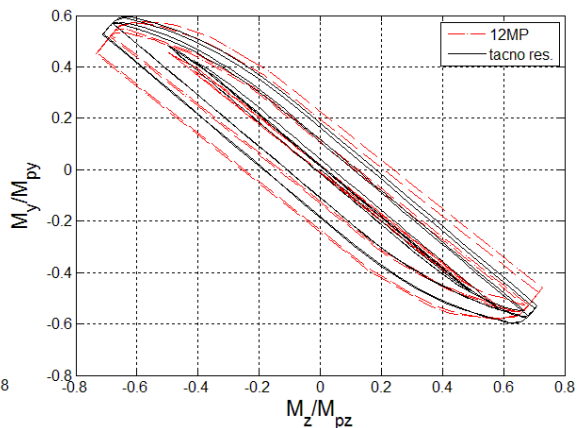


TEST B4_6

Slika B.66: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

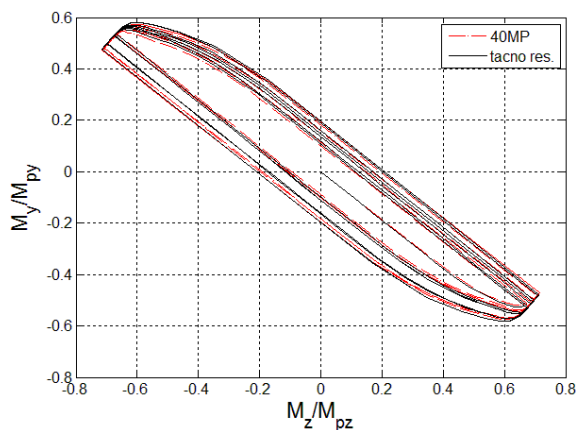


TEST A4_6

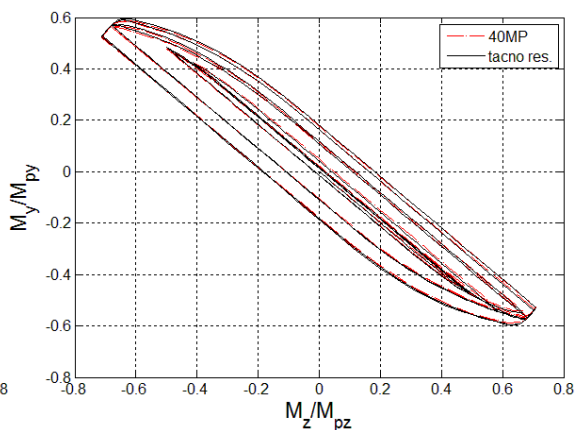


TEST B4_6

Slika B.67: Putanja normiranih momenata za šemu 12MP

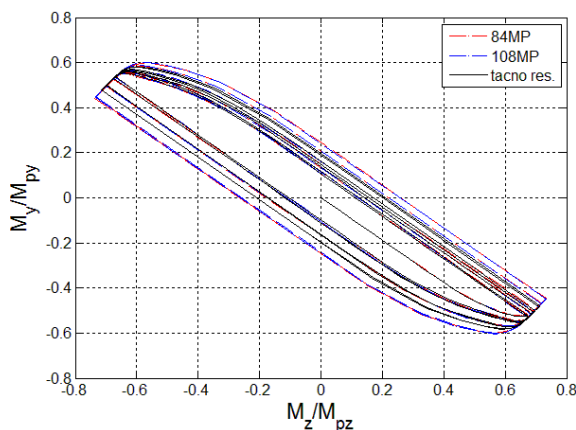


TEST A4_6

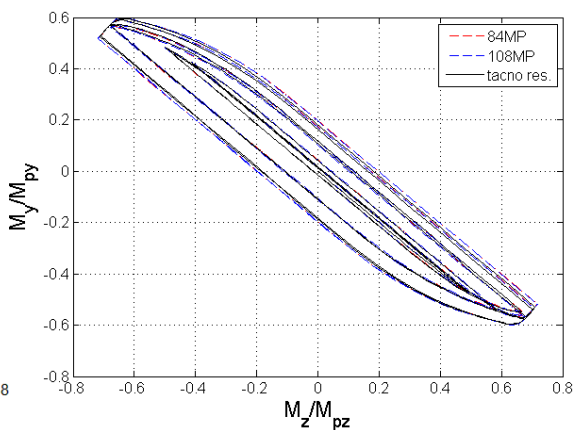


TEST B4_6

Slika B.68: Putanja normiranih momenata za šemu 40MP

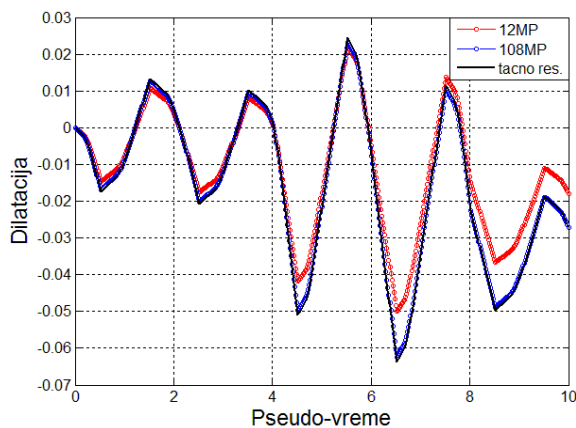


TEST A4_6

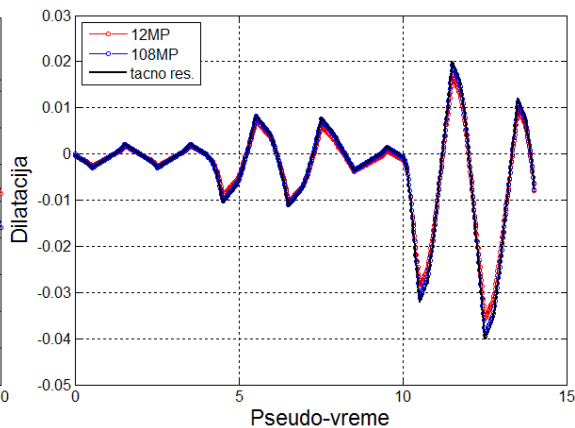


TEST B4_6

Slika B.69: Putanja normiranih momenata za 84MP i 108MP šeme

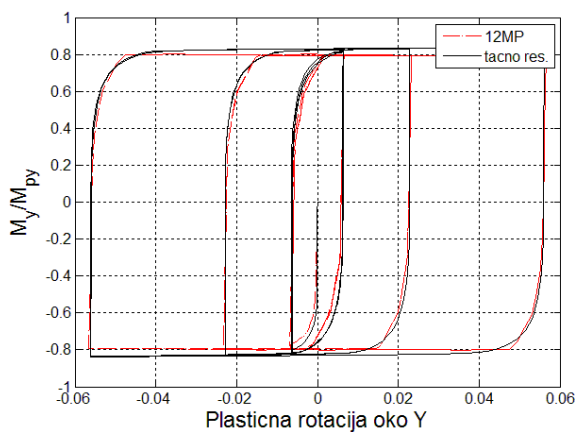


TEST A4_6

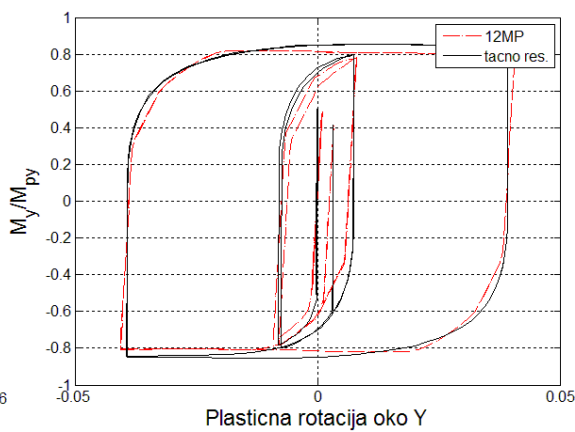


TEST B4_6

Slika B.70: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna

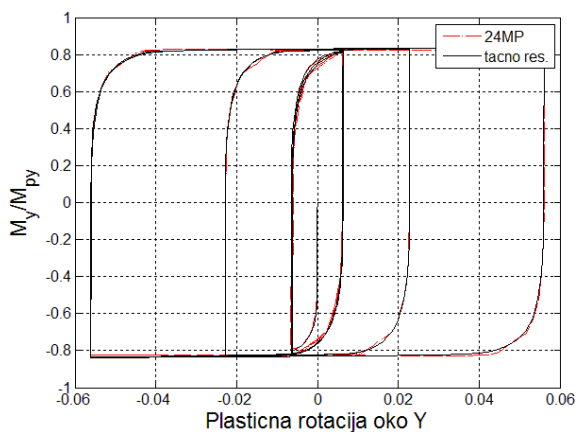


TEST A4_7

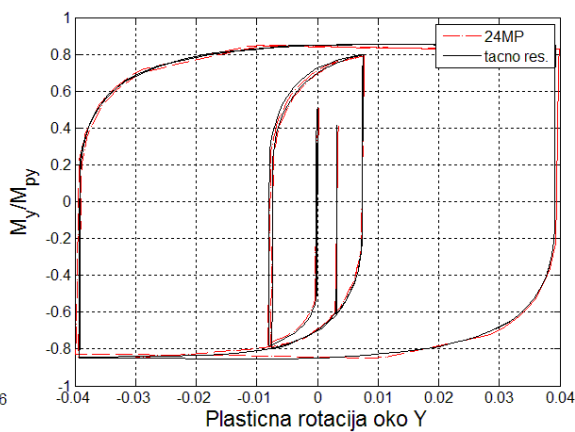


TEST B4_7

Slika B.71: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

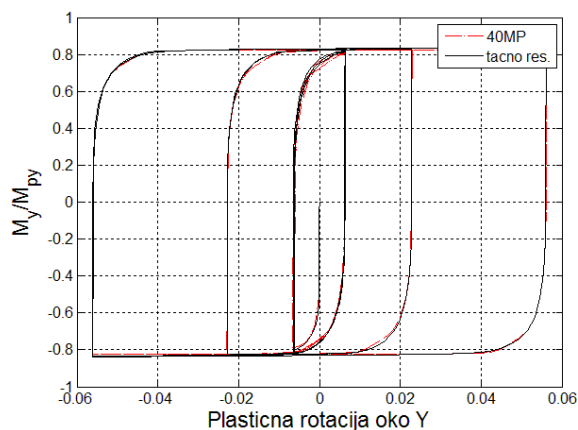


TEST A4_7

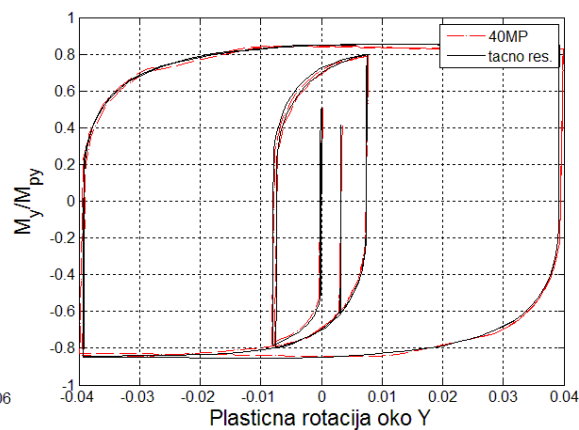


TEST B4_7

Slika B.72: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 24MP

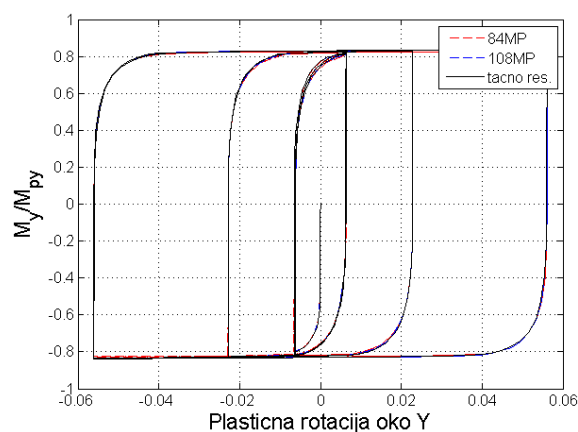


TEST A4_7

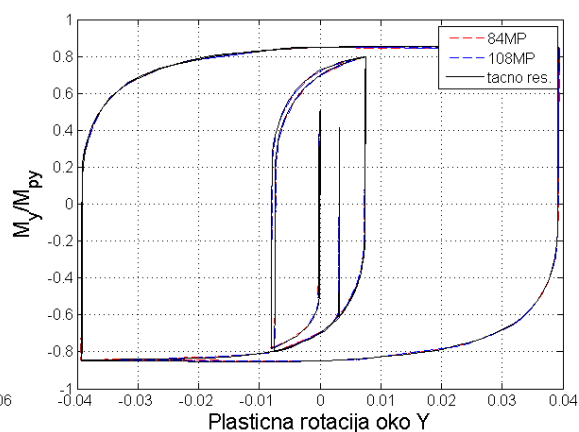


TEST B4_7

Slika B.73: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

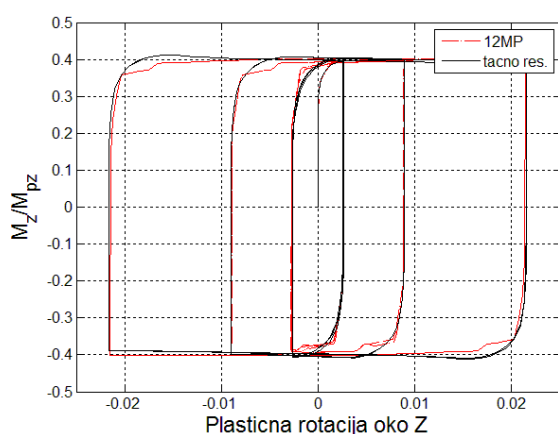


TEST A4_7

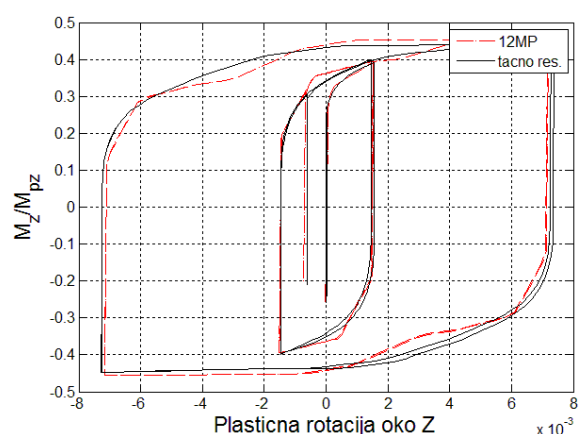


TEST B4_7

Slika B.74: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

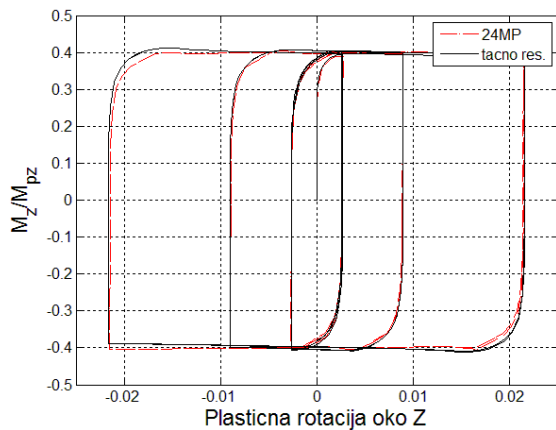


TEST A4_7

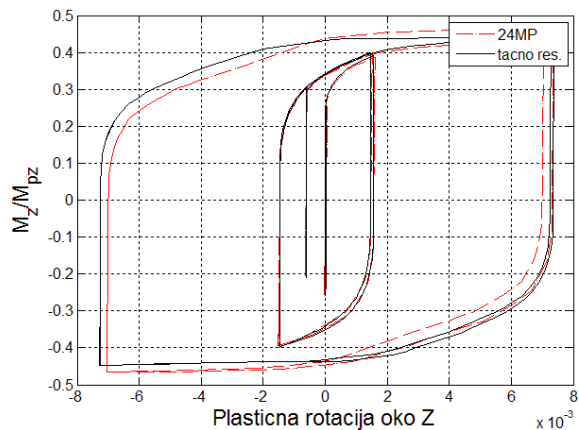


TEST B4_7

Slika B.75: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

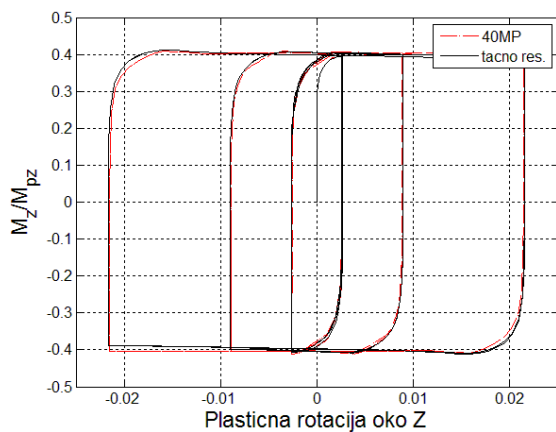


TEST A4_7

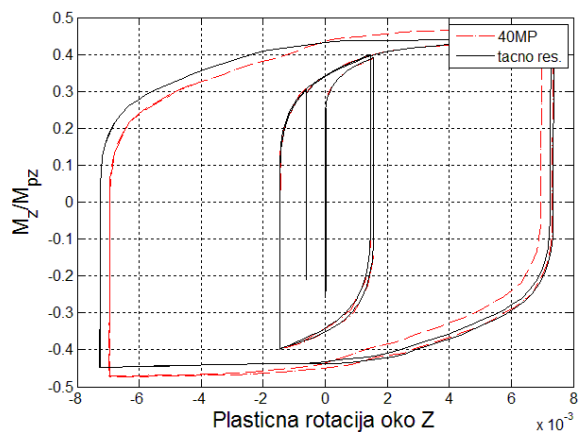


TEST B4_7

Slika B.76: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 24MP

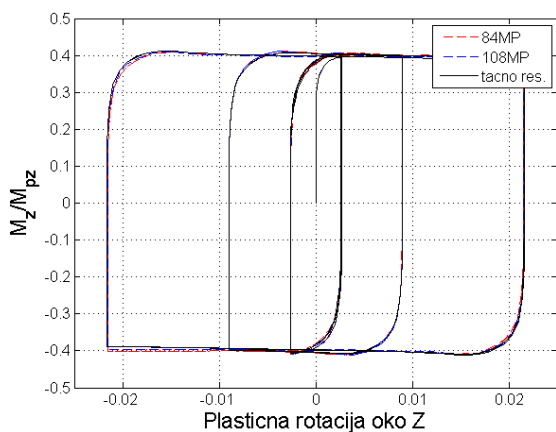


TEST A4_7

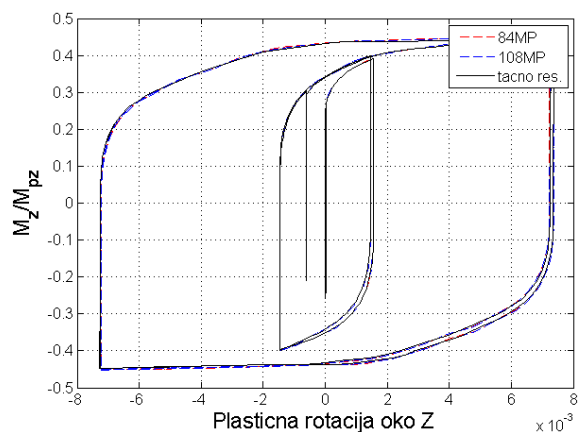


TEST B4_7

Slika B.77: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

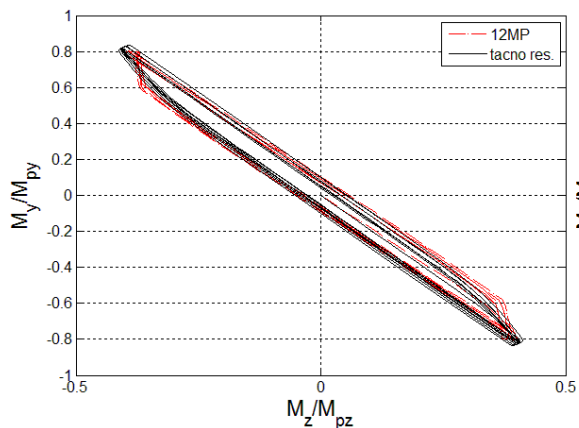


TEST A4_7

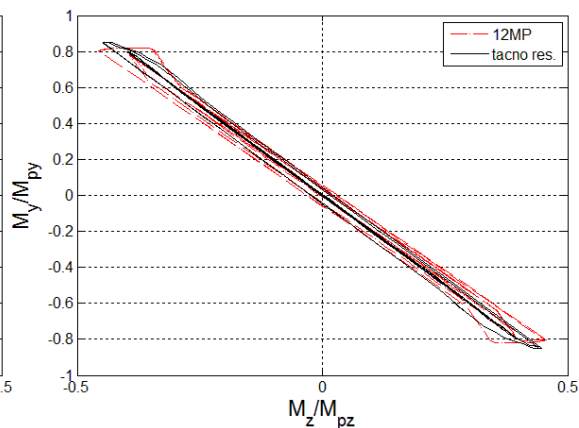


TEST B4_7

Slika B.78: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

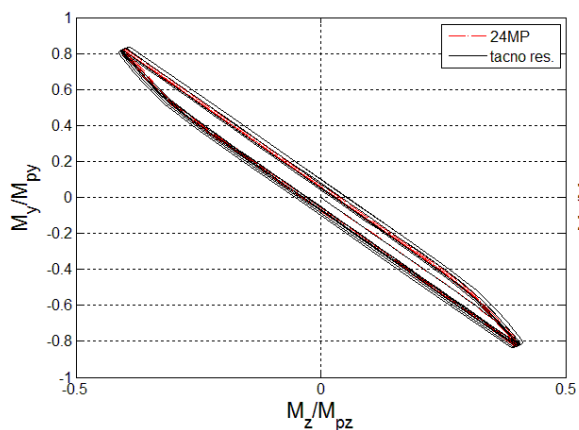


TEST A4_7

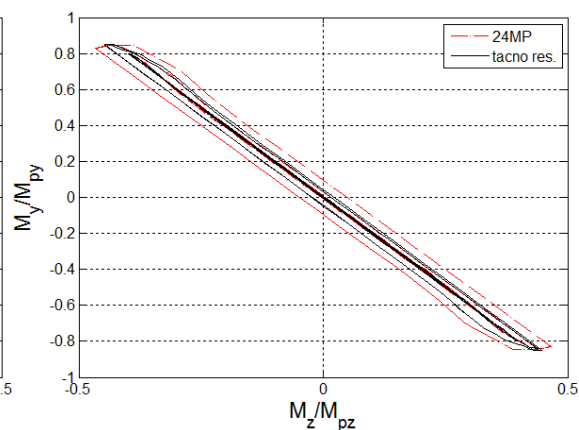


TEST B4_7

Slika B.79: Putanja normiranih momenata za šemu 12MP

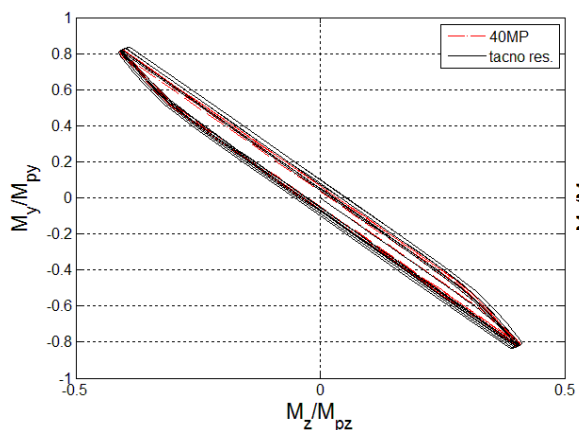


TEST A4_7

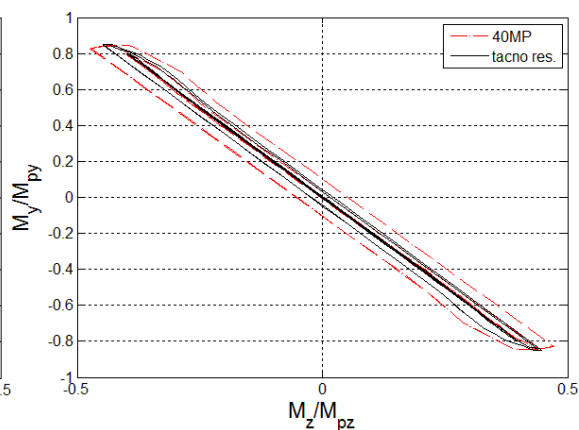


TEST B4_7

Slika B.80: Putanja normiranih momenata za šemu 24MP

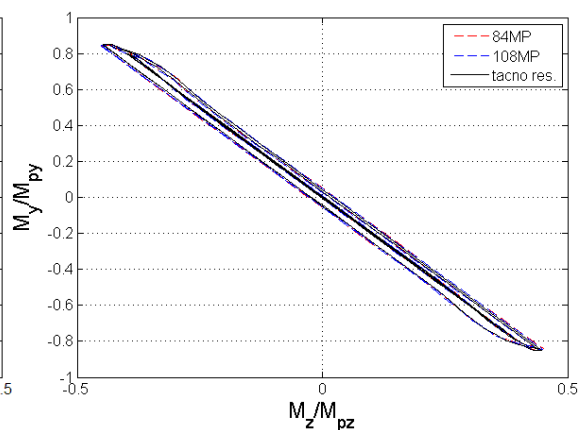
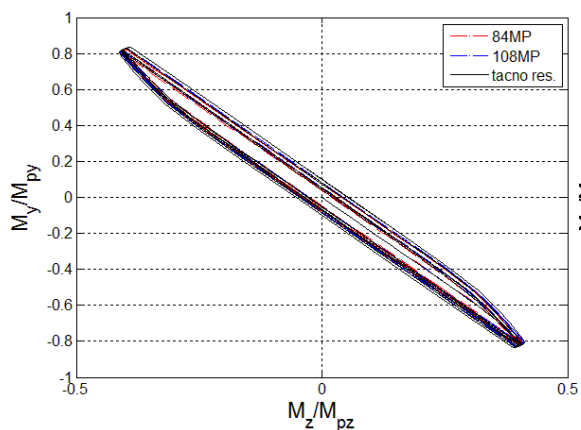


TEST A4_7

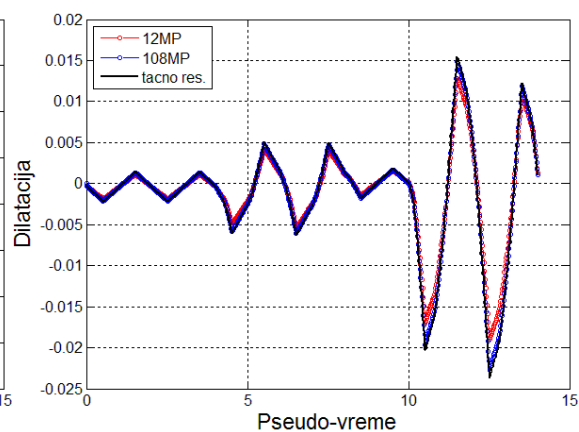
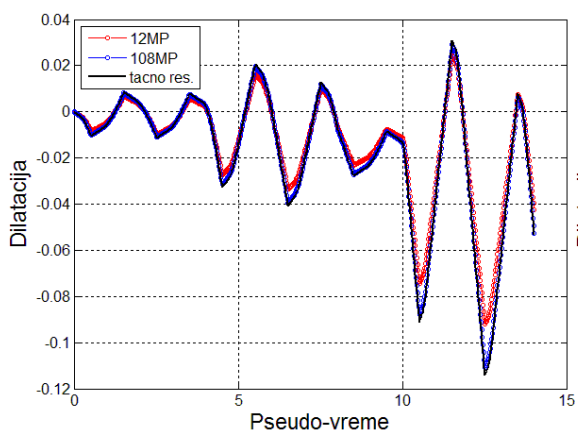


TEST B4_7

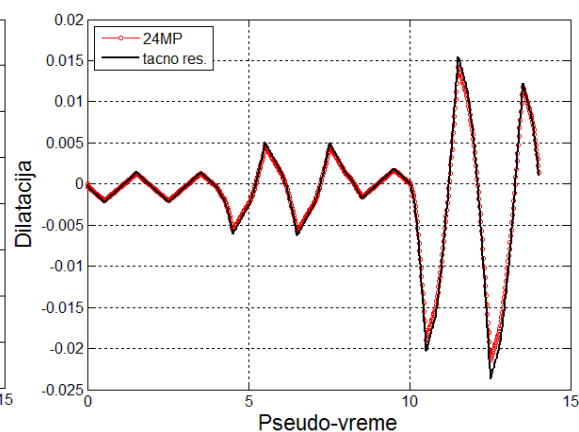
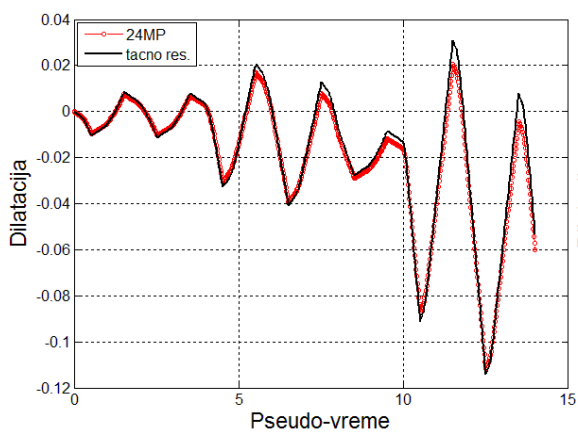
Slika B.81: Putanja normiranih momenata za šemu 40MP



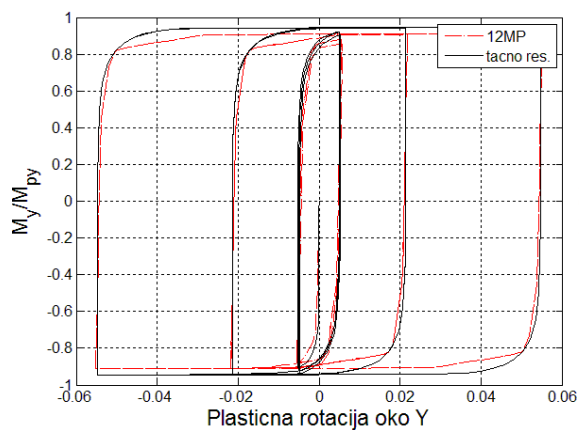
Slika B.82: Putanja normiranih momenata za 84MP i 108MP šeme



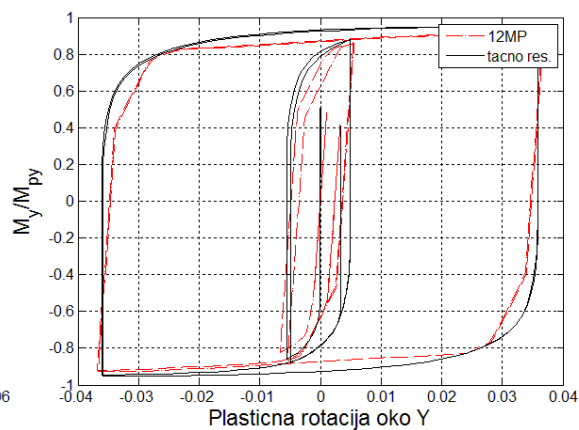
Slika B.83: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 12MP i 108MP šeme



Slika B.84: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 24MP šemu

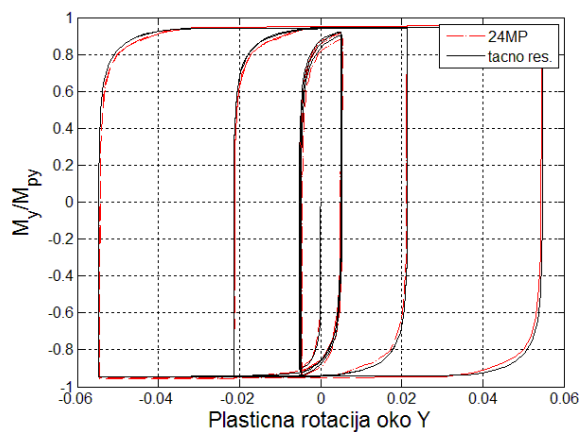


TEST A4_8

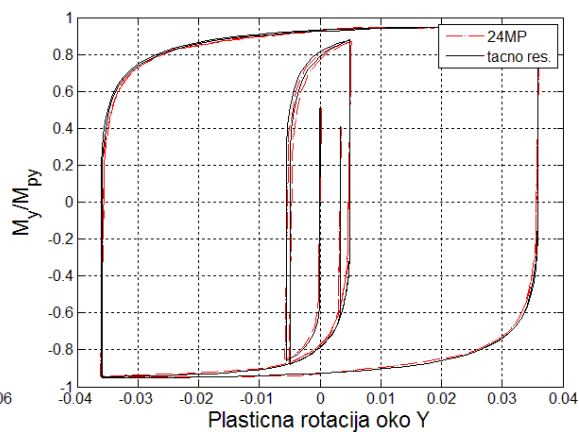


TEST B4_8

Slika B.85: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

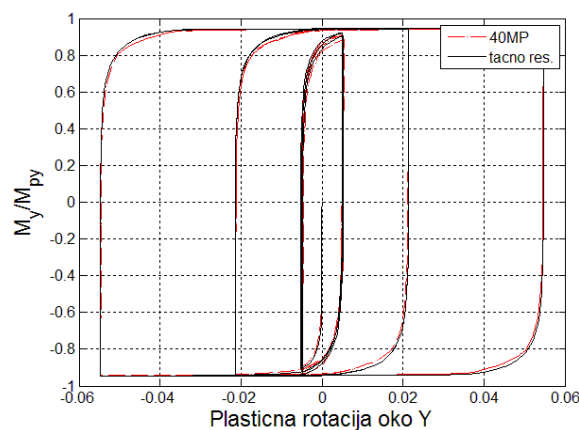


TEST A4_8

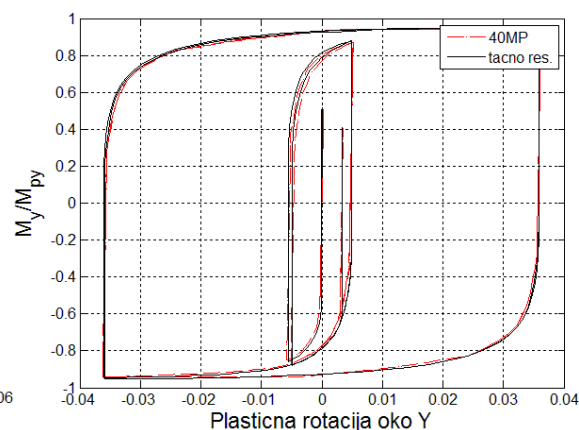


TEST B4_8

Slika B.86: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 24MP

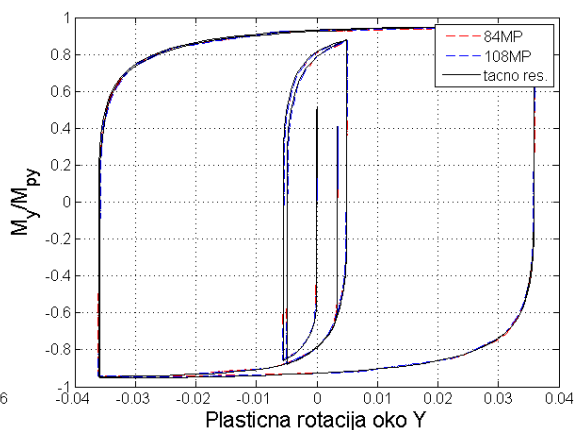
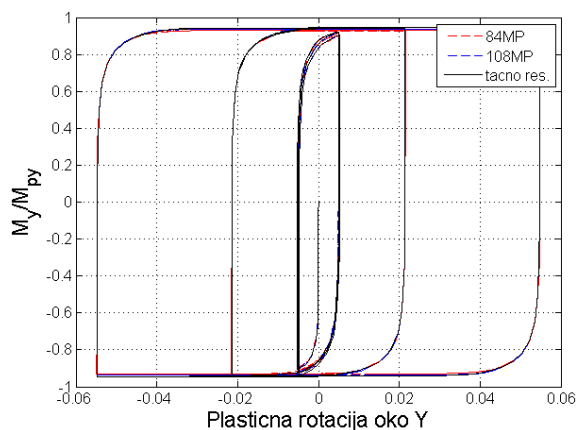


TEST A4_8

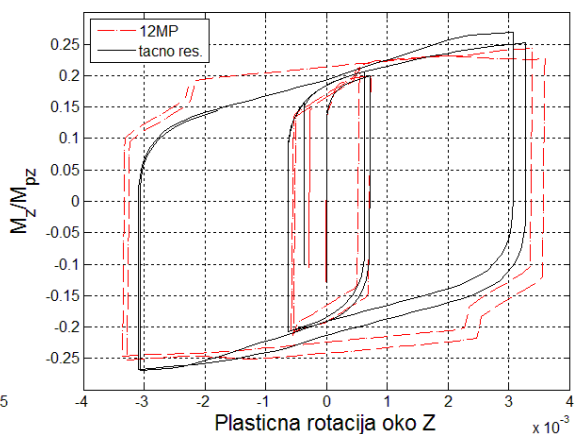
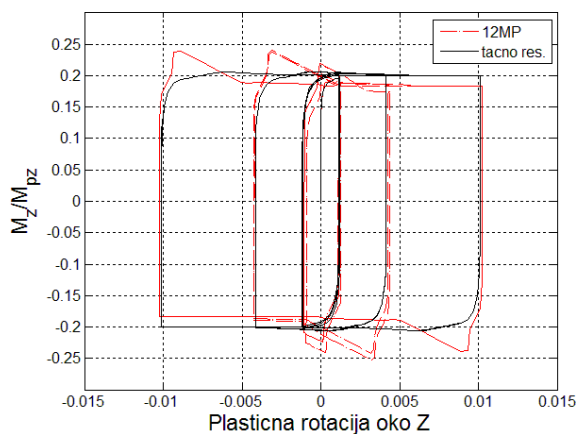


TEST B4_8

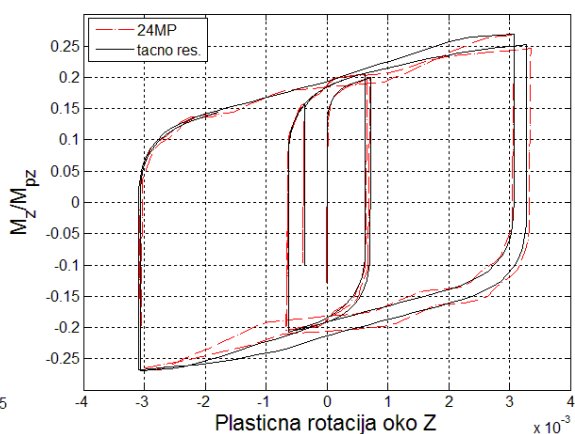
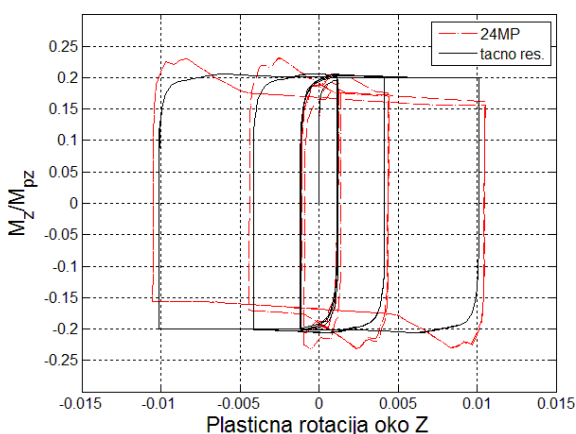
Slika B.87: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 40MP



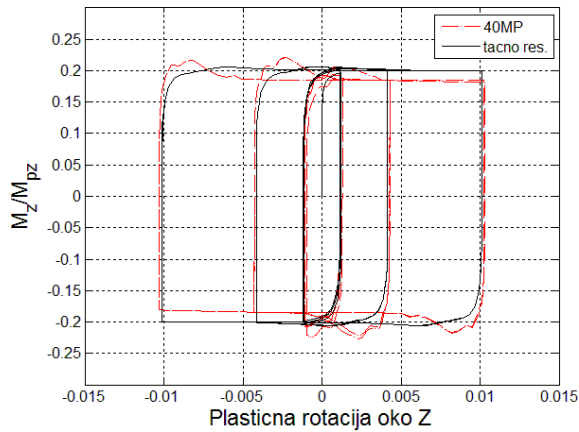
Slika B.88: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme



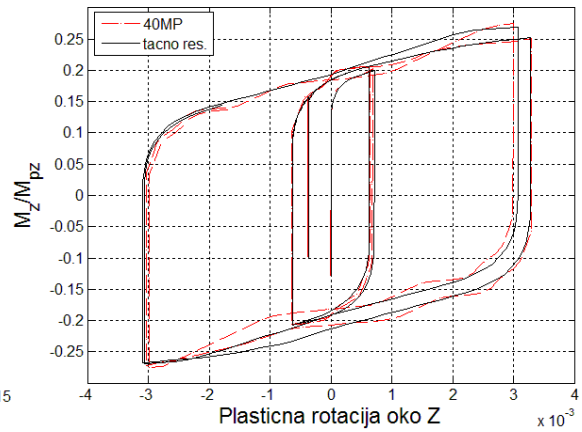
Slika B.89: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 12MP



Slika B.90: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 24MP

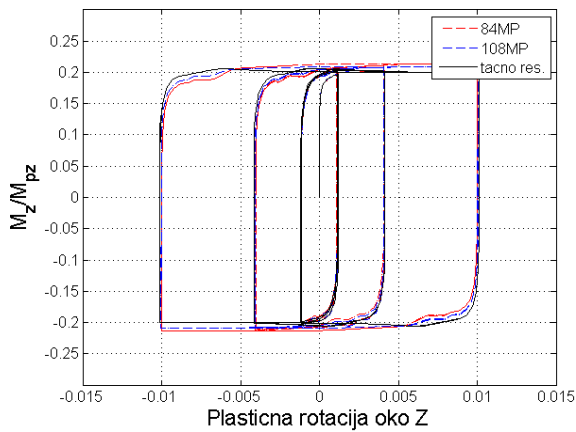


TEST A4_8

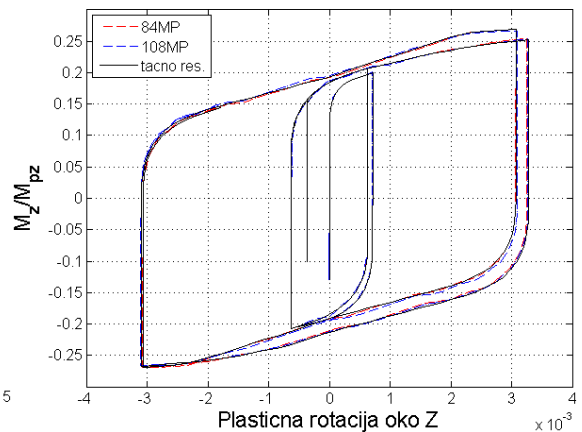


TEST B4_8

Slika B.91: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

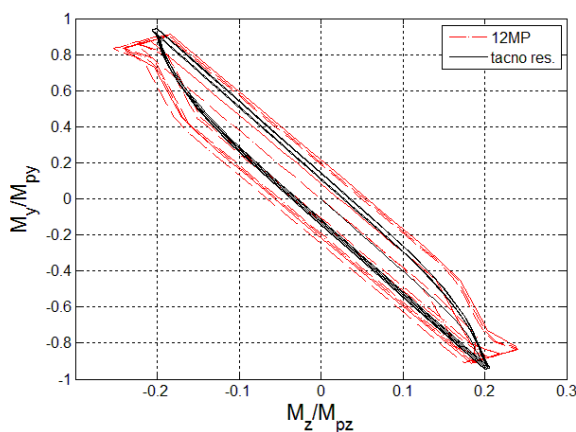


TEST A4_8

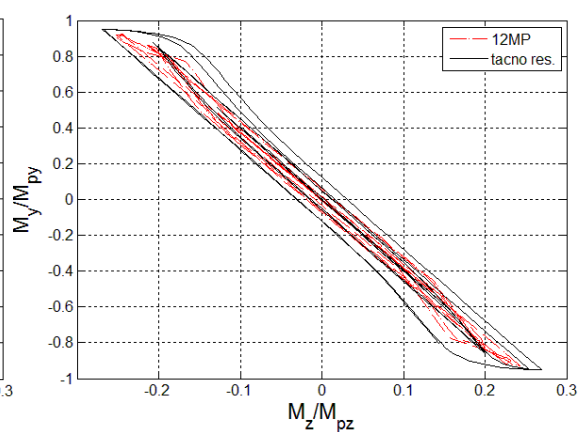


TEST B4_8

Slika B.92: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

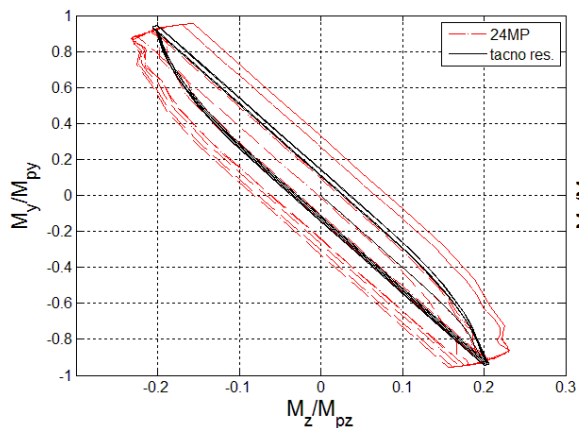


TEST A4_8

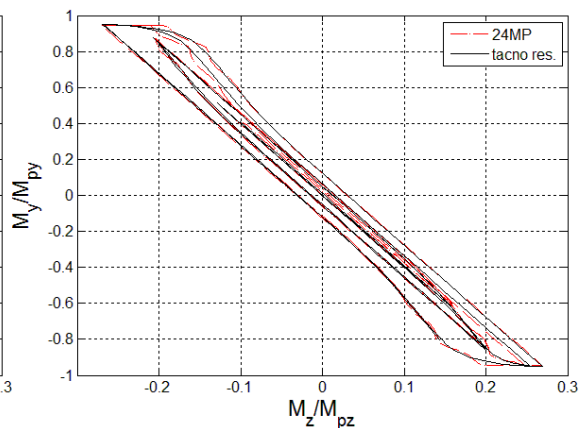


TEST B4_8

Slika B.93: Putanja normiranih momenata za šemu 12MP

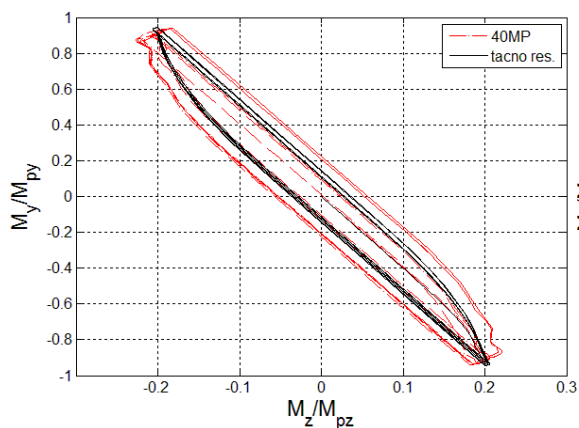


TEST A4_8

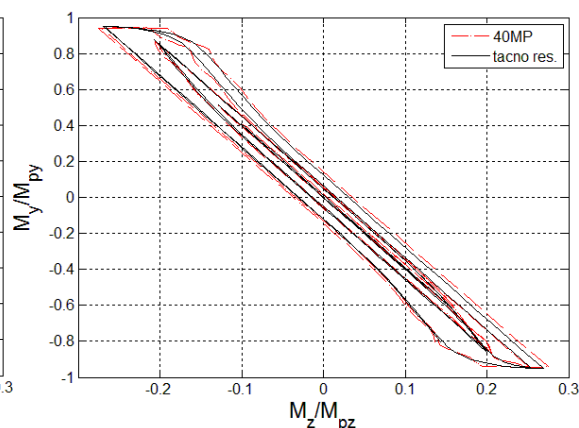


TEST B4_8

Slika B.94: Putanja normiranih momenata za šemu 24MP

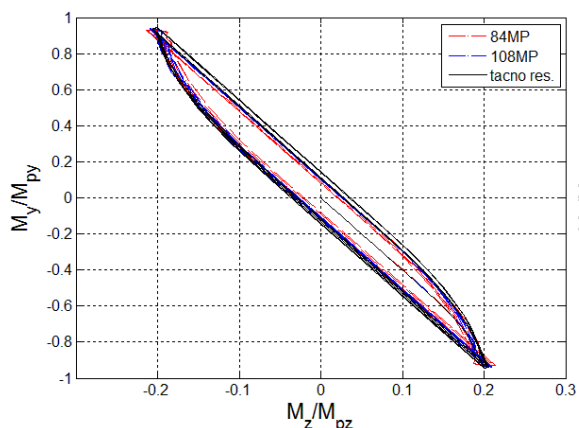


TEST A4_8

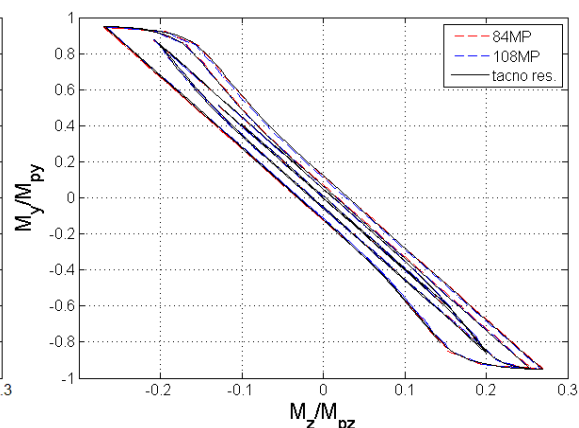


TEST B4_8

Slika B.95: Putanja normiranih momenata za šemu 40MP

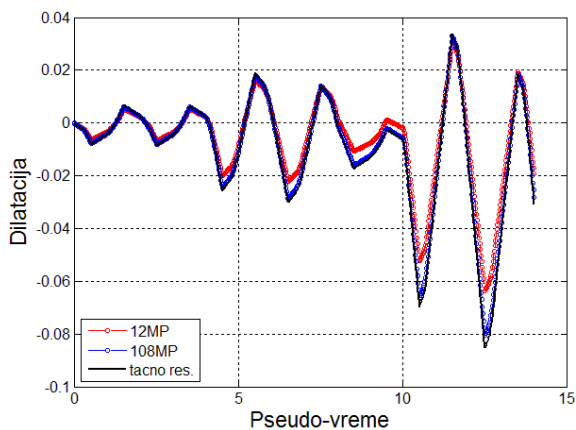


TEST A4_8

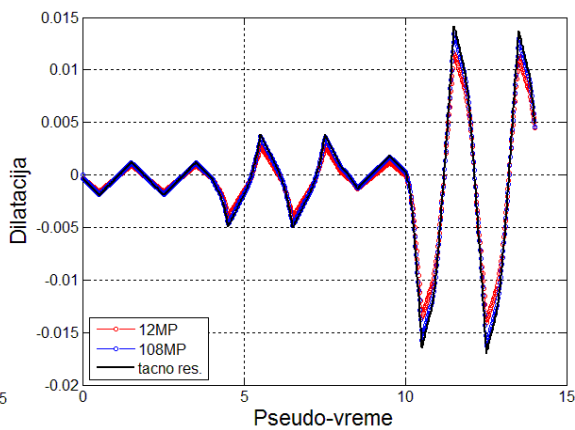


TEST B4_8

Slika B.96: Putanja normiranih momenata za 84MP i 108MP šeme

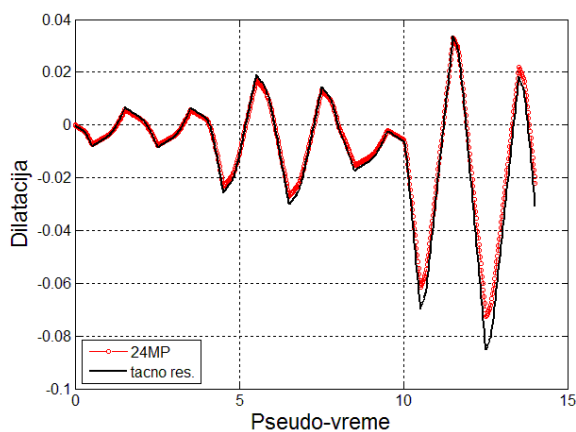


TEST A4_8

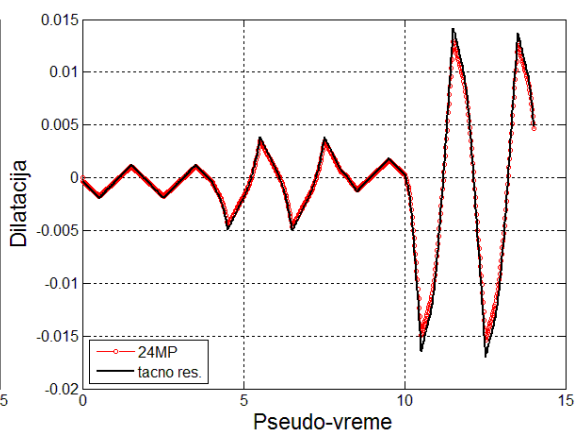


TEST B4_8

Slika B.97: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 12MP i 108MP šeme

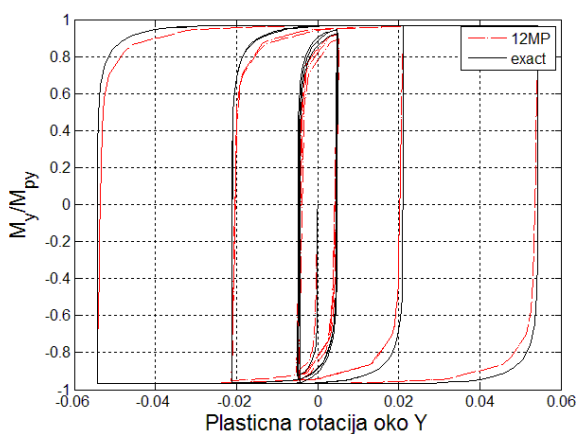


TEST A4_8

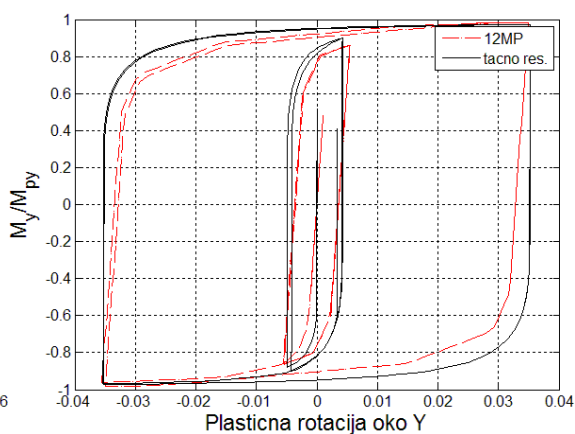


TEST B4_8

Slika B.98: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 24MP šemu

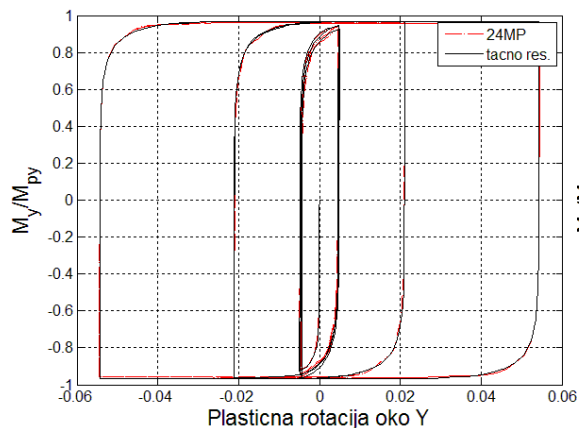


TEST A4_9

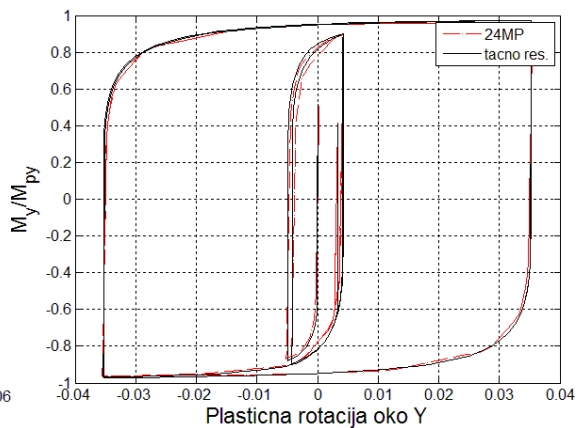


TEST B4_9

Slika B.99: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

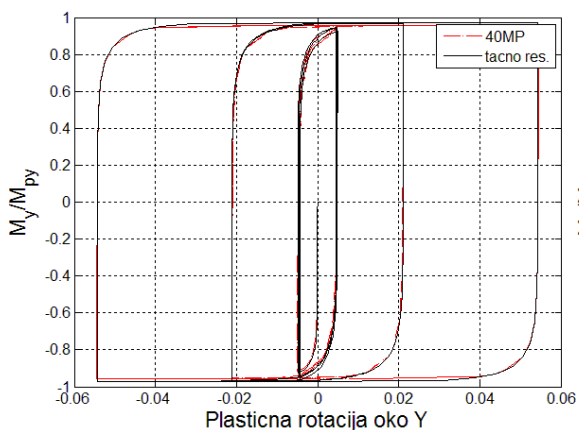


TEST A4_9

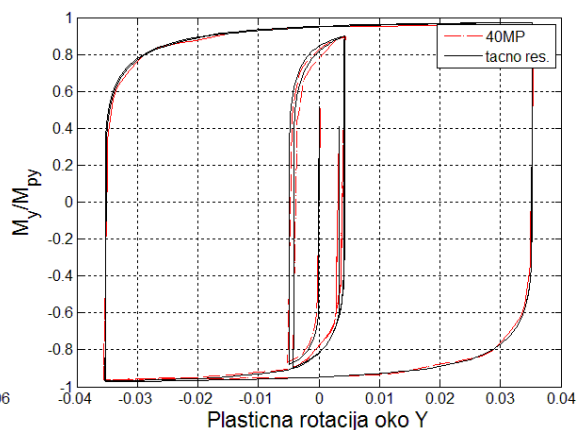


TEST B4_9

Slika B.100: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 24MP

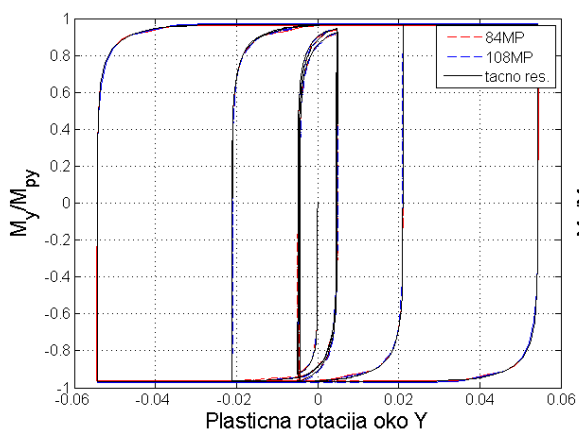


TEST A4_9

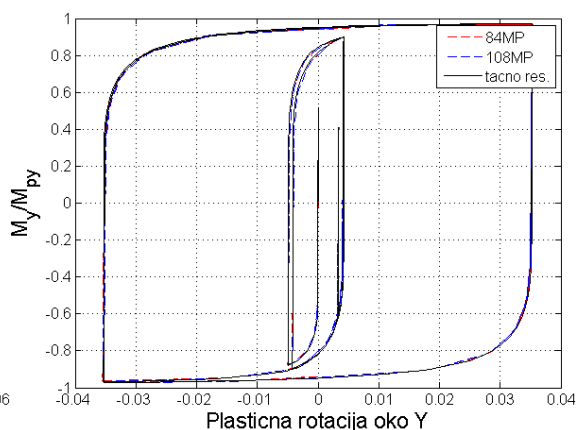


TEST B4_9

Slika B.101: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

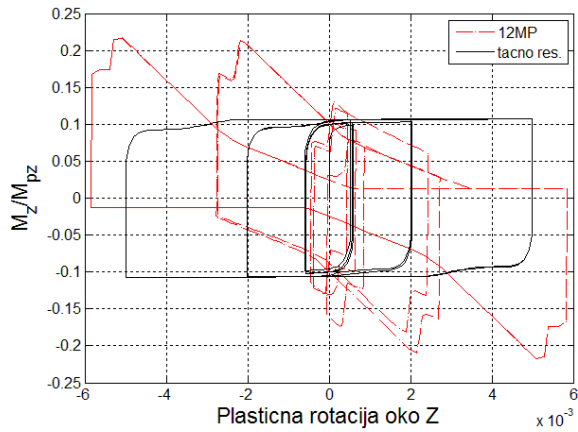


TEST A4_9

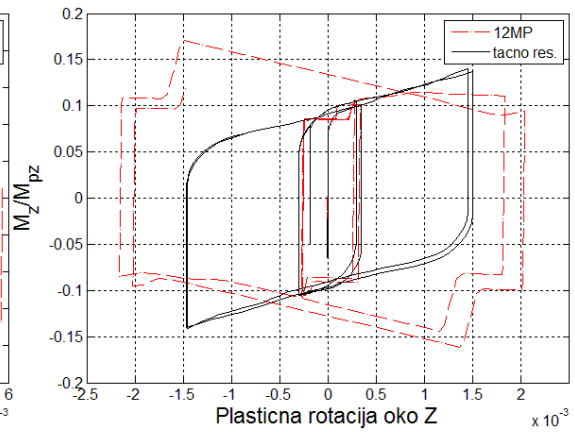


TEST B4_9

Slika B.102: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

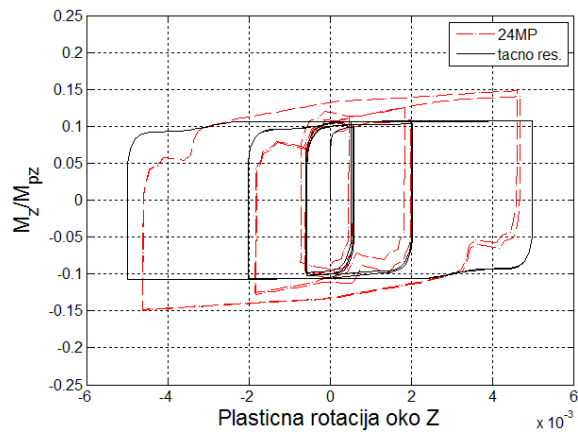


TEST A4_9

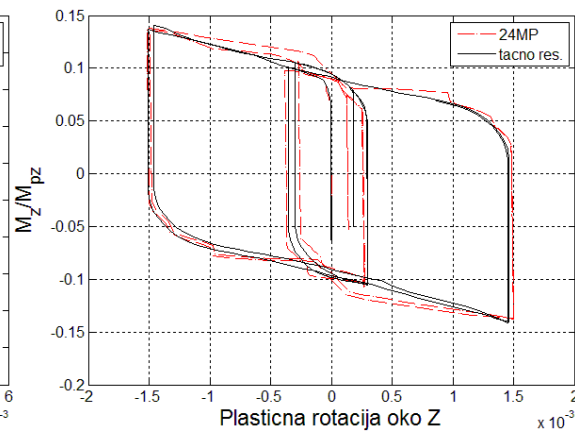


TEST B4_9

Slika B.103: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 12MP

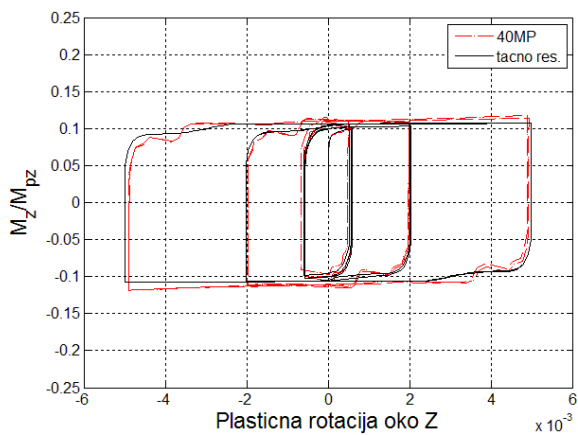


TEST A4_9

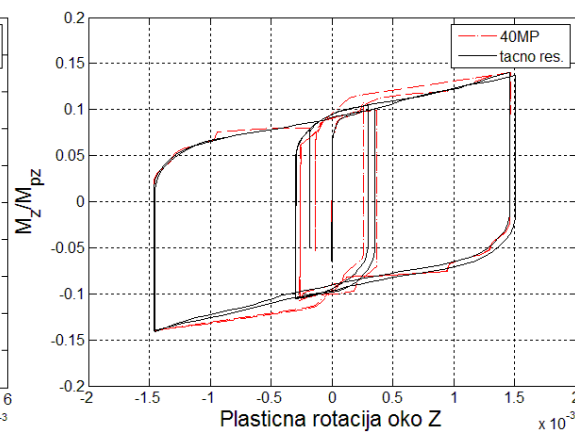


TEST B4_9

Slika B.104: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 24MP

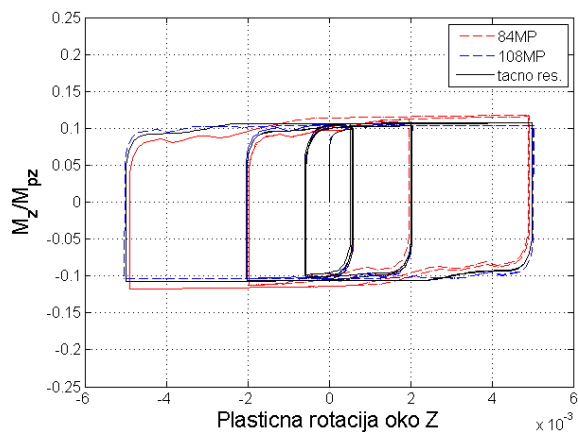


TEST A4_9

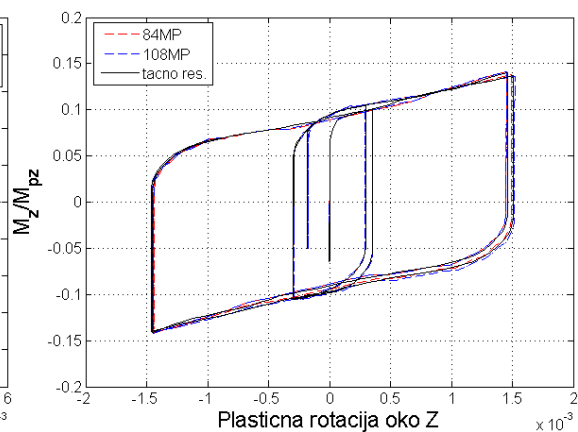


TEST B4_9

Slika B.105: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za šemu 40MP

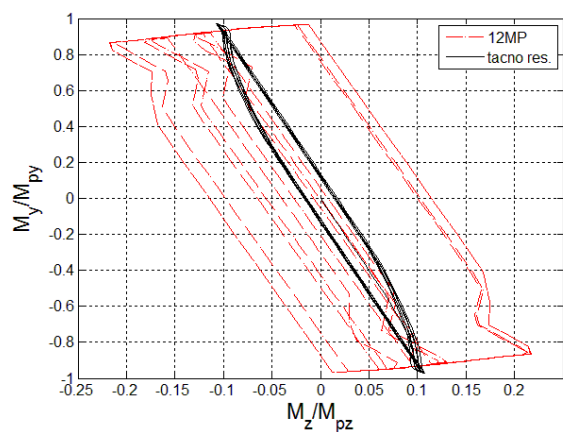


TEST A4_9

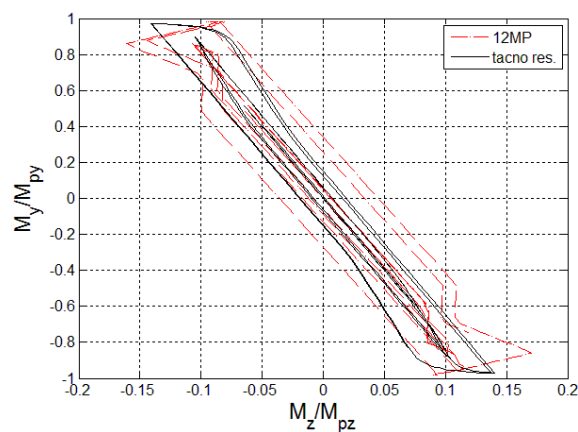


TEST B4_9

Slika B.106: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

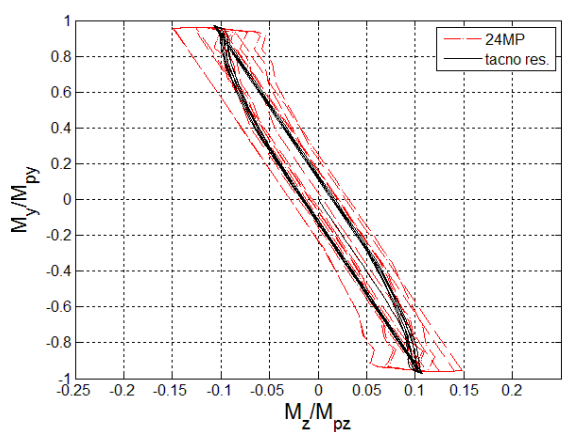


TEST A4_9

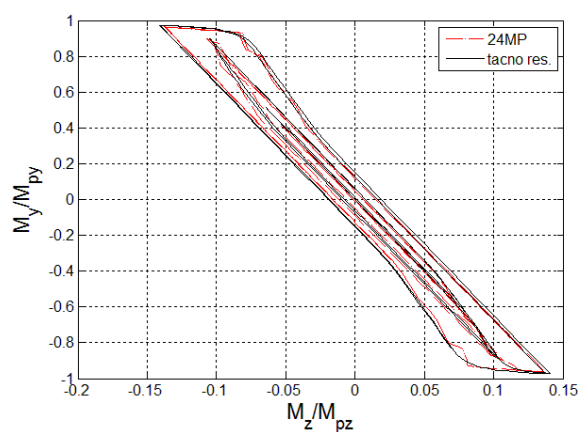


TEST B4_9

Slika B.107: Putanja normiranih momenata za šemu 12MP

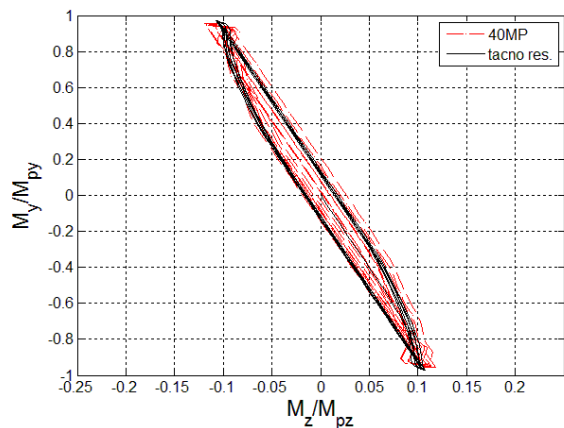


TEST A4_9

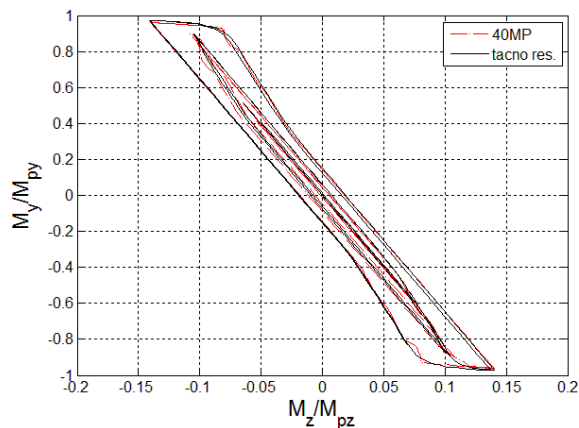


TEST B4_9

Slika B.108: Putanja normiranih momenata za šemu 24MP

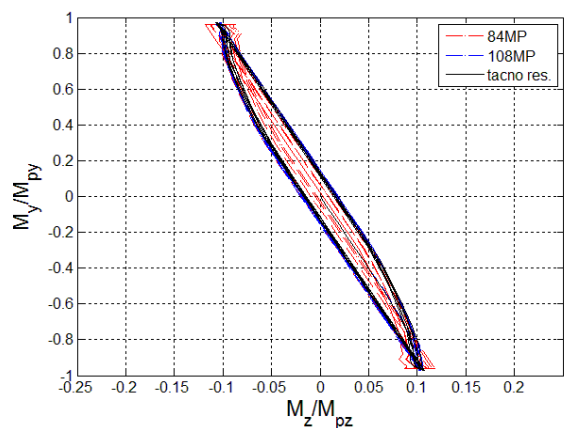


TEST A4_9

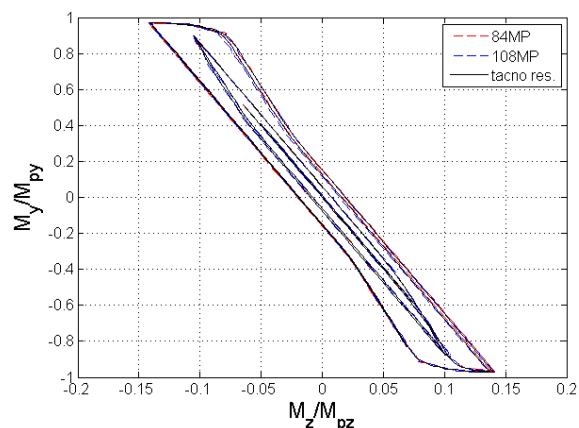


TEST B4_9

Slika B.109: Putanja normiranih momenata za šemu 40MP

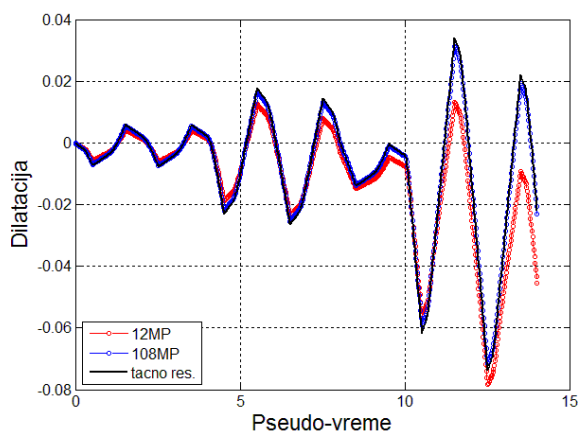


TEST A4_9

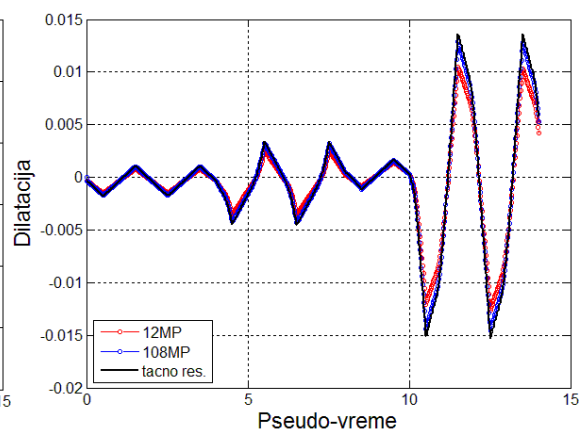


TEST B4_9

Slika B.110: Putanja normiranih momenata za 84MP i 108MP šeme

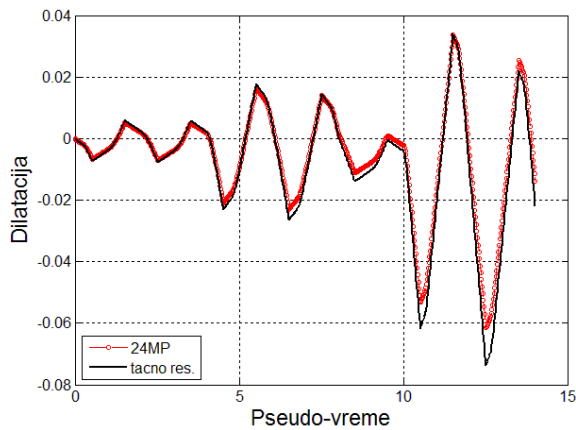


TEST A4_9

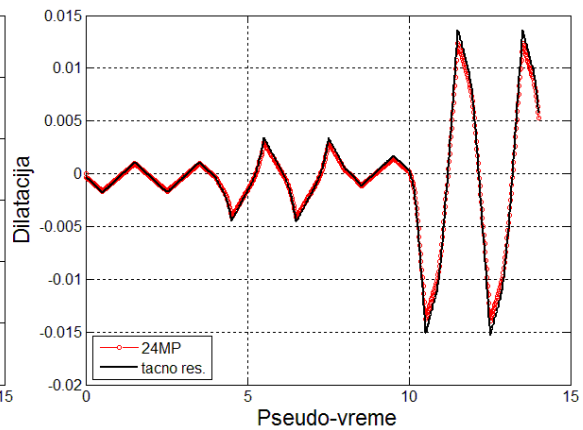


TEST B4_9

Slika B.111: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 12MP i 108MP šeme

