

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Бранко Ђ. Миловановић

**ЛИНЕАРНО И НЕЛИНЕАРНО  
МОДЕЛИРАЊЕ ГЕОДЕТСКИ  
РЕГИСТРОВАНИХ ДЕФОРМАЦИОНИХ  
ПРОЦЕСА КОНСТРУКЦИЈА**

докторска дисертација

Београд, 2012

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Branko Đ. Milovanović

**LINEAR AND NONLINEAR MODELING  
GEODETIC REGISTERED  
DEFORMATION PROCESSES OF  
STRUCTURES**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2012

## ПОДАЦИ О МЕНТОРИМА И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ ЗА ОЦЕНУ И ОДБРАНУ

### Ментори:

1. Доц. др Зоран Мишковић, дипл. град. инж.  
Универзитет у Београду,  
Грађевински факултет
2. Доц. др Миловој Вулић, дипл. геод. инж.  
Универзитет у Љубљани,  
Факултета природних наука и инжењеринга  
(Naravoslovnotehniška fakulteta)

### Чланови комисије:

1. Доц. др Зоран Мишковић, дипл. град. инж.  
Универзитет у Београду,  
Грађевински факултет
2. Доц. др Миловој Вулић, дипл. геод. инж.  
Универзитет у Љубљани,  
Факултета природних наука и инжењеринга  
(Naravoslovnotehniška fakulteta)
3. В. проф. др Бранко Божић, дипл. геод. инж.  
Универзитет у Београду,  
Грађевински факултет
4. В. проф. др Бранислав Бајат, дипл. геод. инж.  
Универзитет у Београду,  
Грађевински факултет
5. В. проф. др Загорка Госпавић, дипл. геод. инж.  
Универзитет у Београду,  
Грађевински факултет

Датум одбране: \_\_\_\_\_

*Зхвалио бих се својим менторима Доц. др Миливоју Вулићу, дипл. геод. инж. и Доц. др Зорану Мишковићу, дипл. грађ. инж. на корисним сугестијама приликом израде дисертације. Такође, велико хвала студенткињи треће године студија на Одсеку за геодезију и геоинформатику Јелени Цветиновић на пажљиво прочитаном тексту и указаним словним, графичким, правописним и стилским грешкама.*

*Захвалан сам својим родитељима покојном оцу Ђоки и мајци Душанки што су ми усадили љубав према књизи и сазнавању и брату Слободану, који ми је помогао у развијању такмичарског духа.*

*Највећу захвалност дугујем својој породици супрузи Саши и сину Давиду. Хвала им што су имали разумевања за моју физичку и психичку одсутност док сам радио ову дисертацију, а то је скоро десет година.*

*Аутор*

Миловановић, Ђ. Бранко

# ЛИНЕАРНО И НЕЛИНЕАРНО МОДЕЛИРАЊЕ ГЕОДЕТСКИ РЕГИСТРОВАНИХ ДЕФОРМАЦИОНИХ ПРОЦЕСА КОНСТРИКЦИЈА

Докторска дисертација

## РЕЗИМЕ

Предмет овог рада је моделирање понашања конструкција и околног тла на основу поступака идентификације система, односно експерименталних података. У овом раду су објашњене све процедуре идентификације система и њихова примена у деформационој анализи конструкција.

Познато је да се понашање конструкције и тла моделује на основу геомеханичких и статичких прорачуна. Геомеханички прорачуни се базирају на основу узетих узорака тла. Ови узорци не могу да репрезентују понашање целог тла на коме се гради објекат. Статички прорачун се базира на правилничким одредбама. Међутим, приликом изградње објекта долази до грешака (квалитет уграђеног материјала и пропуста приликом градње) и необезбеђивања пројектоване геометрије објекта.

Сврха моделирања на основу експерименталних података је: провера прорачуна, спречавање људских и материјалних катастрофа као и побољшање стандарда изградње. Познато је да се мониторингом конструкција и тла баве: грађевинска, геолошка и геодетска струка. Све ове струке морају да сарађују и користе исту терминологију да би се успешно извршио мониторинг конструкција.

Геодетска метода мери се само одговор конструкције (излазне сигнале) и једина одређује померања и деформације у апсолутном систему.

Практично истраживање је подразумевало: анализу података временских серија геодетског мониторинга у временском и фреквентном домену и могућности коришћења ових података за дефинисање реда система и степена модела, сагледавање комплексности експерименталног моделирања деформационих процеса применом поступак идентификације система, могућност апроксимације нелинеарних динамичких процеса конструкције линеарним, предлог поступка одређивања временског плана опажања на основу експериментално одређеног модела (идентификација система). Ово истраживање је извршено на симулираним подацима временских серија слегања конструкције и мереним подацима померања пилона моста "Слобода" у Новом Саду приликом испитивања конструкције на пробно оптерећење.

Прво је анализирана значајност обезбеђивања стационарности или слабе стационарности процеса. Стационарност се обезбеђује поступком детрендовања података, односно уклањањем тренда процеса. Ово је веома приметан посао и показано је да није неопходно обезбедити стационарност процеса. Добијене разлике у оцени параметара модела за стационаран и нестационаран процес су занемарљиве.

За анализу података у временском домену коришћени су коефицијенти аутокорељације, парцијалне аутокорељације и међусобне корелације, а у фреквентном домену Шустеров периодограм. Показано је да се на основу графичке представе података може дефинисати ред система, који је за конструкције првог (слегање и утицај температуре) или другог реда (оптерећење конструкције). Коефицијент корелације даје драгоцене информације о степену модела, али се за добијање дефинитивног модела мора тестирати значајност параметара.

За линеарно моделирање примењени су модели функције преноса (регресиони модели) и модели простора стања – метода потпростора (Ојлерова метод и Тустинова апроксимација), а за нелинеарно вештачка неуронска мрежа (мрежа ширења уназад) и регресиони модел за нелинеарне процесе. Такође, примењен је за моделирање слегања конструкције тзв. најчешће коришћене функције преноса

које се користе у управљању системима. Оцењивање параметара модела је извршено методом најмањих квадрата, нелинеарним методом најмањих квадрата и методом грешке предикције. На основу добијених критеријума апроксимације за симулацију и предикцију закључено је да је ауторегресивни модел за спољашњим улазним сигнаlima, за случај линеарног или нелинеарног процеса, најподеснији за моделирање понашања конструкција. Модел потпростора стања (Ојлерова метода) се може користити за предикцију један корак унапред, а претпостављени облик функције преноса (најчешће коришћене функције преноса) је веома погодан за моделирање слегања конструкције (предност је што је потребан мали број епоха мерења за одређивање параметара модела). Модел мреже ширења уназад (вештачка неуронска мрежа) је адекватан за симулацију понашања конструкције. Процент апроксимације био би много бољи да је број епоха мерења већи, што је иначе ретко у геодетској деформационој анализи. Анализа периода одабирања је показала да се епохе мерења треба да дефинишу по теорему о одабирању, која одређује период одабирања на основу прелазног стања система. Прелазно стање система се одређује на основу пројектованог понашања конструкције на почетку изградње, а после на основу експерименталних података.

**Кључне речи:** Деформациона анализа, Идентификација система, модел, временска серија, функција преноса, потпростор стања, вештачка неуронска мрежа, детрендовање

**Научна област:** Геодезија

**Ужа научна област:** Инжењерска геодезија

Milovanović Đ. Branko

# **LINEAR AND NONLINEAR MODELING GEODETIC REGISTERED DEFORMATION PROCESSES OF STRUCTURES**

Doctoral Dissertation

## **ABSTRACT**

The subject of this dissertation is modeling the behavior of structures and surrounding ground using system identification procedures, respectively based on experimental data. This paper explains all the procedures of identification systems and their application in deformation analysis of structures.

It is known that structural and surrounding ground behavior is modeled on the basis of geomechanical and static calculations. Geomechanical calculations are based on samples taken on the ground. These samples may not represent the behavior of the whole ground on which build an structure. Statically analysis is based on rule book regulations. However, during construction of the building leads to errors (quality materials and omission during the building) and failure to ensure the projected geometry.

The purpose of modeling based on experimental data is checking the project, preventing human and material disasters and improve the standard of construction. It is known that the monitoring of structures and ground deal in: civil engineering, geology, and geodetic professions. All these professions must work together and use the same terminology in order to successfully performed construction monitoring. By geodetic



method we measure only the structural responses (output signals) and it is only the profession which determines the movement and deformation in the absolute system.

Practical research is meant: analysis of time series of geodetic monitoring in time and frequency domain and possibility of using these data to define the system order and order of models, analyzing the complexity of experimental modeling of deformation processes using the system identification procedure, the possibility of approximation of nonlinear dynamical processes by linear models, the proposed procedure determining the sampling of observations based on experimentally determining model (system identification). This research was derived on the simulated time series of settlement construction and the measured data of displacements of the pylon of the bridge, "Sloboda" in Novi Sad during test load of structure.

The first analyzes the importance of ensuring stationary or weak stationary of the process. Stationary of the process provides by detrending data, trend removed from process. This is a very hard job and it was shown that it is not necessary to ensure stationary of the process. The differences in the estimated parameters of model for the stationary and non-stationary process are negligible.

For data analysis in time domain used coefficient of autocorrelation, partial autocorrelation and cross correlation, in the frequency domain used Schuster periodogram. It has been shown that graphical representations of data can be used to define order of system, which can be for the structure first (subsidence and temperature effects) or second order (the loads). The correlation coefficient provides valuable information about the order of the model, but for a definite model must test the significance of parameters.

For linear modeling were applied transfer function models (regression models) and state space models – subspace method (Euler method and Tustin approximation), for a non-linear artificial neural network (backpropagation neural network) and the pseudolinear regression model for nonlinear processes. Also, it was used so-called commonly used transfer functions, which are used in management systems, for modeling the settlement of construction. Parameters of the model are estimated using least squares, nonlinear least squares method and the prediction error method. On the basis of the criteria approximation for simulation and prediction, it was concluded that the autoregressive model with external input signals, in the case of linear or nonlinear

process, the most suitable for modeling the behavior of structures. Subspace method (Euler method) can be used to predict one step ahead, a supposed form of transfer function (the most commonly used transfer function) is very suitable for modeling settling of the structure (the advantage is that it requires a small number of epochs of measurement for determining the model parameters). Backpropagation neural network (artificial neural network) is adequate for simulation of the structural behavior. Percentage of approximation would be better that there are many data in time epoch, which is rare in the geodetic deformation analysis. Analysis of sampling period showed that the epoch of measurement should be defined by the Sampling theorem, which determines the sampling period based on the transition state of the system. Transition state of the system is determined on the basis of projected structural behavior at the start of building, and after based experimental data.

**Key words:** deformation analysis, system identification, model, time series, transfer function, subspace state, artificial neural networks, detrending

**Scientific field:** Geodesy

**Major in:** Engineering Survey

	.....	i
PREFACE	.....	vi
	.....	x
	.....	xi
	.....	xvi
O	.....	xx
1.	.....	1
1.2	.....	3
1.3	.....	4
1.4	.....	6
1.4.1	.....	7
1.4.2	.....	10
2.	.....	12
2.1	.....	13
2.2	.....	15
2.3	.....	21
2.3.1	.....	22
2.3.2	.....	25
2.3.3	.....	32
2.3.4	.....	36
3.	.....	41
3.1	.....	43
3.2	.....	45
3.3	.....	48
3.4	.....	50
3.4.1	.....	50
3.4.2	.....	51
3.4.3	(            ).....	51

3.5		.....55
3.5.1	o	.....55
3.5.2		.....57
3.5.3		.....59
3.6		.....65
3.6.1		.....68
3.7		.....69
4. MO	-	.....73
4.1		.....73
4.1.1	e	.....74
4.1.2 A		.....76
4.1.3		.....81
4.2		.....84
4.2.1		.....85
4.2.2		.....88
4.2.3		.....90
4.2.4		.....93
4.2.5		.....97
4.3		.....100
4.3.1		.....101
4.3.2		.....103
4.3.3		.....105
4.4		.....106
4.4.1		.....106
4.4.2		.....109
4.4.3		.....111
5.		.....113
5.1		.....113
5.1.1		.....114
5.1.2		.....115
5.2		.....119
5.2.1		.....120
5.2.2		.....122
5.2.3		.....125

5.2.4	.....	127
5.2.5	.....	130
6.	- .....	134
6.1	.....	135
6.1.1	.....	136
6.2	.....	139
6.3	.....	140
6.3.1	.....	140
6.3.2	.....	141
6.3.3	(Akaike's) .....	142
6.4	- 1.....	144
6.4.1	- 1.....	149
6.4.2	- - 1.....	169
6.4.3	- 1.....	199
6.4.4	1.....	202
6.5	- 2.....	203
6.5.1	.....	204
6.5.2	.....	205
6.5.3	- 2.....	210
6.5.4	- - 2.....	214
6.5.5	- 2.....	221
6.5.6	2.....	223
6.6	.....	224
7.	.....	229
	.....	235
	.....	244

## ПРЕДГОВОР

Развој савременог друштва пред грађевинску струку поставља све строжије захтеве по питању квалитета изградње и безбедности објеката. Квалитет изградње подразумева употребу квалитетнијих материјала и поштовање геометрије објекта. Познато је да 90% статике објекта зависи од геометрије конструкције. Безбедност објекта се контролише мониторингом конструкције и околног тла. Сврха мониторинга је да се: спрече људске и материјалне несреће, обезбеди функционалност објекта и побољшају стандарди градње.

Инжењерска геодезија је присутна у свим фазама изградње и животног века једног објекта. Задатак инжењерске геодезије је обезбеђивање пројектоване геометрије објекта и праћење понашања конструкције и околног тла у апсолутном и релативном систему.

Докторска дисертација „**Линеарно и нелинеарно моделирање геодетски регистрованих деформационих процеса конструкција**“ бави се геодетским мониторингом на начин како је препоручила FIG-ина радна група за Деформациону анализу, која ради у оквиру Комисије за инжењерску геодезију, у свом писму No. 25 из 2002. године. Препорука ове комисије је да су деформације конструкције и околног тла резултат процеса. Такође, ова комисија је у свом плану рада за период од 2007-2010. године моделирање деформација као процеса ставила у фокус истраживања. Ова дисертација је прва у Геодезији која на свеобухватан начин третира деформације као резултат процеса.

Да би се процес моделирао потребно је да се улазни сигнали -силе које делују на конструкцију (унутрашње и спољашње силе, поремећаји), сама конструкција (физички параметри материјала) и излазни сигнали – деформације посматрају као динамички систем. Овакав приступ деформационим процесима захтева примену поступака идентификације система – моделирање на основу експерименталних мерења.

Дисертација се састоји од седам поглавља. У првих пет поглавља су дате теоријске основе идентификације система са линеарним и нелинеарним моделима

динамичких система. У шестом поглављу су примењене теоријске основе из претходних поглавља за моделирање на симулираном и реалном примеру. На крају су приказани закључци на основу практичне примене процедура идентификације система.

Прво поглавље „Увод“ се састоји од четири потпоглавља. На почетку је описано шта су деформације конструкција и дата је подела деформација с обзиром: на карактер деформација, смер и угроженост објекта. Указано је на значај овог проблема и наведене су струке и међународне асоцијације које се баве мониторингом. Затим је приказан циљ ове тезе и историјски развој геодетске деформационе анализе, као и предмет и задаци мониторинга. Нови правци развоја геодетског праћења су: развој мрежа за континуирани мониторинг и алармних система, примена нових метода за моделирање мерних грешака и примена теорије система (идентификације система) за моделирање деформационих процеса. На крају поглавља су укратко изложени прва два правца развоја геодетског мониторинга.

Друго поглавље „Деформациона анализа и идентификација система“ даје приказ деформационе анализе кроз примену идентификације система. Састоји се од три основна потпоглавља: „Систем и процес“, „Модели и поступак моделирања“ и „Деформациона анализа“. У уводном делу поглавља је кратко дат историјски развој идентификације система. Прво потпоглавље приказује: основне појмове (систем, динамички систем и процес), поделу система у зависности од броја улазних и излазних сигнала, везе између компоненти као тумачење појмова и система у деформационој анализи. Друго потпоглавље описује по теорији система: начине моделирања, поступке и процедуре моделирања. На почетку последњег потпоглављу даје се тумачење деформационих процеса помоћу математичких поставки идентификације система. Приликом геодетског мониторинга врши се дискретизација процеса по времену, а конструкција се дискретизује коначним бројем тачака. Објашњено је шта подразумева успостављање везе између узрока деформација, конструкције и деформација (физичка интерпретација деформационог процеса). Затим су описане теоријске основе: дефинисања математичке везе између улазних и излазних сигнала, предикција и симулација. На крају су приказани модели деформационе анализе по

подели FIG-ине радне групе за деформациону анализу и геодетски инструменти и методе мерења при праћењу као и геотехнички мерни уређаји и њихова тачност.

У деформационој анализи подаци се прикупљају у временским интервалима (епохама мерења), па мерења припадају тзв. временским серијама. Да би се донели закључци о вези узрока и деформација потребна је анализа података. Треће поглавље „Анализа података временских серија“ описује детаљно анализу података у временском и фреквентном домену. Састоји се од следећих потпоглавља: „Комплексни облик сигнала“, „Систем првог реда“, „Систем другог реда“, „Аутокорелација и парцијална аутокорелација“, „Анализа временске серије у фреквентној области“, „Детрендовање опажања временске серије“ и „Међусобна корелација“. Прво потпоглавље даје приказ сигнала који се сусрећу у деформационој анализи; друго говори о одзивним сигнаlima система када је систем првог реда; треће потпоглавље када је систем другог реда. Потпоглавља „Аутокорелација и парцијална аутокорелација“ и „Међусобна корелација“ баве се анализом временских серија у временском домену. Корелација открива зависност између података, што је драгоценa информација за одређивање степена модела, али доводи и до смањења ефективне величине узорка. Пето потпоглавље приказује анализу у временском домену помоћу перидограма и спектра. Детрендовањем опажања се уклањају споре, постепене промене процеса да би се анализирао одступања од неке законитости. Тренд у деформационој анализи представља пројектовано понашање конструкције, нпр. пројектовано слегање објекта.

Четврто поглавље „Модели линеарно временских-инваријантних система“ описује моделе који апроксимирају реални нелинеарни систем као линеаран. За линеарно моделирање примењују се модели облика функције преноса и простора стања. Приказани су следећи модели облика функције преноса: ауторегресивни модел са променљивом средином и спољним побудама, ауторегресивни модел са спољном побудом, ауторегресивни, ауторегресивни модел са променљивом средином и модел са променљивом средином. Описане су и методе за решавање система једначина: Дурбин-Левинсон алгоритам и метода грешке предикције. У потпоглављу „Модели простора стања“ детаљно је дат концепт стања система са избором променљивих система, као и поступак дискретизације система. Простор



стања се изражава помоћу Калмановог филтера, а за моделирање система моделом простора стања, непознати параметри су коефицијенти у матрици система, примењује се метода потпростора. Од метода потпростора са аспекта примене у деформационој анализи обрађене су Ојлерова метода и Тустинова апроксимација. Затим су приказане функције преноса које се најчешће користе у пракси и идентификација система на основу претпостављеног облика решења диференцијалне једначине и њихова примена у деформационој анализи. На крају је дата теорема о одабирању и како се може применити у мониторингу.

Пето поглавље „Нелинеарни модели у временском домену“ описује нелинеарне моделе Волтера серију и вештачку неуронску мрежу. У оквиру потпоглавља о вештачким неуронским мрежама дат је приказ: архитектуре мреже, активационих функција, процеса учења мрежа и алгорита ширења мреже уназад.

У шестом поглављу „Деформациона анализа конструкција - примери“ на симулираном примеру слегања конструкције и примеру помераја пилона при пробном испитивању конструкције моста „Слобода“ у Новом Саду, примењен је цео поступак идентификације система. Поступак подразумева: визуелну представу података, детрендовање, анализу у временском домену, избор степена и структуре модела, оцену параметара модела и валидацију модела. За валидацију модела је коришћен проценат апроксимације симулацијом и предикцијом један корак унапред и Акаике критеријуми. Такође, проверена је и применљивост теореме о одабирању у деформационој анализи. После сваког примера дати су и закључци.

Седмо поглавље „Закључак“ даје предлоге за примену процедура идентификације система у деформационој анализи. Детрендовањем података остварује се стационарност/слаба стационарност процеса. Поступак детрендовања је приметан посао. Показано је, кроз ове примере, да су разлике у оценама параметара и критеријумима валидације занемарљиве ако се не обезбеди стационарност процеса, односно детрендовање се изводи разликама првог реда. Када су у питању модели предност се даје моделима функције преноса у односу на простор стања и вештачку неуронску мрежу. Модели облика функције преноса, а посебно ауторегресивни модел са спољним побудама, су се кроз оба примера показали као најадекватнији. Модели простора стања имају проблем код

одређивања приближних вредности параметара модела, а за примену вештачке неуронске мреже потребно је више података. Такође, закључено је и да се кинематички модели могу примењивати само за предикцију.

## **PREFACE**

The development of modern society sets in front of the civil engineering profession increasingly stringent demands on quality and safety of building structures. Quality of construction involves the use of quality materials and respects the geometry of the object. It is known that 90% of the static object depends on the geometry of the structure. Safety of the facility is controlled by monitoring the structure and surrounding ground. The purpose of monitoring is to: prevent human and material accidents, ensure and improve the functionality of the building construction standards.

Engineering survey is present in all stages of the life cycle of a building. The task of engineering surveying is designed to provide geometry and monitoring behavior of the structure and surrounding ground in the absolute and relative system.

Doctoral thesis "Linear and Nonlinear Modeling Geodetic Registered Deformation Processes of Structures" deals with geodetic monitoring in the manner recommended by the FIG Working Group for Deformation Analysis, which is within the Commission for Engineering Survey, in his letter No.25 in 2002. The recommendation of this commission is that the deformation structures and surrounding ground are results of the process. Also, the Commission the modeling of deformation processes put in as a focus of research and noted in its work plan for the period 2007-2010. This dissertation is the first in surveying that comprehensively treat the deformation as a result of the process.

In order to model the process needs to be input signals-forces acting on the structure (internal and external forces, disturbances), the construction itself (the physical parameters of the material) and output signals - deformation consider as a dynamic system. This approach of deformation processes requires using procedure of system identification - modeling based on experimental measurements.

The dissertation consists of seven chapters. The first five chapters give of the theoretical bases of system identification with linear and nonlinear models of dynamic systems. In the sixth chapter applied theoretical basis from the previous sections for modeling dynamical process of the structures on the simulated and real example.

Finally, conclusions are presented based on the practical application of system identification procedures.

The first chapter "Introduction" consists of four subsections. At the beginning of the chapter is described a structural deformation and given is kinds of deformation with respect: the nature of deformation, orientation and building vulnerability. It points to the significance of this problem and mentioned are professional and international associations engaged in monitoring. Further, showed are the objective of this thesis and historical development of the geodetic deformation analysis, as well as the subject and monitoring tasks. New tasks of geodetic monitoring are: the development of networks for continuous monitoring and alarm systems, application of new methods to model the measurement errors and application of systems theory (system identification) for the modeling of deformation processes. At the end of the chapter are shortly presented the first two lines of development of geodetic monitoring.

The second chapter "Deformation Analysis and System Identification" provides an overview of deformation analysis through the application of system identification. It consists of three main subsections: "System and Process", "Models and Modeling Process" and "Deformation Analysis." In the introduction of this chapter briefly presents the historical development of System Identification. The first subsection shows: basic concepts (system, dynamic system and process), apportion of systems depending on the number of input and output signals, connections between components as well as the interpretation of concepts and systems in deformation analysis. The second subsection describes by the theory of systems: methods of modeling and modeling procedures. At the beginning of the last subsection gives the interpretation of the deformation process using a mathematical settings of system identification. When geodetic monitoring is carried out the process is discretized by the time, a structure is discretized by a finite number of points. It was explained what understands the connection between cause of deformation, construction and deformation of construction (physical interpretation of the deformation process). Then the theoretical background described: defining mathematical relationships between input and output signals, prediction and simulation. At the end of this chapter are given of deformation models by the division of FIG's Working Group for Deformation Analysis and geodetic

measurement instruments and methods in monitoring and geotechnical measurement devices and their accuracy.

In deformation analysis data collected at time intervals (epoch of measurement), and measurements belong to the time series. To have made conclusions about connection between the causes and deformation analysis of the data is required. The third chapter, "The Analysis of Time Series Data" describes the detailed analysis of the data in time and frequency domain. It consists of the following subsection: "The Complex Shape of the Signal," "The First Order System", "The Second Order System", "Autocorrelation and Partial Autocorrelation", "Time Series Analysis in the Frequency domain", "Detrending of Time Series Observations" and "Cross Correlation ". The first subsection provides an overview of signals which encountered in the deformation analysis; the second about the system respond signals when the system is first order, and third sub-section when the second-order system. The subsection "Autocorrelation and Partial Autocorrelation" and "Cross Correlation" deal with the analysis of time series in the time domain. The correlation reveals the dependence between the data, which is valuable information for the determination of the model order, but leads to a reduction in the effective sample size. The fifth subsection provides the time domain analysis using periodograma the spectrum. Detrending of observations are procedure which removed slow, gradual change of process to be analysis of the deviations of process laws. Trend in deformation analysis is the projected behavior of the structure, for example projected settlement building.

The fourth chapter, "Models of Linear Time-Invariant Systems" describes the models that approximate the real nonlinear system as linear. For linear modeling applied models of transfer function models and state space. The following forms of transfer function models are showed: Autoregressive moving average model, Autoregressive with external input model, Autoregressive, Autoregressive moving average with external input. Described are methods for solving systems of equations: Durbin-Levinson algorithm and the prediction errors method. In the subsection "Models of the State Space" is given in detail the concept of system state variables with the election of system variables, and the procedure of discretization of the system. State space is expressed using the Kalman filter, and for modeling of system by the state space model the unknown parameters are the coefficients in the system matrix, the subspace method

is applied. Between subspace method from the aspect of using on the deformation analysis are elaborated Euler method and the Tustin approximation. Then the transfer functions are shown that are commonly used in practice. Their application are based on the assumed form of solution of differential equations. Also, explained their application in deformation analysis. Finally, the theorem of sampling is given and their application in monitoring.

The fifth chapter, "Nonlinear Models in Time Domain" describes nonlinear model of Volterra series and an artificial neural network. In the subsection on artificial neural networks provides an overview of: network architecture, activation function, the learning process of networks and network backward algorithm.

In the sixth chapter, "Deformation Analysis of Structures - Examples" on a simulated example of the settlements of construction and displacement of the pylon at the example of a load test of the bridge "Sloboda" in Novi Sad applied to the entire process of identification systems. The process includes: a visual representation of data, detrending, the analysis in time domain, the choice of order and structure of the model, estimation of model parameters and model validation. For validation of the model is used and the fitting by simulation end prediction one step ahead and Akaike's criteria. Also tested the applicability of the theorem of sampling in deformation analysis. After each example are given conclusions.

The seventh chapter, "Conclusion" provides suggestions for the application of system identification procedures in deformation analysis. Detrending data is achieved stationarity / weak stationarity of the process. The procedure is detrending is very hardly job. It is shown through these examples, the differences in the estimation of parameters and validation criteria are irrelevant if it fails to provide the stationarity of the process or detrending performed by first-order differences. When it comes to models of preference shall be given transfer function models in relation to the state space and an artificial neural network. The transfer function models, and especially autoregressive model with external input, through both examples shown as the most appropriate. State space models have difficulty in determining the approximate values of model parameters, and the application of artificial neural networks need more data. Also, it was concluded that the kinematic models can be applied for prediction only.