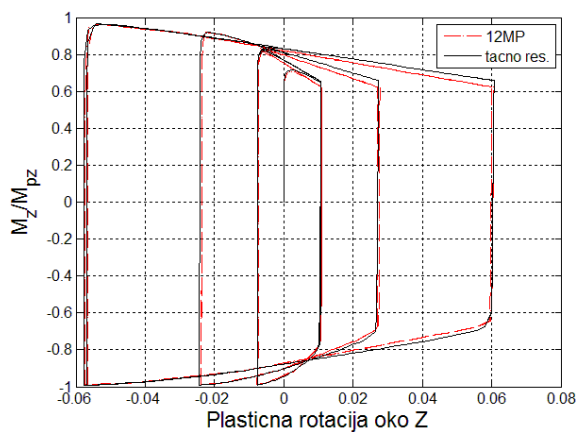


TEST A4_9

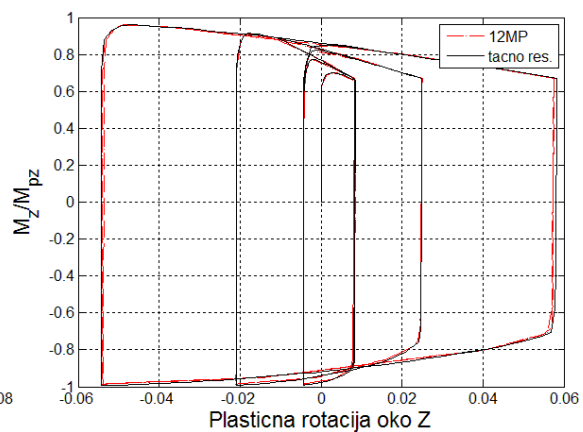


TEST B4_9

Slika B.112: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 24MP šemu

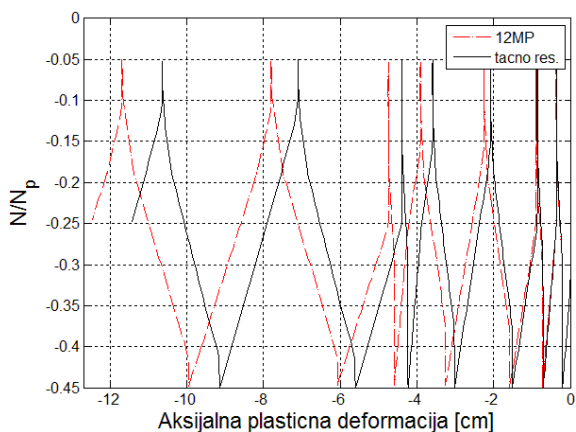


TEST A5

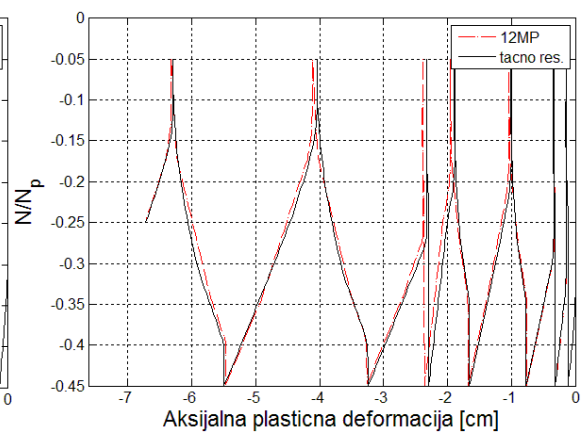


TEST B5

Slika B.113: Normirani moment – plastična rotacija dijagram

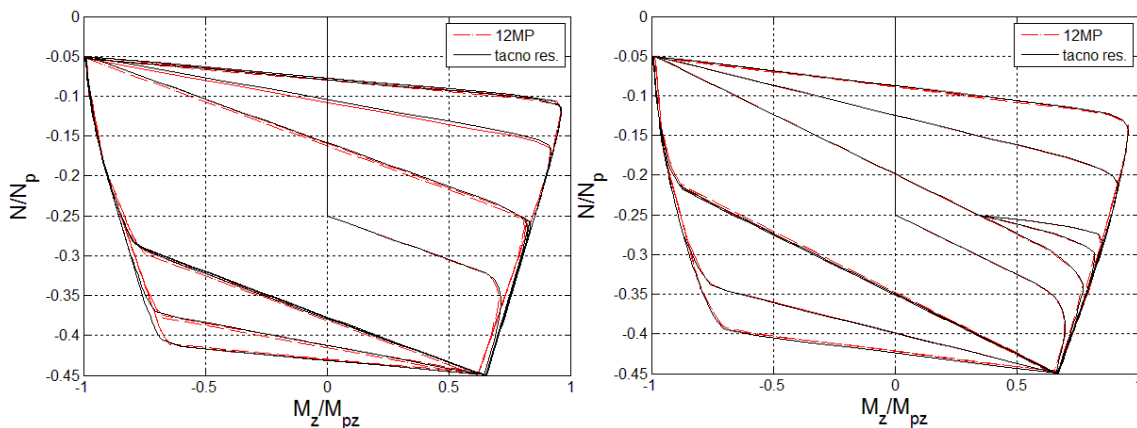


TEST A5



TEST B5

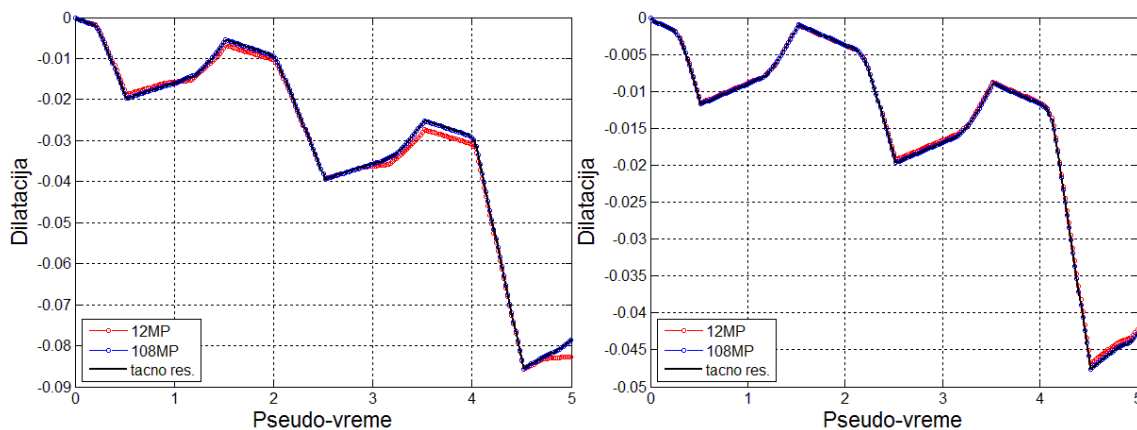
Slika B.114: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram



TEST A5

TEST B5

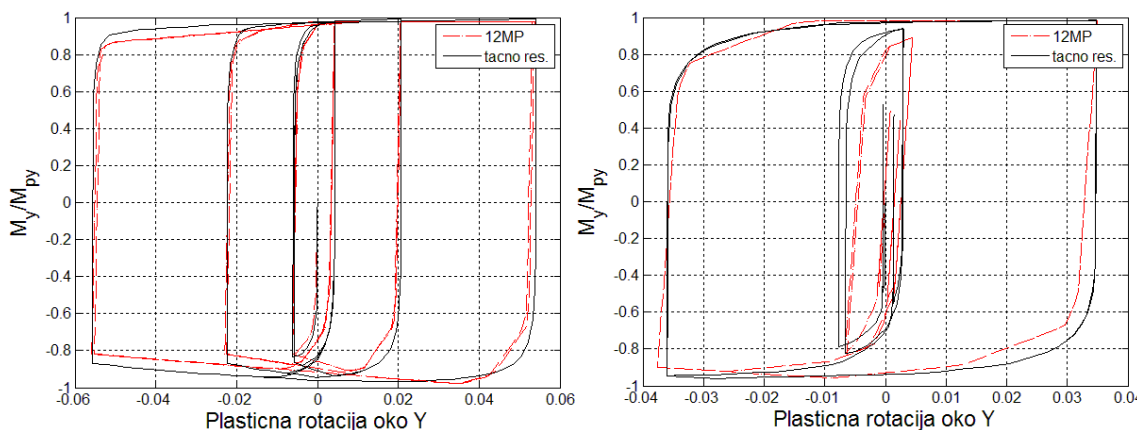
Slika B.115: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram



TEST A5

TEST B5

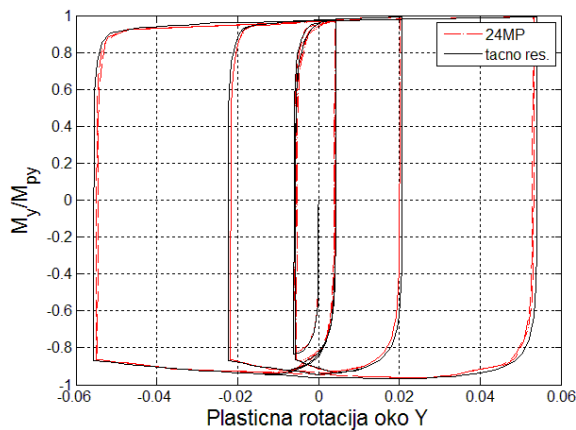
Slika B.116: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna



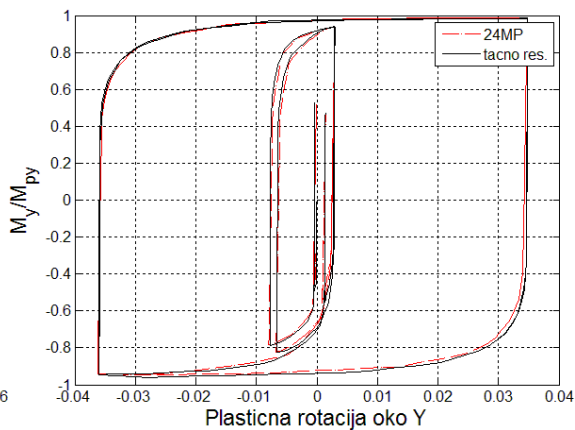
TEST A6

TEST B6

Slika B.117: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

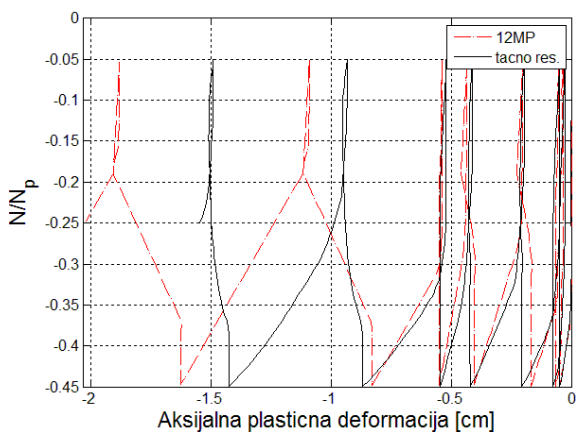


TEST A6

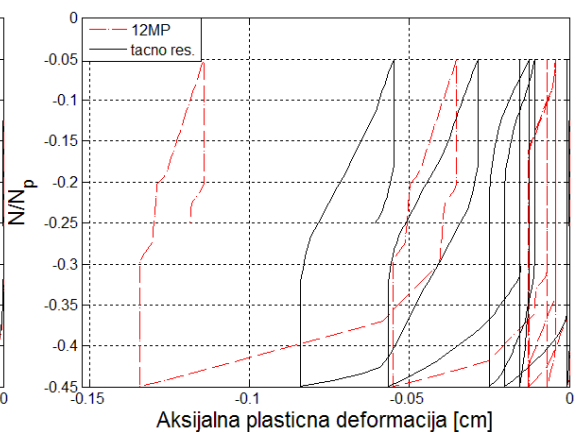


TEST B6

Slika B.118: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 24MP šemu

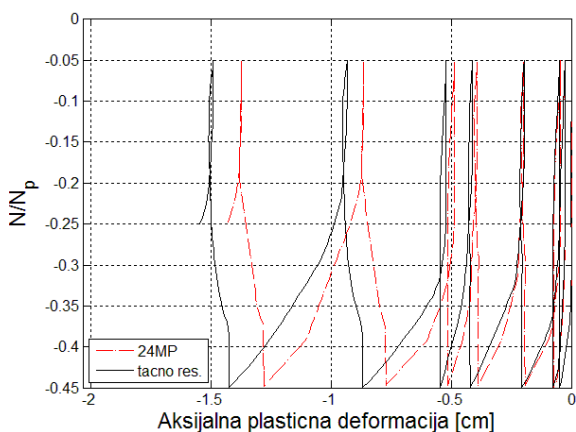


TEST A6

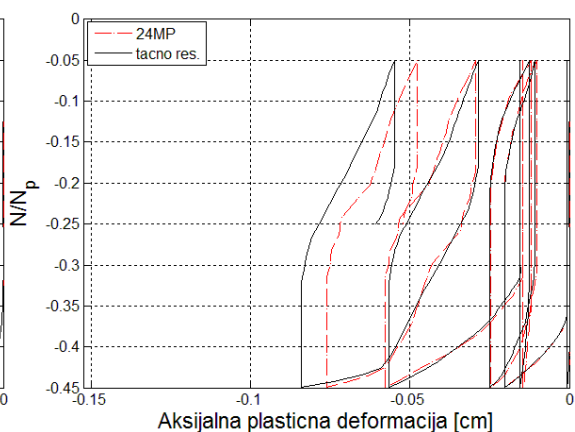


TEST B6

Slika B.119: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 12MP šemu

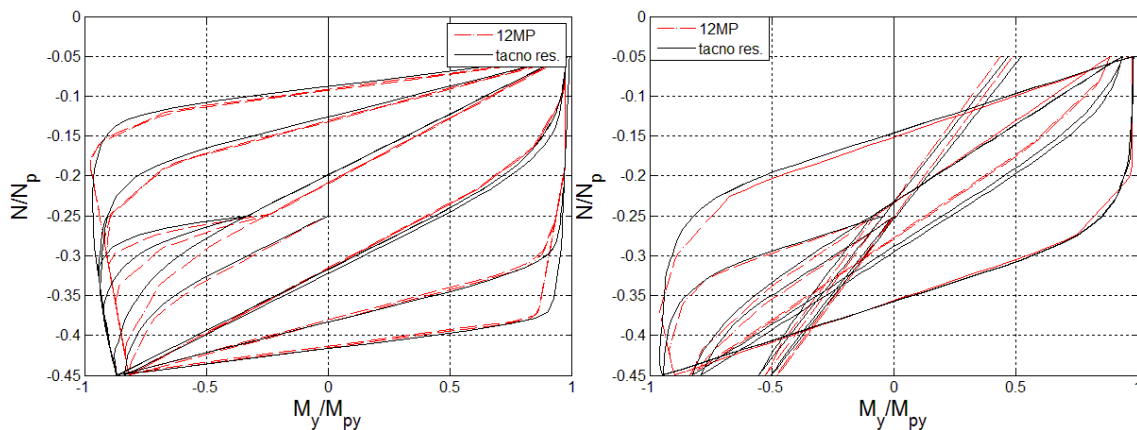


TEST A6



TEST B6

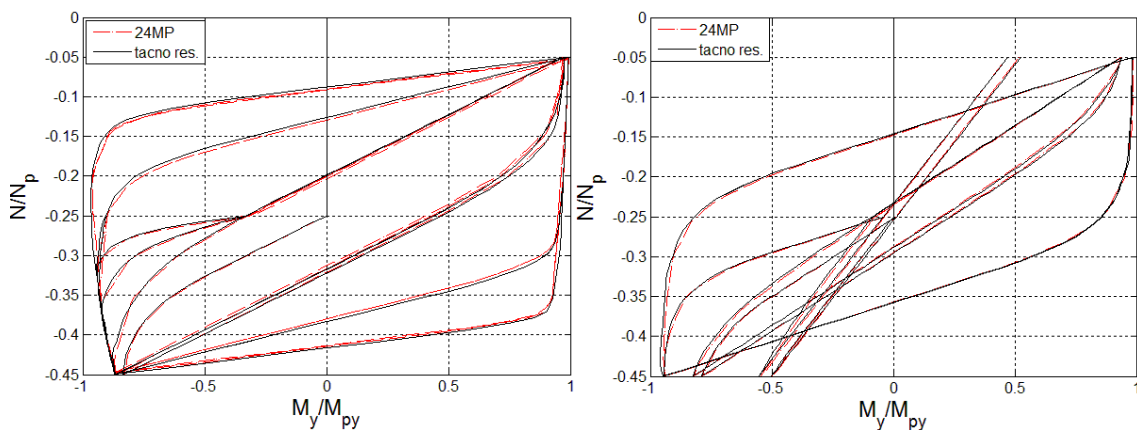
Slika B.120: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 24MP šemu



TEST A6

TEST B6

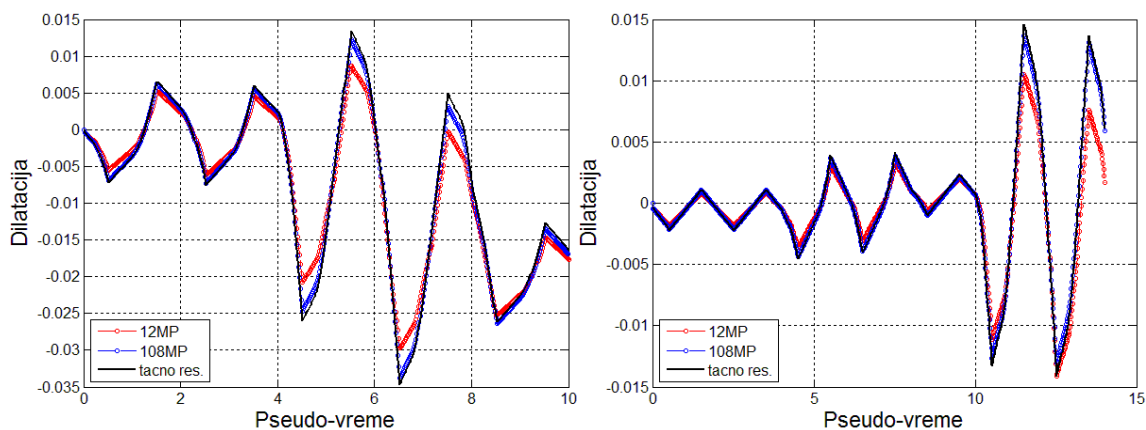
Slika B.121: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu



TEST A6

TEST B6

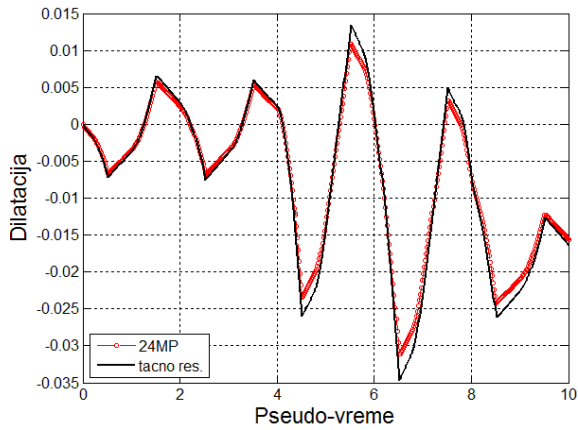
Slika B.122: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 24MP šemu



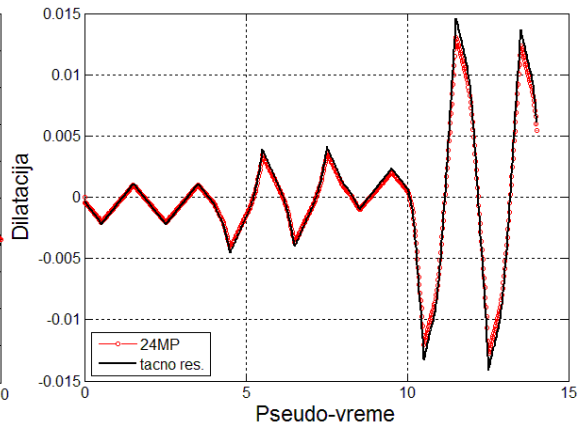
TEST A6

TEST B6

Slika B.123: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 12MP i 108MP šeme

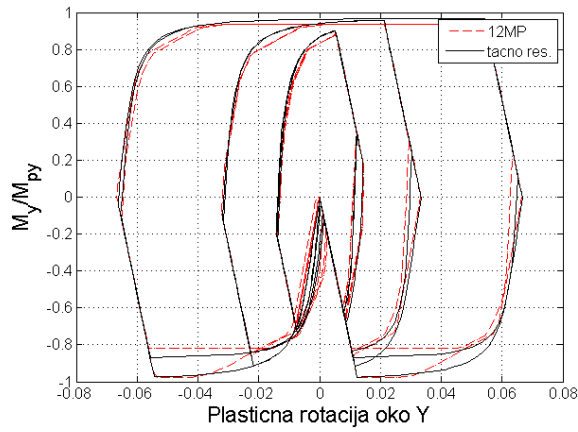


TEST A6

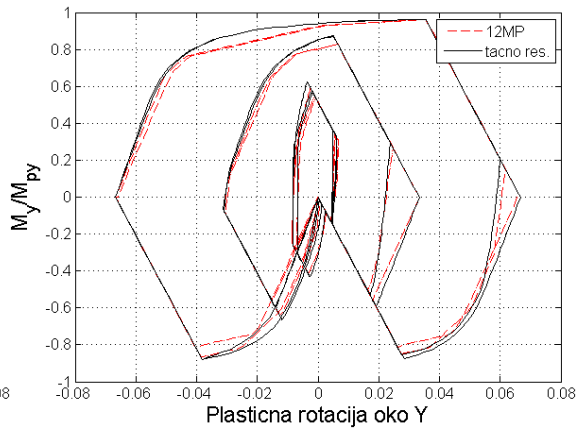


TEST B6

Slika B.124: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 24MP šemu

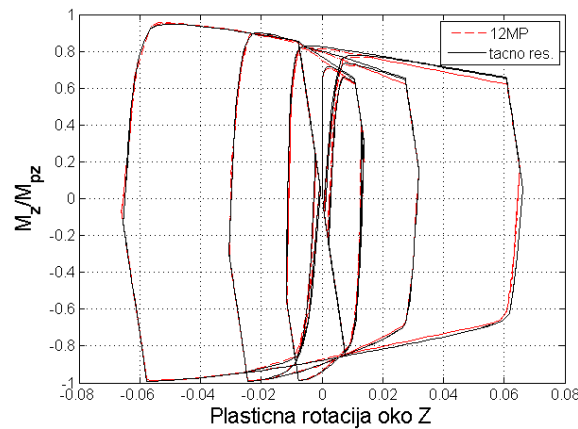


TEST A7

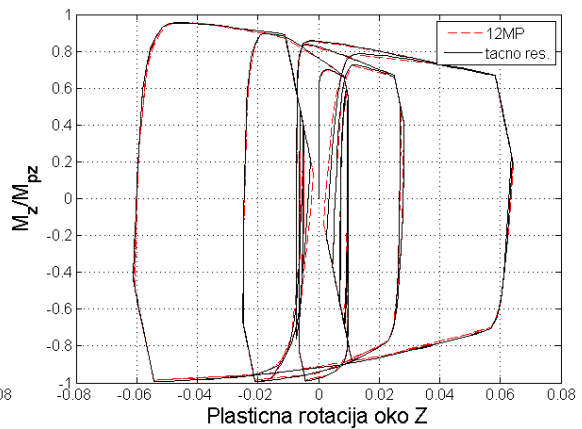


TEST B7

Slika B.125: Normirani moment – plastična rotacija dijagram

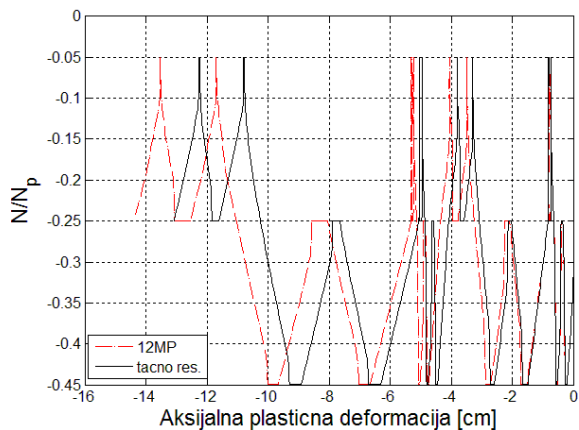


TEST A7

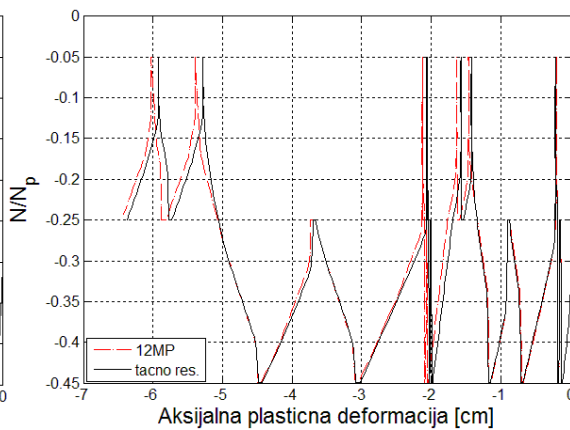


TEST B7

Slika B.126: Normirani moment – plastična rotacija dijagram

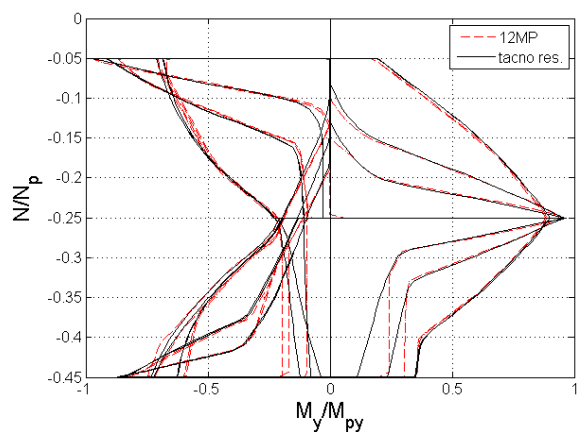


TEST A7

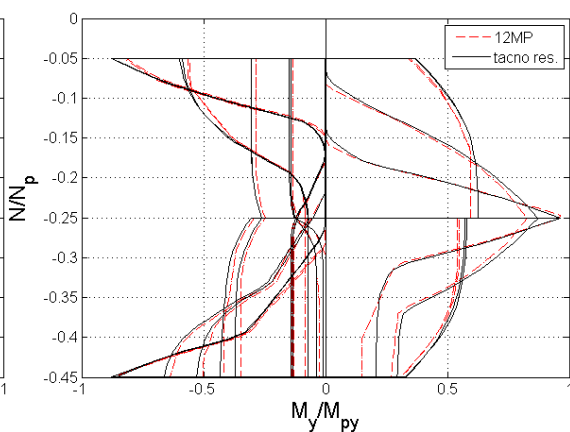


TEST B7

Slika B.127: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram

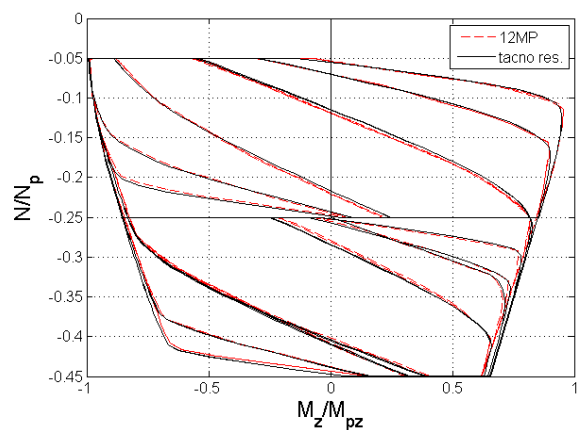


TEST A7

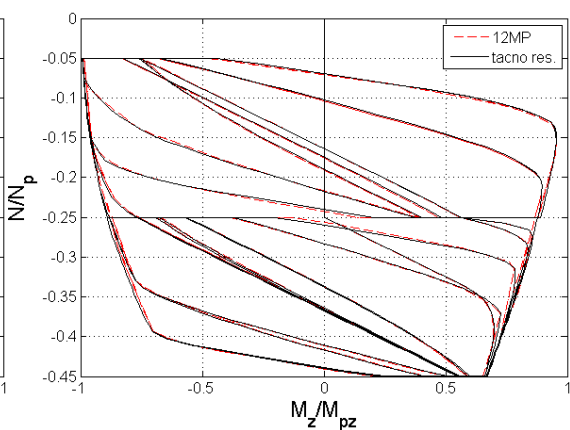


TEST B7

Slika B.128: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram

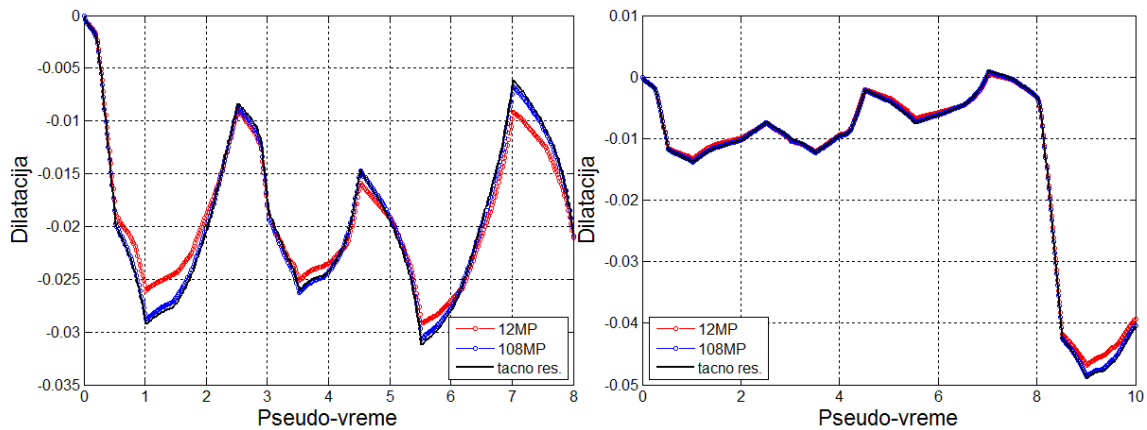


TEST A7

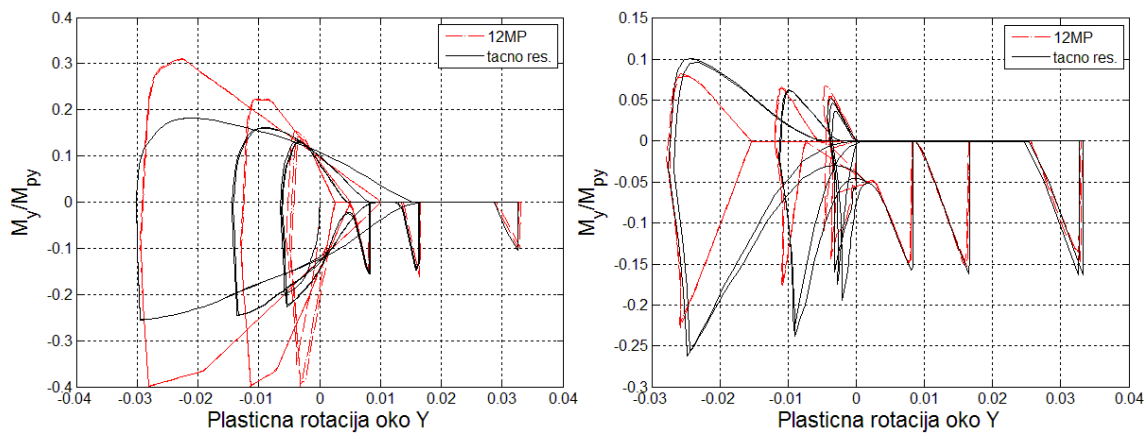


TEST B7

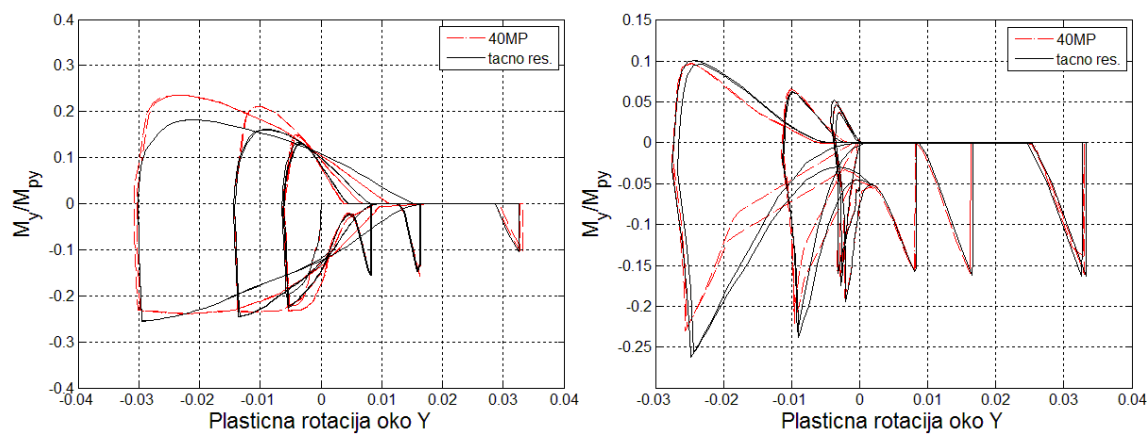
Slika B.129: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram



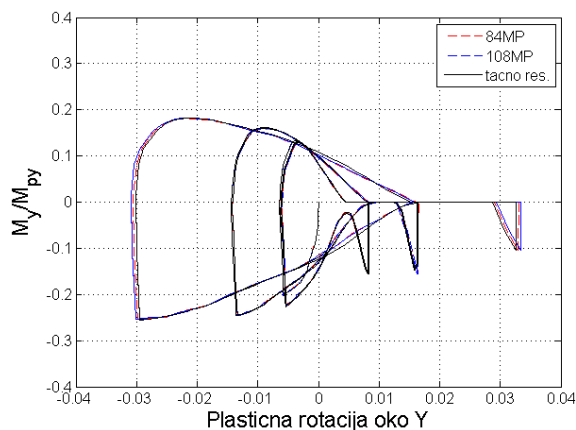
Slika B.130: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna



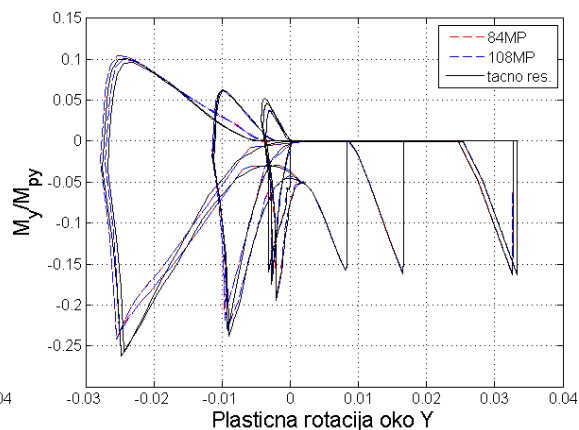
Slika B.131: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 12MP šemu



Slika B.132: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

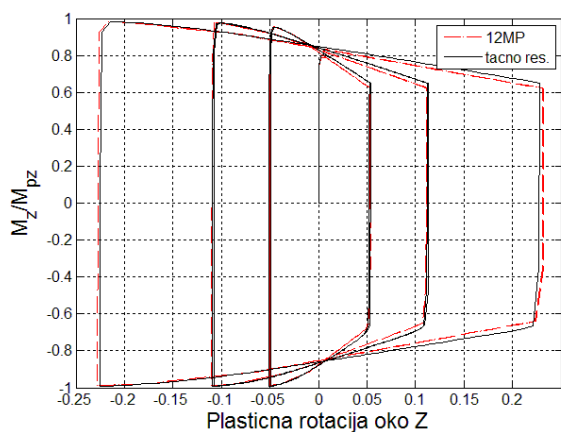


TEST A8_1

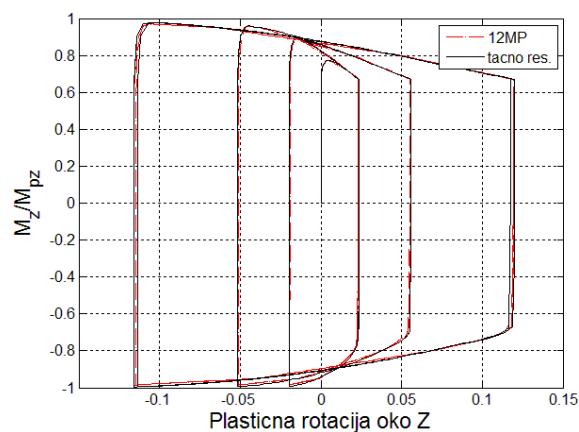


TEST B8_1

Slika B.133: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

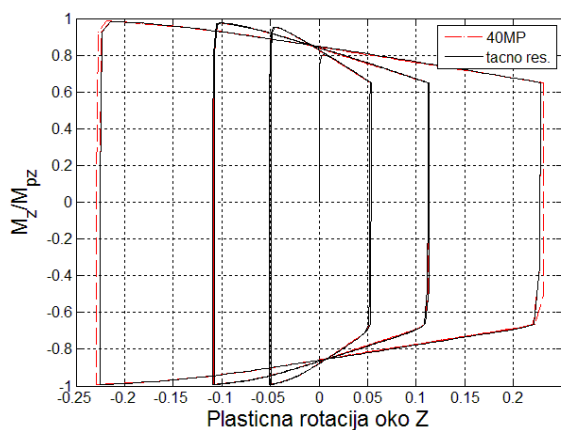


TEST A8_1

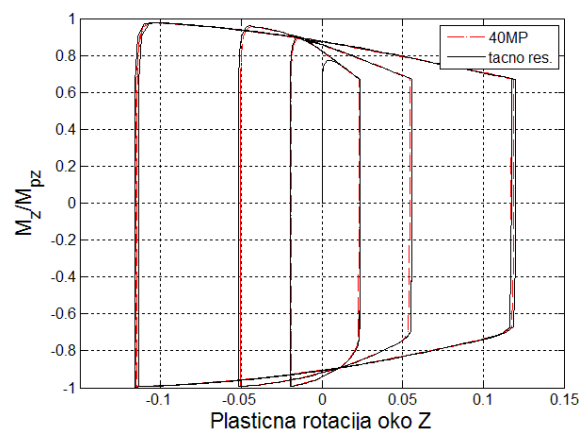


TEST B8_1

Slika B.134: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

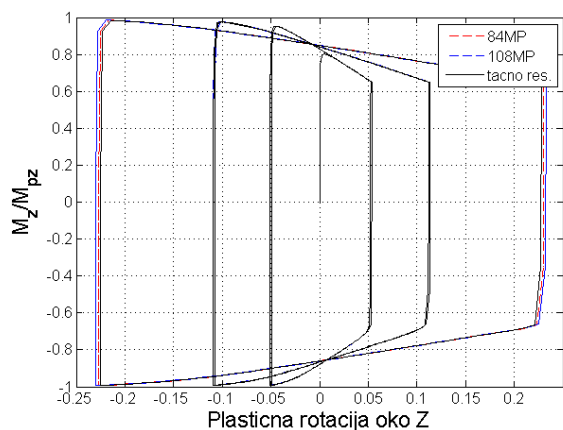


TEST A8_1

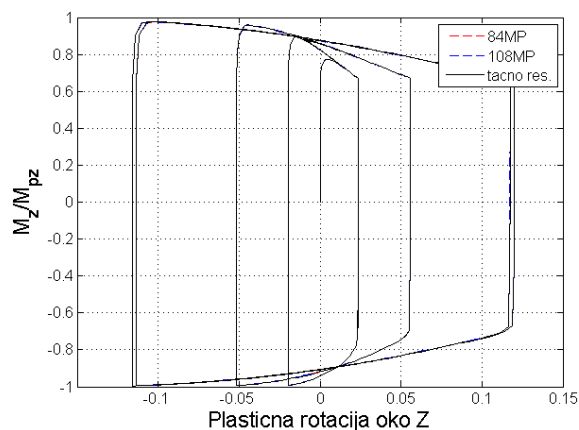


TEST B8_1

Slika B.135: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

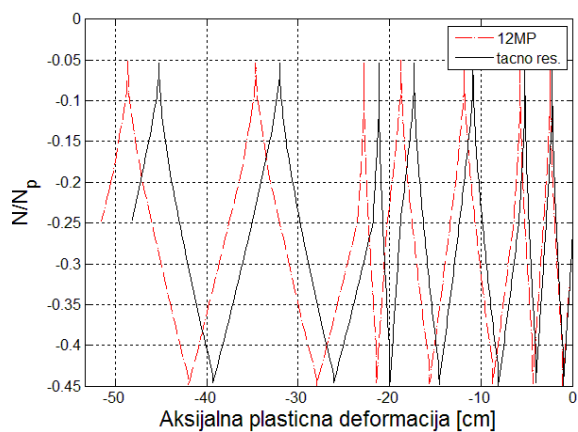


TEST A8_1

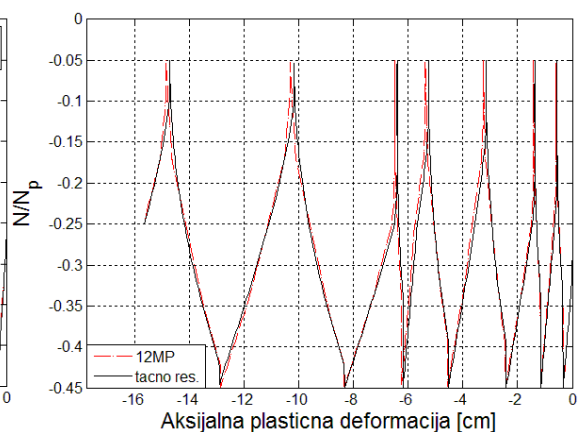


TEST B8_1

Slika B.136: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

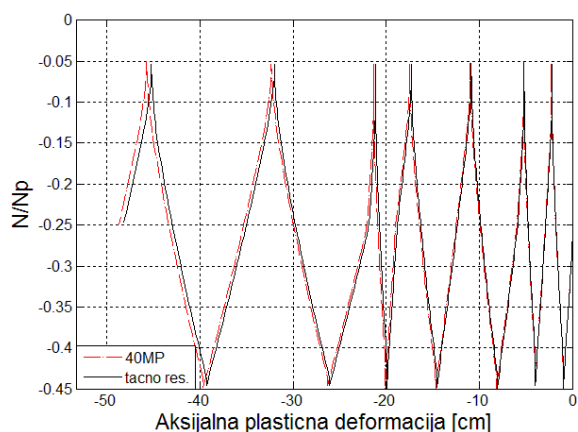


TEST A8_1

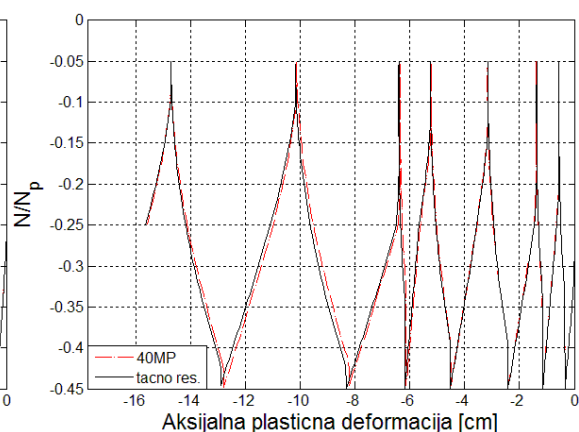


TEST B8_1

Slika B.137: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 12MP šemu

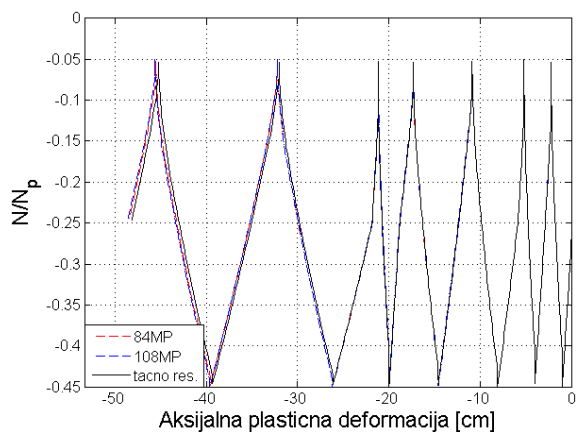


TEST A8_1

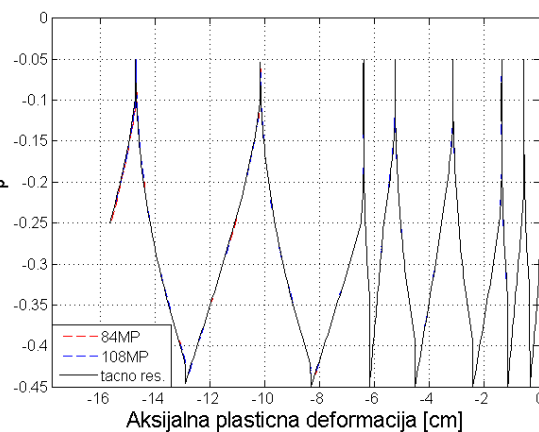


TEST B8_1

Slika B.138: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 40MP šemu

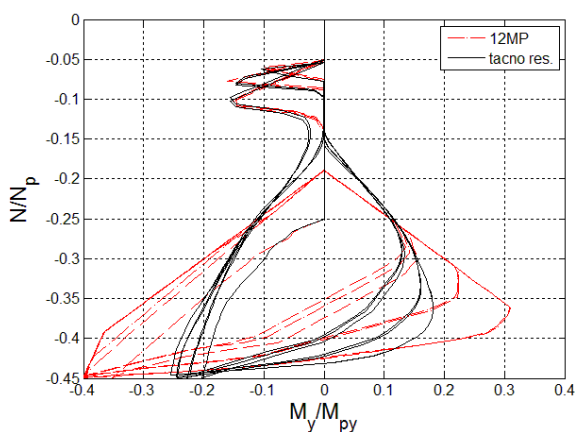


TEST A8_1

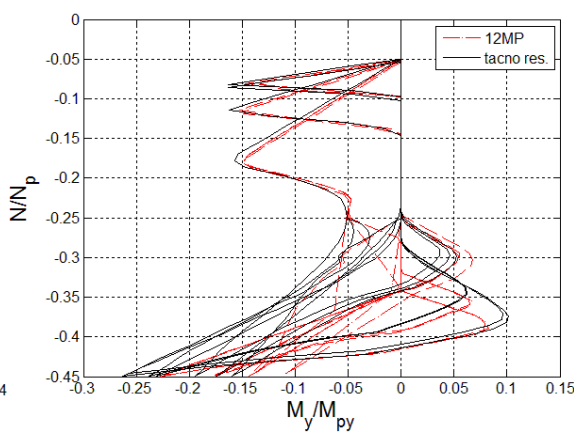


TEST B8_1

Slika B.139: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

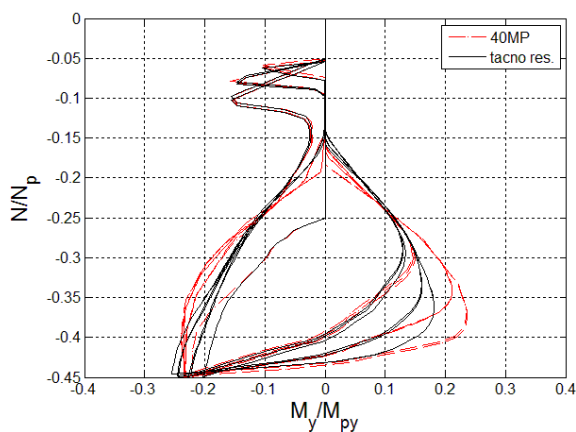


TEST A8_1

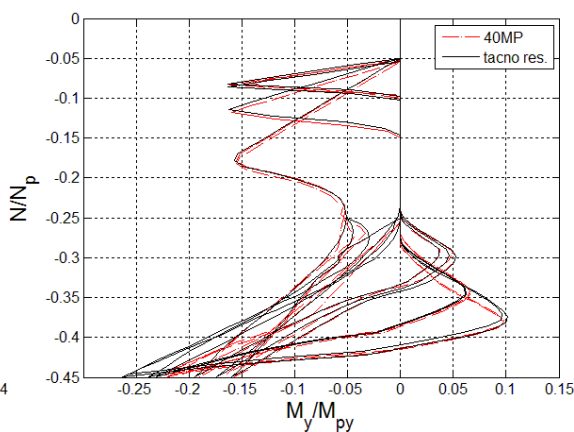


TEST B8_1

Slika B.140: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

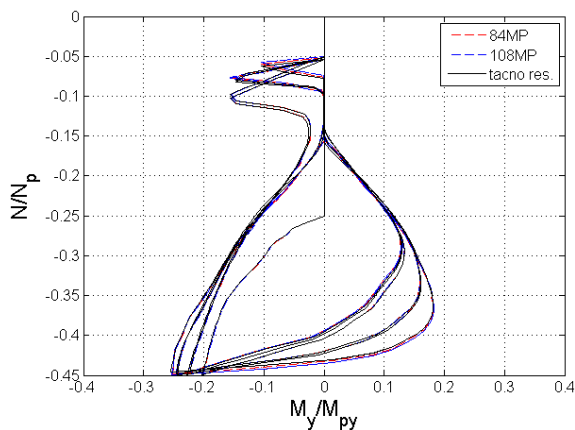


TEST A8_1

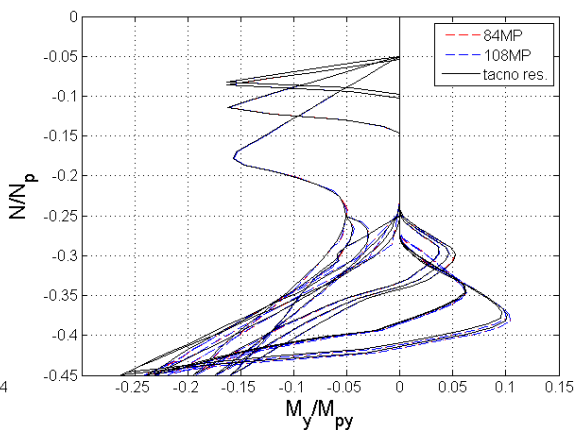


TEST B8_1

Slika B.141: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu

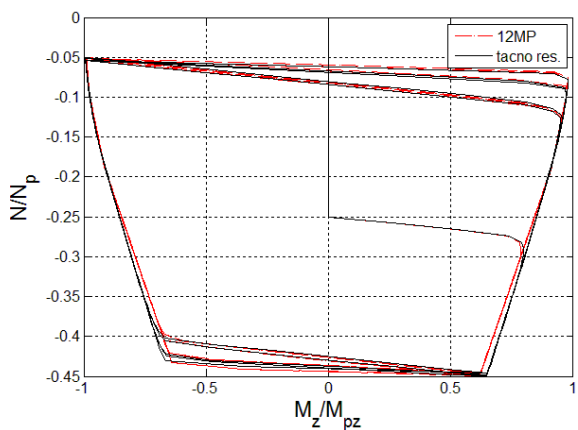


TEST A8_1

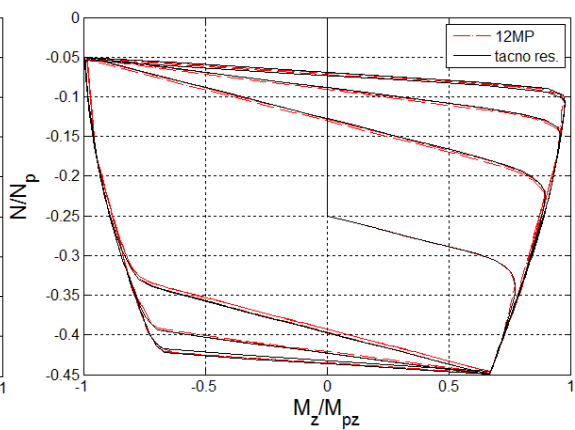


TEST B8_1

Slika B.142: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

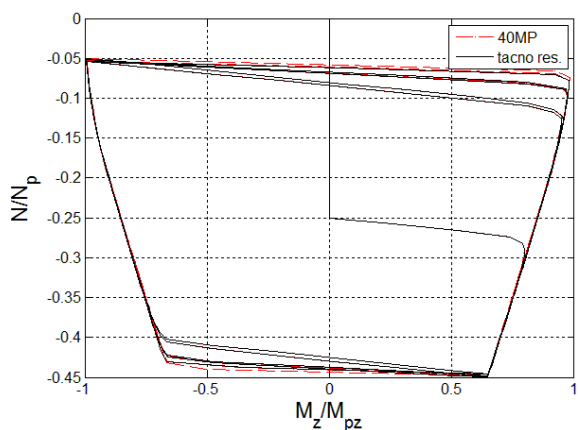


TEST A8_1

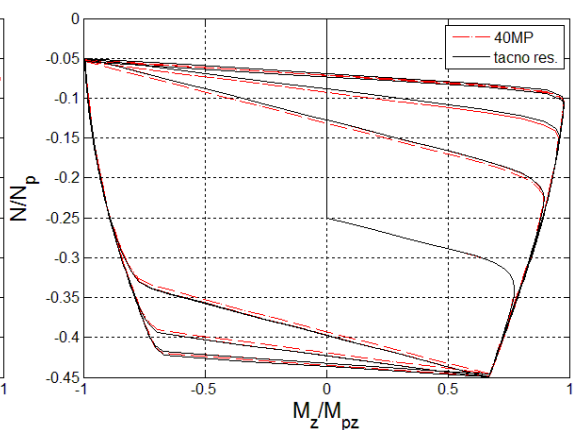


TEST B8_1

Slika B.143: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

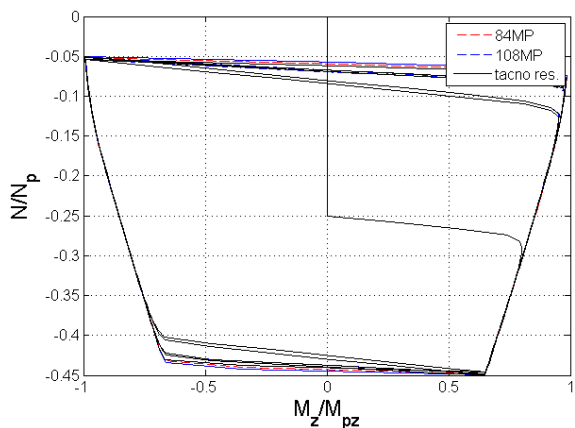


TEST A8_1

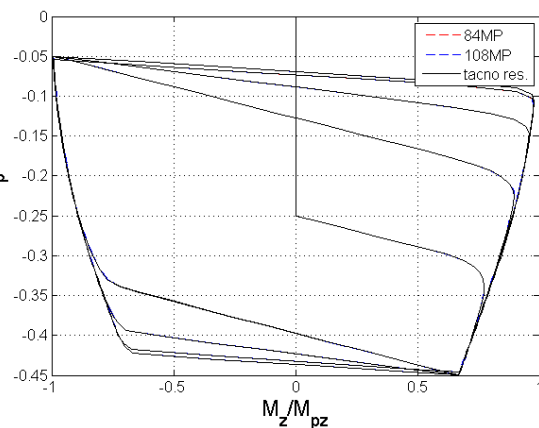


TEST B8_1

Slika B.144: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu

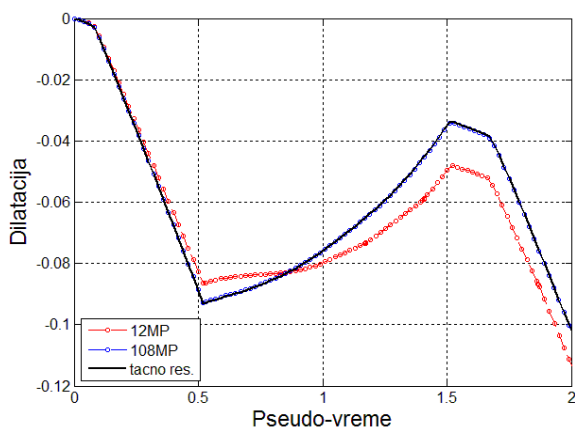


TEST A8_1

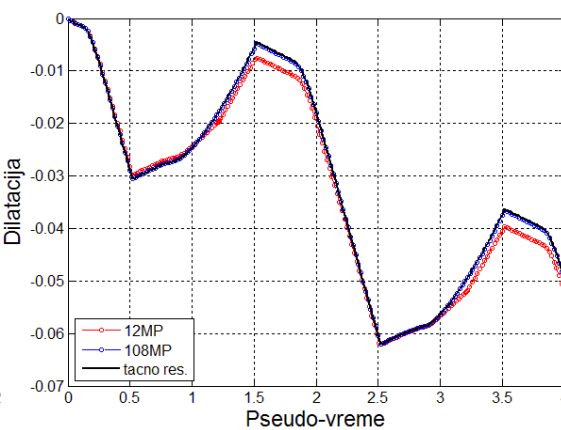


TEST B8_1

Slika B.145: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

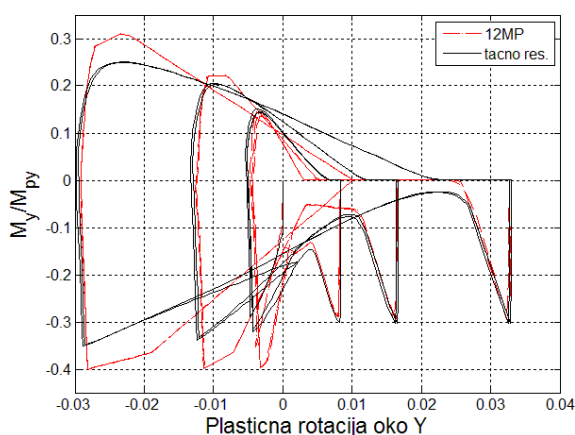


TEST A8_1

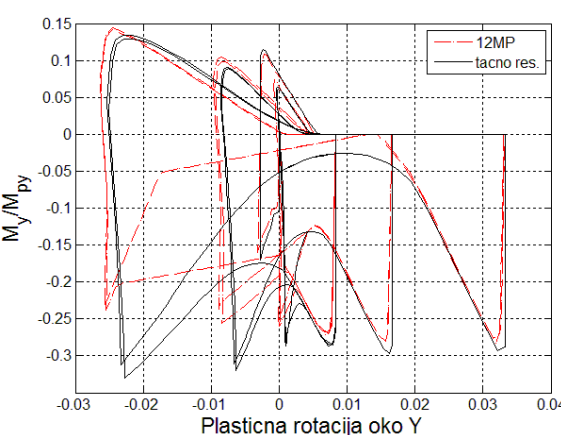


TEST B8_1

Slika B.146: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna

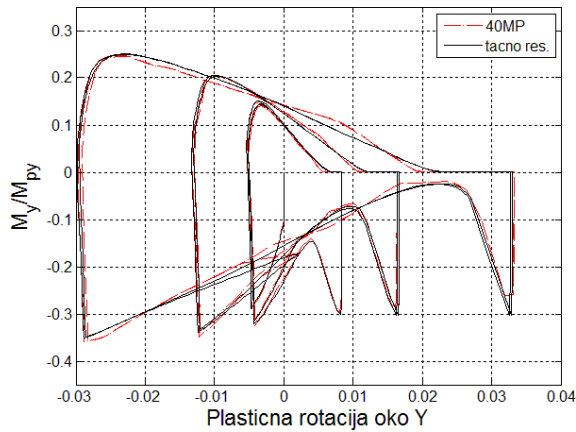


TEST A8_2

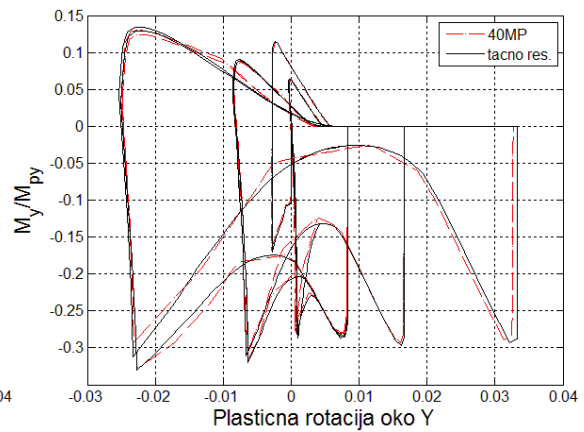


TEST B8_2

Slika B.147: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

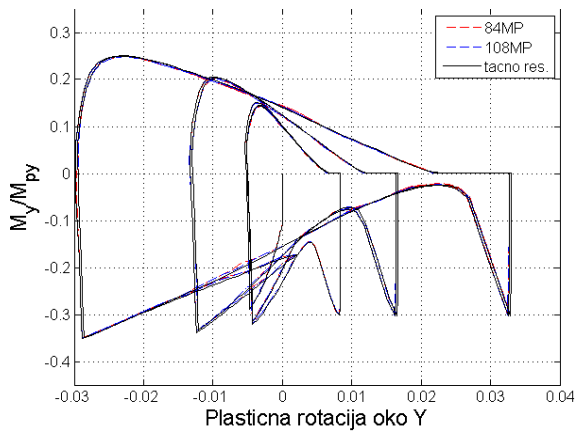


TEST A8_2

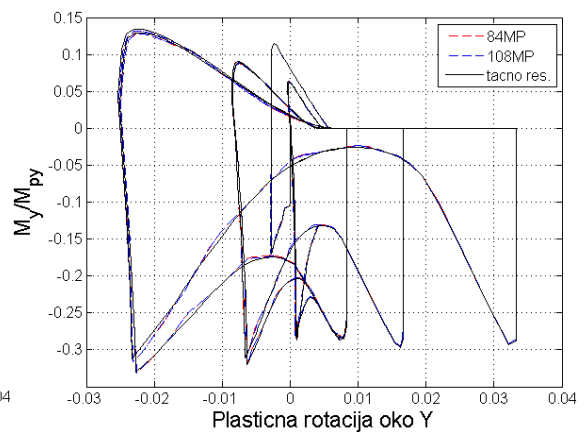


TEST B8_2

Slika B.148: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

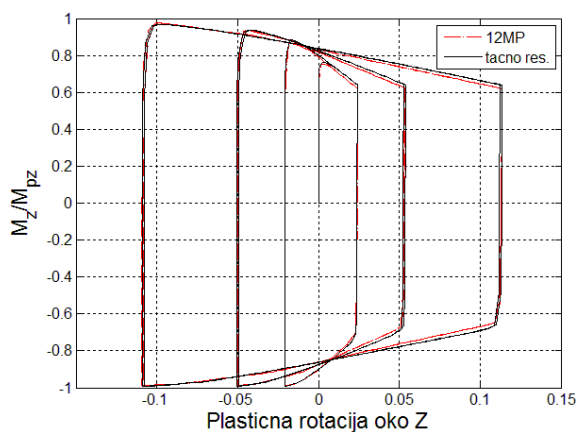


TEST A8_2

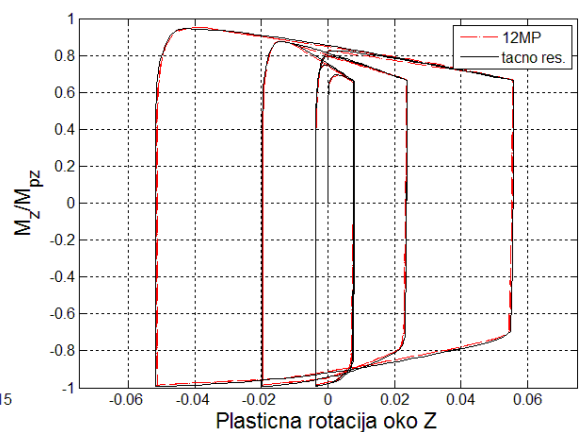


TEST B8_2

Slika B.149: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

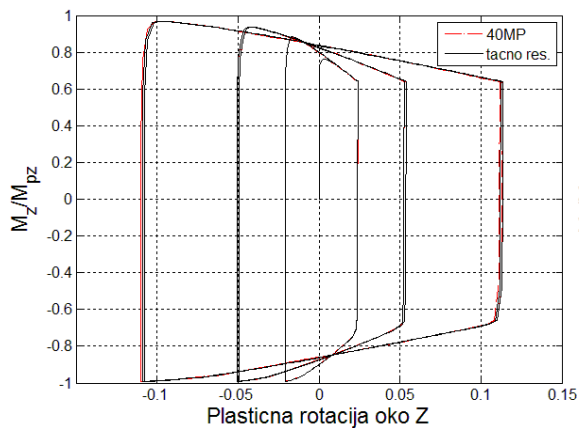


TEST A8_2

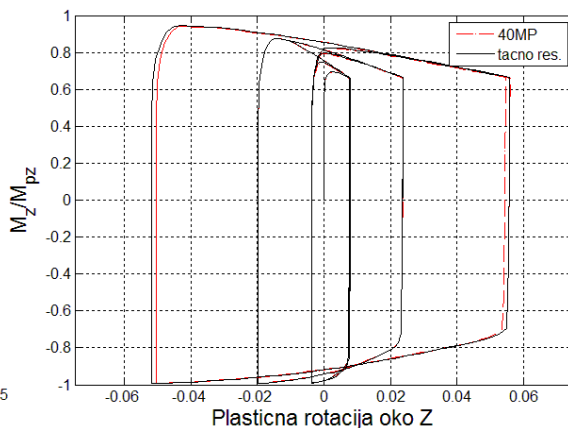


TEST B8_2

Slika B.150: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

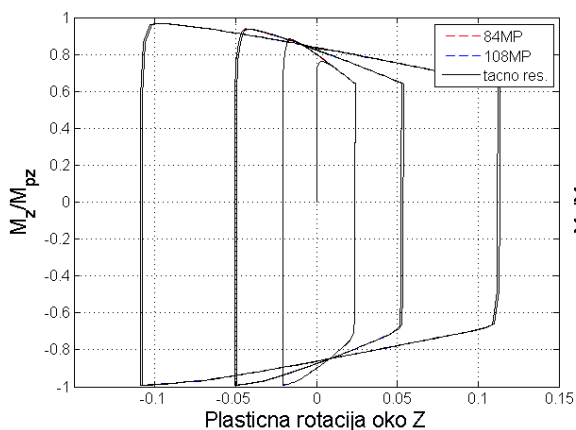


TEST A8_2

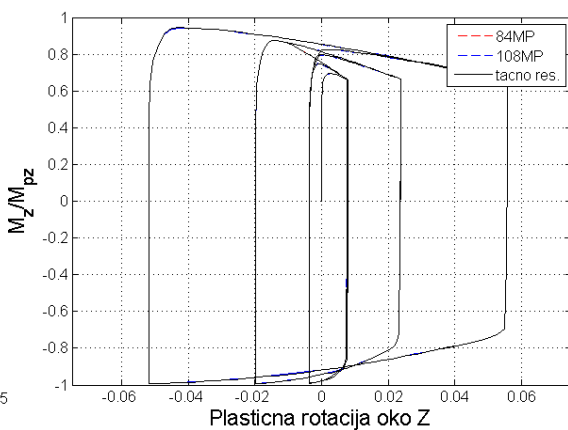


TEST B8_2

Slika B.151: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

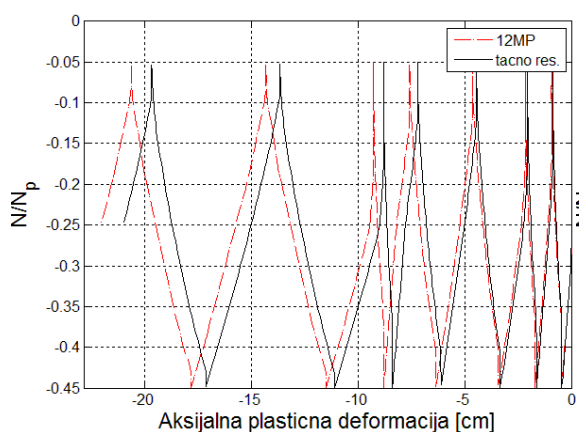


TEST A8_2

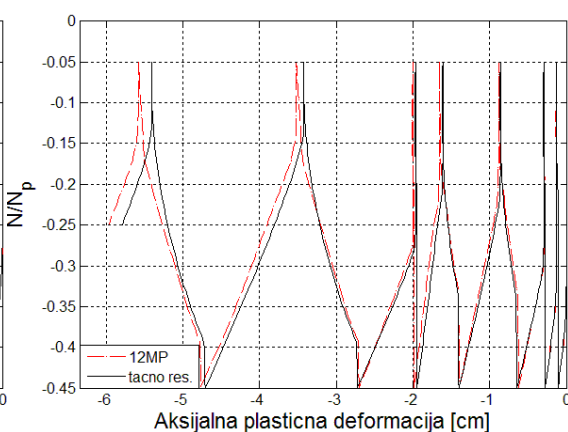


TEST B8_2

Slika B.152: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

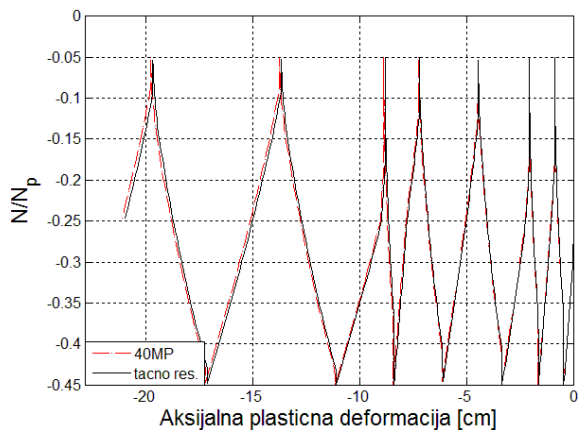


TEST A8_2

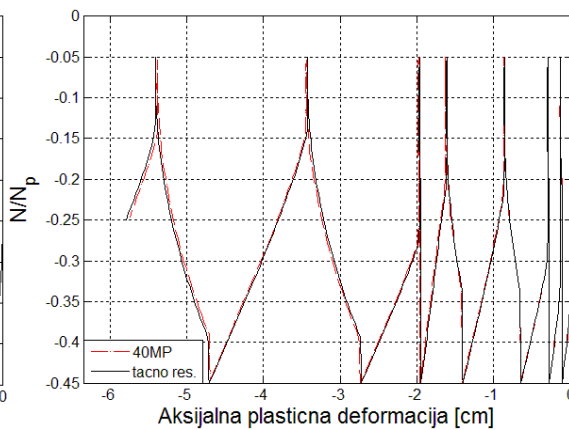


TEST B8_2

Slika B.153: Normirana aksijalna sila - aksijalna plastična deformacija dijagram za 12MP šemu

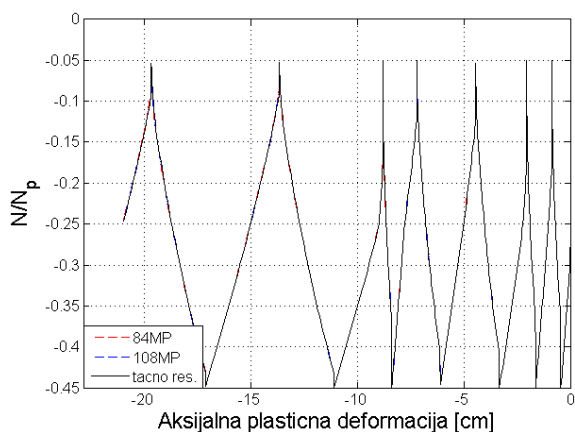


TEST A8_2

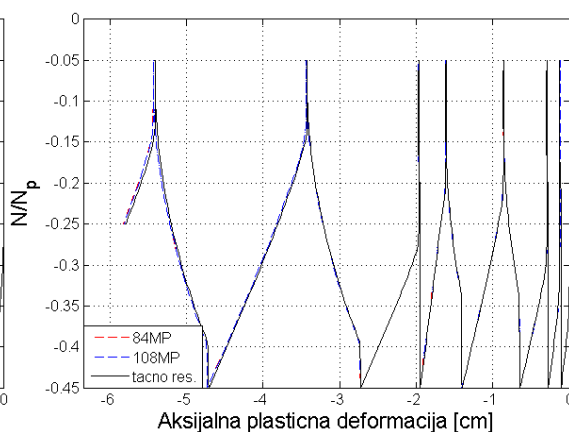


TEST B8_2

Slika B.154: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 40MP šemu

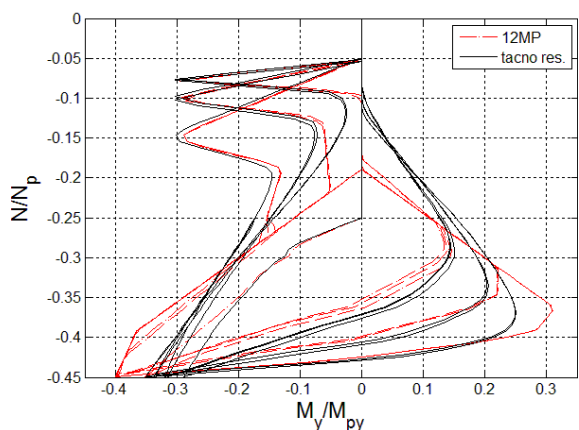


TEST A8_2

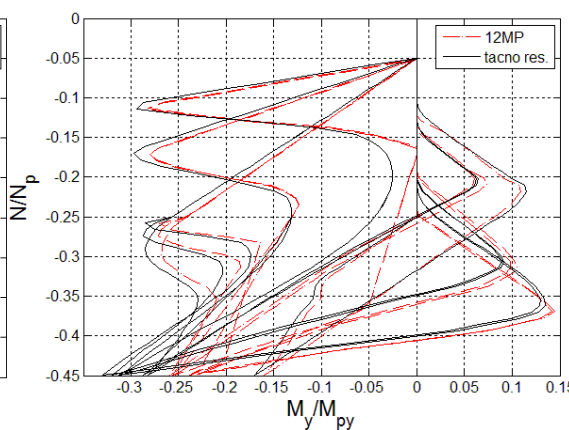


TEST B8_2

Slika B.155: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

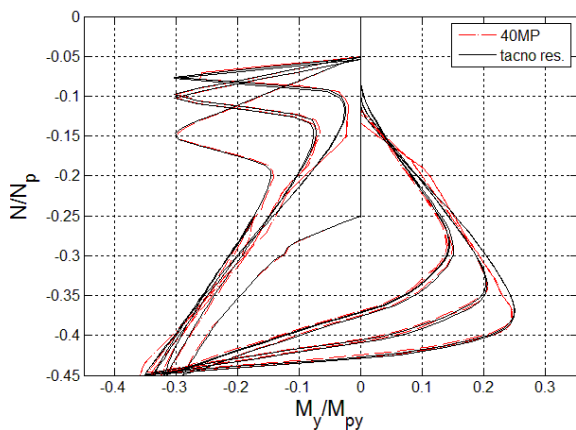


TEST A8_2

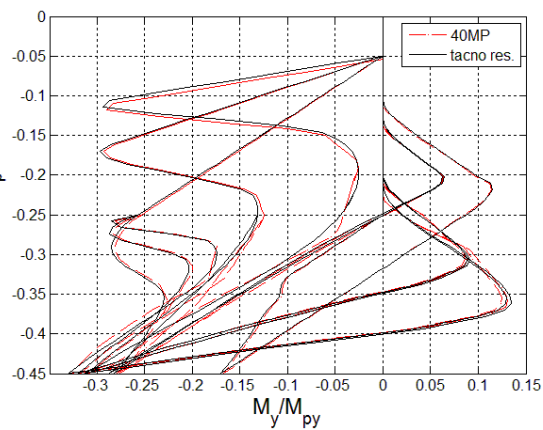


TEST B8_2

Slika B.156: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

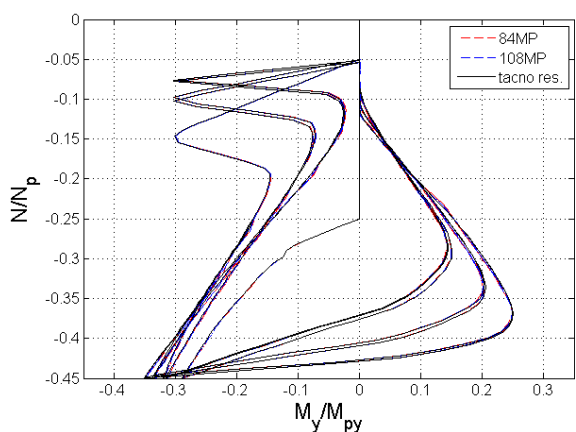


TEST A8_2

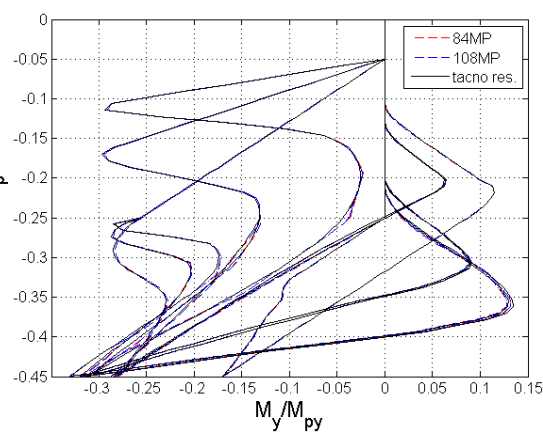


TEST B8_2

Slika B.157: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu

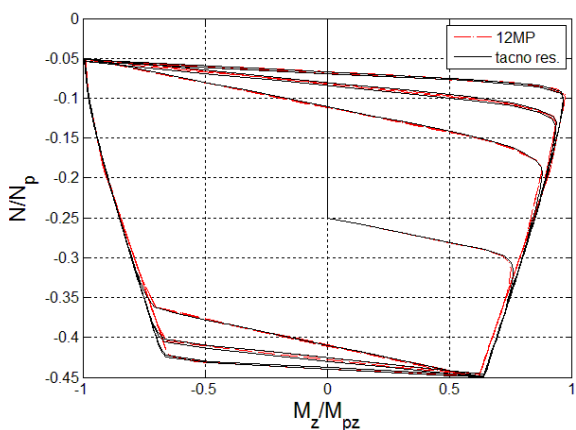


TEST A8_2

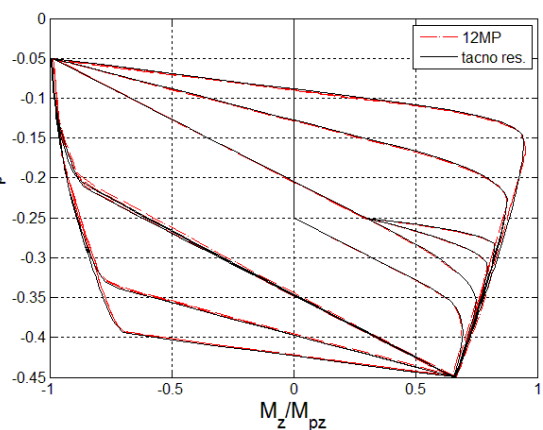


TEST B8_2

Slika B.158: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

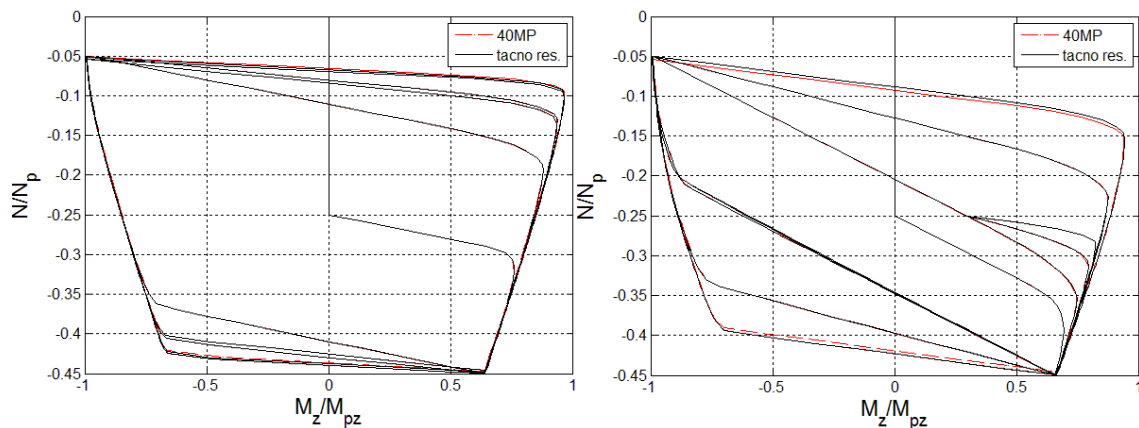


TEST A8_2



TEST B8_2

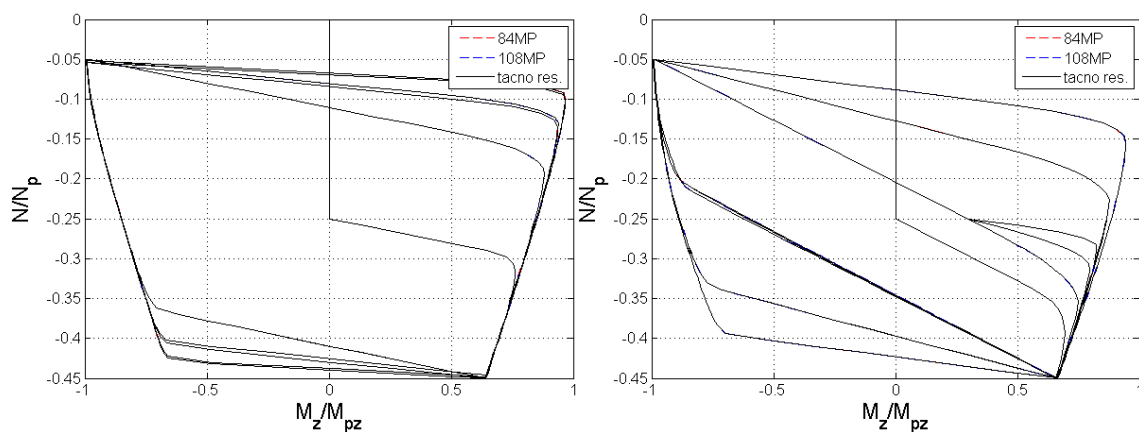
Slika B.159: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu



TEST A8_2

TEST B8_2

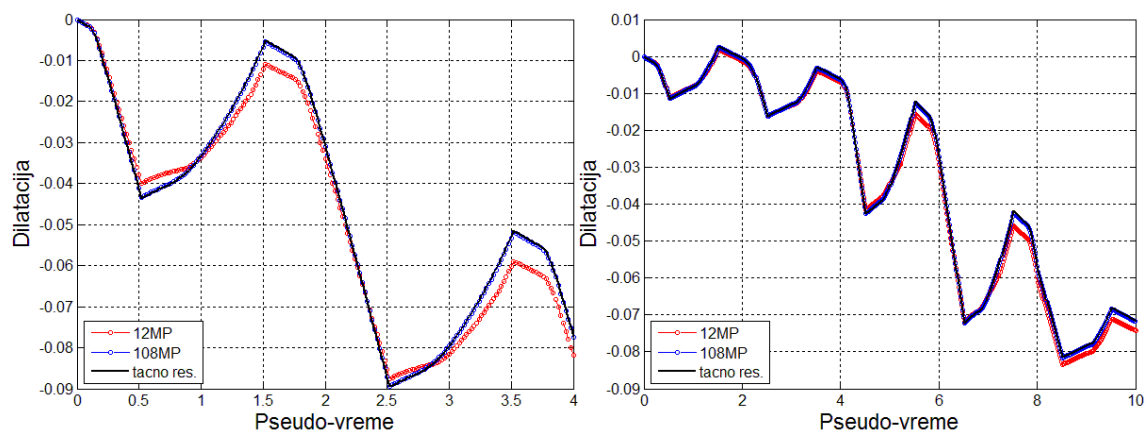
Slika B.160: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu



TEST A8_2

TEST B8_2

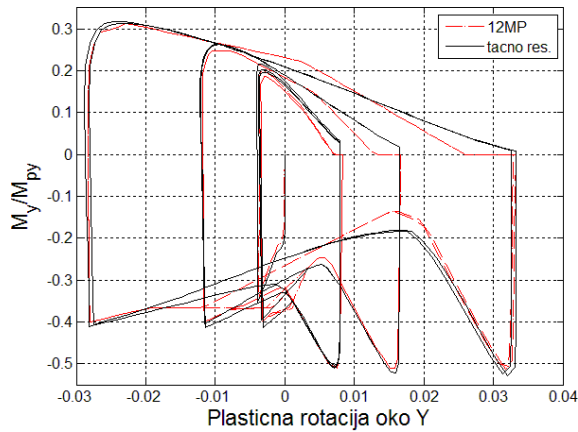
Slika B.161: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme



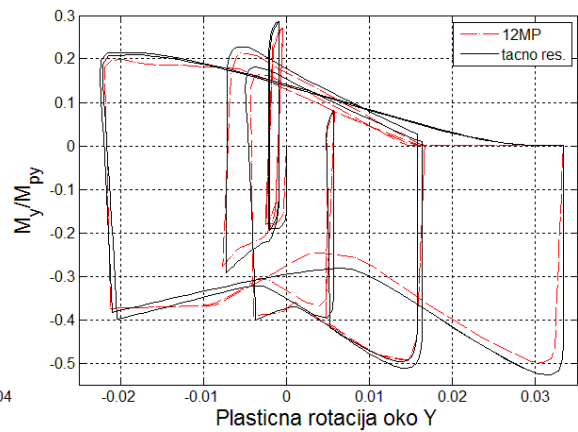
TEST A8_2

TEST B8_2

Slika B.162: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna

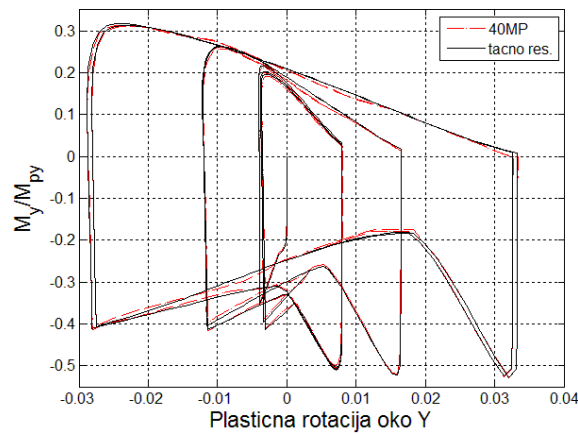


TEST A8_3

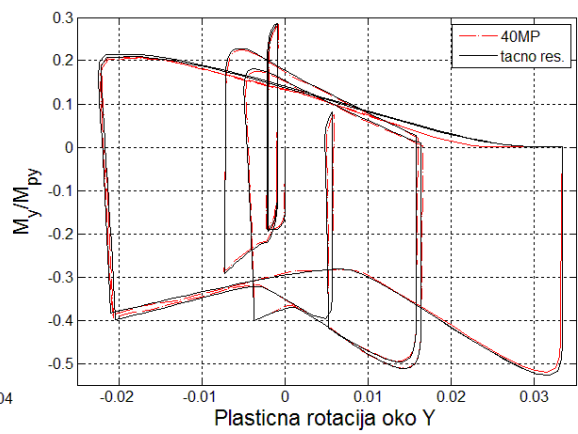


TEST B8_3

Slika B.163: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

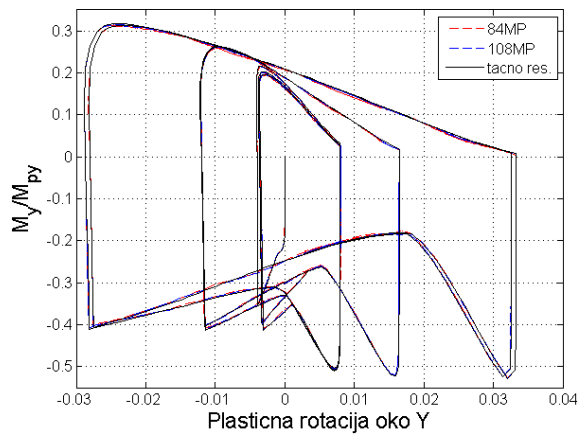


TEST A8_3

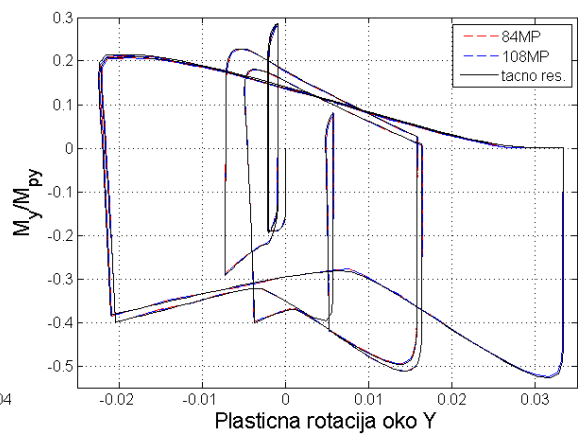


TEST B8_3

Slika B.164: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

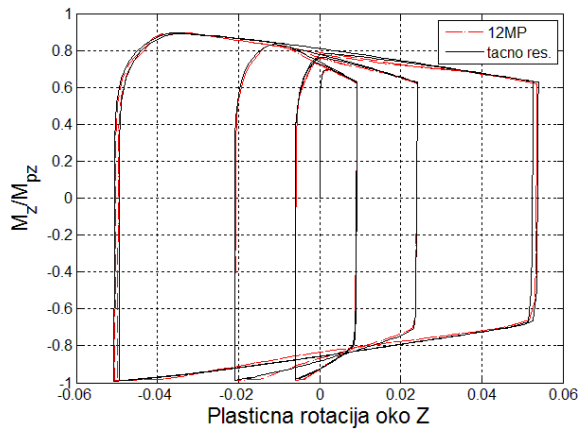


TEST A8_3

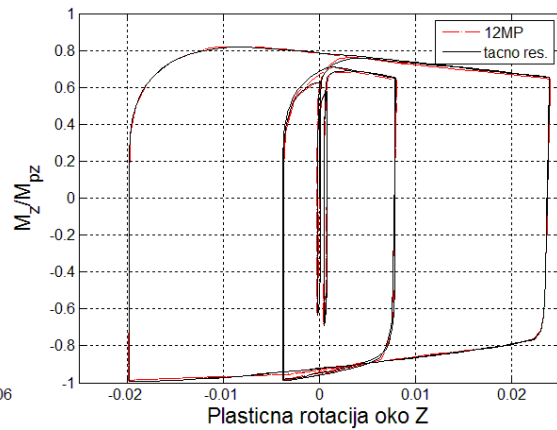


TEST B8_3

Slika B.165: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

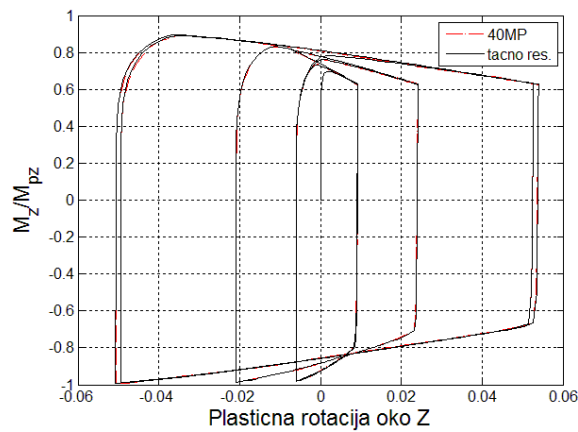


TEST A8_3

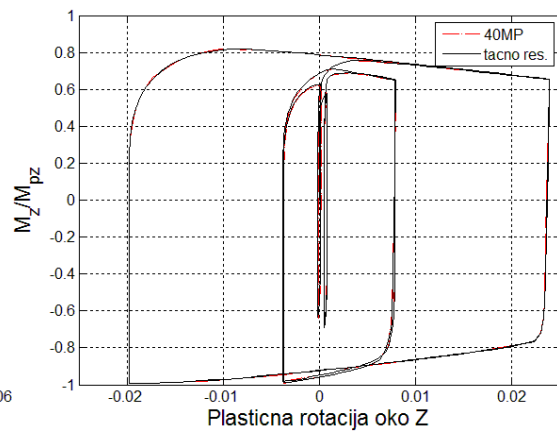


TEST B8_3

Slika B.166: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

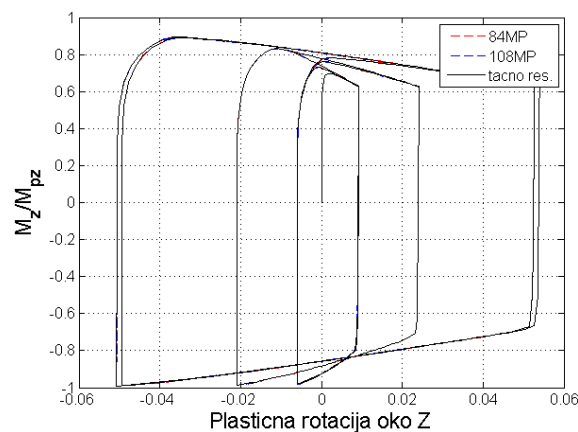


TEST A8_3

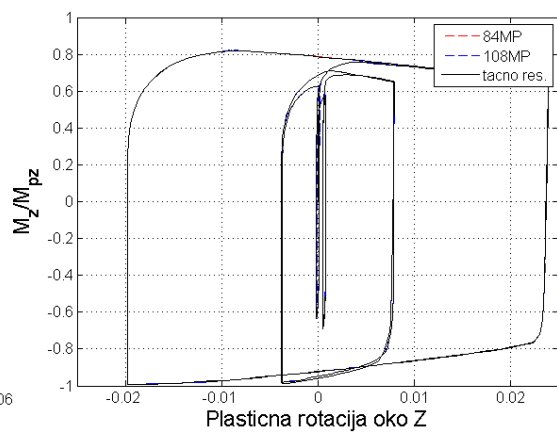


TEST B8_3

Slika B.167: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

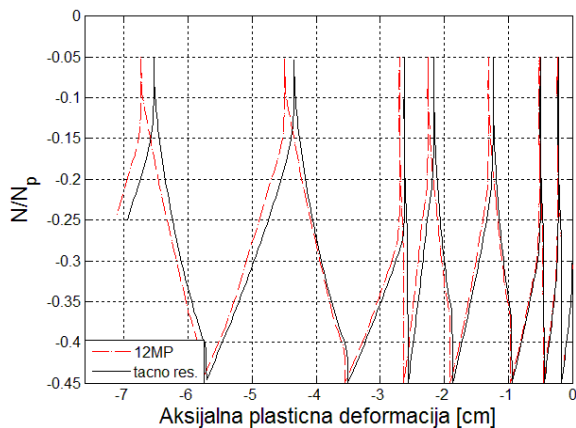


TEST A8_3

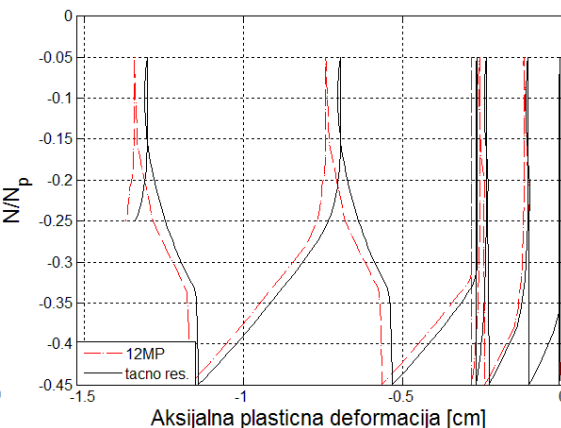


TEST B8_3

Slika B.168: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

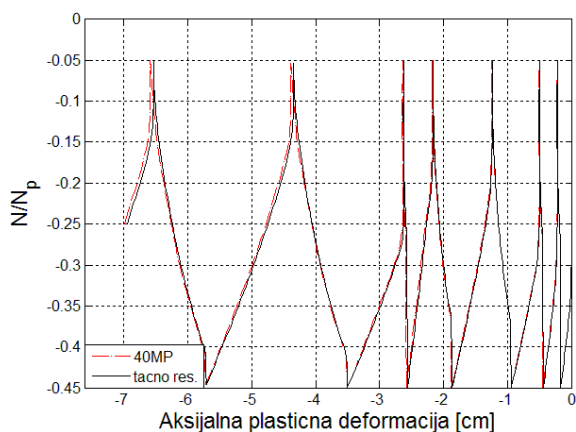


TEST A8_3

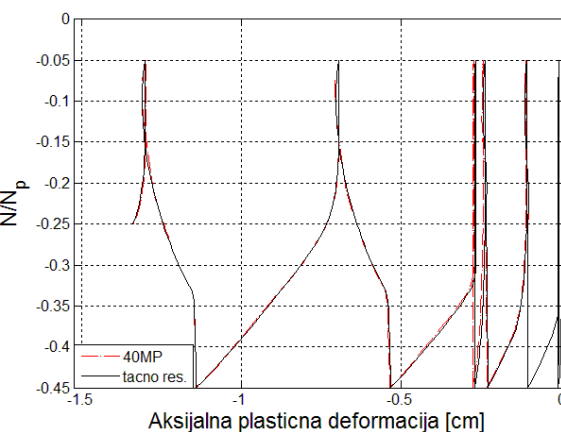


TEST B8_3

Slika B.169: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 12MP šemu

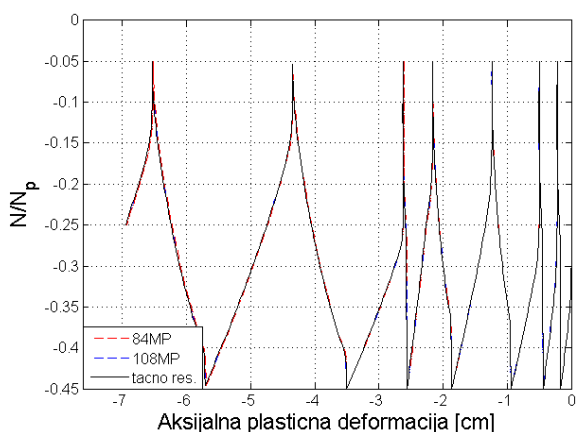


TEST A8_3

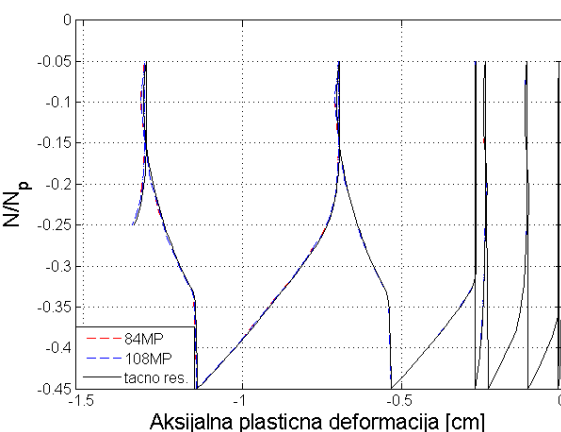


TEST B8_3

Slika B.170: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 40MP šemu

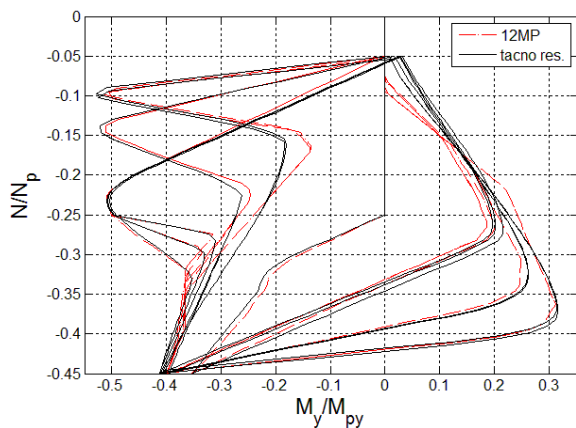


TEST A8_3

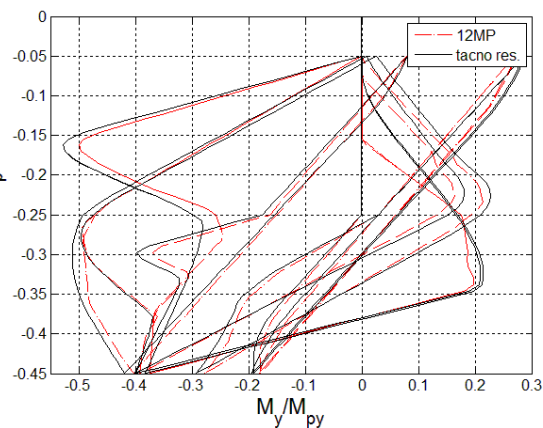


TEST B8_3

Slika B.171: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

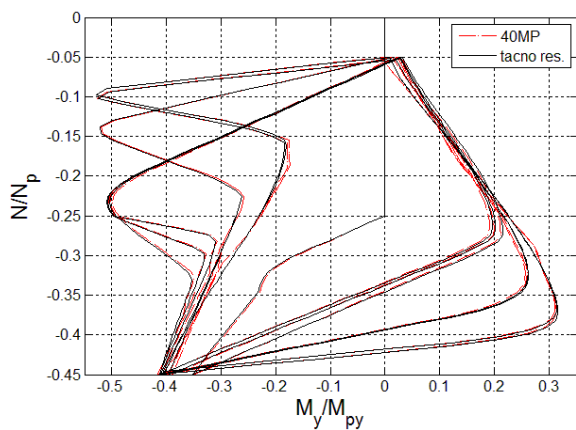


TEST A8_3

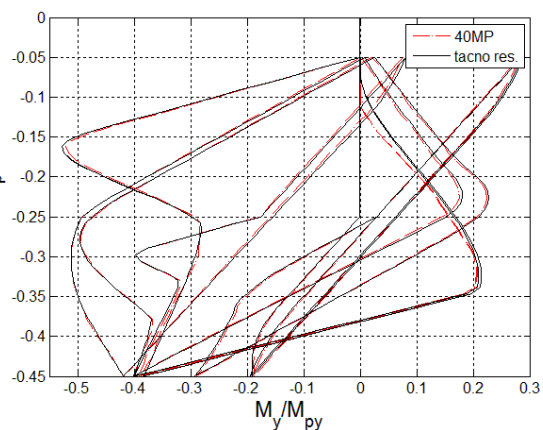


TEST B8_3

Slika B.172: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

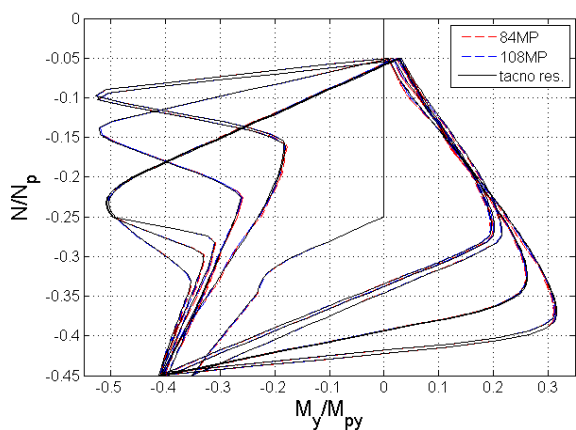


TEST A8_3

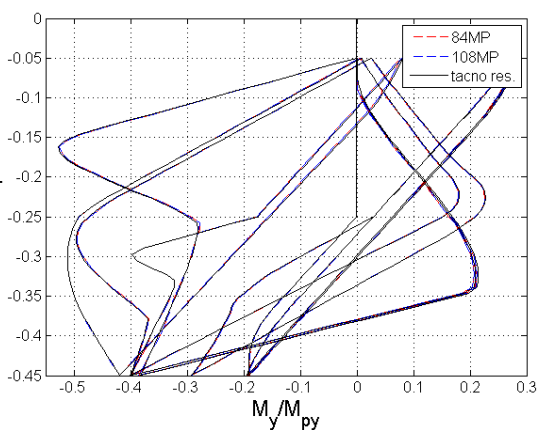


TEST B8_3

Slika B.173: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu

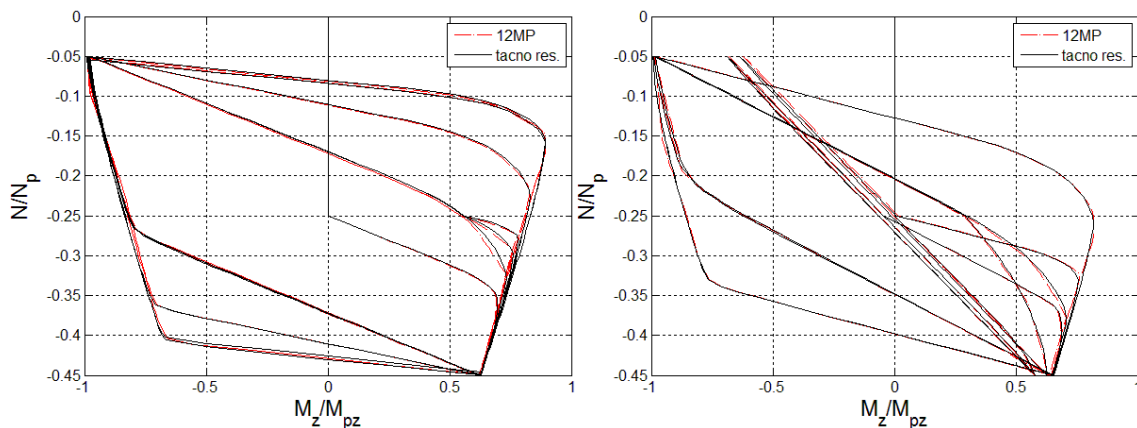


TEST A8_3



TEST B8_3

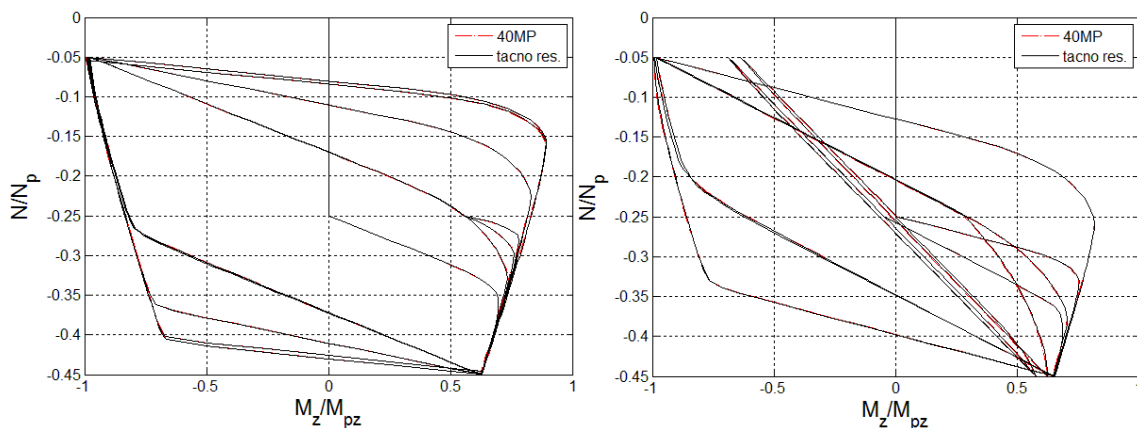
Slika B.174: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme



TEST A8_3

TEST B8_3

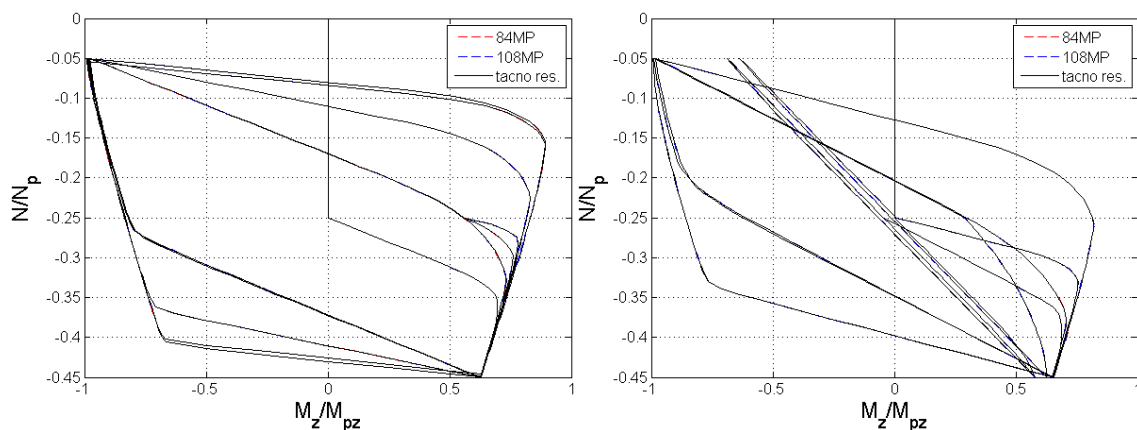
Slika B.175: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu



TEST A8_3

TEST B8_3

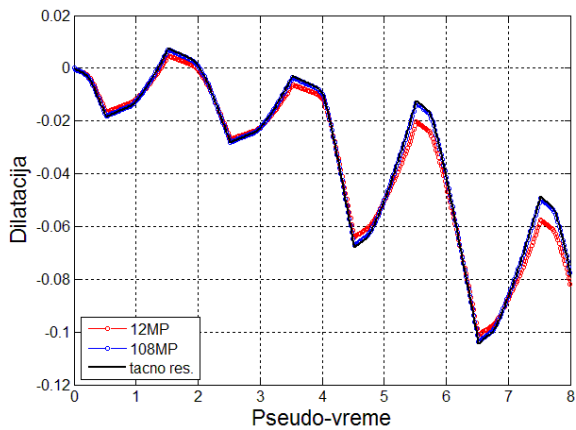
Slika B.176: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu



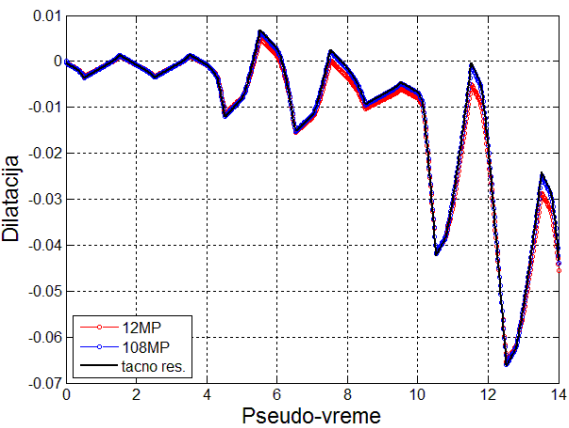
TEST A8_3

TEST B8_3

Slika B.177: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

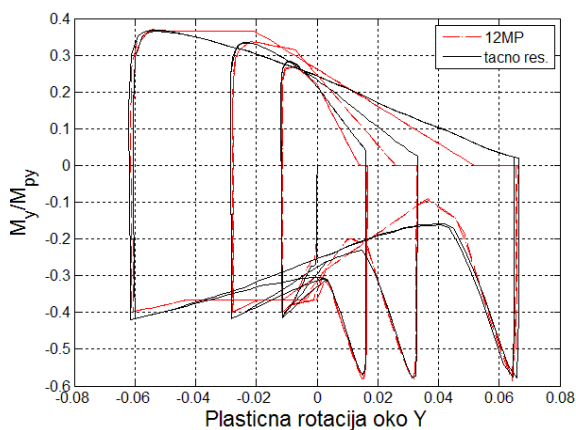


TEST A8_3

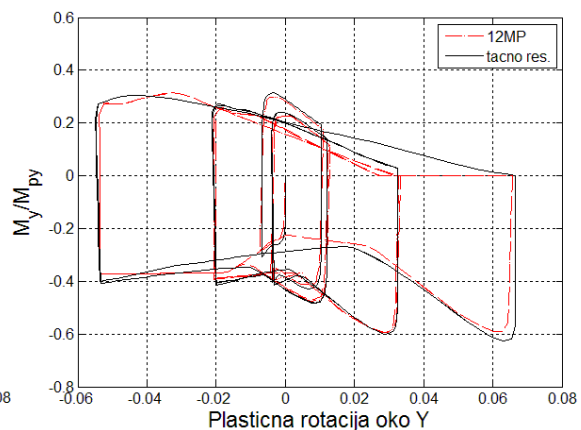


TEST B8_3

Slika B.178: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna

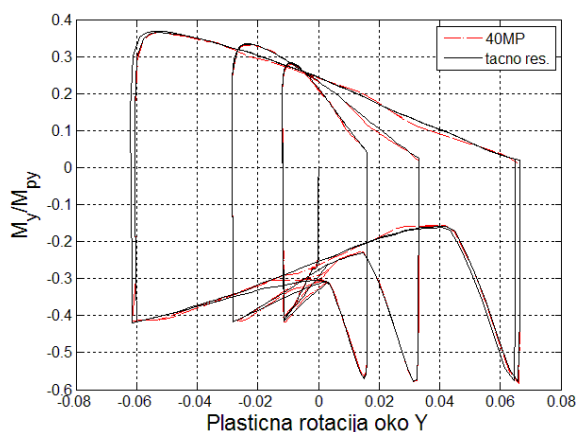


TEST A8_4

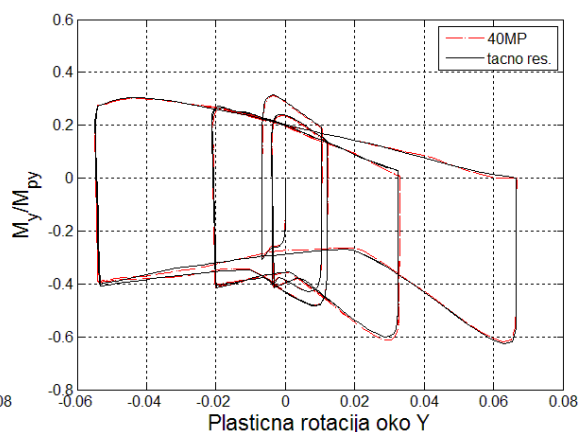


TEST B8_4

Slika B.179: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

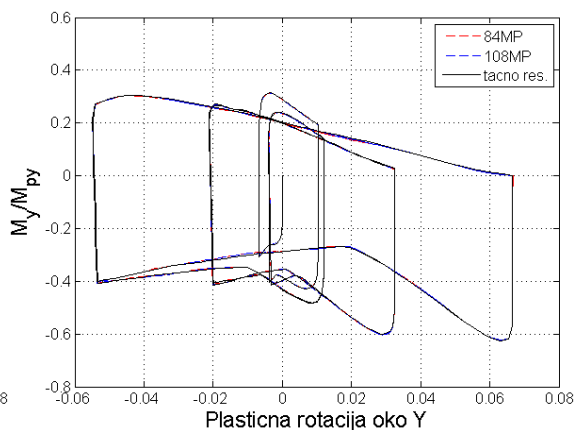
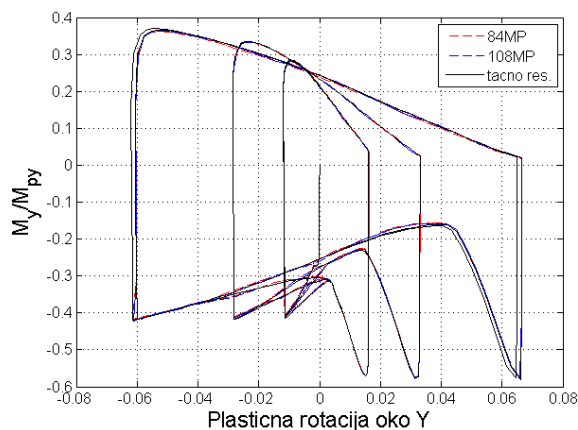


TEST A8_4

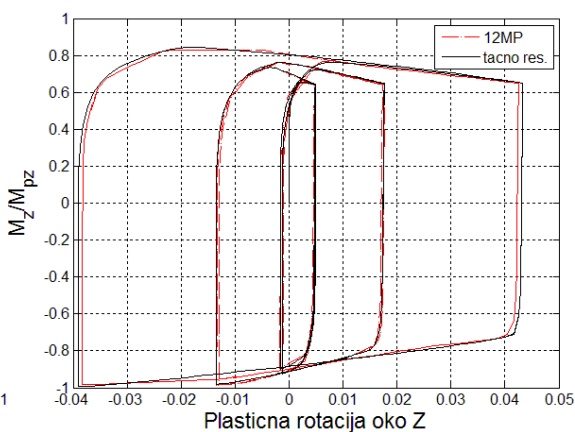
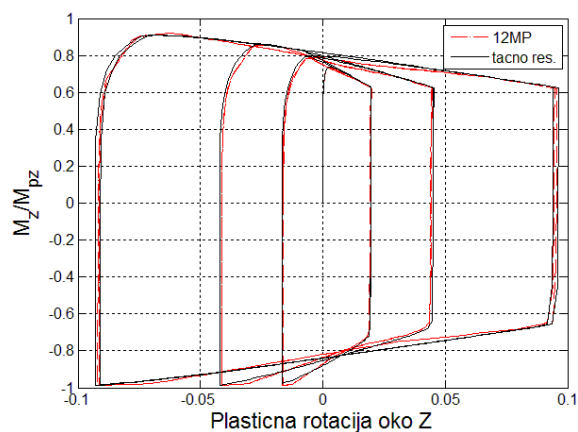


TEST B8_4

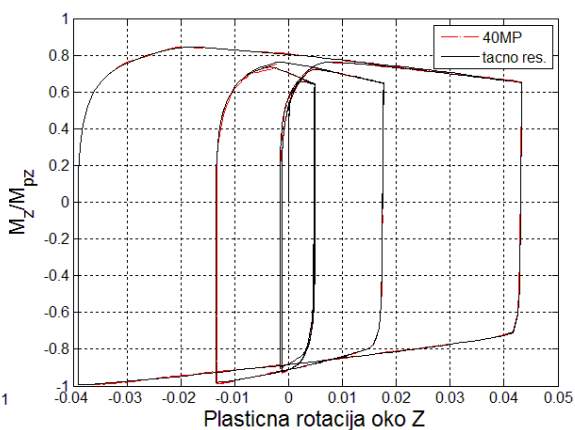
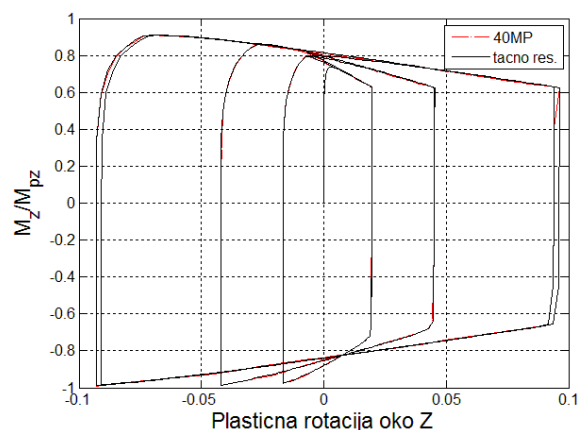
Slika B.180: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 40MP šemu



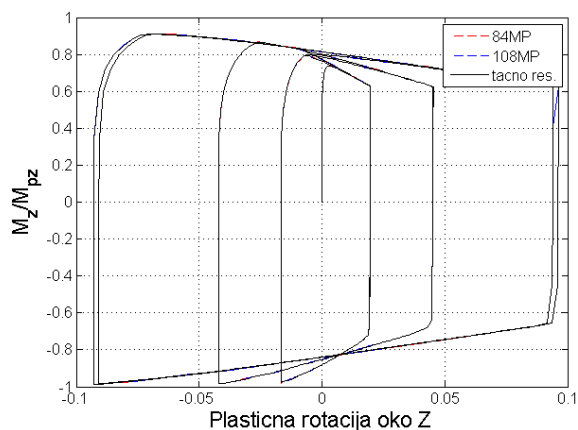
Slika B.181: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme



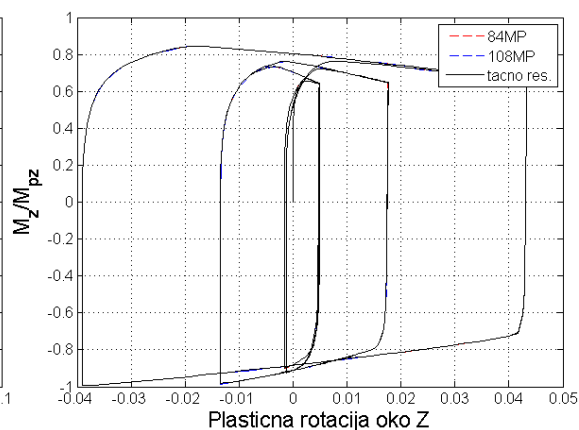
Slika B.182: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 12MP šemu



Slika B.183: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

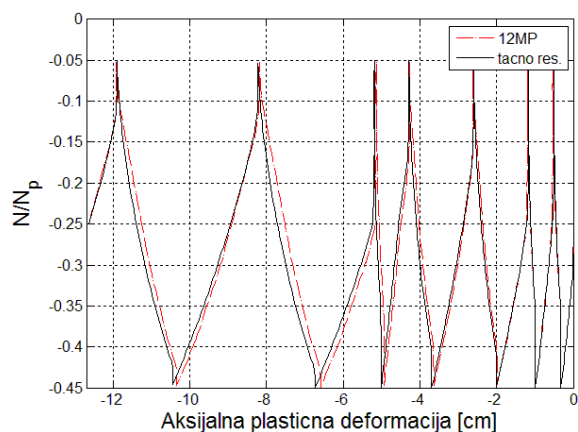


TEST A8_4

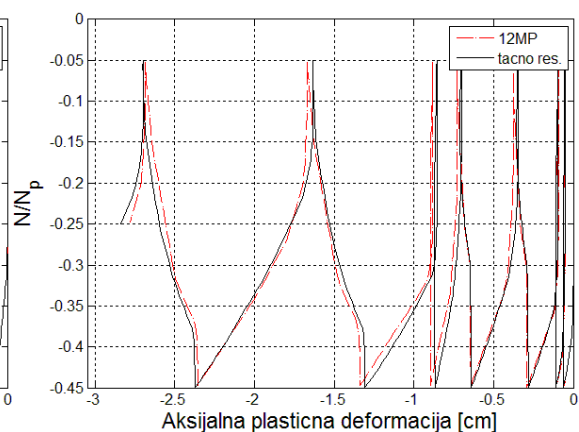


TEST B8_4

Slika B.184: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

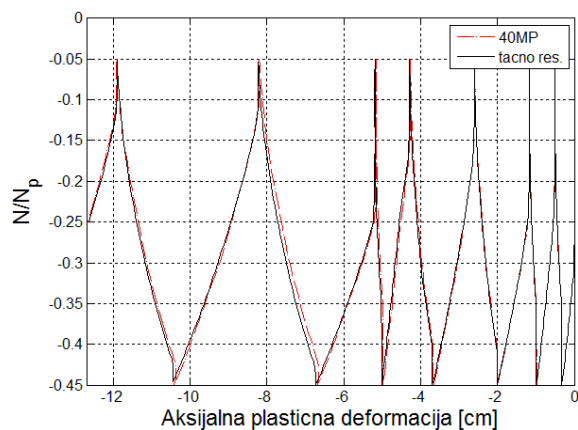


TEST A8_4

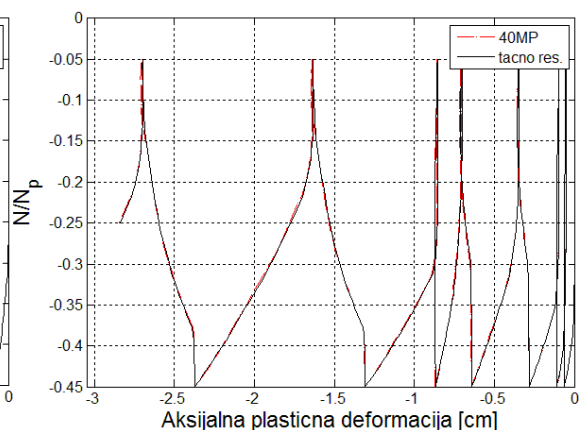


TEST B8_4

Slika B.185: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 12MP šemu

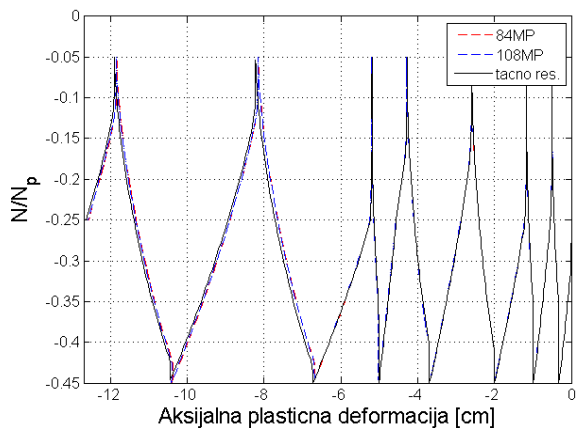


TEST A8_4

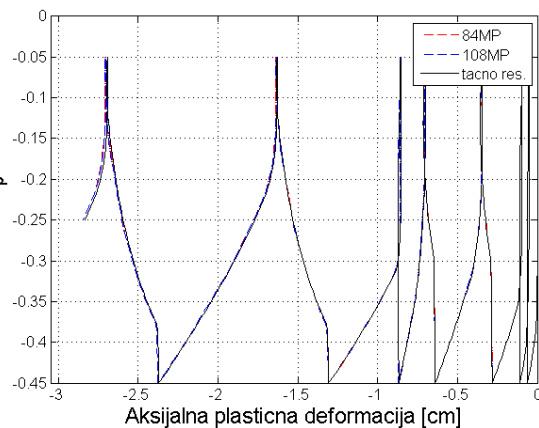


TEST B8_4

Slika B.186: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 40MP šemu

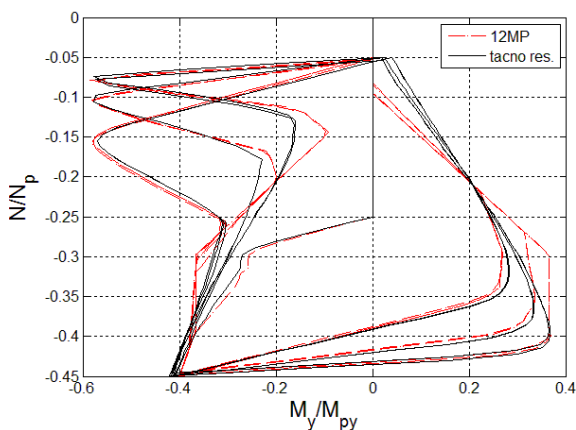


TEST A8_4

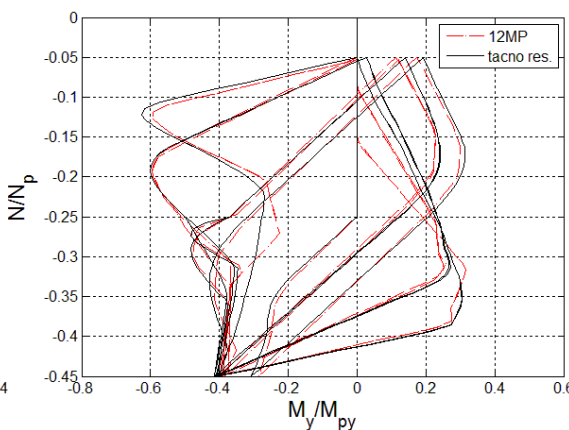


TEST B8_4

Slika B.187: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

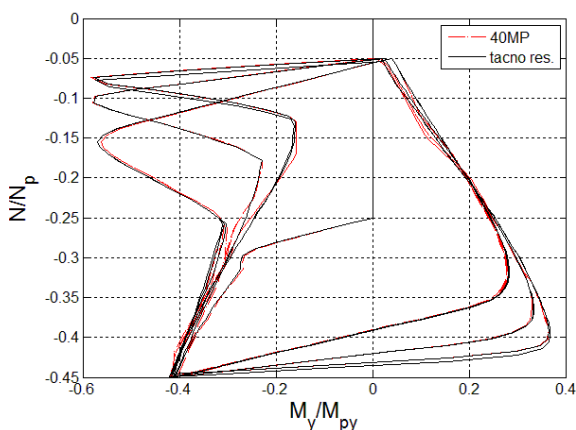


TEST A8_4

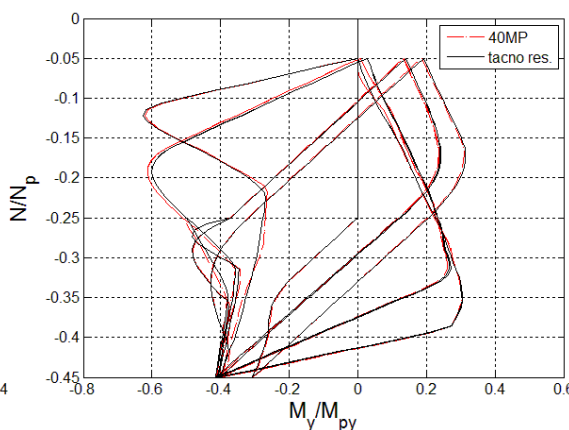


TEST B8_4

Slika B.188: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

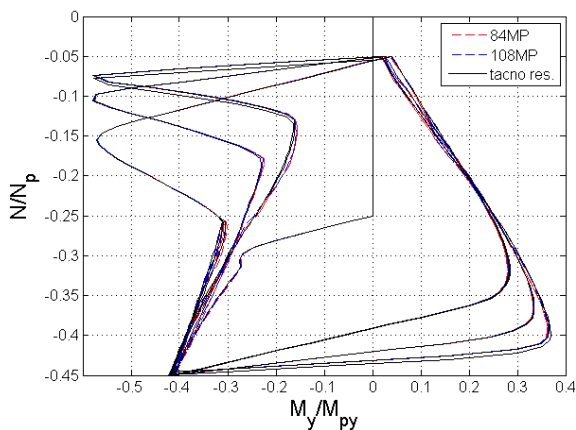


TEST A8_4

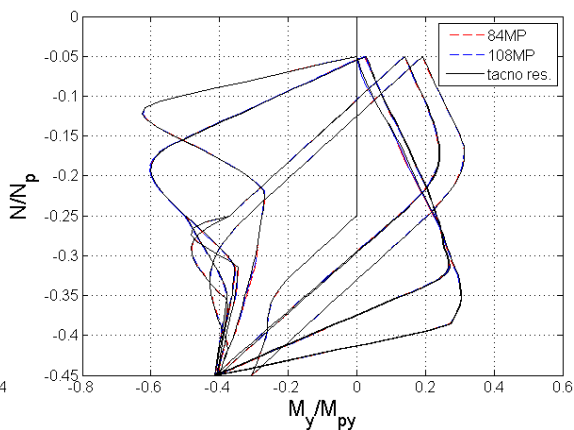


TEST B8_4

Slika B.189: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu

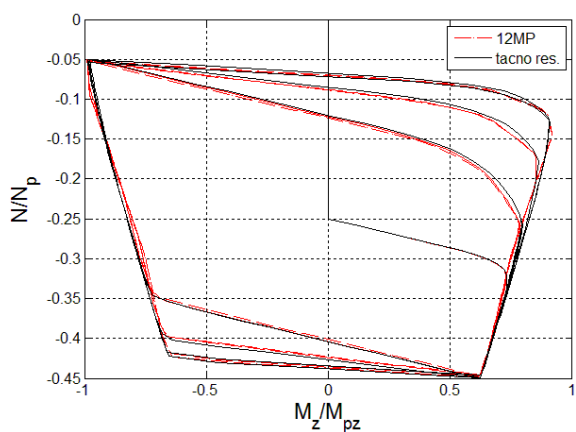


TEST A8_4

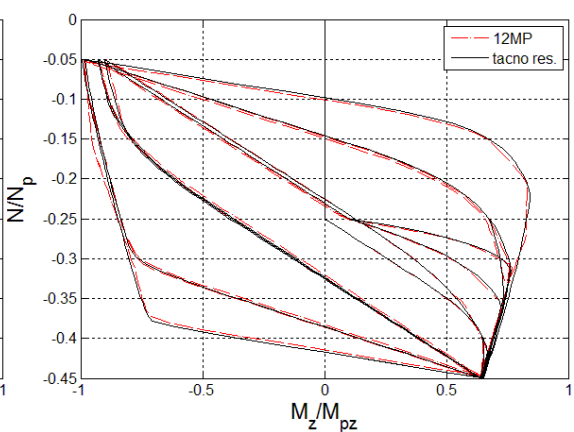


TEST B8_4

Slika B.190: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

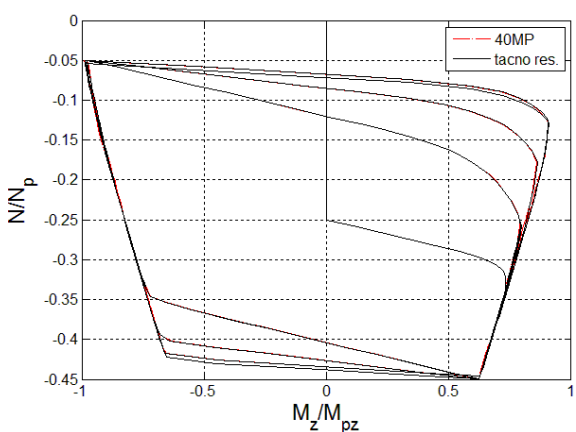


TEST A8_4

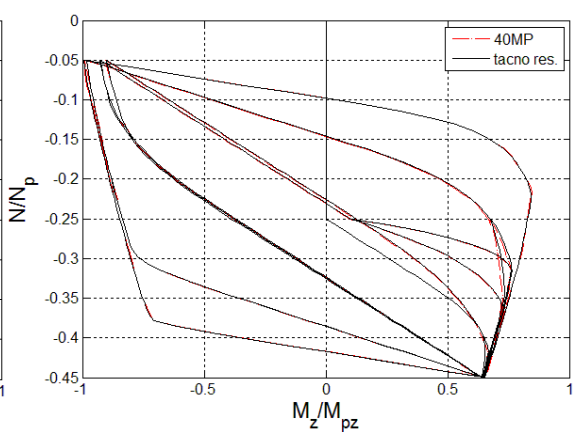


TEST B8_3

Slika B.191: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

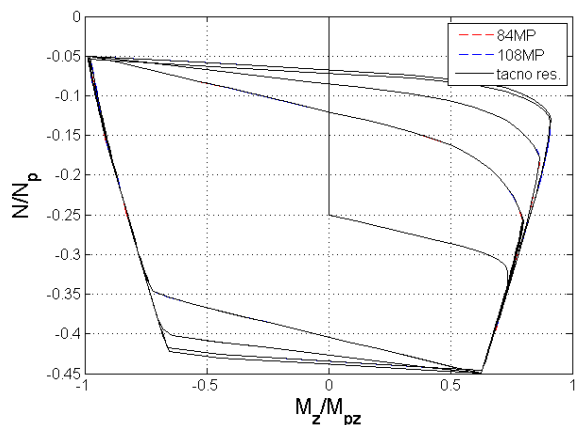


TEST A8_4

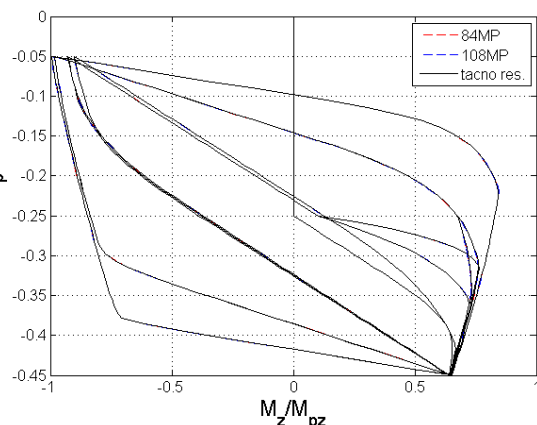


TEST B8_4

Slika B.192: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu

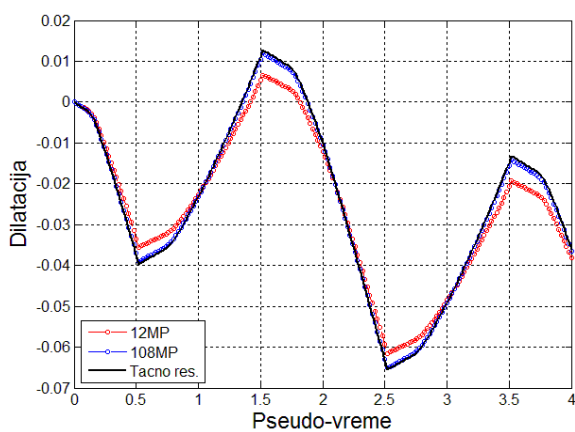


TEST A8_4

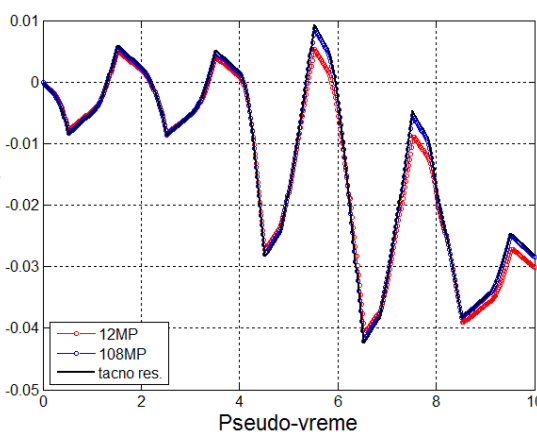


TEST B8_4

Slika B.193: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

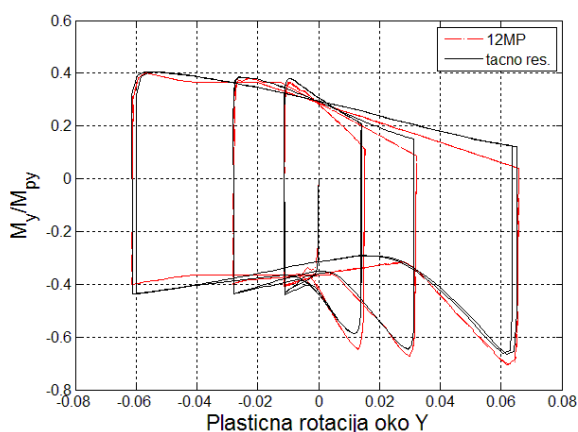


TEST A8_4

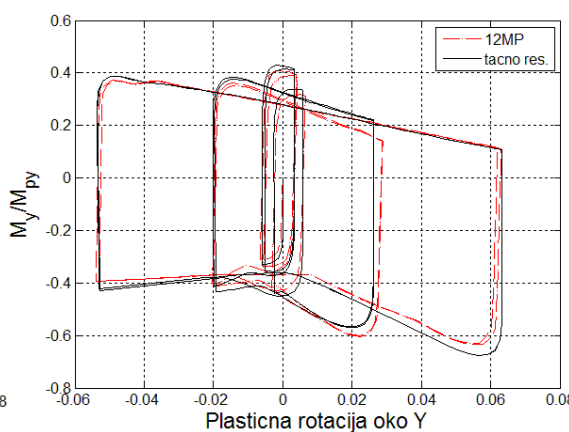


TEST B8_4

Slika B.194: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna

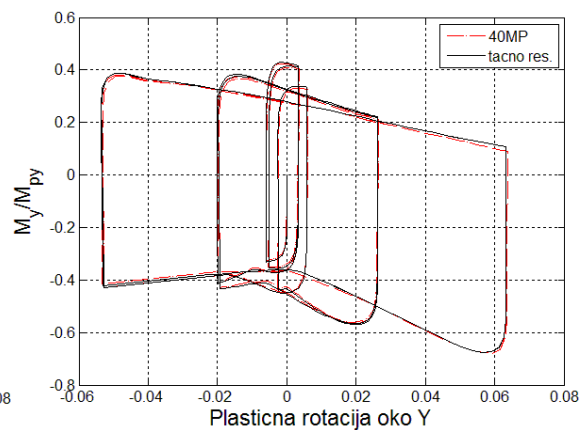
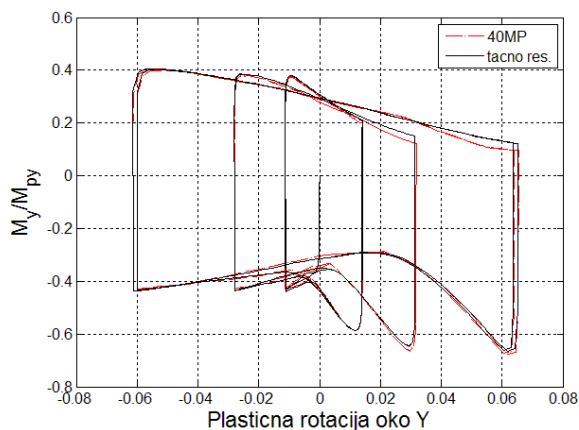


TEST A8_5

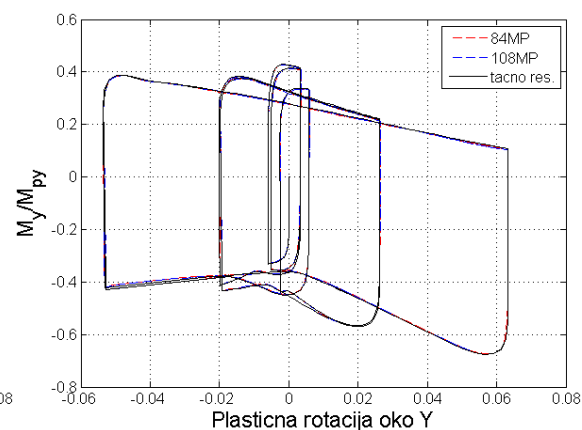
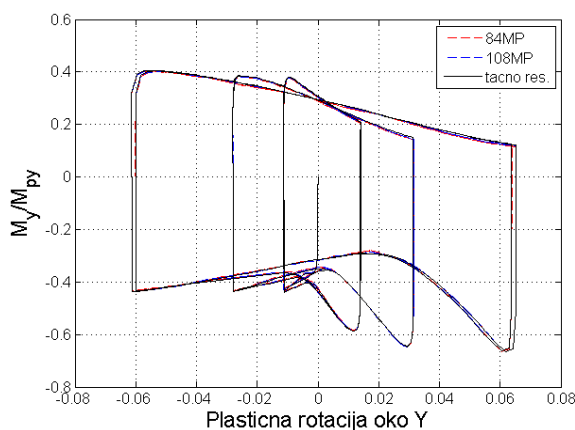


TEST B8_5

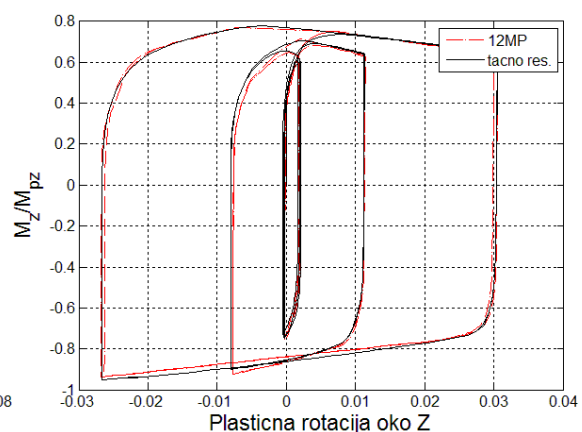
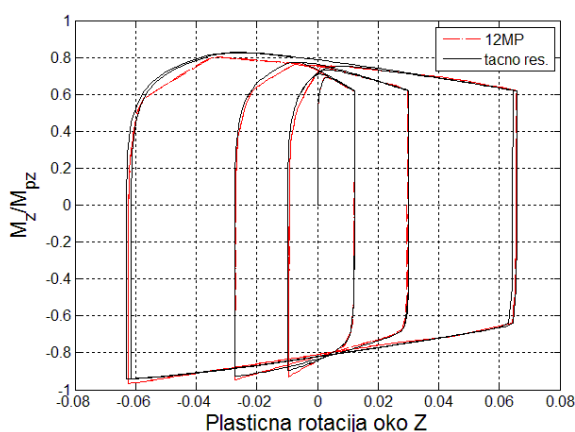
Slika B.195: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 12MP šemu



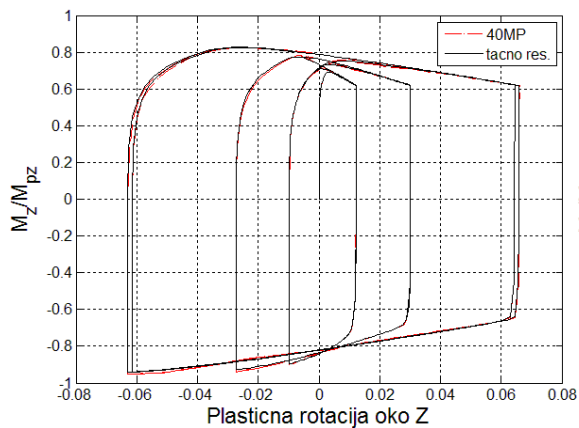
Slika B.196: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 40MP šemu



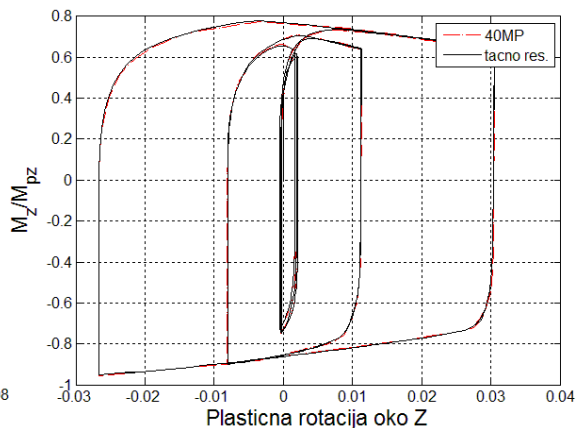
Slika B.197: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme



Slika B.198: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

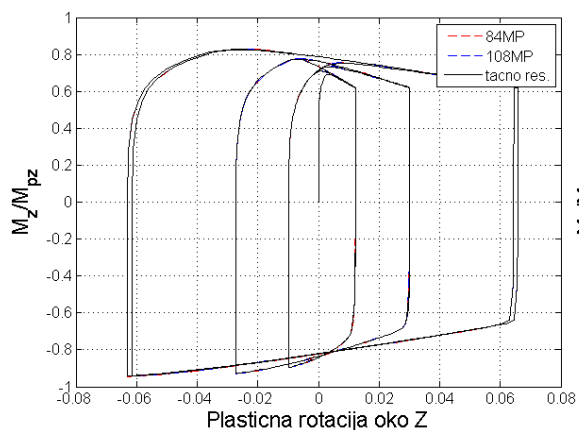


TEST A8_5

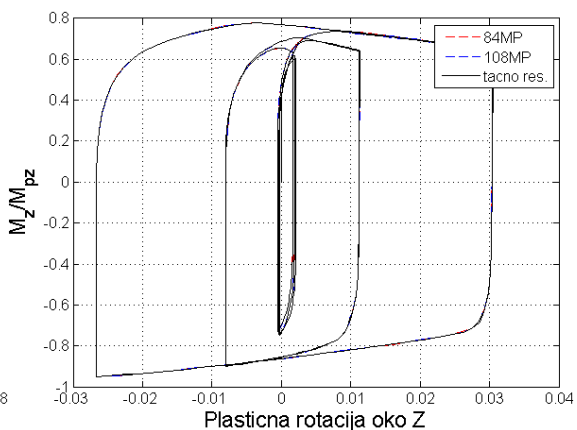


TEST B8_5

Slika B.199: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

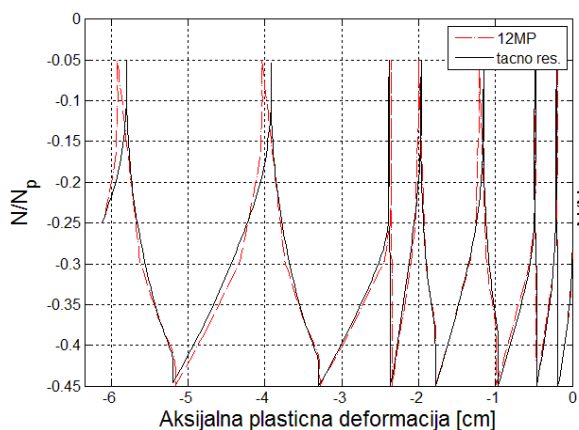


TEST A8_5

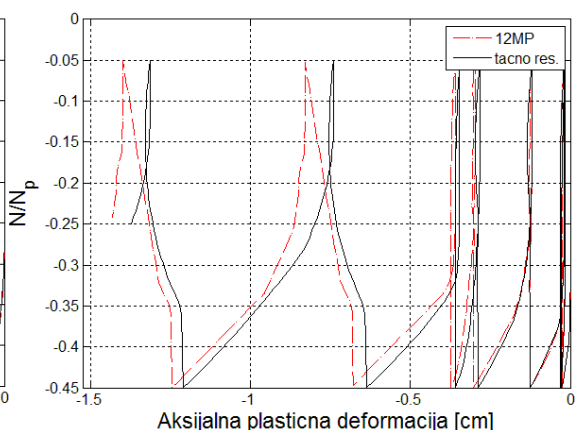


TEST B8_5

Slika B.200: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

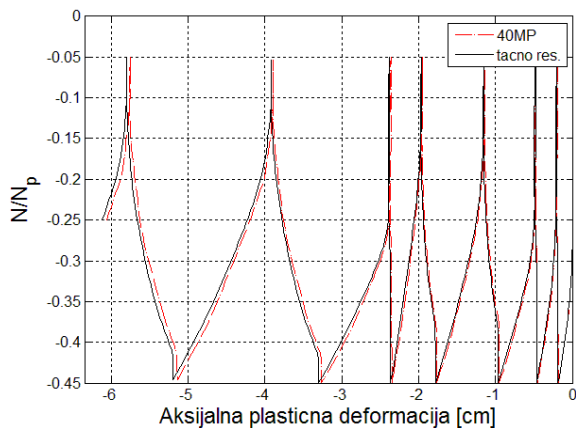


TEST A8_5

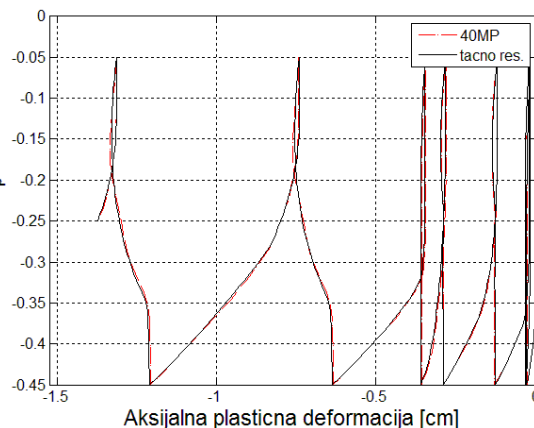


TEST B8_5

Slika B.201: Normirana aksijalna sila - aksijalna plastična deformacija dijagram za 12MP šemu