**СКРАЋЕНИЦЕ**

FIG-	Fédération Internationale des Géomètres – International Federation of Surveyors
IAG-	International Association for Geodesy
IAGSC4-	International Association for Geodesy Special Commission 4
ISPRS-	International Society for Photogrammetry and Remote Sensing
ISM-	International Society for Mine Surveying
ISRM-	International Society for Rock Mechanics
ICOLD-	International Commission on Large Dams
ISAH-	International Association of Hydrological Sciences
ГПС-	Глобални Позициони Систем
GPS-	Global Positioning System
GOCA-	GPS – based Online Control and Alarm System
RTK-	Real Time Kinematic
AR-	AutoRegressive
MA-	MovingAverage
ARX-	AutoRegressive with eXtrenal input
ARMAX-	AutoRegressive MovingAverage with eXtrenal input
ARMA-	AutoRegressive MovingAverage
SISO-	Simple Input Simple Output
MISO-	Multiple Input Simple Output
MIMO-	Multiple Input Multiple Output
МНК-	метод најмањих квадрата
PEM-	Prediction Error Method
IV-	Instrument Variable method
LTI-	Linear Time Invariant system
PACF-	Partial AutoCorrelation Function
ДФТ-	дискретна Фуријеова трансформација
FIR-	Finite Impulse Response
FPE-	Final Prediction Error
AIC-	Akaike's Information Criterion

## СПИСАК СЛИКА

Број слике:	Назив слике:	страна
Слика 1.1:	Мониторинг и аларм систем ГОСА [Jäger, 2006]	8
Слика 2.1:	Систем са поремећајем [Ljung, 1987.]	13
Слика 2.2:	Систем са повратном спрегом (систем управљања)	14
Слика 2.3:	Блок дијаграм модела са поступцима добијања модела	18
Слика 2.4:	Дијаграм процедуре моделирања [Pedersen, 2005]	19
Слика 2.5а:	Квантовање по нивоу [Стојић, 1998]	24
Слика 2.5б:	Квантовање по времену [Стојић, 1998]	24
Слика 2.5ц:	Квантовање по нивоу и времену [Стојић, 1998]	24
Слика 2.6:	Деформације као елемент динамичког система [ FIG Publication NO. 25,2001]	34
Слика 2.7:	Хијерархија модела у геодетској деформационој анализи (Welsch и Heunecke 1999.) [ у FIG Publication NO. 25,2001]	35
Слика 3.1:	Одскачна функција за $t = 0$ и амплитуду $b$ [Стојић, 1999]	45
Слика 3.2:	Јединична импулсна функција у тренутку $t = t_0$ [Стојић, 1999]	45
Слика 3.3:	Нагибна функција [Стојић, 1999]	46
Слика 3.4:	Експоненцијална функција [Стојић, 1999]	46
Слика 3.5:	Одзив система првог реда [Стојић, 1998]	47
Слика 3.6:	Одзив система првог реда на импулсни улазни сигнал	48
Слика 3.7:	Одзив система другог реда	50
Слика 3.8:	Тежине за тачку засецања $M = 20$	65
Слика 4.1:	Структура модела грешке једначине (ARX) [Ljung, 1987]	76
Слика 4.2:	Структура ARMAX модела [Ljung, 1987]	79
Слика 4.3:	Структура Калмановог филтера [Весегал, 2005.]	98
Слика 4.4:	Илустрација поступка нумеричке интеграције [Стојић, 1998]	100



<i>Слика 4.5:</i>	Одскочни одзив типичних процеса [Стојић,1998]	108
<i>Слика 4.6:</i>	Слегање објекта у току времена [Цветковић, 1970]	111
<i>Слика 5.1:</i>	Моделирање система помоћу подсистема: а) Хемерштајн структура б) Винер структур [Heien,1999]	118
<i>Слика 5.2:</i>	Поједностављен приказ биолошких неурона	121
<i>Слика 5.3:</i>	Појединачни неурон	124
<i>Слика 5.4:</i>	Неурон са више улаза	125
<i>Слика 5.5:</i>	Неуронска мрежа са једним лејером	126
<i>Слика 5.6:</i>	Неуронска мрежа са два лејера	127
<i>Слика 6.1:</i>	Распоред напона у зависности од врсте тла и/или темеља	139
<i>Слика 6.2:</i>	Профил терена	147
<i>Слика 6.3:</i>	График прорачунатог слегања	149
<i>Слика 6.4:</i>	Скица контролне мреже	150
<i>Слика 6.5:</i>	Графичка представа мерених висинских разлика	152
<i>Слика 6.6:</i>	Графичка представа детрендованих висинских разлика просечног степена консолидације (пример 1 - поступак 1.)	154
<i>Слика 6.7:</i>	Графичка представа детрендованих подскупова висинских разлика и улазног сигнала корака 1 (пример 1- поступак 1.)	158
<i>Слика 6.8:</i>	Аутокорелациона функција детрендованих висинских разлика и просечног степена консолидације (пример 1- поступак 1.)	160
<i>Слика 6.9:</i>	Парцијална аутокорелациона функција детрендованих висинских разлика и просечног степена консолидације (пример 1- поступак 1.)	161
<i>Слика 6.10:</i>	Међусобна корелација детрендованих висинских разлика F2-R1, R4-F3 и просечног степена консолидације (пример 1- поступак 1.)	162
<i>Слика 6.11:</i>	Шустеров периодограм за детрендоване висинске разлике F2-R1, R4- F3 и F1-F2 (пример 1- поступак 1.)	163
<i>Слика 6.12:</i>	Графичка представа детрендованих висинских разлика и	165

	просечног степена консолидације (пример 1- поступак 2.)	
Слика 6.13:	Графичка представа детрендованих подскупова висинских разлика и улазног сигнала корака 1 (пример 1- поступак 2.)	167
Слика 6.14:	Аутокорелациона функција детрендованих висинских разлика и просечног степена консолидације (пример 1- поступак 1.)	168
Слика 6.15:	Парцијална аутокорелациона функција детрендованих висинских разлика и просечног степена консолидације (пример 1- поступак 2.)	169
Слика 6.16:	Међусобна корелација детрендованих висинских разлика F2-R1, R4- F3 и просечног степена консолидације (пример1- поступак 2.)	170
Слика 6.17:	Шустеров периодограм за детрендоване висинске разлике F2-R1 и R4-F3 (пример 1- поступак 2.)	170
Слика 6.18:	Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за модел ARX пр.1.4 (поступак 1.)	175
Слика 6.19:	Случајност и независност поправака висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за модел ARX пр.1.4 (поступак 1.)	176
Слика 6.20:	Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за модел ARX (пример 1- поступак 2.)	178
Слика 6.21:	Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за модел AR (пример 1- поступак 1.)	180
Слика 6.22:	Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за модел ARMA (пример 1- поступак 1.)	183
Слика 6.23:	Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за модел MA (пример 1- поступак 2.)	185
Слика 6.24:	Померања оцењених висина репера на објекту (пример 1)	187
Слика 6.25:	Брзина померања оцењених висина репера на објекту (пример 1)	187
Слика 6.26:	Детрендовани померања репера и просечни степен консолидације терена (пример 1)	189

<i>Слика 6.27:</i>	Детрендована брзина померања репера (пример 1)	189
<i>Слика 6.28:</i>	Мерени, симулирани и предиктовани подаци на основу четири епохе мерења за кинематички модел- Ојлерова метода (пример 1)	194
<i>Слика 6.29:</i>	Мерени, симулирани и предиктовани подаци на основу четири епохе мерења за динамички модел- Ојлерова метода (пример 1)	196
<i>Слика 6.30:</i>	Мерени, симулирани и предиктовани подаци на основу четири епохе мерења за динамички модел- Тустинова апроксимација (пример 1)	198
<i>Слика 6.31:</i>	Мерени, симулирани и предиктовани подаци за динамички процес првог реда (пример 1)	200
<i>Слика 6.32:</i>	Вештачка неуронска мрежа за (пример 1)	201
<i>Слика 6.33:</i>	Мерени и симулирани подаци за мрежу ширења уназад – нетрендовани подаци – пример 1.	202
<i>Слика 6.34:</i>	Мерени и симулирани подаци за мрежу ширења уназад – нетрендовани подаци (пример 1)	203
<i>Слика 6.35:</i>	Панорамски снимци моста Слободе	207
<i>Слика 6.36:</i>	Подужни пресек моста са диспозицијом ослањања	207
<i>Слика 6.37:</i>	Скица мреже за праћење пилона моста „Слобода“ у Новом Саду	208
<i>Слика 6.38:</i>	Распоред сила на пилону	208
<i>Слика 6.39:</i>	Распоред оптерећења по фазама	210
<i>Слика 6.40:</i>	Графички приказ излазних и улазних сигнала (пример 2)	213
<i>Слика 6.41:</i>	Аутокорелација и парцијална аутокорелација излазних сигнала (пример 2)	214
<i>Слика 6.42:</i>	Међусобна корелација улазних и излазних сигнала (пример 2)	215
<i>Слика 6.43:</i>	Симулација и предикција корака 1 померања за модел ARX када је процес линеаран (пример 2)	217
<i>Слика 6.44:</i>	Симулација и предикција корака 1 померања за модел ARX када је процес нелинеаран (пример 2)	220

<i>Слика 6.45:</i>	Симулација и предикција корака 1 померања за модел (пример 2)	222
<i>Слика 6.46:</i>	Архитектура вештачка неуронска мрежа (пример 2)	224
<i>Слика 6.47:</i>	Мерени и симулирани подаци за мрежу ширења уназад (пример 2)	225
<i>Слика 6.48:</i>	Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за период опажања 15 дана	228
<i>Слика 6.49:</i>	Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за период опажања 60 дана	229

## СПИСАК ТАБЕЛА

Број табеле	Назив табеле	Страна
Табела 2.1:	Геодетско моделовање деформационог процеса у времену и простору [ FIG Publication NO. 25,2001]	34
Табела 2.2:	Карактеризација и класификација деформационих модела ( <i>Welsch and Heunecke 1999</i> ) [ у FIG Publication NO. 25,2001]	36
Табела 2.3:	Инструменти за мерење деформација [Огаја,2002]	38
Табела 2.4:	Методe за мерења деформација [Огаја,2002]	40
Табела 5.1:	Методe оцењивања Волтера параметара [Heien,1999]	119
Табела 5.2:	Примена вештачких неуронских мрежа	123
Табела 5.3:	Функције преноса (активационе функције)	125
Табела 6.1:	Приближне висине и план опажања	149
Табела 6.2:	Висинске разлике добијене симулирањем мерења	150
Табела 6.3:	Тест значајности детрендовања висинских разлика (пример 1 - поступак 1.)	155
Табела 6.4:	Тест стационарности парцијалне аутокорељације висинских разлика (пример 1- поступак 1.)	156
Табела 6.5:	Тест стационарности дисперзија и средњих вредности подсерија (пример 1- поступак 1.)	165
Табела 6.6:	Оцене параметара и априорног стандардног одступања апроксимирајућих кривих (пример 1- поступак 2.)	165
Табела 6.7:	Тест значајности детрендовања висинских разлика (пример 1- поступак 2.)	166
Табела 6.8:	Тест стационарности парцијалне аутокорељације висинских разлика (пример 1- поступак 2.)	166
Табела 6.9:	Тест стационарности дисперзија и средњих вредности подсерија (пример 1- поступак 2.)	166

<i>Табела 6.10:</i>	Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX пр.1.1 (поступак 1.)	172
<i>Табела 6.11:</i>	Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX пр.1.2 (поступак 1.)	173
<i>Табела 6.12:</i>	Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX пр.1.3 (поступак 1.)	173
<i>Табела 6.13:</i>	Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX пр.1.4 (поступак 1.)	174
<i>Табела 6.14:</i>	Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел ARX пр.1.4 (поступак 1.)	175
<i>Табела 6.15:</i>	Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX (пример1- поступак 2.)	177
<i>Табела 6.16:</i>	Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел ARX (пример 1- поступак 2.)	178
<i>Табела 6.17:</i>	Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел AR (пример 1- поступак 1.)	179
<i>Табела 6.18:</i>	Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел AR (пример 1- поступак 1.)	180
<i>Табела 6.19:</i>	Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел AR (пример 1- поступак 2.)	181
<i>Табела 6.20:</i>	Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARMA (пример 1- поступак 1.)	182
<i>Табела 6.21:</i>	Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел ARMA (пример 1- поступак 1.)	183
<i>Табела 6.22:</i>	Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел MA (пример 1- поступак 2.)	184
<i>Табела 6.23:</i>	Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел MA (пример 1- поступак 2.)	185
<i>Табела 6.24:</i>	Оцењени параметри апроксимирајућих кривих за померање репера (пример 1)	188
<i>Табела 6.25:</i>	Оцењени параметри апроксимирајућих криви за брзине померања репера и улазни сигнал (пример 1)	188

---

Табела 6.26:	Тест значајности детрендовања временских серија (пример 1)	190
Табела 6.27:	Тест стационарности парцијалне аутокорејације померања, брзине померања и улазног сигнала (пример 1)	190
Табела 6.28:	Тест стационарности дисперзија и средњих вредности подсерија померања, брзине померања репера и улазног сигнала (пример 1)	191
Табела 6.29:	Оцењене вредности параметара кинематичког модела- Ојлерова метода са оценом стандардног одступања (пример 1)	192
Табела 6.30:	Критеријуми апроксимације и Акаике критеријум за кинематички модел- Ојлерова метода (пример 1)	193
Табела 6.31:	Оцењене вредности параметара динамичког модела- Ојлерова метода са оценом стандардног одступања (пример 1)	195
Табела 6.32:	Критеријуми апроксимације и Акаике критеријум за динамички модел- Ојлерова метода (пример 1)	196
Табела 6.33:	Оцењене вредности параметара динамичког модела- Тустинова апроксимација са оценом стандардног одступања (пример 1)	197
Табела 6.34:	Критеријуми апроксимације и Акаике критеријум за динамички модел- Тустинова апроксимација (пример 1)	197
Табела 6.35:	Параметри динамичког процеса првог реда са критеријумом апроксимације (пример 1)	200
Табела 6.36:	Критеријуми апроксимације за вештачку неуронску мрежу (пример 1)	202
Табела 6.37:	Временски план опажања са вредностима улазних сигнала	203

---

---

Табела 6.38:	Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX када је процес линеаран (пример 2)	217
Табела 6.39:	Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел ARX када је процес линеаран (пример 2)	218
Табела 6.40:	Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX када је процес нелинеаран (пример 2)	219
Табела 6.41:	Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел ARX када је процес нелинеаран (пример 2)	220
Табела 6.42:	Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел AR (пример 2)	221
Табела 6.43:	Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел AR (пример 2)	222
Табела 6.44:	Критеријуми апроксимације за вештачку неуронску мрежу (пример 2)	224
Табела 6.45:	Основни подаци о временским серијама за различите периоде опажања	227
Табела 6.46:	Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за различите периоде опажања	228
Табела 6.47:	Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за различите периоде опажања	229



## ОЗНАКЕ

Ознака	Значење ознаке
$F$	спољашња сила
$M \frac{d^2x}{dt^2}$	сила инерције
$F \frac{dx}{dt}$	сила вискозног пригушења (консолидација терена)
$Kx$	сила еластичности (стишљивост)
$z_{i,x}$	стандардизована аномалија
$X(s)$	Лапласова трансформација излазног сигнала
$U(s)$	Лапласова трансформација улазног сигнала
$\mathcal{Z}$	Зет трансформација
$\mathcal{L}$	Лапласова трансформација
$\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k k)}$	апостериори коваријациона матрица
$\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k),\mathbf{y}(k)}$	међусобно коваријациона матрица између стања $\mathbf{x}(k)$ и излаза
$\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k+1)}$	коваријациона матрица простора стања за одређени тренутак
$\mathbf{P}_{\mathbf{y}(k)}$	коваријациона матрица излазних (мерених) сигнала
$\hat{c}_{\varepsilon u}^N(k)$	тест величина независности поправака од улазних сигнала
$\bar{g}_s(l_1 \dots l_s)$	Волтера коефицијенти
$\  \ $	норма матрице
$\Delta^2(k)$	предње разлике другог реда
$\mathbf{P}_0$	коваријациона матрица параметара стања процеса
$\mathbf{Y}_0$	вектор координата у тренутку $t = 0$
$\mathbf{Y}_{par}(t)$	партикуларно решење диференцијалне једначине
$\mathbf{Y}_{pu}(t)$	компонента прелазног режима услед почетних услова
$\bar{\mathbf{g}}$	вектор Волтера коефицијената
$\bar{\mathbf{x}}(k+1)$	очекивана вредност простора стања $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}_0$	вектор параметара почетног стања процеса

---

$\bar{y}$	аритметичка средина од вектора мерних излаза
$\hat{y}$	вектор симулираних или предиктованих моделских излаза
$A_j$	амплитуда
$B_1$	остатак Бромвич-овог интеграла
$B_j$	амплитуда
$\hat{F}(x)$	оцена квадрата одступања
$F^*(\omega)$	нормализована спектрална функција
$Fit_{[\%]}$	процент апроксимације
$G_n(f_1, \dots, f_n)$	функција преноса $n$ - тог степена
$K_{st}$	статичко појачање система
$K_{st}$	статичко појачање
$[N/2]$	највећи цео број који је мањи или једнак $N/2$
$N'$	ефективна величина узорка
$N_{VK}$	број Волтера коефицијената
$R^2$	коефицијент значајности детрендовања
$S_j^2$	спектрум
$T_{ob}$	временска константа објекта
$X_i$	случајна величина временске серије
$a_i, b_i$	коефицијенти (параметри) модела
$a_n$	коефицијенти Тејлоровог реда
$c_k$	аутоковаријациони коефицијент за корак $k$
$e_t$	регресиона грешка
$f^*(\omega)$	нормализовани спектар
$f_j$	основна или Фуријеова фреквенција
$g_i$	тежина за изравнати периодограм - Даниелов прозор
$g_n(t_1, \dots, t_n)$	Волтера параметар
$g_t$	тренд временске серије у тренутку $t$
$l_{jmax}$	меморија система
$n_a$	корак излазног сигнала
$n_b$	корак улазног сигнала
$n_c$	корак поремећаја

---

---

$r_k$	аутокорелациони коефицијент за корак $k$
$s_i^l$	осетљивост (парцијални извод грешке по мрежном излазу)
$s_t$	филтрирана временска серија
$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$	квантил нормалне расподеле за ниво значајности $\frac{\alpha}{2}$
$\hat{v}(t t-1)$	предикција поремећаја један корак унапред (условно очекивање)
$\hat{v}(t+k t)$	предикција поремећаја $k$ - корака унапред (условно очекивање)
$w_i$	тежина за филтрирање података временске серије
$w_t^1$	разлике првог реда сукцесивних резултата мерења временске серије
$w_t^2$	разлике другог реда сукцесивних резултата мерења временске серије
$\dot{x}$	брзина
$\ddot{x}$	убрзање
$x_i$	резултат мерења у тренутку $i$ временске серије
$\hat{y}(t t-1)$	предикција излазног сигнала један корак унапред (условно очекивање)
$\hat{y}(t+k t)$	предикцију излазног сигнала $k$ - корака унапред (условно очекивање)
$y^0(kT)$	излазни сигнал без поремећаја
$y_1$	партикуларно решење диференцијалне једначине
$y_i^{mer}$	мерени (жељени) излазни сигнал
$z^{-k}$	оператор померања уназад
$\zeta_{N,M}$	тест величина случајности поправака
$\lambda_k$	тежина за Блекман-Тукијев спектар
$\sigma_j^2$	квадрат стандардног одступања (дисперзија) амплитуде
$\varphi_j$	фаза дискретна Фуријеова трансформација
$\chi_{(\vartheta, \frac{\alpha}{2})}^2$	квантил $\chi^2$ расподеле за $\vartheta$ - степени слободе и вероватноћу $\frac{\alpha}{2}$
$\omega_j$	угаона фреквенција
$\Delta(k)$	предње разлике првог реда
AIC	Акаике информациони критеријум

---

---

$h(k)$	импулсни одговор
$h(t)$	јединична одскачна (Хевисајдова) функција
$\Sigma$	суматор
$A(z)$	комплексни лик излазног сигнала
$\mathbf{A}(t)$	матрица коефицијената (парцијалних извода по параметрима система) континуираног модела система – матрица система
$\mathbf{B}(t)$	матрица коефицијената континуираног модела система по улазним сигнаlima
$\mathbf{D}(t)$	матрица континуираног мереног модела (коефицијената функције веза између мерења и параметара система)
$\mathbf{E}(T)$	матрица коефицијената дискретног модела система по параметрима система
$\mathbf{F}(T)$	матрица коефицијената дискретног модела система по улазним сигнаlima
$\mathbf{G}(t)$	матрица коефицијената континуираног модела система по поремећајима система
$\mathbf{H}(t)$	матрица континуираног мереног модела (коефицијената функције веза између мерења и улазних сигнала)
$\mathbf{I}$	јединична матрица
$\mathbf{K}(k)$	матрица Калмановог појачања
$\mathbf{M}(T)$	матрица коефицијената дискретног модела система по поремећајима система
$\mathbf{Q}$	коваријациона матрица белог шума
$\mathbf{R}$	коваријациона матрица
$\mathbf{W}$	матрицу тежина димензија $s \times R$
$\mathbf{Y}(T)$	вектор координата у тренутку $t = T$
$\mathbf{v}(t)$	вектор грешака мерења
$\mathbf{w}(t)$	вектор поремећаја
$\mathbf{y}(k)$	вектор резултата мерења у тренутку $kT$
$B(z)$	комплексни лик улазног сигнала
$C$	коефицијент пригушења
$C(z)$	комплексни лик поремећаја

---

---

$D(e_t)$	дисперзија резидуала након детрендовања серије
$D(x_t)$	дисперзија оригиналне серије
$D(\ )$	дисперзија
$E(\ )$	математички оператор (очекивање)
$F(\omega)$	спектрална функција расподеле
$F(s)$	комплексни облик функције у континуираном систему
$FPE$	финална грешка предикције
$G(z)$	функција преноса
$H(z)$	функција преноса поремећаја
$I(f_j)$	јачина (енергија) одређене фреквенције
$I(f)$	периодограм
$K$	специфична густина материјала
$L(\theta, \Lambda)$	логаритамска функција максималне веродостојности
$M$	маса објекта (оптерећење)
$P(u)$	полином који зависи само од улазног сигнала
$Q(u)$	полином који зависи само од улазног сигнала
$T$	интервал (период) одабирања
$U(z)$	$Z$ - трансформација улазног сигнала
$X(z)$	$Z$ - трансформација излазног сигнала
$a$	регресиона константа
$b$	регресиони коефицијент
$b$	утицај (bias)
$cov(x, y)$	коваријација
$d(f)$	дискретна Фуријеова трансформација у комплексном облику
$e(t)$	независна случајна промењива, са познатом густином расподеле и идентично распоређена
$f(e)$	функција густине расподеле поремећаја
$f(t)$	функција
$f(\omega)$	спектрална функција густине (спектрум)
$g(\tau)$	импулсни одговор (функција тежина)

---

---

$k$	коэффициент крутости тла
$kT$	дискретни тренутак опажања
$n$	мрежни излаз
$q$	притисак
$r$	корелациони коэффициент између две мерене величине
$u(t)$	улазни сигнал у тренутку $t$
$v(t)$	поремећај у тренутку $t$
$x$	померај
$y(t)$	излазни сигнал у тренутку $t$
$z$	Фишера трансформација узорачког коэффициента корелације
$\Phi(t)$	фундаментална матрица система
$\alpha$	ниво значајности
$\delta(t - t_0)$	импулсна (Dirac $\delta$ ) функција
$\mu$	тренд временске серије
$\rho(f_j)$	модуо дискретна Фуријеова трансформација
$\tau$	временско кашњење система
$\tau$	чисто временско (транспортно) кашњење система
$\omega$	тежина
$\vartheta$	број степени слободе
$\vartheta$	коэффициент сигурности
$\theta$	вектор параметара
$\varphi(t)$	регресиони вектор

# 1. УВОД

Деформације су промене:

- у конструкцији објекта и њеној околини које настају у току грађења и употребе објекта, а које угрожавају стабилност објекта;
- на тлу (клизишта, померање земљине коре).

Оне настају као последица деловања унутрашњих и спољашњих сила, као што су: утицај ветра, промена температуре и нивоа подземних вода, тектонски и сеизмолошки утицаји, динамичка и статичка оптерећења објекта. Деловањем ових сила на конструкцијама и објектима настају: угиби, нагиби, увртање и искривљеност; а могућа су оштећења у облику пукотина и ломова. По карактеру се померања и деформације деле на: равномерна и неравномерна померања, еластичне и пластичне деформације; према промени смера деле се на: вертикалне и хоризонталне; а по угрожености објекта на: неопасне, толерантне, озбиљне и критичне.

Испитивање конструкција или објекта мерењем померања и деформација је одређивање положаја и облика објекта у односу на референтни систем и време. Релативна померања и напони који се појављују на конструкцији или објекту одређују се мерењима грађевинске и геодетске струке, промене у структури терена на основу геотехничких мерења, а промене у референтном систему на основу геодетских опажања. Основни показатељи за интерпретацију резултата мерења су: смер, величина и карактер деформација. Међутим, са применом теорије система у деформационој анализи, поред интерпретације резултата мерења, изводи се моделирање објекта и конструкција, верификација модела на основу мерења, као и предиктовање понашања применом верификованог модела. Мерење померања и деформација је неопходно због: оцене стања конструкције, оцена стања објекта везаних са процесом грађења, санације, појачања конструкције или провере теоријских претпоставки.

Ово комплексно питање заокупља пажњу геодетских стручњака од двадесетих година прошлог века, али интензиван развој ове области Инжењерске геодезије је започео пре четрдесет година појавом првих радова (Пелцера, 1971.) и одржавањем 1975. године Првог FIG (Fédération Internationale des Géomètres – International Federation of Surveyors) симпозијума деформационих мерења у Кракову. Од тада је организовано једанаест симпозијума, формиране две Ад-хок групе, објављено много чланака и књига из ове области, развијено више метода и система за мониторинг објекта.

Пре три деценије Пелцер (1978.) и Велш (1981.) почели су да примењују теорију система за описивање деформационих процеса. За потпуно описивање деформационих процеса поред одређивања величине и смера померања и деформација потребно је познавати улазне величине, односно силе које делују на објекат који се прати, физичке карактеристике објекта и напоне који се јављају у конструкцији и тлу. Сарадња Геодезије са осталим струкама које се баве деформационим мерењима и усклађивање термина је неопходно за успешну анализу деформационих мерења, моделирање и предиктовање понашања објекта. Колико се пажње посвећује безбедности и функционалности објеката, као и заштити људи и околине од катастрофа најбоље показује број међународних асоцијација и удружења струка које се баве овим проблемом. У оквиру, већ споменуте FIG, једна од најактивнијих радних група је Радна група 6.1 за деформациона мерења и анализу, која ради у оквиру Комисије 6. за инжењерску геодезију. До сада је ова радна група организовала дванаест међународних симпозија, који су се искључиво бавили проблемима деформација природних и вештачких објеката. Поред ове федерације постоје и следеће међународне асоцијације и удружења:

- Интернационална асоцијација за геодезију (International Association for Geodesy – IAG)

У оквиру ње ради специјална комисија 4 (Special Commission 4 – IAGSC4) која се бави геодинамиком, померањем тектонских плоча и деформацијама земљине коре. Ова комисија је у Вухану (Кина) организовала семинар под називом “Мониторинг конструкција и локални геотехнички процеси” 2001. године.



- Интернационално удружење за фотограметрију и даљинску детекцију (International Society for Photogrammetry and Remote Sensing – ISPRS)  
Проблемима деформација се бави веома активна Комисија 5 за фотограметрију и визуализацију.
- Интернационална асоцијација за рударска мерења (International Society for Mine Surveying – ISM)  
Комисија 4 се бави слегањем и заштитом тла у рударским областима.
- Интернационална асоцијација за механику стена (International Society for Rock Mechanic –ISRM) која се бави механиком стена и стабилношћу терена,
- Интернационална комисија за велике бране (International Commission on Large Dams – ICOLD),
- Интернационална организација за механику тла и фундарање (International Society of Soil Mechanic and Foundation Engineering)
- Интернационална асоцијација хидролошких наука (International Association of Hydrological Sciences – ISAH) која организује интернационалне симпозијуме о слегању тла услед протока подземних течности (вода, уље и др.).

## 1.2 ИДЕЈА И ЦИЉ ОВОГ РАДА

Пројекат конструкције се реализује уз усвајање одређених претпоставки и упрошћења. Модели који се заснивају на природним законима или хипотезама су формалног карактера и имају општу примену. Из овога произлази да пројектовање и извођење грађевинских објеката обухвата читав низ претпоставки, што резултира повећаним димензијама појединих елемената објеката, које поскупљује њихову изградњу. Одређивање модела понашања система (природни и вештачки објекти) на основу мерења је један од основних задатака савремене науке. Праћењем објекта у референтном (апсолутном) систему се бави Инжењерска геодезија, која је присутна у свим фазама изградње и експлоатације инжењерског објекта.

Циљ овог рада је:

- Сагледавање комплексности експерименталног моделирања деформационих процеса (избор структуре и степена модела, методе оцењивања параметара модела и валидација модела),
- Упоређење предиктовања понашања објекта добијеног применом линеарних и нелинеарних модела, односно анализа могућности линеаризација нелинеарних деформационих процеса,
- Предлог поступка одређивања временског плана опажања на основу експериментално одређеног модела (идентификација система),
- Предлог поступка одређивања степена система применом корелисаности случајних процеса, односно колико претходних вредности улазних и излазних сигнала временских серија утиче на тренутну вредност излазног сигнала.

### 1.3 ИСТОРИЈСКИ РАЗВОЈ

Крајем седамдесетих и почетком осамдесетих година прошлог века геодетски стручњаци из области деформацине анализе, као и Радна група 6.1 FIG, бавили су се развојем нових техника мониторинга и геометријском анализом периодично опажаних геодетских деформационих мрежа, а континуиране мерне технике су тек почеле да се развијају. Први FIG симпозијум о деформационим мерењима одржан је у Кракову 1975. године. У то време главни проблем деформационе анализе је био утврђивање стабилних референтних тачака у контролним мрежама. На Другом симпозијуму у Бону (1978.) основан је Ад-хок комитет за деформациону анализу са задатком да упореди различита решења из ове области и предложи јединствени приступ за геометријску анализу деформација на основу геодетских мерења. Паралелно са радом овог комитета формирано је неколико развојних центара који су били при универзитетима у Карлсруеу, Хановеру, Штутгарту и Минхену у Немачкој, затим у Њу Брунсвику у Канади и Делфту у Холандији. Рад комитета је презентирао на: XVI FIG конгресу у Монтреалу

(1981.), III симпозијуму о деформационим мерењима у Будимпешти (1982.), XVI I FIG конгресу у Софији (1983.), XVIII FIG конгресу у Торонту (1986.).

Упоредо са радом комитета неколико истраживача, посебно на универзитетима у: Штутгарту (*Felgendreher 1981., 1982.*), Хановеру (*Boljen 1983., 1984.*), Фредериктону (*Chrazanowski 1982., 1986., Chen 1983., Chrazanowski и Chen, 1986.*), Калгарију (*Teskey 1986., 1988.*) и Минхену (*Ellmer 1987., Kersting 1992.*), иницирају рад на проширењу деформационе анализе у физичку интерпретацију и моделовање односа између узрочних сила (напрезања-инпути) и резултујућих деформација. У исто време десио се и огроман напредак у аутоматским мерним техникама, чије је могућности описао Пелцер 1977. и 1978. године. Рад ових истраживача је поставио основе за дубљу анализу деформација које се опажају геодетским методама, односно посматрање деформација као динамичког процеса. Такође, овакав приступ је довео до много већег повезивања геодезије са другим струкама, посебно са грађевинарством и геотехником.

Данашњи задатак деформационих мерења је истраживања кретања и померања објекта у времену и простору. Овакав приступ захтева развој нових мерних техника и поступака за анализу уз интердисциплинарну сарадњу приликом одређивања узрочних сила и физичких карактеристика тела које се посматра.

## 1.4 ПРЕДМЕТ И ЗАДАЦИ ДЕФОРМАЦИОНЕ АНАЛИЗЕ

Објекти који су предмет надгледања (мониторинга) су:

- инжењерски објекти и конструкције са непосредном околином,
- клизишта, ерозиони или абразивни терени, терени који се слежу и потенцијални одрони,
- померање Земљине коре – померање појединих блокова, дисторзионе зоне,
- потенцијалне опасне зоне, односно предвиђање геодинамичких процеса, као што су: земљотреси, вулканске ерупције и одрони.

Циљ надгледања објеката је спречавања хуманитарних и материјалних штета које могу настати као последица деформационих процеса. У оквиру мониторинга основни задатак геодетске деформационе анализе је опажање и анализа деформационих, излазних, сигнала.

У последњих неколико година дошло је до значајне промене у општем схватању деформационе анализе и примењене методологије. Више није задатак да се утврди величина промене геометрије објекта, већ се деформације сада посматрају као динамички процес. Оваквим приступом је могуће моделирање понашања посматране конструкције и на основу модела може се предиктовати или симулирати понашање конструкције у функцији од времена и улазних сигнала (сила које делују на конструкцију). Нови правци развоја ове области инжењерске геодезије су:

1. развој мрежа за континуирани мониторинг и алармних система,
2. примена нових метода за моделирање мерних грешака,
3. примена теорије система (идентификације система) за моделирање деформационих процеса.

У наредна два потпоглавља су приказана прва два задатка деформационе анализе, а трећи задатак је предмет ове дисертације и биће дат кроз следећа поглавља.

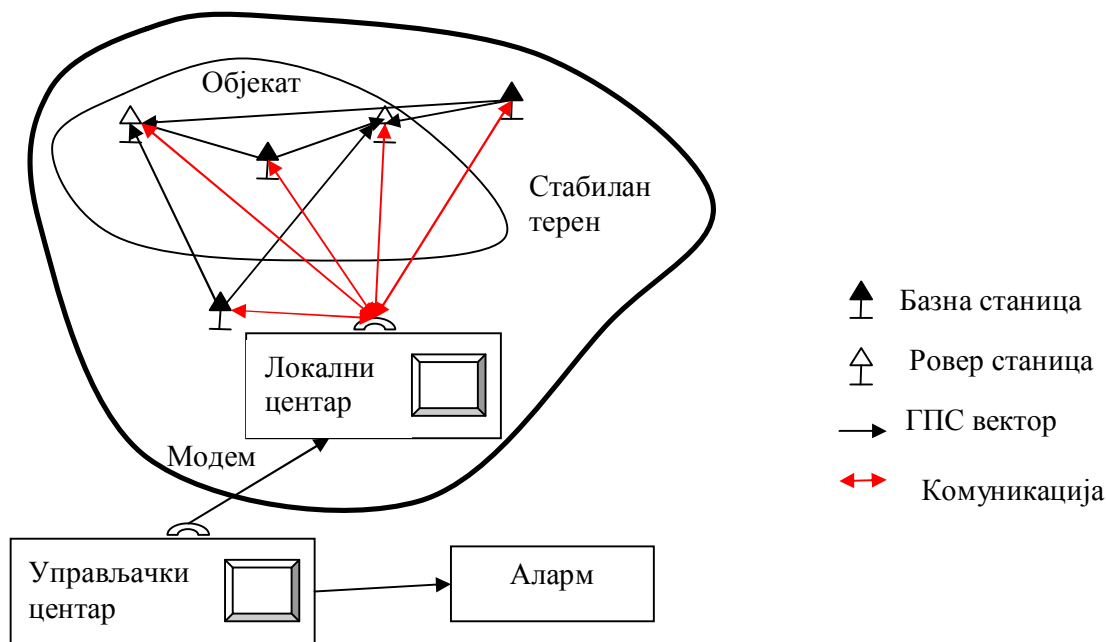
### 1.4.1 Геодетске мреже за континуирани мониторинг и алармни системи

Геодетски мониторинг са алармним системом се примењује за перманентно осматрање великих конструкција (тунела, брана, мостова) или регионалних геомеханичких процеса. Систем за мониторинг комбинује геодетске мерне уређаје (сензоре): инструменте за мерење у глобалном позиционом систему (ГПС) и роботизоване тоталне станице, и геотехничке сензоре, као што су: екстензиометри, инклинометри, пиезометри, акцелерометри и др. Алармни систем се активира када мерени излазни (деформациони) сигнали изађу из дозвољеног опсега.

Геодетска мрежа за континуирано праћење састоји се, као и све геодетске мреже у инжењерству, од тачака основне мреже, које се постављају изван зоне деформација, и тачака на објекту. На тачкама основне мреже се постављају стационарни ГПС пријемници или тоталне станице, а на тачкама на објекту могу бити стационарни ГПС пријемници, ровер станице или призме.

Пошто је овај систем намењен за континуирано праћење деформационих процеса на ризичним локацијама управљање системом и обрада података се изводи у центрима. Постоје локални и управљачки центри. Локални центар је повезан са рачунарима на које су прикључени мерни сензори. Веза између локалног центра и рачунара остварује се помоћу каблова или радио модемом. У локалним центрима се процесирају вектори који се прослеђују у управљачки центар и шаљу се корекције сензорима. Број локалних центара зависи од величине локације која се прати и конфигурације терена, односно од могућности успостављања директне везе са сензорима. У управљачком центру се обрађују мерења из свих локалних центара. Обрада података је аутоматска, односно изводи се специјално развијеним програмом. Уобичајено је да ако су померања у дозвољеним границама светли зелена лампица, ако је стање упозоравајуће (померања близу дозвољених граница) светли наранџаста лампица, а ако су изван дозвољеног опсега црвена лампица и шаље се порука за узбуњивање. Међутим, коначну одлуку о узбуњивању доноси човек због могућих грешака у систему. У наставку овог потпоглавља су приказани неки од комерцијалних система за мониторинг.

Најпознатији систем за мониторинг је GOCA (GPS – based Online Control and Alarm System). Овај систем је намењен за одређивање тродимензионалног померања и развијен је на Универзитету Карлсруе за примењене науке. Мерени подаци са базне станице се шаљу радио везом у ровер станице, и у њима се процесирају вектори. Подаци о процесираним векторима се помоћу радио модема шаљу у GOCA центар на даљу обраду. За сваку тачку објекта померање, брзина и убрзање се одређују применом секвенцијалног изравнања, Калмановог филтера. Организациона шема GOCA система приказана је на слици 1.1.



Слика 1.1: Мониторинг и аларм систем GOCA [Jäger, 2006]

3-D TRACKER програм развијен је од стране *Condor EarthTechnologies INC* ([www.3d-gps.com](http://www.3d-gps.com)) за аутоматизовани 3Д мониторинг. Овај програм, према произвођачкој спецификацији, може истовремено да рачуна 3Д координате са милиметарском тачношћу неколико десетина тачака на којима се налазе GPS пријемници. Дизајниран је за перманентно опажање, а може да обрађује податке са једнофреквентних и двофреквентних пријемника. Примењује другачији принцип за процесирање вектора од стандардне RTK (Real Time Kinematic) методе. Код RTK методе вектори се процесирају у покретној станици (роверу), а у овом програму процесирање вектора се изводи у централној станици. Процесирају

се двоструке и троструке разлике (triple and double differenced), а оцене координата по епохама се добијају применом Калмановог филтера.

LEICA GeoMos ([www.leica-geosystem.com/en/Leica-GeoMos\\_4802.htm](http://www.leica-geosystem.com/en/Leica-GeoMos_4802.htm)) је вишенаменски програм за аутоматски мониторинг. Примењује се за: деформациони мониторинг конструкција (брана, тунела, мостова, високих зграда) и клизишта (у рудницима и на вулканском и геотехничком нестабилном терену). Програм се састоји од следећих модула:

1. за мониторинг, у којем се врши контрола интегритета сензора, прикупљају се резултати мерења у одређеним тренуцима (дискретан период опажања) и анализирају мерења временске серије. Сензори који се могу прикључити за аутоматско прикупљање података су:
  - геодетски (само Leica производи): тоталне станице, ГПС пријемници, нивелири и либеле;
  - метролошки: термометри и барометри;
  - геотехнички: екстензиометри, пиезометри, инклинометри.
2. модул за анализу који анализира тачност мерења, омогућава графички приказ и процесира податке,
3. опциони модул је модул за изравнање који има следеће функције: изравнање мреже по епохама, деформациона анализа и симулација.

Комуникација уређаја се остварује помоћу Leica M-Com интерфејса или помоћу стандардних интерфејса: интернета и мобилне телефоније.

ГПС софтвер за мониторинг клизишта развијен је на Универзитету у Грацу под називом GRAZIA. На Универзитету у Нотингему је испитивано мерење деформација високе фреквенције (краткопериодичне деформације) помоћу ГПС технологије, и мерења су упоређена са мерењима акцелометром. Познато је да се ГПС-ом мере померања који су максималне фреквенције до 10 Hz, односно дугопериодичне промене. Развојем новог ГПС пријемника, који је произвео Javad Navigation System, и применом програма који је развијен на нотингемском универзитету омогућено је мерење померања фреквенције 50 Hz, са центиметарском тачношћу.

Недостаци ових система су следећи:

- сензори се не налазе на самом објекту него близу,

- начин избора тачака који дискретизују објекат,
- грешке сензора и повећање аутокорелације са повећањем фреквенције мерења,
- ограничен начин обраде и презентације резултата мерења због *on-line* режима рада.

#### 1.4.2 Анализа и моделирање грешака мерења

Нове методе за анализу грешака мерења се непрекидно развијају. Раније су се грешке мерења посматрале као адитивне, а сада се оне иновирају, односно моделирају се функције грешака мерења. Приликом анализе мерења мора се обратити пажња на следеће проблеме:

- синхронизација различитих мерних сензора и елиминисање (интерполација) прекида при одабирању у временској серији,
- смањење утицаја рефлексije сигнала и моделирање атмосферских утицаја (нпр. утицаја јоносфере и тропосфере),
- елиминисање грубих грешака,
- моделирање (иновација) грешака,
- одређивање доминантних фреквенција сигнала,
- одређивање аутокорелационе и корелационе функције,
- раздвајање у вектору померања утицаја стварне деформације и поремећаја, који настаје због грешака мерења.

Применом теорије процесирања сигнала се решавају горе наведени проблеми. Процесирање сигнала се изводи у временском или фреквентном домену. Анализа у временском домену се базира на анализи аутокорелационе и корелационе функције, а у фреквентном домену на Фуријеовој трансформацији аутоковаријационе функције. За временску анализу се примењују најчешће линеарни временски инваријантни филтери: ауторегресивни (AutoRegressive – AR), променљиве средине (MovingAverage – MA), ауторегресивни са спољашном побудом (AutoRegressive with eXtrenal input- ARX) или комбинација горе наведених модела (AutoRegressive MovingAverage- ARMA, AutoRegressive



MovingAverage with eXtrenal input-ARMAX), а такође, и Калманов или Винеров филтер. Од деведесетих година прошлог века примењује се тзв. вештачка интелигенција (неуронске мреже и фази логика- fuzzy logics) за нелинеарно филтрирање. За елиминисање грубих грешака користе се робусне методе, као што је Данска и Хјубертова метода, а за елиминисање корелисаности резултата мерења временских серија анализа главних компоненти дисперзије.

2.

## ДЕФОРМАЦИОНА АНАЛИЗА И ИДЕНТИФИКАЦИЈА СИСТЕМА

Идентификација система се бави описивањем динамичких особина, које су предмет интересовања, на основу експерименталних података. Она припада области теорије система, која је првобитно почела да се примењује у области аутоматског управљања и контроле система. Основу за развој идентификације система дао је рад Рудолфа Емила Калмана из 1960. године, који је примењен у мисији Аполо (Apollo). Калманов филтер је, теоријски посматрано, оцењивач за линеарно-квadratне проблеме; где се оцењује тренутан положај линеарног динамичког система на који делују случајни поремећаји на основу мерења, која су у линеарном односу са стањем (положајем) система [Grewal, Andrews, 2001].

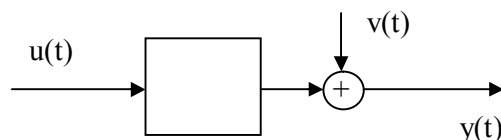
Идентификације система је развијен на основу математичке статистике и временских серија. Статистичка теорија параметарског оцењивања има своје корене у радовима Гауса (1809.) и Фишера (1912.), али највећи напредак у развоју стационарних стохастичких система десио су у периоду 1920-1970. година.

Као почетак примене идентификације система у контроли система узима се 1965. година, јер је публикован чланак „*Effective construction of linear state-variable models from input-output functions*” (B. L. Ho и R. E. Kalman) и „*Numerical identification of linear dynamic system from normal operating records*“ (K. J. Åström и T. Bohlin) [Gevers, 2006]. Ова два рада су означила два главна правца развоја идентификације система, који су и данас доминантни. То је идентификација применом простора стања (*subspace*) и функције преноса, односно структуре модела грешке једначине. Од седамдесетих година прошлог века се не тежи ка добијању „истинитог“ модела, него модела који најбоље апроксимира дати систем. Пошто се апроксимира систем моделом, оцена грешке модела постаје значајан предмет истраживања.

## 2.1 СИСТЕМ И ПРОЦЕС

Систем је скуп компоненти које међусобно делују једна на другу и могу се посматрати као целина. Такође, све компоненте имају заједнички циљ и производе сигнале који се могу опажати. Процес представља промена карактеристика система у функцији од времена [Grewal, Andrews, 2001.]. Динамички систем је систем чије тренутно стање не зависи само од спољних сигнала (побуда) које делују на систем већ и од његовог претходног стања [Ljung, 1987.].

Систем се састоји од улазних сигнала, чије се вредности могу мерити и контролисати (нпр. оптерећење, карактеристике материјала, стишљивост терена), објекат на који делују улазни сигнали, и излазни сигнали, чија се величина може мерити (нпр. координате, брзина, убрзање, нагиб, напони). Такође, на систем могу деловати и поремећаји. Они настају као грешка мерења помоћу одговарајућих сензора; или као последица спољашњих утицаја, који се не могу контролисати (утицај ветра, земљотрес, испирање терена испод објекта услед пуцања водоводних инсталација). Вредност поремећаја може бити позната, детерминистички поремећаји, што је изузетно ретко; или непозната, и моделира се као сигнал (одскочни или импулсни) или као стохастички сигнал. О вредности поремећаја се може доносити закључак на основу мерених вредности излазних сигнала. У моделу динамичког процеса се приказује као адитивни члан. На слици 2.1 приказан је систем са поремећајем.



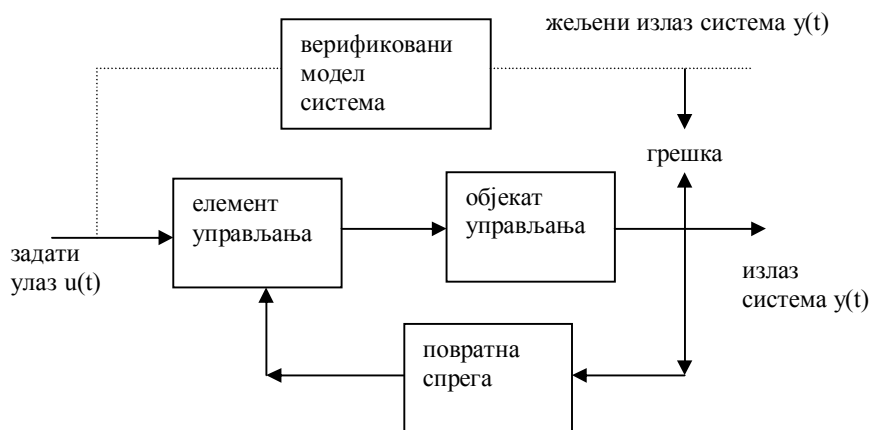
Слика 2.1: Систем са поремећајем [Ljung, 1987.]

- $u(t)$  – улазни сигнал
- $v(t)$  – поремећај
- $y(t)$  – излазни сигнал

У зависности од броја улазних и излазних сигнала систем може бити са:

1. једним улазним и једним излазним сигналом  
(SISO – Simple Input Simple Output),
2. више улазних сигнала и једним излазним сигналом  
(MISO – Multiple Input Simple Output),
3. више улазних и излазних сигнала  
(MIMO – Multiple Input Multiple Output).

По структури системи могу бити отворени, као што је приказан на слици 2.1, или са повратном спрегом који је приказан на слици 2.2. Отворени системи су грађевинске конструкције и њима се бави овај рад; док системи који се примењују у аутоматском управљању, када се добија жељена вредност излазног сигнала, су са повратном спрегом.



Слика 2.2: Систем са повратном спрегом (систем управљања)

На слици 2.2 грешка система представља разлику између жељеног излаза, за који је систем моделиран, и тренутног излаза. Помоћу повратне спреге елементу управљања се шаље информација о грешки; и на основу ње се задати улаз коригује у тзв. референтни улаз, који би требао да омогући на излазу система моделирану вредност излазног сигнала.

Везе између компоненти у систему могу бити линеарне и нелинеарне. У природи су везе најчешће нелинеарне, али се у многим случајевима могу описати и апроксимирати линеарним моделима са задовољавајућом тачношћу. Ова апроксимација се примењује због једноставнијег нумеричког поступка

оцењивања, а самим тим и погоднија је за програмирања; и што је математички апарат био развијен за линеарне моделе, као што је метод најмањих квадрата или метод максималне веродостојности. Међутим, последњих деценија почиње да се примењује моделирање нелинеарних динамичких система, захваљујући развоју нумеричких поступака за оцењивање у нелинеарним моделима (фази логике-fuzzy logics и вештачких неуронских мрежа) и рачунарске технологије.

Инжењерски објекат са улазним сигнаlima (оптерећење, параметри материјала, температура итд.) и излазним сигнаlima (величина, смер, брзина и убрзање деформација) представља систем. Деформација објекта је динамички процес јер зависи од претходног положаја (стања) објекта и у функцији је од времена. Када се разматрају модели инжењерског објекта у зависности од броја улазних и излазних сигнала, углавном се ради о MISO моделима када се анализира померање у 1Д равни, и MIMO моделима када се анализира померање у 2Д и 3Д равни. Моделе са једним улазом и једним излазом, тзв. SISO, сусрећемо када се испитују материјали на тестирајуће улазне сигнале (нпр. одређивање угиба кровних плоча или греде на оптерећење у лабораторијским условима). Везе између компоненти система инжењерске конструкције су нелинеарне, као и код већине процеса у природи, али се може применити линеарна апроксимација, тако да је грешка између вредности излазних сигнала реалног система и вредности предиктованих или симулираних излазних сигнала апроксимираног модела практично занемарљива.

## **2.2 МОДЕЛИ И ПОСТУПАК МОДЕЛИРАЊА**

Познато је да под дејством спољашњих сила (сигнала) у конструкцији се појављују унутрашња напрезања као резултат међусобне интеракције компоненти система. Услед појаве унутрашњих напрезања унутар и на површи конструкције јављују се промене, тзв. излазни сигнали, које су мерљиве.

Успостављање везе између улазних и излазних сигнала се назива моделирање.

Оно може да се изведе на следеће начине:

- графички или табеларно и

- математички.

Графичко или табеларно приказивање се примењује за описивање система са контролисаним улазним сигналом. Раније се највише примењивао за моделирање нелинеарних система. Графички начин приказивања у деформационој анализи се увек примењује да би се приказало понашање карактеристичних тачака у функцији од времена. Приликом графичког приказивања вектора померања карактеристичних тачака конструкције неопходно је да размак између епоха мерења на временској оси одговара протеклом времену између епоха мерења. Оваквим приказом се добија јаснија представа о законитости понашања конструкције (нпр. функција слегања објекта треба да има облик логаритамске функције, и она се може добити само ако ширина интервала одговара протеклом времену између епоха).

Математички (аналитички) модели описују динамичке карактеристике система или само одређене параметре система помоћу диференцијалних једначина за континуиране системе или диференцијалних једначина за дискретне системе. Ови модели се деле према познавању вредности сигнала на: детерминистичке (где су вредности улазних и излазних сигнала и поремећаја познате) и стохастичке (где се вредност неког сигнала, обично је то поремећај, описује као стохастичка величина, најчешће са нормалном расподелом). Према облику, односно функционалној зависности могу бити: линеарни и нелинеарни. Описивања система помоћу диференцијалних или диференцијалних једначина се примењује у свим областима инжењерства или физике. На основу једначина могуће је симулирати или предиктовати понашање система у функцији од времена или различитих улазних сигнала.

Поступак моделирања система може се извести применом природних закона. Да би се систем описао на овај начин он се дели на блокове у којима се претпоставља да важи одређени закон. Хипотетички се усваја који закон се примењује на основу претходних знања и параметара система (нпр. употребљеног материјала). На овај начин се добијају модели који су гломазни и неподесни за практичну примену.

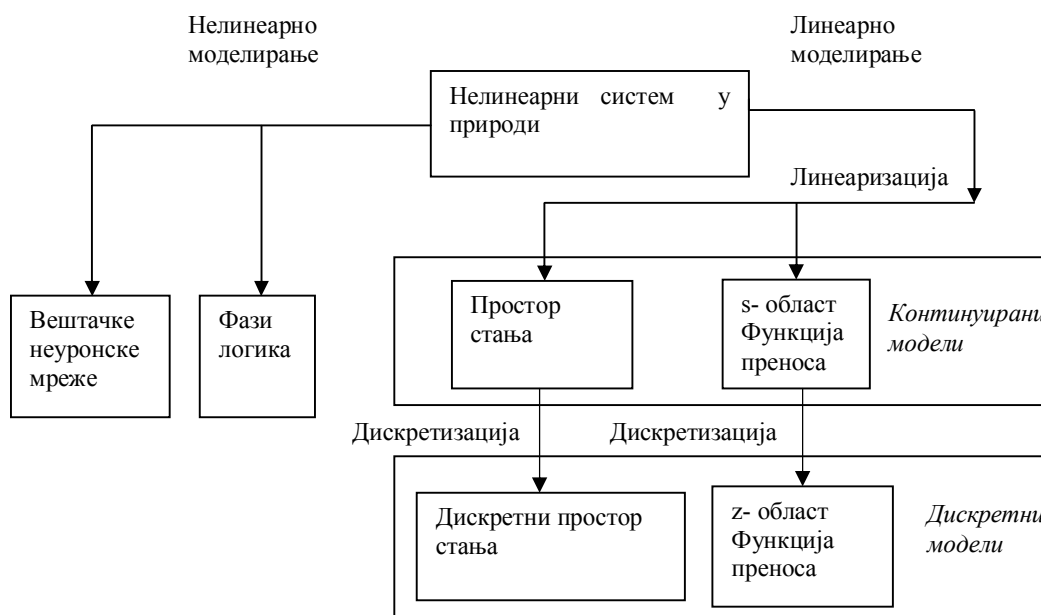
Други начин моделирања је на основу експерименталних мерења. Ово је најпоузданији начин моделирања, јер се добија на основу мерења на конкретном

систему, који ће после служити као пример за друге сличне системе, или на основу прототипа. Овакав поступак описивања система или одређених параметара назива се идентификација система и припада области теорије система. Применом поступка идентификације система не тежи се „истинитом“ моделу већ моделу који задовољава захтеве практичне примене, па се неки сигнали који нису доминантни могу занемарити.

У теорији система постоје три поступка моделирања:

- „црна кутија“ (“black box”) када је структура система непозната, а непознате су и вредности параметара;
- „сива кутија“ (“grey box”) када постоје нека сазнања о структури система и приближне вредности параметара;
- „бела кутија“ (“white box”) када је позната структура система и вредности параметара.

Линеарне диференцијалне или диференчне једначине се приказују у облику функције преноса или простора стања. Функција преноса представља однос комплексних ликова излазних и улазних сигнала. Овај начин приказивања модела зове се и улаз-излаз модел, и погодан је за моделирање линеарних временских инваријантних система (каузалних стационарних система са концентрисаним параметрима). Овакав начин приказивања система код линеарних нестационарних система није погодан, јер се један или више параметара мења у функцији од времена. За приказивање линеарних стационарних и нестационарних система погодно је дати модел у облику система диференцијалних/ диференцијалних једначина I реда, који се назива простор стања. За описивање нелинеарних система са комплексном структуром примењују се вештачке неуронске мреже. Оне не дају физичку везу између реалног и моделираног система, односно описивање је интуитивно. На слици 2.3 дата је приказ модела за нелинеарно и линеарно моделирање реалних система у природи.



Слика 2.3: Блок дијаграм модела са поступцима добијања модела

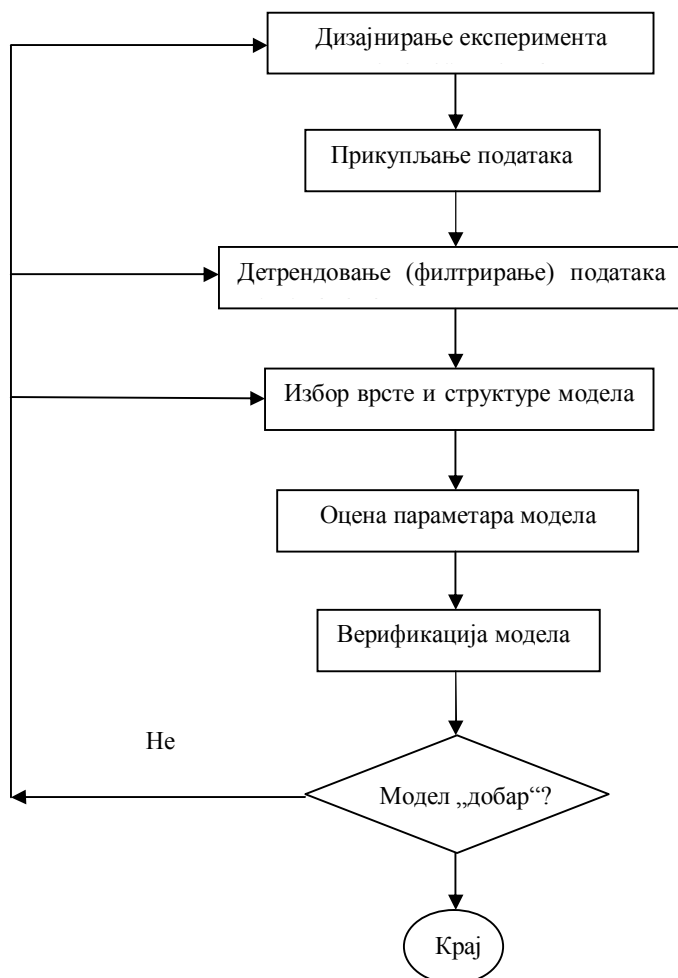
Поступак моделирања се састоји од три главна дела [Ljung, 1987]:

1. података (мерења),
2. скупа могућих модела и структуре модела и
3. правила по којима се оцењују параметри модела на основу мерења.