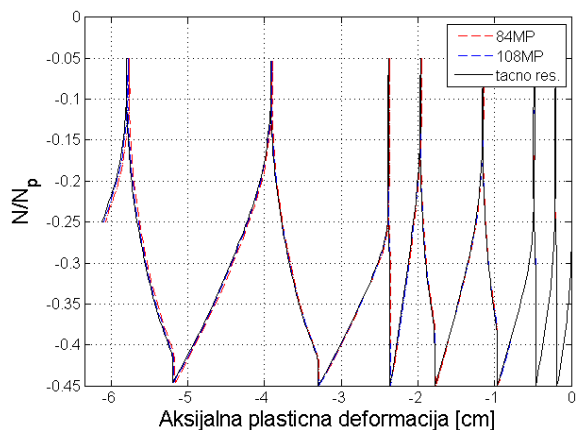


TEST A8_5

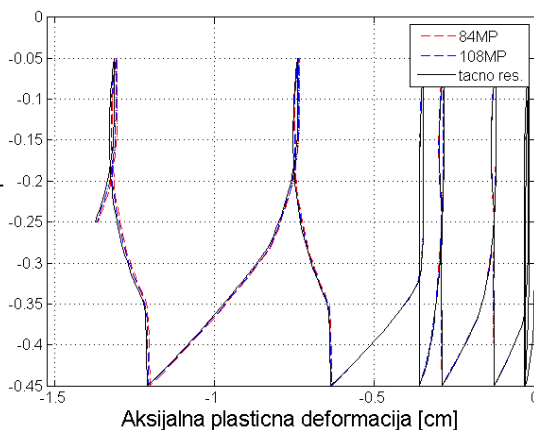


TEST B8_5

Slika B.202: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 40MP šemu

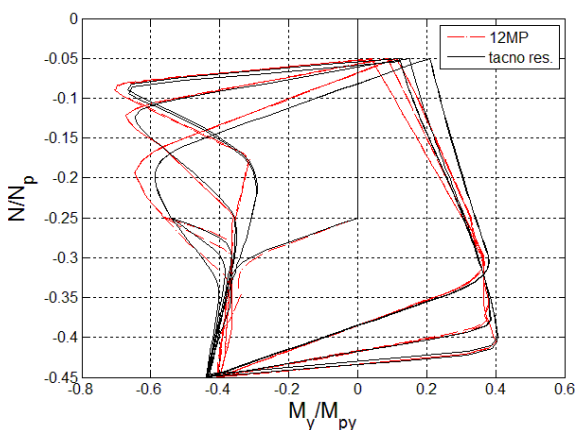


TEST A8_5

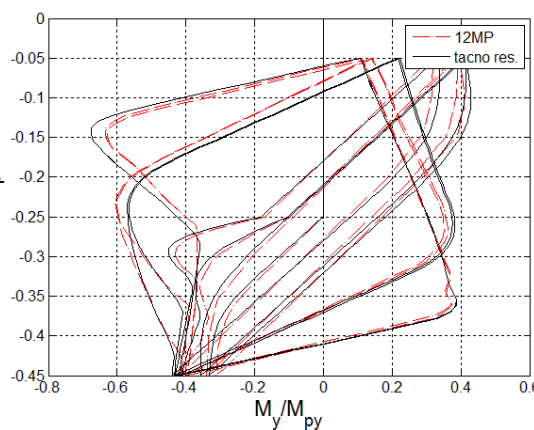


TEST B8_5

Slika B.203: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

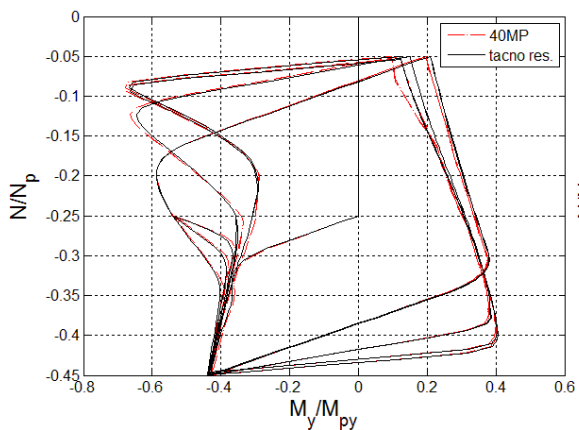


TEST A8_5

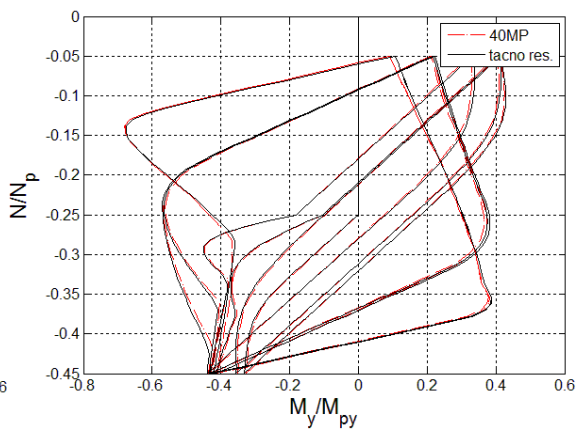


TEST B8_5

Slika B.204: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

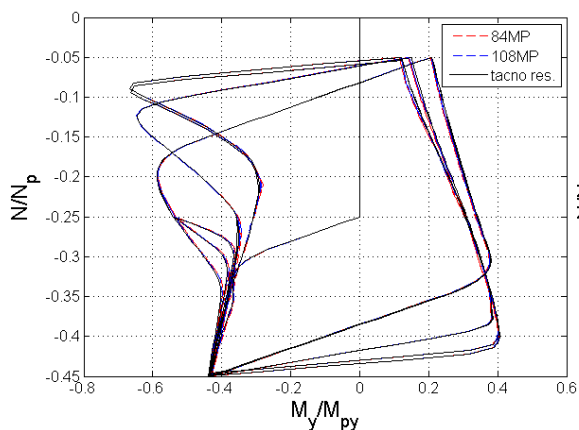


TEST A8_5

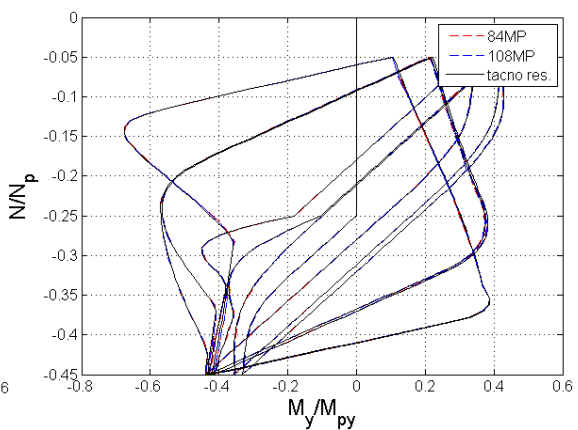


TEST B8_5

Slika B.205: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu

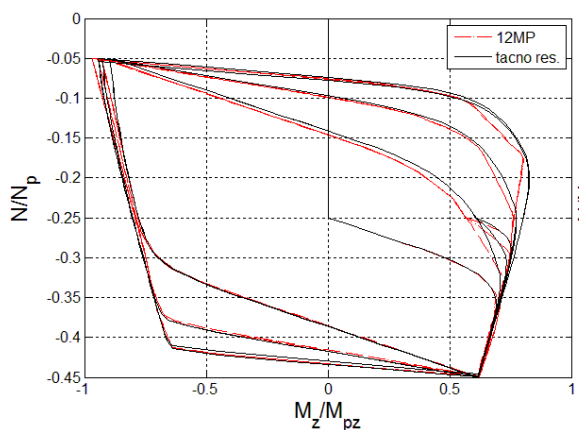


TEST A8_5

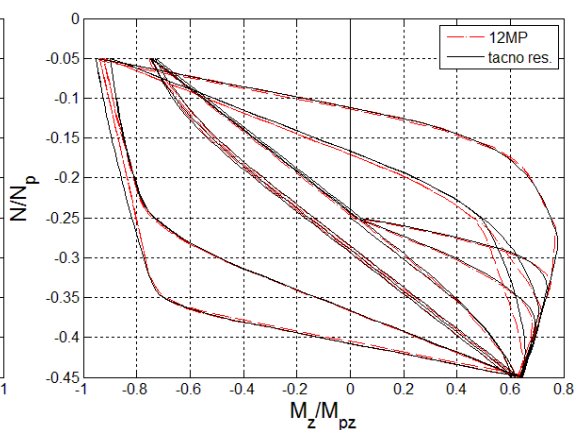


TEST B8_5

Slika B.206: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

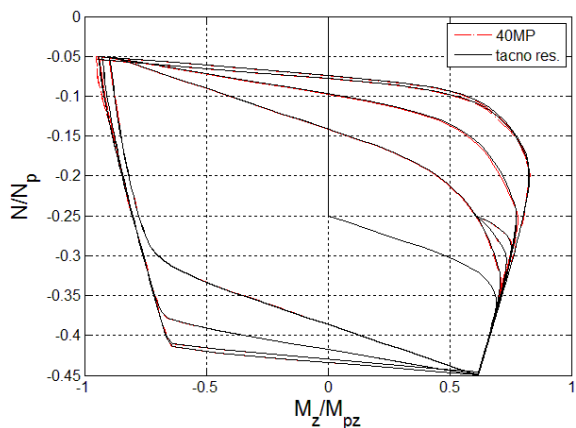


TEST A8_5

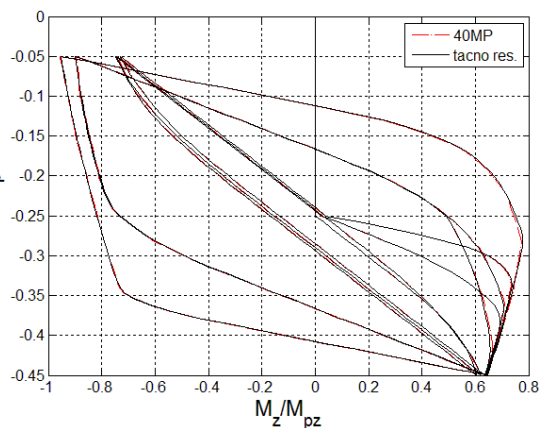


TEST B8_5

Slika B.207: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

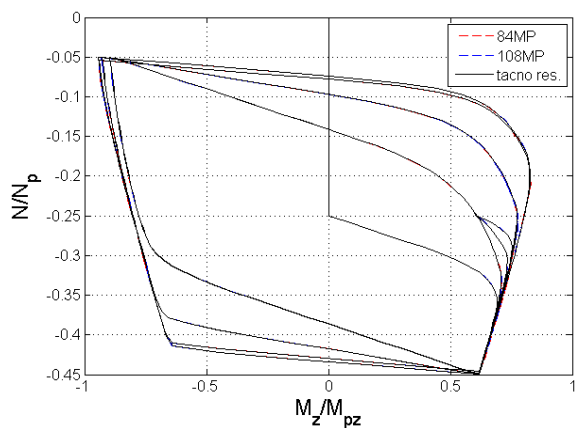


TEST A8_5

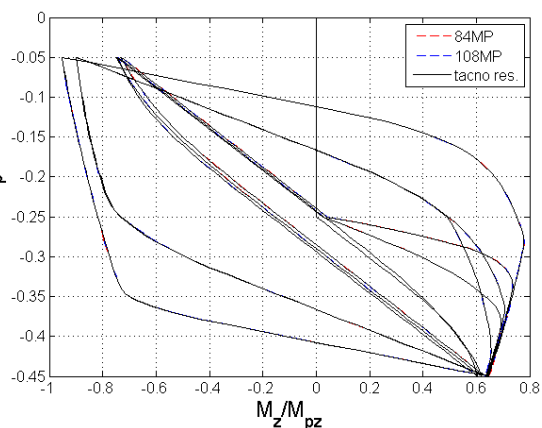


TEST B8_5

Slika B.208: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu

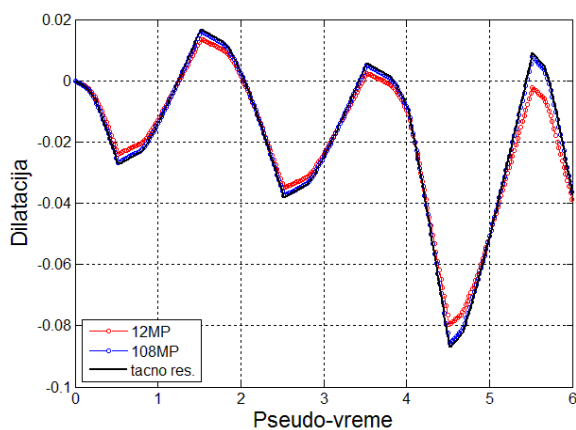


TEST A8_5

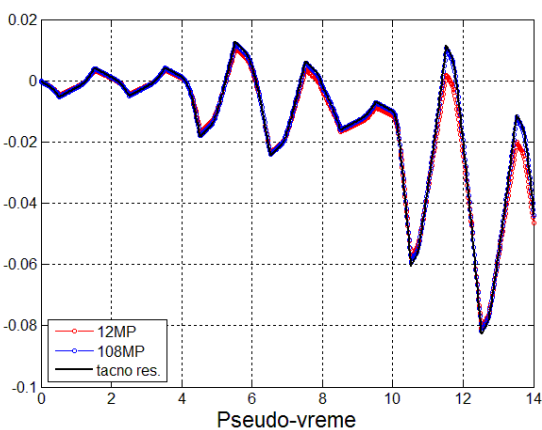


TEST B8_5

Slika B.209: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

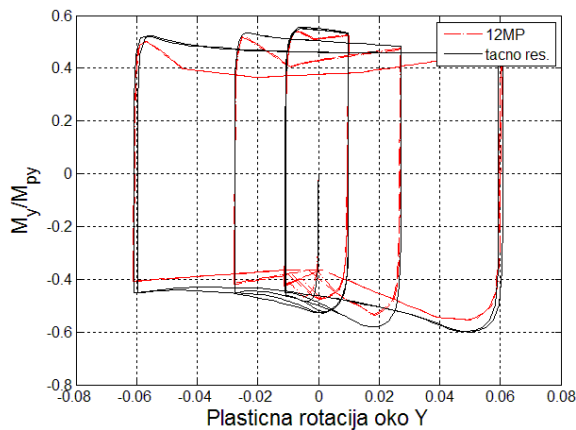


TEST A8_5

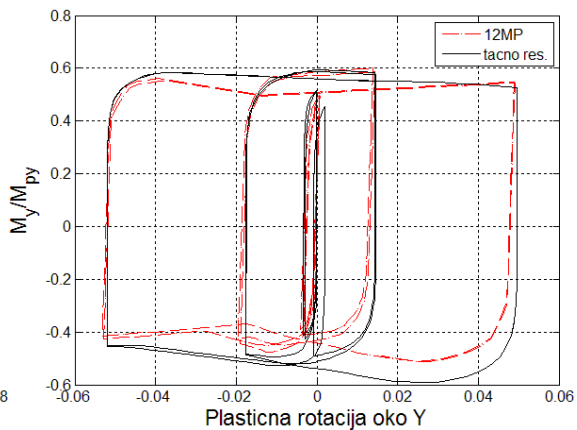


TEST B8_5

Slika B.210: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna

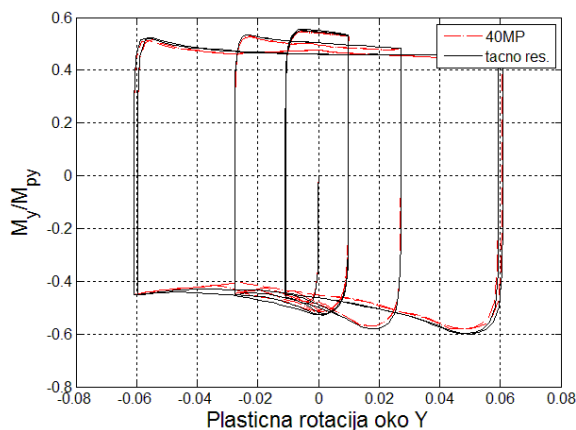


TEST A8_6

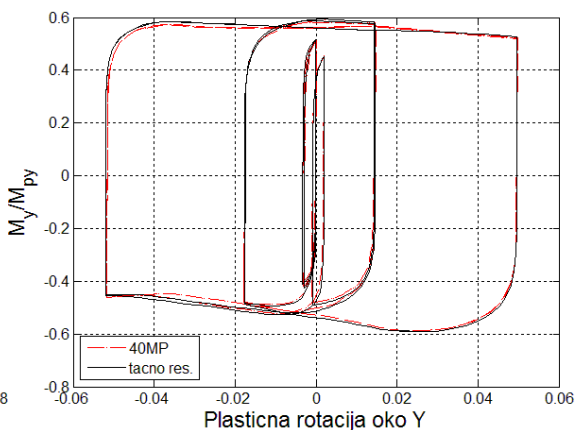


TEST B8_6

Slika B.211: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

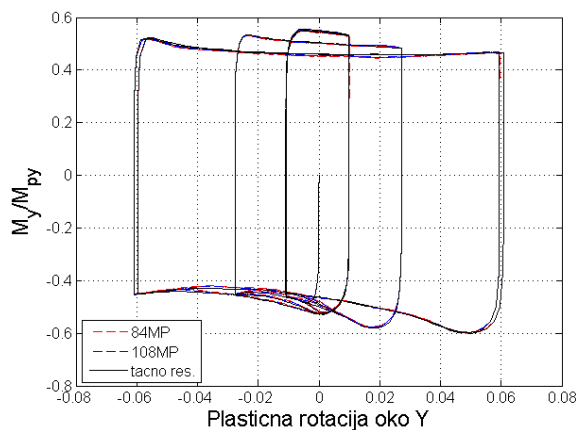


TEST A8_6

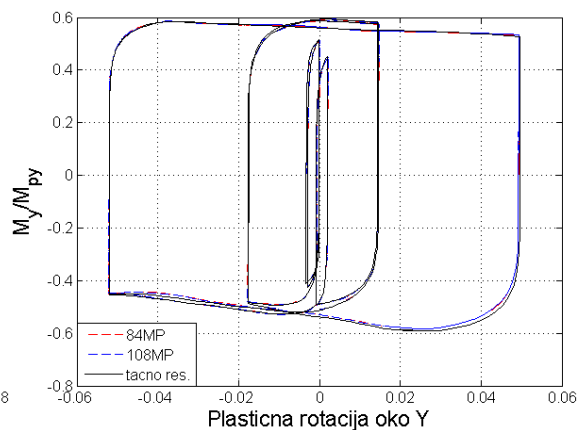


TEST B8_6

Slika B.212: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

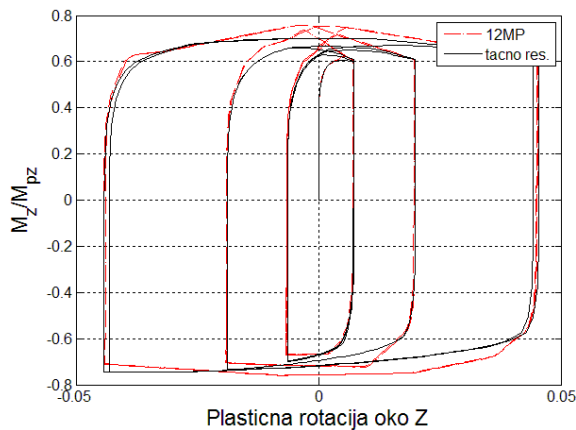


TEST A8_6

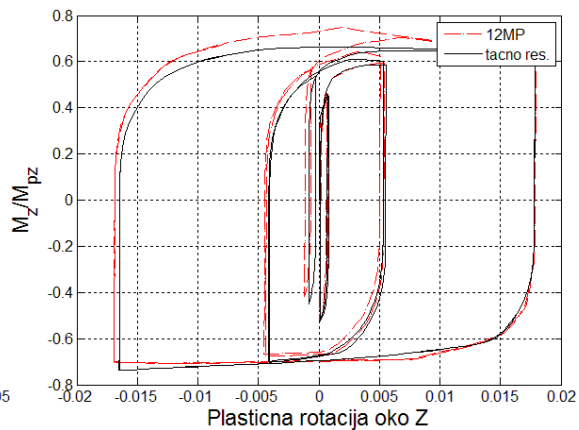


TEST B8_6

Slika B.213: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

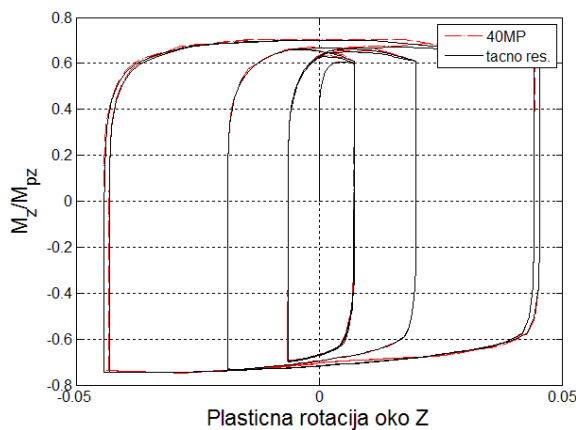


TEST A8_6

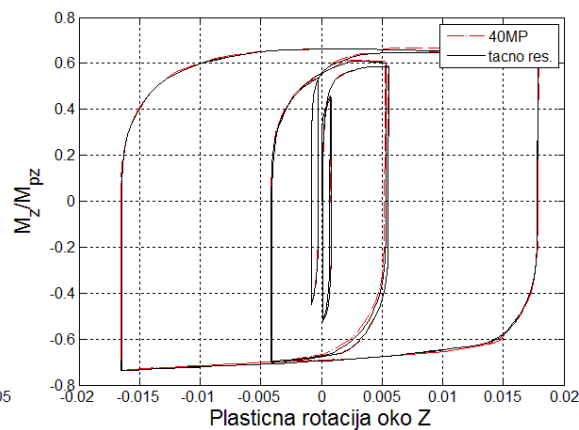


TEST B8_6

Slika B.214: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

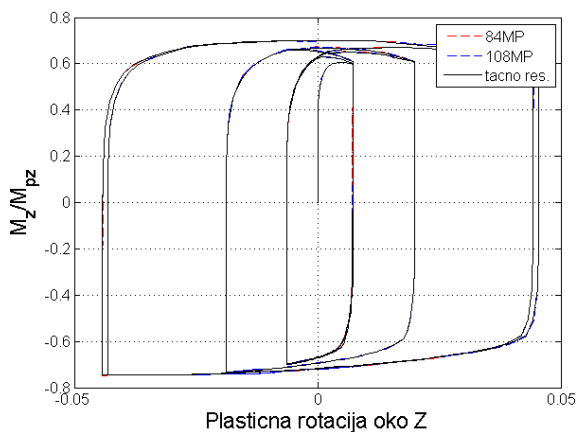


TEST A8_6

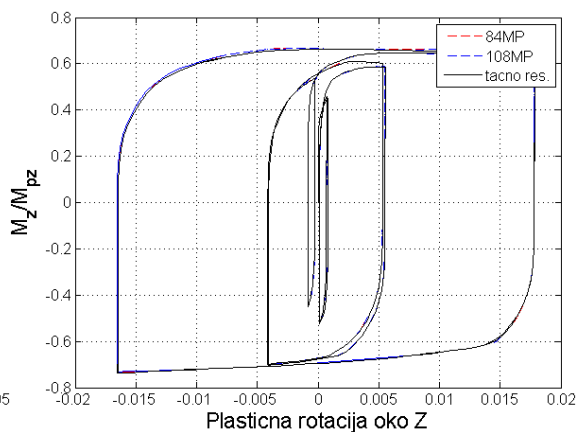


TEST B8_6

Slika B.215: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

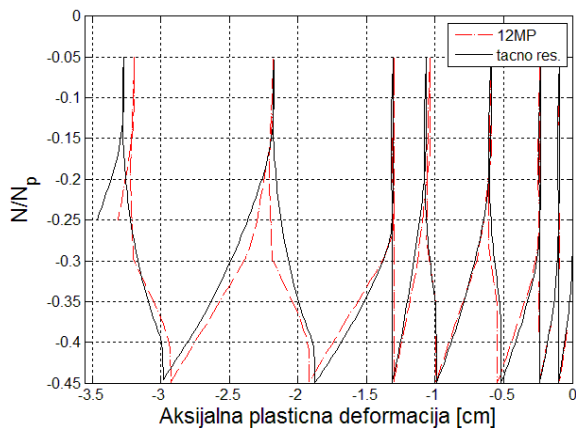


TEST A8_6

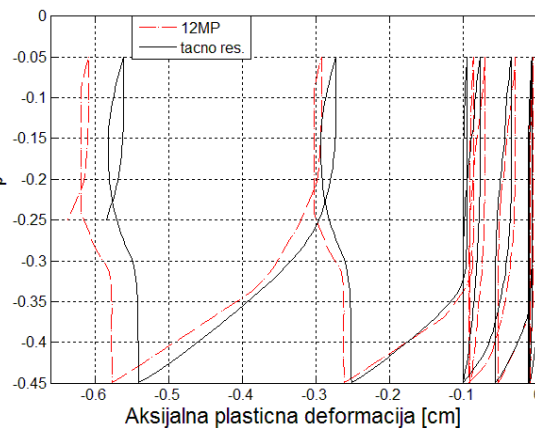


TEST B8_6

Slika B.216: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

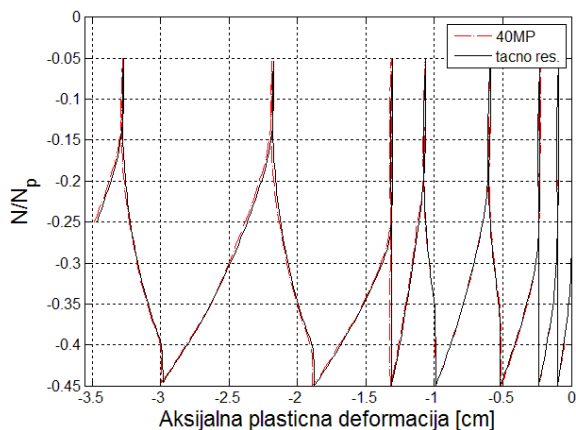


TEST A8_6

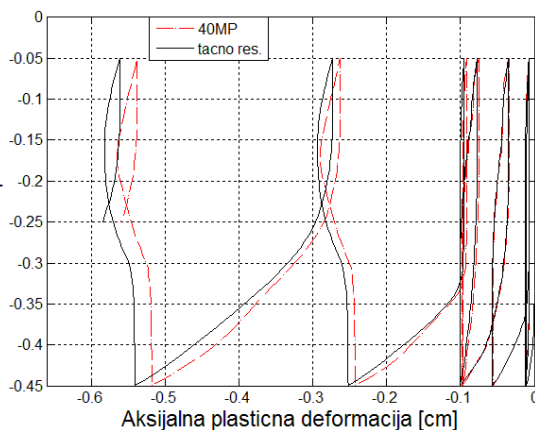


TEST B8_6

Slika B.217: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 12MP šemu

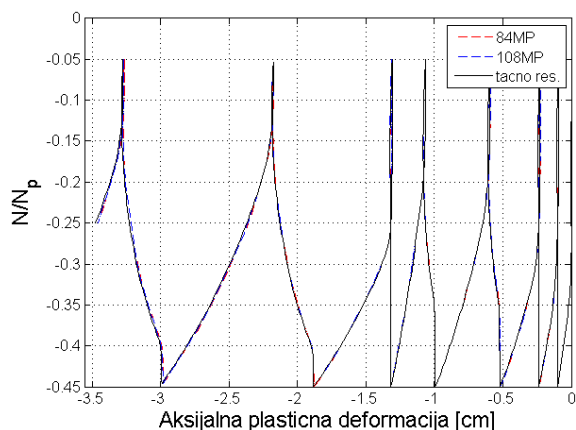


TEST A8_6

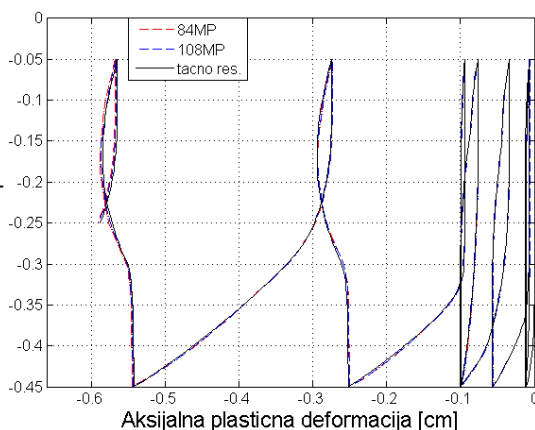


TEST B8_6

Slika B.218: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 40MP šemu

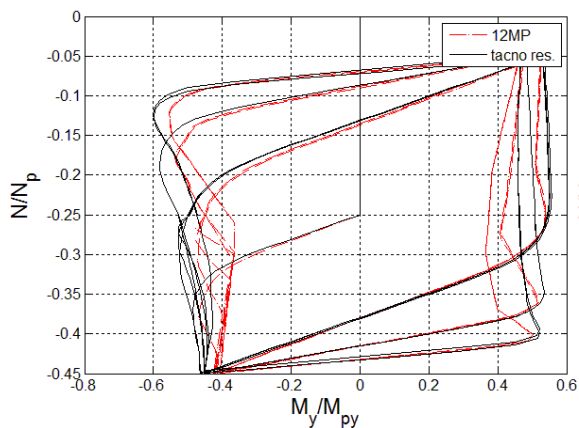


TEST A8_6

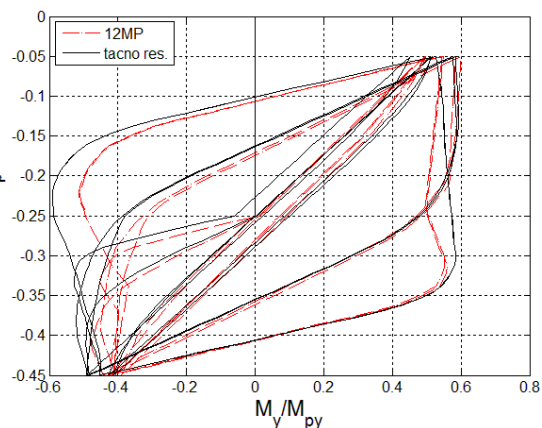


TEST B8_6

Slika B.219: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

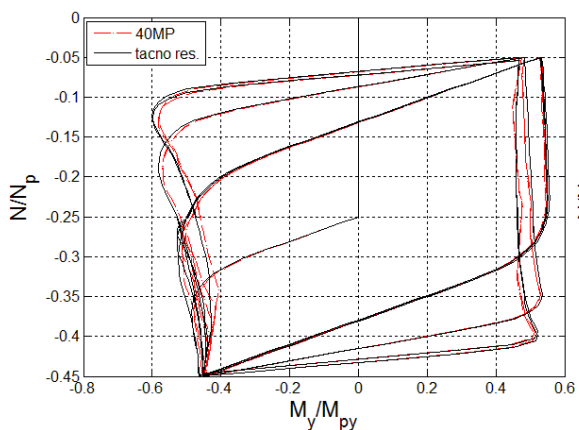


TEST A8_6

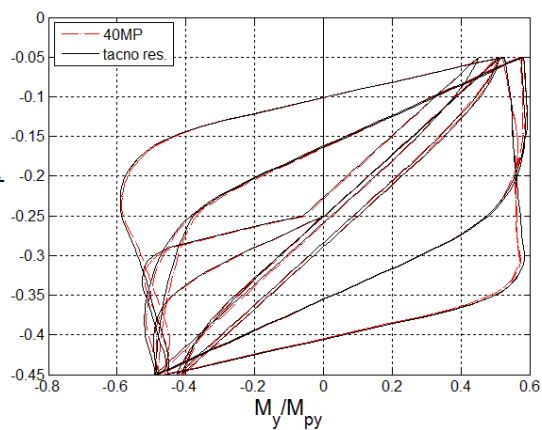


TEST B8_6

Slika B.220: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

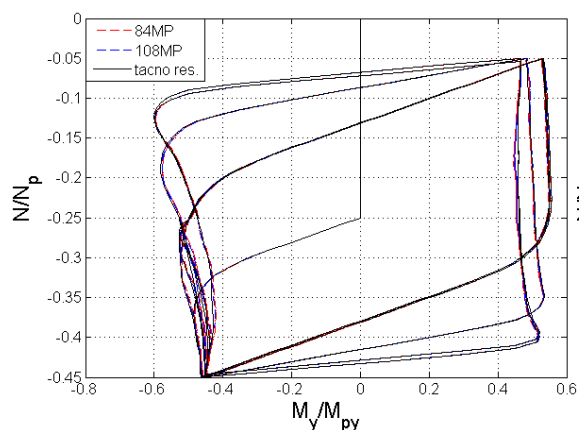


TEST A8_6

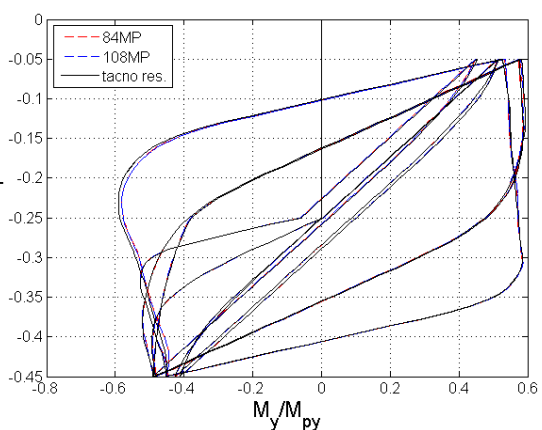


TEST B8_6

Slika B.221: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu

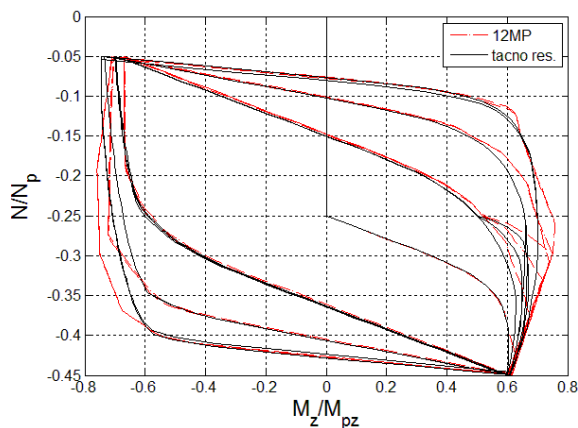


TEST A8_6

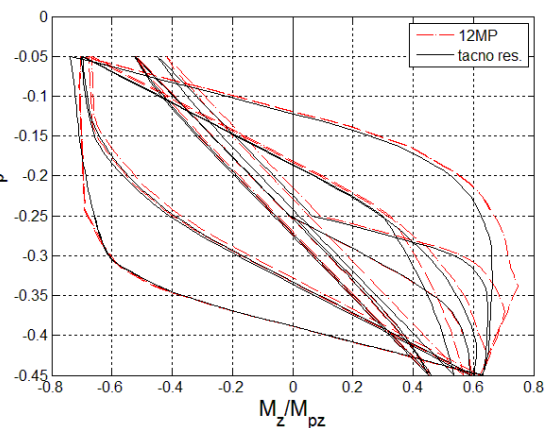


TEST B8_6

Slika B.222: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

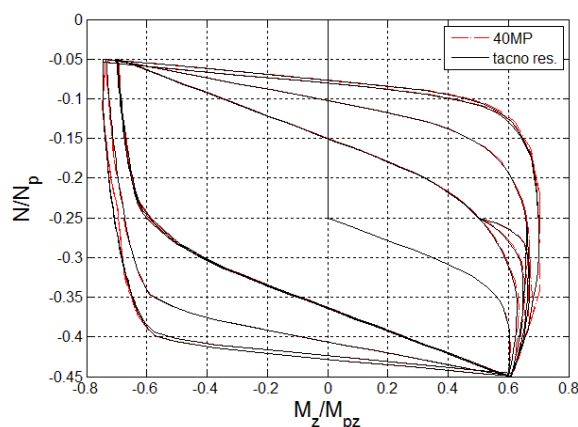


TEST A8_6

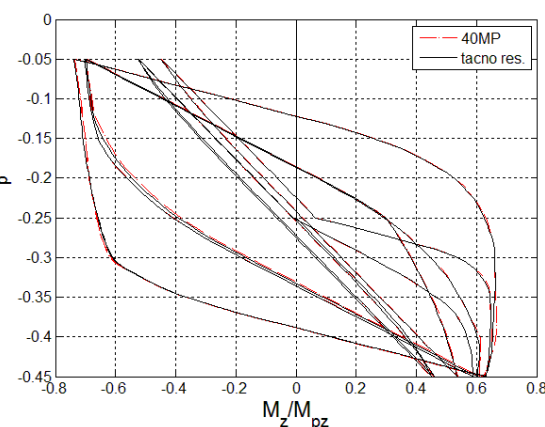


TEST B8_6

Slika B.223: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

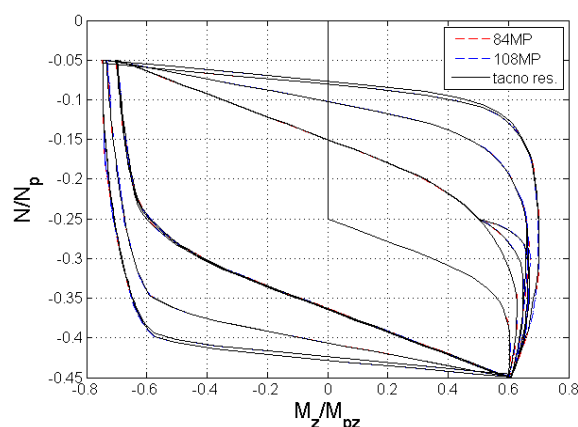


TEST A8_6

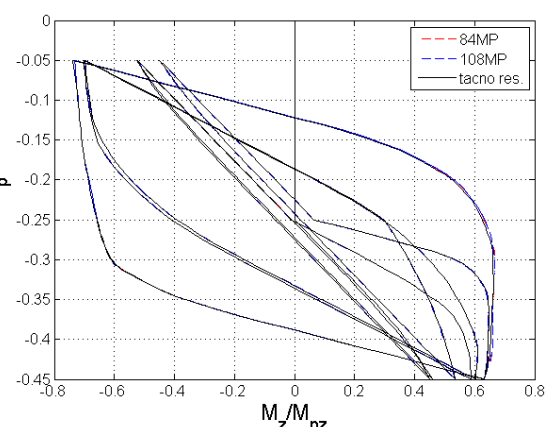


TEST B8_6

Slika B.224: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu

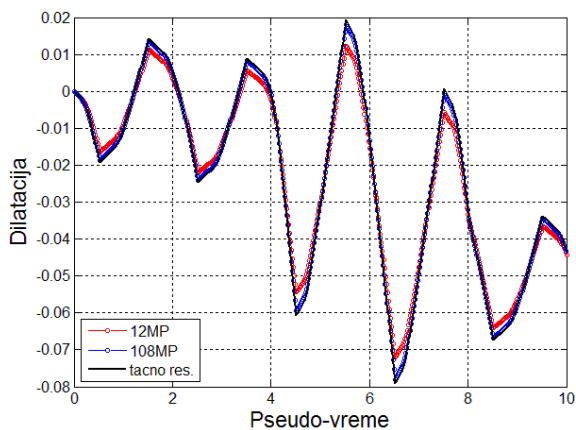


TEST A8_6

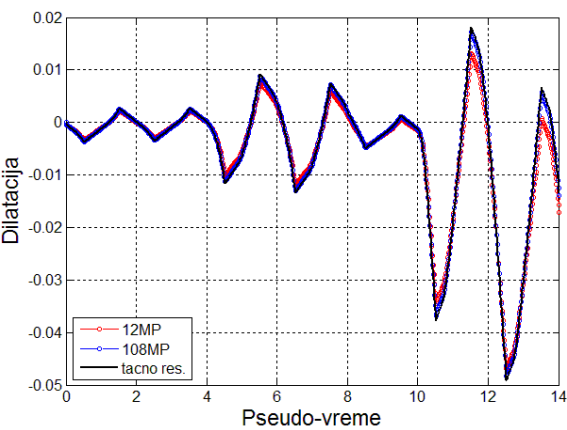


TEST B8_6

Slika B.225: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

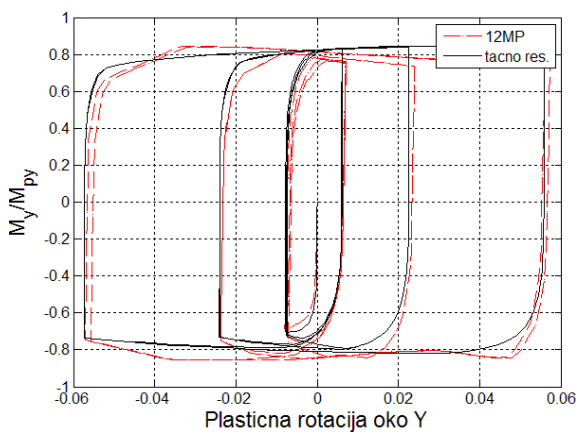


TEST A8_6

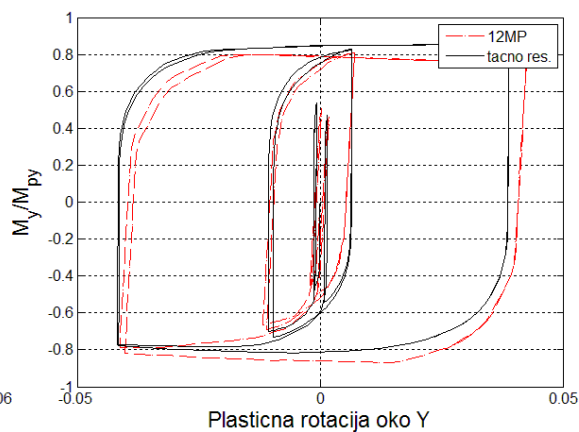


TEST B8_6

Slika B.226: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna

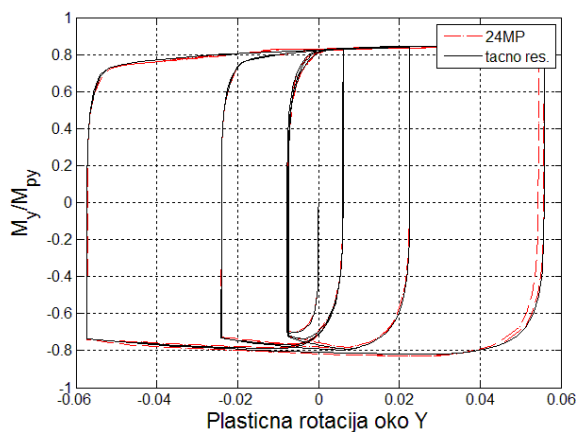


TEST A8_7

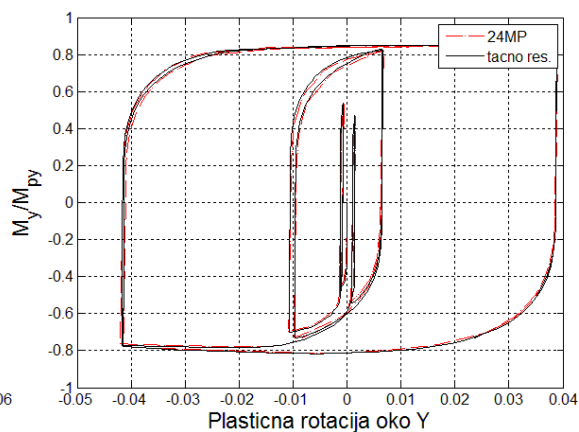


TEST B8_7

Slika B.227: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

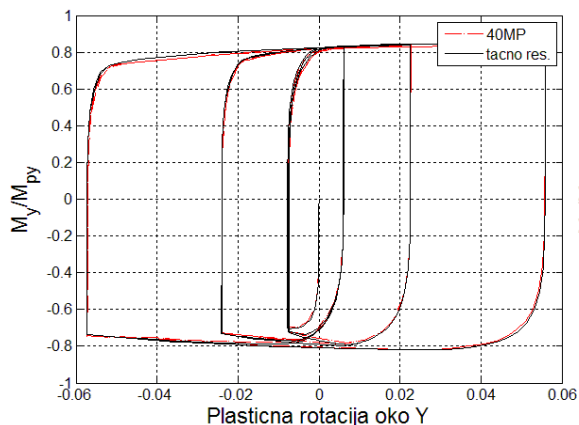


TEST A8_7

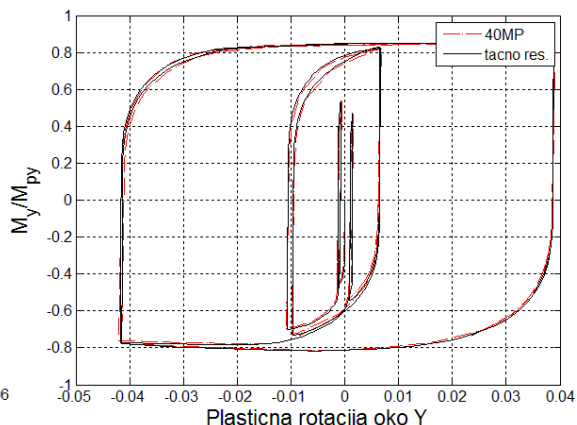


TEST B8_7

Slika B.228: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 24MP šemu

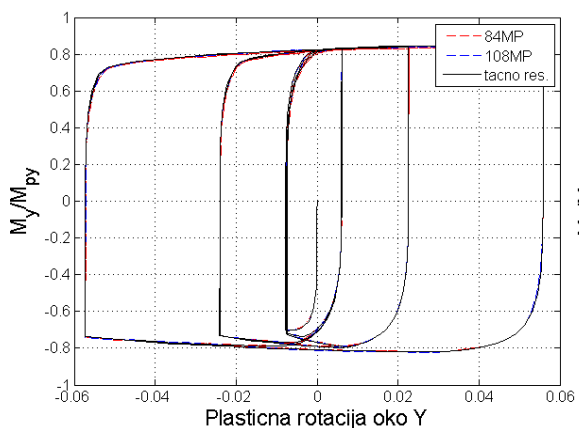


TEST A8_7

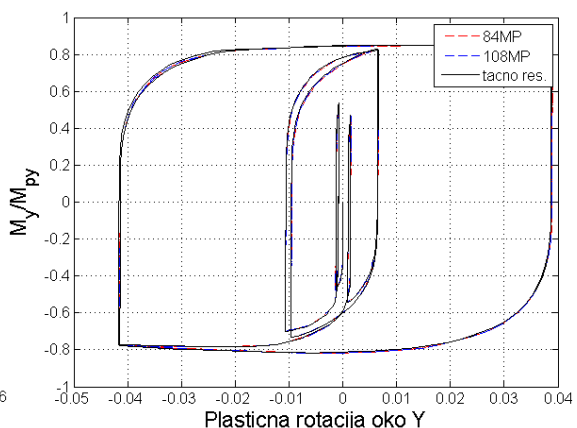


TEST B8_7

Slika B.229: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

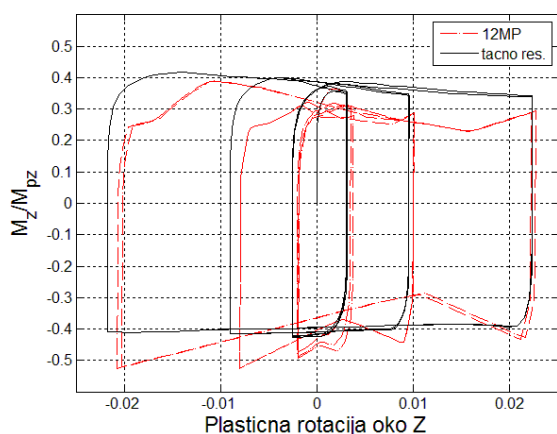


TEST A8_7

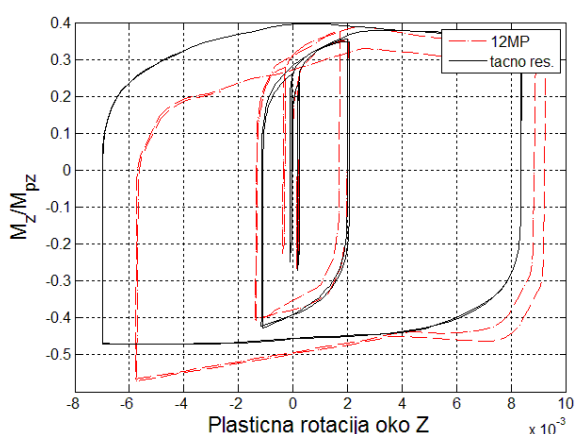


TEST B8_7

Slika B.230: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

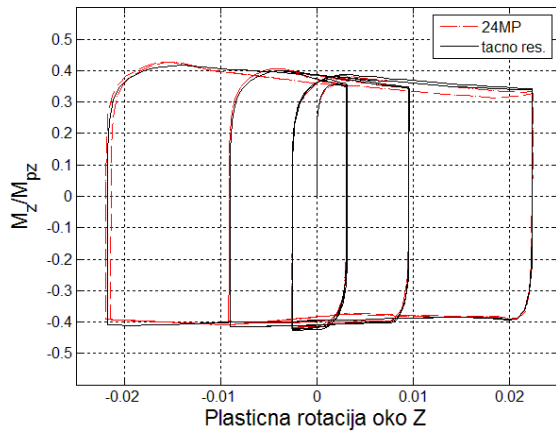


TEST A8_7

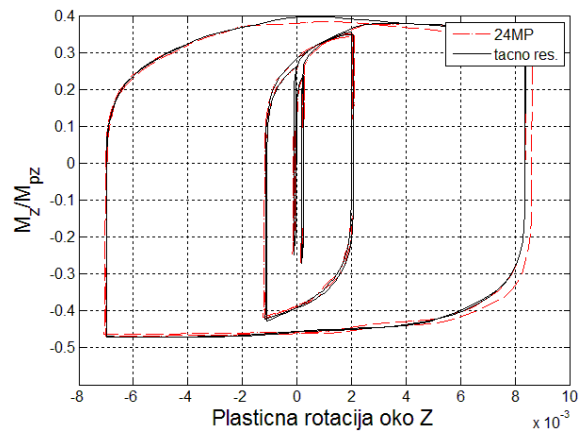


TEST B8_7

Slika B.231: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

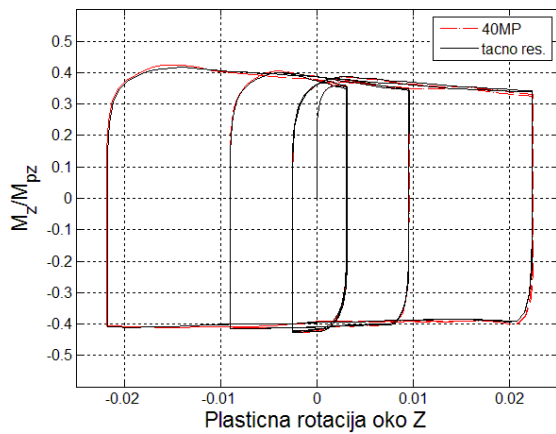


TEST A8_7

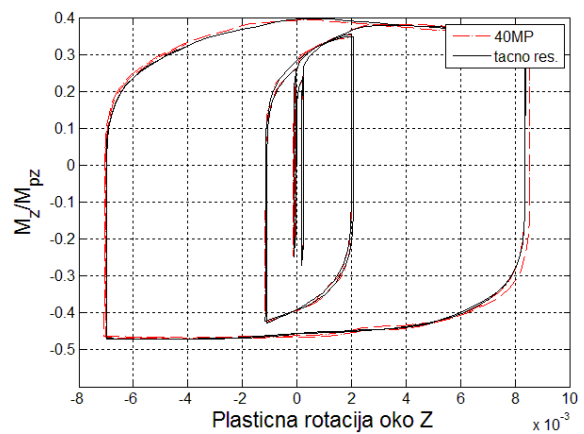


TEST B8_7

Slika B.232: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 24MP šemu

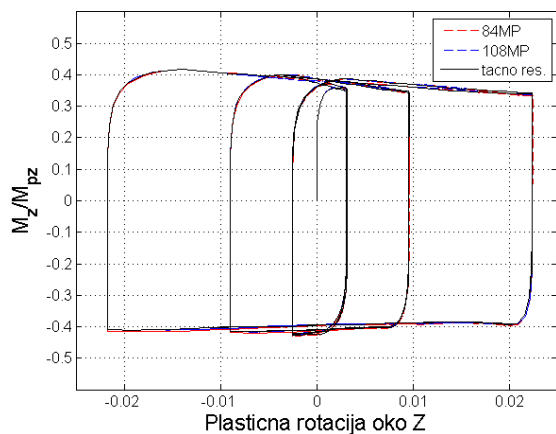


TEST A8_7

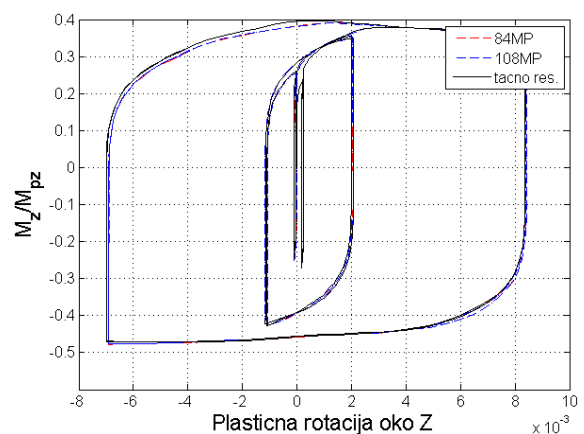


TEST B8_7

Slika B.233: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

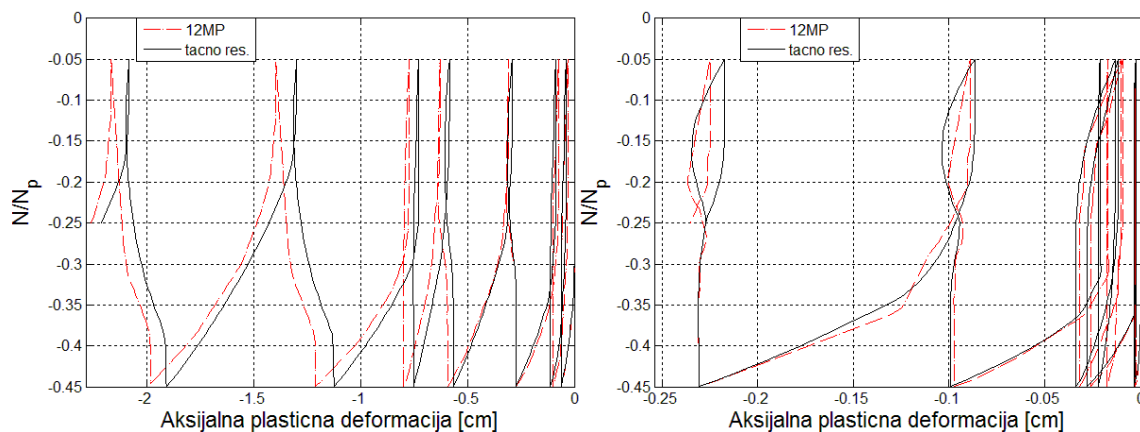


TEST A8_7



TEST B8_7

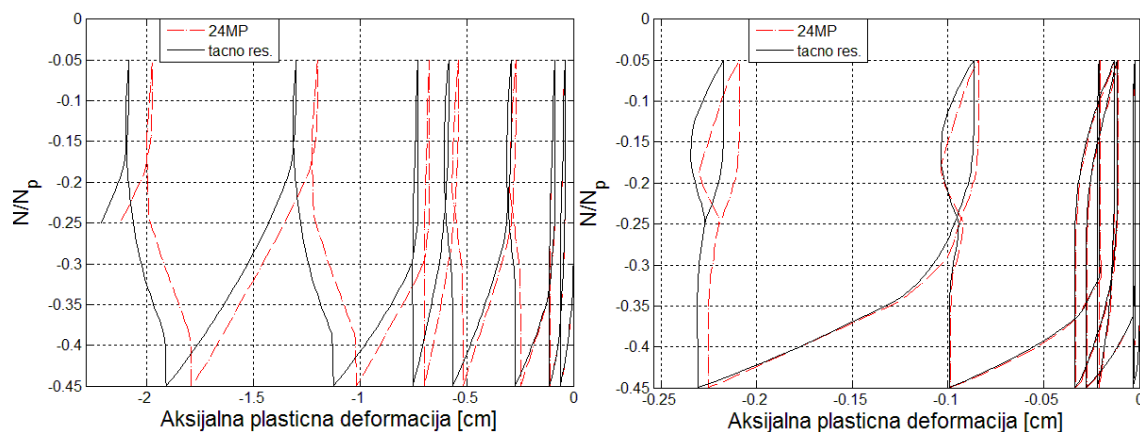
Slika B.234: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme



TEST A8_7

TEST B8_7

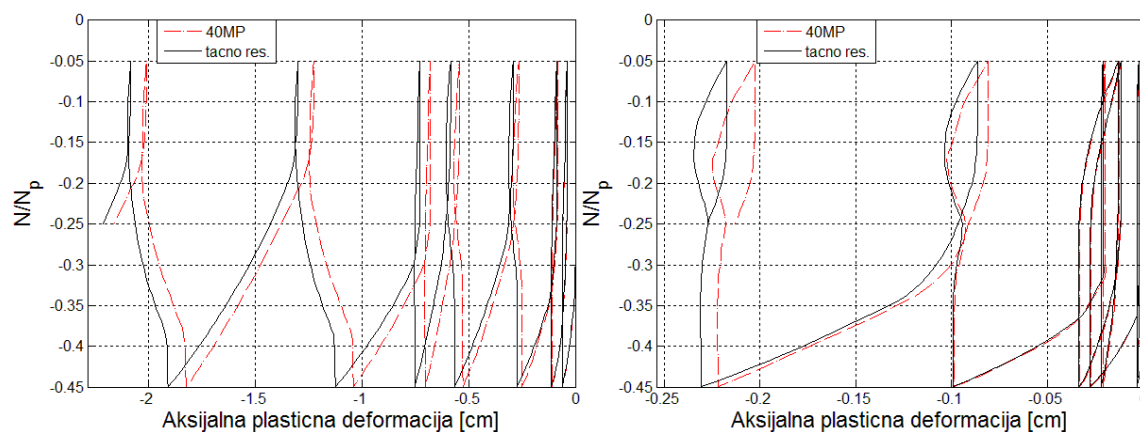
Slika B.235: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 12MP šemu



TEST A8_7

TEST B8_7

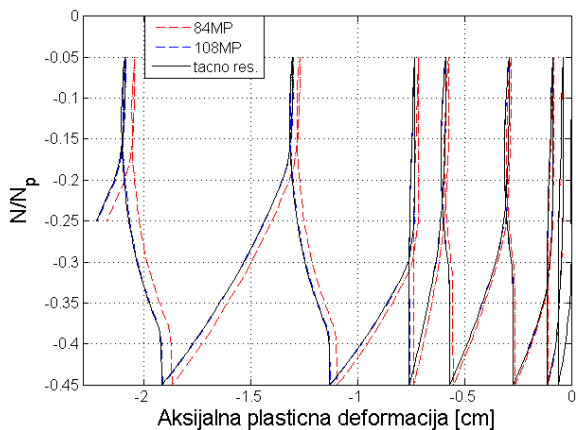
Slika B.236: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 24MP šemu



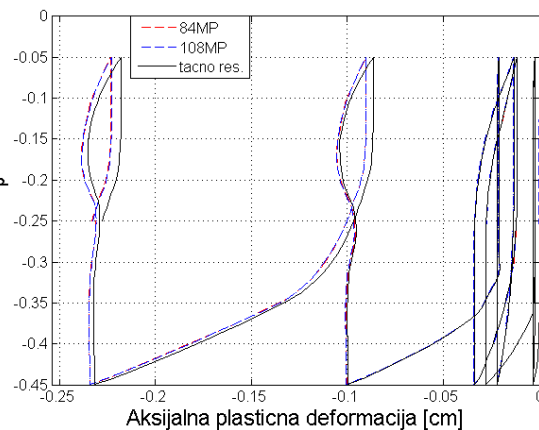
TEST A8_7

TEST B8_7

Slika B.237: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 40MP šemu

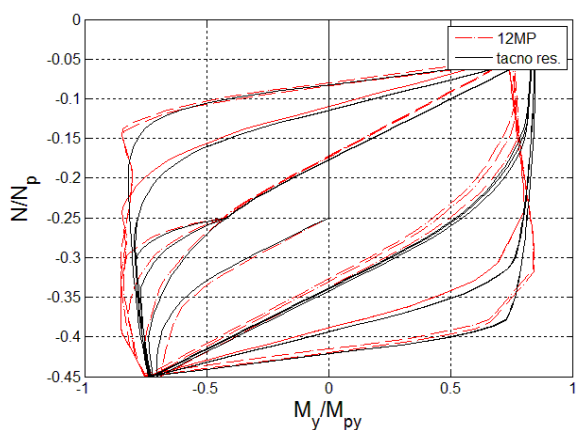


TEST A8_7

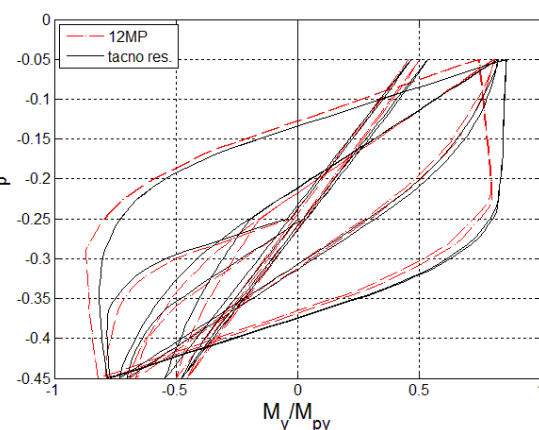


TEST B8_7

Slika B.238: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

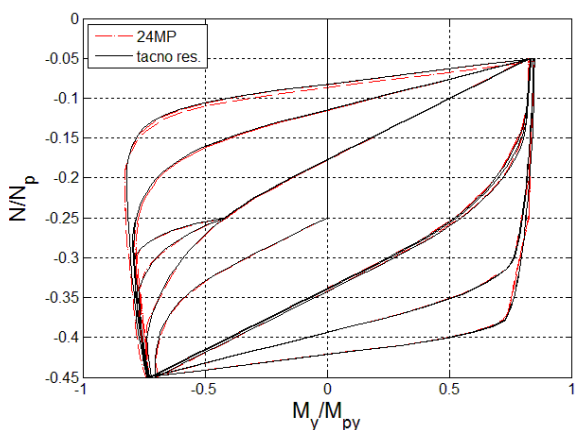


TEST A8_7

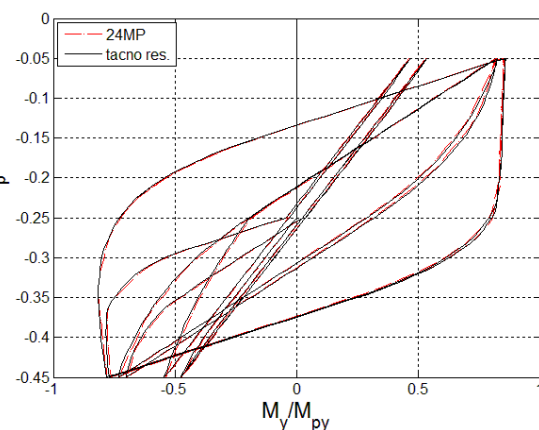


TEST B8_7

Slika B.239: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

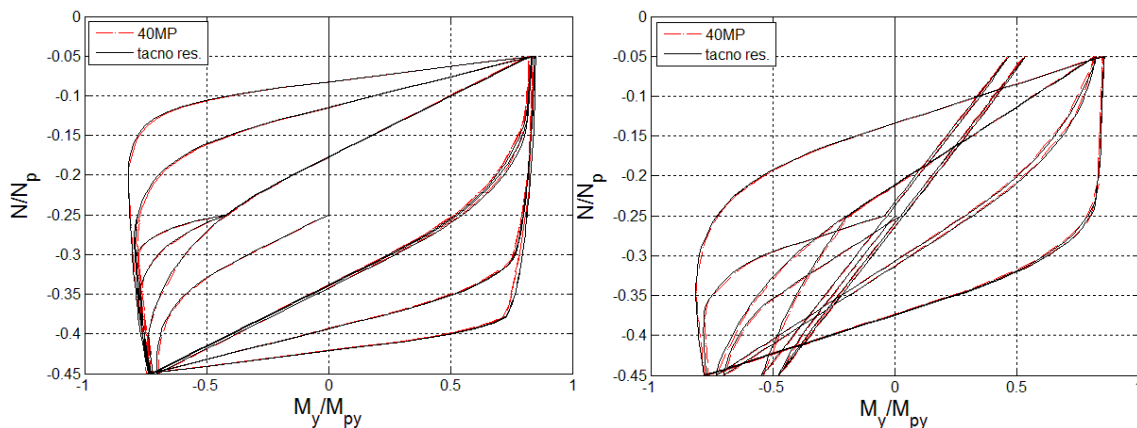


TEST A8_7



TEST B8_7

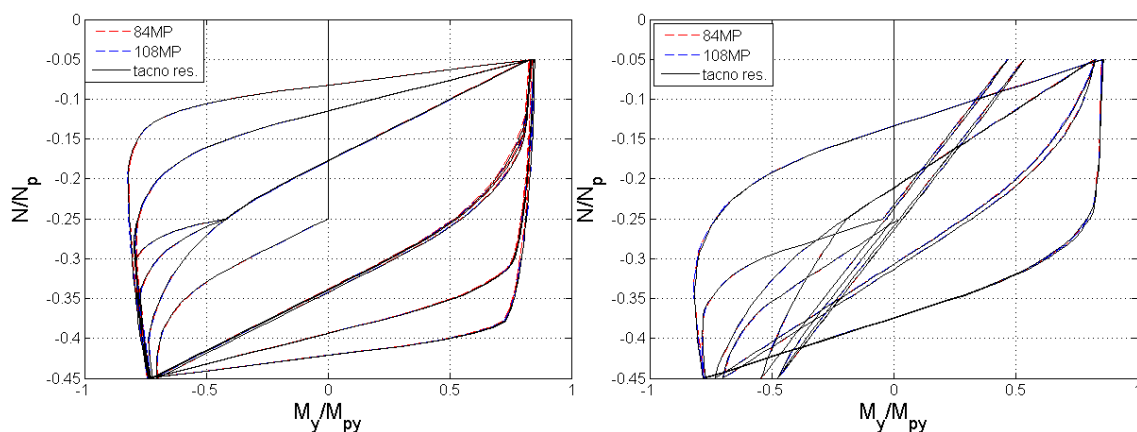
Slika B.240: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 24MP šemu



TEST A8_7

TEST B8_7

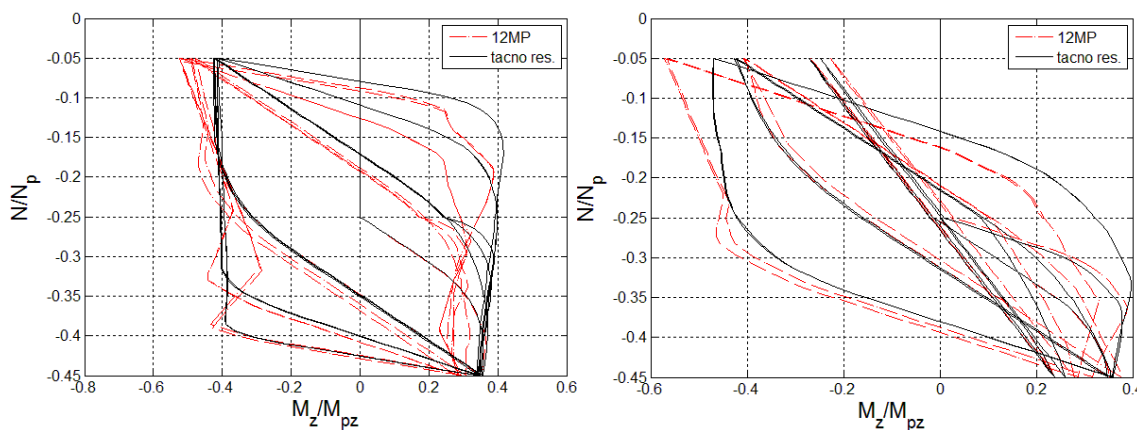
Slika B.241: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu



TEST A8_7

TEST B8_7

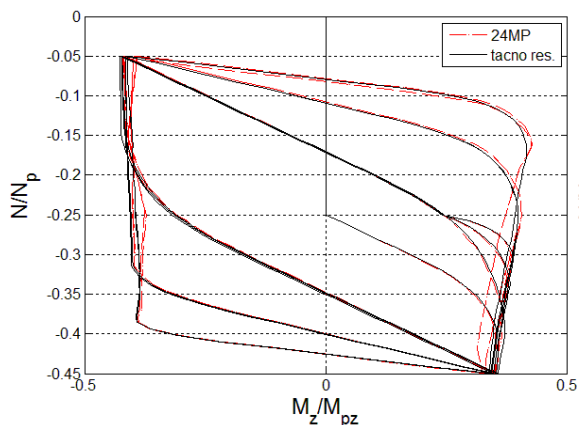
Slika B.242: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme



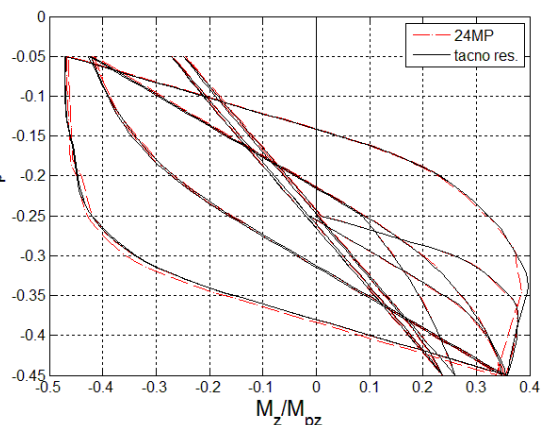
TEST A8_7

TEST B8_7

Slika B.243: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

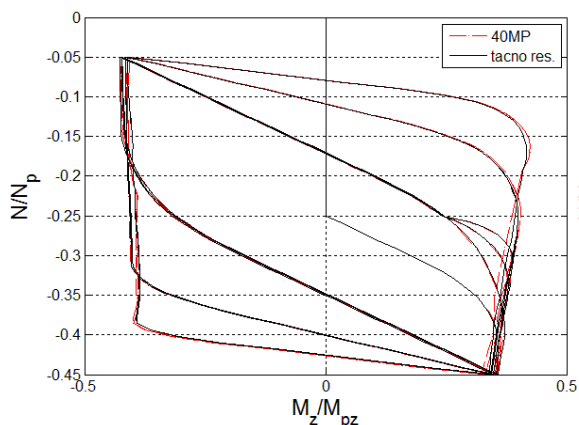


TEST A8_7

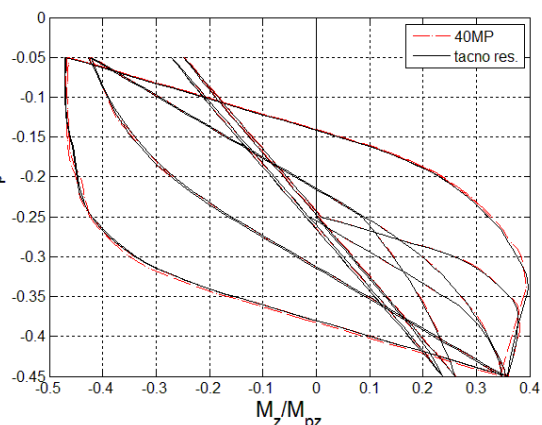


TEST B8_7

Slika B.244: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 24MP šemu

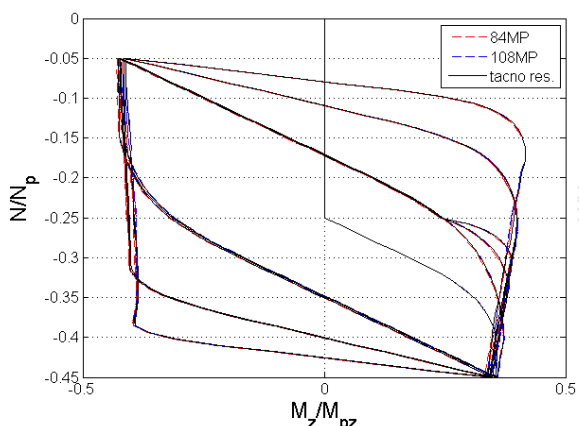


TEST A8_7

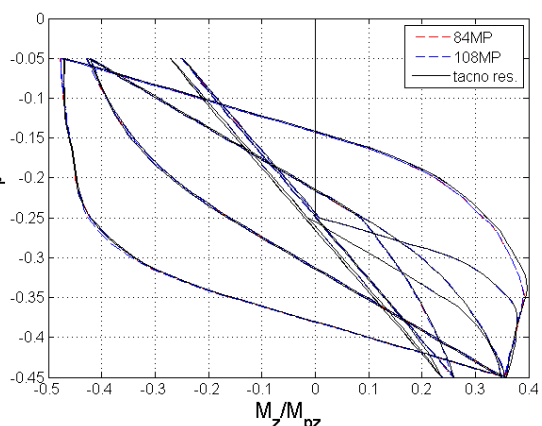


TEST B8_7

Slika B.245: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu

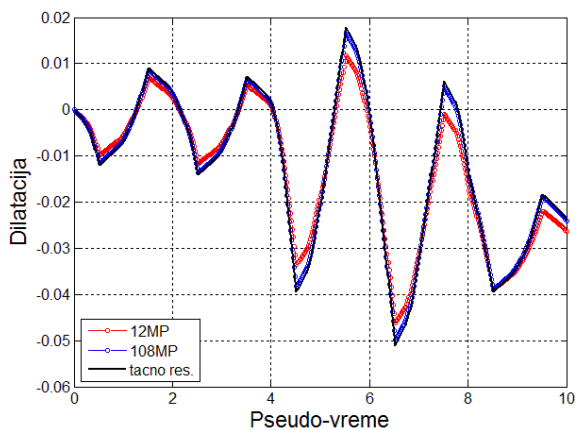


TEST A8_7

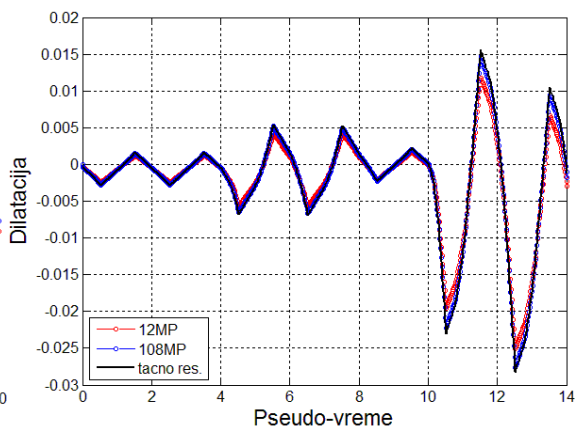


TEST B8_7

Slika B.246: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

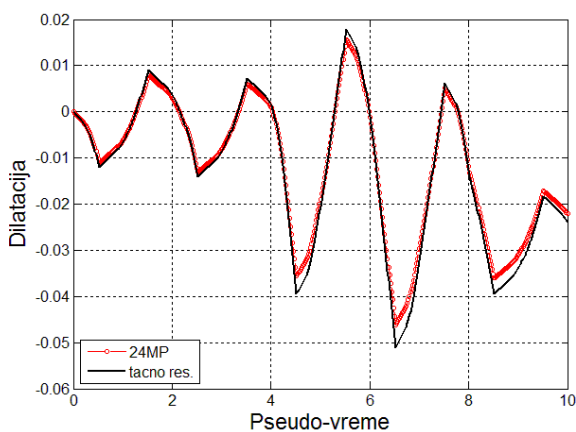


TEST A8_7

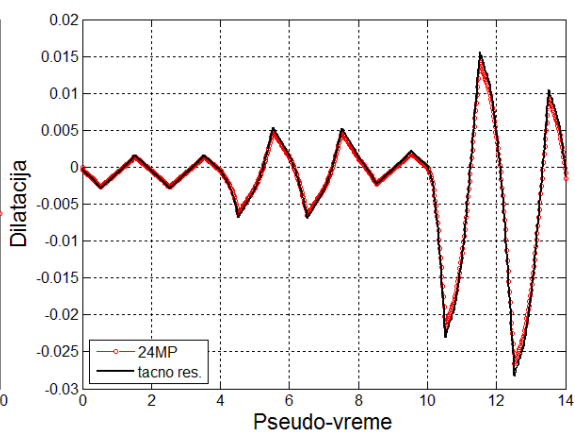


TEST B8_7

Slika B.247: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 12MP i 108MP šeme