Процедура идентификације система приказана је на следећем дијаграму (слика 2.4).

Дизајнирање експеримента подразумева да се одреди које се улазне и излазне величине мере, којим инструментима и којом методом, а када је у питању испитивање конструкција (система) и које су вредности неких улазних сигнала, ако се на њих може утицати. Такође, дефинише се и период одабирања, односно временски интервал опажања. Прикупљени подаци морају бити довољно информативни и репрезентативни, да се на основу њих могу симулирати или предиктовати сви могући случајеви за различите вредности улазних сигнала. Ако се експеримент не испланира пажљиво могу се прикупити подаци који немају практичну употребу.





Слика 2.4: Дијаграм процедуре моделирања [Pedersen, 2005]

Филтрирање података подразумева да подаци морају бити стационарни (не мења се расподела података) или слабо стационарни (не мењају се основни параметри расподеле – математичко очекивање и дисперзија) у току периода опажања. Прво се елиминише тренд података. Тренд у временској серији представља спору, постепену промену својстава у интервалу који се истражује. После детрендовања података изводи се процесирање података да би се скалирали улазни и излазни сигнали или елиминисала корелација или аутокорелација између сигнала унутар временске серије. На овај начин се добија нумеричка стабилност приликом оцењивања и остају само независне информације у мерењима, нпр. као

што су независна мерења и објективан број степени слободе. Детаљни приказ филтрирања података дат је у глави 3.

Избор врсте и структуре модела подразумева да се прво дефинише да ли се процес апроксимира линеарним или нелинеарним моделом. Ако ће се применити линеаран модел мора се донети одлука који се модел користи: непараметарски или параметарски модел. Параметарски модел може бити у форми простор стања или функција преноса. Модела функције преноса и простора стања има више (о томе се детаљније говори у глави 4). Приликом употребе модела улаз-излаз неопходно је истражити и који је степен модела, односно колико претходних и тренутних улазних сигнала и претходних излазних сигнала утиче на тренутни излазни сигнал (видети главу 4). Ова анализа се ради у временском (на основу импулсног или одскочног одговора) или фреквентном домену. За проверу степена модела погодно је користити аутокорељациону или парцијалну аутокорељациону функцију, у зависности од врсте модела; графички приказ улазних и излазних сигнала може да помогне у одлуци о степену модела, као и испитивање различитих степена модела са провером значајности параметара.

Оцена параметара модела се изводи применом линеарних или нелинеарних нумеричких метода у зависности од начина описивања система. Методе оцењивања су следеће: метод најмањих квадрата (МНК), метода грешке предикције (Prediction Error Method – PEM), метода помоћних променљивих (Instrument Variable method – IV), нелинеарни МНК, градијент метода и др.

Вредновање (верификација) модела се изводи на следеће начине:

- упоређењем симулираног или предиктованог излаза система на основу модела са мереним излазом,
- анализом аутокорељације поправака и међусобне корелације поправака и улазних сигнала,
- анализом одговора модела у области: импулсног, одскочног или фреквентног одзива система,
- анализом полова и нула линеарног параметарског модела и
- упоређењем различитих структура модела применом Акаике информативног критеријума или Акаике завршне предикционе грешке.

### 2.3 ДЕФОРМАЦИОНА АНАЛИЗА

Динамички процеси грађевинских конструкција се описују природним законима. Уобичајено је да се грађевинска конструкција посматра као линеарни механички систем са једним степеном слободе и који може да врши само праволинијско кретање. За приказивање линеарног механичког система примењује се Други Њутнов закон, који је описан диференцијалном једначином II реда:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F, \quad (2.1)$$

где је  $M$  – маса објекта (оптерећење),  $C$  - коефицијент пригушења,  $K$  – крутост, док су величине  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  : померање, брзина и убрзање, респективно.

Деформациона анализа, којом се баве стручњаци геодетске струке, раније је подразумевала само геометријску интерпретацију (одређивање облика и димензија конструкције, као и вектора померања). Основни проблем у том периоду је био да се утврде стабилне тачке основне мреже, односно тачке код којих није дошло до померања између епоха, као и оцена тачности. Сада се због изградње високих конструкција и конструкција са великим распонима (зграде, торњеви, мостови) све више захтева физичка интерпретација деформација (успостављање везе између узрочних сила и деформација). Овакав начин мониторинга конструкција омогућава добијање података који су неопходни за побољшање прописа о изградњи, процену опасности од природних катастрофа (земљотрес, ураган) и продужење животног века. За успешно моделирање и доношење закључака о деформационом процесу неопходна је сарадња стручњака различитих струка (грађевинске, машинске, рударске, геолошке и геодетске), и потребно је да користе исту терминологију. Најприродније је да се усвоји терминологија механике континуума, јер се конструкција посматра као линеарни механички систем. Термине и поделу модела, који су приказани на крају овог поглавља, усвојио је и Ад-хок (Ad-Hoc) комитет FIG Радне групе 6.1 у свом званичном извештају.

У наставку овог поглавља дата је веза између теорије система и деформационе анализе. Описивање карактеристика динамичког система може се извршити у фреквентном и временском домену. Приказ у фреквентном домену дао је Пелцер

1978 [Pelzer, 1978]. године у раду на Другом интернационалном симпозијуму о деформационим мерењима геодетским методама. Овај рад представља почетак примене теорије система у мониторингу геодетским методама.

### 2.3.1 Деформациони процес и квантовање деформационих сигнала

Геодетским мерењима и њиховом статистичком и нумеричком обрадом се одређује геометријски аспект деформација, односно излазни сигнали. Оне настају услед варијација улазних сигнала, дугопериодичних сигнала (температура, тектонске промене, притисак) и поремећаја, краткопериодичних сигнала (земљотрес, оптерећење услед саобраћаја, удари ветра). На основу предходно наведеног види се да деформациони процес садржи све елементе као на слици 2.1. По карактеру улазни сигнали који делују на конструкцију су: Хевисајдов сигнала, нпр. оптерећење терена услед тежине конструкције или напони који се јављају у конструкцији услед сопствене тежине су константни по вредности и увек присутни) и нагибни (нпр. промена температуре у току дана). Поремећаји су од стране човека неконтролисани сигнали, односно нису предвиђени пројектом. Приликом статичког прорачуна конструкције узимају се уобичајене вредности параметара за подручје где се пројектује објекат, као што је: претпостављена јачина земљотреса, брзина ветра или величина поплавног таласа. Ако су вредности ових параметара у пројектованом опсегу они ће на конструкцији изазвати еластичне деформације, а ако су изван овога опсега могу се јавити пластичне деформације и деловаће као поремећаји. Они по свом карактеру одговарају Дираковом сигналу, јер у кратком временском интервалу су изван опсега. Математички и графички приказ сигнала горе наведених је дат у поглављу 3.

Сви процеси у природи су континуирани. Међутим, приликом опажања није могуће мерења изводити континуирано, него се врши дискретизација или квантовање сигнала. Она се може извести по: нивоу, времену и по нивоу и времену .

У процесу квантовања по нивоу континуални сигнал се замењује низом унапред задатих вредности које сигнал достиже у произвољним тренуцима [Стојић, 1998] (слика 2.5а). Ову врсту квантовања сигнала сусрећемо приликом испитивања конструкције на пробно оптерећење. Мерења се изводе по епохама у којима је оптерећење познато, а угиб конструкције одговара том оптерећењу.

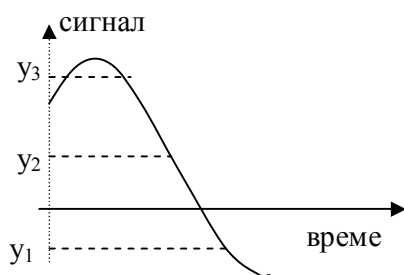
Најчешћи начин дискретизације сигнала приликом геодетског мониторинга је по времену. У овом случају се фиксира интервал одабирања (временски план опажања), а континуирани сигнал се замењује низом дискретних вредности које сигнал има у одабраним тренуцима (слика 2.5б). Временски интервал опажања конструкција зависи од врсте конструкције и геолошког састава терена на коме се објекат гради. Утицај на период опажања има и то да ли је конструкција на сувом или у води; па тако стубови моста у току изградње на сувом се опажају на три месеца, а у води на петнаест дана у току изградње. У случају ако је геометрија објекта угрожена или је дошло до поремећаја услед земљотреса, поплава или јаких удара ветра период одабирања се мења. За одређивање периода опажања било би пожељно, што је показано и у поглављу 6, да се период опажања дефинише на основу теореме о одабирању, која гласи:

*Период одабирања ( $T$ ) треба да је 3-4 пута мањи од временске константе система  $\tau$ :*

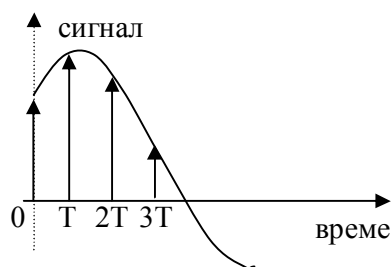
$$T \approx \frac{\tau}{3(4)}. \quad (2.2)$$

Динамичким или статичким прорачуном се предвиђа величина деформација или величина угиба, као и време потребно за стабилизацију објекта (успостављање статичке равнотеже). Према теорији система време које протекне док систем не достигне 63% вредности излазног сигнала се назива временском константом система  $\tau$ . На основу геодетских мерења може се одредити временска константа. Модели у којима фигурише временска константа су приказани у поглављу 4, а поступак одређивања на основу геодетских опажања у поглављу 6.

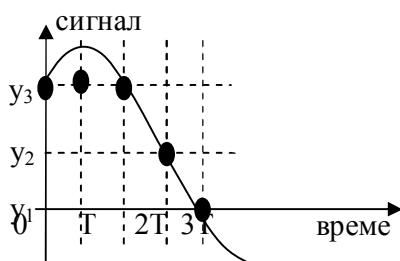
Када се континуирани сигнал квантује по нивоу и времену вредност континуираног сигнала се замењује низом фиксираних дискретних нивоа најближих вредностима континуираног сигнала у тренутку одабирања (слика 2.5ц). Овај начин дискретизације се у деформационој анализи не примењује.



Слика 2.5а: Квантовање по нивоу  
[Стојић, 1998]



Слика 2.5б: Квантовање по времену  
[Стојић, 1998]



Слика 2.5ц: Квантовање по нивоу и времену  
[Стојић, 1998]

Поред дискретизације сигнала и конструкција се апроксимира коначним бројем карактеристичних тачака, које треба да репрезентују понашање целе конструкције. Избор тачака, чије ће понашање да се прати, треба да дефинише пројектант. Сама конструкција или део конструкције може се посматрати као круто или деформативно тело. Без обзира да ли је конструкција пројектована као крута или не треба да се посматра као деформативно тело, јер се на тај начин проверавају претпоставке пројектанта. Ово конкретно значи да на конструкцији морају постојати минимално три нивоа карактеристичних тачака, да би се контролисало да ли се конструкција ломи.

### 2.3.2 Физичка интерпретација деформационих процеса

Физичка интерпретација деформационих процеса даје математичку везу између улазних и излазних сигнала. Математичка веза се може успоставити применом природних закона механике континуума или применом теорије идентификације система у временском или фреквенцијском домену. У овом раду је приказана интерпретација у временском домену.

Да би се физички интерпретирао деформациони процес геодета у сарадњи са другим струкама мора дати одговоре на следећа питања:

1. У ком реду величина и у којим границама се налазе деформације [Pelzer, 1978],
2. Колико су померања различитих тачака на објекту корелисана између себе (међусобна корелација) [Pelzer, 1978],
3. Да ли постоји корелација између деформација за различите временске тренутке (аутокорелација) [Pelzer, 1978],
4. Да ли постоји тренд (периодичност деформација) [Pelzer, 1978],
5. Дефинисање математичке везе између улазних и излазних сигнала ,
6. Симулација или предикција деформација на основу усвојеног модела.

Одговори на ова питања се добијају применом идентификације система, и у наредним потпоглављима су приказане теоријске основе ове области за питања 5 и 6.

#### 2.3.2.1 Импулсни одговор, поремећај и функција преноса

Линеарни временски инваријантни систем (Linear Time Invariant system – LTI) је систем који се најчешће сусреће у теорији и пракси. Он апроксимира реалан систем, али је у већини случајева примена оваквог поједностављења оправдана и са аспекта тачности и једноставности нумеричког рачунања. Систем је:

- инваријантан у временском домену ако одговор система на познати улазни сигнал не зависи од апсолутног времена,

- линеаран ако је одговор система на линеарну комбинацију улазних сигнала исти као линеарна комбинација одговора система на појединачне улазне сигнале и
- каузалан ако одговор система у одређеном временском тренутку  $kT$  зависи од улазних сигнала  $u(t)$  у претходном временском периоду ( $0 < t \leq kT$ ).

ЛТИ каузални систем је потпуно описан *импулсним одговором* (функцијом тежине)  $g(\tau)$  помоћу следеће интегралне једначине:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)u(t - \tau)d\tau, \quad [\text{Ljung},1987] \quad (2.3)$$

где је:

$y(t)$  - излазни сигнал у тренутку  $t$ ,

$u(t - \tau)$  – улазни сигнал у тренутку  $t - \tau$ .

Ако су познати импулсни одговори  $[g(\tau)]_{\tau=0}^{\infty}$  и улазни сигнали  $u(s), 0 < s \leq t$  може се израчунати одговор система  $y(s), s \leq t$ , за било који улазни сигнал.

- Квантовање

У пракси се опажања улазних и излазних сигнала изводе у дискретним тренуцима  $t_k = kT, k = 1, 2, \dots$

$$y(kT) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(kT - \tau)d\tau. \quad [\text{Ljung},1987] \quad (2.4)$$

Временски период између два суседна тренутка опажања  $T$  назива се интервал (период) одабирања. У деформационој анализи, то је временски интервал између две суседне епохе мерења и постоји проблем што није исти током изградње и експлоатације објекта; нпр. контролна мрежа стамбено-пословних објеката се опажа на месец дана у току изградње, у првој години експлоатације интервал је на три месеца, а у наредних три до пет година једном годишње. Такође, потребно време за опажање конструкције није исто у свим епохама. То је поготову проблем код терестричких метода, јер мерења се обављају у данима погодним за мерење. Идентификација система подразумева да је интервал одабирања увек исти, а када није исти да се интерполацијом сведе на једнаке интервале. Ако се опажају споропериодичне промене конструкција не морају интервали бити строго исти између епоха, док код испитивања конструкција на пробно оптерећење и опажања краткoпериодичних процеса интервали морају бити исти.



Вредности улазних сигнала унутар интервала одабирања могу бити константне (задршка нултог реда) или да се мењају. Ако се вредност сигнала између тренутака опажања мења, онда се може промена апроксимирати Тејлоровим редом првог степена (задршка првог реда). Током изградње објекта наноси се оптерећење, па је логично да се примењује задршка првог реда, а након изградње нултог реда. У даљим теоријским разматрањима претпоставља се да је вредност сигнала између мерења иста, па је:

$$u(t) = u_k, \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (2.5)$$

Заменом (2.5) у (2.4) добија се

$$\begin{aligned} y(kT) &= \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(kT - \tau)d\tau = \sum_{l=1}^{\infty} \int_{\tau=(l-1)T}^{lT} g(\tau)u(kT - \tau)d\tau \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \int_{\tau=(l-1)T}^{lT} g(\tau)d\tau \right] u_{k-l} = \sum_{l=1}^{\infty} g_T(l) u_{k-l}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где је  $g_T(l) = \int_{\tau=(l-1)T}^{lT} g(\tau)d\tau$ .

Због једноставности писања последњи израз у (2.6) се замењује са изразом

$$y(kT) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t - k) \quad [\text{Ljung, 1987}] \quad (2.7)$$

Једначина (2.6) показује да је дискретни излазни сигнал система једнак низу сума производа импулсних одговора и вредности улазних сигнала у истим временским тренуцима. Ова апроксимација претпоставља да је вредност улазног сигнала константна у интервалу одабирања. Међутим, ако улазни сигнал није константан између опажања формула (2.6) се може применити уз смањење периода одабирања, односно да се промене вредности улазног сигнала сведу на занемарљив ниво.

### - Поремећаји

Теоријски је могуће добити тачну вредност излазног сигнала у одређеном тренутку  $t$  када су познати импулсни одговори и вредности улазних сигнала пре и у тренутку  $t$ . Међутим, у пракси то није могуће због деловања поремећаја (слика 2.1). Раније је наведено да поремећаји настају као последица грешака у мерењу улазних и излазних сигнала, као и услед постојања улазних сигнала који се немогу контролисати (нпр. испитује се утицај температуре на померање конструкције, али се не може контролисати положај Сунца). На слици 2.1 поремећај је приказан

као адитивни члан испред излазног сигнала. Мерне грешке се појављују и при мерењу улазних сигнала. У овом случају се претпоставља да је измерена вредност улазног сигнала тачна, а вредност излазног сигнала је поремећена за утицај грешке улазног сигнала. Утицај поремећаја се открива на основу упоређења мереног и референтног (импулсног или одскочног одговора) излазног сигнала.

Карактеристика поремећаја је да његова вредност није позната унапред. Познавање претходних поремећаја значајна је за предиктовање долазећег поремећаја. Природно је да се примени теорија вероватноће да би се на основу поремећаја до тренутка  $t$  предиктовао поремећај у тренутку  $t + k$ ,  $k \geq 1$ . Овакав приступ захтева познавање условне функције расподеле, као и параметара функције густине. Овакав приступ је компликован, па се поремећај  $v(t)$  апроксимира следећим изразом

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(t - k), \quad (2.8)$$

$e(t)$  - независна случајна променљива, са познатом густином расподеле и идентично распоређена,

$h(k)$  - импулсни одговор.

На конструкције делују обе врсте поремећаја. Грешке сензора, као што је речено у поглављу 1, су предмет интензивног истраживања геодета. У последње две деценије се примењује теорија процесирања сигнала. Неконтролисани улазни сигнали су нормална појава када се обављају деформациона мерења; јер на објекат делује много ефеката, па смо принуђени да меримо само оне који су предмет интересовања. Такође, немогуће је поставити и одређене сензоре (нпр. термометре, екстензиометре и др.) на карактеристичну тачку која се опажа геодетским методама. Ови утицаји се умањују применом поступака иновације, односно одређеним нумеричким поступцима где се вредности поремећаја предиктују по формули (2.8).

- Функција преноса

Када се на израз (2.7) примени  $\mathcal{Z}$  трансформација, и то тзв. оператор померања уназад (backward shift operator)  $z^{-k}$  [ $z^{-1}u(t) = u(t - 1)$ ,  $z^{-k}u(t) = u(t - k)$ ], добија се следећи облик израза:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)[z^{-k}u(t)] = \\ &= [\sum_{k=1}^{\infty} g(k)z^{-k}]u(t) = G(z)u(t). \end{aligned} \quad [\text{Ljung, 1987}] \quad (2.9)$$

где је:  $g(k)$ - импулсни одговор за дискретни тренутак (видети формулу (2.6)), а  $u(t-k)$ - улазни сигнал у тренутку одабирања  $t-k$ .  $G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)z^{-k} = \frac{Y(z)}{U(z)}$  је функција преноса, и она се добија  $\mathcal{Z}$  трансформацијом импулног одговора, или као количник  $\mathcal{Z}$  трансформисаног излазног или улазног сигнала.

### 2.3.2.2 Симулација и предикција

Један од задатака моделирања система је да се омогући симулирање или предиктовање понашања система за различите вредности контролисаних улазних сигнала и поремећаја. Приликом описивања динамичких карактеристика система мора се имати науму за коју примену се врши моделирања. Тачност модела не може бити већа од тачности употребљених сензора, и његова тачност мора да задовољи практичну примену. У овом потпоглављу детаљније је описан поступак симулације и предикције, јер један од задатака овог рада је симулирање или предиктовање понашања конструкције на основу геодетских опажања.

Систем се може описати у форми: функције преноса, простора стања и полови и нуле. У раду је усвојено да се систем даје у форми следеће функције преноса

$$y(t) = G(z)u(t) + H(z)e(t), \quad (2.10)$$

где је  $H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)z^{-i}$  функција преноса поремећаја и  $G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)z^{-k} = \frac{Y(z)}{U(z)}$  је функција преноса система.

#### - Симулација

Симулација значи да се на основу усвојеног модела (структуре модела и вредности параметара), познатих вредности улазних сигнала и почетних услова рачунају вредности излазних сигнала. С обзиром да се не узима у обзир утицај поремећаја  $v(t)$ , једначина (2.10) је следећег облика:

$$y(t) = G(z)u(t). \quad (2.11)$$

На основу симулације може се анализирати одговор система за различите вредности улазних сигнала. Међутим, на сваки реални систем делује поремећај

$$v(t) = H(z)e(t), \quad (2.12)$$

чија се вредност може предиктовати на основу претходних вредности, без обзира што је  $e(t)$  случајна величина.

Приликом мониторинга објекта ми апстрахујемо објекат одређеним бројем тачака, које треба да репрезентују понашање целог тела (објекта). Ми знамо координате дискретних тачака у почетном тренутку, нулта епоха опажања. Нека је вектор координата у тренутку  $t = 0$

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ x_1(0) \\ z_1(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \\ x_n(0) \\ z_n(0) \end{bmatrix},$$

где је  $n$  - број дискретних тачака на објекту. Уз претходно вектор координата у неком тренутку  $t = T$  се може представити као

$$\mathbf{Y}(T) = \mathbf{Y}_0 + \int_{\tau=0}^T g(t) u(t - \tau) d\tau.$$

Пошто се геодетска опажања обављају у дискретним тренуцима, онда се примењује дискретизација по времену и горе наведени израз добија облик као у формули (2.11).

#### - Предикција

Предикцијом се предвиђа вредност излазног сигнала  $k$ -корака унапред на основу: усвојеног модела, ранијих и тренутног улазног сигнала, као и ранијих поремећаја система. Предикција може да се изводи један корак унапред или  $k$ -корака унапред.

#### *Предикција један корак унапред*

Да би се извршила предикција следеће вредности поремећаја  $v(t)$ , у тренутку  $t$ , неопходно је да су познате вредности поремећаја  $v(s)$ ,  $s \leq t - 1$ . То

подразумева да су одређене вредности извора поремећаја  $e(t)$  до тренутка  $s \leq t - 1$ , који је независно и идентично распоређен. Формула (2.8) се може написати у следећем облику, где су познате вредности поремећеја раздвојене од тренутне непознате вредности поремећаја:

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(t-k) = e(t) + \sum_{k=1}^{\infty} h(k)e(t-k). \quad (2.13)$$

У горе наведеној формули вредност случајне променљиве  $e(t)$ , односно узрока поремећаја, у тренутку  $t$  је непозната. Да би се одредила вредност поремећаја  $v(t)$  примењује се условно очекивање, које се означава са  $\hat{v}(t|t-1)$ :

$$\begin{aligned} \hat{v}(t|t-1) &= \sum_{k=1}^{\infty} h(k)e(t-1) = [\sum_{k=1}^{\infty} h(k)z^{-k}] e(t) \\ &= [H(z) - 1]e(t) = \frac{H(z)-1}{H(z)} v(t) = [1 - H^{-1}(z)]v(t), \end{aligned} \quad (2.14)$$

јер је  $e(t) = \frac{v(t)}{H(z)}$  [Ljung, 1987]. Предиктована вредност један корак унапред  $y(t)$ , где су познате вредности улазних сигнала до и у тренутку  $t$  и вредности поремећаја  $v(s)$  до тренутка  $s \leq t - 1$ , је

$$\begin{aligned} y(t) &= G(z)u(t) + v(s) \\ v(s) &= y(s) - G(z)u(s), \end{aligned} \quad (2.15)$$

а условно очекивање излазног сигнала у тренутку  $t$  је

$$\begin{aligned} \hat{y}(t|t-1) &= G(z)u(t) + \hat{v}(t|t-1) = G(z)u(t) + [1 - H^{-1}(z)]v(t) \\ &= G(z)u(t) + [1 - H^{-1}(z)][y(t) - G(z)u(t)] \\ &= H^{-1}(z)G(z)u(t) + [1 - H^{-1}(z)]y(t). \end{aligned} \quad (2.16)$$

На основу формуле (2.16) може се израчунати грешка предикције

$$y(t) - \hat{y}(t|t-1) = -H^{-1}(z)G(z)u(t) + H^{-1}(z)y(t) = e(t). \quad (2.17)$$

### Предикција $k$ - корака унапред

Приликом предикције поремећаја  $v(t+k)$   $k$ -корака унапред познате су вредности поремећаја  $v(s)$  до тренутка  $s \leq t$ . Поремећај у тренутку  $t+k$  је

$$\begin{aligned} v(t+k) &= \sum_{l=0}^{\infty} h(l)e(t+k-l) \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} h(l)e(t+k-l) + \sum_{l=k}^{\infty} h(l)e(t+k-l). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Прва сума у изразу (2.18), означимо функцију преноса са  $H_k(z) = \sum_{l=0}^{\infty} h(l)z^{-l}$ , је независна у односу на то шта се дешавало до тренутка  $t$  и има математичко очекивање 0. Друга сума је позната у тренутку  $t$ . Означимо функцију преноса

поремећаја до тренутка  $t$  са  $\tilde{H}(z) = \sum_{l=k}^{\infty} h(l)z^{-l+k}$ , где је  $h(l)$ - поремећај у тренутку  $l$ , а  $z^{-l+k}$  - оператор померања уназад.

Условно математичко очекивање за поремећај  $v(t+k)$  на основу  $t$  познатих вредности је:

$$\hat{v}(t+k|t) = \tilde{H}_k(z)e(t) = \tilde{H}_k(z)H^{-1}(z)v(t). \quad (2.19)$$

Пошто је позната предикција поремећаја није тешко применом формуле (2.16) доћи до формуле за предикцију излазног сигнала  $k$ - корака унапред:

$$\hat{y}(t+k|t) = G(z)u(t+k) + \tilde{H}_k(z)H^{-1}(z)[y(t) - G(z)u(t)]. \quad (2.20)$$

Понашање објекта на утицај спољашњих сила се описује диференцијалним једначинама првог или другог реда. Простор стања, који подразумева представљање диференцијалне једначине преко система диференцијалних једначина првог реда, се описује изразом за решење диференцијалне једначине :

$$Y(t) = Y_{pu}(t) + Y_{par}(t),$$

где је  $Y_{pu}(t)$  компонента прелазног режима услед почетних услова. То је период до смиривања терена или објекта након извршених ископа и наношења оптерећења, односно период изградње. Математички посматрано то је решење хомогене диференцијалне једначине. Ова једначина се односи на успостављање стања равнотеже. Други део  $Y_{par}(t)$  представља партикуларно решење диференцијалне једначине. Овај други део укупног одговора је присуства побудних сигнала, као што је утицај: ветра, тектонски поремећаји, промена нивоа подземних вода, температуре и др.

### 2.3.3 Класификација деформационих модела

На VI интернационалном симпозијуму деформационих мерења у Хановеру 1992. године у оквиру Радне групе 6.1 Деформациона мерења основан је Ад-хок комитет „Класификација деформационих модела и терминологије“. На X интернационалном симпозијуму деформационих мерења у Оранцу, Калифорнија, представљен је службени завршни извештај Ад-хок комитета.

Закључак у студији је следећи ([FIG Publication NO. 25,2001]):

*„Деформације објекта су резултат процеса. Данашњи развој технике омогућава детаљно мерење и анализу процеса. У складу са наведеним, тренутни тренд у Инжењерској геодезији није одређивње геометријских промена објекта као феномена већ као динамичког процеса, тј. циљ истраживања је узимање у обзир узрочних сила и физичких особина тела. Тело, узрочне силе и резултирајуће деформације чине динамички систем. Најопштији и најсвеобухватнији модел је динамички, а његовим упрошћењем се добијају: статички, кинематички и модел конгруенције...“*

### **2.3.3.1 Модели деформациона анализа**

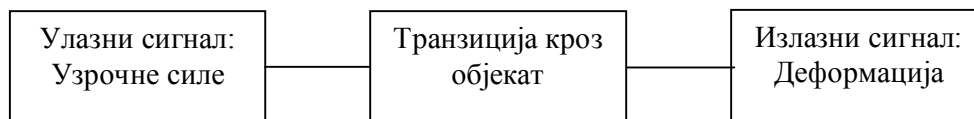
Праћење деформација објекта захтева да се објекат и процес деформација моделује. Као што је наведено у потпоглављу 2.3.1 конструкција је континуалан скуп тачака и она се дискретизује коначним бројем тачкама, које представљају темена фигура. Приликом избора тачака за дискретизацију у геометријском смислу мора се водити рачуна да изабране тачке буду на конструкцији где се очекују највеће деформације или померања (носећа конструкција). Моделовање деформационог процеса објекта конвенционално подразумева геодетско опажање карактеристичних тачака у одређеном временском тренутку (када се врше опажања). То значи да се померања тачака на објекту одређује у дискретни тренуцима, односно не знамо положај тачке на објекту у тренуцима између опажања (претпоставља се да су померања између опажања равномерна). Такође, током епохе мерења све тачке на конструкцији се не опажају у истом тренутку и под истим условима. Сама епоха мерења већих конструкција може да траје више дана и мерења на конструкцији се изводе и када је осунчана и неосунчана, односно температура материјала се мења у током опажања.