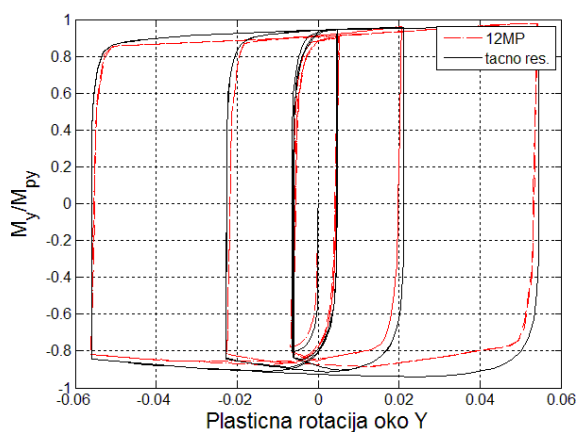


TEST A8_7

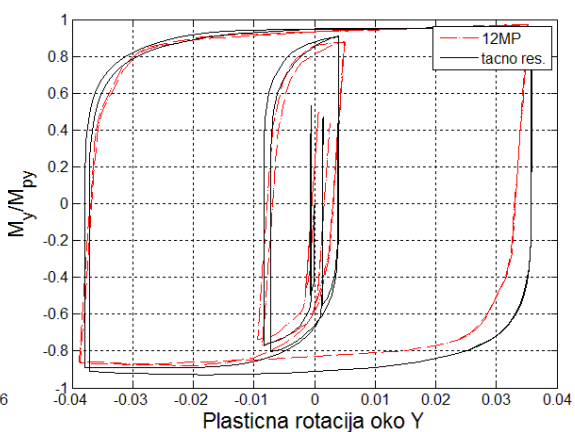


TEST B8_7

Slika B.248: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 24MP šemu

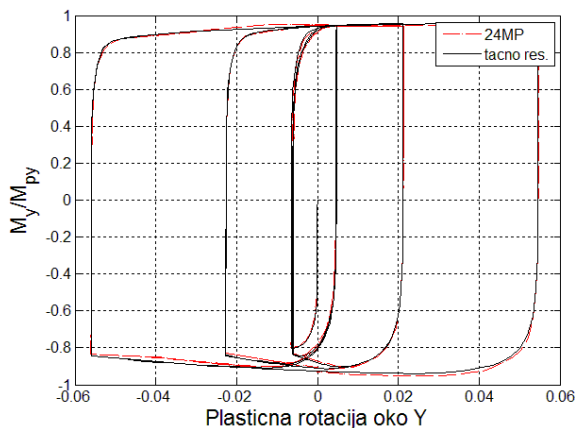


TEST A8_8

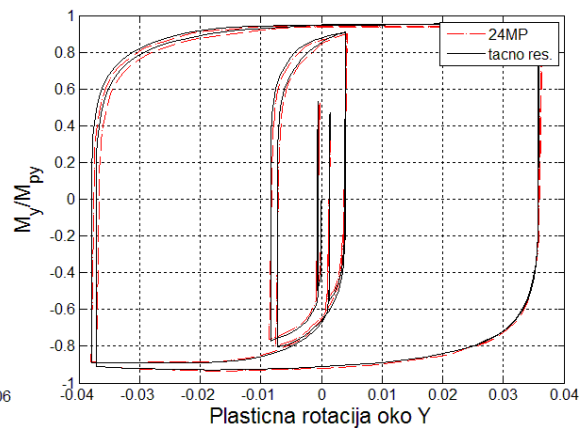


TEST B8_8

Slika B.249: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

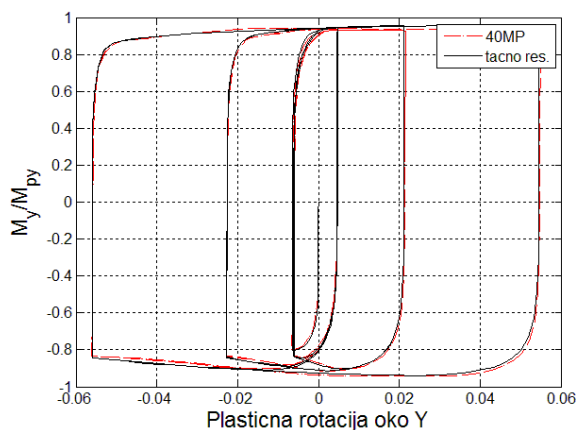


TEST A8_8

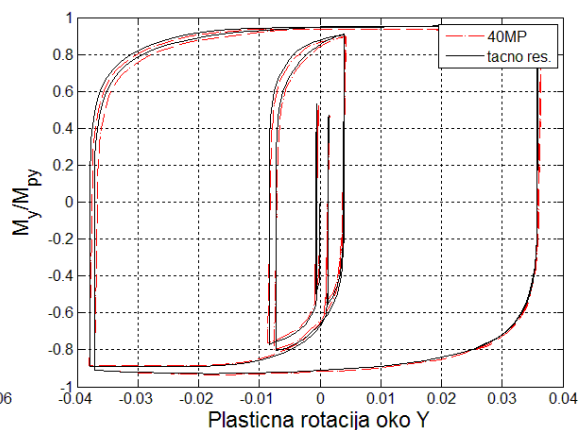


TEST B8_8

Slika B.250: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 24MP šemu

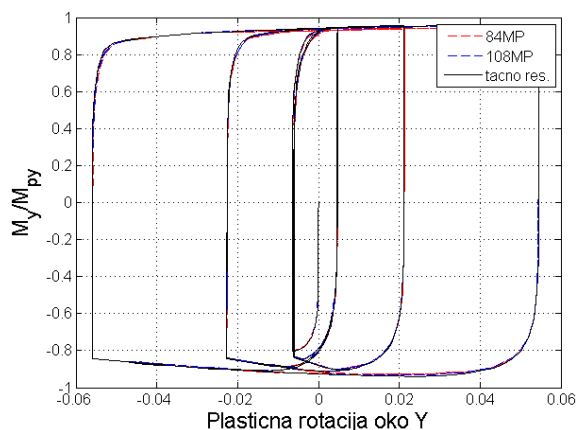


TEST A8_8

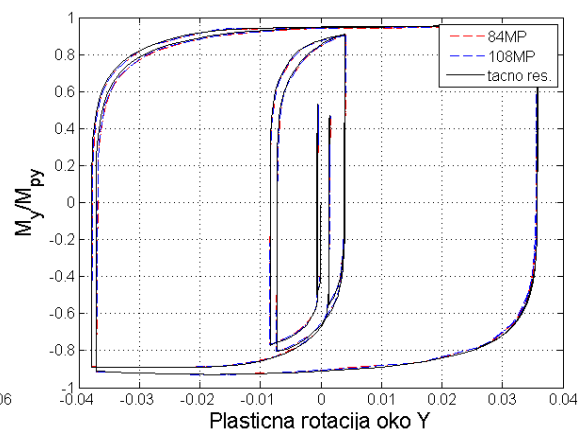


TEST B8_8

Slika B.251: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

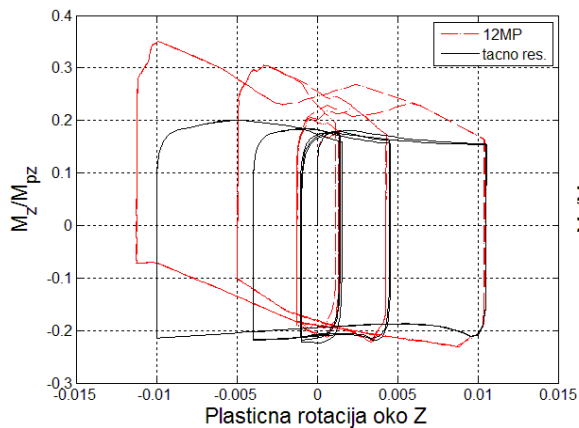


TEST A8_8

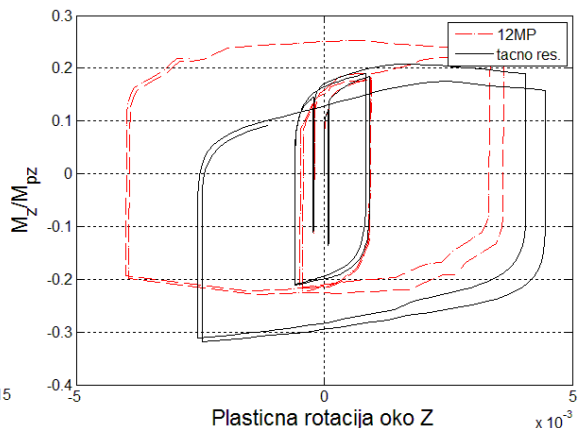


TEST B8_8

Slika B.252: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

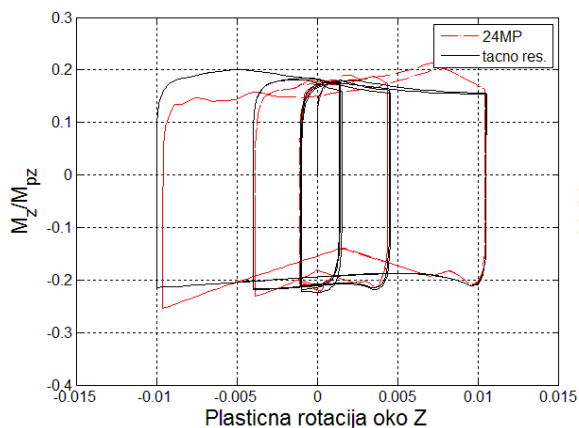


TEST A8_8

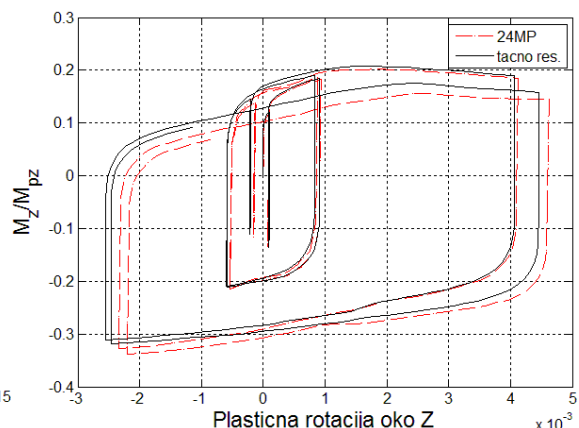


TEST B8_8

Slika B.253: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

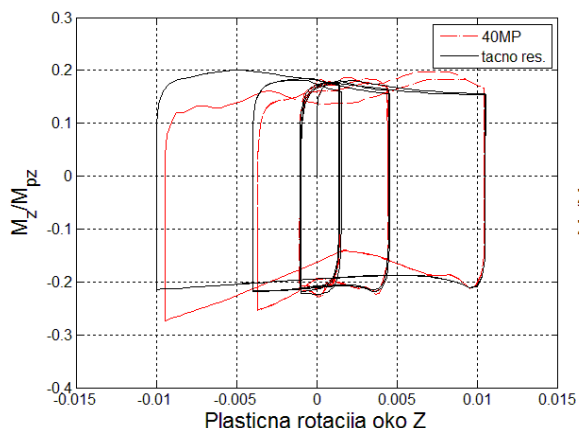


TEST A8_8

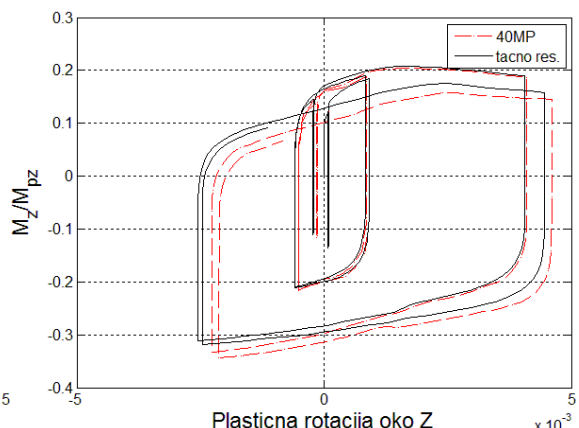


TEST B8_8

Slika B.254: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 24MP šemu

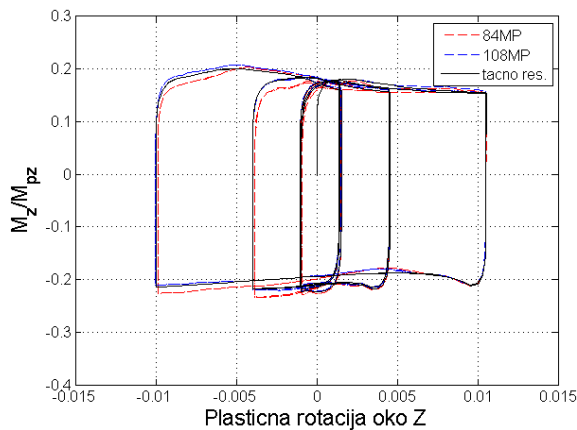


TEST A8_8

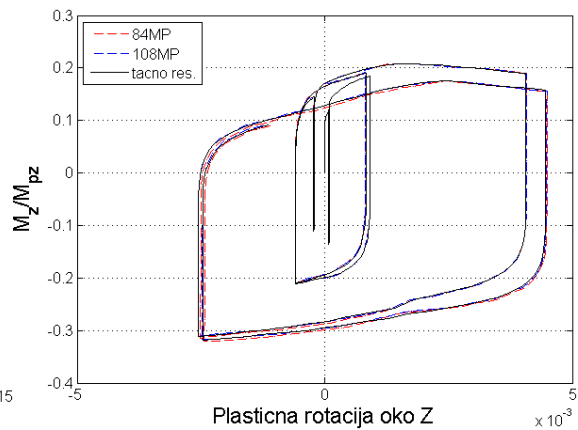


TEST B8_8

Slika B.255: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

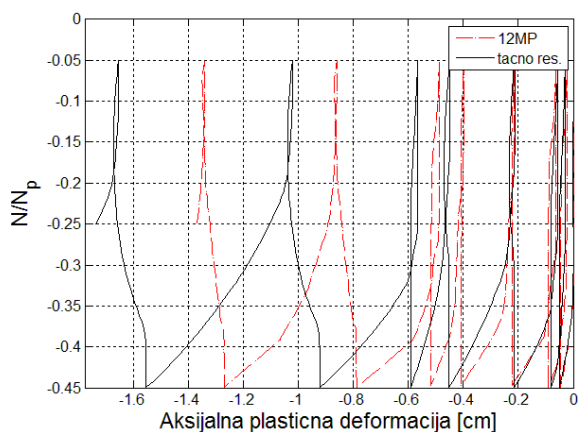


TEST A8_8

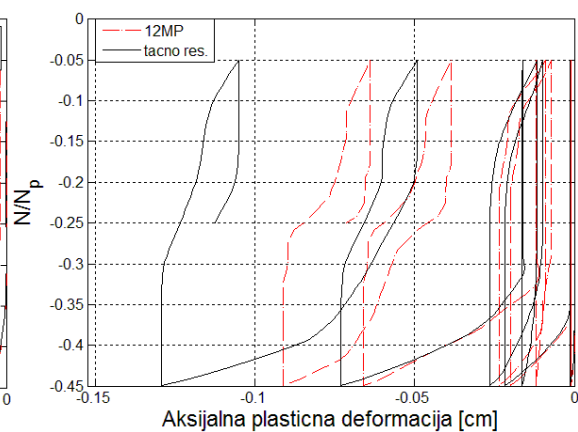


TEST B8_8

Slika B.256: Normirani moment – plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

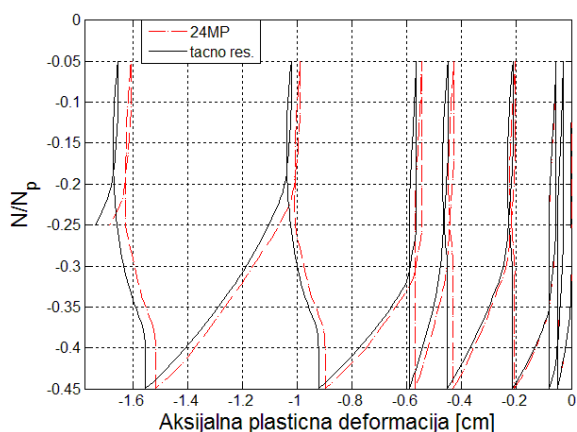


TEST A8_8

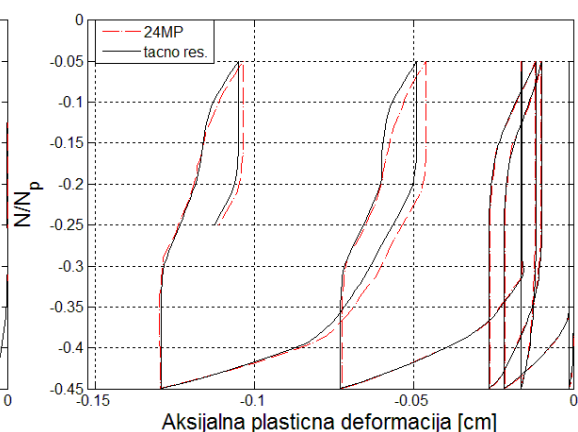


TEST B8_8

Slika B.257: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 12MP šemu

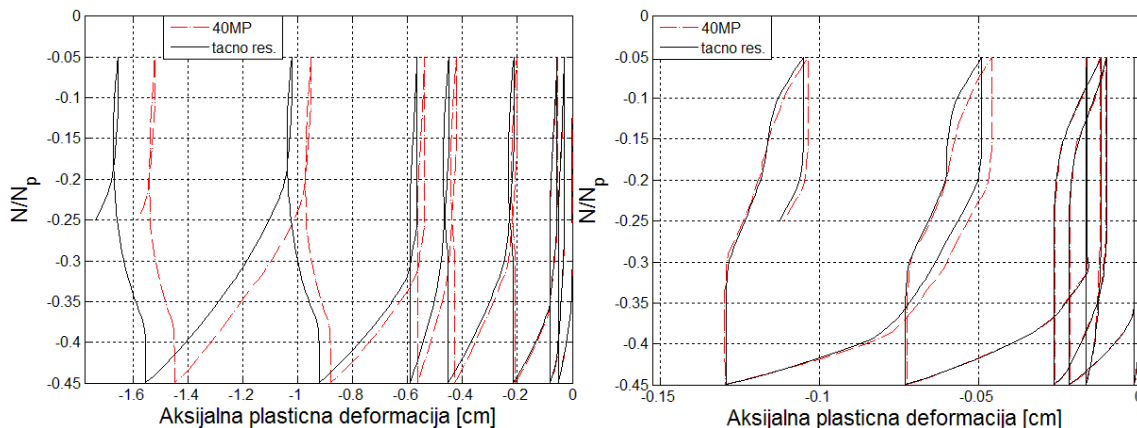


TEST A8_8



TEST B8_8

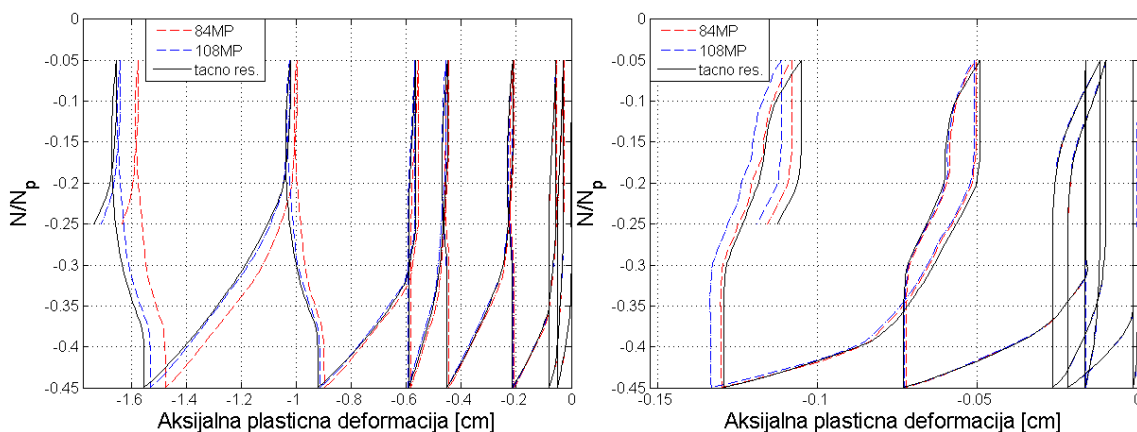
Slika B.258: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 24MP šemu



TEST A8_8

TEST B8_8

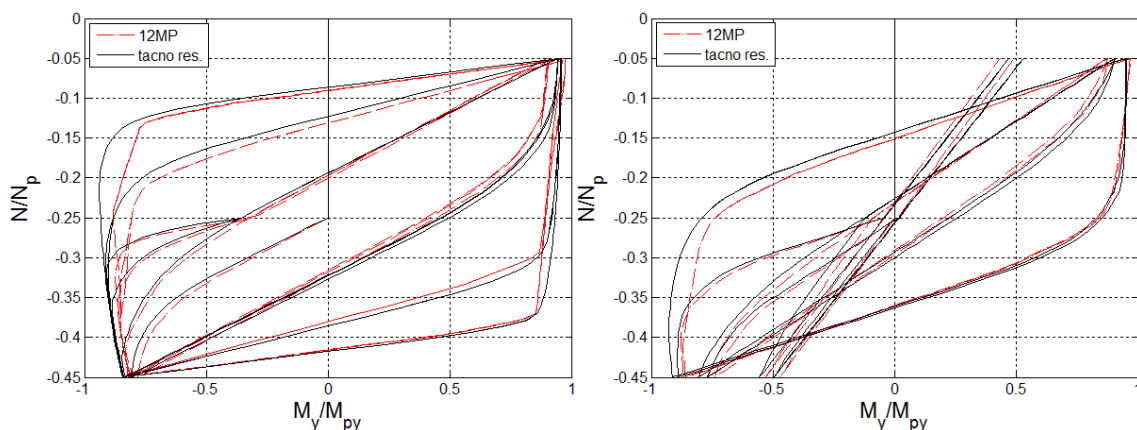
Slika B.259: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 40MP šemu



TEST A8_8

TEST B8_8

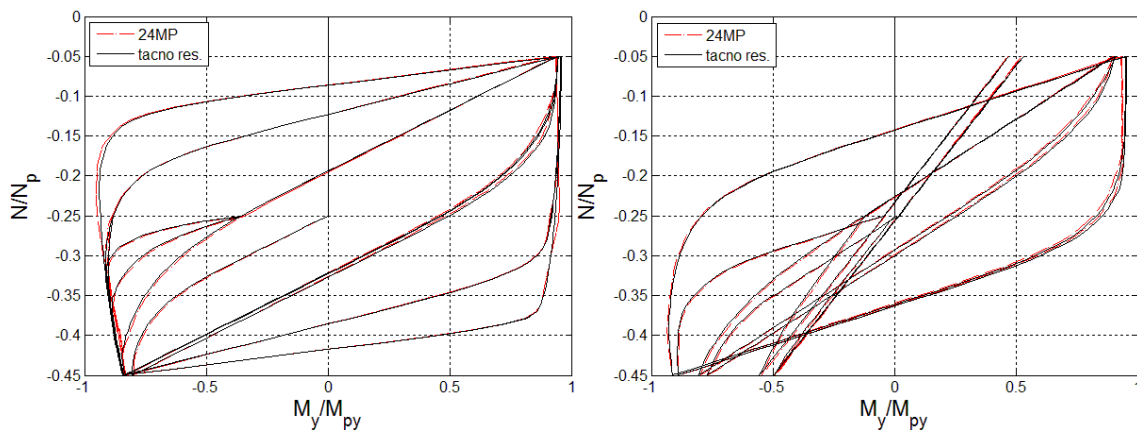
Slika B.260: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 84MP i 108MP šeme



TEST A8_8

TEST B8_8

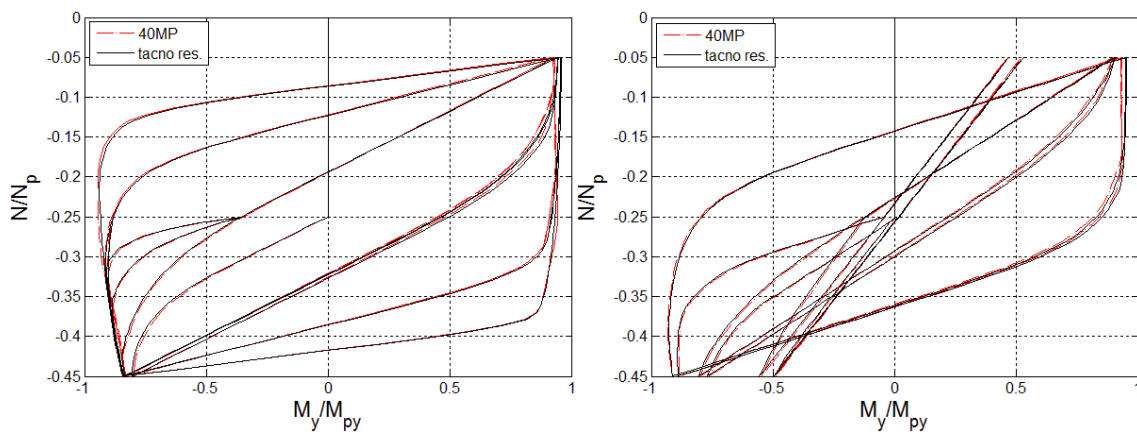
Slika B.261: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu



TEST A8_8

TEST B8_8

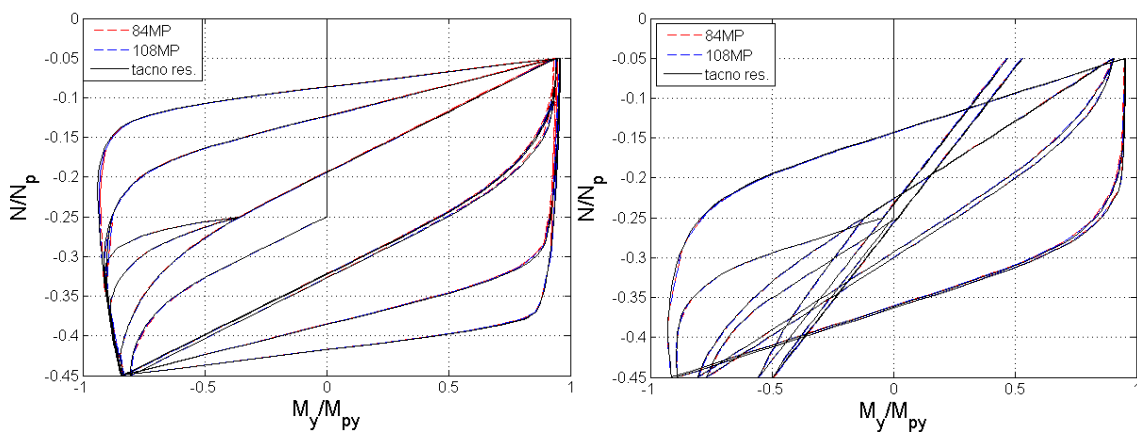
Slika B.262: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 24MP šemu



TEST A8_8

TEST B8_8

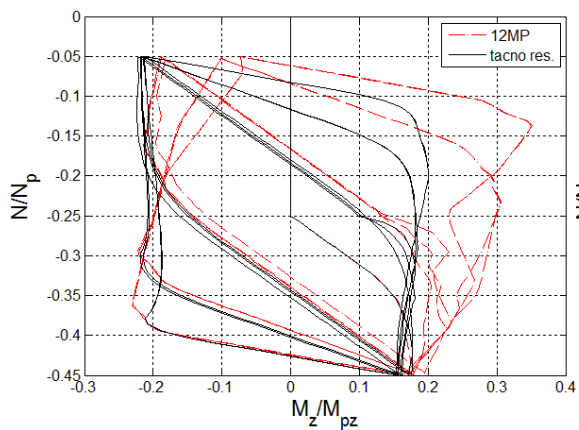
Slika B.263: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu



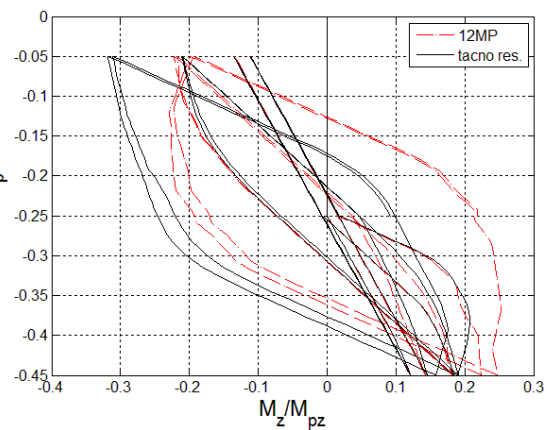
TEST A8_8

TEST B8_8

Slika B.264: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

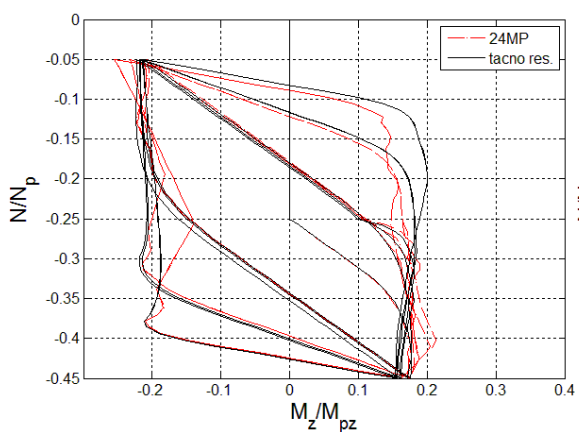


TEST A8_8

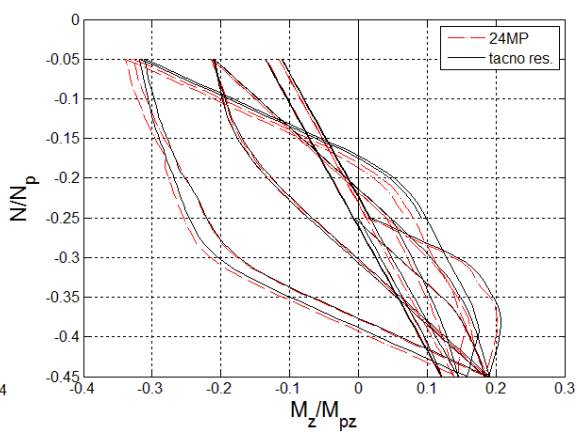


TEST B8_8

Slika B.265: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

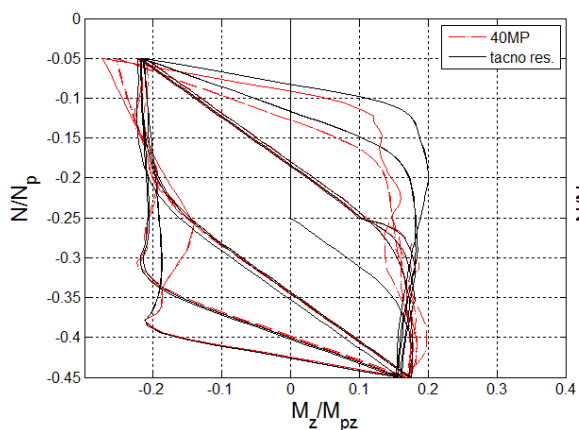


TEST A8_8

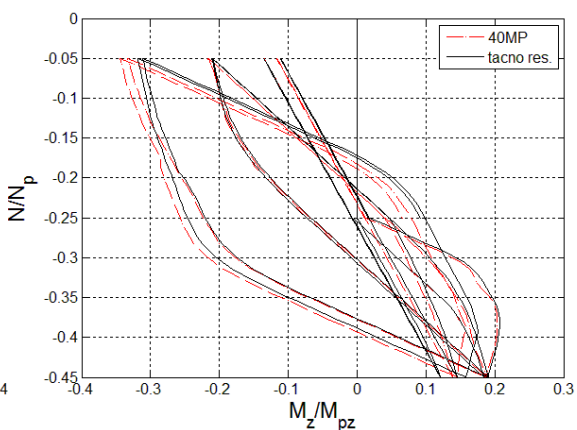


TEST B8_8

Slika B.266: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 24MP šemu

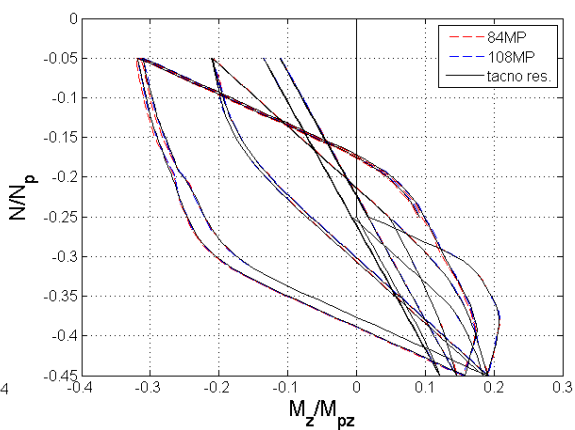
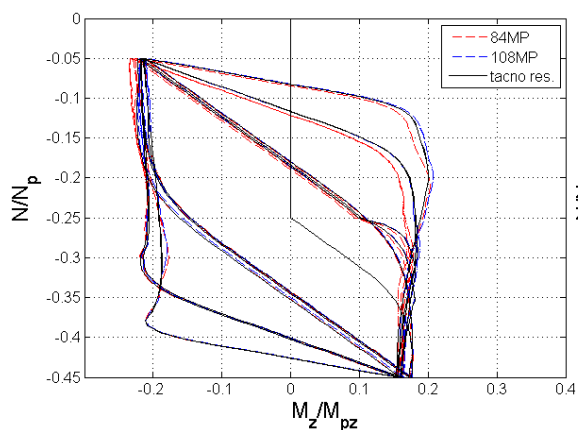


TEST A8_8

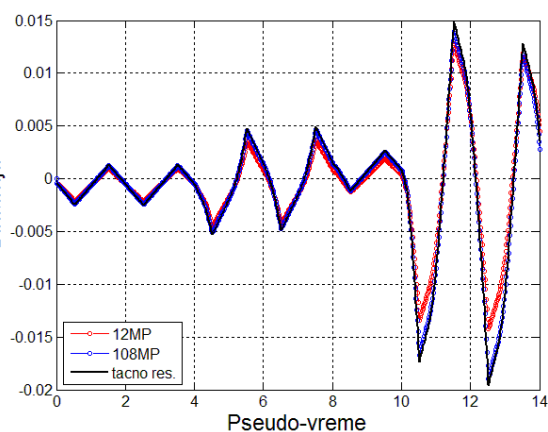
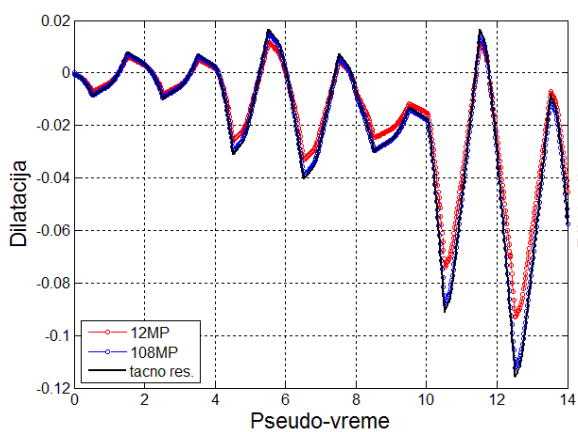


TEST B8_8

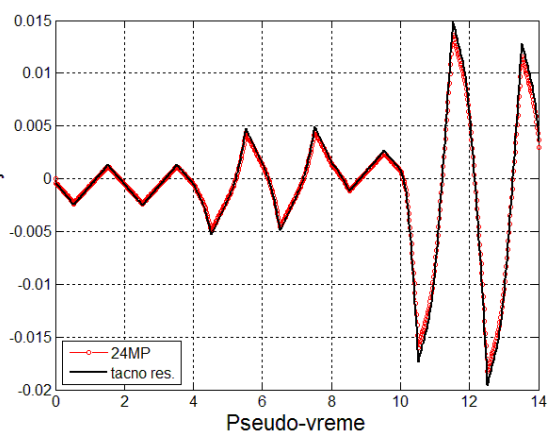
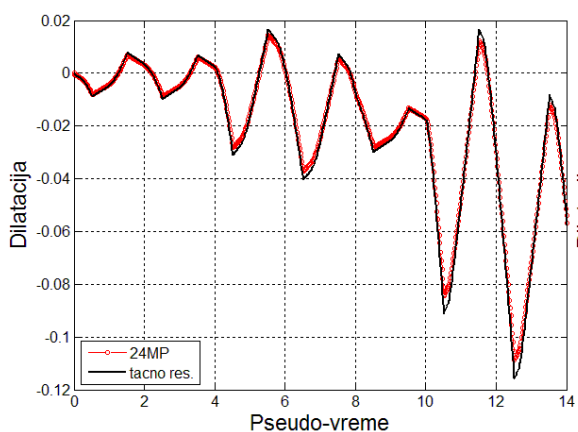
Slika B.267: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu



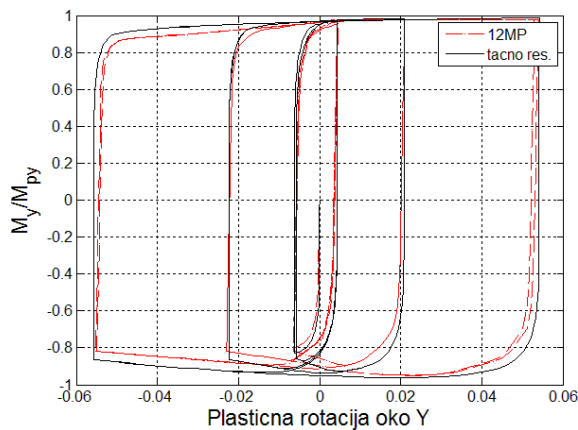
Slika B.268: Normirani moment – normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme



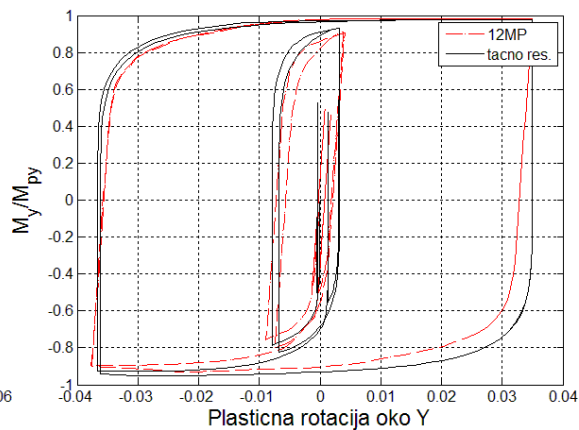
Slika B.269: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 12MP i 108MP šeme



Slika B.270: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 24MP šemu

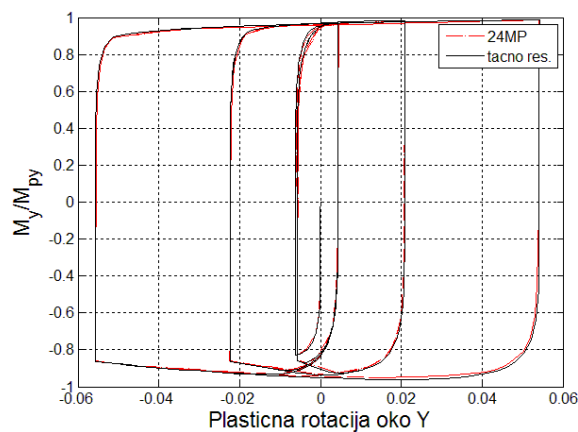


TEST A8_9

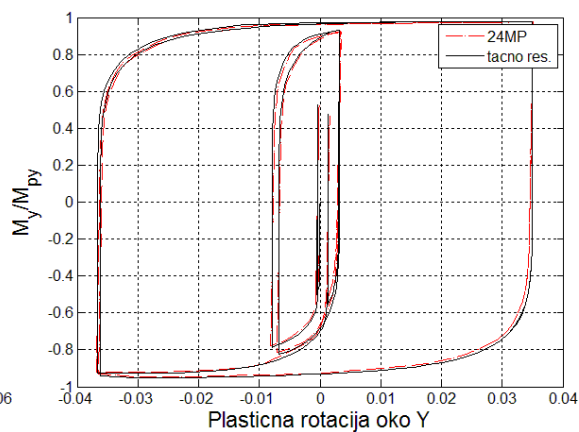


TEST B8_9

Slika B.271: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

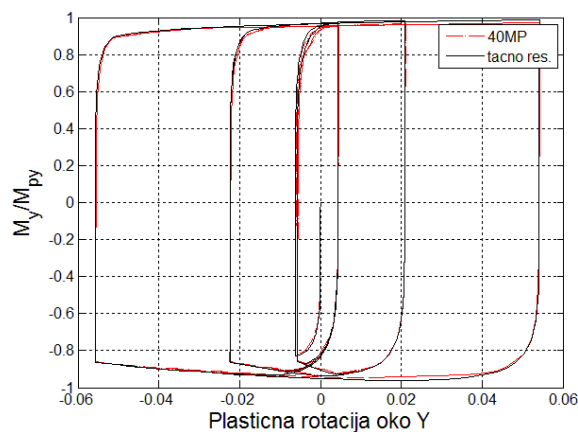


TEST A8_9

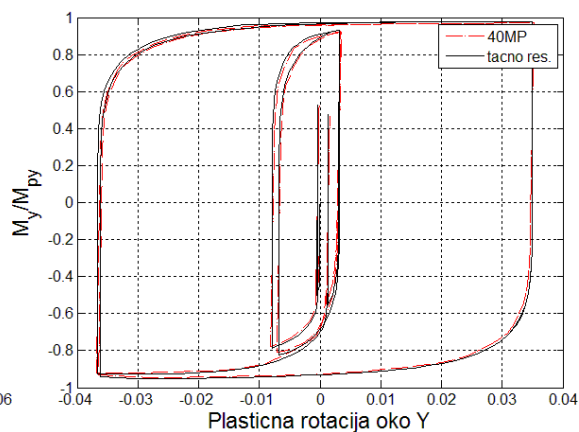


TEST B8_9

Slika B.272: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 24MP šemu

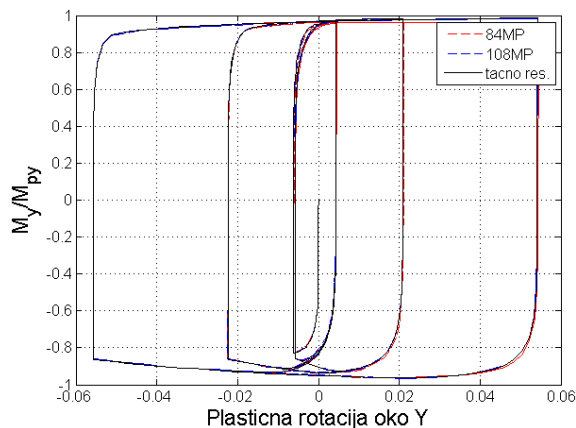


TEST A8_9

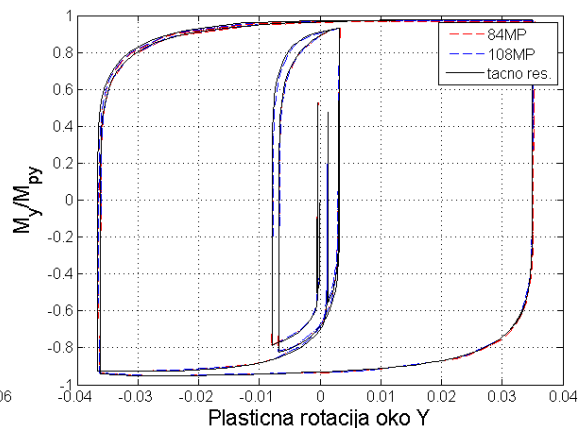


TEST B8_9

Slika B.273: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

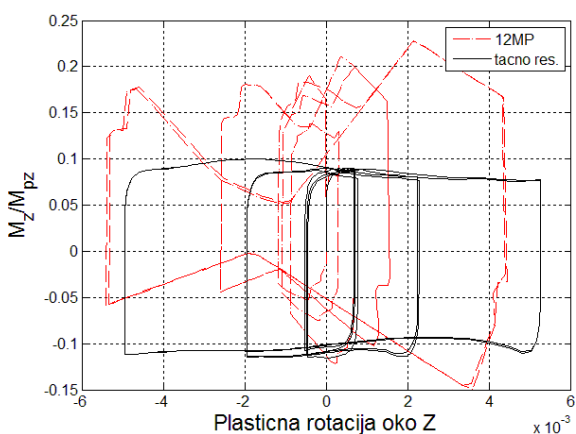


TEST A8_9

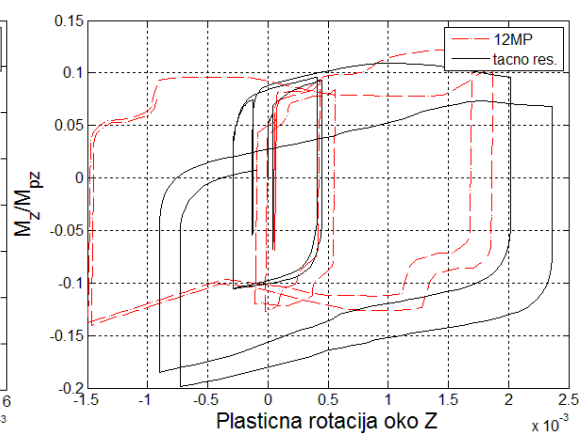


TEST B8_9

Slika B.274: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

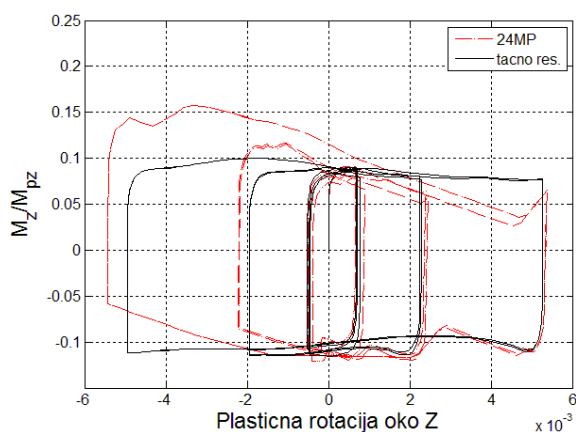


TEST A8_9

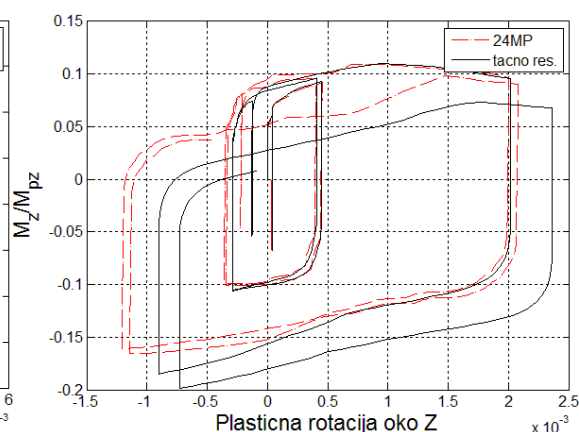


TEST B8_9

Slika B.275: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 12MP šemu

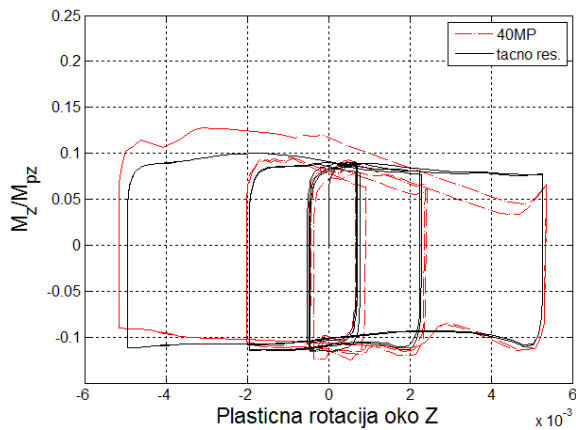


TEST A8_9

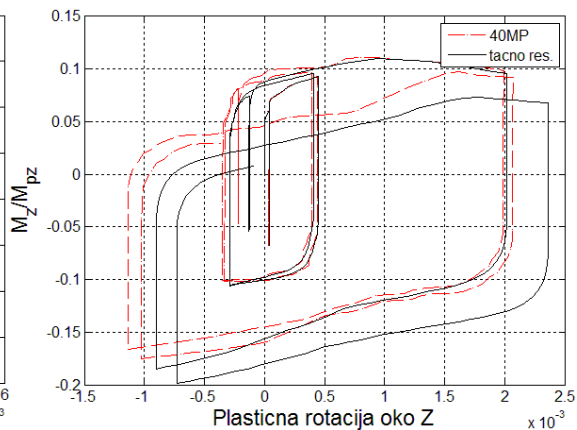


TEST B8_9

Slika B.276: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 24MP šemu

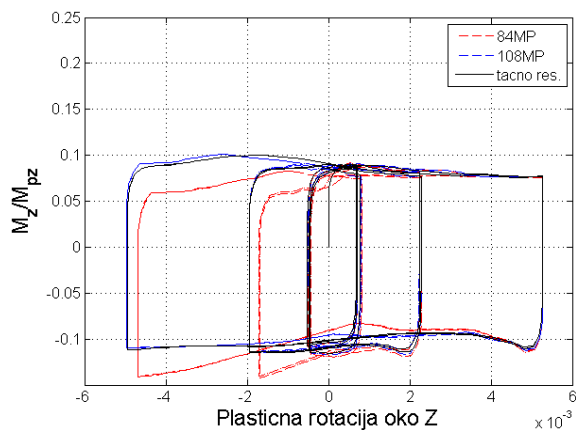


TEST A8_9

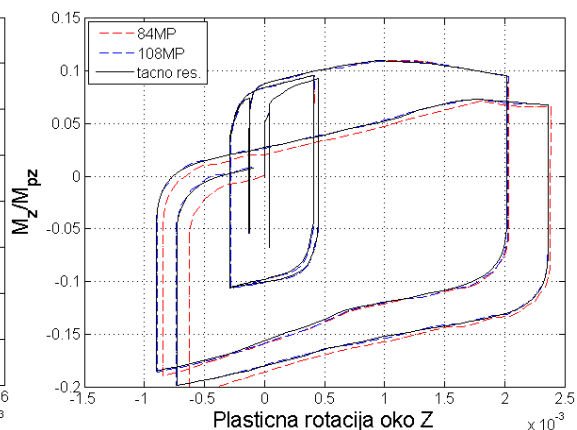


TEST B8_9

Slika B.277: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 40MP šemu

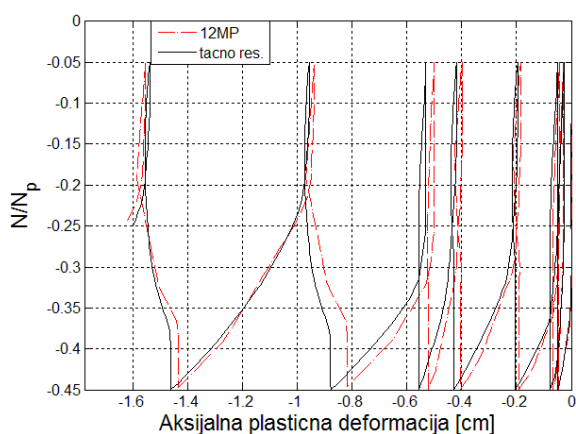


TEST A8_9

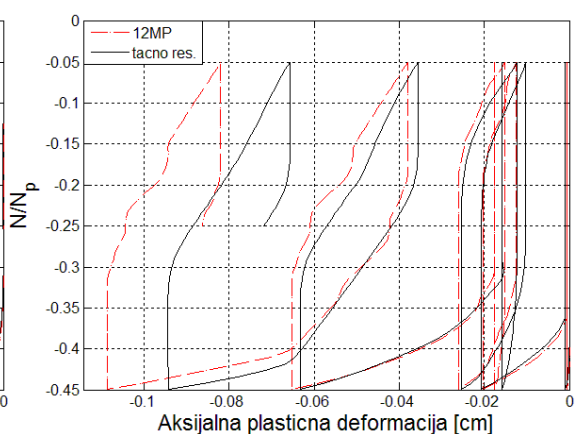


TEST B8_9

Slika B.278: Normirani moment - plastična rotacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

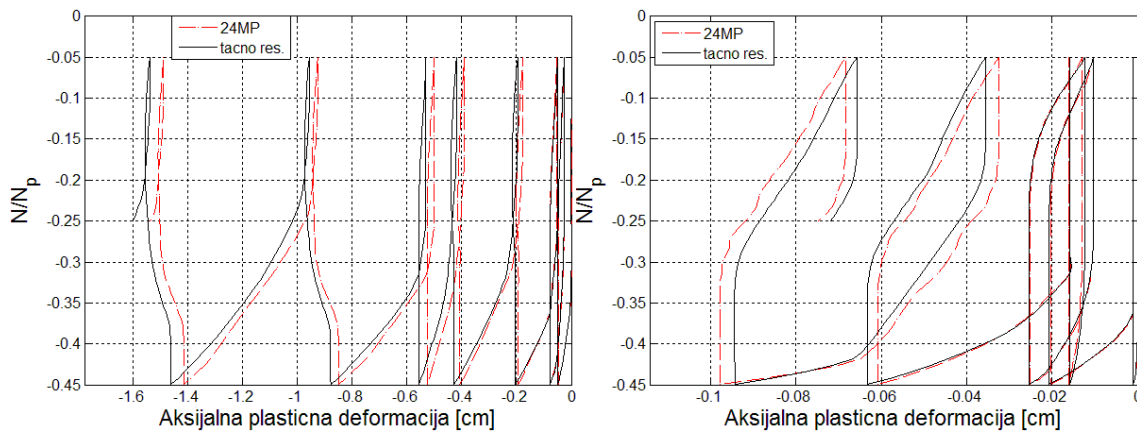


TEST A8_9



TEST B8_9

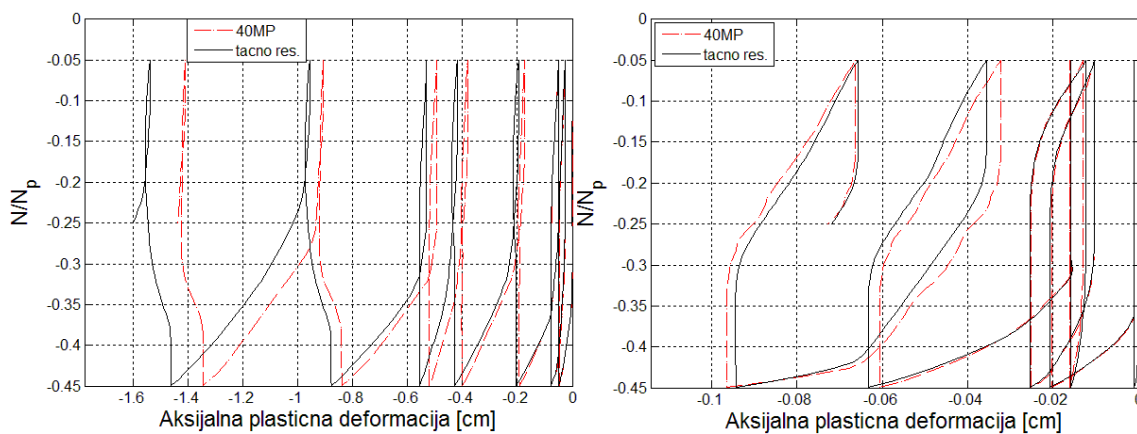
Slika B.279: Normirana aksijalna sila - aksijalna plastična deformacija dijagram za 12MP šemu



TEST A8_9

TEST B8_9

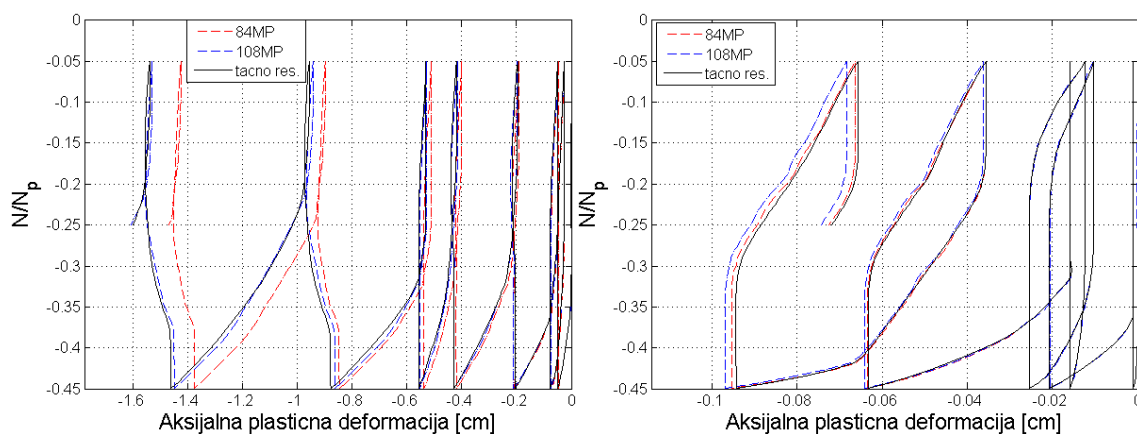
Slika B.280: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 24MP šemu



TEST A8_9

TEST B8_9

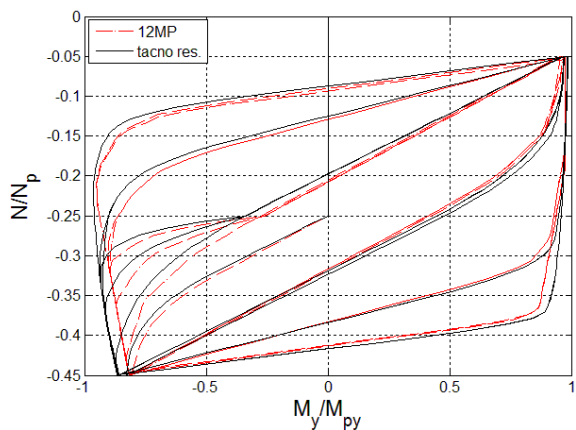
Slika B.281: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 40MP šemu



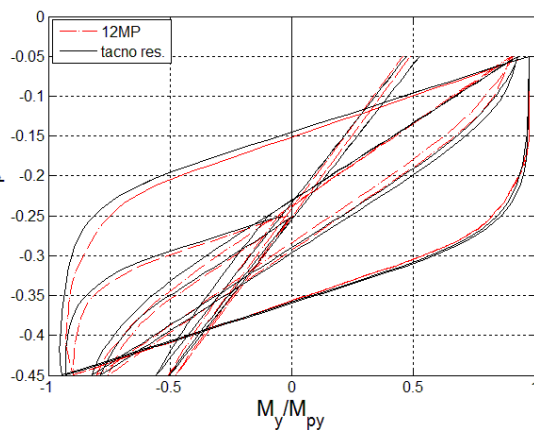
TEST A8_9

TEST B8_9

Slika B.282: Normirana aksijalna sila – aksijalna plastična deformacija dijagram za 84MP i 108MP šeme

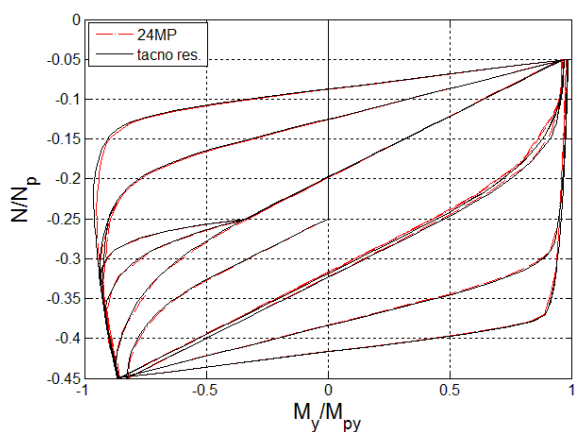


TEST A8_9

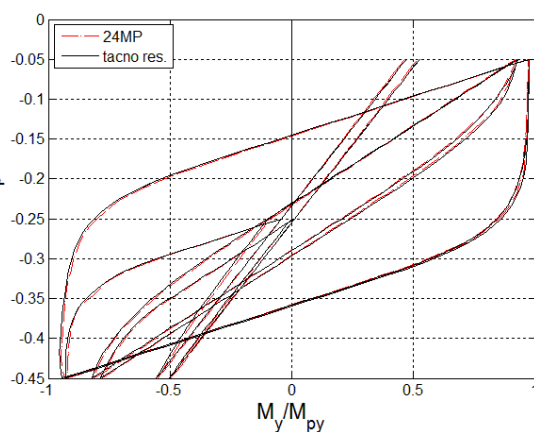


TEST B8_9

Slika B.283: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

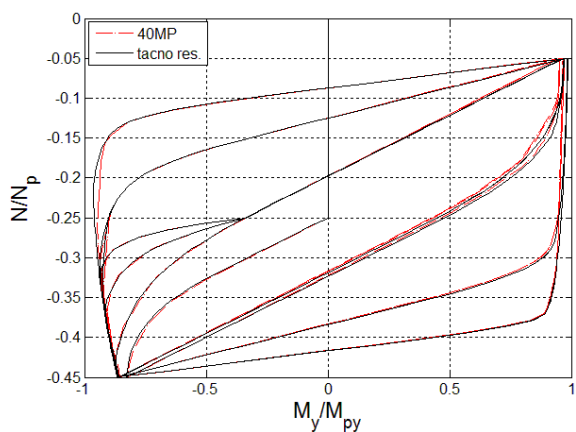


TEST A8_9

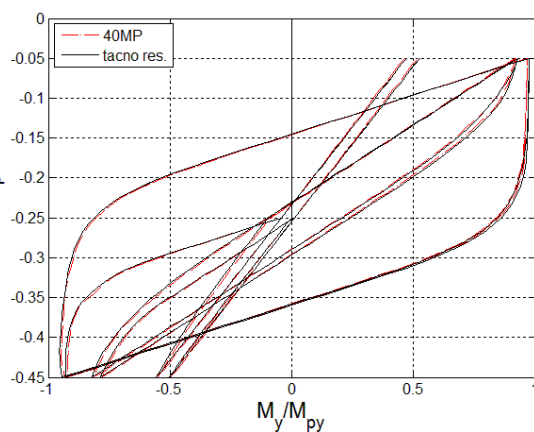


TEST B8_9

Slika B.284: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 24MP šemu

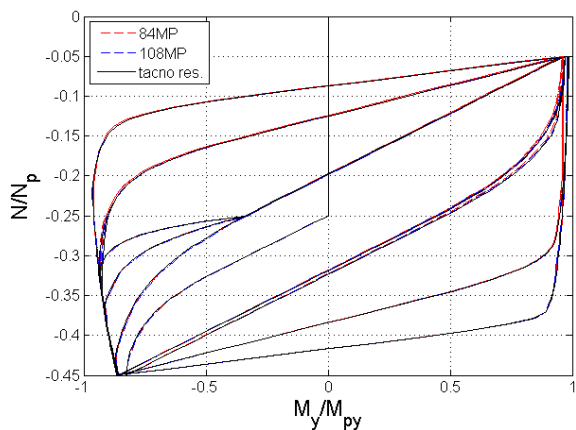


TEST A8_9

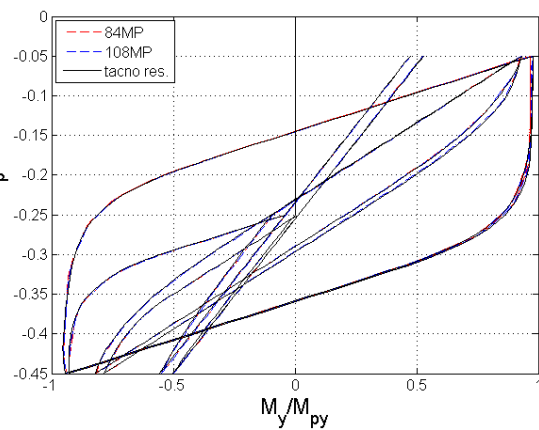


TEST B8_9

Slika B.285: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu

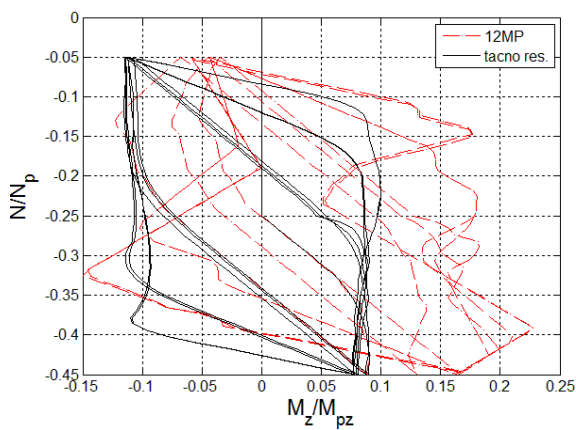


TEST A8_9

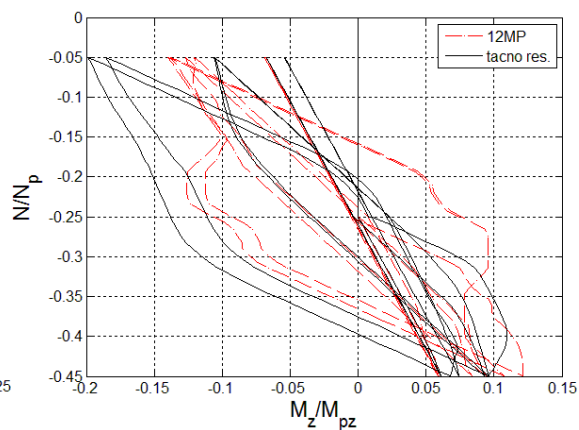


TEST B8_9

Slika B.286: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

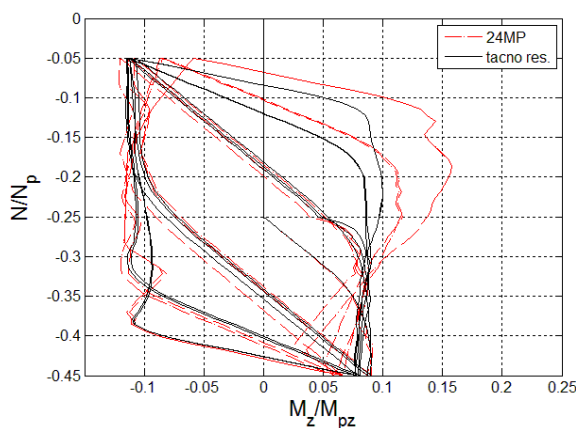


TEST A8_9

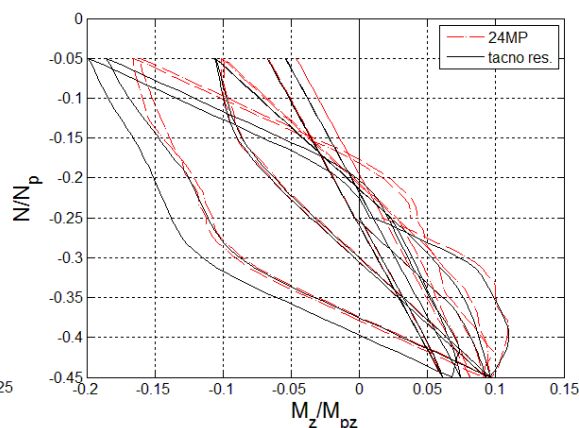


TEST B8_9

Slika B.287: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 12MP šemu

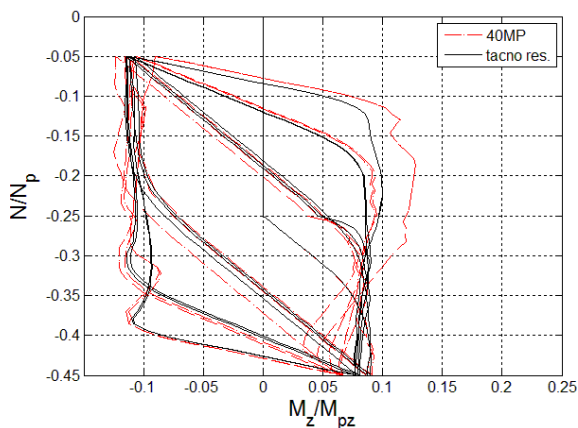


TEST A8_9

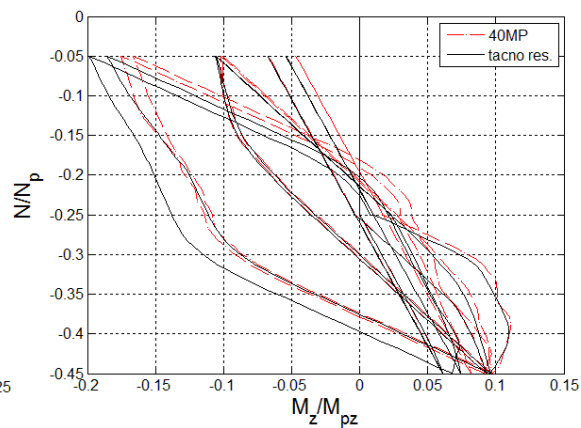


TEST B8_9

Slika B.288: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 24MP šemu

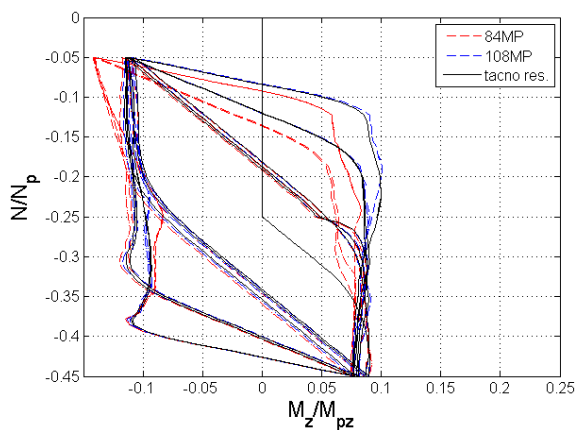


TEST A8_9

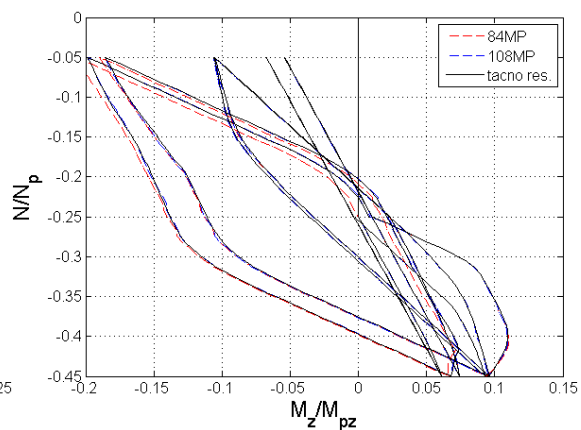


TEST B8_9

Slika B.289: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 40MP šemu

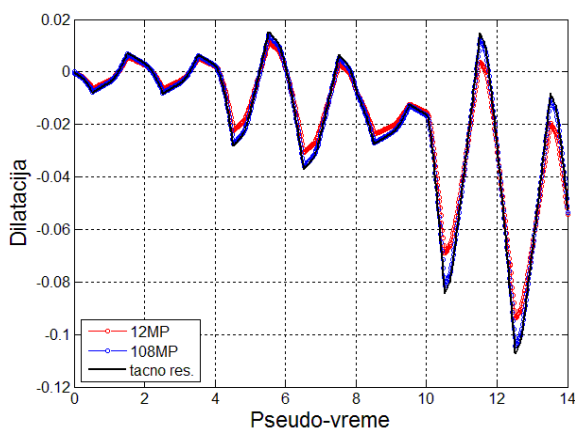


TEST A8_9

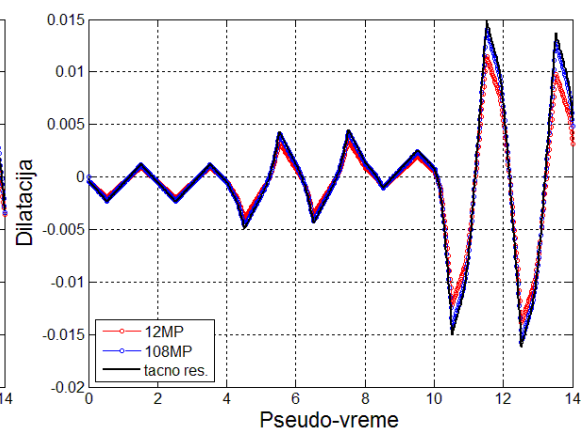


TEST B8_9

Slika B.290: Normirani moment - normirana aksijalna sila dijagram za 84MP i 108MP šeme

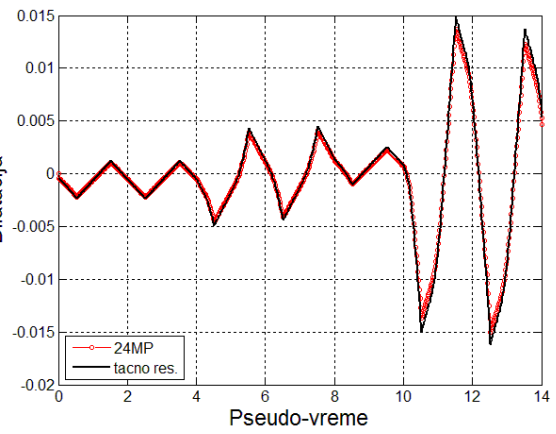
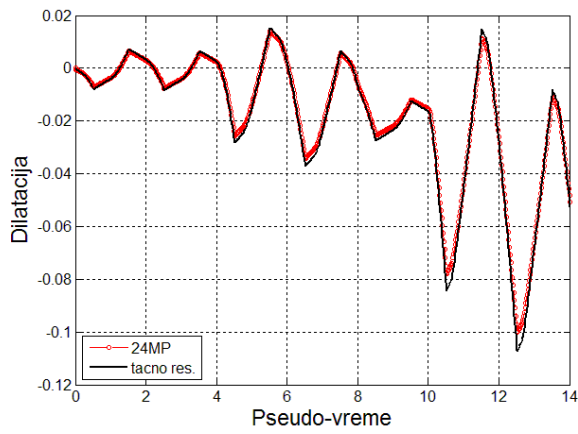


TEST A8_9



TEST B8_9

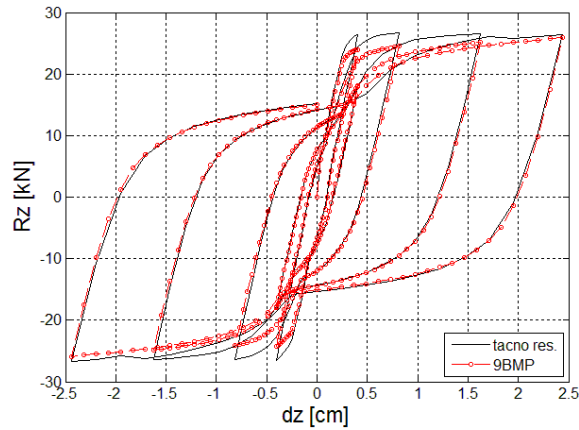
Slika B.291: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 12MP i 108MP šeme



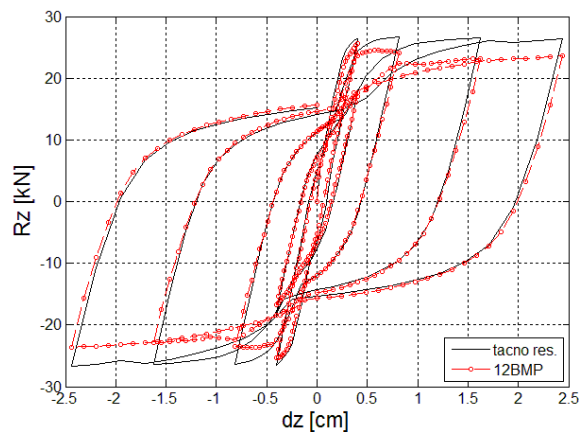
Slika B.292: Dilatacija najudaljenijeg čeličnog vlakna za 24MP šemu

C. PRILOG

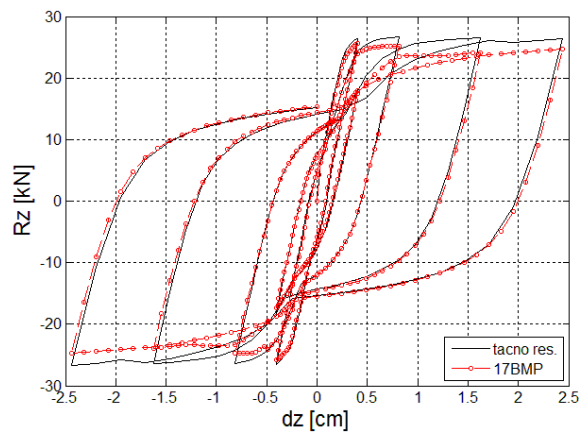
REZULTATI TESTOVA KONZOLNOG STUBA PRAVOUGAONOG BETONSKOG PRESEKA



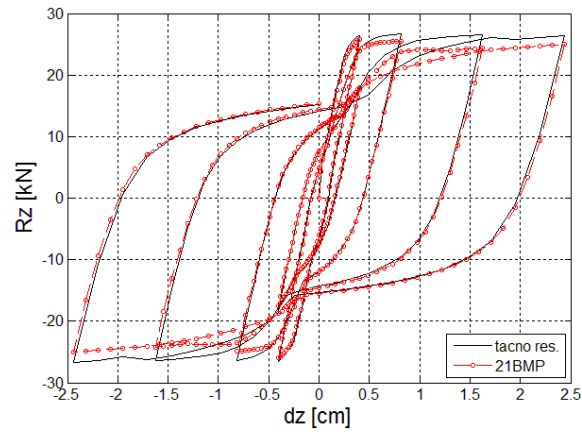
Slika C.1: Test LM1: Poprečna sila – pomjeranje vrha konzole u z pravcu
dijagram za šemu 9BMP



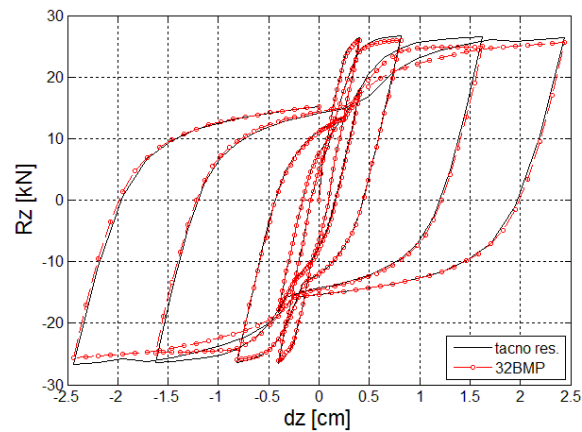
Slika C.2: Test LM1: Poprečna sila – pomjeranje vrha konzole u z pravcu
dijagram za šemu 12BMP



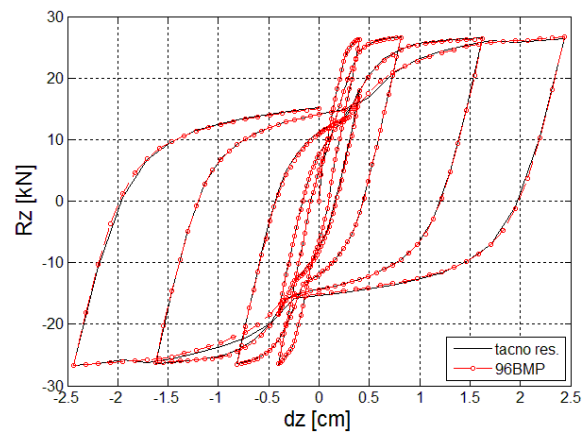
Slika C.3: Test LM1: Poprečna sila – pomjeranje vrha konzole u z pravcu
dijagram za šemu 17BMP



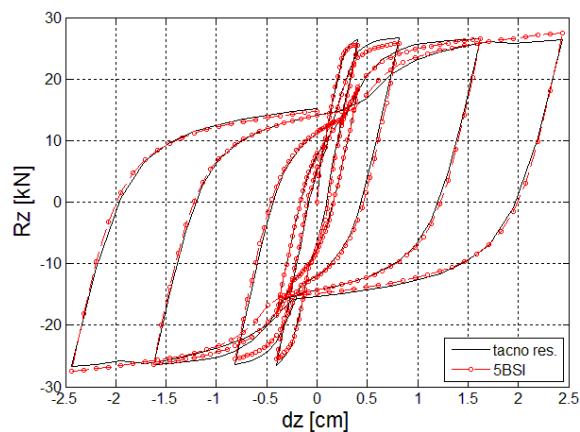
Slika C.4: Test LM1: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u z pravcu dijagram za šemu 21BMP



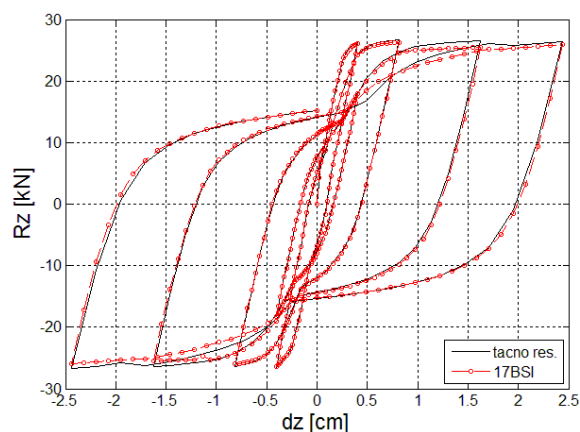
Slika C.5: Test LM1: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u z pravcu dijagram za šemu 32BMP



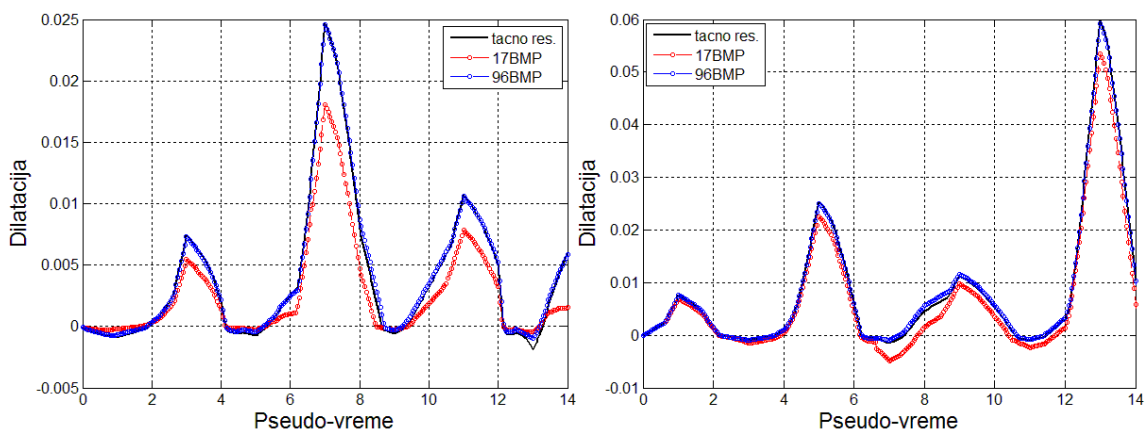
Slika C.6: Test LM1: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u z pravcu dijagram za šemu 96BMP



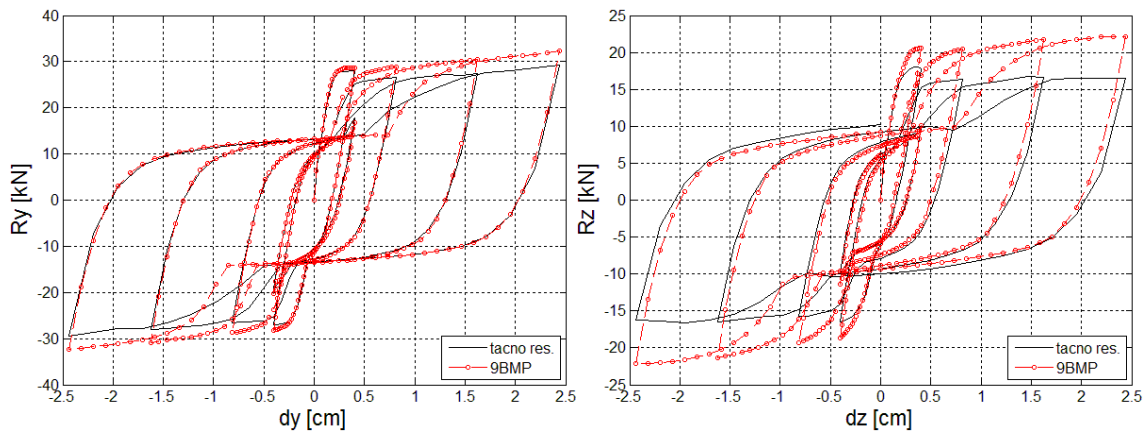
Slika C.7: Test LM1: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u z pravcu dijagram za šemu 5BSI



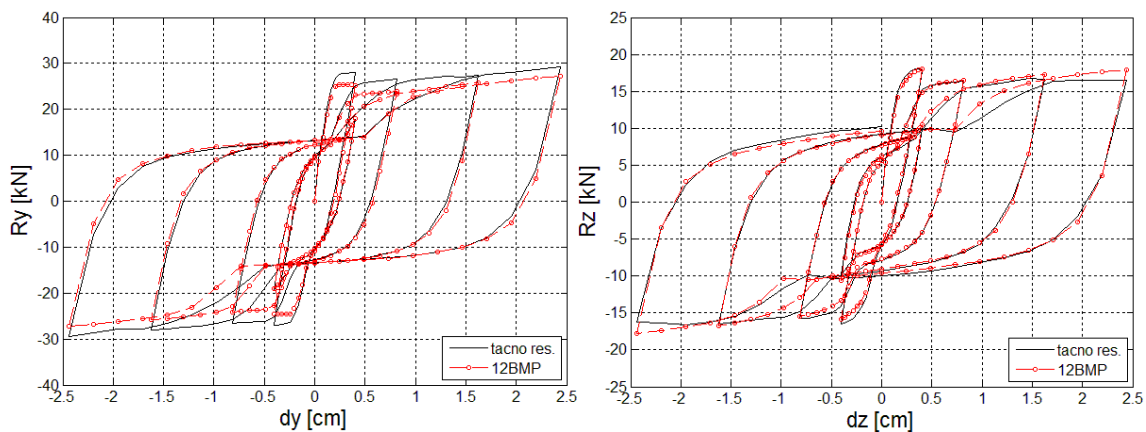
Slika C.8: Test LM1: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u z pravcu dijagram za šemu 17BSI



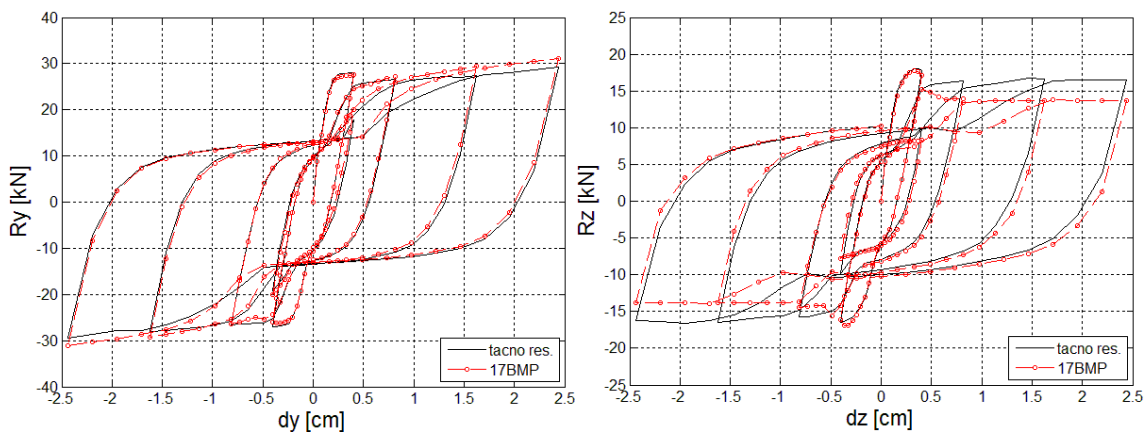
Slika C.9: Test LM1: Promena dilatacije najudaljenijeg vlakna: (a) jezgra betona i (b) armature za šeme 17BMP i 96BMP



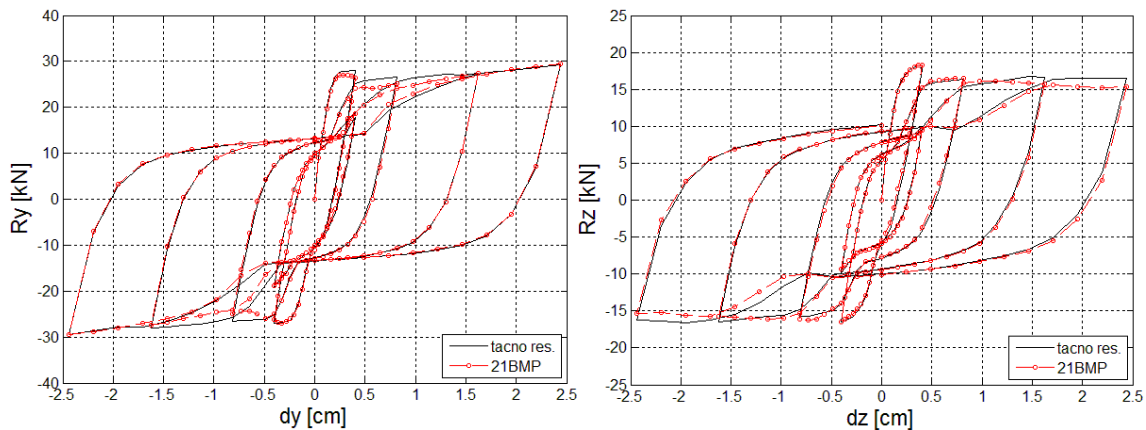
Slika C.10: Test LM2: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 9BMP



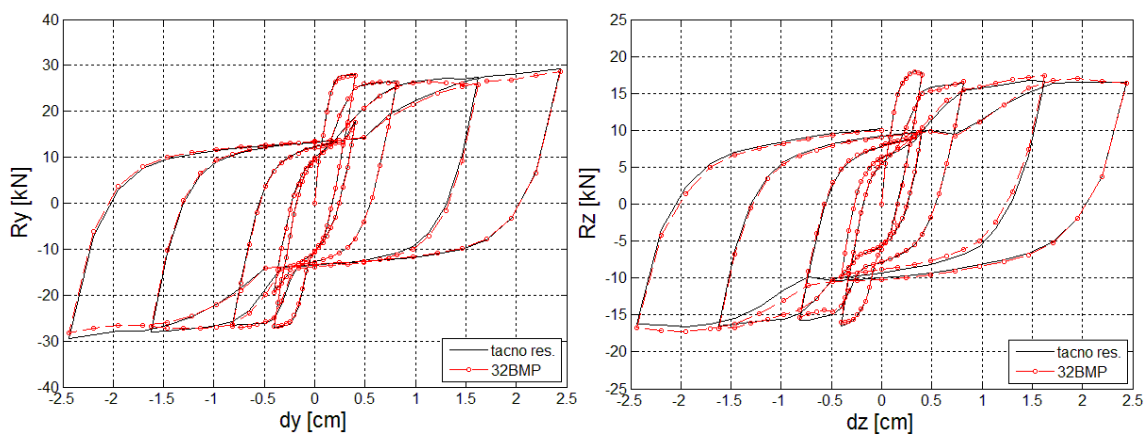
Slika C.11: Test LM2: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 12BMP



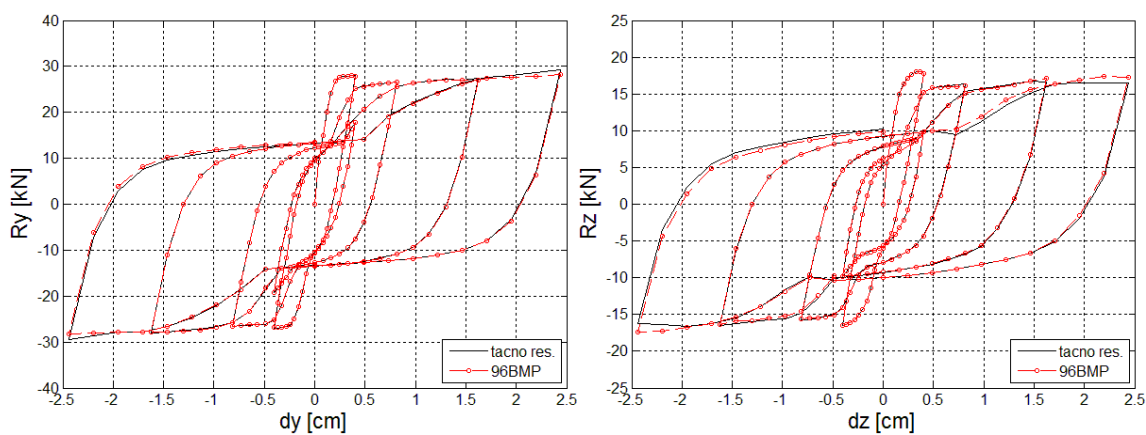
Slika C.12: Test LM2: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BMP



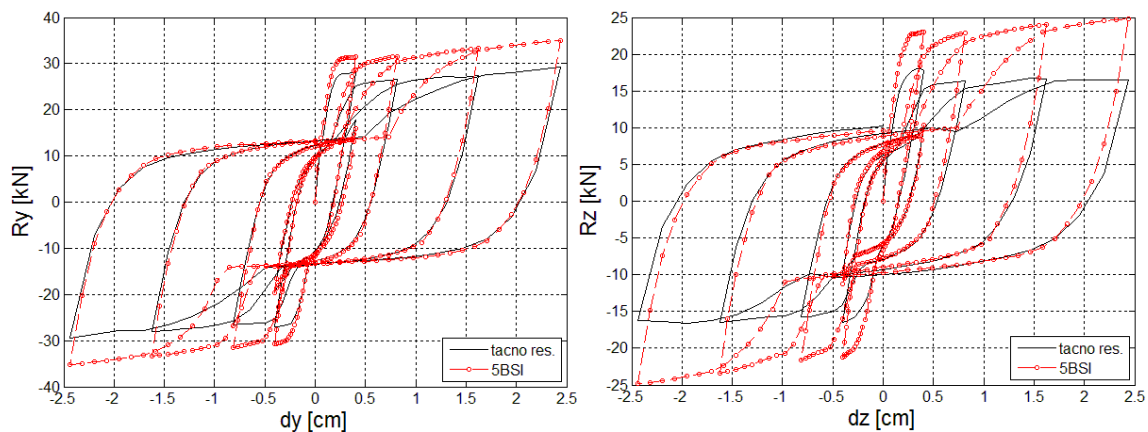
Slika C.13: Test LM2: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 21BMP



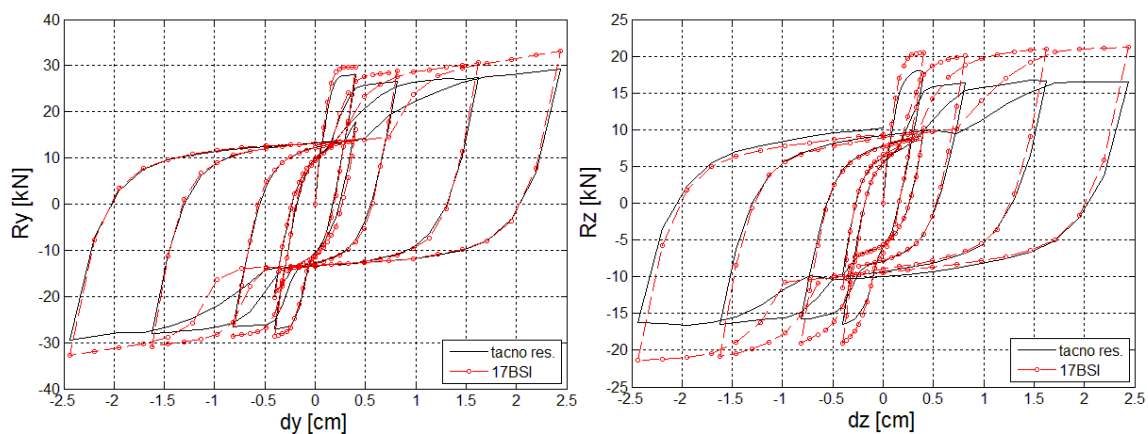
Slika C.14: Test LM2: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 32BMP



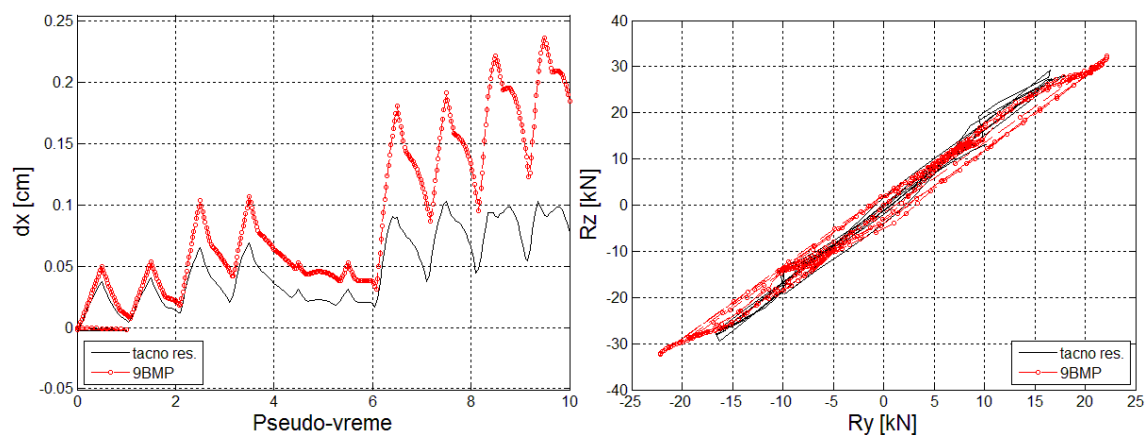
Slika C.15: Test LM2: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 96BMP



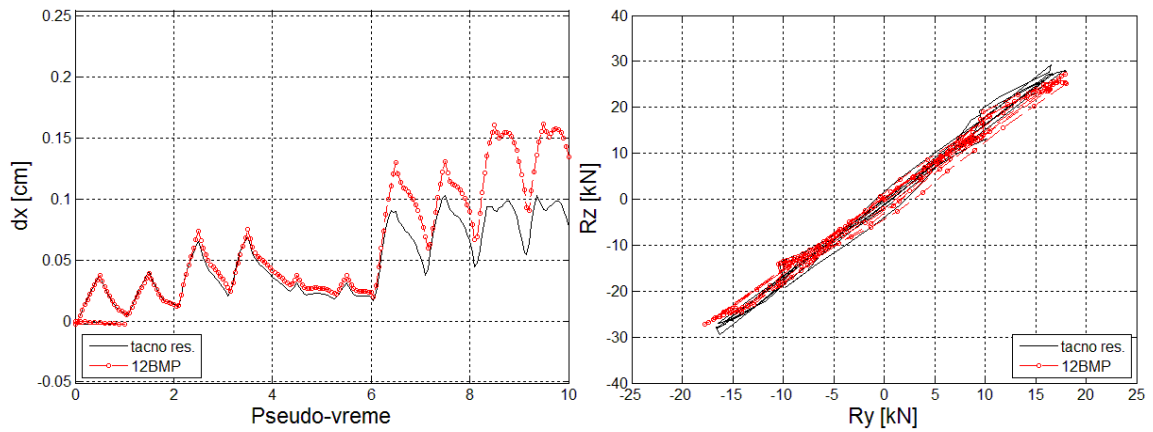
Slika C.16: Test LM2: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 5BSI



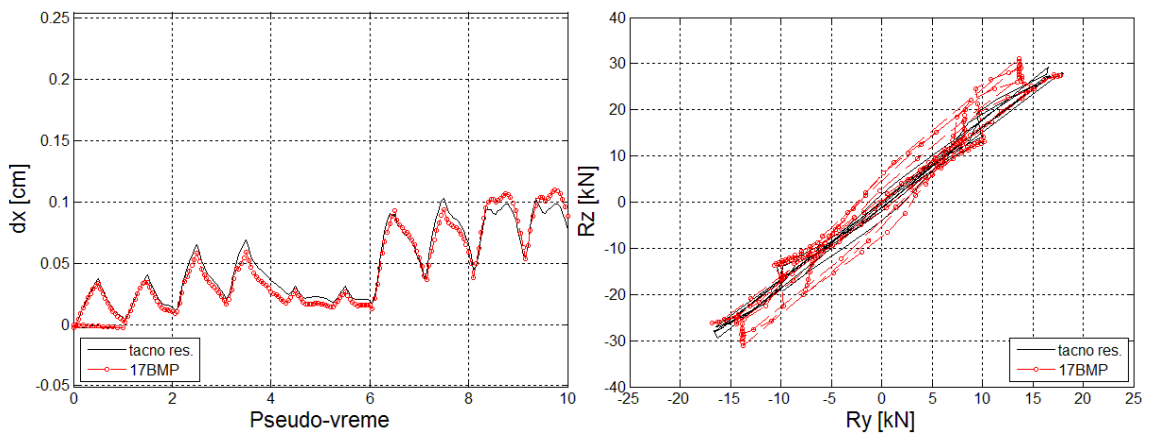
Slika C.17: Test LM2: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BSI



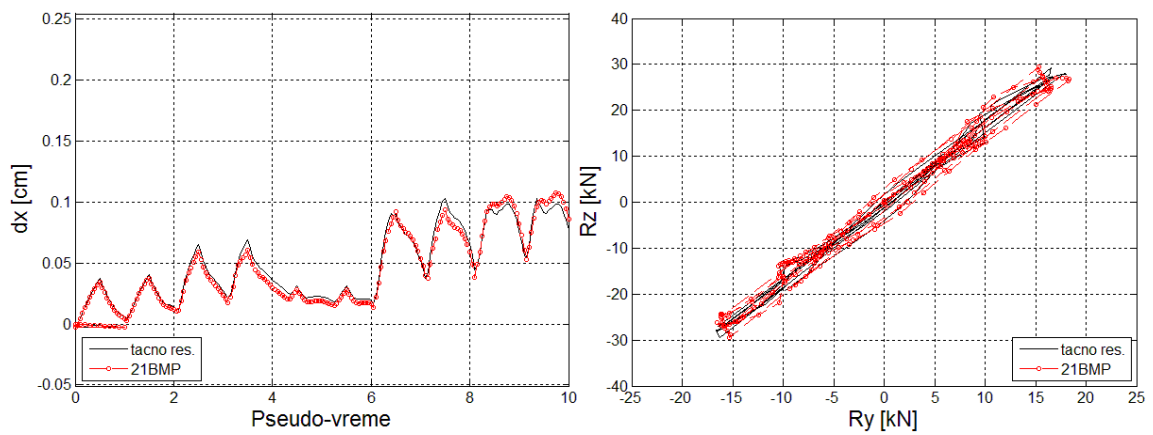
Slika C.18: Test LM2: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 9BMP



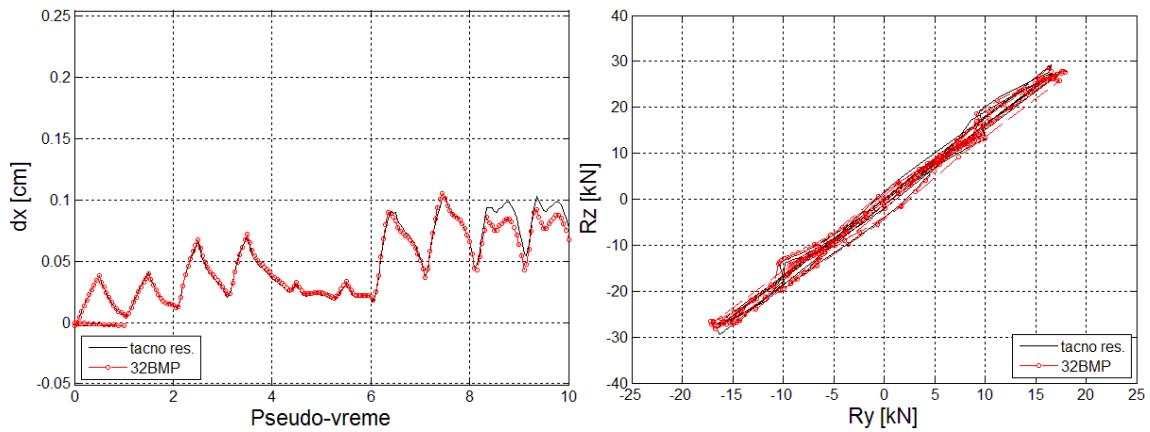
Slika C.19: Test LM2: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 12BMP



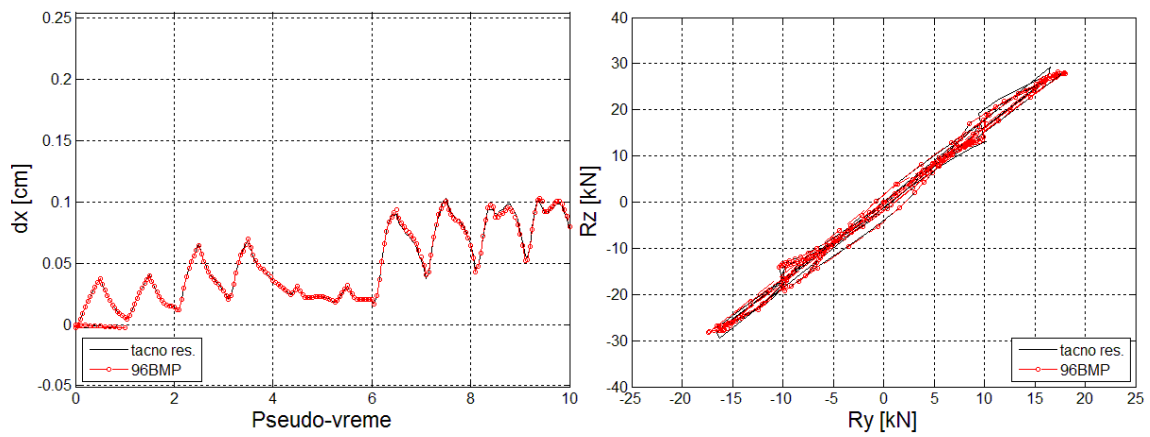
Slika C.20: Test LM2: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BMP



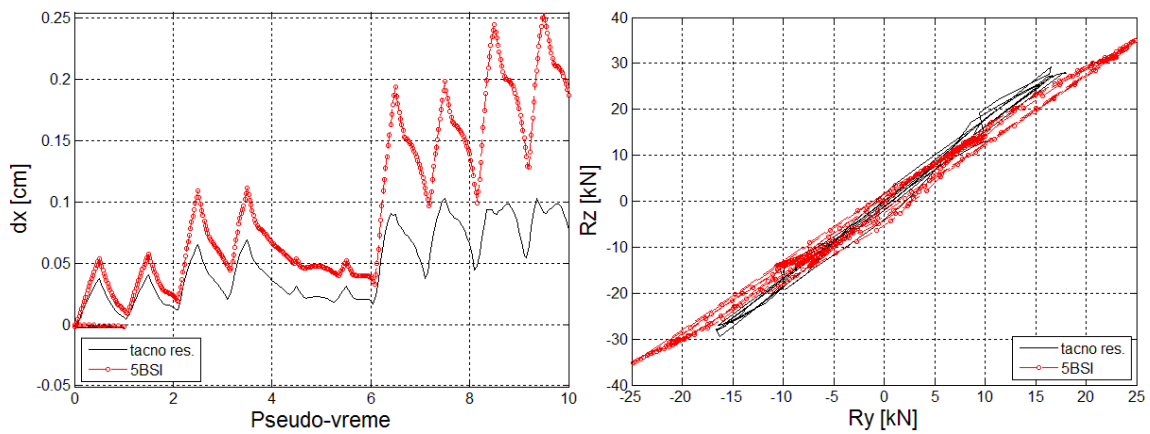
Slika C.21: Test LM2: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 21BMP



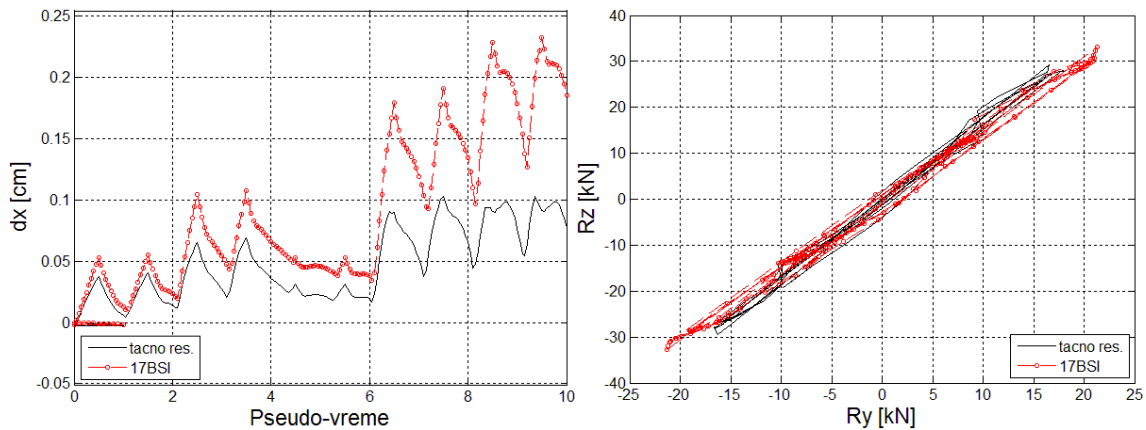
Slika C.22: Test LM2: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 32BMP



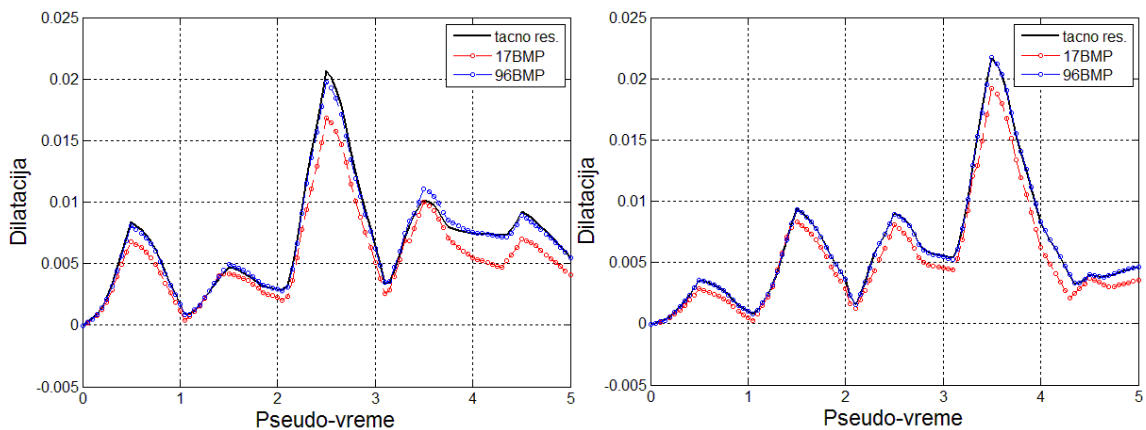
Slika C.23: Test LM2: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 96BMP



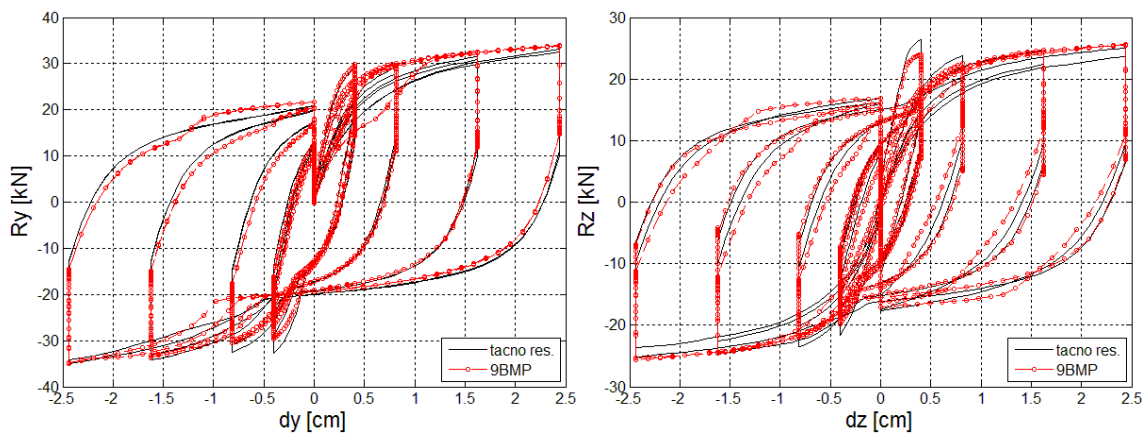
Slika C.24: Test LM2: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 5BSI



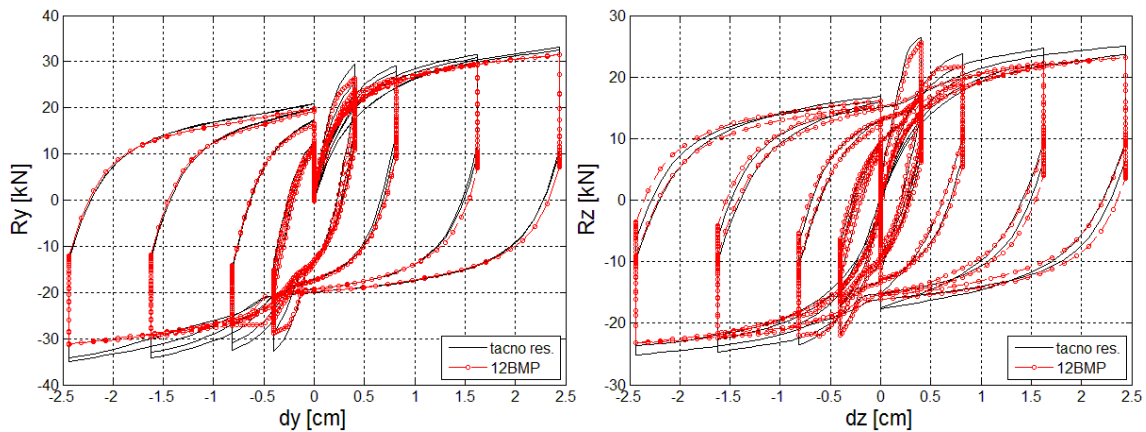
Slika C.25: Test LM2: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BSI



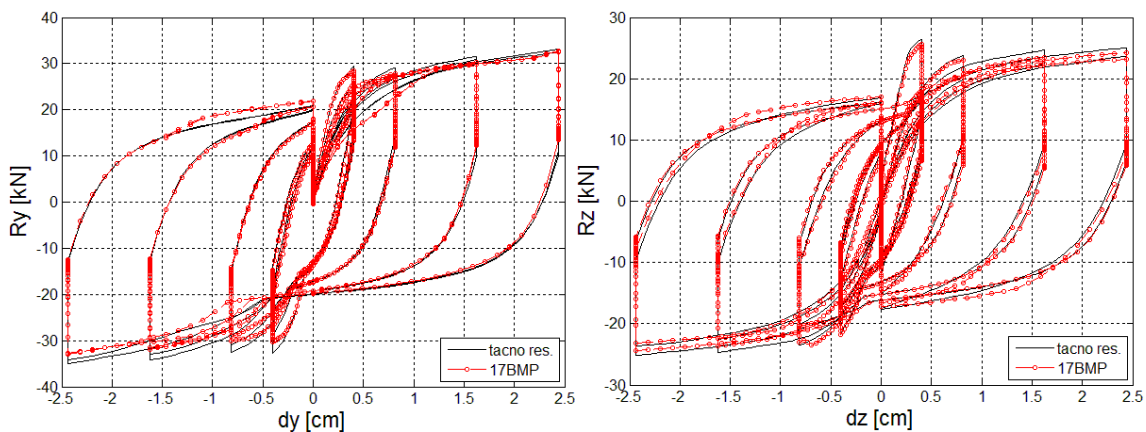
Slika C.26: Test LM2: Promena dilatacije najudaljenijeg vlakna: (a) jezgra betona i (b) armature za šeme 17BMP i 96BMP



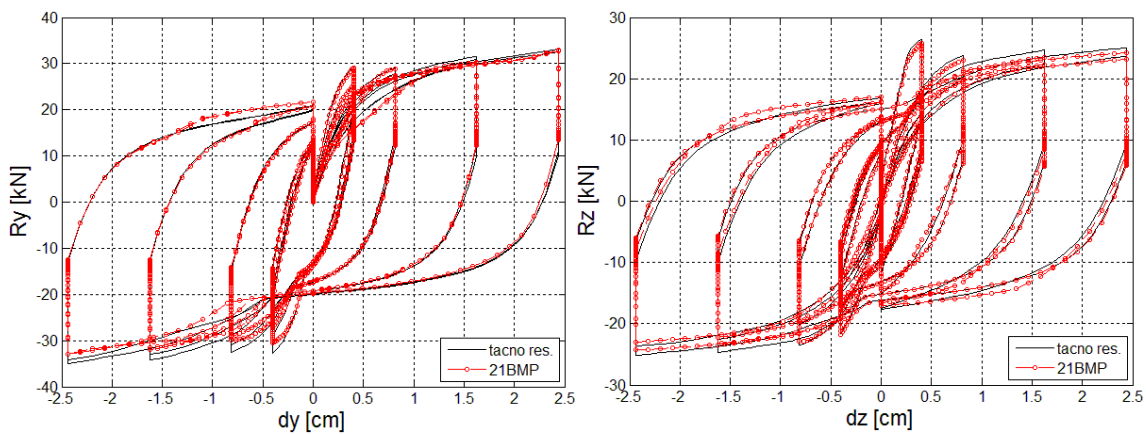
Slika C.27: Test LM3: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 9BMP



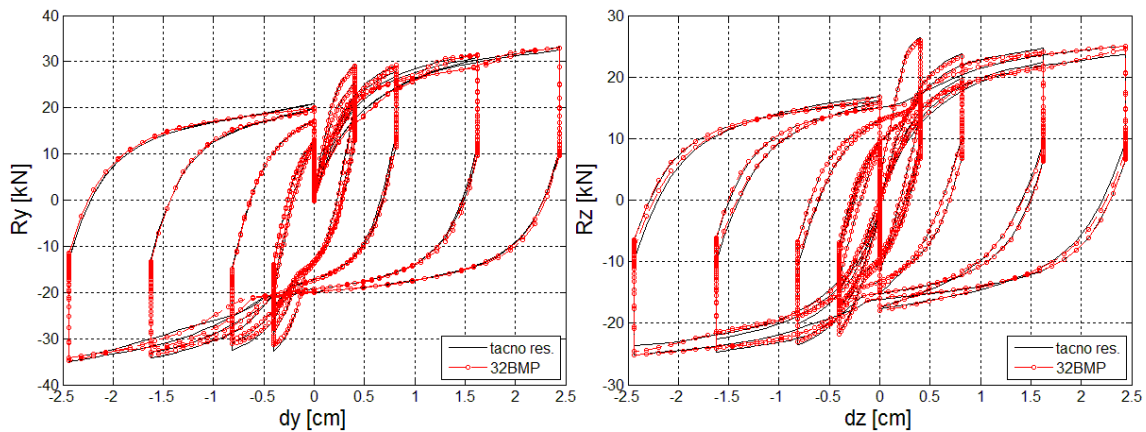
Slika C.28: Test LM3: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 12BMP



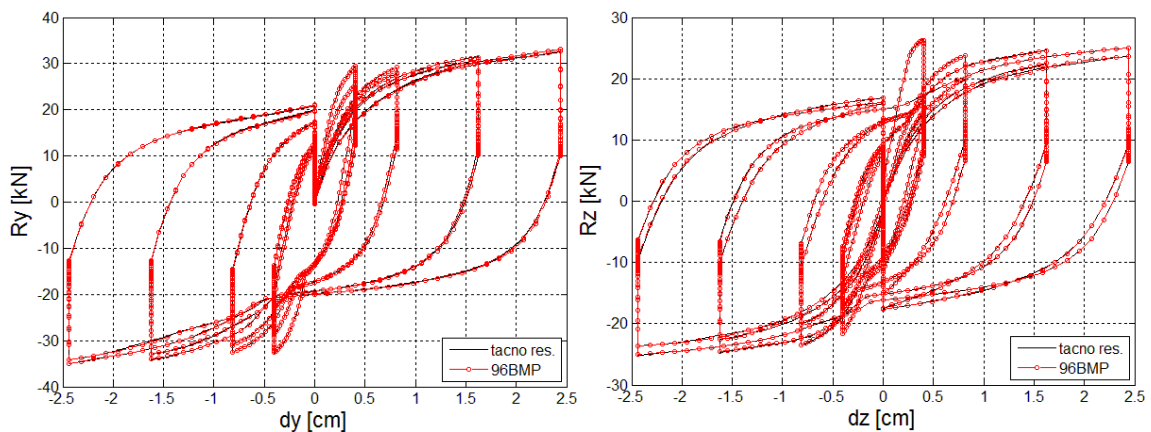
Slika C.29: Test LM3: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BMP



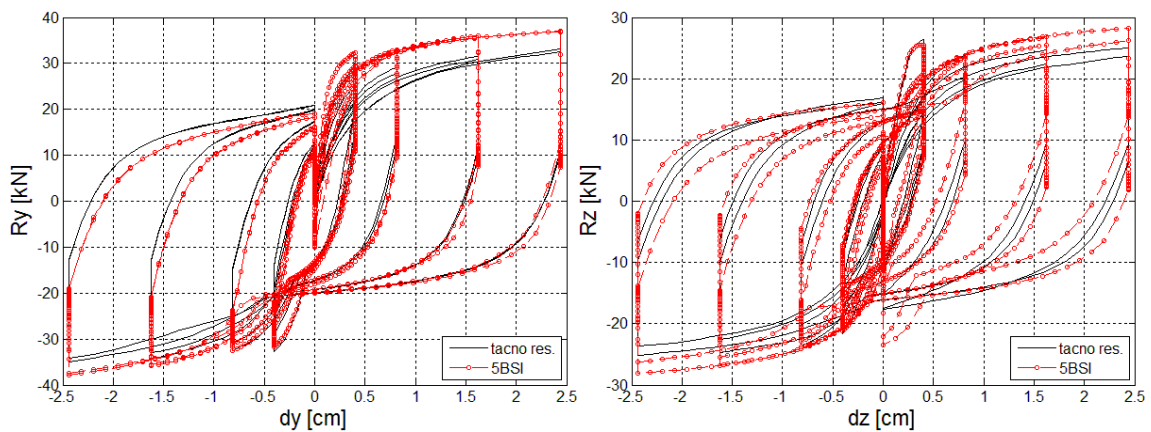
Slika C.30: Test LM3: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 21BMP



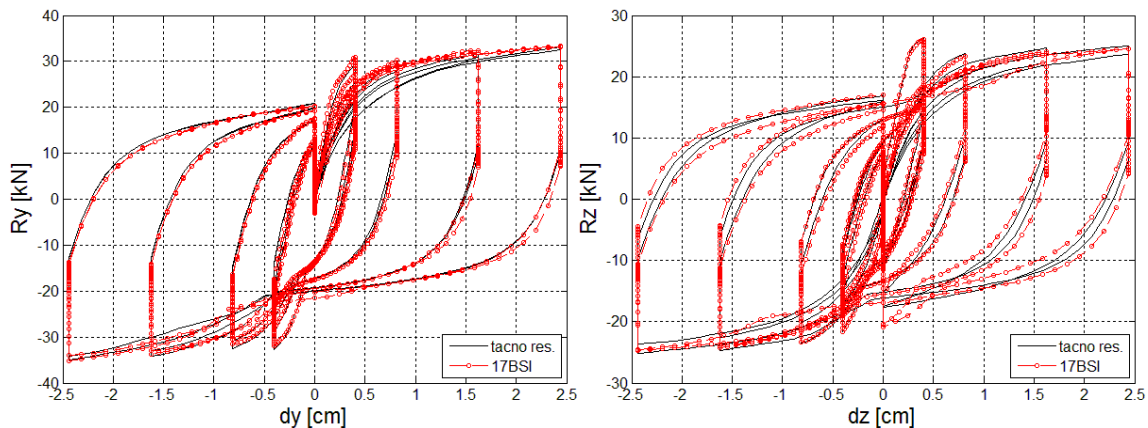
Slika C.31: Test LM3: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 32BMP



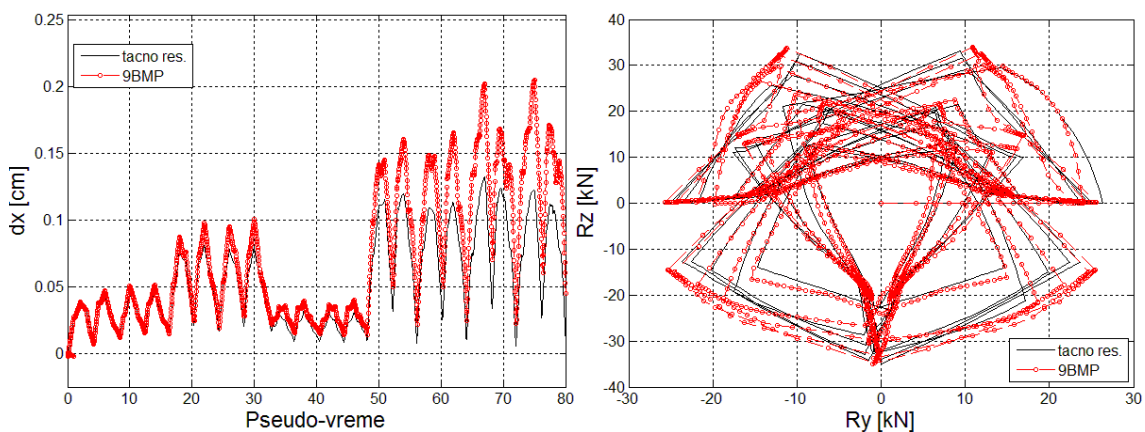
Slika C.32: Test LM3: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 96BMP



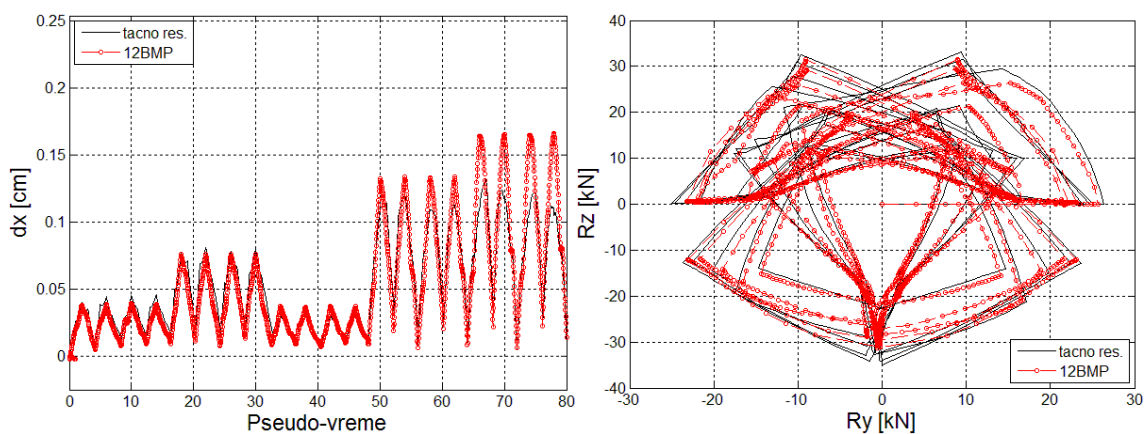
Slika C.33: Test LM3: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 5BSI



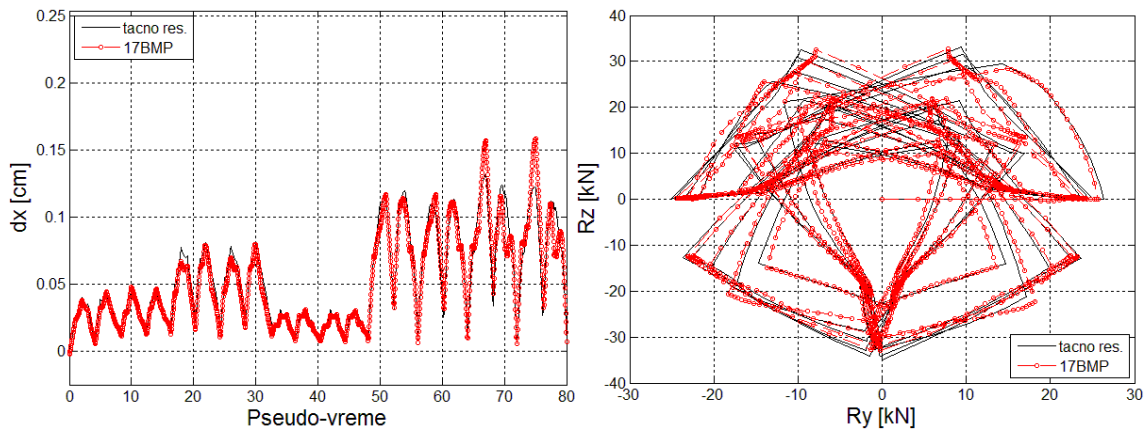
Slika C.34: Test LM3: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BSI



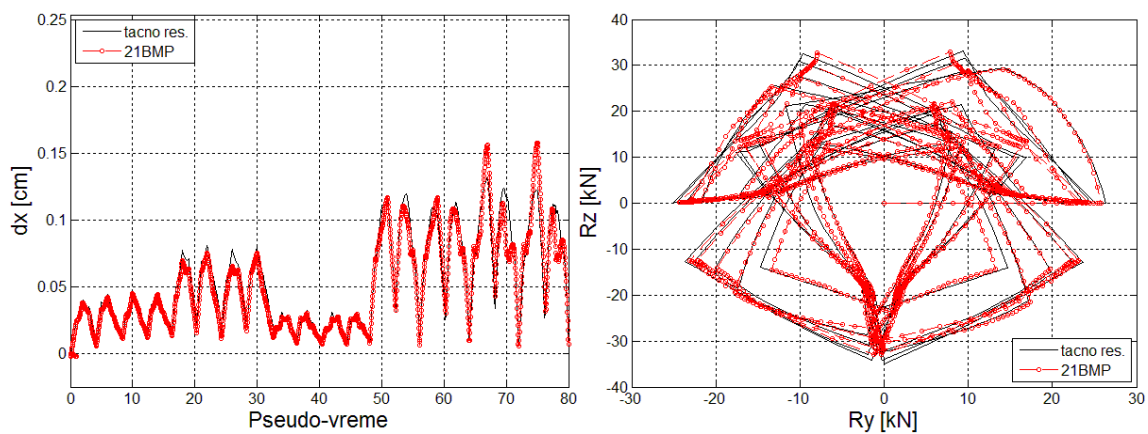
Slika C.35: Test LM3: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 9BMP



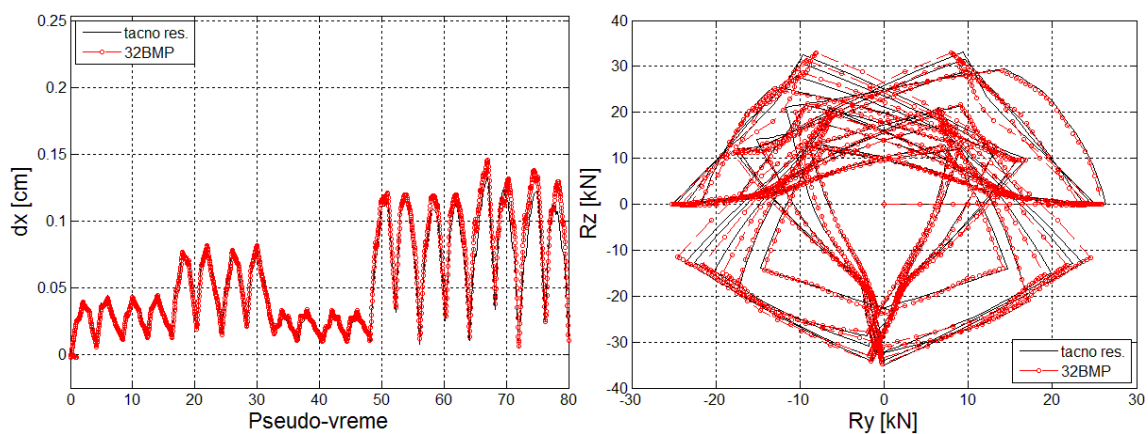
Slika C.36: Test LM3: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 12BMP



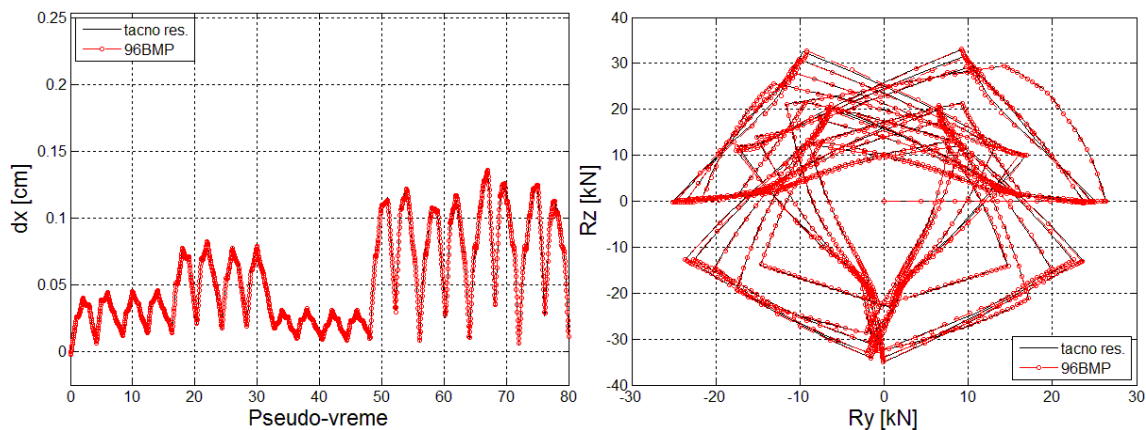
Slika C.37: Test LM3: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BMP



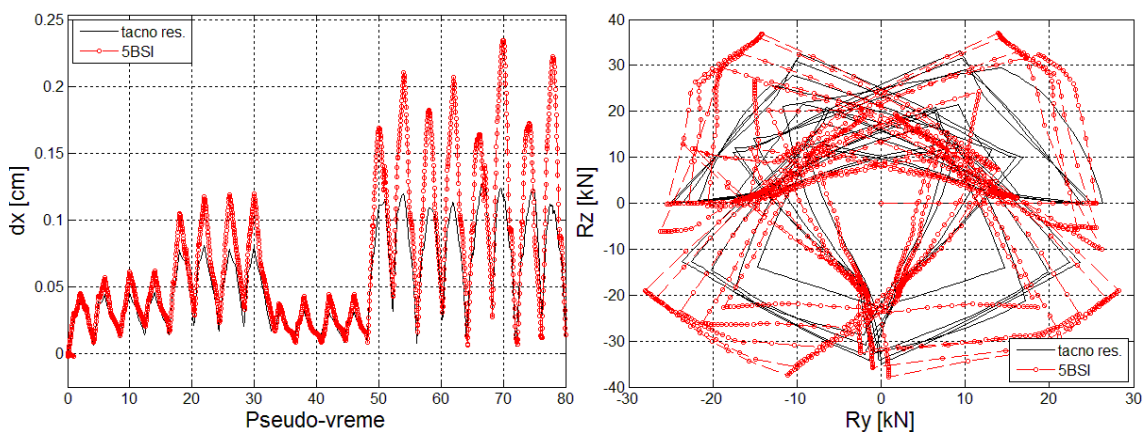
Slika C.38: Test LM3: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 21BMP



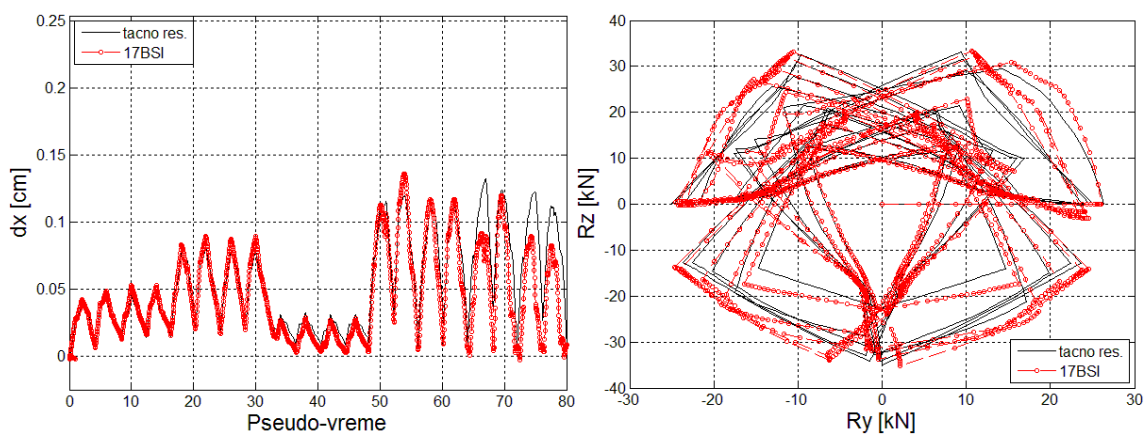
Slika C.39: Test LM3: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 32BMP



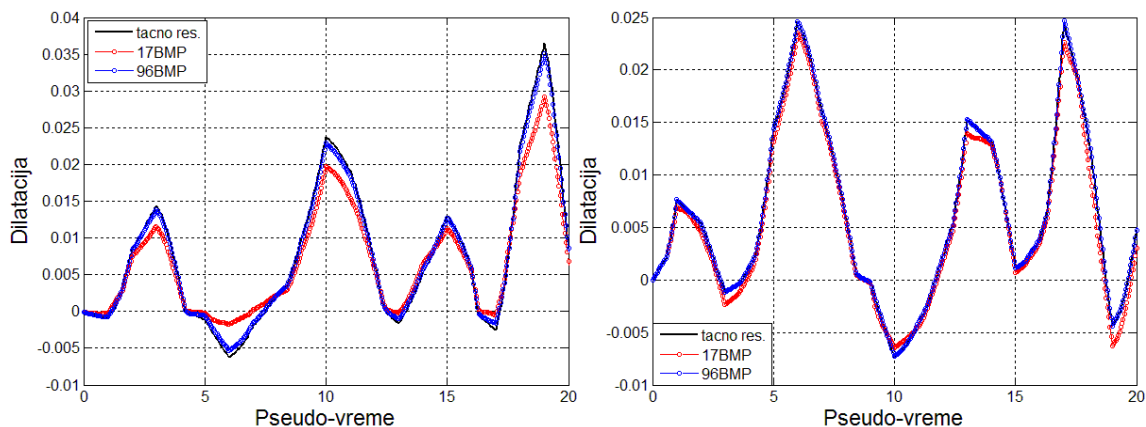
Slika C.40: Test LM3: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 96BMP



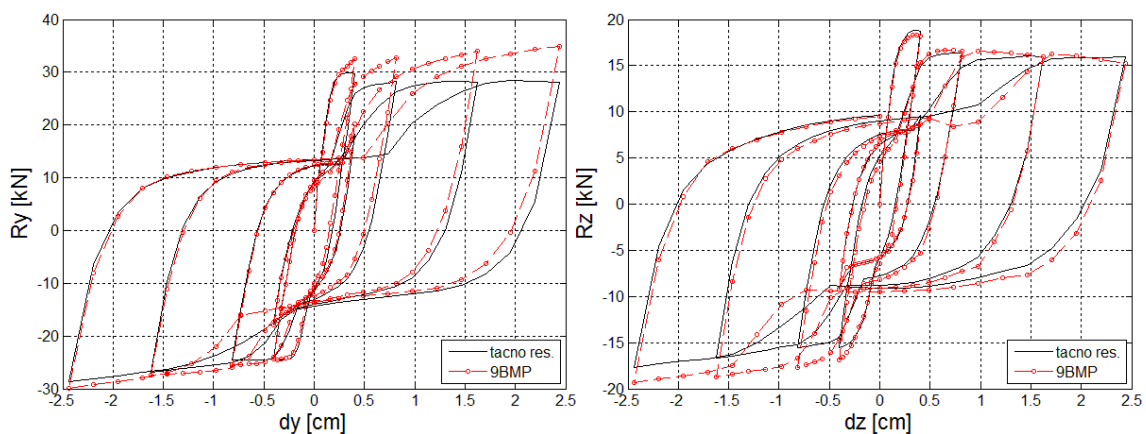
Slika C.41: Test LM3: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 5BSI



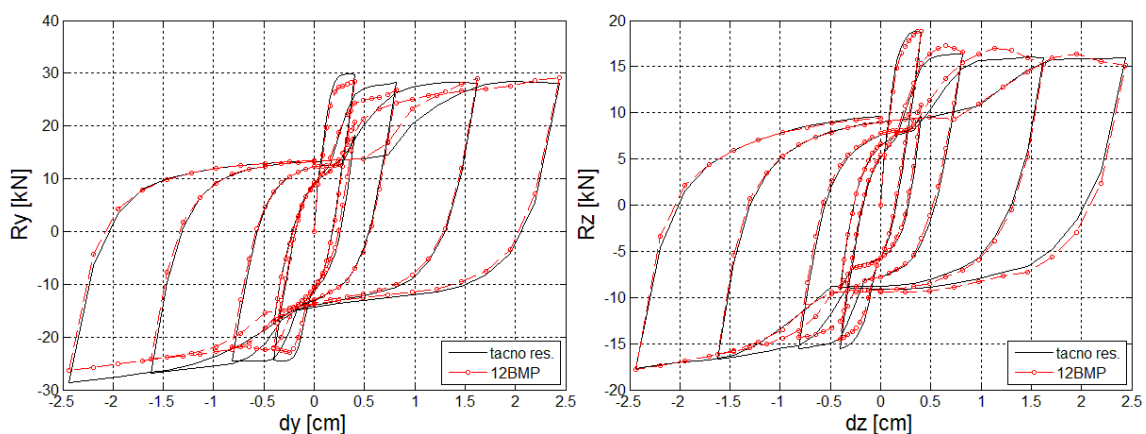
Slika C.42: Test LM3: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BSI



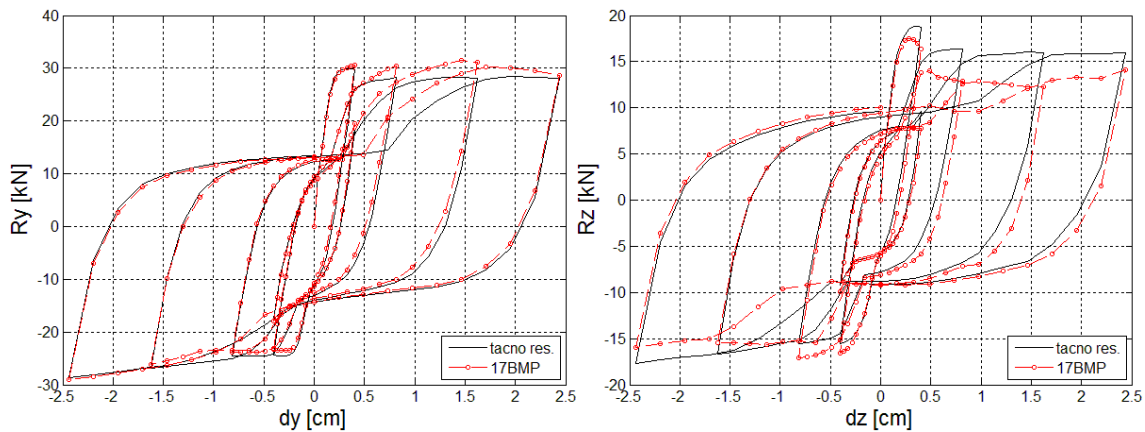
Slika C.43: Test LM3: Promena dilatacije najudaljenijeg vlakna: (a) jezgra betona i (b) armature za šeme 17BMP i 96BMP



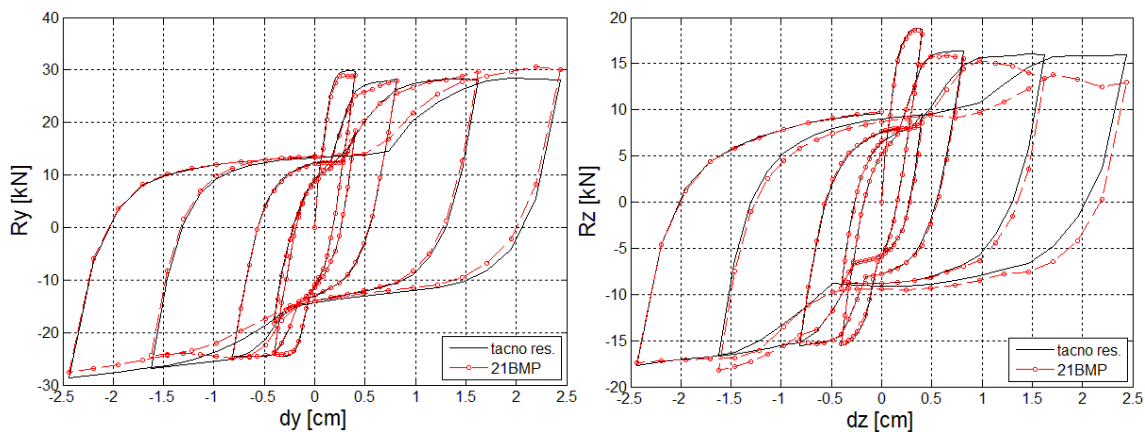
Slika C.44: Test LM4: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 9BMP



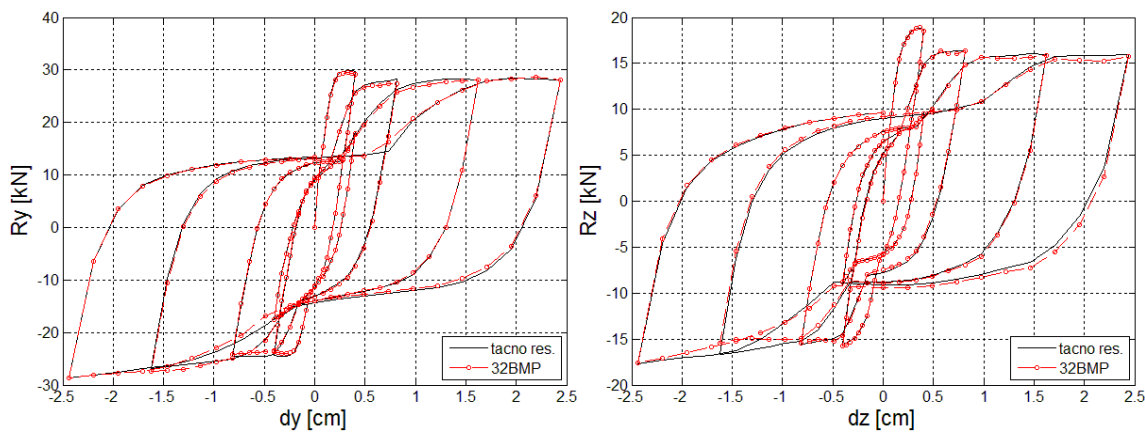
Slika C.45: Test LM4: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 12BMP



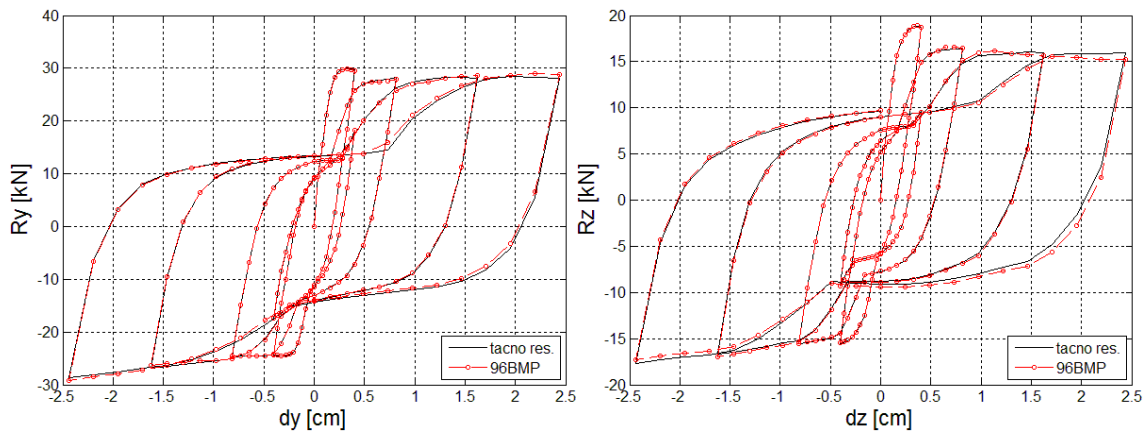
Slika C.46: Test LM4: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BMP



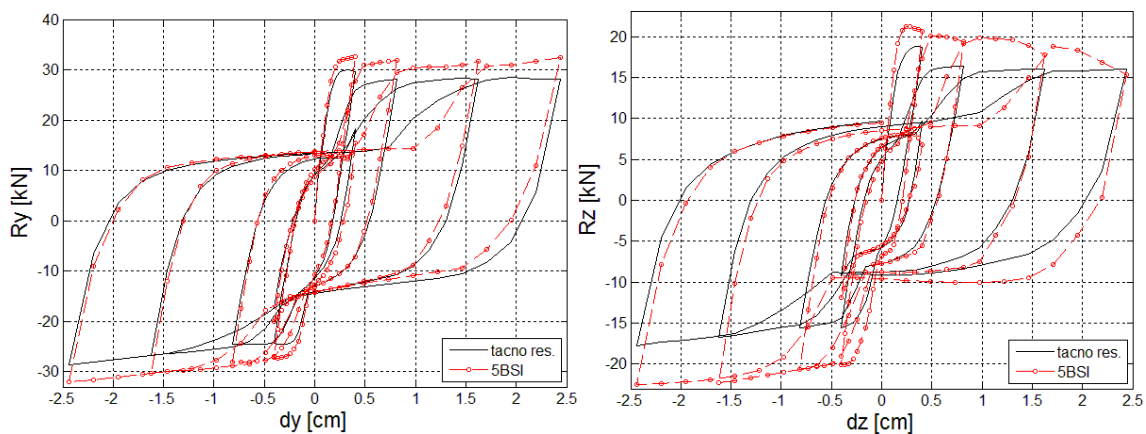
Slika C.47: Test LM4: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 21BMP



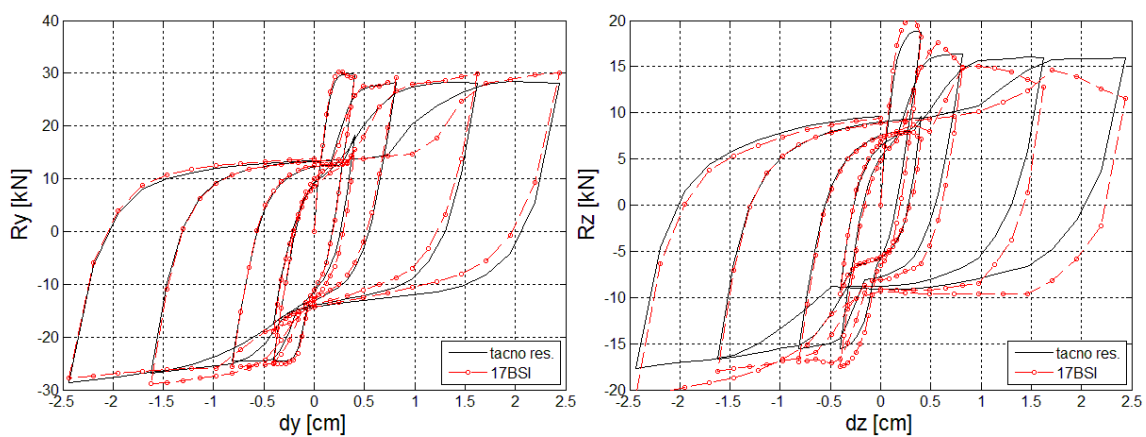
Slika C.48: Test LM4: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 32BMP



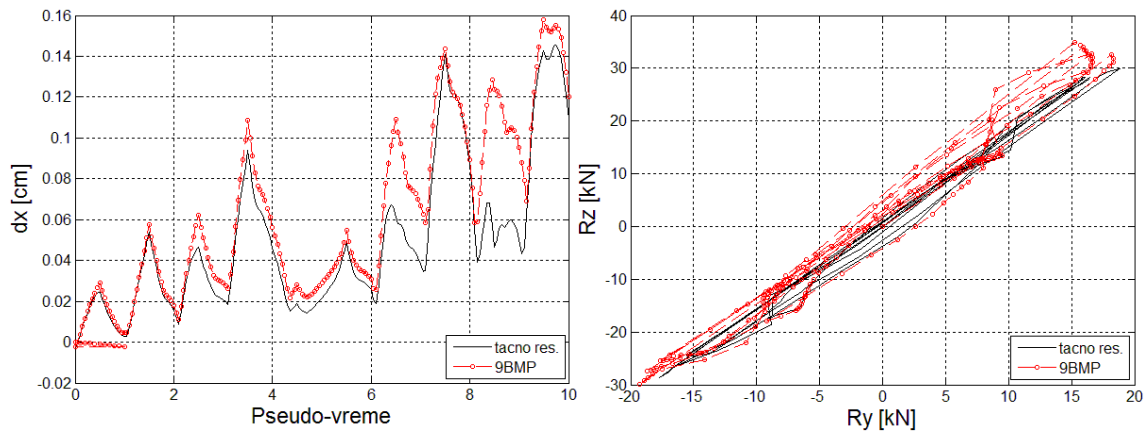
Slika C.49: Test LM4: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 96BMP



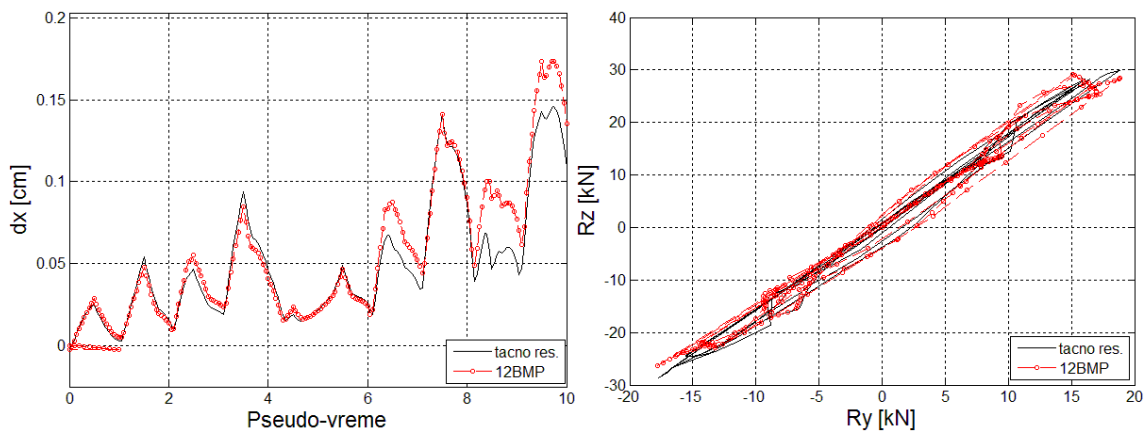
Slika C.50: Test LM4: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 5BSI