Табела 2.1: Геодетско моделовање деформационог процеса у времену и простору [ FIG Publication NO. 25,2001 ]

	Реалан објекат	Моделовање објекта
Геометријски аспект	Објекат је континуалан скуп тачака	Објекат је дискретно представљен помоћу карактеристичних тачака
Временски аспект	Објекат се перменентно деформише	Објекат се посматра у одређеном временском интервалу

За конвенционалну анализу у времену и простору се примењују две класе модела. Модел који се заснива на тестирању подударности (конгруенције) карактеристичних тачака у различитим временским епохама се назива *модел конгруенције*. У њему фактор времена фигурише имплицитно. Модел који описује деформације на основу усвојене функције која зависи од времена, тј. узима се у обзир брзина и убрзање назива се *кинематички модел*.

Напредни модели за деформациону анализу не разматрају само промену геометрије објекта у простору и времену. Они укључују узрочне факторе (узрочне силе, унутрашње и спољашње напоне) који узрокују деформације. Дакле, њима се третирају карактеристичне физичке особине објекта које одређују његов одговор на делујуће силе. Три елемента “узрочне силе” као улазни сигнал, “транзиција кроз објекат” као процес трансфера и “одговор објекта” као излазни сигнал формирају уобичајену целину или, на основу теорије система, динамички процес или динамички систем (слика 2.6).



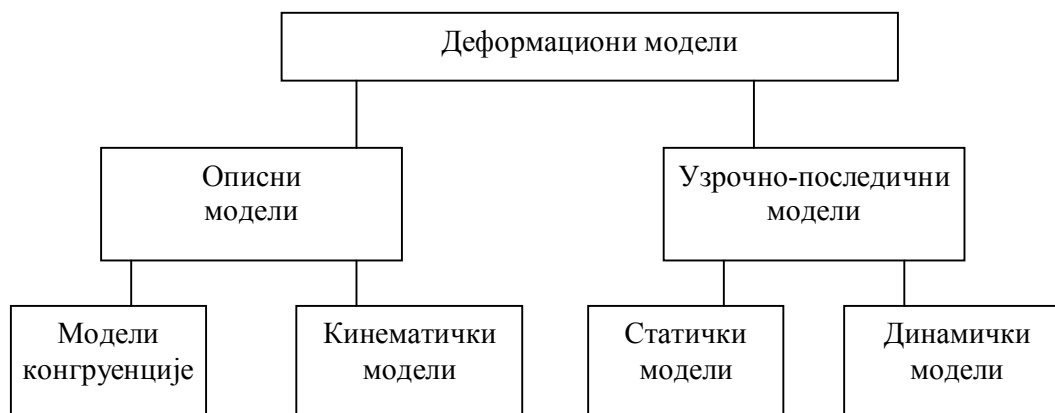
Слика 2.6: Деформације као елемент динамичког система [ FIG Publication NO. 25,2001 ]

Последњих година почеле су да се примењују стандардне математичке методе, засноване на теорији система, којима се описује тренутно понашање динамичких система. Разликујемо следеће варијанте динамичких система:



- Динамички (узрочно-последични) системи: измене улазних сигнала покрећу временско зависни процес адаптације система са последицом да је реакција на излазу закаснела: динамички систем има меморију. Ово је уопштени случај. Специјални случајеви се разликују у погледу на фактор времена. Постоје две врсте динамичких система:
  - а) Динамички системи се понашају као у општем случају: деформације као излазни сигнали су функција времена и (променљивог) оптерећења. Познавање меморије система је основа предикције;
  - б) Статички системи се могу посматрати као специјални случајеви динамичких система. Они реагују тренутно (без меморије) на промену узрочних сила: ново стање је стање равнотеже. Деформације су функција само од промене оптерећења.
- Аутономни (слободни) системи нису посматрани у функцији делујућих сила. Међутим, ови системи могу бити у покрету. Разликујемо две врсте аутономних система:
  - а) Кинематички системи су у покрету; покрет се може описати као функција времена;
  - б) Системи слободног корака су у покрету, али је кретање случајно, функција времена се не може утврдити априори

Дакле, на основу горе наведеног, принципијелно разликујемо четири категорије модела за оцену деформација (слика 2.7).



Слика 2.7: Хијерархија модела у геодетској деформационој анализи (Welsch u Heunecke 1999.) [ у FIG Publication NO. 25,2001]

У табели 2.2 приказане су четири категорије деформационих модела, карактеризоване према њиховој могућности да узимају у обзир факторе времена и оптерећења.

Табела 2.2: Карактеризација и класификација деформационих модела  
(Welsch and Heunecke 1999) [ у FIG Publication NO. 25,2001]

Деформациони модел	Модел конгруенције	Кинематички модел	Статички модел	Динамички модел
Време	Не фигурише у моделу	Померање као функција времена	Не фигурише у моделу	Померање као функција од времена и оптерећења
Делујуће силе	Не фигуришу у моделу	Не фигуришу у моделу	Деформације као функција оптерећења	
Стање објекта	Довољно дуго у стању равнотеже	Перманентно у покрету	Довољно дуго у стању равнотеже под оптерећењем	Перманентно у покрету

### 2.3.4 Инструменти за мерење деформација, оптерећења, притиска и напрезања

Инструменти за мерење у деформационом мониторингу сврставају се на инструменте за мерење: улазних сигнала (оптерећење, притисак и напрезање) и излазних сигнала (деформација). Такође, постоји подела на геодетске и геотехничке; мада неки аутори, као што су: Хана, Дуниклиф (Hanna, Dunicliff) [у Ding, Qin, 2002] називају све инструменте геотехничким. У овом раду је прихваћена подела на ове две групе, јер геодетским инструментима се могу мерити апсолутне и релативне деформације, а геотехничким релативне.

#### *Инструменти за мерење деформација*

Инструменти који су намењени за мерење деформација, односно излазних сигнала динамичког система, деле се на геодетске и геотехничке инструменте. Геодетским инструментима је могуће мерити померања тачака које се могу видети и доступна су физички. Геотехничким инструментима тачке на којима се врши опажање не морају бити доступне, изузев када је читавање визуелно.

Геодетски инструменти за мерење деформација се деле на: терестричке, фотограметријске и ГПС. Овим инструментима се могу мерити апсолутна

померања, са тачака основне мреже на тачке објекта, и релативна померања, са тачке на објекту на тачку на објекту. У терестричке инструменте припадају: оптички теодолити, електронски теодолити, тоталне станице и нивелири. Опис геодетских инструмената и метода мерења у овом раду нису приказани. Табеларно су приказане деформације које се мере одређеним инструментима и њихова тачност (Табела 2.3 и 2.4).

Геотехнички инструменти за мерење деформација су: екстензиометри, инклинометри, угибомери, висак и обрнути висак.

Екстензиометри су намењени за мерење релативних померања између тачака: у пукотинама, на косинама и по врховима. Овај инструмент се састоји од: челичне пантљике или жице, носача пантљике или жице, уређаја за затезање (динамометра) и читавање. Опсег мерења је од неколико центиметара до 180 m, али најчешћи опсег мерења је 30-40 m. Прецизност мерења је 0.1 mm или већа, али недостатак је што тачност мерења зависи од утицаја ветра и температуре.

Инклинометри се користе за мерење бочних померања тла или стена. Овај инструмент се убацује у бушотину у футроли и мери нагибе у две ортогоналне равни. Њиме се могу мерити нагиби у различитим временским тренуцима до дубине од 200 m. Прецизност мерења око 6 mm на 25 m дубине.

Угибомери су инструменти који су намењени за мерење ротације конструкције у одређеном делу. Прецизност мерења ротације је у интервалу  $0''.36 - 0''.002$ . Међутим, због високе цене нису у широкој примени.

Висак дефинише правац вертикале помоћу тега који се налази на крају жице. Приближно вертикалана бушотина је неопходна да би се инсталирао овај систем. Тег се поставља у посуду са уљем да би се висак стабилизовао. Релативно померање између тачке сидрења жице и тега се може прочитати на скали у два ортогонална правца. Обрнути висак садржи пловак, који је смештен у резервоару са уљем, и користи се уместо тега да би жица била вертикална и затегнута. Он је погодан за примену у случајевима где приступ доњем крају система није могућ, јер се читавања врше код тега. Прецизност мерења је 0.5 mm ако се користи челична мерна скала са податком од 0.03 mm.

Геодетски и геотехнички инструменти за мерење деформација једни у односу на друге имају предности и недостатака. Упоређујући геодетске у односу на геотехничке методе следеће су предности геодетских метода:

1. мерење апсолутних деформација;
2. поузданост мерних података, јер постоје прекобројна мерења у мрежи;
3. мерење померања у 3Д координатном систему.

Недостаци у односу на геотехничке инструменте су:

1. неопходно је да су мерна места доступна или да је отворено небо,
2. већина метода је намењена за мерење дугопериодичних промена, изев РТК методе којом се могу мерити и краткпериодичне промене где је фреквенција мерења (регистровања) 10 Hz – 20 Hz, најновији ГПС пријемници омогућавају мерења и на фреквенцији од 50 Hz, па и 100 Hz, а геотехнички могу мерити и на фреквенцији од 200 Hz;
3. одређују се само површинске деформације.

Табела 2.3: Инструменти за мерење деформација [Огаја,2002]

Врста инструмента	Деформација која се мери					
	↔	↑↓	□□	↻	↑	↓
<b>Геодетски инструменти</b>						
Оптички и електронски теодолити	√	√	√		√	
ЕДМ	√	√	√		√	
Тотална станица и роботизована станица	√	√	√		√	
Оптички, дигитални и ласерски нивелири		√			√	
Фотограмetriја и CCD камера	√	√	√		√	
ГПС	√	√	√		√	
<b>Геотехнички инструменти</b>						
Екстензиометри	√	√	√			√
Угибомери				√	√	√
Инклинометри	√	√	√	√		√
Вискови	√	√	√		√	√
<b>Остали инструменти</b>						
Ласерски интерферометар, оптички фибер сензори	√	√	√			
<b>Легенда</b>						
↔ хоризонталне деформације	↻ ротација					
↑↓ вертикалне деформације	↑ деформације површине					
□□ аксијалне деформације	↓ деформације испод површине					

У табели 2.4 приказане су предности, ограничења и тачност за одређене методе мерења.

*Инструменти за мерење оптерећења, притиска и напрезања*

Ћелије за мерење оптерећења, односно динамометри, налазе се на конструкцији и постављени су тако да силе које делују на конструкцију делују прво на ове ћелије. Тачност мерења динамометрима је 0.5-1% од опсега мерења.

Инструменти за мерење дилатација/напрезања се постављају на конструкцију или су уграђени у конструкцију. Постоје следеће врсте инструмената: механички, са вибрирајућом жицом и инструменти који раде на принципу мерења електричног отпора.

За мерење притиска воде у земљи користе се: пијезометарске цеви (standpipe) и пијезометри. Пијезометри се обично стављају у цев, која је уграђена у тло. Централни део је уређај за мерење притиска, који може бити: механички, хидраулични, електрични или пнеуматски. Примењује се за мониторинг: клизишта, брана и подземних конструкција.

Табела 2.4: Методе за мерења деформација [Огаја,2002]

Метода	Предност	Ограничења	Тачност
<b>Дужине и правци</b>			
Ручна пантљика	Директно мерење дужина када је немогуће мерити ЕДМ	Прочишћен терен за мерења Потребна калибрација	3 <sup>реда</sup> дужина/5000 2 <sup>реда</sup> дужина/50000 1 <sup>реда</sup> дужина/300000
ЕДМ	Велика растојања, брза мерења, висока тачност	Оптичко догледање, тачност зависи од атмосферских услова	[0.3-10] mm+[2-5] ppm
Теодолити (оптички или тоталне станице)	Велика растојања, брза мерења, висока тачност	Оптичко догледање, тачност зависи од атмосферских услова	0."5 – 3"
<b>Нивелман</b>			
Генерални	Висока тачност	Захтевна процедура мерења	1 <sup>реда</sup> 1 – 3 mm√km 2 <sup>реда</sup> 3 – 5 mm√km
Тригонометријски	Мерење висинске разлике на великим растојањима, мерења се обављају истовремено са мерењем хоризонталних праваца	Оптичко догледање, тачност зависи од атмосферских услова, висока тачност мерења вертикалног угла	5 – 8 mm√km
<b>Фотограметријске методе</b>			
Терестричка	Региструје померања више тачака у истом тренутку	Захтева специјалну обраду, за већу тачност базна линија мора бити већа од 1/5 растојања до конструкције	$\left[ \frac{1}{5000} - \frac{1}{100000} \right] D$ D – растојање до објекта
<b>ГПС</b>			
Статика	Не захтева оптичко догледање, мери у свим условима, 3Д вектор померања	Отворено небо, мерење само на горњем делу конструкције	2Д: 3-5 mm 1Д: 6-10 mm
RTK	Не захтева оптичко догледање, мери у свим условима, 3Д вектор померања, брза, мерења фреквенције 10 Hz – 20 Hz	Отворено небо, мерење само на горњем делу конструкције, тачност неадекватна за већину деформационих мерења	2Д: 10 mm 1Д: 20 mm
<b>Геотехнички инструменти</b>			
Екстензиометри	Висока тачност, мерење на неприступачним местима	Кратка растојања, велики утицај атмосферских услова на тачност	0.003 mm – 0.5 mm
Угибомери	Висока тачност, мерење на неприступачним местима	Велики утицај атмосферских услова на тачност	0".36 – 0".002
Инклинометри	Висока тачност, мерење на неприступачним местима	Велики утицај атмосферских услова на тачност	0.5 mm

3.

## АНАЛИЗА ПОДАТАКА ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА

Задаци идентификације система могу се поделити у две групе:

1. Познате су вредности улазних и излазних сигнала система и потребно је моделирати систем; или описати одређене динамичке карактеристике система које су предмет истраживања, са тачношћу која је неопходна за практичну примену. Систем се може описати на следеће начине: функцијом преноса, линеарним диференцијалним/ диференцијалним једначинама са константним коефицијентима или простором стања. Овде су наведени само параметарски облици модела, јер су предмет овог рада. Линеарне диференцијалне/ диференцијалне једначине вишег степена служе за описивање процеса природним законима, али ако се изразе у облику система једначина првог реда (Кошијева форма) онда припадају моделу простора стања.
2. Познат је модел система, који је дат у једном од горе наведених облика, и вредности улазних сигнала, а потребно је симулирати или предиктовати вредности излазних сигнала (одговор система).

Да би се систем успешно моделирао мора се одредити структура система. Када је позната структура система потребно је оценити параметре система неком од нумеричких метода да би се дефинисао модел. Ниво познавања структуре система и поузданост експерименталних мерења се описује теоријом вероватноће, односно математичком статистиком. Због тога технике идентификације примењују теорију случајних процеса.

Структура система може се одредити на основу: тока информација и веза између сигнала или се може усвојити да у њој фигурише довољан број параметара. Прва група припада тзв. “white- box” или “gray- box” поступцима моделирања. Други начин је тзв. “black-box” поступак, где је потребно статистичким поступцима

проверавати значајност параметара. Да би се проверило да ли је изабрана структура модела и оцена параметара задовољавајућа мора се проверити сагласност моделираног и реалног система применом поступака валидације модела. Поступци валидације су приказани у поглављу број 6.3. Закључци о структури система се могу донети на основу анализе временских серија. Сврха анализе је да се: идентификује тренд серије, утврди периодичност, као и поремећаји унутар серије и физички објасне. Идентификација периодичности серије се изводи на основу: графичке представе улазних (спољних) и излазних сигнала, аутокорелационе и корелационе функције временских серија и хармонијске анализе. Оцена значајности појединих улазних сигнала на одзив система се изводи на основу спектралне анализе, а анализа поремећаја и тренда филтрирањем (поремећаји настају под утицајем сигнала који имају високу фреквенцију и за анализу поремећаја примењују се високофреквентни филтери, који пропуштају само сигнале са високом фреквенцијом а елиминишу тренд; нискофреквентни филтер се примењује за анализу тренда, јер тренд настаје услед деловања ниско фреквентних сигнала) . Пре доношења било каквих закључака о зависности унутар и између временских серија мерени подаци морају да се детрендују, јер се теорија бави стационарним или слабо стационарним процесима. За успешну анализу графика временске серије потребно је знати комплексне облике карактеристичних сигнала, као и графике система првог и другог реда, јер се они сусрећу најчешће у пракси.

За разумевање доле наведене материје неопходно је да је читалац упознат са Лапласовом и  $\mathcal{Z}$  трансформацијом. Лапласова трансформација се примењује у континуираним процесима, где се систем описује диференцијалним једначинама; а  $\mathcal{Z}$  трансформација у дискретним процесима и систем се описује диференцијалним једначинама.



### 3.1 КОМПЛЕКСНИ ОБЛИК СИГНАЛА

#### а) Одскочна функција

Ова функција је посебно интересантна у анализи динамичких система, јер је систем потпуно описан одскочним одзивом система; а у деформационој анализи приликом испитивања конструкција и тла на пробно оптерећење или сопствена тежина конструкције је улазни сигнал који има облик ове функције. График одскочне функције амплитуде  $b$  са прекидом у тачки  $t = 0$  приказан је на слици 3.1, а њен аналитички израз је

$$f(t) = bh(t), \quad (3.1)$$

где је  $h(t)$  јединична одскочна (Хевисајдова) функција

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}. \quad (3.2)$$

Комплексни облик функције у континуираном систему се добија применом Лапласове трансформације:

$$F(s) = \int_0^{\infty} bh(t)e^{-st} dt = -\frac{b}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{b}{s}. \quad (3.3)$$

Лапласова трансформација је дефинисана само у десној полуравни комплексне променљиве  $s$ , јер реални део од  $s$  мора да је већи од 0. У дискретном систему за тренутак  $t \geq 0$  имамо низ сигнала са амплитудом  $b$ , па је  $\mathcal{Z}$  трансформација сигнала

$$G(z) = \sum_{t=0}^{\infty} bz^{-t} = \frac{b}{1-z^{-1}} = \frac{bz}{z-1}. \quad (3.4)$$

#### б) Импулсна (Dirac $\delta$ ) функција

Импулсна функција  $\delta(t - t_0)$  дефинише се као

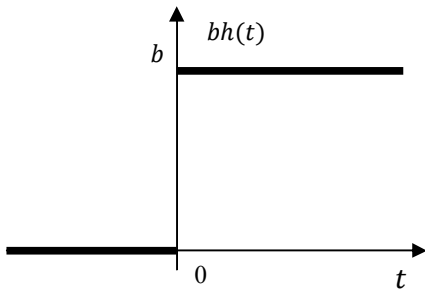
$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &= 0, \quad t \neq t_0 \text{ и при чему је} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt &= 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dirac  $\delta$ - функција је импулсни правоугаоник површине једнаке 1 са бесконачно великом амплитудом и бесконачно малог времена трајања  $\varepsilon$  (слика 3.2). Лапласова трансформација функције је:

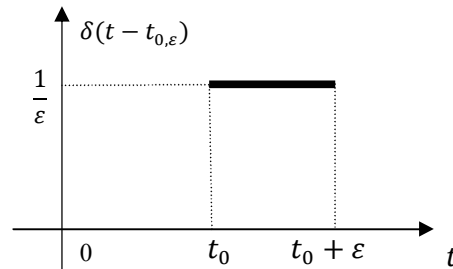
$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = \begin{cases} 0, & t_0 < 0 \\ e^{-st_0}, & t_0 \geq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Из формуле (3.6) јасно је да је за  $t_0 = 0$   $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ , односно импулс настаје у координатном почетку. У овом случају  $\mathcal{Z}$ - трансформација импулсне функције је  $G(z) = 1$ .

Улазни сигнал оваквог облика, који делује на конструкције, јавља се код тзв. краткoпериодичних сигнала. У ову групу сигнала спадају: удари ветра, земљотреси и оптерећење услед саобраћаја. Сви ови сигнали би на конструкцији требали да изазову еластичне деформације, ако су у пројектованом опсегу.



Слика 3.1: Одскочна функција за  $t = 0$  и амплитуду  $b$  [Стојић, 1999]



Слика 3.2: Јединична импулсна функција у тренутку  $t = t_0$  [Стојић, 1999]

### в) Нагибна функција

Нагибна функција  $f(t) = ath(t)$ , чији је график приказан на слици 3.3, описује линеарне промене. Овом функцијом се описује нпр. промена температуре у току дана и промена притиска воде у акумулацији. Комплексни лик функције у континуираном систему се добија применом Лапласове трансформације

$$F(s) = \mathcal{L}[ath(t)] = \int_0^{\infty} ate^{-st} dt = \frac{a}{s^2}, \quad (3.7)$$

а применом  $\mathcal{Z}$  трансформације добија се комплексни лик у дискретном систему

$$G(z) = \mathcal{Z}[ath(t)] = \frac{aTz}{(z-1)^2}. \quad (3.8)$$

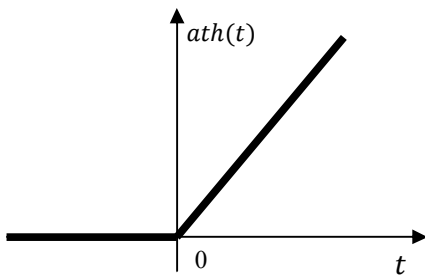
### з) Експоненцијална функција

Експоненцијална функција  $f(t) = Ae^{-at}h(t)$ , чији је график приказан на слици 3.4, се примењује за моделирање деформационих процеса услед сопственог оптерећења (слегање објекта). Ова функција је веома битна јер се динамички процеси описују диференцијалним или диференцијалним једначинама, а решење тих једначина садржи експоненцијалну функцију. Комплексни лик у континуираном систему је

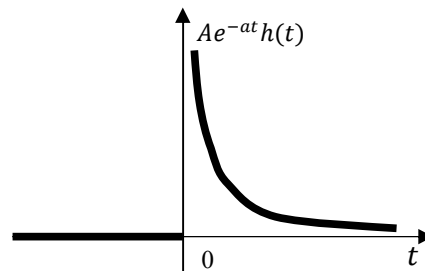
$$F(s) = \mathcal{L}[Ae^{-at}h(t)] = A \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \frac{A}{s+a}, \quad (3.9)$$

а у дискретном систему

$$G(z) = \mathcal{Z}[Ae^{-at}h(t)] = A \sum_{t=0}^{\infty} e^{-at} z^{-t} = \frac{Az}{z - e^{-aT}}. \quad (3.10)$$



Слика 3.3: Нагибна функција  
[Стојић, 1999]



Слика 3.4: Експоненцијална функција  
[Стојић, 1999]

## 3.2 СИСТЕМ ПРВОГ РЕДА

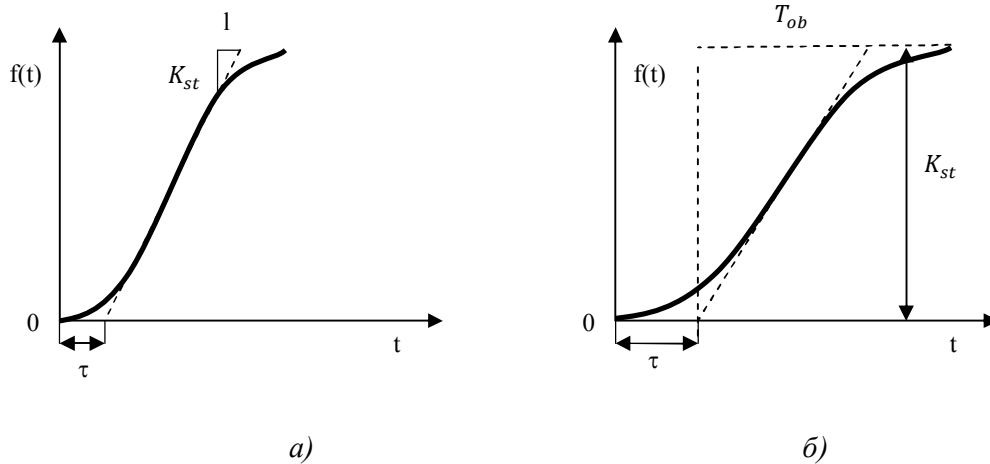
Диференцијалне једначине се примењују за концизно математичко моделирање динамичких система који су интересантни за човечанство. Ове једначине открио

је у седамнаестом веку Исак Њутн (Isac Newton). Уобичајено је да се системи описују једначинама I и II реда, а ређе једначинама вишег реда. На основу графичке представе одговора система може се донети закључак о реду система. У овом раду је приказан одговор система за случај I и II реда.

#### a) Одскачни одзив

Широка класа процеса (температура, притисак, проток, ниво, слегање објекта) има слично динамичко понашање које се може описати системом првог реда. Овакви модели одговора система називају се у аутоматском управљању процесни модели.

Нека на систем тренутно (у кратком временском року) делује улазни сигнал (нпр. оптерећење терена од конструкције или пробно оптерећење) који је константан. Улазни сигнал је Хевисајдов сигнал.



Слика 3.5: Одзив система првог реда [Стојић, 1998]

Слика 3.5 приказује одговор система када је улазни сигнал одскачан. На слици 3.5a види се да је одговор система пригушена експоненцијална функција са временским кашњењем  $\tau$ . У тренутку  $t = 0$  вредност одговора система се нагло мења, што указује да се ради о систему првог реда чија је функција преноса

$$F(s) = \frac{K_{st}e^{-\tau s}}{s}, \quad (3.11)$$

где је  $K_{st}$ - статичко појачање и представља нагиб најстрмије тангенте одскочног одзива. Ова функција преноса (3.11) може се применити када брзина процеса зависи само од улазног сигнала, нпр. проток течности.

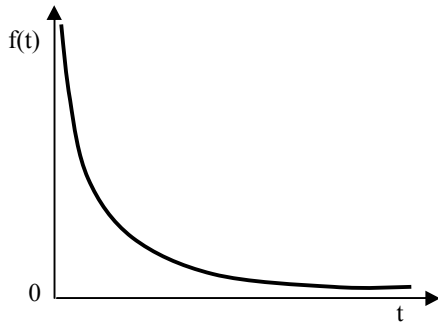
На слици 3.5б види се да је прираштај функције у почетку спорији, а после добија облик инверзне експоненцијалне функције, што указује да се ради о систему првог реда када је улазни сигнал одскочни. Функција преноса је

$$F(s) = \frac{K_{st}}{T_{ob}s+1} e^{-\tau s}, \quad (3.12)$$

где је  $K_{st}$ - статичко појачање,  $\tau$ - временско кашњење система, а  $T_{ob}$  је временска константа, која је обрнуто пропорционална нагибу најстрмије тангенте импулсног одговора система. За разлику од функције (3.11) функција (3.12) указује да први извод променљиве стања (брзина) није у функцији само од конкретног улазног одскочног сигнала, него и од карактеристика система (нпр. параметара материјала или тла). О рачунању параметара функције преноса биће више речи у поглављу 4.

#### б) Импулсни одзив

Крива одговора на јединични импулсни сигнал може бити оваквог облика (слика 3.6).



Слика 3.6: Одзив система првог реда на импулсни улазни сигнал

[<http://www.facstaff.bucknell.edu/mastascu/econtrolhtml/Ident/Ident1.html>]

На слици се види да је одговор система у почетном тренутку  $t = 0$  најјачи, а после се систем враћа у стање равнотеже. Овакав облик одзива система приликом мониторинга објеката и тла јавља се када делују краткoperиодични сигнали као што је: удар ветра, земљотрес, проток саобраћаја или нагло испирање тла. Сваки објекат се пројектује за одређене вредности ових сигнала. Када су вредности у пројектованом опсегу на објекту настају еластичне деформације, а ако су изван пројектованог опсега онда настају пластичне деформације.

Функција преноса у овом примеру је

$$G(s) = \frac{K_{st}}{s\tau + 1}, \quad (3.13)$$

а одговор система се добија помоћу инверзне Лапласове трансформације

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds. \quad (3.14)$$

Ово је Бромвич-ов (Bromwich) интеграл који се рачуна преко остатка. Формула за рачунање остатка гласи:

$$B_1 = \text{Res}_{s \rightarrow a} e^{st} F(s) = \lim_{s \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left( (s-a)^k e^{st} F(s) \right), \quad (3.15)$$

где је  $a$ - пол функције преноса,  $k$  је број вишеструкости пола. У нашем примеру  $a = -\frac{1}{\tau}$ , а  $k = 1$ . Одговор система је:

$$B_1 = \text{Res}_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau}} e^{st} \frac{K_{st}}{s\tau + 1} = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau}} \left( \left( s + \frac{1}{\tau} \right) \frac{e^{st} K_{st}}{s + \frac{1}{\tau}} \right) = \frac{K_{st}}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.16)$$

Ако је улазни сигнал јединични импулс, онда је у почетном тренутку  $t = 0$  одговор система  $\frac{K_{st}}{\tau}$ . Када улазни сигнал није јединични импулс него импулс одређене јачине  $A\delta(t)$ , онда је одговор система  $\frac{AK_{st}}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

### 3.3 СИСТЕМ ДРУГОГ РЕДА

Систем другог реда је систем који се описује линеарним диференцијалним једначинама другог реда. Функција преноса овог система може бити са комплексним или реалним половима.