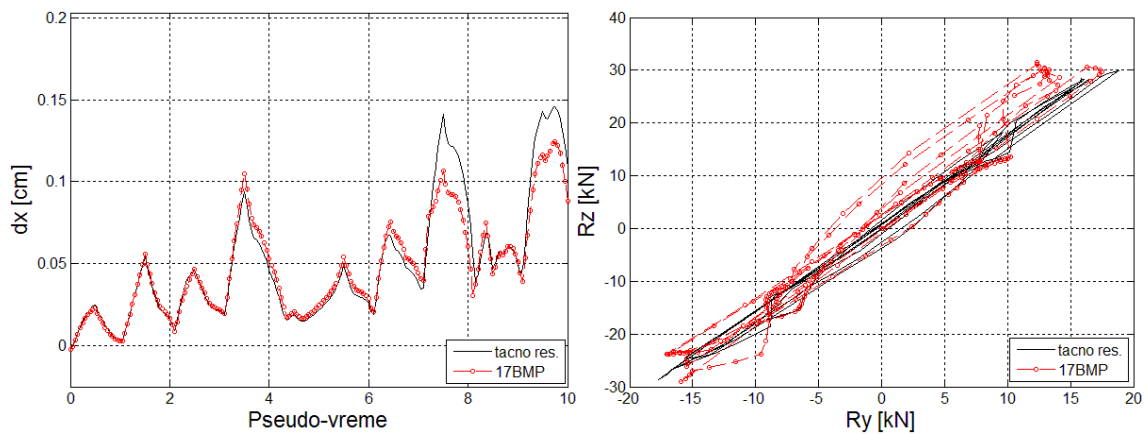
Slika C.51: Test LM4: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BSI



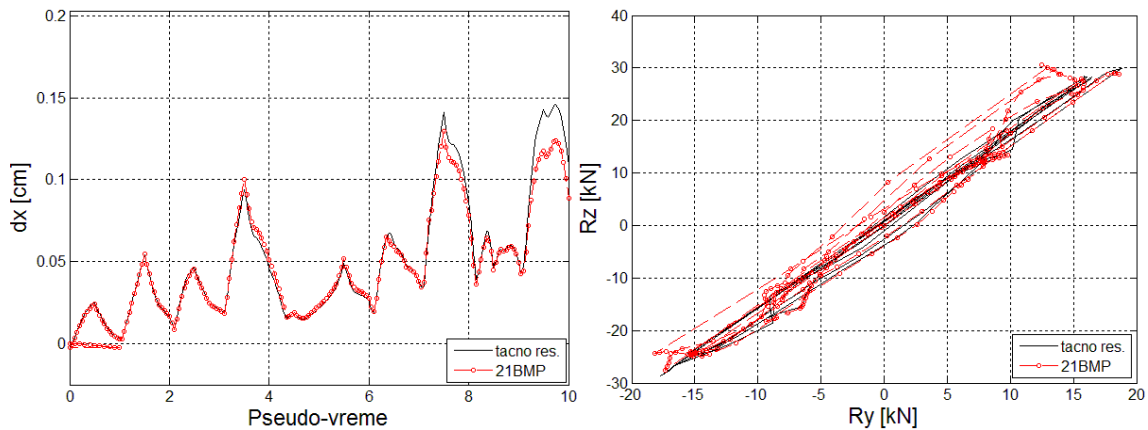
Slika C.52: Test LM4: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 9BMP



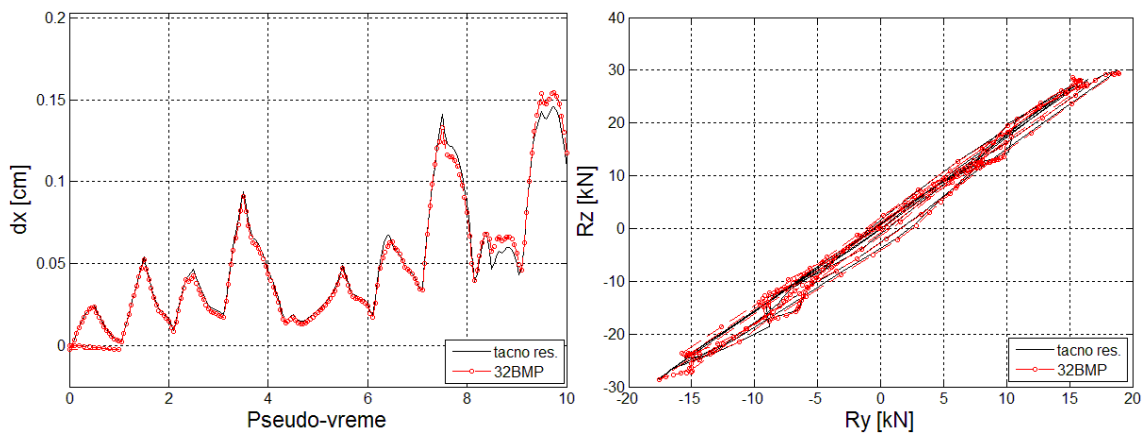
Slika C.53: Test LM4: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 12BMP



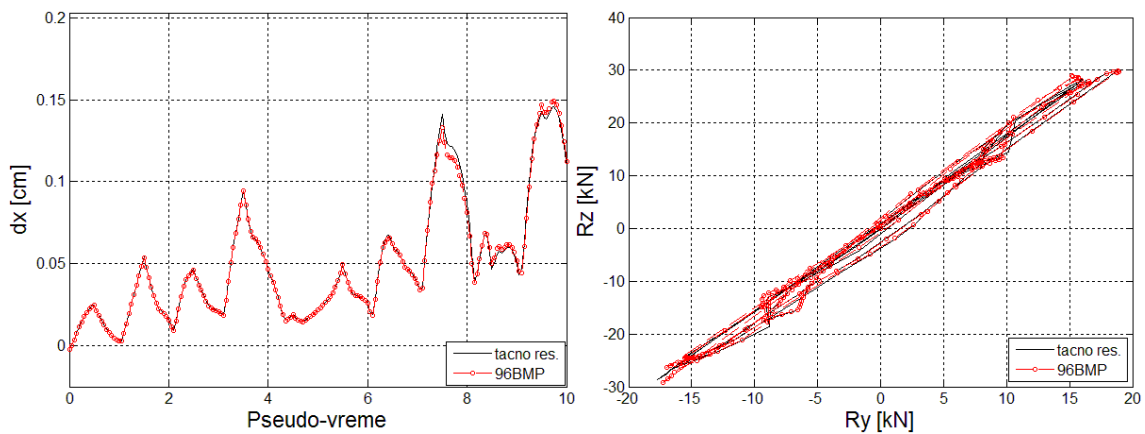
Slika C.54: Test LM4: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BMP



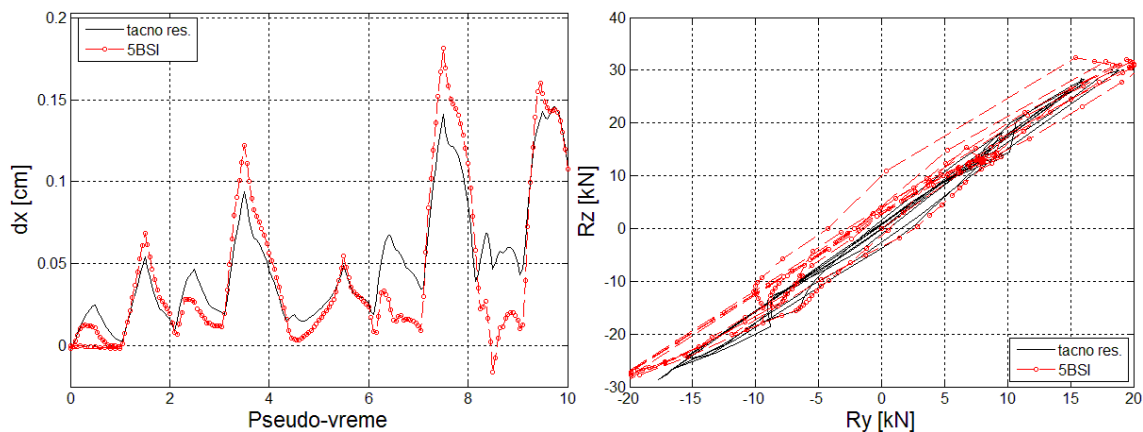
Slika C.55: Test LM4: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 21BMP



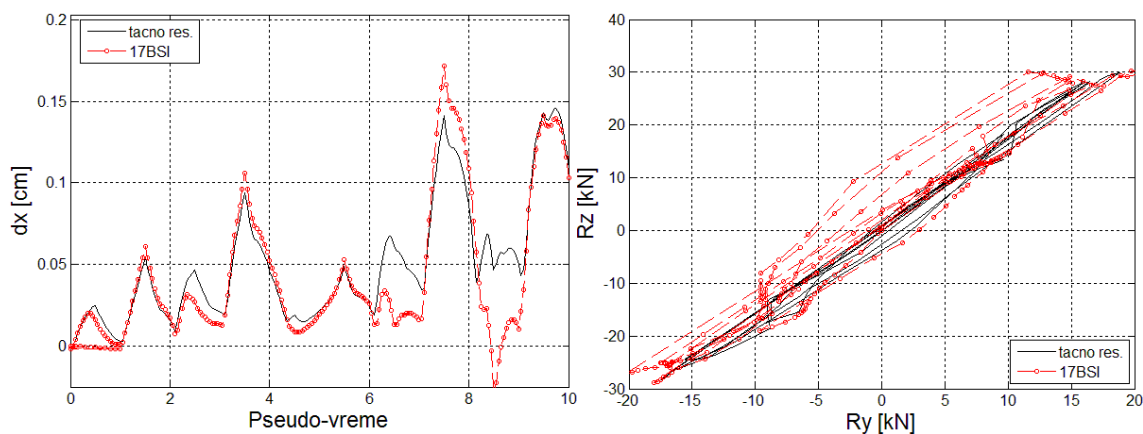
Slika C.56: Test LM4: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 32BMP



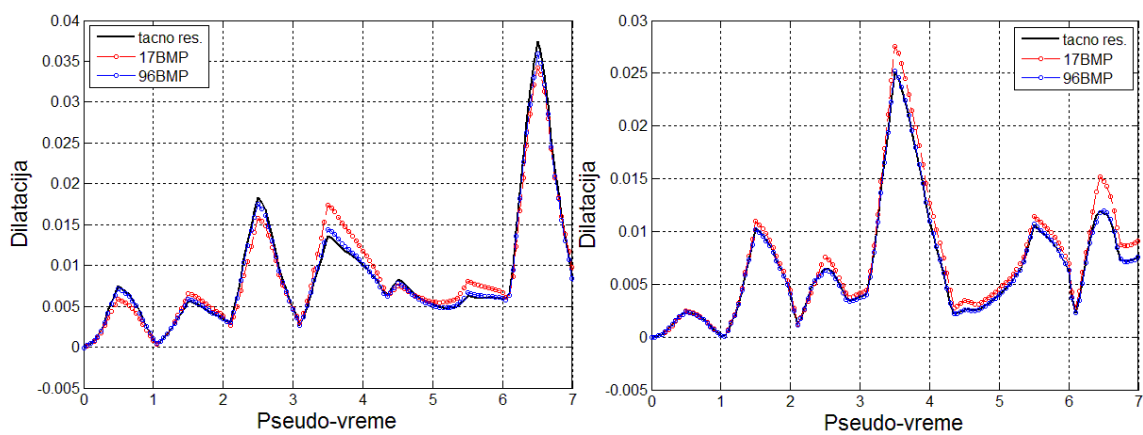
Slika C.57: Test LM4: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 96BMP



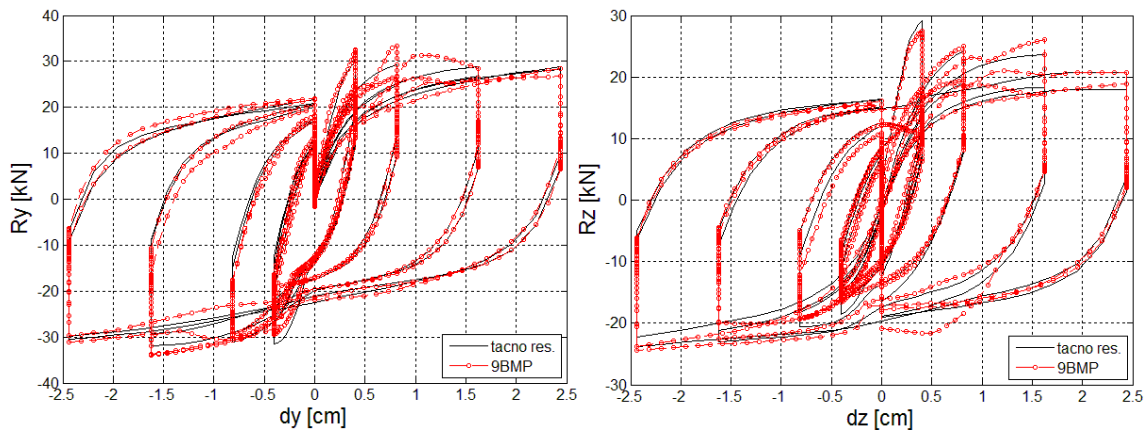
Slika C.58: Test LM4: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 5BSI



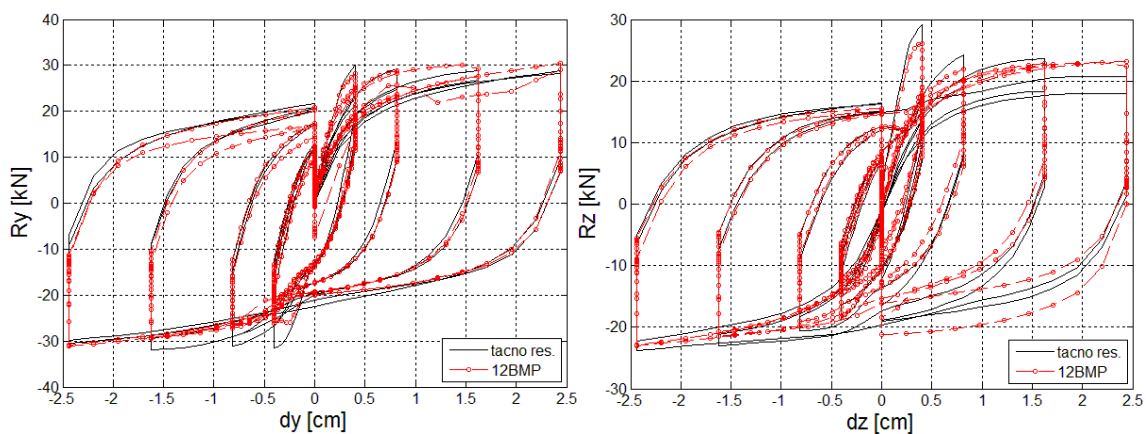
Slika C.59: Test LM4: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BSI



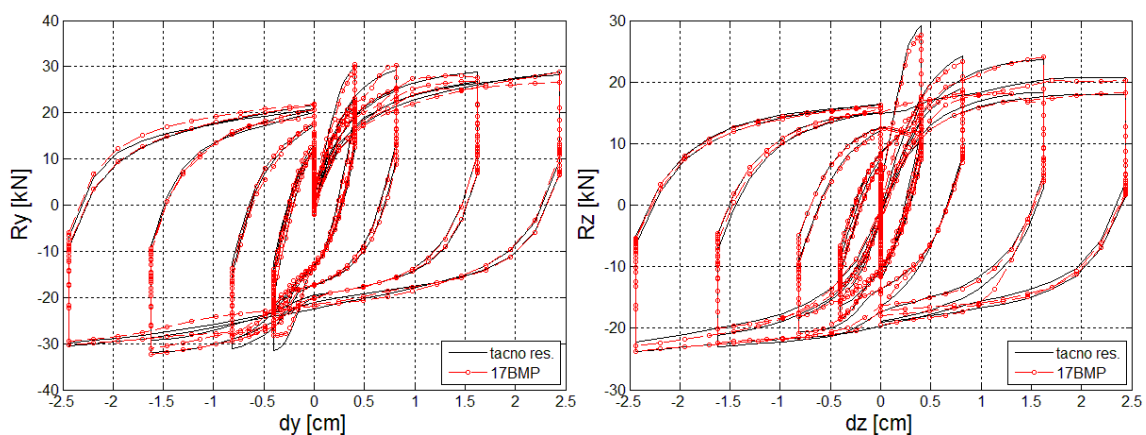
Slika C.60: Test LM4: Promena dilatacije najudaljenijeg vlakna: (a) jezgra betona i (b) armature za šeme 17BMP i 96BMP



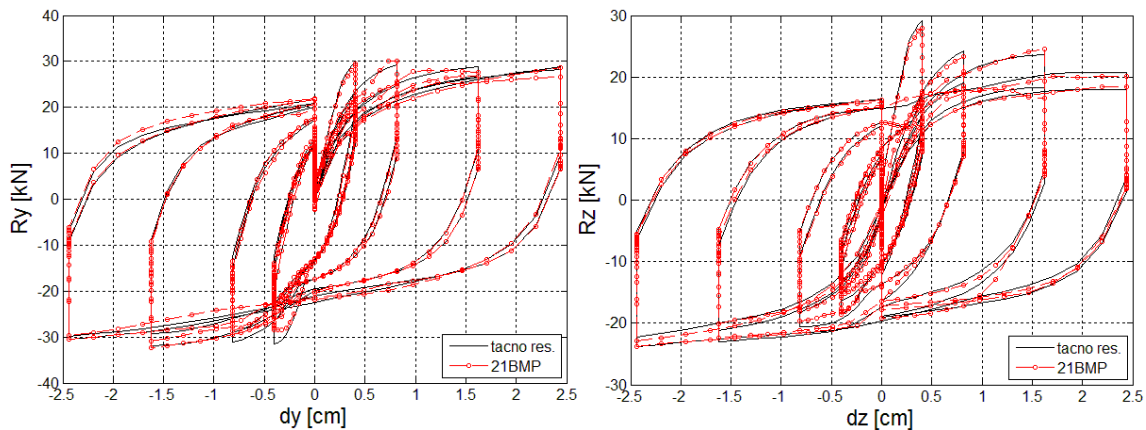
Slika C.61: Test LM5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 9BMP



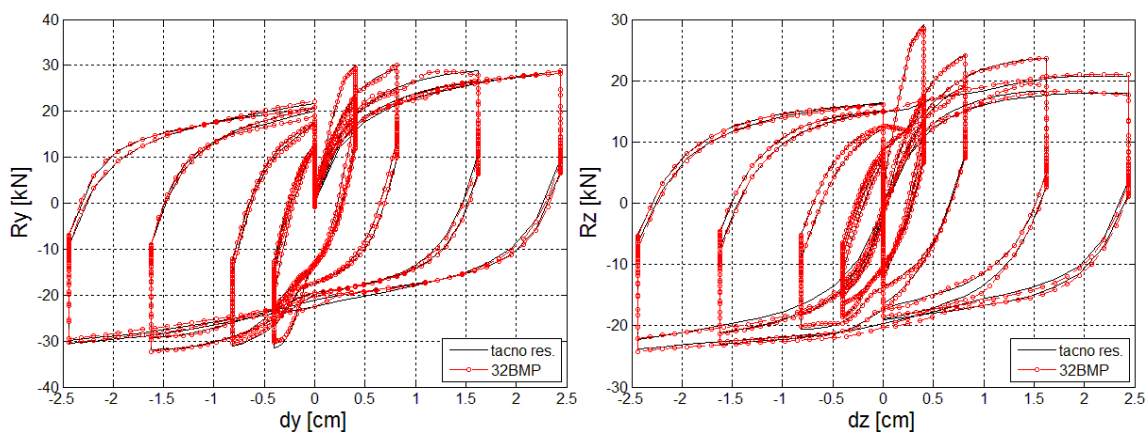
Slika C.62: Test LM5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 12BMP



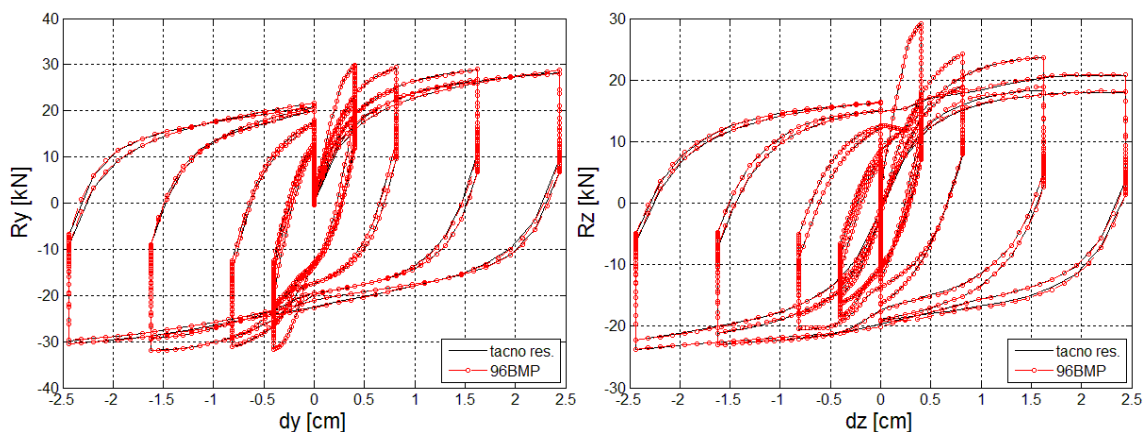
Slika C.63: Test LM5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BMP



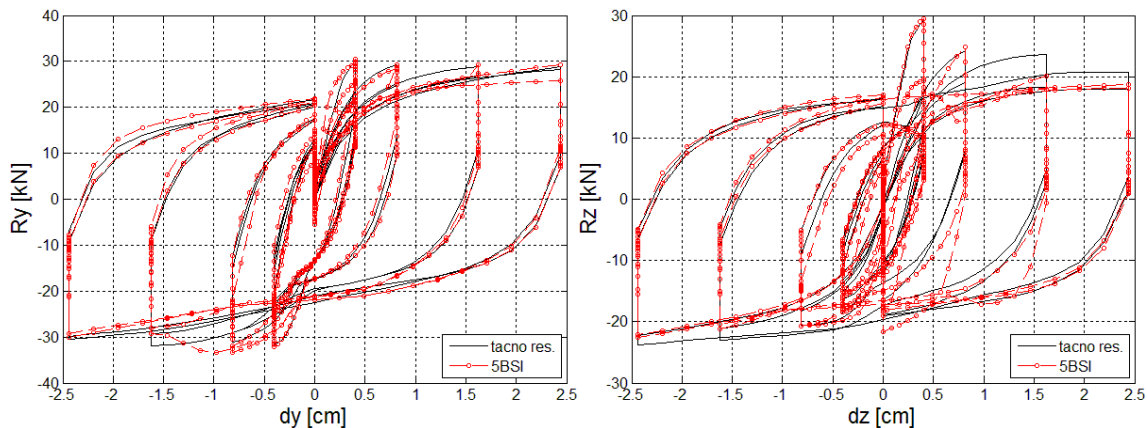
Slika C.64: Test LM5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 21BMP



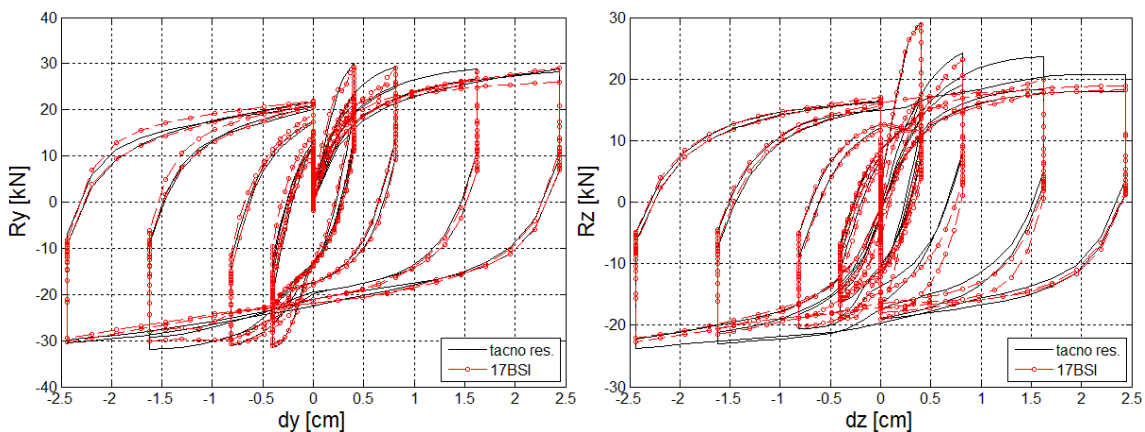
Slika C.65: Test LM5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 32BMP



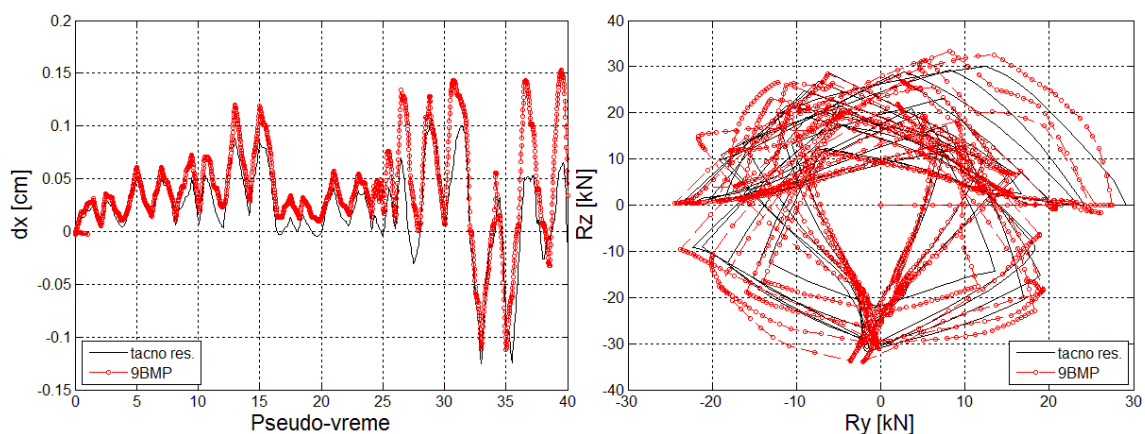
Slika C.66: Test LM5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 96BMP



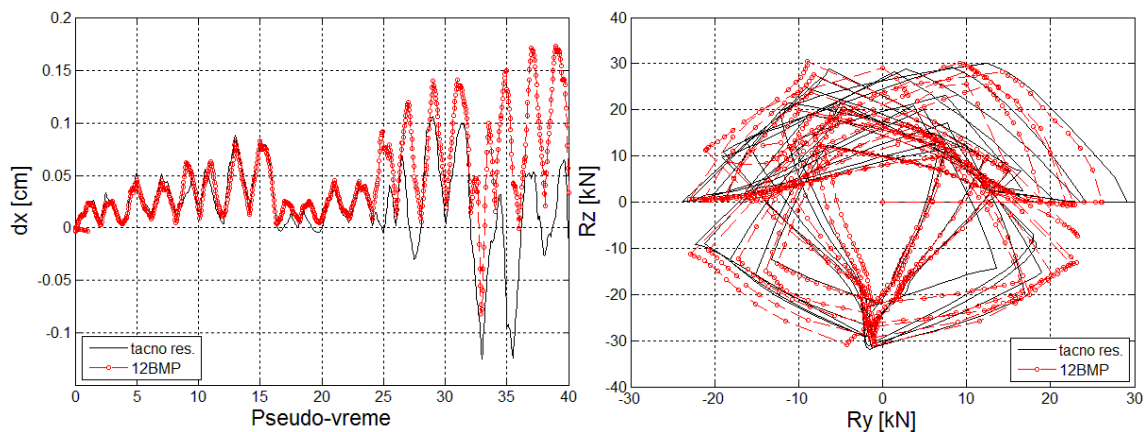
Slika C.67: Test LM5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 5BSI



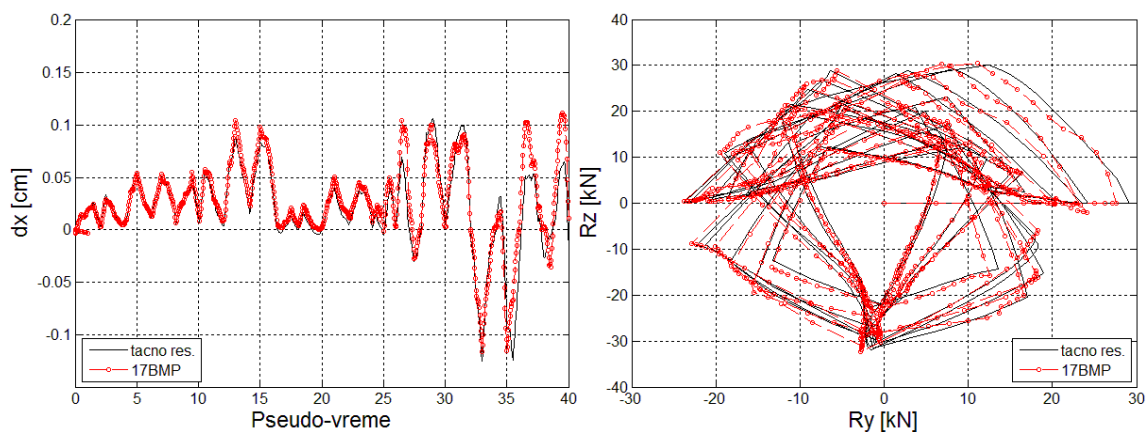
Slika C.68: Test LM5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BSI



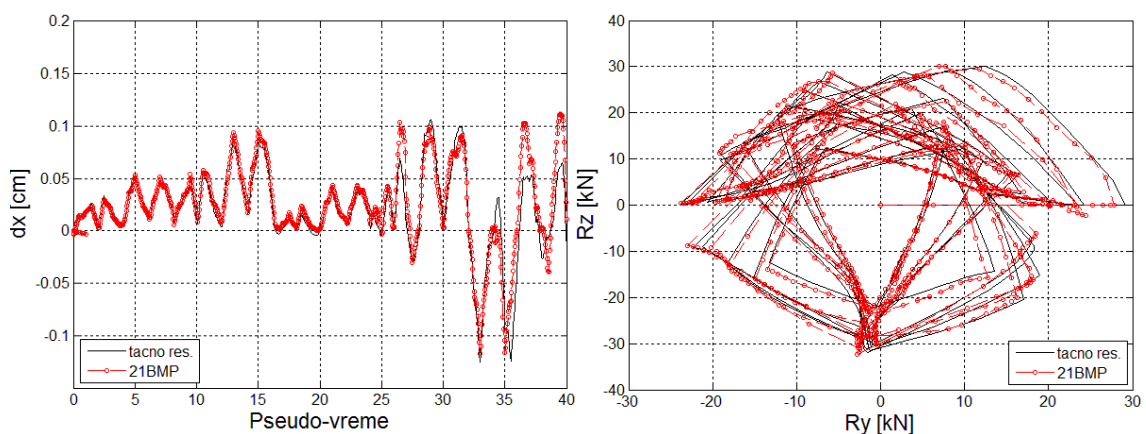
Slika C.69: Test LM5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 9BMP



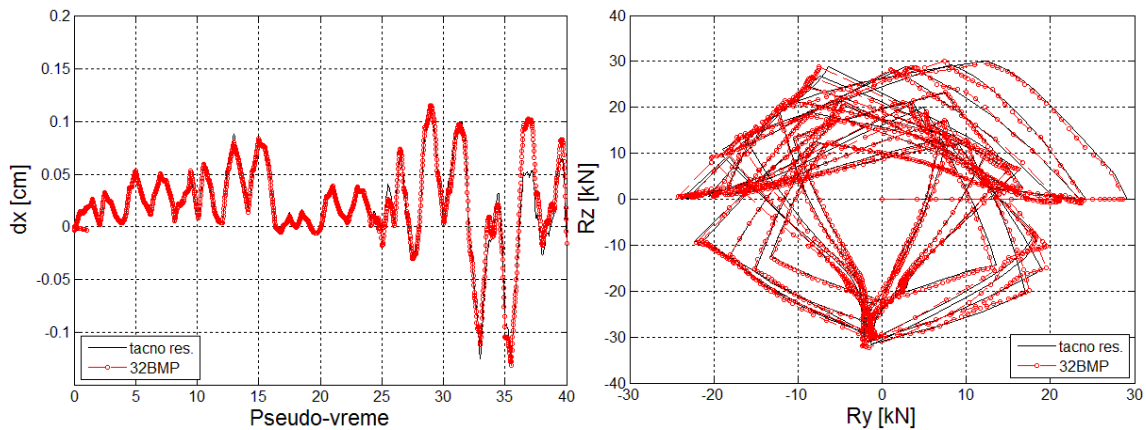
Slika C.70: Test LM5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 12BMP



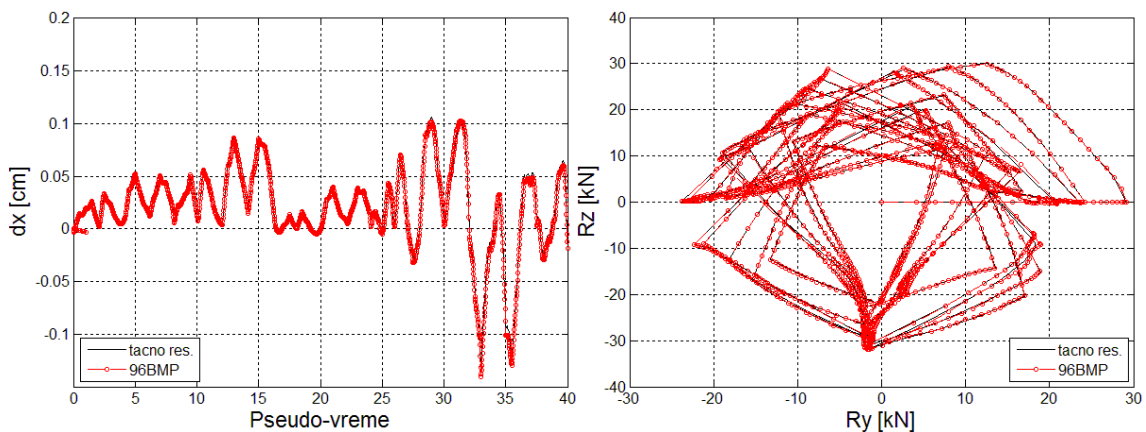
Slika C.71: Test LM5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BMP



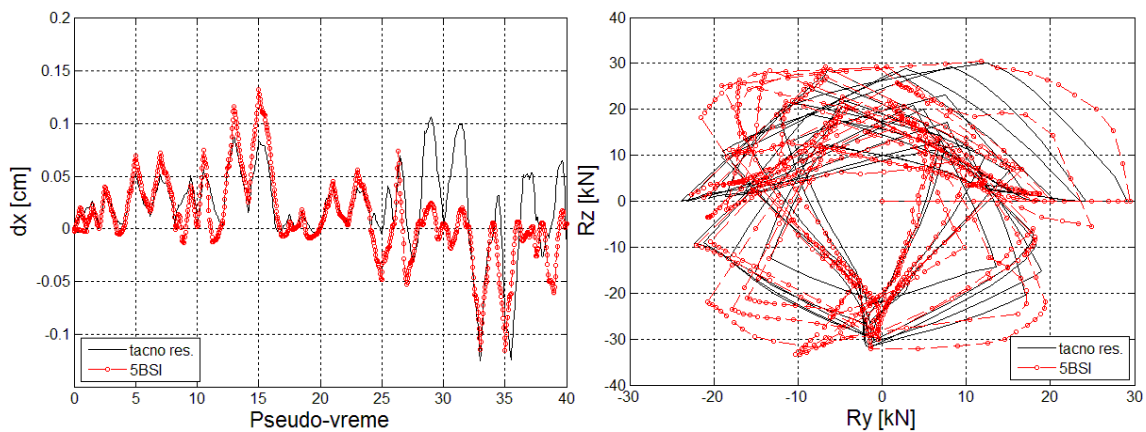
Slika C.72: Test LM5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 21BMP



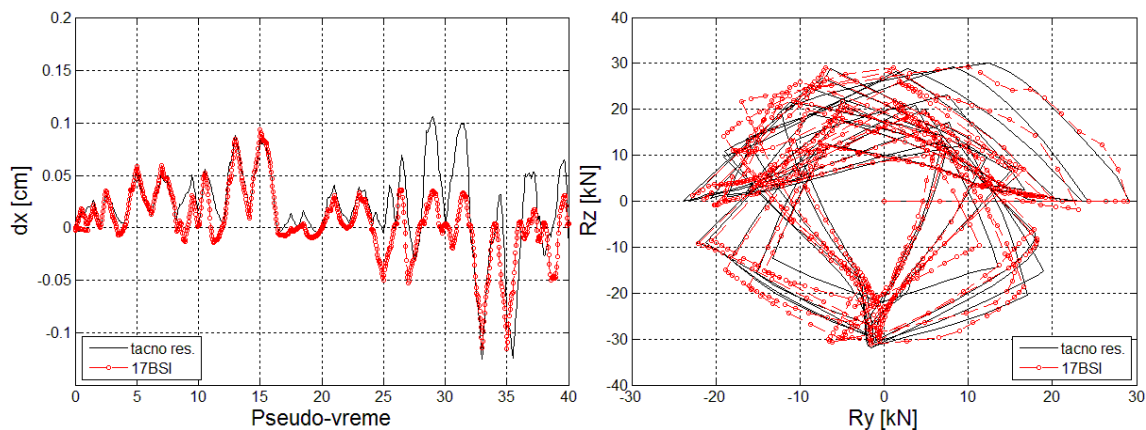
Slika C.73: Test LM5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 32BMP



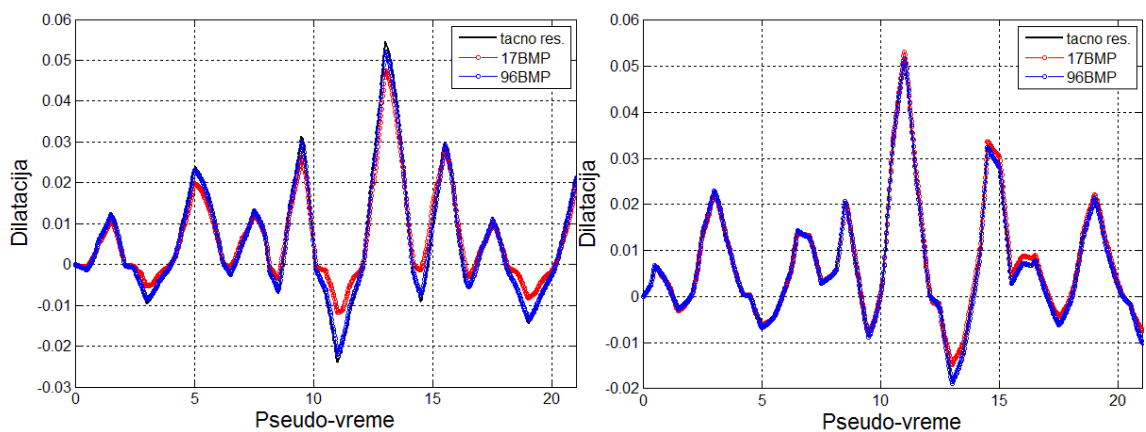
Slika C.74: Test LM5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 96BMP



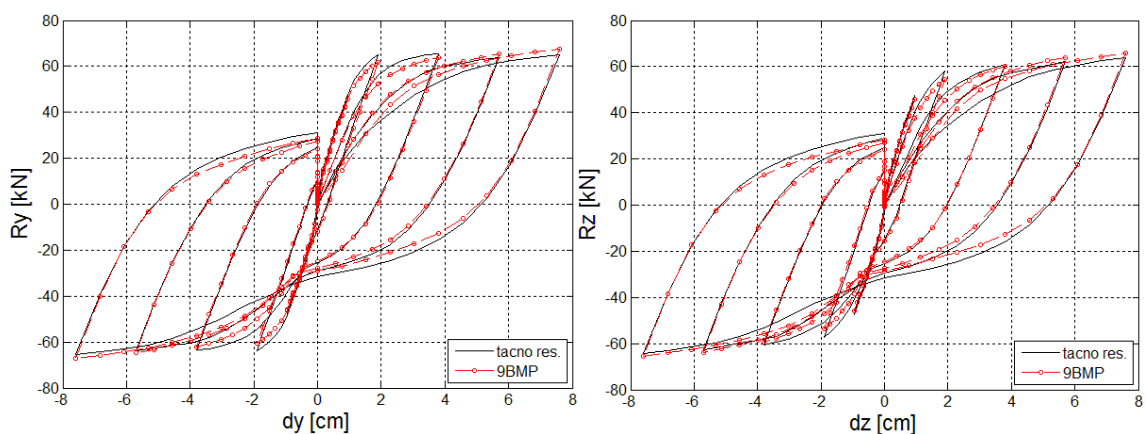
Slika C.75: Test LM5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 5BSI



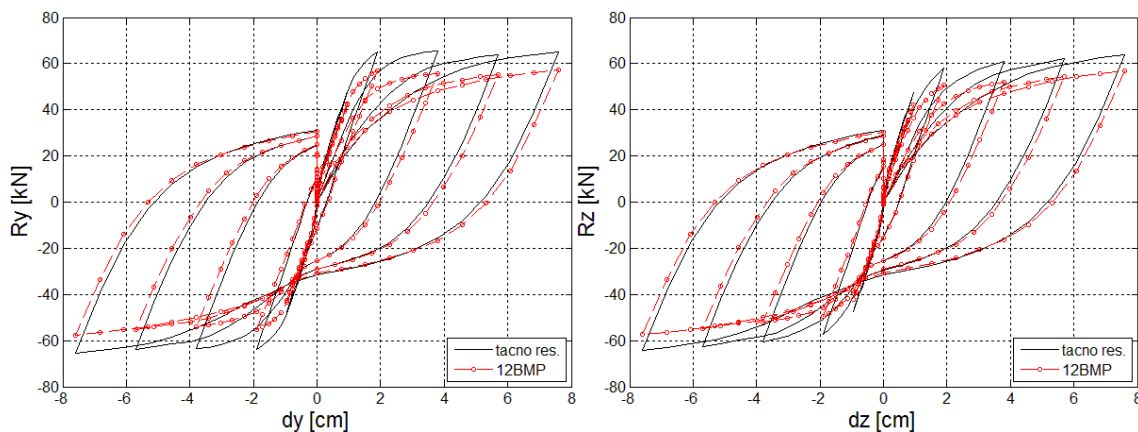
Slika C.76: Test LM5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BSI



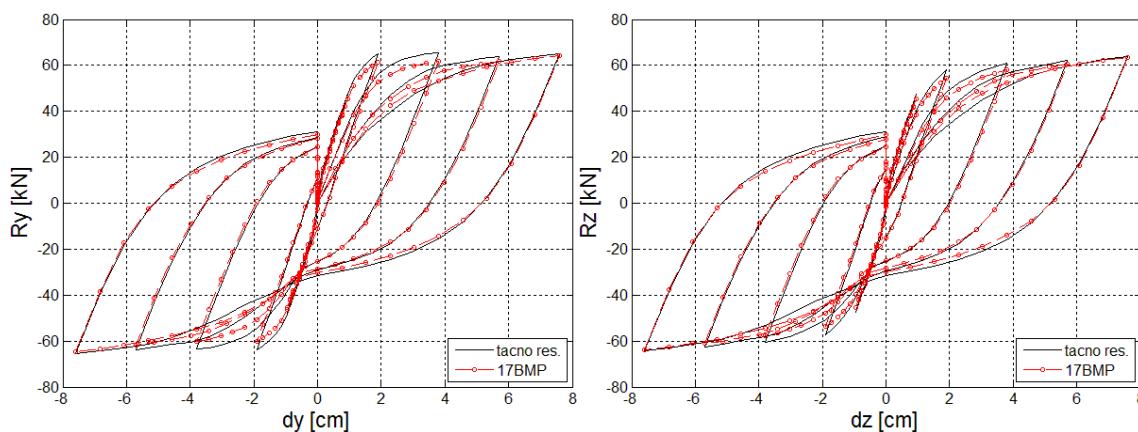
Slika C.77: Test LM5: Promena dilatacije najudaljenijeg vlakna: (a) jezgra betona i (b) armature za šeme 17BMP i 96BMP



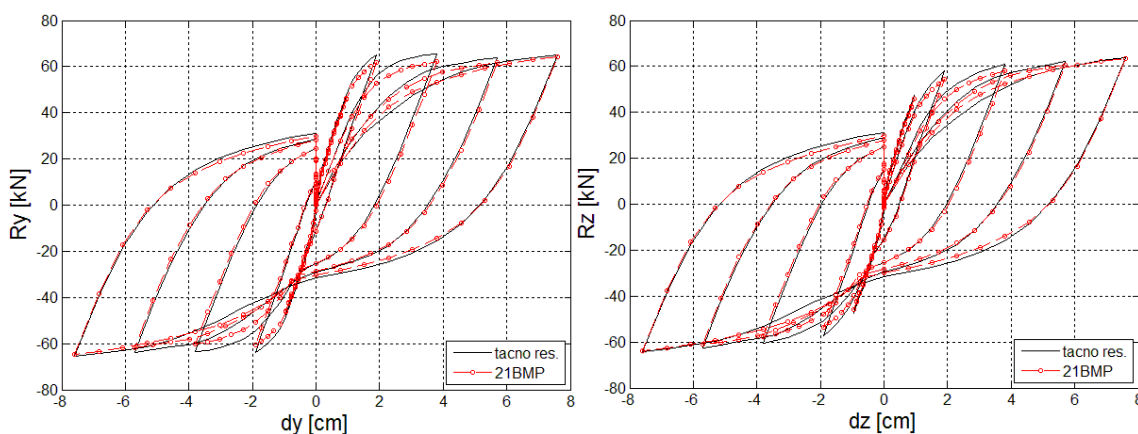
Slika C.78: Test S1: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 9BMP



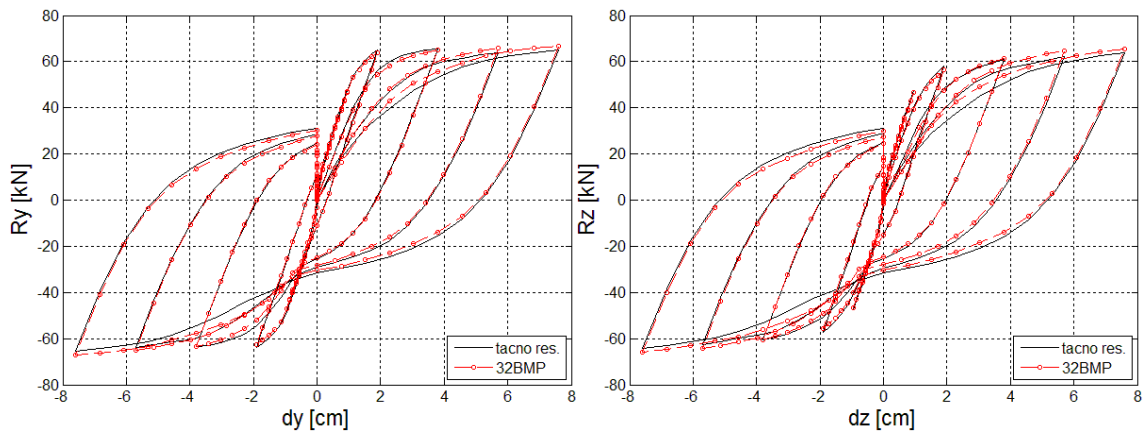
Slika C.79: Test S1: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 12BMP



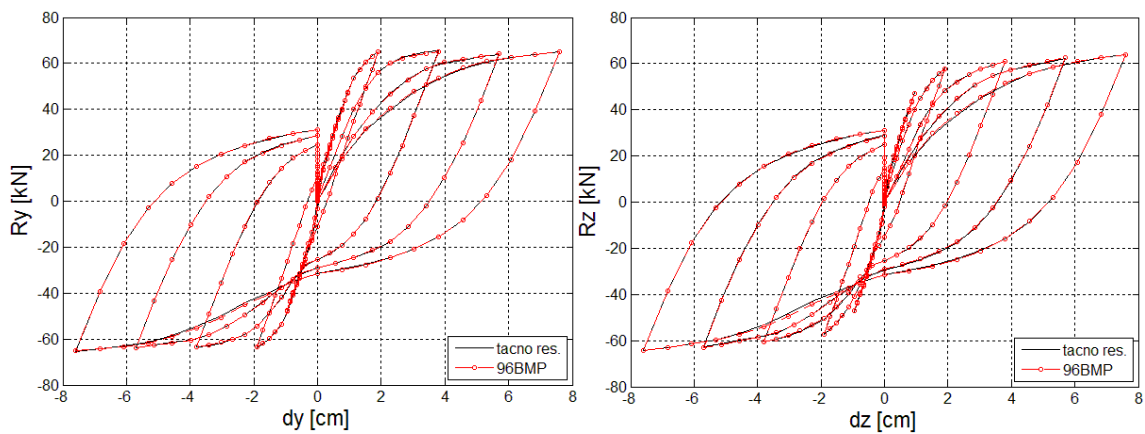
Slika C.80: Test S1: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BMP



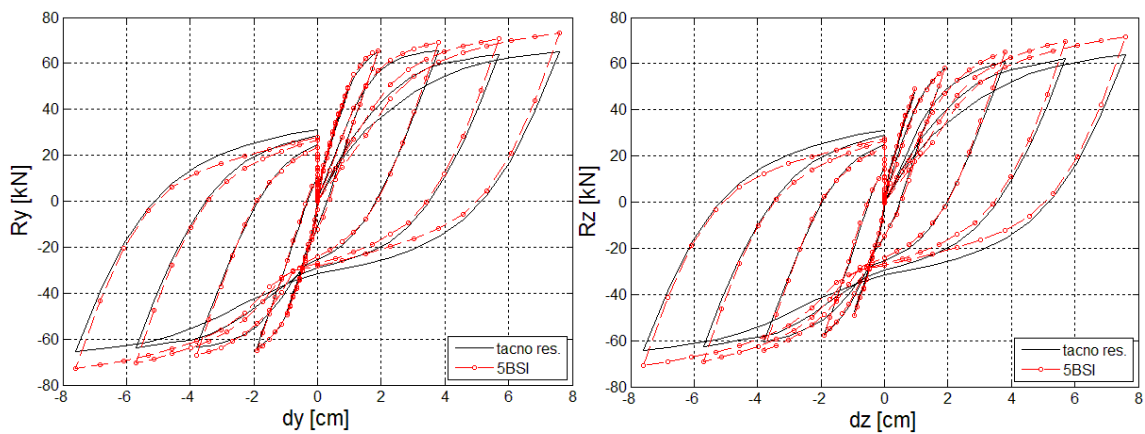
Slika C.81: Test S1: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 21BMP



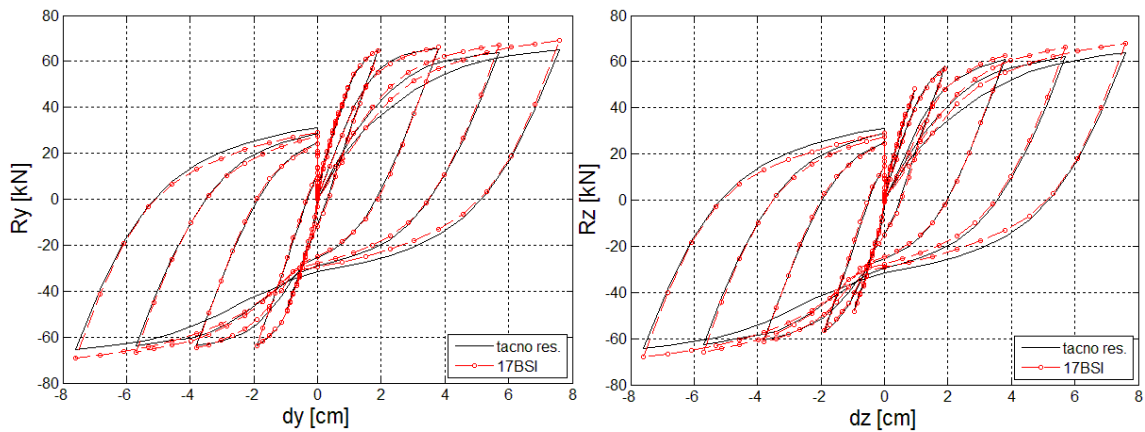
Slika C.82: Test S1: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 32BMP



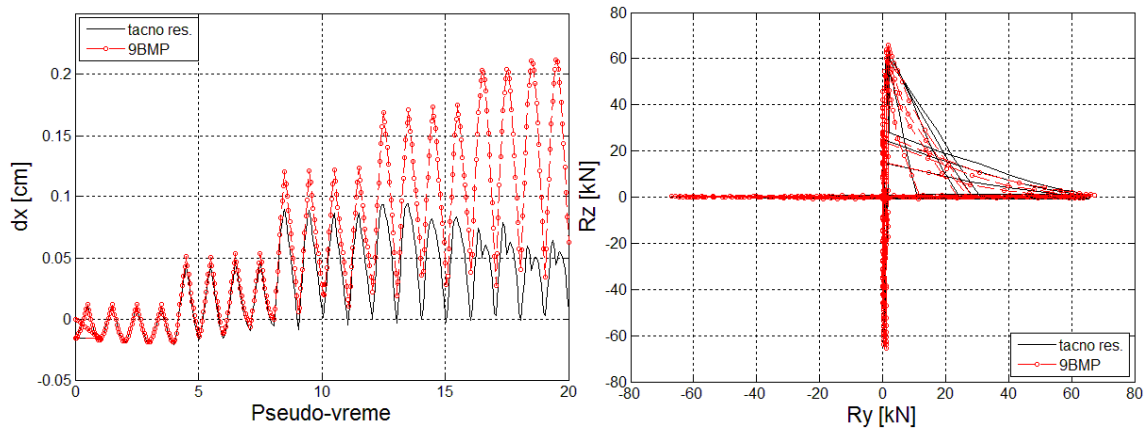
Slika C.83: Test S1: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 96BMP



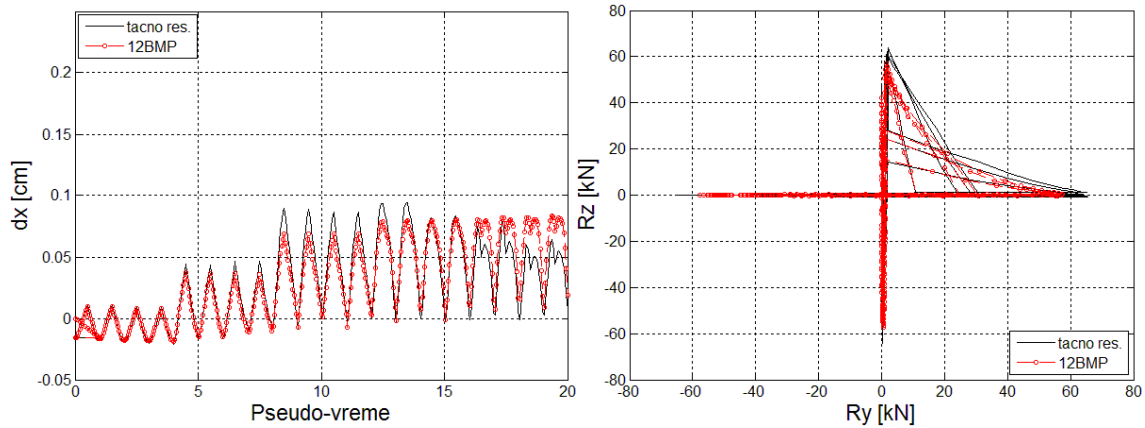
Slika C.84: Test S1: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 5BSI



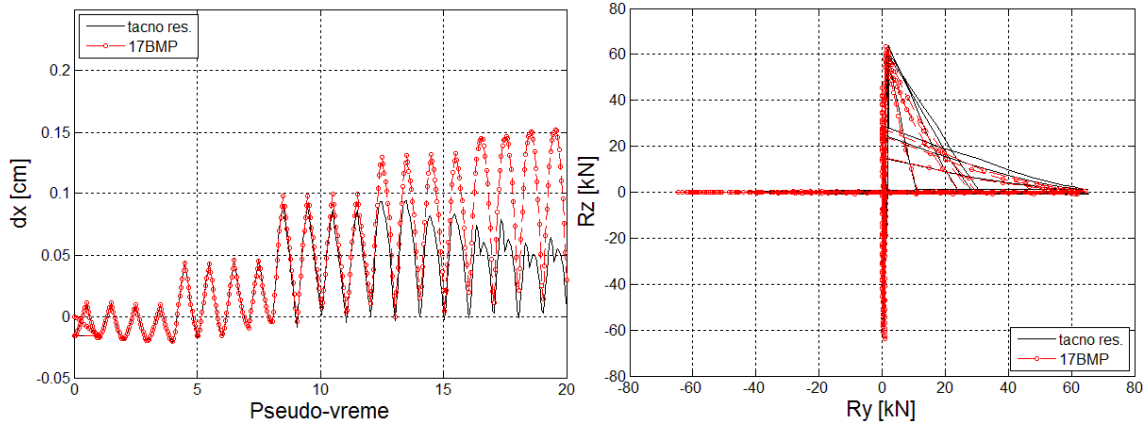
Slika C.85: Test S1: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BSI



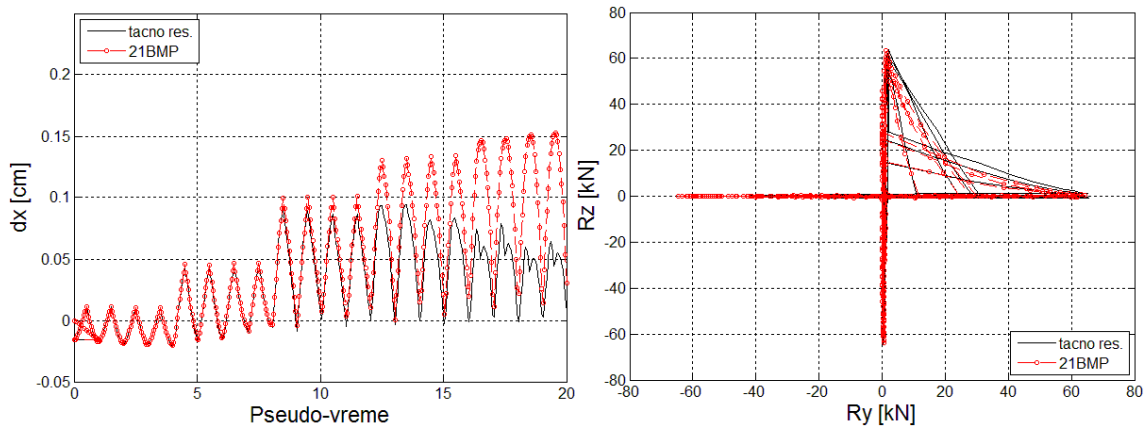
Slika C.86: Test S1: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 9BMP



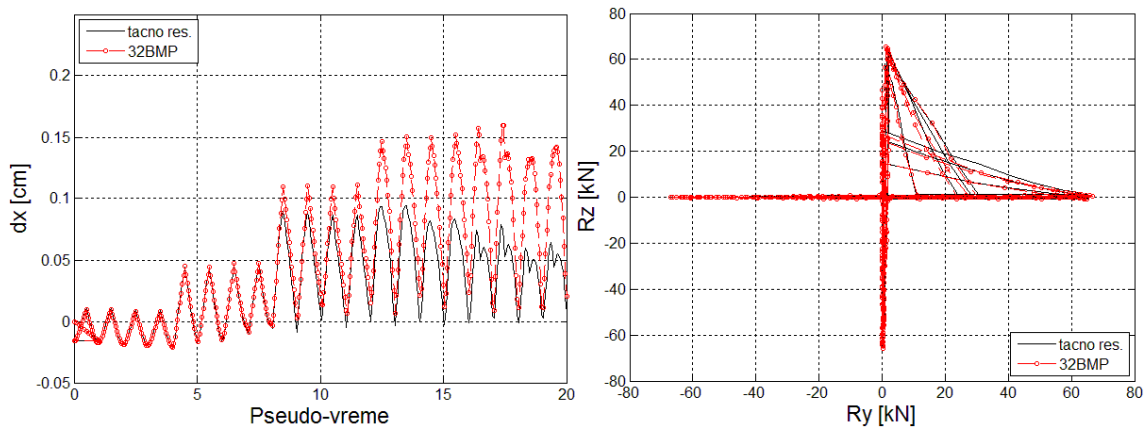
Slika C.87: Test S1: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 12BMP



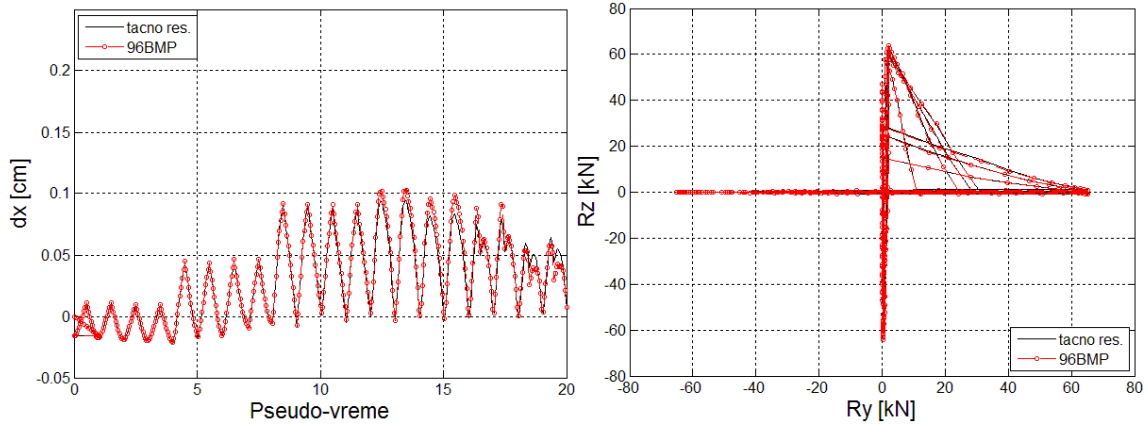
Slika C.88: Test S1: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BMP



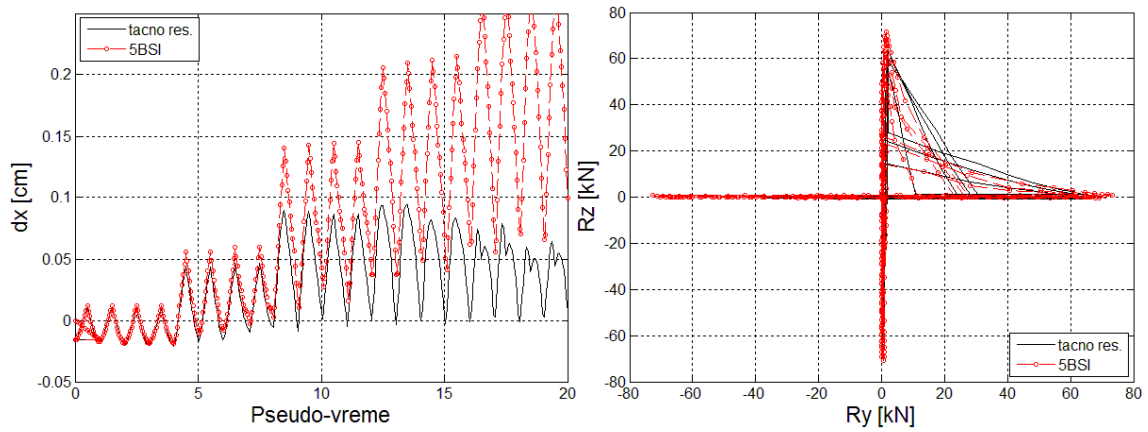
Slika C.89: Test S1: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 21BMP



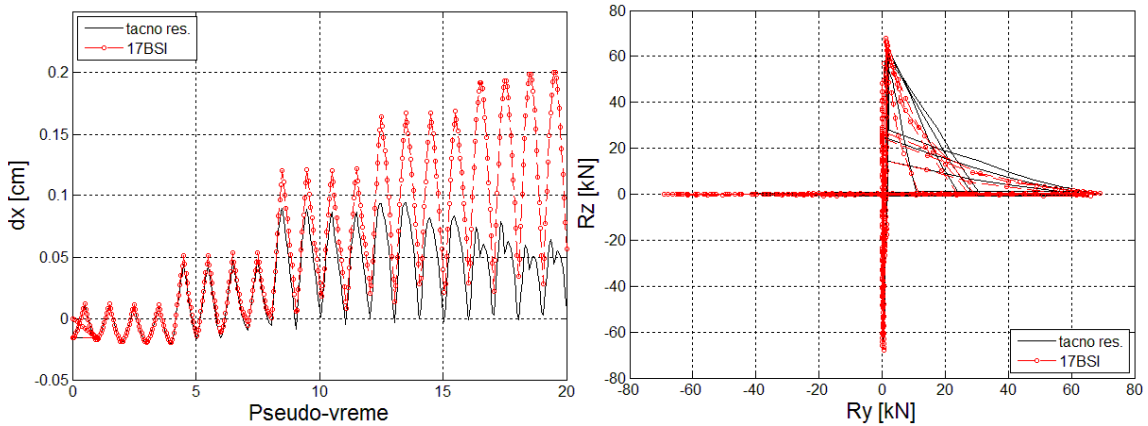
Slika C.90: Test S1: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 32BMP



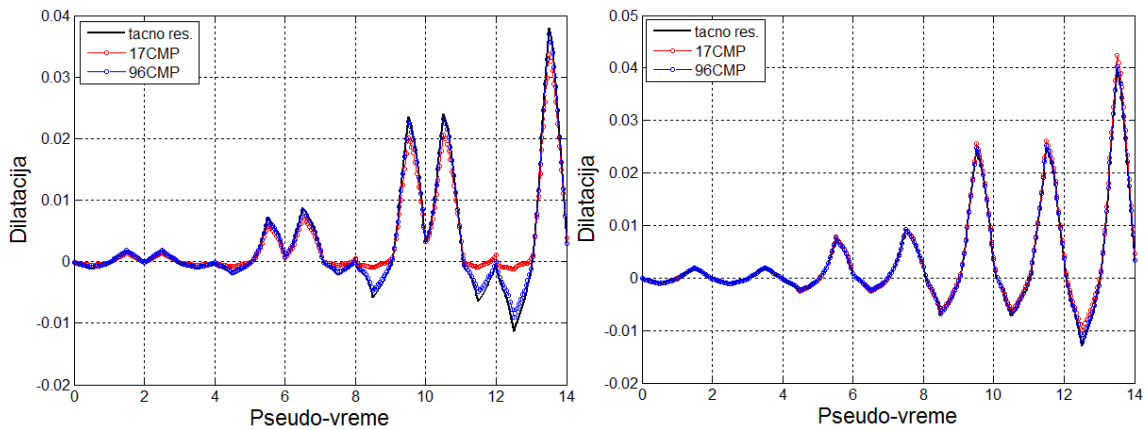
Slika C.91: Test S1: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 96BMP



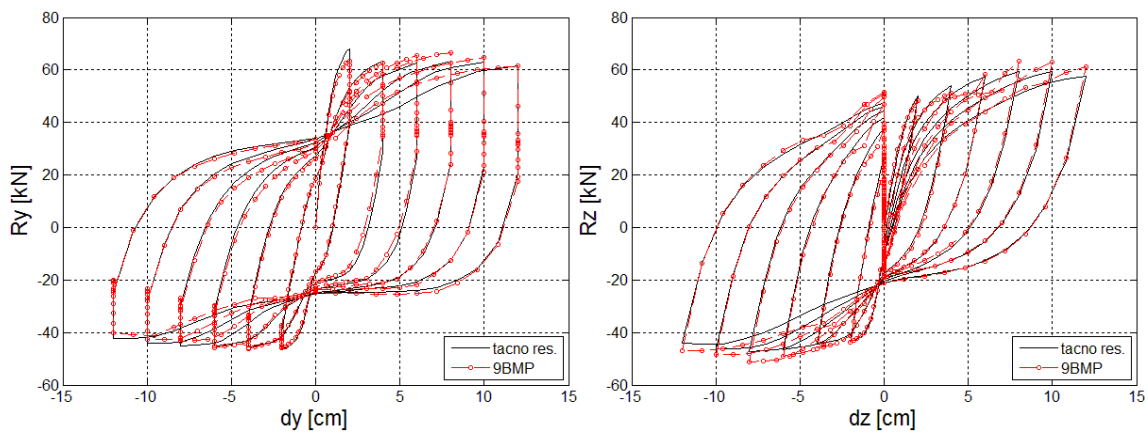
Slika C.92: Test S1: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 5BSI



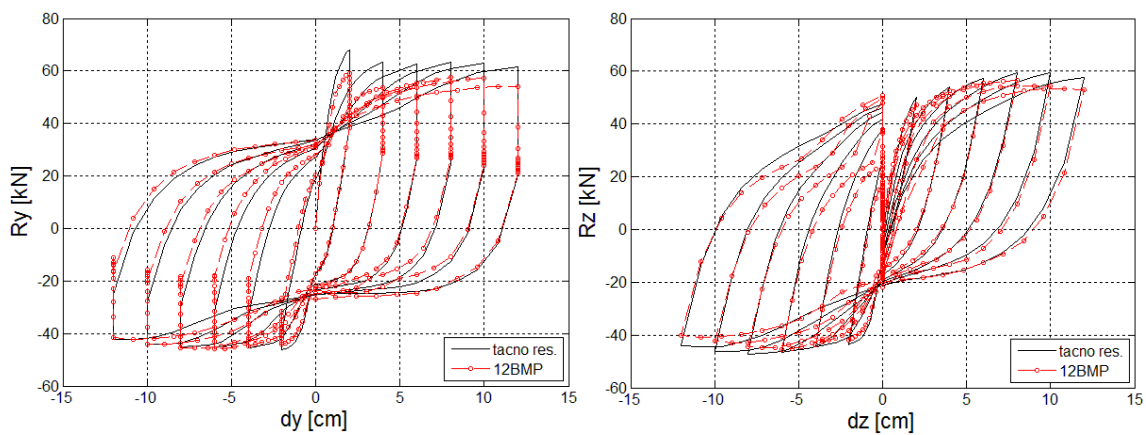
Slika C.93: Test S1: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BSI



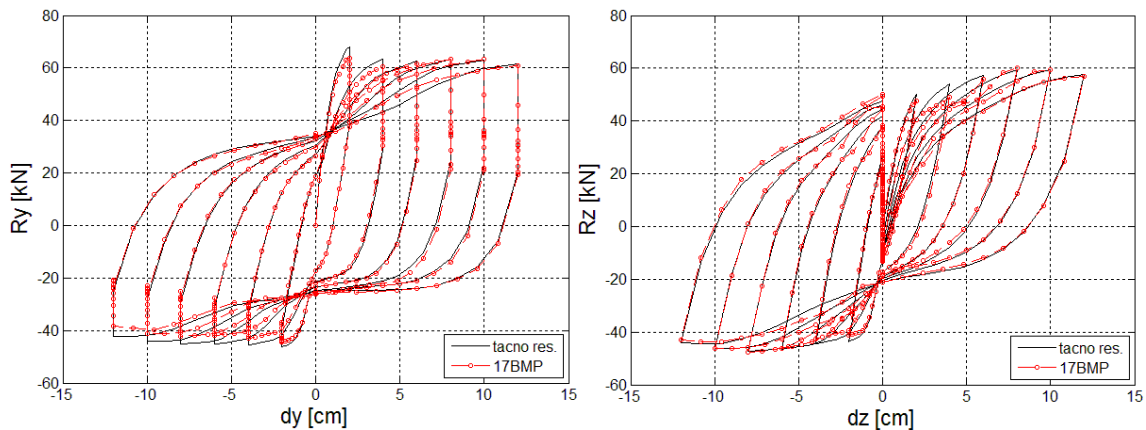
Slika C.94: Test S1: Promena dilatacije najudaljenijeg vlakna: (a) jezgra betona i (b) armature za šeme 17BMP i 96BMP



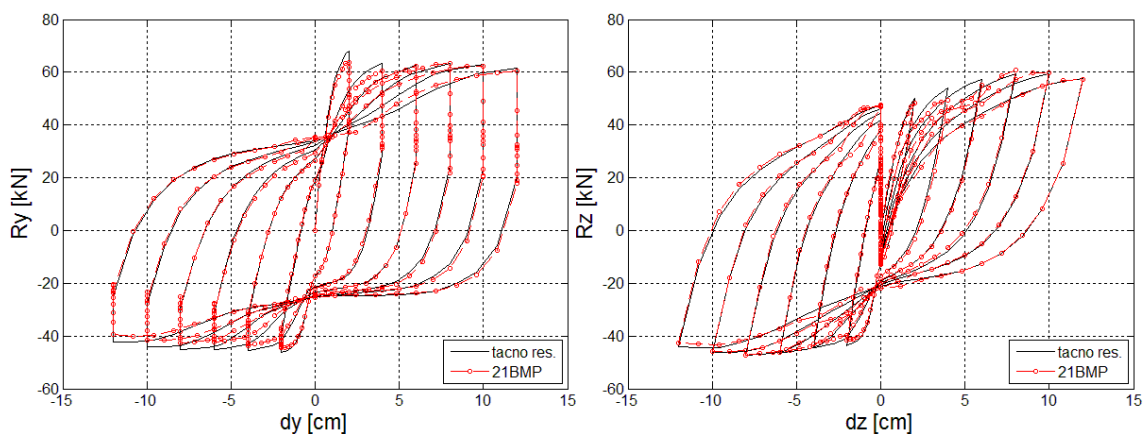
Slika C.95: Test S5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 9BMP



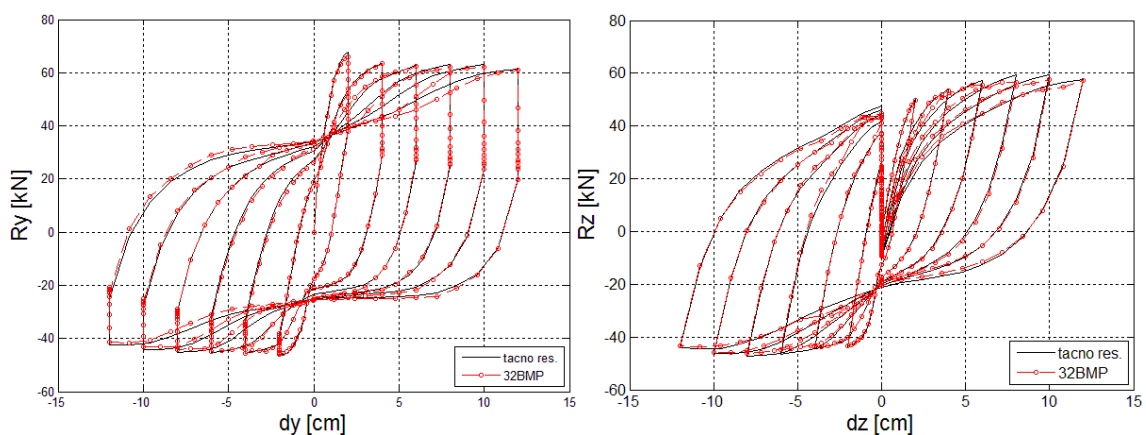
Slika C.96: Test S5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 12BMP



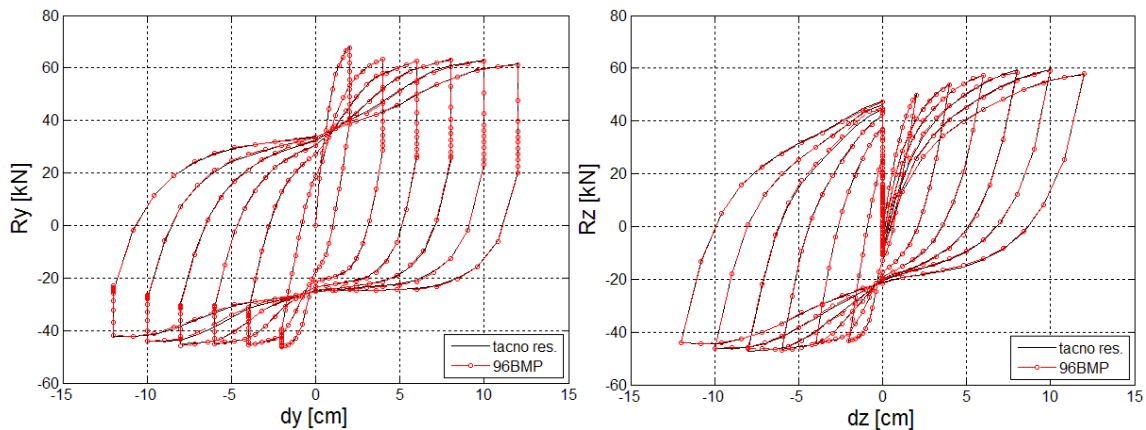
Slika C.97: Test S5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BMP