Основна једначина којом се описује понашање (стабилност) објекта је једначина механичког линеарног система који има један степен слободе (2.1):

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + Kx = F \quad (3.16)$$

где је:

$F$  - спољашња сила,

$M \frac{d^2x}{dt^2}$  - сила инерције,

$F \frac{dx}{dt}$  - сила вискозног пригушења (консолидација терена)

$Kx$  - сила еластичности (стишљивост)

$x$  - померај (излазни сигнал),

$\dot{x}$  - брзина,

$\ddot{x}$  – убрзање,

$C$  - коефицијент пригушења,

$K$  - крутост тла,

$M$  – маса.

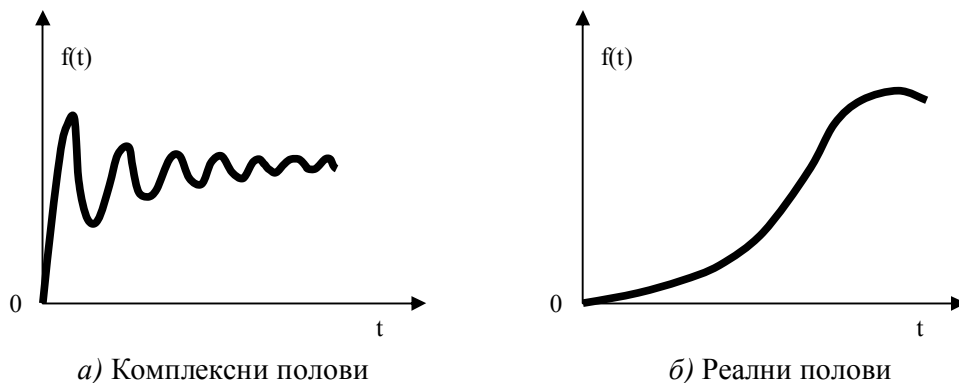
Применом Лапласове трансформације сводимо диференцијалну једначину на алгебарски облик:

$$(Ms^2 + Cs + K)X(s) = F. \quad (3.17)$$

Функција преноса представља однос комплексних ликова излазог и улазног сигнала

$$X(s) = \frac{F}{Ms^2 + Cs + K}. \quad (3.18)$$

Полови система су решења квадратне једначине  $Ms^2 + Cs + K = 0$ .



Слика 3.7: Одзив система другог реда

[<http://www.facstaff.bucknell.edu/mastascu/econtrolhtml/Ident/Ident1.html>]

Графички приказ одзива система другог реда са комплексним половима дат је на слици 3.7а, а са реалним на слици 3.7б. Разлика између система првог реда и другог реда са реалним половима је што је прираст одзива у почетку спорији код система другог реда.

На основу графичке представе одзива система може се донети закључак колико претходних вредности излазног сигнала значајно утиче на тренутну вредност одзива система. Код система првог реда на одзив у тренутку  $t_k$  утиче само претходни сигнал у тренутку  $t_{k-1}$ , код система другог реда два претходна сигнала у тренуцима  $t_{k-1}$  и  $t_{k-2}$ .

### 3.4 АУТОКОРЕЛАЦИЈА И ПАРЦИЈАЛНА АУТОКОРЕЛАЦИЈА

Аутокорелација представља корелацију између подскупова временских серија (скуп мерених података који су прикупљани у функцији од времена, а временски интервал између опажања је једнак), које су померене у времену за цео број временских интервала одабирања (корак). Постојање аутокорелације временске серије има утицаја на примену статистичких тестова, јер се редукује ефективан број мерења, односно број мерења који садржи потпуне, независне, информације о серији. Такође, постојање аутокорелације унутар временске серије отежава утврђивање корелације између серија (међукорелација). Њено постојање се може идентификовати на следеће начине:

1. графиком временске серије,
2. графиком подскупова временских серија и
3. аутокорелационом функцијом.

#### 3.4.1 График временске серије

На основу одступања опажања у односу на аритметичку средину могу се донети закључци о знаку аутокорелације (позитивна или негативна). То је најлакше визуелно учинити ако се кроз аритметичку средину повуче хоризонтална линија и посматра се да ли одступања од средине имају позитиван или негативан предзнак. Позитивна аутокорелација има тенденцију да сачува позитивна или негативна одступања од средине, док негативна аутокорелација има тенденцију мењања предзнака одступања.



Визуелна анализа аутокорељације временских серија је субјективна и зависи од искуства. На основу графика временске серије може се донети само закључак да ли постоји аутокорељација у одређеном делу серије.

### 3.4.2 График подскупова временске серије

Најједноставнији и најјаснији графички приказ аутокорељације је помоћу графика подскупова (*lagged scatterplot*). Нека је дата временска серија мерења  $X_i$  величине  $N, i = 1, 2, \dots, N$ . График подскупова корака  $k$  (цео број временских интервала између опажања) је приказ  $N - k$  првих опажања у односу на  $N - k$  последњих опажања; нпр. за  $k = 2$  први подскуп чине опажања  $x_1, x_2, \dots, x_{N-2}$ , а други  $x_3, x_4, \dots, x_N$ .

Случајан распоред тачака на графику указује на непостојање аутокорељације, односно опажање у тренутку  $t$  не зависи од  $k$  претходних опажања. Ако се кроз тачке може „провући“ права од доњег левог угла графика до горњег десног угла онда је реч о позитивној аутокорељацији, а ако се изравнавајућа права простире од горњег левог угла према десном доњем онда је аутокорељација негативна. Добра страна представе аутокорељације на овај начин је што се лако може открити и применити нелинеарна зависност између опажања у различитим временским тренуцима, а такође, са графика се може видети да ли постоје грубе грешке у серији.

### 3.4.3 Аутокорељациона функција (корелограм)

Значајну информацију о постојању неке законитости, односно зависности, временске серије даје аутокорељациони коефицијент, који представља корелацију између опажања у различитим тренуцима. Ако се аутокорељациони коефицијенти поређају по разлици времена (кораку) добија се аутокорељациона функција.

Познато је да је корелациони коефицијент између две мерене величине  $X$  и  $Y$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (3.19)$$

где је:  $N$  број опажања случајних величина  $X$  и  $Y$ ,  $x_i$ -  $i$ -ти резултат мерења величине  $X$ ,  $\bar{x}$ - аритметичка средина низа мерења случајне величине  $X$ ,  $y_i$ -  $i$ -ти резултат мерења величине  $Y$  и  $\bar{y}$ - аритметичка средина низа мерења случајне величине  $Y$ .

Иста идеја је примењена код временских серија где се проверава да ли постоји корелисаност између опажања у различитим временским тренуцима. Уместо да се рачуна за два низа мерења различитих случајних (мерених) величина корелација се рачуна унутар исте серије, али за временске тренутке који су померени за целобројну вредност интервала одабирања, тзв. корак. Аутокорелациони коефицијент унутар временске серије, величине  $N$ , и корака  $k$  се добија када се временска серија подели на првих  $N - k$  опажања,  $x_1, x_2, \dots, x_{N-k}$ , и последњих  $N - k$  опажања,  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_N$ . Корелациони коефицијент за ове две подсерије је

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x}_{(1)})(x_{t+k} - \bar{x}_{(2)})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x}_{(1)})^2} \sqrt{\sum_{t=1}^{N-k} (x_{t+k} - \bar{x}_{(2)})^2}}, \quad (3.20)$$

где је  $\bar{x}_{(1)} = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} x_t$ , а  $\bar{x}_{(2)} = \frac{1}{N-k} \sum_{t=k+1}^N x_t$ . У случају када је  $N$  довољно велико, односно када је задовољен услов стационарности временске серије (појам стационарности је објашњен у наставку овог потпоглавља)

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2}, \quad (3.21)$$

где је  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t$  заједничка (општа) аритметичка средина серије. Величина  $r_k$  је аутокорелациони коефицијент за корак  $k$ , и показује зависност мерења у тренутку  $t$  од мерења у тренутку  $t - k$ . График корелационе функције за различите вредности корака се назива корелограм.

Аутоковаријациона функција, аналогно као и аутокорелациона функција, за корак  $k$  је осредњен производ одступања од аритметичке средине у тренутку  $t$  и  $t + k$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}). \quad (3.22)$$

Пошто је оцена (3.22) померена у односу на популациону коваријацију за непомерену оцену примењује се формула

$$c_k = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}). \quad (3.23)$$

Аутокорелациони коефицијент (3.21) може се добити на основу аутоковаријационог коефицијента

$$r_k = \frac{c_k}{c_0}, \quad (3.24)$$

где је  $c_0$  аутоковаријација корака 0, односно дисперзија.

На основу корелограма доноси се закључак о случајности серије. Вредност коефицијента корелације  $r_k \approx 0, k = 1, 2, N - 1$ , у случају када су мерења у временској серији случајне величине које су међусобно независне. Ако су  $X_1, X_2, \dots, X_N$  независне и идентично распоређене случајне променљиве са произвољном средином, онда је очекивана вредност од  $r_k$

$$E(r_k) = -\frac{1}{N}, \quad (3.25)$$

а дисперзија је

$$D(r_k) = \frac{1}{N} \quad (3.26)$$

( $E(\ )$  - математички оператор,  $D(\ )$  - ознака за дисперзију)

и  $r_k$  је асимптотски нормално распоређена и слабостационарана случајна величина. У наставку је кратко објашњен појам стационарности.

*Један процес може се посматрати као могућа реализација од бесконачно могућих реализација временске серије. Опажања у серији  $X_t$  су само једна могућа реализација. Вредност серије  $x_t$  у сваком тренутку  $t = i$  је реализација случајне променљиве  $X_i$ , са функцијом густине  $p(X_i)$ . Сваки скуп случајних променљивих у различитим временским тренуцима  $\{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_r}\}$  има заједничку функцију густине. Ако је заједничка функција густине независна од времена, онда је процес строго стационаран. Међутим, већина процеса је слабо стационарна, што подразумева да су аритметичка средина, дисперзија и аутоковаријациона функција независне од времена. [Grewal, Andrews, 2001]*

Интервал поверења за усвојени ниво значаности  $\alpha$  се добија као  $-\frac{1}{N} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{N}}$

Приликом анализе корелограма мора се знати из природе процеса до ког корака  $r_k$  треба рачунати коефицијенте, односно која се периодичност процеса очекује. Већа је вероватноћа појаве  $r_k$  које мање одступа од интервала поверења него више, и одступања ће се пре појавити када је корак мањи. Ако више вредности  $r_k$  одступа изван интервала поверења, а одступање је највеће за корак  $k$  где се очекује периодичност (нпр. дневни утицај температуре има периодичност од 24 часа, или промена нивоа подземних вода на годишем нивоу је у функцији од

годишњег доба, па је периодичност за  $k = 4$ ) онда је то сигуран знак зависности унутар временске серије.

Ако је временска серија величине  $N$  аутокорелисана, онда је број независних опажања мањи од  $N$ , јер информације које су садржане у једном опажању нису независне од информација у другим опажањима. Смањење броја независних мерења има последице на тестирање статистичких хипотеза. Ефективна величина аутокорелисане временске серије је

$$N' = N \frac{1-r_1}{1+r_1}, \quad (3.27)$$

где је  $N$  - величина узорка, а  $r_1$  аутокорелациони коефицијент за временски померај  $k = 1$ .

На крају овог потпоглавља објашњен је појам парцијалне аутокорелационе функције (PACF- Partial AutoCorrelation Function).

Парцијална аутокорелациона функција је аутокорелациона функција поправака за усвојени степен ауторегресионог модела временске серије, где су оцене коефицијената модела добијене методом најмањих квадрата. Степен модела се сукцесивно мења док се не добије да су коефицијенти парцијалне аутокорелације унутар интервала поверења. Оцене коефицијената аутокорелационе функције се добијају из опажања, и они нису поуздани јер опажања садрже и утицај улазних сигнала. Парцијална аутокорелациона функција је погоднија за одређивање степена ауторегресионог модела (AR- AutoRegression модел), док се аутокорелациона функција користи за одређивање степена модела са променљивом средином (MA- Moving Average модел). Када је процес ауторегресиван онда аутокорелациона функција опада геометријском прогресијом после корака који одговара степену модела, а парцијална аутокорелациона функција нагло опада после корака који одговара степену модела. Ако је процес са променљивом средином онда је обрнут случај. Показано је да се адекватан стохастички модел боље детектује на основу аутокорелационе функције поправака [Kuhlmann, 2001].

### 3.5 АНАЛИЗА ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ У ФРЕКВЕНТНОЈ ОБЛАСТИ

У претходном потпоглављу временска серија је анализирана у временском домену, а други начин је анализа у фреквентној области. Као што је наведено у уводном делу овог поглавља за успешно моделирање потребна је анализа осцилација у серији. Спектар представља расподелу варијација серије у функцији од фреквенције, односно колико одређена фреквенција утиче на дисперзију серије. Суштински анализе у временском и фреквентном домену дају исте информације, али за боље разумевање физичке природе процеса потребне су обе анализе. Нпр. фреквентном анализом се може установити који улазни сигнал има значајнији утицај на варијације унутар серије.

#### 3.5.1 Приказ временске серије у облику Фуријеовог реда

Временска серија  $X_t$  величине  $N$  може се приказати као линеарна комбинација косинусних и синусних компоненти фиксне фреквенције  $\{f_j\}$  и амплитуда случајног карактера  $\{A_j\}$  и  $\{B_j\}$

$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^{[N/2]} [A_j \cos(2\pi f_j t) + B_j \sin(2\pi f_j t)], \quad t = 1, 2, \dots, N; \quad (3.28)$$

где је:  $\mu$ - тренд временске серије и константан је, ознака  $[N/2]$  означава највећи цео број који је мањи или једнак  $N/2$ , и фреквенција

$$f_j = \frac{j}{N}, \quad 1 \leq j \leq [N/2] \quad (3.29)$$

која се називају *основне* или *Фуријеове* фреквенције; док је углаона фреквенција једнака

$$\omega_j = 2\pi f_j \quad (3.30)$$

и изражава се у јединицама  $\left[ \frac{\text{radian}}{\text{jedinica vremena}} \right]$ . Никвистова (*Nyquist*) фреквенција је фреквенција за коју је углаона фреквенција  $\omega = \pi$ , односно  $f = 1/2$ , и представља највећу фреквенцију из које се могу добити информације о временској

серији спектралном анализом. Због тога је у изразу (3.29) сума до  $[N/2]$ , јер је  $f = 0.5 = \frac{N}{2N}$ .

Следеће претпоставке се уводе за амплитуде: да су случајне величине са следећим математичким очекивањем

$$E\{A_j\} = E\{B_j\} = 0 \quad (3.31)$$

и дисперзијом

$$D\{A_j\} = E\{A_j^2\} = D\{B_j\} = E\{B_j^2\} = \sigma_j^2; \quad (3.32)$$

и усвајава се да су амплитуде за основне фреквенције некорелисане

$$E\{A_j A_k\} = E\{B_j B_k\} = 0 \quad \text{за } j \neq k \quad (3.33)$$

$$E\{A_j B_k\} = 0 \quad \text{за } \forall j, k. \quad (3.34)$$

Математичко очекивање за  $X_t$  је

$$E\{X_t\} = \mu, \quad (3.35)$$

дисперзија серије је

$$\sigma^2 = E\{[X_t - \mu]^2\} = \sum_{j=1}^{[N/2]} \sigma_j^2, \quad (3.36)$$

а аутокорељациона функција за  $X_t$  је

$$r_k = \frac{\sum_{j=1}^{[N/2]} \sigma_j^2 \cos(2\pi f_j k)}{\sum_{j=1}^{[N/2]} \sigma_j^2}. \quad (3.37)$$

Једначина (3.36) показује да је дисперзија временске серије једнака суми дисперзија појединих стандардних фреквенција. Због ове особине дисперзија серије се може разложити на компоненту за сваку основну фреквенцију; док једначина (3.37) показује да се спектар може добити Фуријеовом трансформацијом аутокорељационе функције.

Спектрум се дефинише као

$$S_j^2 \equiv \sigma_j^2, \quad 1 \leq j \leq [N/2], \quad (3.38)$$

а графичка представа дисперзије серије за одређену фреквенцију назива се спектар. На основу њега може се закључити које фреквенције имају доминантан утицај на варијацију унутар серије.

Применом математичког модела (3.28) могуће је оценити параметре (амплитуде) за сваку Фуријеову фреквенцију и серију приказати као суму хармоника. Оваква анализа се назива Фуријеова или хармонијска анализа, и припада тзв. непараметарским методама идентификације система. Она се може

успешно применити ако је познат период серије. Периодограм је графички приказ варијација (у већини случајева скалираних - пондерисаних) у функцији од фреквенције. У наредном тексту овог потпоглавља приказана је спектрална анализа и периодограм, јер нам они помажу у физичком разумевању варијација процеса.

### 3.5.2 Спектрална анализа

Када се анализира спектар добијају се информације о процесу на основу једног узорка. Спектрална анализа се бави оценом непознатог спектра процеса на основу временске серије и дефинише релативан утицај одређеног фреквентног опсега на варијацију процеса, односно одређује се спектар као да је добијен из много поновљених серија. Развијено је више метода за оцену спектра, као што су нпр.: Шустеров (Schuster, 1897.) периодограм – период процеса не мора бити познат, Даниелов (Daniell, 1946.) изравнати периодограм, Блекмен-Тјукијев (Blackman & Tukey, 1959.) спектар.

Пре него што се опишу горе наведене методе дата је веза између аутокорељационе, односно аутоковаријационе функције и спектра.

#### а) Спектрална функција расподеле

Теорема о временским серијама, која се назива Винер- Кичинова (Wiener-Khintchine) теорема, доказује да за сваки стационарни процес који има аутоковаријациону функцију  $c(k)$  постоји монотono растућа спектрална функција расподеле  $F(\omega)$ , таква да је

$$c(k) = \int_0^\pi \cos \omega k dF(\omega). \quad (3.39)$$

$F(\omega)$  представља кумулативни утицај фреквенција у опсегу  $(0, \omega)$  на одступања временске серије. Интеграл (3.39) је у опсегу од 0 до  $\pi$  јер не постоје негативне фреквенције – систем је каузалан; горња граница је  $\pi$ , то је највећа угловна фреквенција за коју се могу добити информације о процесу, и одговара таласу чији се комплетан циклус заврши за два временска интервала (нпр. бране се

опажају два пута годишње и цео циклус одвије се у току једне године-периодичност улазних сигнала- ниво воде у акумулацији). Све варијације унутар временске серије су изазване угловним фреквенцијама мањим од  $\pi$

$$F(\pi) = D(X_t) = \sigma_X^2. \quad (3.40)$$

Из практичних разлога да би се закључило који утицај на дисперзију серије има одређени опсег фреквенције  $[0, \omega]$  рачуна се нормализована спектрална функција

$$F^*(\omega) = \frac{F(\omega)}{\sigma_X^2}. \quad (3.41)$$

Максимум ове функције је за угловну фреквенцију  $\pi$  и износи 1.

#### б) Спектрална функција густине (спектрум)

Диференцирањем спектралне функције расподеле добија се спектрална функција густине, која представља вредност дисперзије серије за одређену фреквенцију

$$f(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}. \quad (3.42)$$

#### ц) Веза између аутоковаријационе функције и спектра

Формула (3.39) успоставља везу између диференција спектралне функције расподеле и аутоковаријационе функције. Инверзна веза се успоставља између аутоковаријационе функције и спектра помоћу Фуријеове трансформације

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi} [c(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c(k) \cos \omega k]. \quad (3.43)$$

Блекмен-Тјукијева метода примењује ову формулу за рачунање спектра.

Површина испод спектра једнака је дисперзији целе серије, нормализовани спектар добија се дељењем спектра са дисперзијом серије

$$f^*(\omega) = \frac{f(\omega)}{\sigma_X^2}. \quad (3.44)$$

Познато је да се аутокорелациона функција  $r(k)$  добија дељењем аутоковаријационе функције са дисперзијом, онда се може успоставити веза између аутокорелације и нормализованог спектра



$$f^*(\omega) = \frac{1}{\pi} [1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r(k) \cos \omega k]. \quad (3.45)$$

Нормализовани спектар се примењује када су подаци у временској серији хетерогене тачности, односно коришћени су инструменти различите тачности за прикупљање података.

### 3.5.3 Оцена спектра на основу мерења

Оцењивање спектра изводи се помоћу Фуријеове трансформације. Међутим, не примењује се трансформација директно на аутоковаријациону функције, што је случај код периодograma, из два разлога:

1. дисперзија временске серије се не смањује повећањем серије - оцена није конзистентна,
2. оцена аутоковаријације мање је поуздана за већи временски корак.

Овај проблем се решава применом Фуријеове трансформације на засечену, изравнату аутоковаријациону функцију или обједињавањем више суседних фреквенција и заменом вредности спектра (снаге спектра) за те фреквенције аритметичком средином.

Кораци за оцену спектра су следећи:

1. Детрендовање података,
2. Рачунање дискретне Фуријеове трансформације (ДФТ),
3. Рачунање периодograma,
4. Засецање и изравнање периодograma да би се добила оцена спектра.

Детрендовање података је објашњено у потпоглављу 3.6.

#### a) Дискретна Фуријеова трансформација

Нека је  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$  временска серија величине  $N$ . Серија се може приказати као сума синусоида за одговарајуће Фуријеове фреквенције

$$x_t = A(0) + \left\{ 2 \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor} [A(f_j) \cos(2\pi f_j t) + B(f_j) \sin(2\pi f_j t)] \right\} + \left\{ A\left(f_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}\right) \cos\left(2\pi f_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} t\right) \right\}, \quad t = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.46)$$

где је:  $f_j = \frac{j}{N}, j = 1, 2, \dots, (N - 1)/2$  - Фуријеова фреквенција, а задњи члан у формули (3.46) фигурише ако је  $N$  паран број [[http://www.ltrr.arizona.edu/~dmeko/notes\\_...pdf](http://www.ltrr.arizona.edu/~dmeko/notes_...pdf)]. Укупан број коефицијената који треба да се оцени једнак је величини серије.

Коефицијенти се рачунају по формули

$$A(f) = \frac{2}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x_t \cos 2\pi f t \quad (3.47)$$

$$B(f) = \frac{2}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x_t \sin 2\pi f t$$

Помоћу једначине (3.47) временска серија се трансформише у збир синусоидне и косинусне функције; и постаје једноставнија ако се запише у комплексном облику помоћу Ојлерове релације

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad (3.48)$$

односно

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin(x) &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Дискретна Фуријеова трансформација у комплексном облику је:

$$d(f) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-2\pi f t}. \quad (3.50)$$

У *Matlab*-у постоје готове функције за рачунање дискретне и инверзне Фуријеове трансформације, али да би се разјаснио поступак рачунања приказан је код у овом језику за рачунање ДФТ (дискретна Фуријеова трансформација):

```
%Kako se racuna DFT
[m,n]=size(x)
sum=0;
w=exp(-2*pi*i/m);
for k=1:m
    sum=0;
    for j=1:m
        sum=sum+x(j,1)*w^(j-1)*(k-1);
```

```

end
c(k,1)=sum;
end
док је код за одређивање инверзне Фуријеове трансформације:
%Kako se racuna iDFT
sum=0;
w=exp(-2*pi*i/m);
for j=1:m
    sum=0;
for k=1:m
    sum=sum+c(k,1)*w^(-(j-1)*(k-1));
end
ic(j,1)=(1/m)*sum;
end

```

### б) Периодограм

Дискретна Фуријеова трансформација може да се запише и у функцији од коефицијената (амплитуда)  $A(f)$  и  $B(f)$ :

$$d(f) = \frac{A(f)}{2} - i \frac{B(f)}{2}. \quad (3.51)$$

Инверзна дискретна Фуријеова трансформација једнака је

$$x_t = \sum_j d(f_j) e^{2\pi f_j t}. \quad (3.52)$$

Пошто се дискретна Фуријеова трансформација изражава и у комплексном облику, онда се може израчунати модуо

$$\rho(f_j) = \sqrt{\left[\frac{A(f_j)}{2}\right]^2 + \left[\frac{B(f_j)}{2}\right]^2} \quad (3.53)$$

и фаза

$$\varphi_j = \arctg \frac{B(f_j)}{A(f_j)}. \quad (3.54)$$

Модуо  $\rho(f_j)$  (интензитет комплексног броја) је мера колико одступање од тренда изазива фреквенција  $f_j$ . Утицај одређене фреквенције на одступање од тренда се изражава преко јачине (енергије)  $I(f_j)$  [Ljung, 1987] представља се следећим изразом

$$I(f_j) = N[\rho(f_j)]^2, \quad (3.55)$$

а периодограм је једнак суми јачина

$$I(f) = \sum_j I(f_j). \quad (3.56)$$

На основу формуле (3.56) може се закључити да површина испод периодограма представља укупну дисперзију серије, а да су ординате једнаке дисперзији коју изазива одређена фреквенција.

У наставку овог потпоглавља приказана су два поступка рачунања периодограма и један за рачунања спектра.

### б.1) Шустеров (Schuster's) периодограм

Шустер је 1898. године дефинисао периодограм као методу за откривање утицаја фреквенција на хармонике сигнала. Периодограм се рачуна за фреквенције до Њуквистове фреквенције  $(\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{1}{2})$  и корелише сваку фреквенцију са подацима серије да би се одредила јачина одступања, односно одређује се утицај сваке фреквенције на серију. Периодограм се рачуна по формулама (3.52) и (3.53). Код за рачунање и графички приказ периодограма у Matlab-у је следећи (примењене су функције Matlab-a за рачунање ДФТ)

```
% Susterov periodogram
% x-vremenska serija
x_det=x-mean(x); %detrendovanje podataka i način detrendovanja zavisi od
podataka
x_dft=fft(x_det); %diskretna Furijeova transformacija
n=length(x_dft); %veličina vremenske serije
n2=n/2+1; %polovina serije
jacina=(abs(x_dft(1:n2)).^2)/n; %jačina
nyquist=1/2; %Nyquist frekvencija
pfreq=0:1:n/2; %opseg mernja za koji se računa periodogram
broj_frek=length(pfreq)-1; %broj frekvencija
frek=pfreq/broj_frek)*nyquist; %frekvencija
figure(7);plot(frek, power); %grafički prikaz
title('Susterov periodogram')
```

б.2) Изравнати периодограм

„Сиров“ периодограм, као што је Шустеров, има велике осцилације. Најчешће нас занимају варијације временске серије између одређених временских периода, односно периодичност неког процеса (нпр. период ниске и велике воде код брана, или утицај температуре који је повезан са годишњим добима). Изравнати периодограм се добија рачунањем аритметичке средине јачина за одређени фреквентни опсег или филтрирањем јачина помоћу тежина. Један од начина за добијање изравнатог периодограма, односно спектра, је Даниелов (Daniell) прозор. За усвојену величину прозора  $m$ , број фреквенција за које се претпоставља да имају утицај на дисперзију серије, тежине се рачунају као

$$g_i = \frac{1}{2(m-1)} \quad i = 1 \text{ или } i = m$$

$$g_i = \frac{1}{m-1} \quad \text{за остале вредности } m.$$

Оваквим избором тежина смањује се утицај „пикова“ који се јављају на почетку и крају периодограма, а елиминишу се фреквенције које не утичу значајно на одступања унутар серије.

б.3) Блекман-Тукијев (Blackman-Tukey) метода рачунања спектра

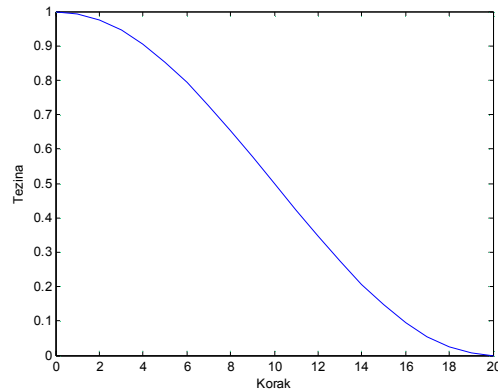
Ова метода се заснива на примени Фуријеове трансформације на засечену аутоковаријациону функцију, а изравнање се ради помоћу тежина. Оцена спектра се добија по формули:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \{ \lambda_0 c_0 + 2 \sum_{k=1}^M \lambda_k c_k \cos \omega k \}, \quad (3.57)$$

где је  $\{\lambda_k\}$  вектор тежина који се назива прозор временског кашњења (lag window), а  $M < N$  је тачка засецања. На основу формуле (3.54) може се закључити да се користе само аутоковаријациони коефицијенти до временског кашњења (корак)  $M$  који се пондеришу тежинама. Тежине се рачунају по формули:

$$\lambda_k = 0.5 \left[ 1 + \cos \frac{\pi k}{M} \right], \quad k = 0, 1, \dots, M. \quad (3.58)$$

На слици 3.8 су приказан је график тежина за корак  $k = 0, 1, \dots, 20$ .