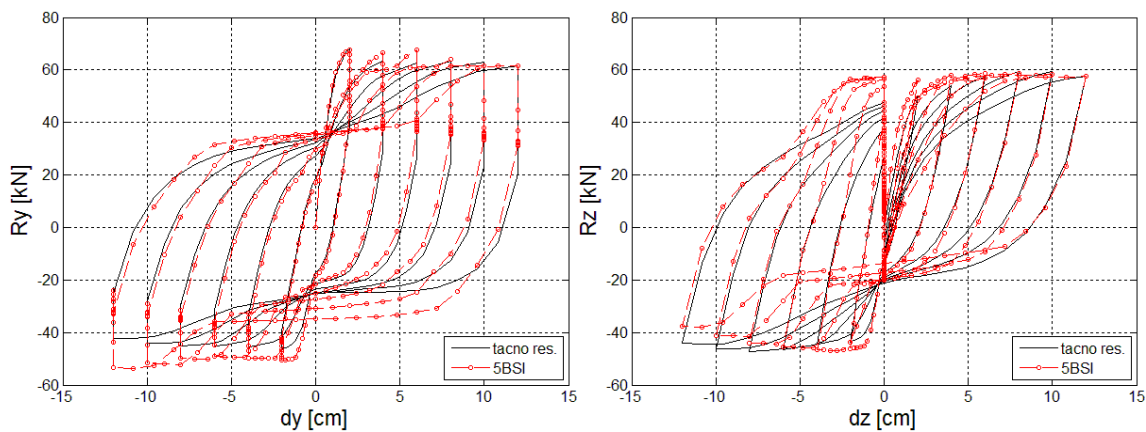
Slika C.98: Test S5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 21BMP



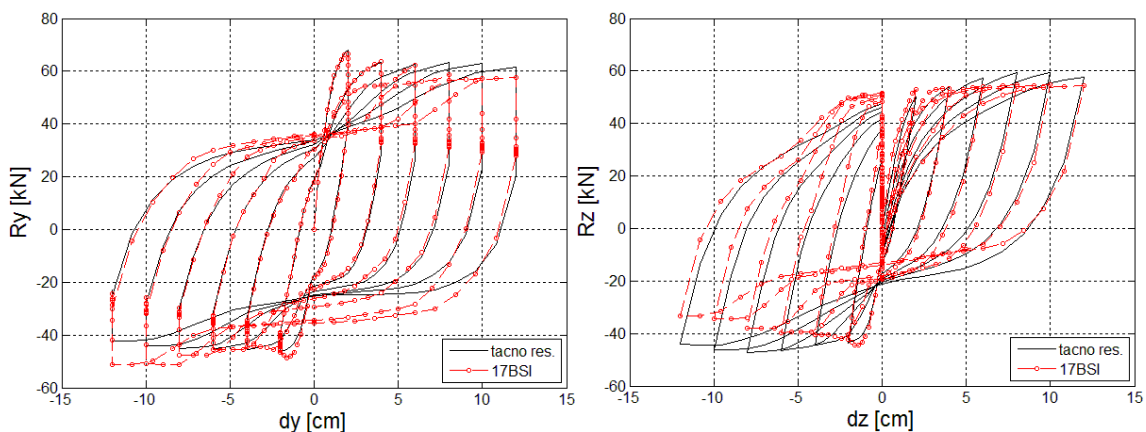
Slika C.99: Test S5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 32BMP



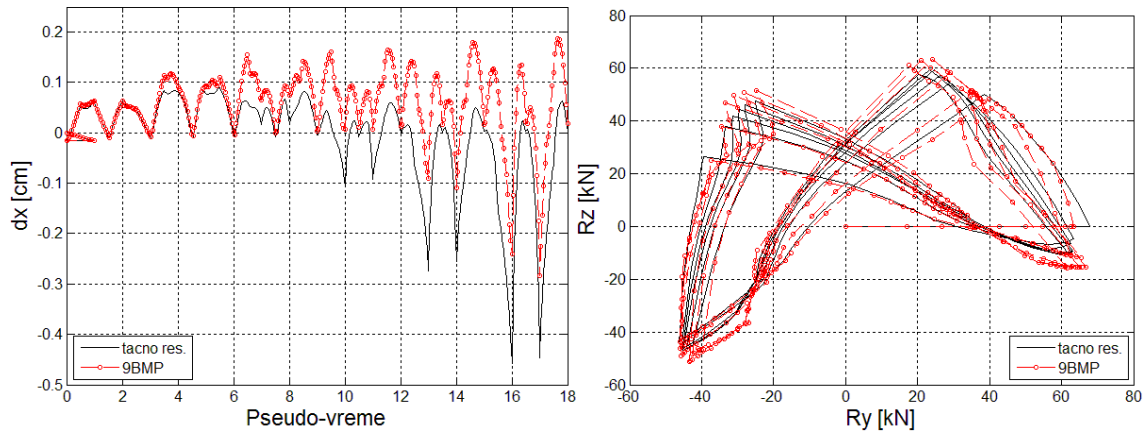
Slika C.100: Test S5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 96BMP



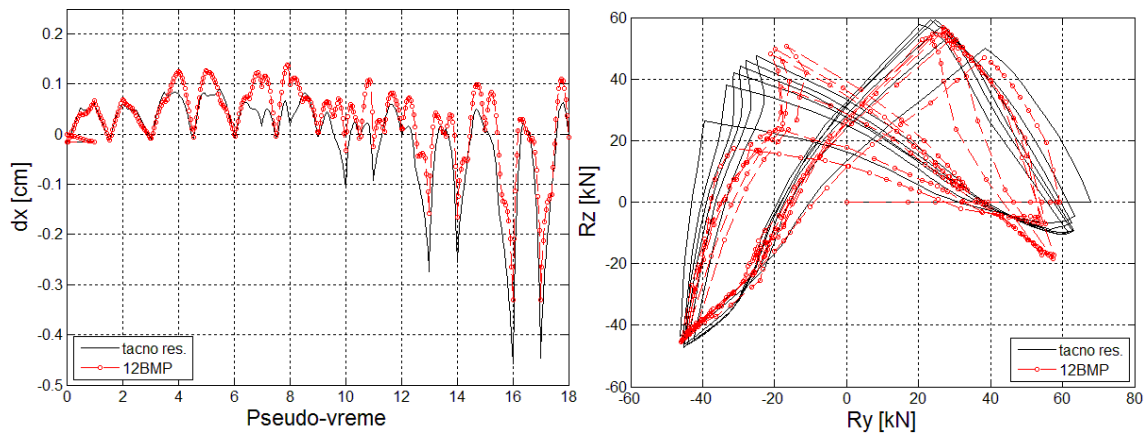
Slika C.101: Test S5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 5BSI



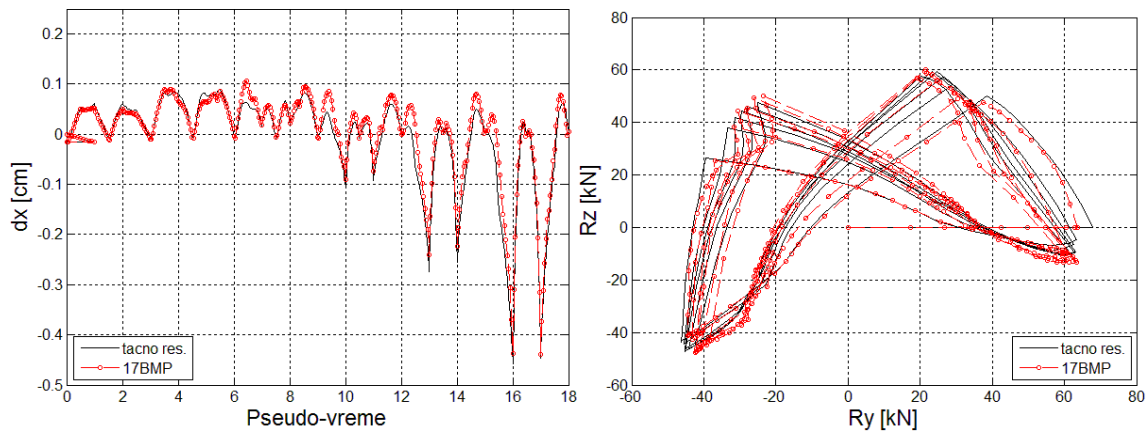
Slika C.102: Test S5: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BSI



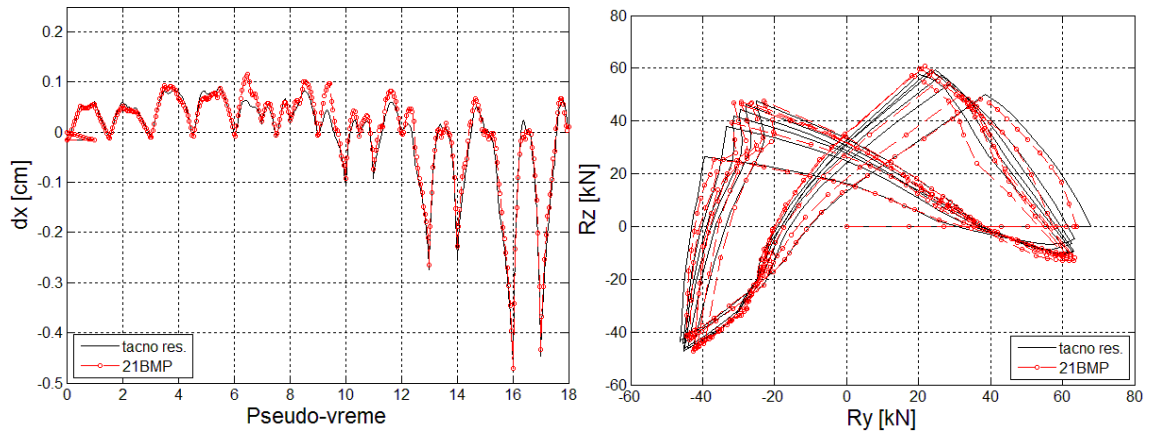
Slika C.103: Test S5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 9BMP



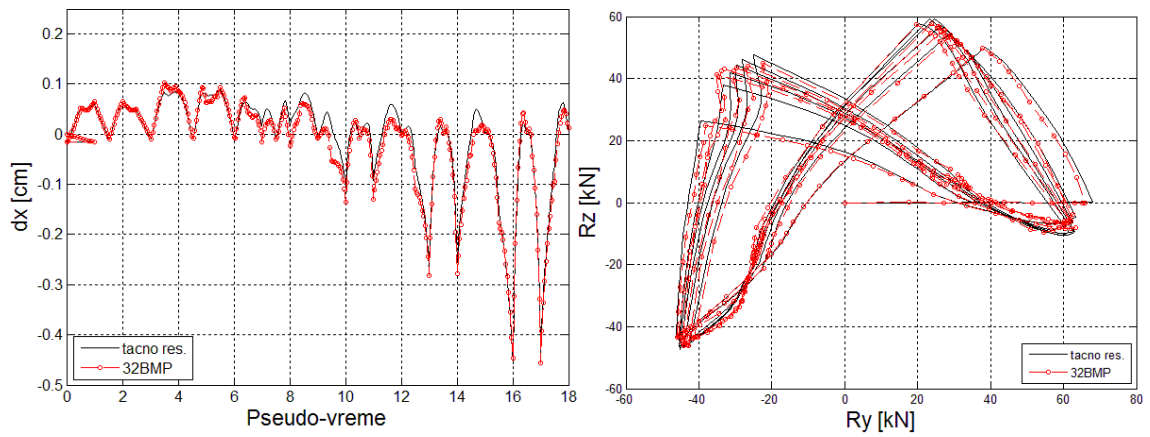
Slika C.104: Test S5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 12BMP



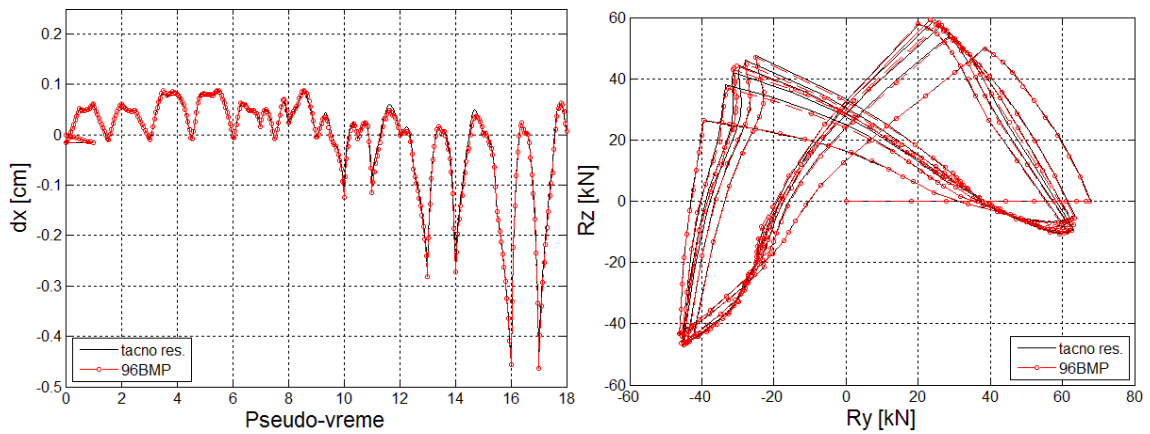
Slika C.105: Test S5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BMP



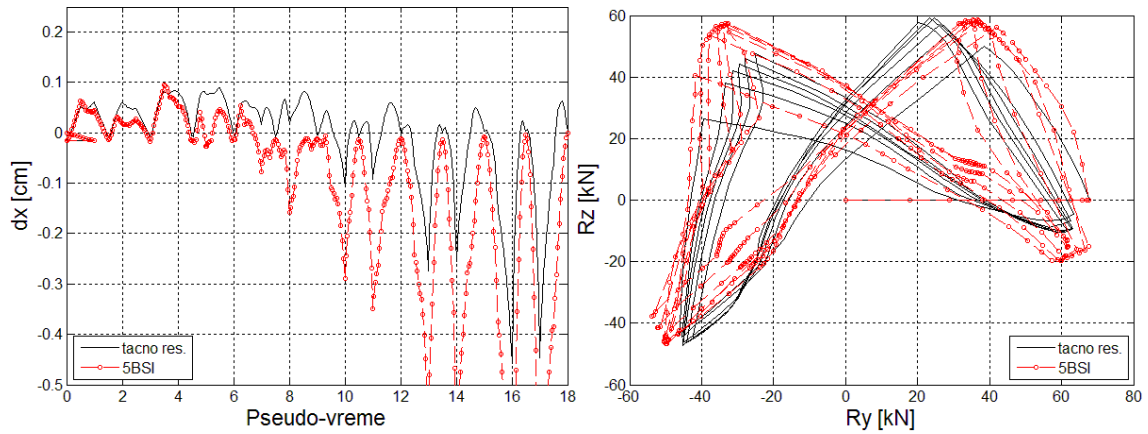
Slika C.106: Test S5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 21BMP



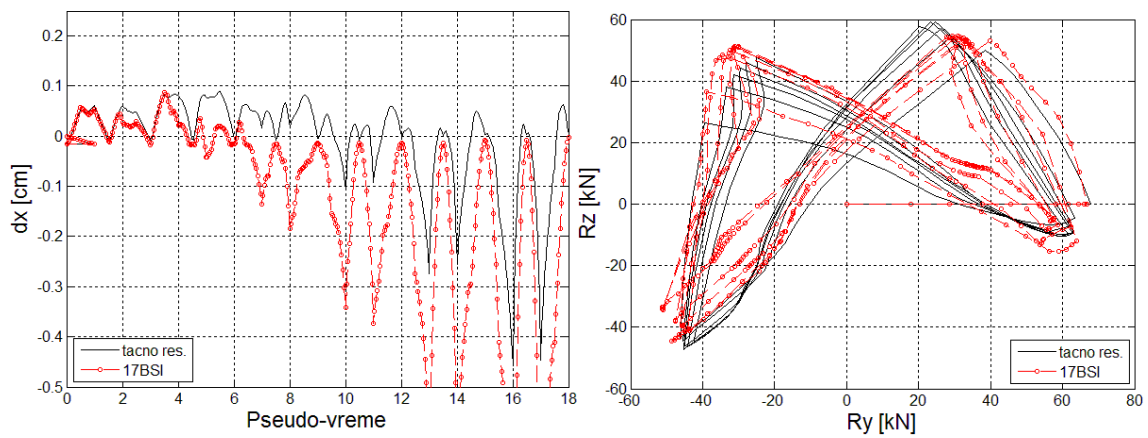
Slika C.107: Test S5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 32BMP



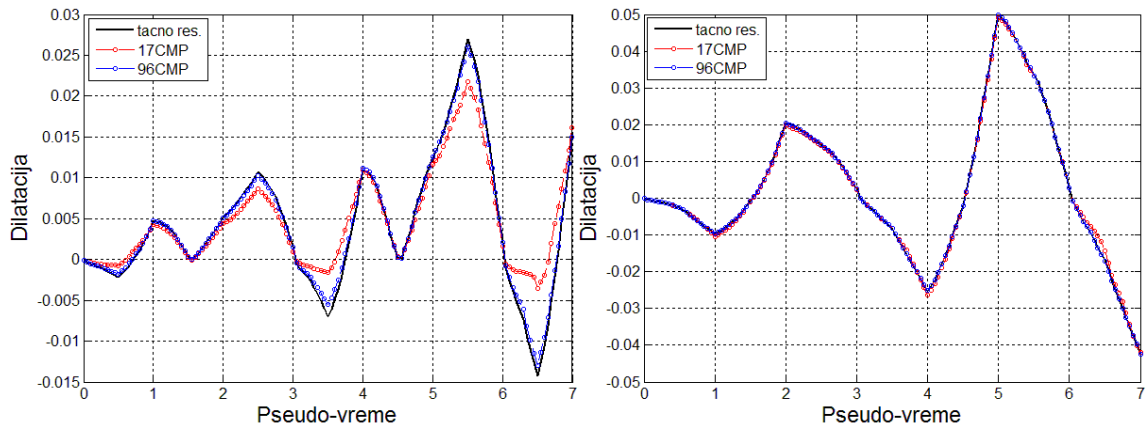
Slika C.108: Test S5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 96BMP



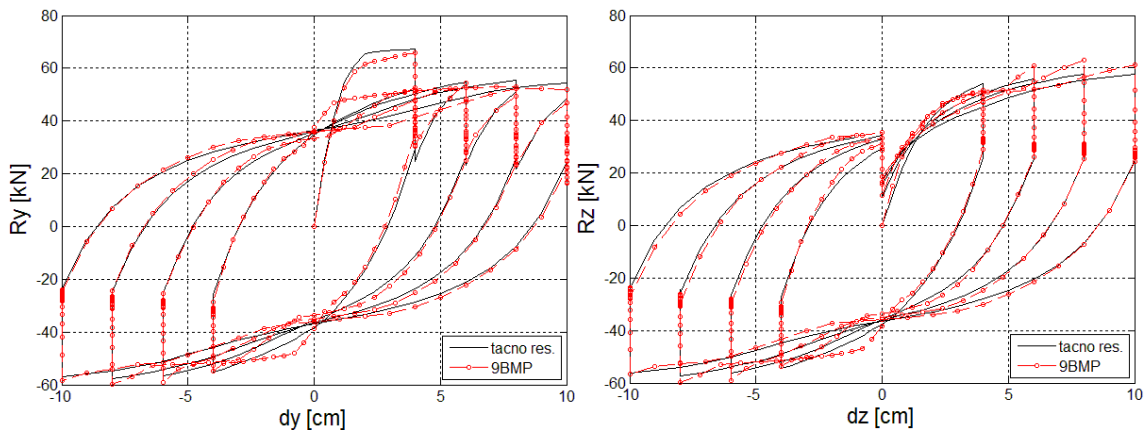
Slika C.109: Test S5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 5BSI



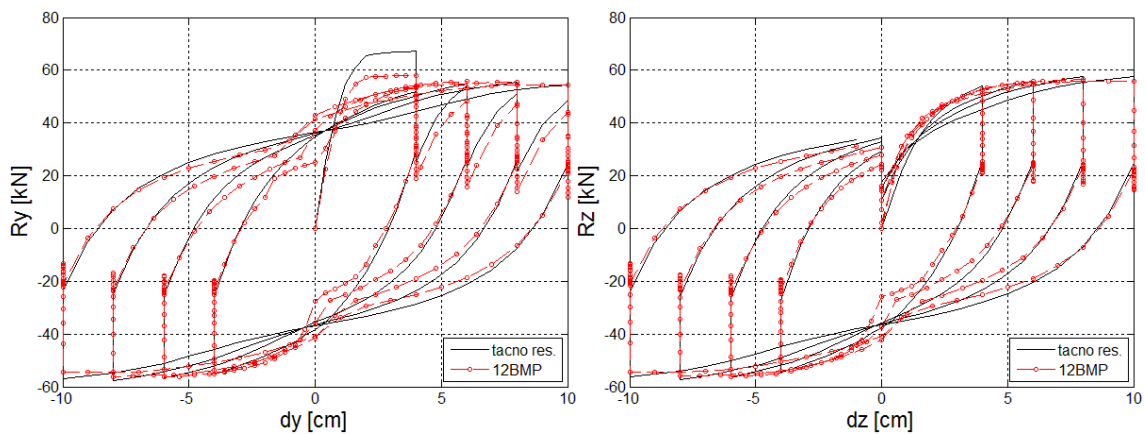
Slika C.110: Test S5: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BSI



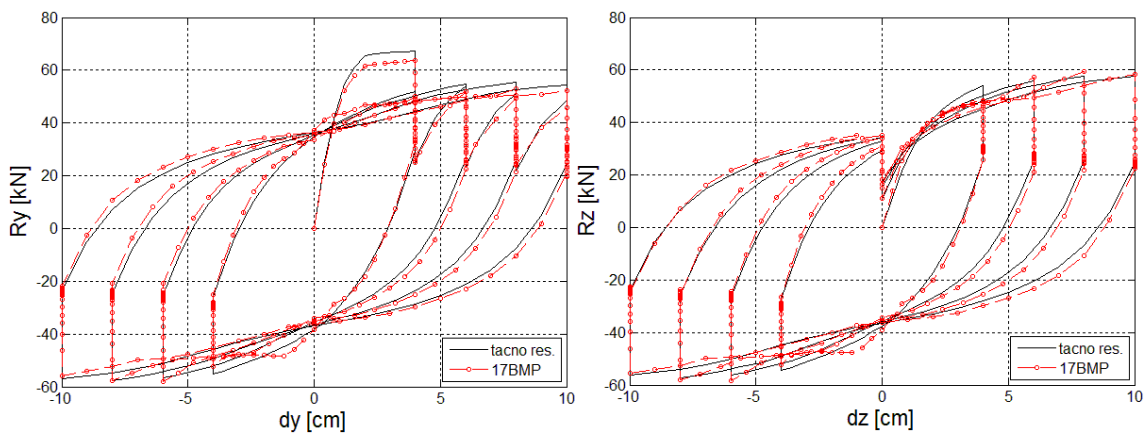
Slika C.111: Test S5: Promena dilatacije najudaljenijeg vlakna: (a) jezgra betona i (b) armature za šeme 17BMP i 96BMP



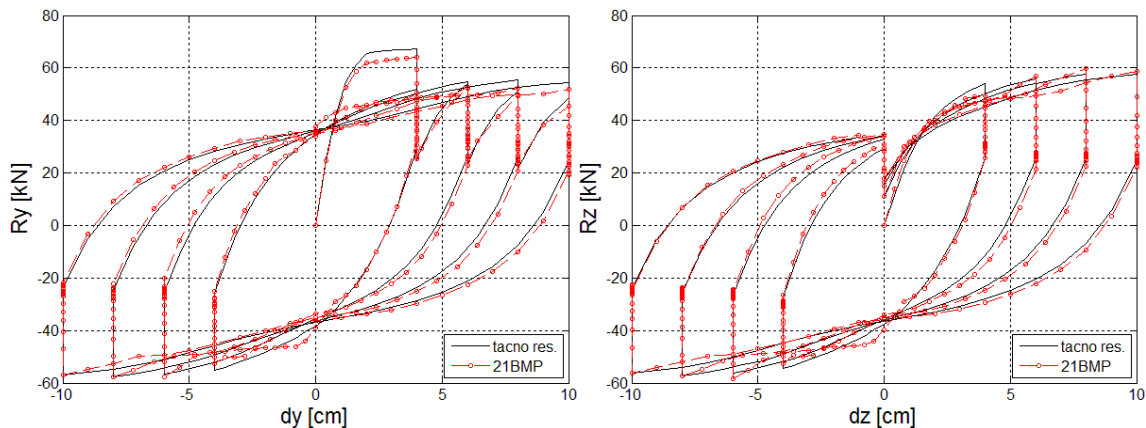
Slika C.112: Test S7: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 9BMP



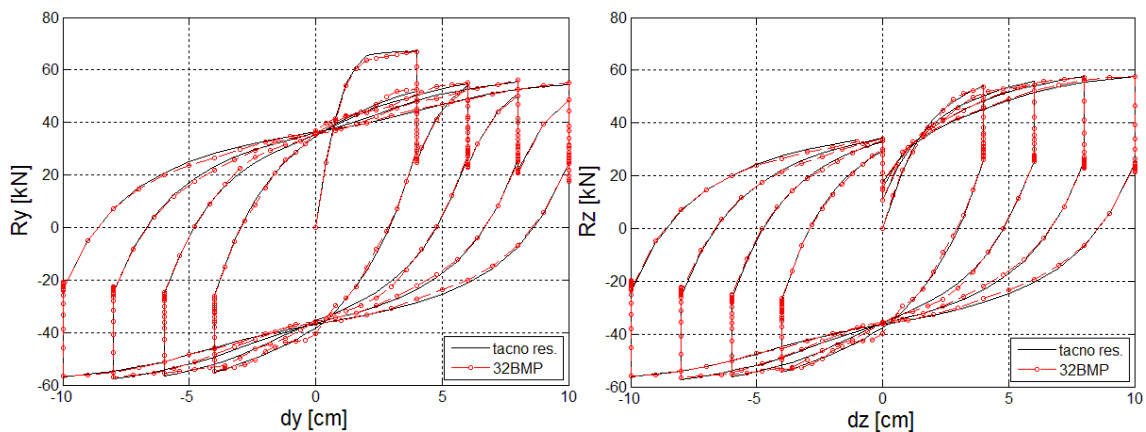
Slika C.113: Test S7: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 12BMP



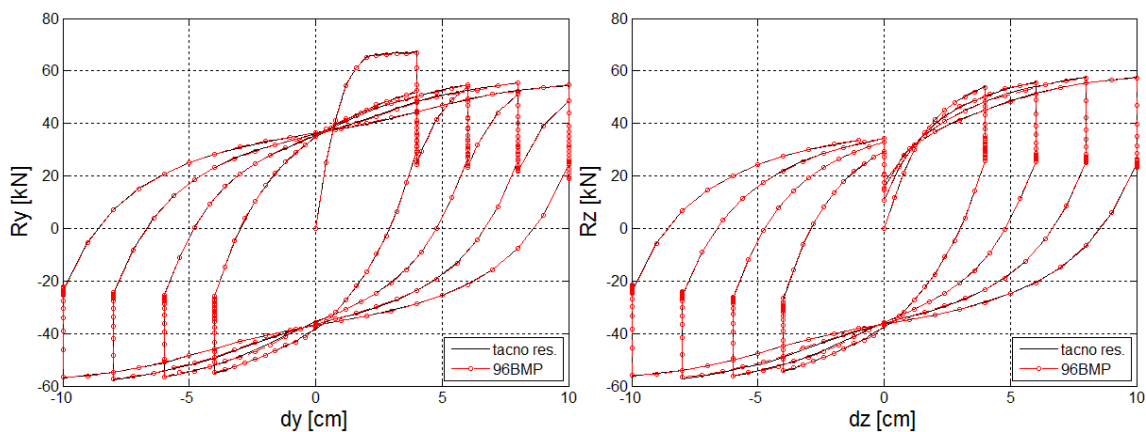
Slika C.114: Test S7: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BMP



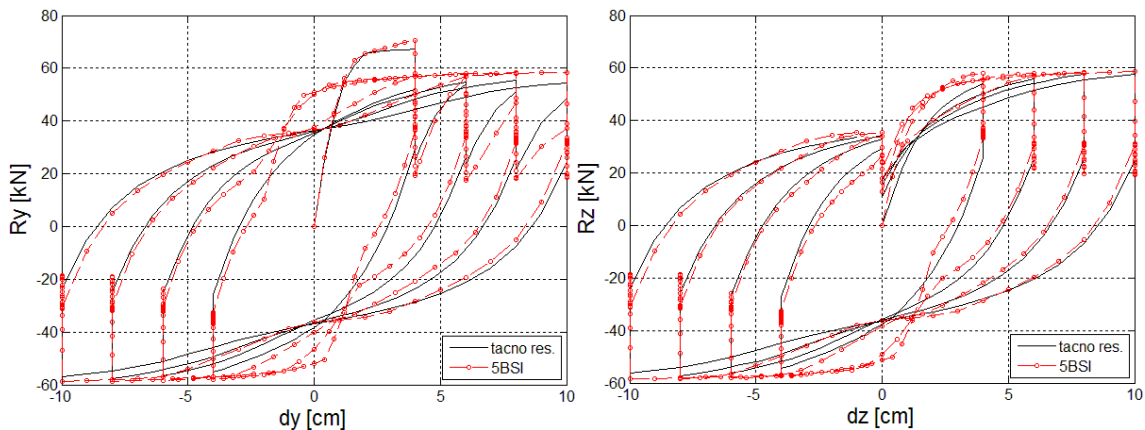
Slika C.115: Test S7: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 21BMP



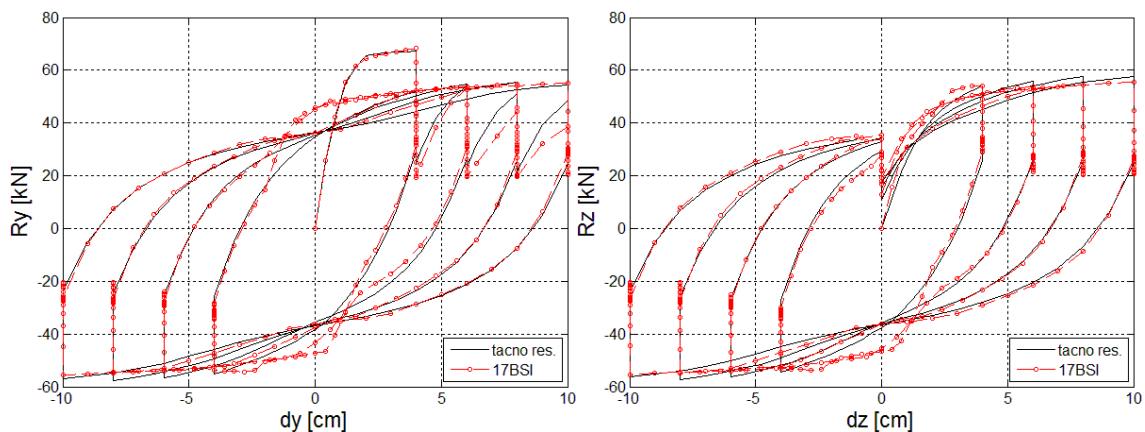
Slika C.116: Test S7: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 32BMP



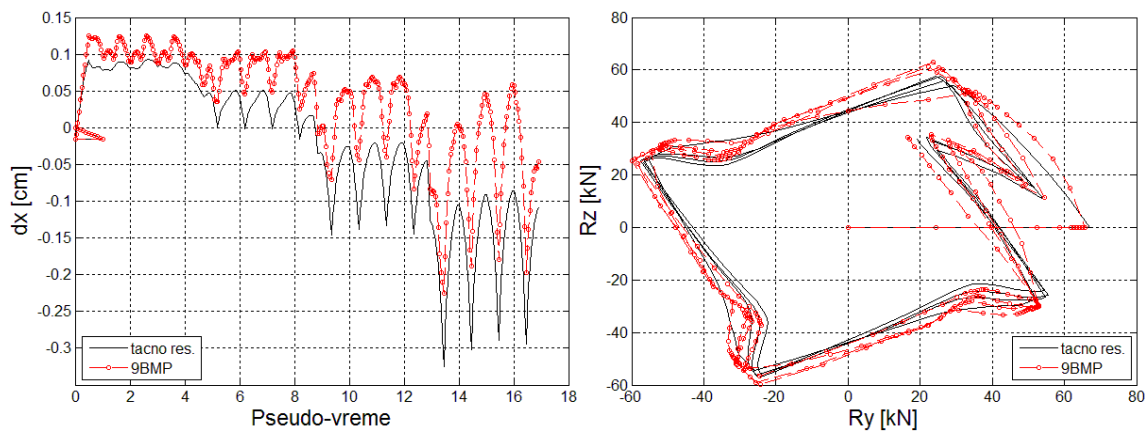
Slika C.117: Test S7: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 96BMP



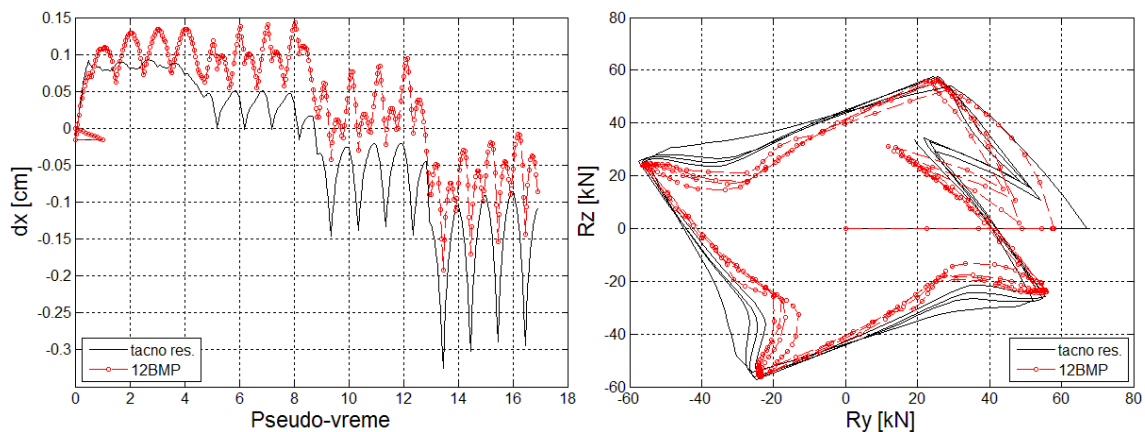
Slika C.118: Test S7: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 5BSI



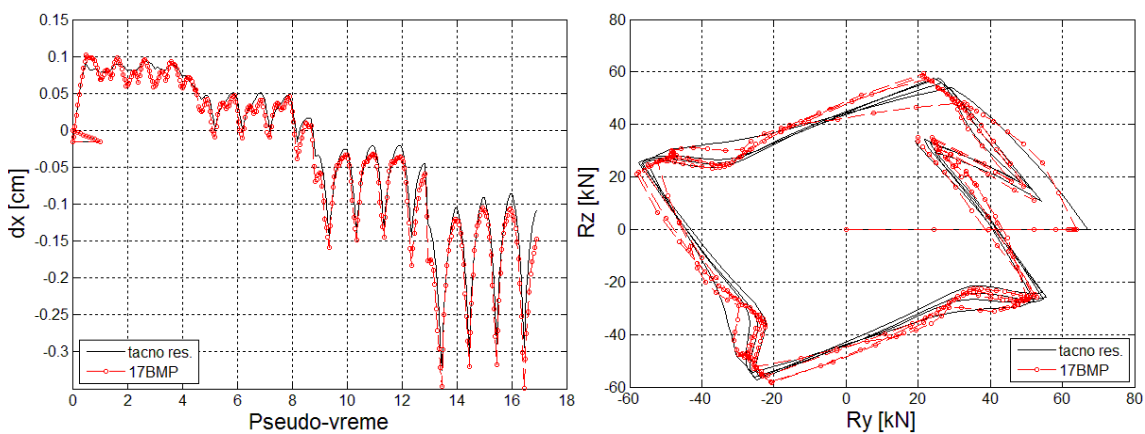
Slika C.119: Test S7: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BSI



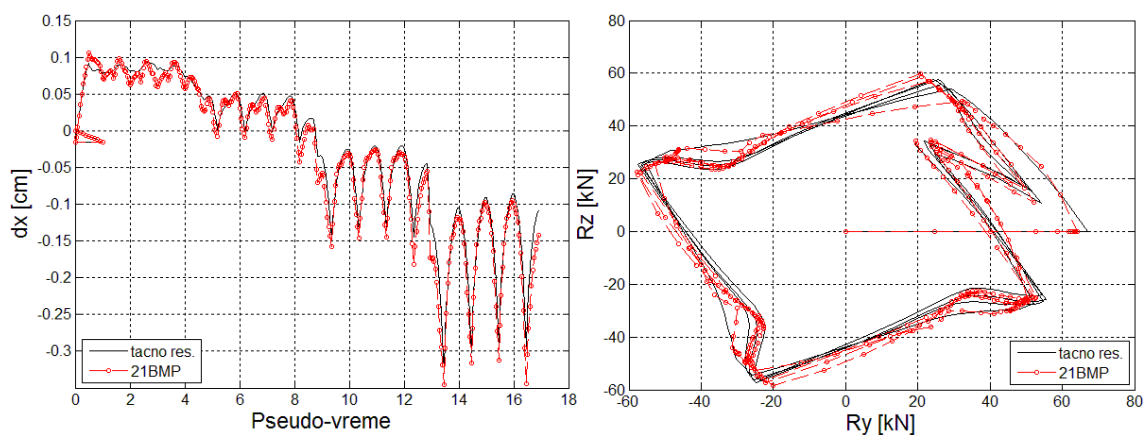
Slika C.120: Test S7: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 9BMP



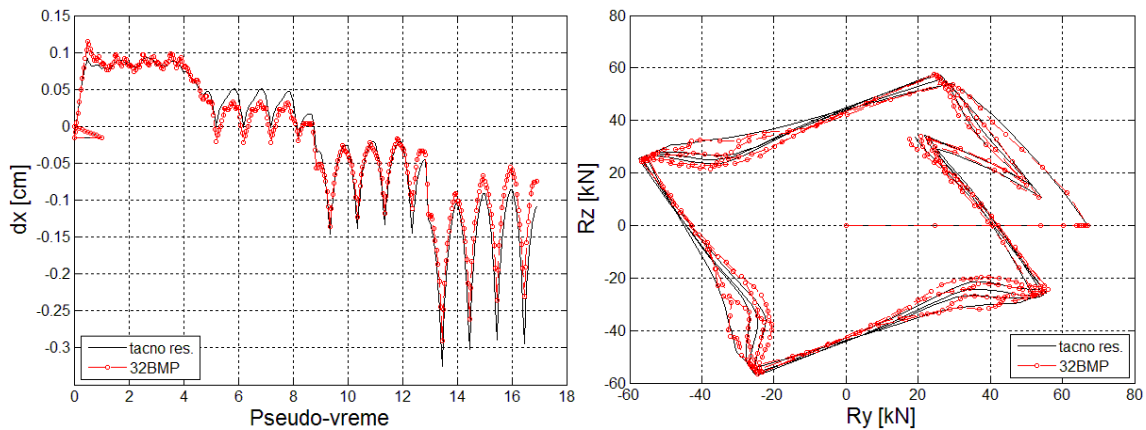
Slika C.121: Test S7: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 12BMP



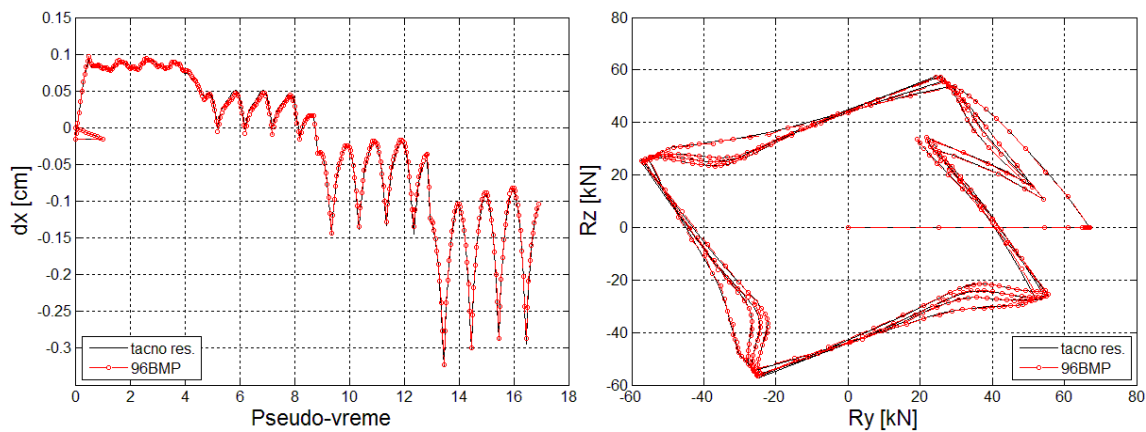
Slika C.122: Test S7: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BMP



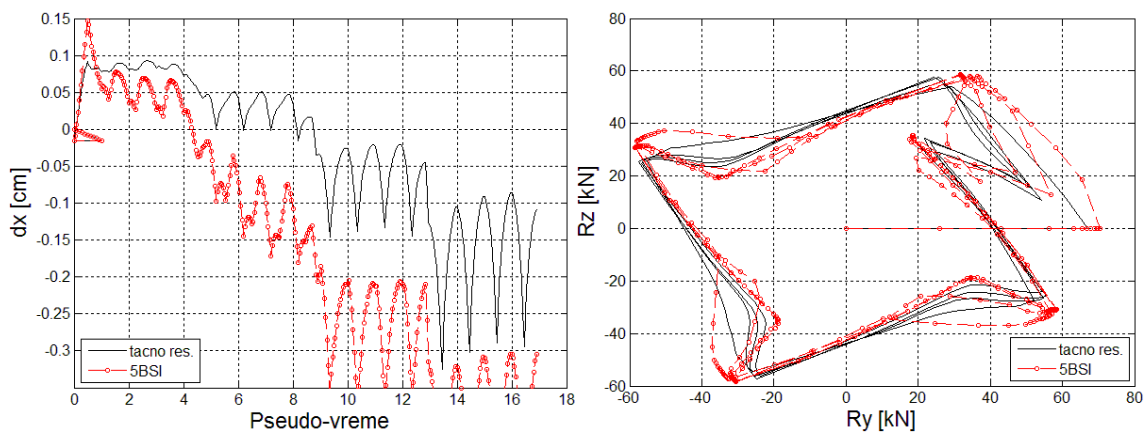
Slika C.123: Test S7: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 21BMP



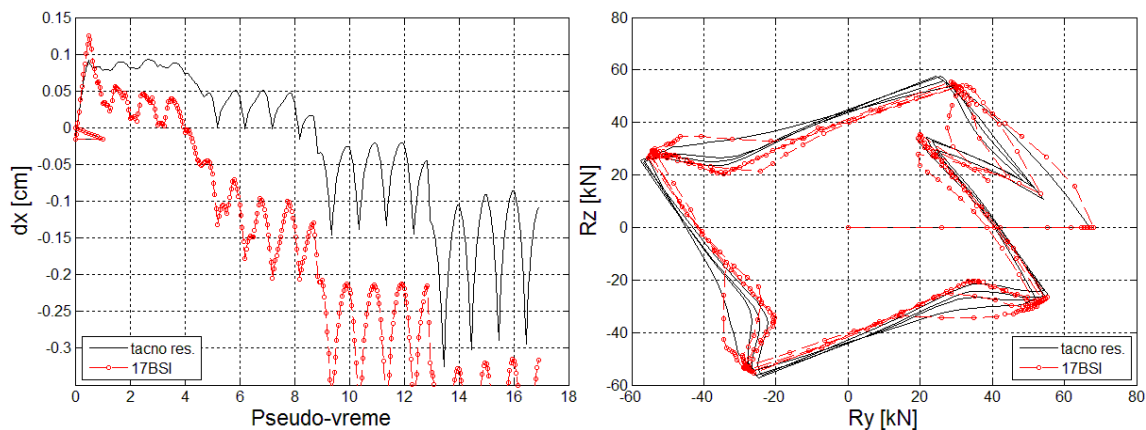
Slika C.124: Test S7: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 32BMP



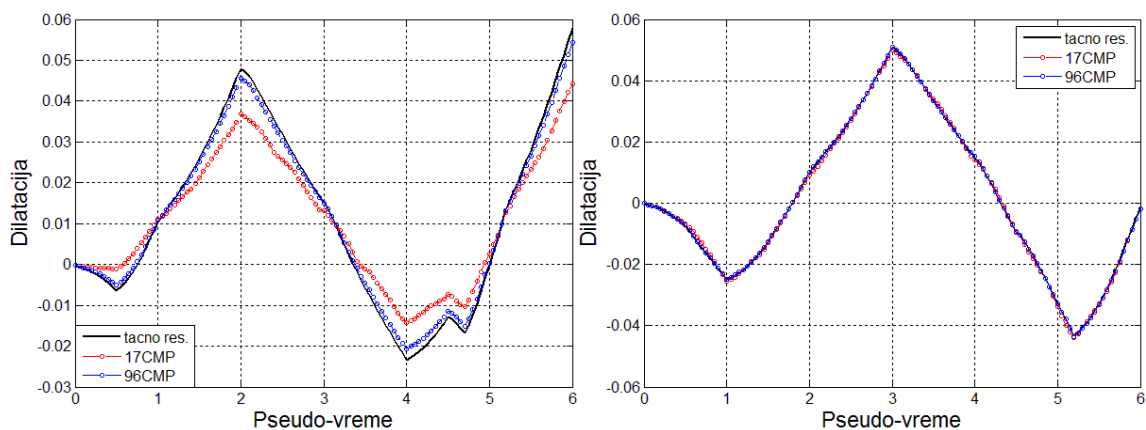
Slika C.125: Test S7: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 96BMP



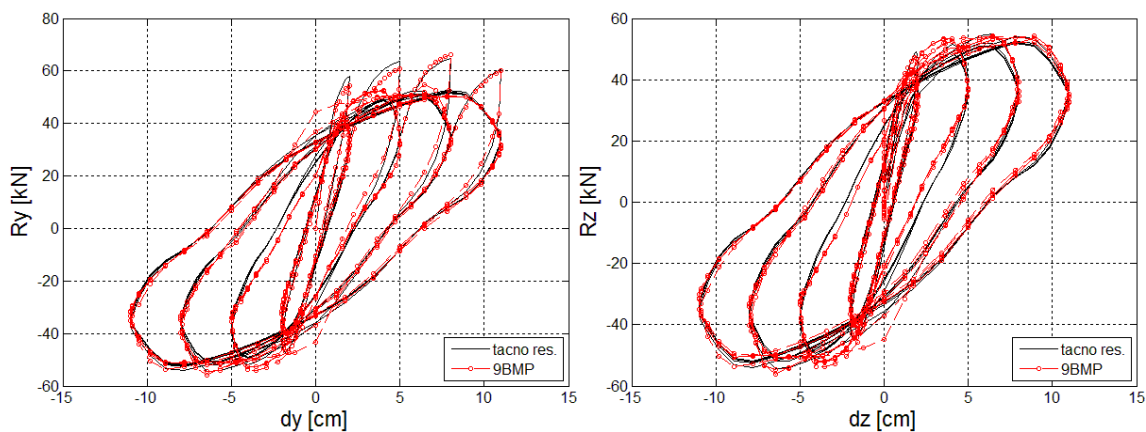
Slika C.126: Test S7: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 5BSI



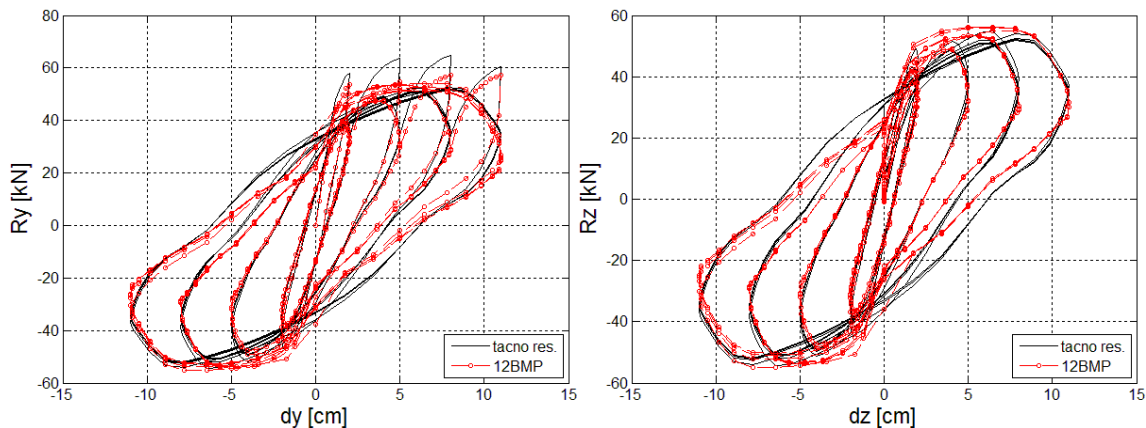
Slika C.127: Test S7: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BSI



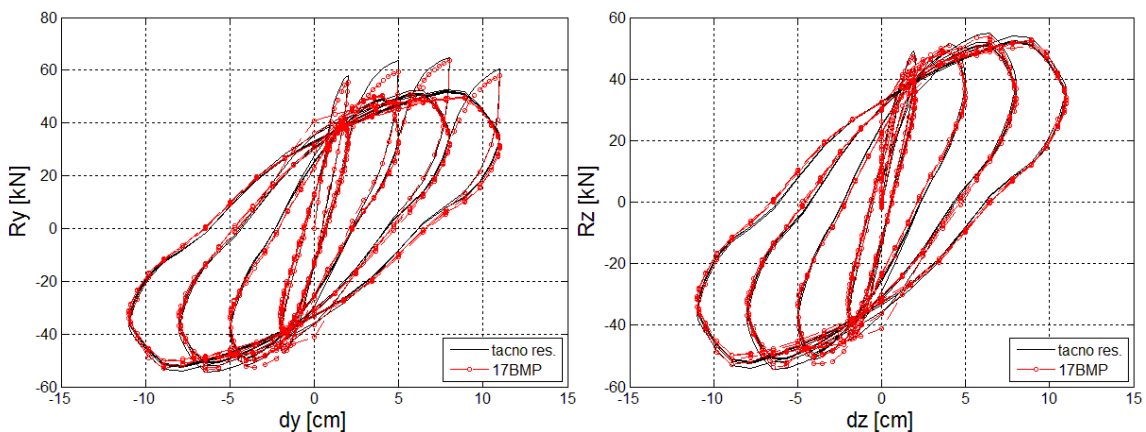
Slika C.128: Test S7: Promena dilatacije najudaljenijeg vlakna: (a) jezgra betona i (b) armature za šeme 17BMP i 96BMP



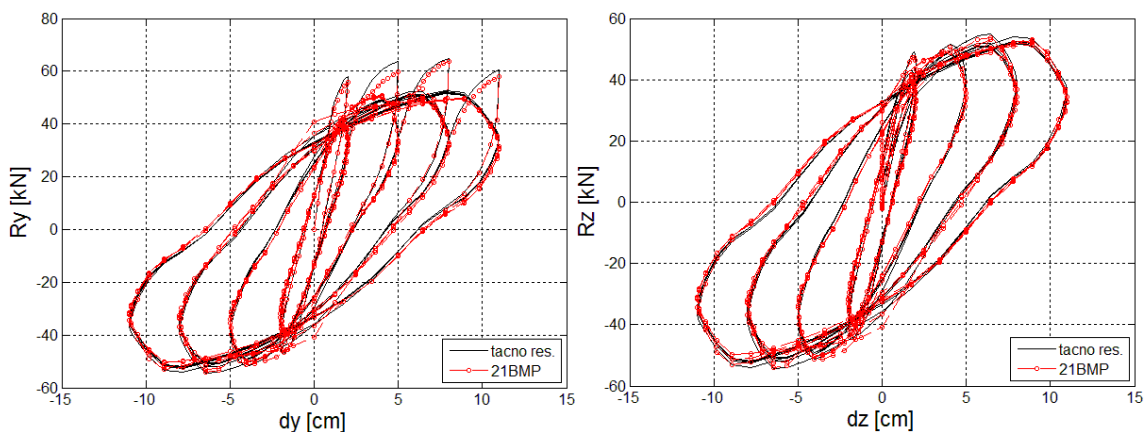
Slika C.129: Test S9: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 9BMP



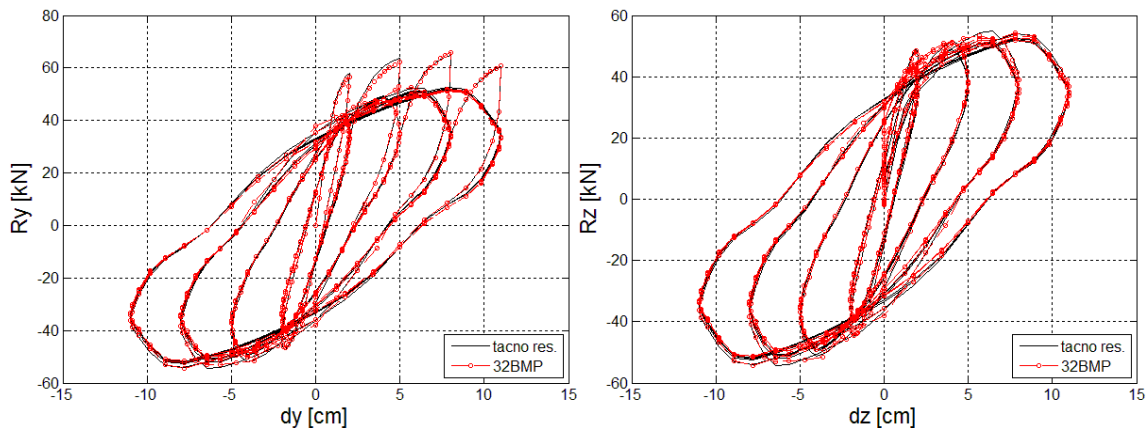
Slika C.130: Test S9: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 12BMP



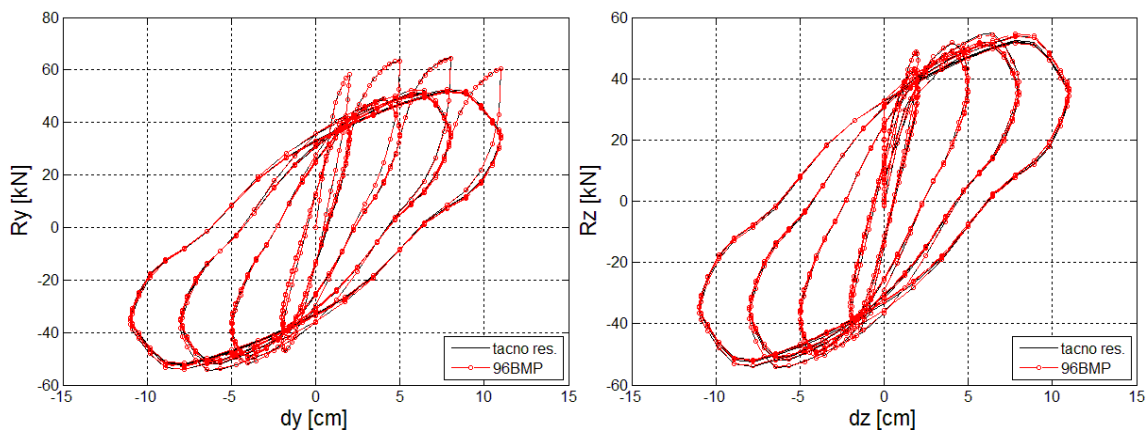
Slika C.131: Test S9: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BMP



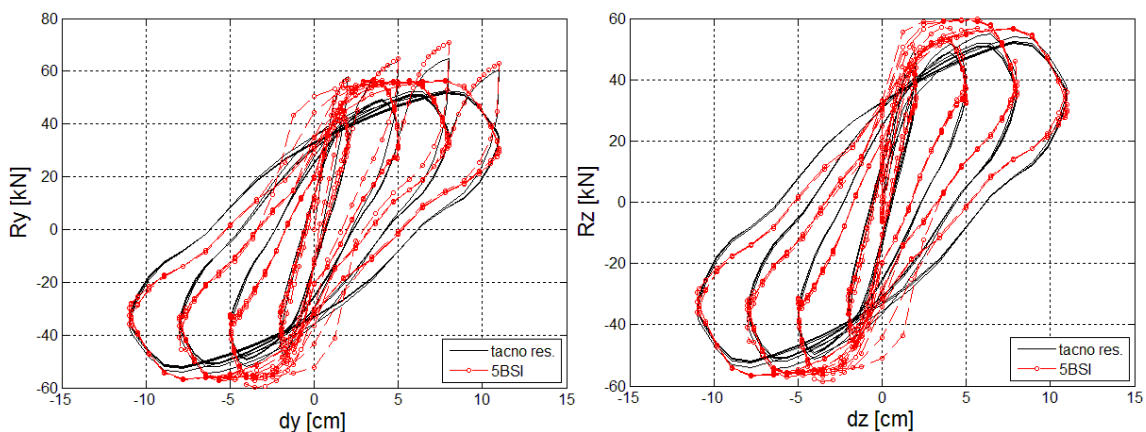
Slika C.132: Test S9: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 21BMP



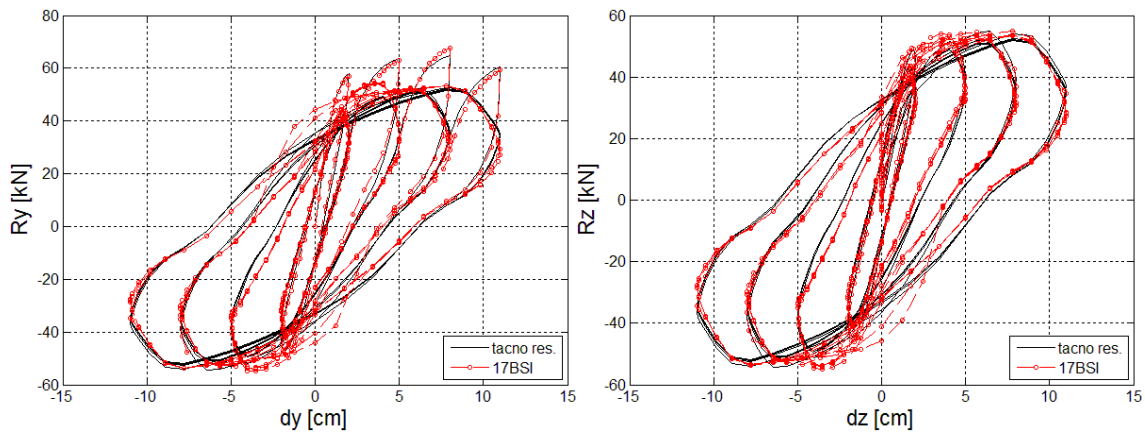
Slika C.133: Test S9: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 32BMP



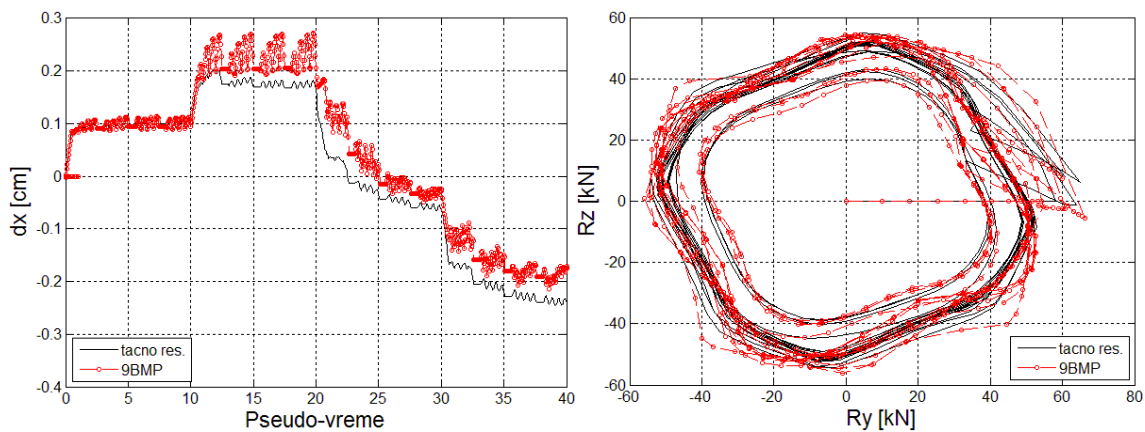
Slika C.134: Test S9: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 96BMP



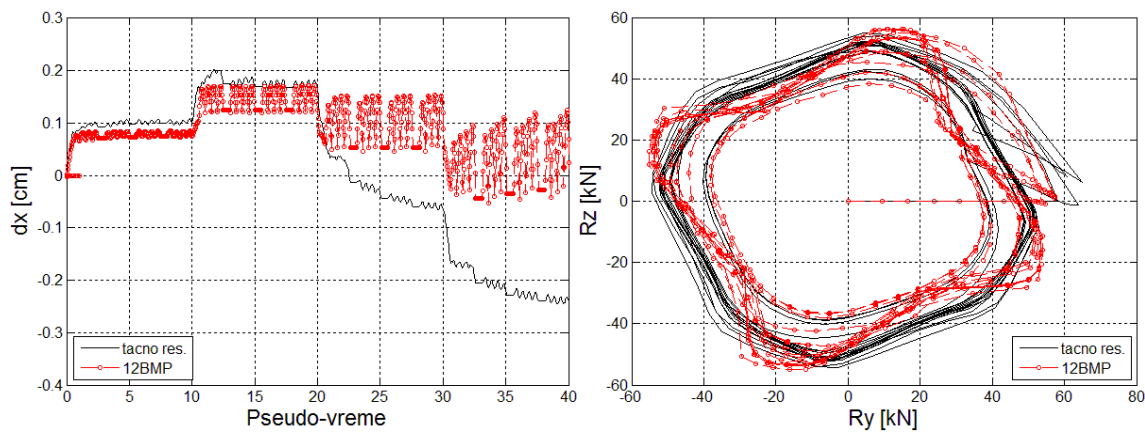
Slika C.135: Test S9: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 5BSI



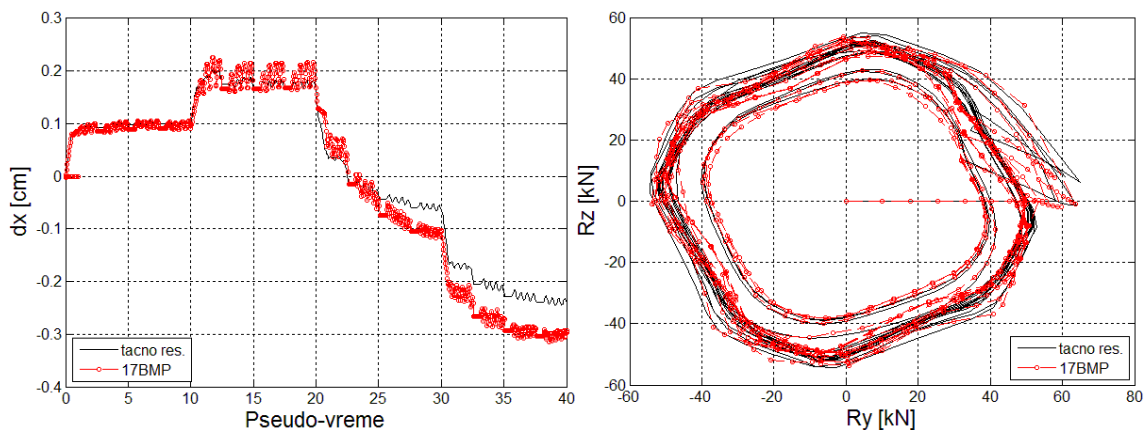
Slika C.136: Test S9: Poprečna sila – pomeranje vrha konzole u y i z pravcu dijagram za šemu 17BSI



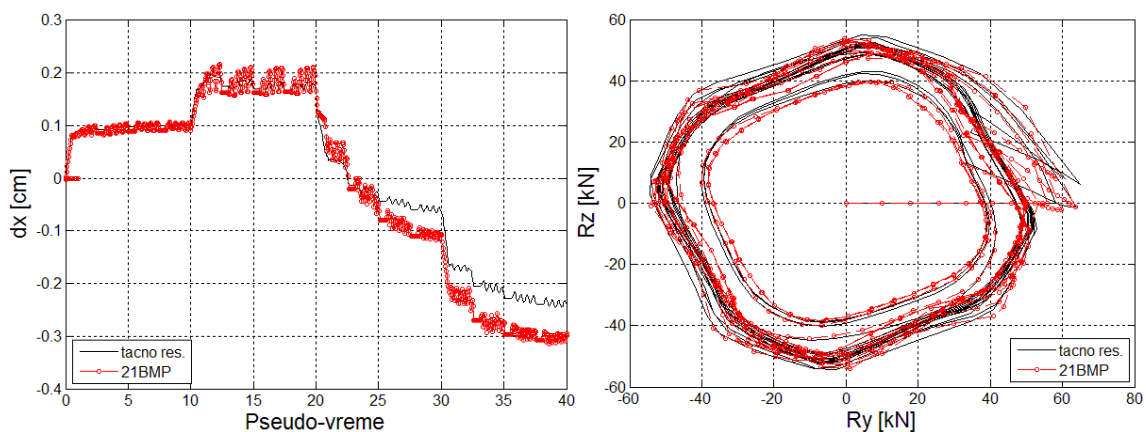
Slika C.137: Test S9: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 9BMP



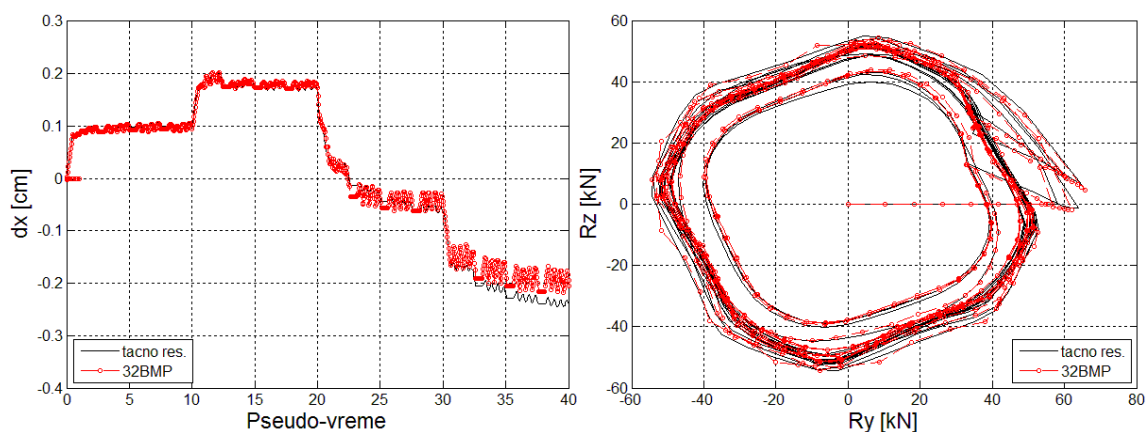
Slika C.138: Test S9: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 12BMP



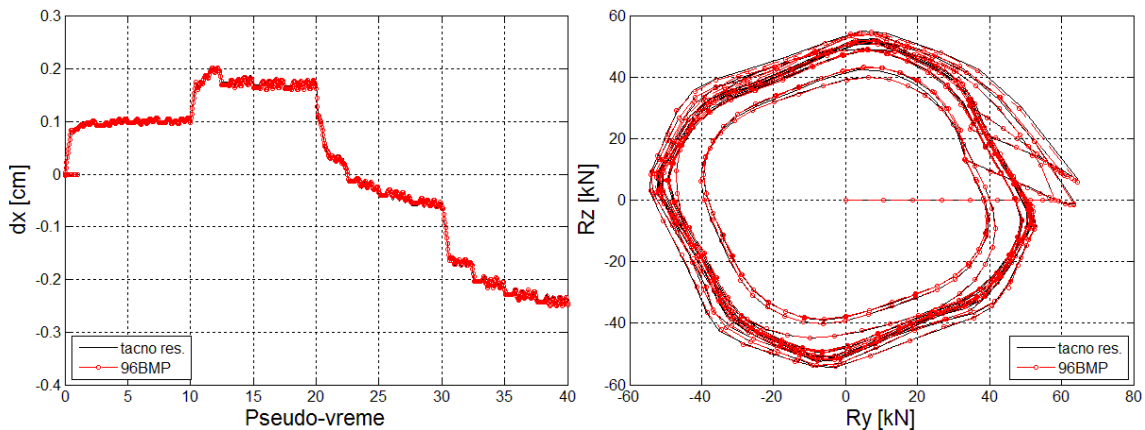
Slika C.139: Test S9: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BMP



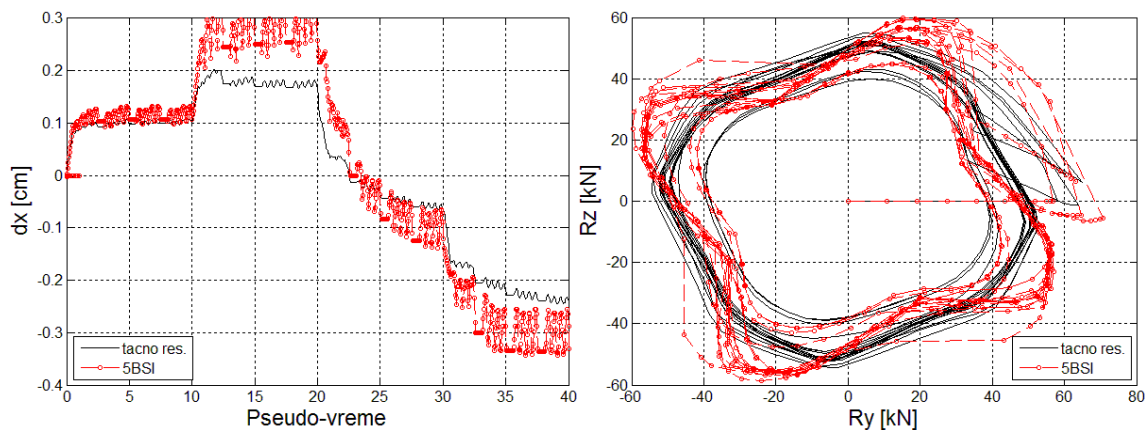
Slika C.140: Test S9: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 21BMP



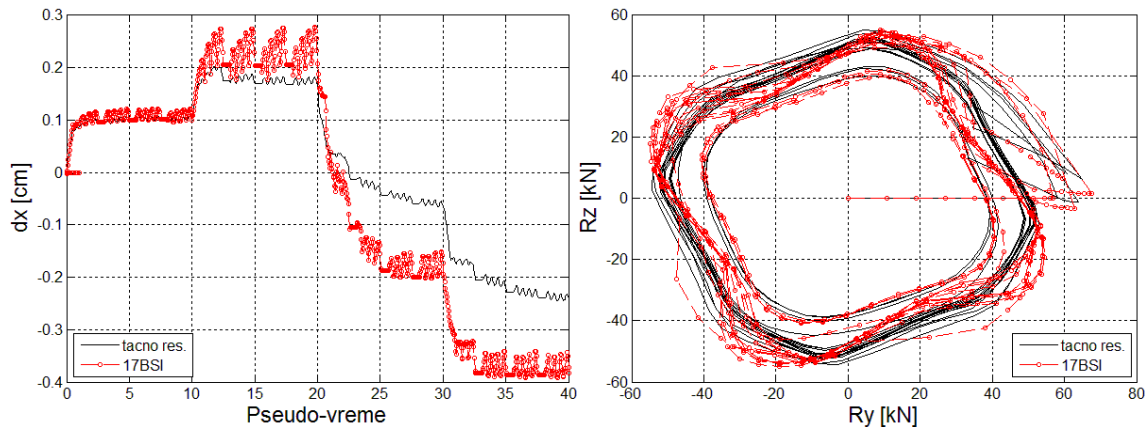
Slika C.141: Test S9: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 32BMP



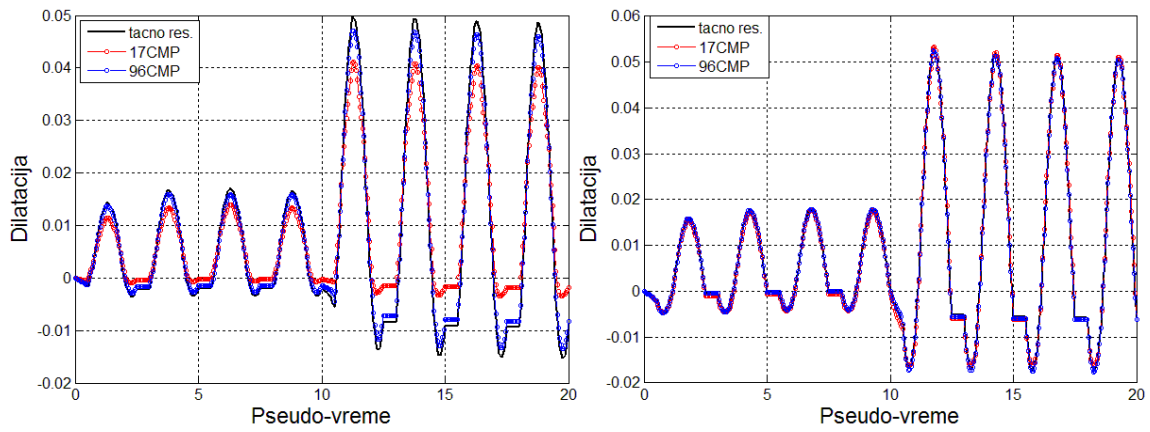
Slika C.142: Test S9: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 96BMP



Slika C.143: Test S9: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 5BSI



Slika C.144: Test S9: Aksijalno pomeranje i putanja poprečnih sila za šemu 17BSI



Slika C.145: Test S9: Promena dilatacije najudaljenijeg vlakna: (a) jezgra betona i (b) armature za šeme 17BMP i 96BMP

BIOGRAFIJA

Mr Svetlana M. Kostić (devojačko Seizović) rođena je 28.11.1978. god u Loznici. Godine 1997.godine, upisala je Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, na kome je i diplomirala 2003.godine, kao student generacije. Nagrađena je iz fonda akademika prof. dr Đorđa Lazarevića i iz fonda prof. dr Vladimira Korolije.

Poslediplomske studije na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, smer Computational Engineering, završila je odbranom magistarske teze 2007.god i time stekla zvanje magistar tehničkih nauka. Tokom školovanja, bila je stipendista Fonda Kraljevskog doma Karađorđevića, Republičke fondacije za razvoj naučnog i umetničkog podmlatka Srbije, Zadužbine Studenica, ambasade Norveške i DAAD fondacije.

U periodu avgust-oktobar 2001.god boravila je na državnom fakultetu u Ouro Pretu u Brazilu. U periodu avgust 2007.-avgust 2008. godine i juli-avgust 2009.godine, na fakultetu Berkeley u Kaliforniji je radila u timu profesora Filipa Filippou-a na problemima nelinearnog ponašanja konstrukcija i razvijanju FEDEASLab-a, Matlab toolbox-a namenjenog rešavanju problema nelinearne analize konstrukcija.

Rad na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu započela je najpre kao student demonstrator, od školske 2000/2001. Nakon diplomiranja, od 2003. do 2007. godine, radila je kao asistent-pripravnik na grupi predmeta Tehnička mehanika i Otpornost materijala. U zvanje asistenta je izabrana 2007.godine i angažovana je na predmetima: Otpornost materijala 1 i 2 i Spregnute konstrukcije.

Tokom dosadašnjeg naučno-istraživačkog rada, objavila je 1 rad u časopisu sa SCI liste, 1 rad u međunarodnoj monografiji, 4 rada u domaćim časopisima, 1 rad u nacionalnoj monografiji i 21 saopštenje na naučnim skupovima u zemlji i

inostranstvu. Učestvovala je na četiri naučna projekta finansirana od strane Ministarstva za nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije.

Juna 2009.godine položila je stručni ispit iz oblasti građevinskih konstrukcija.

Govori i piše engleski jezik, a služi se i francuskim jezikom.

Udata je i ima jedno dete.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписана Светлана М. Костић _____

број индекса _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Модел генерализације пластичности код нелинеарне анализе просторних оквирних конструкција

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 27.06.2013.

Костић Светлана

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Светлана М. Костић _____

Број индекса _____

Студијски програм _____

Наслов рада Модел генералисане пластичности код нелинеарне анализе
просторних оквирних конструкција _____

Ментори проф. др. Драгослав Шумарац, в.проф. др. Биљана Деретић-
Стојановић _____

Потписана Светлана М. Костић _____

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској
верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног
репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског
звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум
одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне
библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 27.06.2013.

Костић Светлана

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Модел генералисане пластичности код нелинеарне анализе просторних оквирних конструкција

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 27.06.2013.

Ковић Стељана

1. **Ауторство** - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство - некомерцијално – без прераде.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прераде.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство - делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.