Слика 3.8: Тежине за тачку засецања  $M = 20$   
[\[http://www.ltrr.arizona.edu/~dmeko/notes\\_...pdf\]](http://www.ltrr.arizona.edu/~dmeko/notes_...pdf)

Интервал поверења се рачуна по формули

$$\frac{\vartheta \hat{f}(\omega)}{\chi^2_{(\vartheta, \frac{\alpha}{2})}} < f(\omega) \leq \frac{\vartheta \hat{f}(\omega)}{\chi^2_{(\vartheta, 1 - \frac{\alpha}{2})}}, \quad (3.59)$$

где је:

$\vartheta = 2.67 \frac{N}{M}$  – број степени слободе,

$\alpha$ - ниво значајности,

$\chi^2_{(\vartheta, \frac{\alpha}{2})}$ ,  $\chi^2_{(\vartheta, 1 - \frac{\alpha}{2})}$  - квантил  $\chi^2$  расподеле за  $\vartheta$ - степени слободе и вероватноћу

$\frac{\alpha}{2}$  и  $1 - \frac{\alpha}{2}$ .

Вредности ордината спектра које су изван интервала поверења указују на доминантан утицај тих фреквенција; ако постоји законитост у редоследу фреквенција изван интервала онда постоји и периодичност појава (нпр. брана се осматра два пута годишње, при малој и великој води, логично је да ће постојати законитост код првог, трећег, петог... опажања у временској серији или у парним члановима серије, јер ниво воде утиче на процес понашања бране).

Избор тачке засецања је деликатно питање. Када је тачка засецања  $M$  мала доводи до већег заобљавања спектра, па је утицај фреквенција које доминантно утичу на одступање у серији мањи. Такође, смањује се интервал поверења, јер је број степени слободе већи; и смањује се резолуција спектра, што доводи до тога да се екстремне вредности одступања смањују због повећања опсега, односно ордината за одређени опсег се апроксимира аритметичком средином јачина за све

фреквенције из опсега. Генерално правило за избор тачке засецања дао је Четфилд (Chatfield) 1975. године [[http://www.ltrr.arizona.edu/~dmeko/notes\\_...pdf](http://www.ltrr.arizona.edu/~dmeko/notes_...pdf)] и у њему је речено да однос  $M$  и  $N$  треба да је у интервалу  $\frac{1}{20} < \frac{M}{N} < \frac{1}{3}$ , што је мање од Њуквистове фреквенције.

### 3.6 ДЕТРЕНДОВАЊЕ ОПАЖАЊА ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ

Тренд временске серије представља спору, постепену промену неке карактеристике серије. Некада се тренд везивао само за промену аритметичке средине, што није тачно јер и остали параметри (нпр. дисперзија) могу да се мењају. Иначе, анализа серије подразумева елиминисање тренда, одређивање периодичне компоненте и поремећаја. Детрендовање је статистичка или математичка операција уклањања тренда из опажања. Овај поступак се примењује да би се уклонили „маскирајући“ ефекти који отежавају посматрање одређених карактеристика система које су предмет посматрања. У деформационој анализи померања тачака на објекту могу бити замаскирани померањем околног терена. Ова померања не утичу на функционалност објекта, али могу да доведу до погрешних закључака. Такође, већина поступака идентификације система претпоставља стационарност/ слабу стационарност, а овим поступком се то обезбеђује.

У наредним потпоглављима приказани су математички поступци детрендовања опажања временских серија:

1. одузимањем аритметичке средине,
2. разликама првог и другог реда,
3. апроксимација кривом,
4. дигиталним филтрирањем и
5. апроксимација полиномом по деловима.

1) Одузимањем аритметичке средине

Одузимање аритметичке средине је најједноставнији начин детрендовања података временске серије. Од резултата мерења одузима се аритметичка средина. На овај начин добија се да је математичко очекивање од детрендоване серије нула.

2) Разлике првог и другог реда

Ако временска серија није стационарна по аритметичкој средини, односно има тренд по средини, стационарност се може обезбедити на основу разлика првог реда ( $w_t^1$ ). Оне су разлике између сукцесивних резултата мерења ( $x_t$ ) серије

$$w_t^1 = x_t - x_{t-1}. \quad (3.60)$$

Међутим, ако тренд средине није равномеран (под истим нагибом), онда се рачунају разлике другог реда ( $w_t^2$ )

$$w_t^2 = w_t^1 - w_{t-1}^1. \quad (3.61)$$

Овај начин детрендовања примењују се у деформационој анализи за детрендовање (нпр. података слегања објекта по епохама, јер промена средине је инверзно експоненцијална). Не обезбеђује се увек слаба стационарност процеса, али разлике оцена параметара модела када је процес слабо стационаран и нестационаран су занемарљиве. Детрендовање података разликама чува утицај физичке вредности временске серије.

Ако се на основу разлика првог реда одреди функција преноса, онда се добијена функција преноса мора помножити са  $(1 - z^{-1})$  да би се добила функција преноса оригиналних података; а када се одреди функција преноса на основу разлика другог реда потребно ју је помножити са  $(1 - z^{-1})^2$  да би се добила функција преноса оригиналних опажања. Из овога се закључује да се лако успоставља веза између детрендованих и оригиналних мерења, а сам поступак детрендовања је једноставан.



3) Апроксимација кривом

Ако се временска серија мења споро и равномерно у времену, онда се може детрендовати једноставном временском функцијом. Најједноставнија и најчешће коришћена временска функција за детрендовање је линеарна регресија, којом се елиминише линеарни тренд. Оцене коефицијената се добијају методом најмањих квадрата. Модел линеарне регресије је

$$x_t = a + bt + e_t, \quad (3.62)$$

где је  $x_t$ - резултат мерења сигнала временске серије у тренутку  $t$ ,  $a$ - регресиона константа,  $b$ - регресиони коефицијент и  $e_t$ - регресиона грешка.

Тренд се описује следећом функцијом

$$g_t = \hat{a} + \hat{b}t, \quad (3.63)$$

где је  $g_t$ - тренд временске серије у тренутку  $t$ ,  $\hat{a}$ - оцењена регресиона константа,  $\hat{b}$ - оцењени регресиони коефицијент. Права линија некада не описује добро тренд, па се могу користити и друге криве. То доводи до формирања нелинеарног система једначина чији се коефицијенти оцењују другим нумеричким методама за решавање нелинеарних система (као што је: градијент и Њутнова метода).

4) Дигитални филтер

Оцена спектра приказује колико одређене фреквенције утичу на одступања унутар временске серије. Зависно од врсте анализе, које се карактеристике процеса посматрају, могу бити интересантне ниске, високе или одређени опсег фреквенције. Ако након филтрирања остају само ниске фреквенције онда је то ниско пропусни филтер, а математички поступак се назива изравнање (smoothing). За анализу високих фреквенција (поремећаја) примењује се високо фреквентни филтер, а овај поступак се назива детрендовање, јер уклања тренд који настаје од дугопериодичних утицаја (промена температуре, притиска или од спорих сеизмичких процеса), а у детрендованој серији остају само краткпериодични – високофреквентни утицаји.

Изравнање временске серије је поступак оцењивања вредности (мерења) серије када не би биле присутне нежељене фреквенције. Статистички филтер, или

дигитални филтер, представља вектор тежина који се кумулативно множи са оригиналним мерењима временске серије. На овај начин се добија филтрирана серија. Вектор тежина се назива функција филтрирања, или једноставно филтер, и добија се као

$$s_t = \sum_{i=-n}^n w_i x_{t+i}, \quad (3.64)$$

где је:

$x_t$  – оригинална серија,

$w_i$  – тежина ( $i = -n, (-n + 1), \dots, 0, 1, \dots, n$ ).

Величина вектора тежина је  $2n + 1$ . Сума тежина је обично једнака 1. На овај начин се обезбеђује да је аритметичка средина иста за оригиналну и филтрирану серију. Такође, вектор тежина је симетричан, па не долази до фазног помераја између ове две серије. Приликом филтрирања филтрирана серија је мања у односу на оригиналну серију за  $\frac{n-1}{2}$  члана на почетку и крају серије.

Најчешће се примењују следећи нискофреквентни филтери:

1. померање средине,
2. биномални,
3. Гаусов и
4. Хамингов прозор (Hamming window).

У овом раду филтрирање није примењено за детрендовање података, па због тога високофреквентни филтери нису детаљно приказани.

### 3.6.1 Уклањање тренда

За уклањање тренда постоје два начина. Један начин је да се од оригиналне серије одузме вредност тренда функције и добијају се резидуали. На овај начин добија се серија резидуала чија је дисперзија мања од дисперзије оригиналне серије; дисперзија оригиналне серије једнака је суми квадрата тренда и суме квадрата резидуала. Други начин је тзв. „сразмера“, која се добија дељењем оригиналне серије са вредностима тренд функције. Серија добијена на овај начин је без димензија. Ово је ефикасан начин детрендовања серије која није стационарна по дисперзији, а што доводи до нестационарности по средини. До

нестационарности по дисперзији долази и због усавршавања мерних инструмената, односно због прецизнијег мерења.

Најједноставнији начин провере значајности детрендовања података је упоређењем дисперзија оригиналне и детрендоване серије. Тестирање се изводи помоћу следећег израза:

$$R^2 = 1 - \frac{D(e_t)}{D(x_t)}, \quad (3.65)$$

где је  $D(x_t)$  дисперзија оригиналне серије, а  $D(e_t)$  дисперзија резидуала након детрендовања серије. Ако је  $R^2$  блиско 0 значи да је детрендовање безначајно, а ако је блиско 1 детрендовање је значајно.

Као што је већ наведено тренд је спора промена неке од карактеристика временске серије и настаје услед деловања сигнала са ниском фреквенцијом. Дугопериодични утицаји (температура, промена притиска и споре сеизмичке промене), такође су сигнали ниске фреквенције, па их је тешко разликовати од тренда. Да би смо разликовали узрок тренда од дугопериодичних утицаја потребно је да познајемо физичке особине процеса. У случају када не познајемо процес једино се можемо ослонити на статистичке методе, које нам омогућавају да разликујемо тренд од других утицаја. Грангер и Хатанка 1964. године [[http://www.ltrr.arizona.edu/~dmeko/notes\\_...pdf](http://www.ltrr.arizona.edu/~dmeko/notes_...pdf)] закључили су да тренд изазивају све фреквенције мање од  $\frac{1}{2N}$ , јер се амплитуда (јачина) монотонно повећава ако је фаза нула, док за веће фреквенције промене амплитуде су скоковите. У фреквентној области тренд се уклања применом сплајн функције.

### 3.7 МЕЂУСОБНА КОРЕЛАЦИЈА

Једна од најчешће коришћених статистика за дефинисање односа између две променљиве је Пирсонов корелациони коефицијент. Величина узорка, односно број независних мерења, значајно утиче на интервал поверења за корелациони коефицијент. То је поготову изражено код временских серија где постоји аутокорелација, па је потребно одредити „ефективну“ величину узорка. Пролазна и лажна корелација може се показати за одређени период мерења, а за други не

због аутокорелације. Коefицијент корелације, који представља јачину линеарне зависности, се може анализирати графички помоћу прозора.

Корелациони коefицијент се добија по формули

$$r = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\left\{ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right\}^{1/2} \left\{ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \right\}^{1/2}} = \frac{E[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\left\{ E[(x_i - \bar{x})^2] E[(y_i - \bar{y})^2] \right\}^{1/2}} = \quad (3.66)$$

$$\frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N z_{i,x} z_{i,y}$$

где је  $x_i, i=1,2,\dots,N$  и  $y_i, i=1,2,\dots,N$  временска серија величине узорка  $N$ ,  $E$ –математичко очекивање,  $\text{cov}(x, y)$ –коваријација,  $\hat{\sigma}_x$  и  $\hat{\sigma}_y$  стандардне девијација, а  $z_{i,x}$  и  $z_{i,y}$  стандардизоване аномалије. Стандардизоване аномалије су случајне променљиве са математичким очекивањем 0 и дисперзијом 1. На вредност корелационог коefицијента између две временске серије не утиче да ли је нека од временских серија помножена неком константом или је на сваки члан једне од серија додата константна вредност.

Статистичка претпоставка за значајност корелационог коefицијента две временске серије величине узорка  $N$  су:

- популације из којих су добијени узроци су нормално распоређене,
- популације су међусобно независне,
- пар између популације је добијен случајно,
- $N$  је велико.

Фреквентна расподела корелационог коefицијента за све могуће узорке величине

$N$  је нормално распорђен са  $\mu = 0$  и  $\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{N-2}}$ .

Параметре расподеле одредили су Понофски и Бриер 1958 [[http://www.ltrr.arizona.edu/~dmeko/notes\\_...pdf](http://www.ltrr.arizona.edu/~dmeko/notes_...pdf)]. Ове вредности нам омогућавају да израчунамо интервал поверења. Нпр. за двострани тест при нивоу значајност

0.05 је  $-\frac{1.96}{\sqrt{N-2}}$  до  $\frac{1.96}{\sqrt{N-2}}$ .

Ефективна величина узорка

Раније је наведено да су узроци случајни, односно да су мерења независна. У физичким процесима то је реткост. Аутокорелација унутар временске серије се дефинише аутокорелацијом првог корака. Стандардна девијација корелационог коефицијента зависи од величине узорка, и може се добити значајан коефицијент, а у питању је аутокорелација. Аутокорелација умањује ефективну величину узорка, односно проширује интервал поверења. Ефективна величина узорка се добија по формули

$$N' = N \frac{(1 - r_1)}{(1 + r_1)}, \quad (3.67)$$

где је  $N$ - величина узорака,  $N'$ - ефективна величина узока, а  $r_1$ - аутокорелациони коефицијент првог корака; а ефективна величина узорка за корелациони коефицијент је:

$$N' = N \frac{(1 - r_{1x}r_{1y})}{(1 + r_{1x}r_{1y})}, \quad (3.68)$$

$r_{1x}$  и  $r_{1y}$  су аутокорелациони коефицијенти првог корака временских серија  $x$  и  $y$ .

Тест значајности када популациона корелација није нула

Када популациони коефицијент није једнак нули, онда узорачки коефицијент корелације се не може посматрати као да је добијен из стандардизоване нормалне расподеле. Расподела узорачког коефицијента у односу на популациони коефицијент је асиметрична. Решење овог проблема је у примени Фишерове трансформације, која трансформише узорачки коефицијент корелације  $r$  у променљиву  $z$  која је нормално распоређена:

$$z = \frac{1}{2} [\ln(1 + r) - \ln(1 - r)], \quad (3.69)$$

стандардна девијација трансформисане променљиве је  $\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}}$ ,  $N$  је величина узорка (ако је потребно „ефективна“ величина узорка).

Приговори на интерпретацију корелационог коефицијента су:

1. подразумева линеарну везу између променљивих

Да би се открило да ли је веза нелинеарна погодна је нацртати податке временских серија као расуте тачке. Ако постоји нелинеарност потребно је извршити трансформацију података:

- логаритамска трансформација,

- степенаста трансформација је облика  $x_{i_{tran}} = x_i^p$ , где је  $x_i$ - оригиналан податак временске серије  $i$ - тог тренутка,  $x_{i_{tran}}$  - податак временске серије  $i$ - тог тренутка,  $p$ - степен трансформације (обично се примењује  $p = 0.5$  тзв. коренска трансформација или  $p = 2$  тзв. квадратна трансформација).

2. временске серије могу да зависе од неке друге променљиве,

3. може да постоји степена корелација, односно мерења у једној серији не морају да зависе само од пара у другој серији, већ могу да зависе и од претходних мерења у другој серији.

Значај корелационог коефицијента зависи од узорка и провера стабилности коефицијента може се вршити поделом временских серија на подсерије.

4.

## МОДЕЛИ ЛИНЕАРНО ВРЕМЕНСКИ-ИНВАРИЈАНТНИХ СИСТЕМА

Идентификација система се бави моделирањем одређених карактеристика система, које су предмет посматрања, са тачношћу која задовољава практичну примену. Због тога се врше одређене апроксимације, и најчешћа је да се нелинеаран процес апроксимира линеарним. Ово поједностављење се показало у већини практичних примена оправданим.

Дефиниција линеарног временског – инваријантног система је дата у другом поглављу, и он је потпуно описан: импулсним одговором  $\{(g_k)\}_1^\infty$ , односно функцијом преноса система  $G(z) = \sum_{k=1}^\infty g_k z^{-k}$  ( $z^{-k}$ - оператор померања уназад, функцијом преноса поремећаја  $H(z)$  (или спектром) и функцијом густине расподеле поремећаја  $f(e)$ . Потпуно описивање значи познавање три функције. Функције  $G(z)$  и  $H(z)$  садрже бесконачно коефицијената (импулсних одговора) које је немогуће оценити. Због тога је рационално извршити параметризацију ових функција, односно изразити их у облику функције преноса или простора стања. Функција густине расподеле поремећаја описује се само првим и другим моментом, а обично се претпоставља да су поремећаји нормално распоређени.

### 4.1 МОДЕЛИ ОБЛИКА ФУНКЦИЈЕ ПРЕНОСА

Један од начина параметризације функција преноса  $G(z)$  и  $H(z)$  је њихово представљање у облику разломљене рационалне функције са коначним бројем параметара. У већини случајева параметре ових функција није могуће оценити применом природних закона, већ се примењује процедура оцењивања најчешће

без икаквих претпоставки о систему. Поступак моделирања без увођења било каквих претпоставки о систему назива се “black-box”. Овакав поступак моделирања је примењен у овом раду.

Модели облика функције преноса представљају скуп модела, а у наредним потпоглављима су приказане структуре овог скупа које су примењиване у овом раду. Структуре модела се разликују по начину представљања функције преноса система  $G(z)$  и функције поремећаја  $H(z)$ , а разлика модела исте структуре је степен модела, који представља укупан број параметара модела, односно параметара чије се вредности оцењују.

#### 4.1.1 Структура модела грешке једначине

Најчешће коришћена и најједноставнија структура за описивање улазно – излазних веза је структура модела грешке једначине (*Equation Error Model Structure*). Линеарна диференцна једначина је:

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = b_1u(t) + b_2u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b+1) + e(t) \quad (4.1)$$

где је:  $a_i$ - регресиони коефицијент (параметар модела) за излазни сигнал  $y(t-i)$ ,  $b_i$ - регресиони коефицијент (параметар модела) за улазни сигнал  $u(t-i)$ ,  $e(t)$ - грешка једначине за тренутак  $t$ ,  $n_a$  – корак који показује колико претходних излазних сигнала утиче на тренутну вредност излазног сигнала,  $n_b$ - корак који показује колико претходних улазних сигнала утиче на тренутну вредност излазног сигнала. Степен модела (4.1) је  $n_a + n_b$ . У литератури која обрађује проблематику временских серија једначина (4.1) се записује у облику

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) + e(t),$$

и подразумева се да постоји кашњење одговора система. Међутим, одговор система може бити и тренутан или ми не можемо регистровати кашњење система; то је случај код испитивања конструкције на пробно оптерећење геодетским методама. Најпотпунији начин записивања био би



$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = b_1u(t-n_{b_1}) + b_2u(t-n_{b_1}-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_{b_1}-n_b+1) + e(t), \quad (4.2)$$

где је  $n_{b_1}$  кашњење одговора система и може узети вредности од 0, 1, ....

У једначинама (4.1) или (4.2) бели шум  $e(t)$  (*white noise*) представља укупну грешку у линеарној диференцијалној једначини; то је најједноставнији облик представљања поремећаја система помоћу само једног адитивног члана. Вектор параметара који се оцењује је следећи

$$\theta = [a_1 \ \dots \ a_{n_a} \ b_1 \ \dots \ b_{n_b}]^T. \quad (4.3)$$

Функција преноса представља однос комплексних ликова улазног  $B(z)$  и излазног сигнала  $A(z)$ , па ако се уведу ознаке

$$A(z) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a} \text{ и} \\ B(z) = b_1 + b_2z^{-1} + b_3z^{-2} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b+1},$$

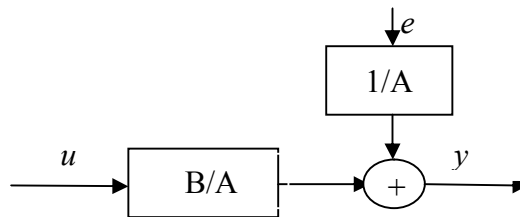
у формулу (2.10), која је облика

$$y(t) = G(z, \theta)u(t) + H(z, \theta)e(t)^1, \quad (4.4)$$

онда функције преноса су

$$G(z, \theta) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad H(z, \theta) = \frac{1}{A(z)}. \quad (4.5)$$

Графички приказ овог модела дат је на слици 4.1.



Слика 4.1: Структура модела грешке једначине (ARX) [Ljung, 1987]

Модел (4.1) обично се назива и ауторегресивни модел са спољашњим улазним сигналом (ARX – AutoRegressive with eXternal input). Ауторегресивни део модела (AR) је  $A(z)y(t)$ , а спољна побуда X (спољашњи улазни сигнал) је  $B(z)u(t)$ . У случају када је  $n_a = 0$   $y(t)$  се моделује као коначни импулсни одговор (FIR – Finite Impulse Response). На слици 4.1 може се видети да поремећаји, односно бели шум пре него што се споји са излазним сигналом пролази кроз систем,

1) Разлика између формула (2.10) и (4.4) што у (4.4) фигурише параметар  $\theta$ , да би се указало да у функцијама преноса фигуришу оцењени параметри.

односно дели се имениоцем система  $A$  у математичком смислу. Ова претпоставка физички нема оправдање, али са практичне тачке ARX модел при описивању одређених карактеристика система даје задовољавајућу тачност карактеристика које су предмет истраживања.

Предиктор на основу модела (4.2), а примењујући формулу (2.16) има следећи облик

$$\hat{y}(t|\theta) = B(z)u(t) + [1 - A(z)]y(t). \quad (4.6)$$

У формули (4.2) се претпоставља да је поремећај безначајан и да је детерминистички. Предиктор је једнак скаларном производу вектора  $\boldsymbol{\varphi}(t)^T = [-y(t-1) \dots -y(t-n_a) \quad u(t) \dots u(t-n_b)]$  и  $\boldsymbol{\theta}$ , односно

$$\hat{y}(t|\theta) = \boldsymbol{\varphi}(t)^T \boldsymbol{\theta}, \quad (4.7)$$

где је  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  - вектор парцијалних извода једначине (4.2) по непознатим параметрима  $\boldsymbol{\theta}$ . Овакав модел у математичкој статистици назива се линеарна регресија, а вектор  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  регресиони вектор. Оцена параметара регресионог модела добија се применом метода најмањих квадрата, а у раду је приказан Дурбин-Левинсон алгоритам за оцену параметара који не захтева инверзију матрице нормалних једначина.

#### 4.1.2 Ауторегресивни модел са померајућом средином и спољашњим побудама

##### (ARMAX- AutoRegressive Moving Average with eXternal input model)

ARMAX модел је математички модел законитости добијања резултата временске серије, односно модел аутокорелације временске серије; и он је најопштији модел из кога су проистекли остали модели. На основу њега могу се открити физичке законитости параметара неког динамичког процеса, јер се анализира физичка аутокорелација. Овај модел користи се за предиктовање стања динамичког система само на основу вредности мерених улазних сигнала за тренутак предикције  $t$  и претходних улазних сигнала, као и претходних мерених излазних величина пре тренутка  $t$ , и успешно се примењује за рандомизацију процеса (обезбеђивање стационарности процеса). Рандомизацијом процеса

уклањају се трендови процеса, односно отклањају се дугопериодични утицаји (оптерећење, температура, подземне воде, тектонске промене), а остају краткпериодични утицаји (удари ветра, земљотрес, саобраћај), као што је нпр. код испитивања високих конструкција елиминише се тренд промене геометрије због промене температуре или оптерећења, а остаје утицај ветра.

#### Математички модел

ARMAX модел састоји се од система једначина. Да би модел имао једноставнију форму прво се изводи детрендовање података временске серије. Означимо оригинална мерења у тренутку  $t$  са  $Y_t$ , а детрендоване податке серије са  $y_t$ . Једначина ARMAX модел у тренутку  $t$  је облика:

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) \\ = b_1 y(t) + b_2 y(t-1) + \dots + b_{n_b} y(t-n_b+1) + \\ e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \dots + c_{n_c} y(t-n_c) \end{aligned} \quad (4.8)$$

где је:  $a_i$ - регресиони коефицијент (параметар модела) за излазни сигнал  $y(t-i)$ ,  $b_i$ - регресиони коефицијент (параметар модела) за улазни сигнал  $u(t-i)$ ,  $e(t-i)$ - грешка једначине (поремећај) за тренутак  $t-i$ ,  $c_i$ - регресиони коефицијент (параметар модела) за грешку једначине у тренутку  $t-i$ ,  $n_a$  – корак (број) који показује колико претходних излазних сигнала утиче на тренутну вредност излазног сигнала (показује до кога корака је значајна аутокорелација између тренутног и претходних излазних сигнала),  $n_b$ - корак (број) који показује колико претходних улазних сигнала утиче на тренутну вредност излазног сигнала (показује до кога корака је значајна међусобна корелација између тренутног излазног сигнала и улазних сигнала),  $n_c$ - корак који показује колико претходних грешака једначине утиче на тренутни вредност излазног сигнала. Степен модела (4.8) је  $n_a + n_b + n_c$ .

Структура овог модела се разликује од модела грешке једначине у томе што се поремећај (бели шум) моделира, односно грешка модела у тренутку  $t$  зависи и од претходних поремећаја. Параметри који се оцењују у ARMAX моделу су следећи

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n_c}]^T. \quad (4.9)$$

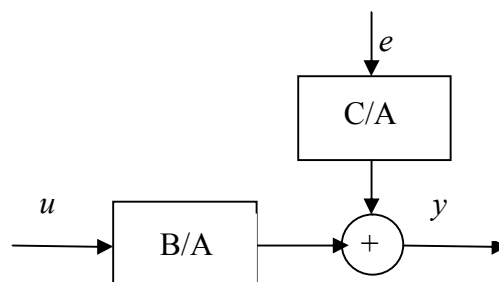
Означимо са  $C(z) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_nz^{-n}$  функцијски оператор поремећаја, онда се једначина (4.8) може записати као

$$A(z, \theta)y(t) = B(z, \theta)u(t) + C(z, \theta)e(t). \quad (4.10)$$

Функције преноса су следеће:

$$G(z, \theta) = \frac{B(z, \theta)}{A(z, \theta)} \quad H(z, \theta) = \frac{C(z, \theta)}{A(z, \theta)}. \quad (4.11)$$

Блок дијаграм структуре ARMAX модела приказан је на слици 4.2.



Слика 4.2: Структура ARMAX модела [Ljung, 1987]

Од ARMAX модела изведена су три модела: ауторегресивни (AR- AutoRegressive model), модел са променљивом средином (Moving Average model) и ауторегресивни модел са спољашњим побудама (ARX- AutoRegressive with eXtrenal input model). Из самих назива ових модела може се закључити која је структура модела, и они имају значајну примену. О структури ових модела биће речи у наредном делу овог поглавља.

#### Ауторегресивни модел

Ауторегресивни модел описује временску серију као функцију од претходних вредности излазних сигнала. Оваква врста модела се у деформационој анализи назива кинематички модел. Степен модела нам указује колико претходних вредности излазног сигнала значајно утиче на тренутну вредност излазног сигнала. Систем једначина је следећег облика

$$y(t) + a_1y(t - 1) + \dots + a_{n_a}y(t - n_a) = e(t), \quad (4.12)$$

а модел је степена  $n_a$ . Јасно је да је функција преноса код AR модела следећа

$$G(z, \theta) = \frac{1}{A(z, \theta)}. \quad (4.13)$$

Модел ове структуре има велику примену у деформационој анализи. Приликом извођења епоха мерења непознате су нам вредности улазних сигнала, па једино на основу AR модела можемо да предиктујемо понашање објекта. Иначе, на основу оцењених вектора померања, применом метода нумеричког диференцирања, могу се добити брзина и убрзање померања тачака; познато је (поглавље 2.) да су то поред вектора померања величине које формирају кинематички модел. На основу напред наведеног може се закључити да практично структура AR модела одговара структури кинематичког модела. Разлика је у томе што кинематички модел по структури припада простору стања, односно модел система (функције везе) се односи на координате; док у AR моделу фигуришу мерене излазне величине из којих се оцењивањем и нумеричким диференцирањем добијају померање, брзина и убрзање померања карактеристичних тачака.

#### Модел са померајућом средином

Овај модел описује функционалну зависност добијања вредности излазног сигнала у тренутку  $t$ , која се разликује у односу на претходну вредност због утицаја стохастичког поремећаја (белог шума). Други назив који се употребљава за овај модел је модел случајног хода или модел неједнаких тежина. Први назив (модел случајног хода) уобичајен је у навигацији, а може се применити у деформационој анализи за све промене геометрије које су последица мерне несигурности сензора и тренутних атмосферских услова у којима изводимо мерења – поремећаја који се мењају у току епохе мерења. Други назив пријемчивији је за премер и геодетску метрологију, где се утицај случајних грешака мерења покушава минимизирати неједнаким тежинама.

Систем једначина модела, након детрендовања података, је следећег облика

$$y(t) = e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \dots + c_{n_c} e(t-n_c). \quad (4.14)$$

Степен модела је једнак  $n_c$ . Функција преноса код овог модела је функција преноса поремећаја:

$$H(z, \theta) = C(z, \theta). \quad (4.15)$$

Комбинацијом ова два модела добија се ауторегресивни модел са променљивом средином ARMA (AutoRegressive Moving Average model). Степен овог модела је једнак суми  $n_a + n_c$ .

Псеудолинеарна регресија

Предиктор на основу модела (4.10), а примењујући формулу (2.16) има следећи облик

$$\hat{y}(t|\theta) = \frac{B(z)}{C(z)} u(t) + \left[1 - \frac{A(z)}{C(z)}\right] y(t). \quad (4.16)$$

Из горе наведене формуле закључује се да се предикција добија филтрирањем улазних и излазних сигнала кроз филтер чији је именилац једнак  $C(z)$ . У моделу (4.10) поремећај у тренутку  $t$  је  $e(t)$ , који се налази у мереном излазном сигналу, не може се предиктовати на основу претходних података, али се може предвидети његова вредност. Овај поступак се назива *иновација*. Код ARMAX модела предиктор је једнак скаларном производу вектора  $\boldsymbol{\varphi}(t)^T = [-y(t-1) \dots -y(t-n_a) \ u(t) \dots u(t-n_b) \ e(t-1) \dots e(t-n_c)]$  и  $\boldsymbol{\theta}$ , односно

$$\hat{y}(t|\theta) = \boldsymbol{\varphi}(t)^T \boldsymbol{\theta}, \quad (4.17)$$

где је  $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ .

Овакав модел у математичкој статистици назива се псеудолинеарна регресија. Вектор параметара  $\boldsymbol{\theta}$  има нелинеаран утицај на регресиони вектор  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ .

За решавање система једначина код ARMAX, ARMA и MA примењују се и другачији алгоритми у односу на традиционални методе најмањих квадрата (МНК). У следећем потпоглављу приказани су алгоритми за решавање система једначина који нису уобичајени у светској геодетској пракси, а поготову у српској.

### 4.1.3 Методе и алгоритми за решавање линеарног система једначина

Најчешће примењивана метода за решавање система једначина је добро позната метода најмањих квадрата (МНК), која неће бити објашњавана због њене широке примене у геодетској пракси, иако је примењена за оцењивање параметара модела у примерима. У овом делу приказане су методе и алгоритми који нису познати широј геодетској јавности, а то су: Дурбин- Левинсон алгоритам и метода грешке предикције - PEM (Prediction Error Method). Дурбин-Левинсон алгоритам има предност у односу на МНК јер није потребна инверзија матрице нормалних једначина. PEM се примењује за оцењивање параметара ARMAX модела.

#### Дурбин-Левинсон алгоритам

Дурбин-Левинсон је рекурзивни предикциони алгоритам за оцену параметара AR( $p$ ) модела, којим се избегава инверзија матрице приликом решавања система и аутоматски се рачуна парцијална аутокорелација и стандардно одступање параметара. Основа претпоставка за имплементацију алгоритма је да је математичко очекивање временске серије 0 (ако то није случај елиминише се тренд из серије, али се приликом предикције мора узети у обзир) и да је процес  $\{y_t\}$  стационаран са коваријационом функцијом  $r_x(h)$ . Најбоља линеарна предикција за  $y_{n+1}$  на основу познатих вредности за  $y_1, y_2, \dots, y_n$  је

$$\hat{y}_{n+1} = a_{n,n}y_1 + a_{n,n-1}y_2 + \dots + a_{n,1}y_n = \sum_{i=1}^n a_{n,i}y_{n-i+1}. \quad (4.18)$$

Стандардно одступање предикције је

$$v_n = E\left[(y_{n+1} - \hat{y}_{n+1})^2\right]. \quad (4.19)$$

Следећи су кораци за рачунање оцене Дурбин-Левинсон алгоритмом:

- *Први корак:* Усвајамо  $a_{00} = 0$ ,  $v_0 = r_x(0)$ , и  $n=1$ ;
- *Други корак:* Рачунамо

$$a_{n,n} = \left[ r_x(n) - \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i} r_x(n-i) \right] v_{n-1}^{-1};$$

- *Трећи корак:* За  $n \geq 2$ , рачунамо

$$\begin{pmatrix} a_{n,1} \\ \dots \\ a_{n,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1,1} \\ \dots \\ a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} - a_{n,n} \begin{pmatrix} a_{n-1,n-1} \\ \dots \\ a_{n,1} \end{pmatrix};$$

- *Четврти корак:* Рачунамо

$$v_n = v_{n-1}(1 - a_{n,n}^2),$$

Повећавамо број параметара  $n$ , односно  $n = n + 1$ , и враћамо се на други корак.

### Метода грешке предикције

Уобичајено је да се модел динамичког система, чије се оцене параметара добијају методом најмањих квадрата, записују у матричном облику

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)^T \boldsymbol{\theta}^0 + \mathbf{e}(t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

Модели динамичког система у већем броју случајева могу се записати у следећим облицима:

$$y(t) = b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t) \quad (4.21)$$

FIR (Finite Impulse Response модел или статички модел у деформационој анализи),

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-1) \\ = b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

(ARX модел или динамички модел у деформационој анализи) и

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-1) = b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) \\ + e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_{n_c} e(t-n_c) \end{aligned} \quad (4.23)$$

(ARMAX модел или динамички иновациони модел (у званичном саопштењу FIG Радне групе 6.1 овај модел се не спомиње)).

FIR модел може се записати у стандардној форми (4.20) где је

$$\boldsymbol{\varphi}(t)^T = [u(t) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-n_b)] \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\theta}^0 = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n_b}]^T.$$

Такође, и ARX модел може се записати у стандардној форми (4.20) где је



$$\boldsymbol{\varphi}(t)^T = [-y(t-1) \quad -y(t-2) \quad \dots \quad -y(t-n_a) \quad u(t) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-n_b)] \quad \text{и}$$

$$\boldsymbol{\theta}^0 = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n_b}]^T.$$

ARMAX модел се не може трансформисати у стандардну форму због тога што је вектор поремећаја, чији су чланови  $e(t), e(t-1), \dots, e(t-n_c)$ , непознат и корелисан. За оцењивања у случају када су поремећаји корелисани потребне су софистицираније методе. Вектор поремећаја се не мери и не може се укључити у матрицу коефицијената (дизајна првог реда)  $\boldsymbol{\varphi}(t)^T$ . Иначе, када би се матрица коефицијената написала у стандардној форми од тренутка  $t = 2$  до  $t$  имала би следећи облик

$$\boldsymbol{\varphi}(t)^T = \begin{bmatrix} -y(1) & 0 & \dots & 0 & u(1) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -y(2) & -y(1) & \dots & 0 & u(2) & u(1) & \dots & 0 & e(1) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(t-1) & -y(t-2) & \dots & -y(t-n_a) & u(t) & u(t-1) & \dots & u(t-n_b) & e(t-1) & e(t-2) & \dots & e(t-n_c) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}^0 = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n_c}]^T.$$

Да би се модел могао приказати у овом облику потребно је оценити поремећаје, сигнале који се не мере. Посматрајмо нпр. систем који се описује статичким иновационим моделом:

$$y(t) = b_1 u(t-1) + e(t) + c_1 e(t-1) = [u(t-1) \quad e(t-1)] \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + e(t). \quad (4.24)$$

Непознате вредности поремећаја (грешка једначине) се добијају на следећи начин:

$$e(t-1) = y(t-1) - \{b_1 u(t-2) + c_1 e(t-2)\}$$

$$e(t-2) = y(t-2) - \{b_1 u(t-3) + c_1 e(t-3)\}.$$

У тренутку  $t - k < 0$ , нека је то тренутак  $t - 3$ ,  $e(t-3) \approx 0$ , па је сходно томе

$$e(t-2) \approx y(t-2) - \{b_1 u(t-3) + c_1 0\} \quad \text{и}$$

$$e(t-1) \approx y(t-1) - \{b_1 u(t-2) + c_1 [y(t-2) - b_1 u(t-3)]\}.$$

Оваквом заменом почетни модел (4.24) може да се запише у стандардној форми (4.20) где је

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\theta}^0)^T = [u(t-1) \quad y(t-1) - \{b_1 u(t-2) + c_1 [y(t-2) - b_1 u(t-3)]\}].$$

Поступак оцењивања је следећи:

1. МНК оцене се параметри полинома

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} \quad \text{и}$$

$$B(z) = b_1 + b_2 z^{-1} + b_3 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b+1},$$

2. Израчунају се поправке  $e(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - A(z)y - B(z)u$ , које су добра апроксимација белог шума,

3. Прошири се регресор за  $e(t)$  и оцене се коефицијенти полинома

$$A(z) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a},$$

$$B(z) = b_1 + b_2z^{-1} + b_3z^{-2} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b+1}$$

$$C(z) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_{n_c}z^{-n_c}$$

применом МНК.

Овај поступак оцењивања је утемељио Љунг и још се назива псеудолинеарном регресијом или двостепеном линеарном регресијом.

## 4.2 МОДЕЛ ПРОСТОРА СТАЊА

Функцијом преноса се описују само линеарни стационарни системи, и посебно је погодан за описивање прелазног периода система, односно до успостављања стабилности система. Прелазни период за конструкцију је до тренутка консолидације терена. Описивање система моделом простора стања има следеће предности у односу на функцију преноса:

- анализа и пројектовање система је једноставније,
- не мора процес одабирања бити исти током целог посматраног процеса,
- погодан је да се примењује и на SISO и MIMO системе,
- може се применити и на извесне класе нелинеарних и/или нестационарних система [Стојић,1998],
- концепт простора стања се заснива на односу узрок- ефекат из класичне механике, па самим тим и физичка интерпретација је једноставнија,
- у деформационој анализи систем се описује помоћу координата, брзине и убрзања. Брзина и убрзање система су величине које се могу добити нумеричким диференцирањем.

На почетку овог потпоглавља прво је приказана концепција стања система, односно приказивање динамичког система системом диференцијалних једначина првог реда. Затим је изложена дискретизација система; сваки систем је





Када је систем стационаран, што је и предмет овог рада, матрице се записују у следећем облику: **A**, **B**, **D** и **H** јер коефицијенти, који су елементи матрица, не зависе од времена.

Избор променљивих стања система

Избором променљивих стања система диференцијална једначина вишег реда своди се на систем диференцијалних једначина првог реда. Избор променљивих зависи од тога да ли се у диференцијалној једначини вишег реда појављују и изводи по улазним сигналимa или не. Сходно томе постоје два поступка избора променљивих.

Нека диференцијална једначина  $n$ - тог реда у алгебарском облику, након примене Лапласове трансформације, има следећи облик:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)X(s) = bu(t). \quad (4.28)$$

Када се формира функција преноса на основу (4.28) јасно је да функција преноса нема коначне нуле и на десној страни ове једначине не фигуришу изводи по улазном сигналу. Да би се свела једначина на нормалну форму усвајају се следеће променљиве стања

$$x_1 = x(t), \quad x_2 = sx(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt}, \dots, \quad x_n = s^{n-1}x(t) = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = \frac{dx_{n-1}}{dt} \quad . \quad \text{На овај}$$

начин добија се систем диференцијалних једначина првог реда:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -\frac{a_0}{a_n}x_1 - \frac{a_1}{a_n}x_2 - \frac{a_2}{a_n}x_3 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n + \frac{b}{a_n}u. \end{aligned} \quad (4.29)$$

У матричном облику једначина система има следећи облик:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

где је:

$$\mathbf{x}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{r \times 1} = [u].$$

Ако је систем МИМО или МISO онда је матрица  $\mathbf{B}$  димензија  $n \times r$ , а  $\mathbf{u}$   $r \times 1$ .

У случају када диференцијална једначина има изводе на десној страни, онда функција преноса има коначне нуле и диференцијална једначина  $n$ -тог реда има следећи облик

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)X(s) = (b_1 s + b_0)U(s). \quad (4.30)$$

Да би се свела једначина на нормалну форму усвајају се следеће променљиве стања

$x_1 = x(t)$ ,  $x_2 = sx(t)$ , ...,  $x_n = s^{n-1}x(t) - \beta u(t)$ . На овај начин добија се систем диференцијалних једначина првог реда:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta u \end{aligned} \quad (4.31)$$

Константа  $\beta$  треба да се одреди. Диференцирањем последње једначине у (4.31) добија се

$$\ddot{x}_{n-1} = \dot{x}_n + \beta su.$$

Сменом у једначини (4.30) добија се

$$\dot{x}_n = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \frac{a_2}{a_n} x_3 - \dots - \frac{a_{n-2}}{a_n} x_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} (x_n + \beta u) + \frac{b_1}{a_n} su + \frac{b_0}{a_n} u - \beta su.$$

Да би се елиминисао члан уз  $su$  потребно је усвојити  $\beta = \frac{b_1}{a_n}$ , после чега се добија последња једначина система (4.31)

$$\dot{x}_n = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \frac{a_2}{a_n} x_3 - \dots - \frac{a_{n-2}}{a_n} x_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{a_n b_0 - a_{n-1} b_1}{a_n^2} u.$$

#### 4.2.2 Дискретизација модела континуалног система

Познато је да је сваки систем континуалан и да на њега делују улазни сигнали који изазивају процес. Ово се односи и на грађевинске конструкције, нпр. промена температуре је резултат дневног и периодичног процеса (годишња доба), па самим тим и промена димензија конструкције је континуиран процес. На један систем, као што је наведено у поглављу 2, делују и поремећаји који на конструкцијама изазивају деформације, односно трајне поремећаје геометрије.

Поремећаји могу бити детерминистички и стохастички. Када су детерминистички онда се они могу посматрати као познати улазни сигнали. Међутим, због мерне несигурности сензора и непознавања „истинитих“ карактеристика терена или употребљеног материјала поремећаје у деформационој анализи потребно је описивати као резултат стохастичког процеса. Због ове врсте поремећаја модел (4.27) проширен је за утицај поремећаја и има следећи облик:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{D}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t),\end{aligned}\quad (4.32)$$

где је:

$\mathbf{w}(t)$  – вектор поремећаја чији су елементи резултат стохастичког процеса са математичким очекивањем  $0$ , димензије  $p \times 1$ , и коваријационе матрице  $E\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\} = \mathbf{Q}$ ;

$\mathbf{v}(t)$  – вектор грешака мерења сензора димензије  $m \times 1$ , и коваријационе матрице  $E\{\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)\} = \mathbf{R}$ .

$\mathbf{G}(t)$  – матрица коефицијената континуираног модела система по поремећајима система, димензија  $n \times p$ .

Диференцијална једначина временски-инваријантног (стационарног) система, чији се модели и приказују у овом поглављу, је

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{w}(t),\quad (4.33)$$

а алгебарска једначина излаза

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{D}\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t).\quad (4.34)$$

Код дискретних система уобичајено је да се претпоставља да је вектор улазних сигнала константан између периода одабирања (опажања). Да би се дискретизовала стохастичка диференцијална једначина (4.33) потребно је одредити кретање система унутар интервала одабирања  $kT \leq t < (k+1)T$ , односно наћи решење диференцијалне једначине у задатом интервалу

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - kT)\mathbf{x}(kT) + \left[ \int_{kT}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B} \right] \mathbf{u}(kT) + \left[ \int_{kT}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{G} \right] \mathbf{w}(kT),\quad (4.35)$$

где је  $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$  фундаментална матрица система. Иначе,

први члан на десној страни једначине представља хомогено решење једначина (4.33), а друга два партикуларно решење.

Код дискретних система нас интересује стање система у тренуцима одабирања  $t = 0, T, 2T, \dots$ . Када се у једначини (4.35) замени  $t = (k + 1)T$  добија се

$$\mathbf{x}[(k + 1)T] = \mathbf{E}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(kT) + \mathbf{M}(T)\mathbf{w}(kT), \quad (4.36)$$

где су:

$$\mathbf{E}(T) = \Phi[(k + 1)T - kT] = \Phi(T) = e^{\mathbf{A}T}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{F}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k + 1)T - \tau] \mathbf{B}d\tau, \quad (4.38)$$

$$\mathbf{M}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k + 1)T - \tau] \mathbf{G}d\tau. \quad (4.39)$$

где је:

$\mathbf{E}(T)$ - матрица коефицијената дискретног модела система по параметрима система

$\mathbf{F}(T)$ - матрица коефицијената дискретног модела система по улазним сигнаlima

$\mathbf{M}(T)$ - матрица коефицијената дискретног модела система по поремећајима система

Мерљиви излазни сигнали нису координате стања већ неке друге променљиве (дужине, правци) који се могу изразити као линеарна комбинација координата и улазних сигнала. Целовит модел дискретног система у простору стања добија се када се диференцној једначини (4.36) придружи алгебарска једначина

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{D}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{v}(kT). \quad (4.40)$$

### 4.2.3 Кретање дискретног система у простору стања

Трајекторија дискретног система у простору стања одређује се решавањем диференцне једначине (4.36) за дато почетно стање система  $\mathbf{x}(0)$  и познате вредности улазних сигнала  $\mathbf{u}(kT)$  у тренуцима одабирања  $0, T, 2T, \dots$ . Њено одређивање може се извршити једноставним рекурентним поступком или



применом  $\mathcal{Z}$  - трансформације. Овде је приказан рекурентни поступак.

Смењујући  $k = 0$  и  $k = 1$  у (4.36) добијамо

$$k = 0: \mathbf{x}(T) = \mathbf{E}(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(0) + \mathbf{M}(T)\mathbf{w}(0), \quad (4.41)$$

$$k = 1: \mathbf{x}(2T) = \mathbf{E}(T)\mathbf{x}(T) + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(T) + \mathbf{M}(T)\mathbf{w}(T). \quad (4.42)$$

Заменом  $\mathbf{x}(T)$  из (4.41) у (4.42) и узимајући у обзир да је  $\mathbf{E}^k(T) = e^{\mathbf{A}kt} = \mathbf{E}(kT)$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(2T) &= \mathbf{E}^2(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{E}(T)[\mathbf{F}(T)\mathbf{u}(0) + \mathbf{M}(T)\mathbf{w}(0)] + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(T) + \mathbf{M}(T)\mathbf{w}(T) \\ &= \mathbf{E}(2T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{E}(T)[\mathbf{F}(T)\mathbf{u}(0) + \mathbf{M}(T)\mathbf{w}(0)] + \mathbf{F}(T)\mathbf{u}(T) + \mathbf{M}(T)\mathbf{w}(T). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Следећи приказану процедуру, добија се за сваку целобројну константу  $N$

$$\mathbf{x}(NT) = \mathbf{E}(NT)\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}[(N-k-1)T][\mathbf{F}(T)\mathbf{u}(kT) + \mathbf{M}(T)\mathbf{w}(kT)]. \quad (4.44)$$

Дискретизација модела аналитичким поступком који је приказан је идеалан случај, јер се дискретна стања у тренуцима одабирања по (4.44) поклапају са стањима континуираног система са колом задршке нултог реда у тренуцима одабирања. У случајевима система вишег реда, поготову код МИМО система, израчунавање фундаменталне матрице у аналитичком облику је приметно. Због тога нумеричко одређивање диференцијалне једначине стања се изводи применом нумеричке интеграције, односно матрице  $\mathbf{E}(T)$ ,  $\mathbf{F}(T)$  и  $\mathbf{M}(T)$  се израчунавају приближно са унапред дефинисаном тачношћу. У потпоглављу 4.2.2 приказан је идеалан случај дискретизације континуираног система са колима задршке нултог реда. Постоји више нумеричких поступака за одређивање матрица диференцијалне једначине. Овде ће бити приказан поступак који је предложио Хопе [Норре] са сарадницима [Стојић, 1998.]. Овај поступак, као и већина осталих, полази од нумеричког израза за рачунање фундаменталне матрице

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!}, \quad \mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \quad (4.45)$$

( $\mathbf{I}$ - јединична матрица димензија  $n \times n$ ) која се добија решавањем диференцијалне једначине стања  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  по поступку сукцесивне апроксимације интегралне једначине. С обзиром на једначине (4.37) и (4.45) матрица  $\mathbf{E}(T)$  се може израчунати као

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{T^k}{k!}. \quad (4.46)$$

Овај матрични ред униформно конвергира (постоји више критеријума за конвергенцију редова, неки од њих су постојање лимеса парцијалних сума реда или ако је количник  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ - D'Alambertov критеријум) на коначном временском

интервалу. Због ове особине могуће је израчунати  $\mathbf{E}(T)$  са унапред задатом тачношћу, односно узимајући у обзир ограничени број чланова реда  $L$

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{T^k}{k!} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{AT} \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{AT}}{2} \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{AT}}{3} \left( \mathbf{I} \dots + \frac{\mathbf{AT}}{L-1} \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{AT}}{L} \right) \right) \right) \right) \right) + R, \quad (4.47)$$

где  $R$  представља остатак реда. Емпиријски је установљена веза између норме матрице  $\|\mathbf{AT}\|$  и  $L$ . Нпр. ако се  $L$  рачуна према обрасцу  $L = \min\{3\|\mathbf{AT}\| + 6.1\}$  обезбеђено је да ред неће садржати више од 100 чланова и да ће свих шест децималних цифара коефицијената матрице бити тачне.

Матрице  $\mathbf{F}(T)$  и  $\mathbf{M}(T)$  рачунају се на сличан начин. Одређени интеграли (4.38) и (4.39) једнаки су

$$\mathbf{F}(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau = (e^{\mathbf{AT}} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{M}(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{G} d\tau = (e^{\mathbf{AT}} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}. \quad (4.49)$$

По истом поступку као и за рачунање матрице  $\mathbf{E}(T)$  добија се

$$\mathbf{F}(T) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{T^k}{k!} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = T \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{AT}}{2} \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{AT}}{3} \left( \mathbf{I} \dots + \frac{\mathbf{AT}}{L-1} \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{AT}}{L} \right) \right) \right) \right) \mathbf{B} + R \quad (4.50)$$

$$\mathbf{M}(T) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{T^k}{k!} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1}\mathbf{G} = T \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{AT}}{2} \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{AT}}{3} \left( \mathbf{I} \dots + \frac{\mathbf{AT}}{L-1} \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{AT}}{L} \right) \right) \right) \right) \mathbf{G} + R \quad (4.51)$$

Из претходних израза види се да брже конвергирају  $\mathbf{F}(T)$  и  $\mathbf{M}(T)$  од  $\mathbf{E}(T)$ , па се могу срачунати са истом тачношћу као  $\mathbf{E}(T)$  за исти број итерација.

Приликом мониторинга објекта почетно стање система  $\mathbf{x}(0)$  представљају оцењене координате из нулте епохе, а тренуци одабирања су времена опажања. Временски размак између епоха мерења требао би да је исти, али често није исти и у том случају се једино може користити модел простора стања. Такође, проблем је што се вредности улазних сигнала мењају током мониторинга, јер период опажања неких објеката траје и више од десет дана. Зависно од тога да ли се улазни сигнал посматра као константан избор променљивих стања је као у (4.29) – коло задршке нултог реда, а ако се мења онда је избор као у (4.31) – коло задршке првог реда.

#### 4.2.4 Дискретни Калманов филтер

Рудолф Емил Калман је 1958. развио овај филтер на основу већ постојећег Винеровог филтера. Прва примена овог филтера је у пројекту АПОЛО 1960. године. Поред навигације нашао је примену код проблема оцењивања и проблема управљања система. Филтер је стохастички оцењивач.

Калманов филтер је значајан и погодан алат који комбинује информације о понашању објекта и мерења. Једначине које описују систем (системске једначине) и везу између система и непознатих параметара (мерне једначине) се комбинују у добро познати алгоритам за оптималну оцену вектора положаја [FIG Publication NO. 25,2001].

Линеарни динамички систем са шумом може се описати као:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}\mathbf{u}(k) + \mathbf{M}\mathbf{w}(k), \quad (4.52)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k). \quad (4.53)$$

Формуле (4.40) и (4.53) разликују се по томе што у (4.53) у функцијама везе за мерене величине не фигурише вектор улазних сигнала. Функције веза, које успостављају везу између мерених величина и непознатих параметара (променљивих стања – координата) које се примењују у геодезији не садрже улазне сигнале. Утицај температуре, притиска или влажности на геодетска мерења се елиминише уношењем поправака. Ове величине нису исте са улазним сигнаlima који делују на систем, јер се визура простире од станице до конструкције, па сами улазни сигнали који делују на конструкцију не утичу много на мерења.

$\mathbf{w}$  је вектор белог шума са  $M(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$  и са коваријационом матрицом  $\mathbf{Q} = E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\}$ , односно  $\mathbf{w} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ , и описује грешку (несигурност) модела и утицај поремећаја.  $\mathbf{v}$  је, такође вектор белог шума  $\mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{R})$ , и представља грешку мерења (грешка сензора). Претпоставка је да су  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{v}$  међусобно некорелисане, односно  $E\{\mathbf{w}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{0}$ .

Почетно стање процеса  $\mathbf{x}_0$  је непознато као и бели шумови. Међутим, ми имамо нека знања о њему у облику очекиване вредности  $\bar{\mathbf{x}}_0$  и коваријације  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{x}_0 \sim (\bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0)$ . Претпоставља се да је  $\mathbf{x}_0$  независно од  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{v}$ . Калманов филтер је

оцењивач простора стања  $\mathbf{x}(k)$  који узима у обзир познато претходно стање система (4.52) и излазна мерења.

Оцена очекиване вредности и коваријације

Очекивана вредност простора стања  $\mathbf{x}$  израчунава се као:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{E}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{F}\mathbf{u}(k) + \mathbf{M}\bar{\mathbf{w}}(k), \text{ односно} \quad (4.54)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{E}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{F}\mathbf{u}(k), \quad (4.55)$$

где је за почетно стање  $\bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0$ . Израз (4.55) показује да оцена стања система зависи од детерминистичких улазних сигнала. Коваријација стања за одређени тренутак рачуна се по следећој формули:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{x}(k+1)} &= \mathbf{E}\{[\mathbf{x}(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1)][\mathbf{x}(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1)]^T\} = \\ &= \mathbf{E}\{[\mathbf{E}(\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{M}\mathbf{w}(k)][\mathbf{E}(\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{M}\mathbf{w}(k)]^T\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{(\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k))(\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k))^T\right\}\right\} \mathbf{E}^T \mathbf{M} \mathbf{E}\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)\} \mathbf{M}^T = \\ &= \mathbf{E}\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k)} \mathbf{E}^T + \mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{M}^T. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Очекивана вредност излаза је:

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{D}\bar{\mathbf{x}}(k). \quad (4.57)$$

Међусобна коваријација између стања  $\mathbf{x}(k)$  и излаза  $\mathbf{y}(k)$  је:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{x}(k),\mathbf{y}(k)} &= \mathbf{E}\{[\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)][\mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)]^T\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{[\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)][\mathbf{D}(\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{v}(k)]^T\right\} = \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{x}(k)} \mathbf{D}^T. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Коваријација излазних (мерених) сигнала је

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{y}(k)} &= \mathbf{E}\{[\mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)][\mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)]^T\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{[\mathbf{D}(\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{v}(k)][\mathbf{D}(\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{v}(k)]^T\right\} = \\ &= \mathbf{D}\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k)} \mathbf{D}^T + \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Оптимална линеарна оцена  $\mathbf{x}(k)$  за дато  $\mathbf{y}(k)$

Нека је

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{L}\mathbf{y}(k) + \mathbf{g}, \quad (4.60)$$

за неку матрицу  $\mathbf{L}$  и вектор  $\mathbf{g}$ . Дефинишимо  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  као оцену од  $\mathbf{x}(k)$  на

основу доступних информација до и у тренутку  $k - 1$ . Да би се нашло најбоље решење за избор матрице  $\mathbf{L}$  и вектора  $\mathbf{g}$  потребно је минимизирати дисперзију одступања:

$$\begin{aligned} J &= E\{\bar{\mathbf{x}}^T(k)\bar{\mathbf{x}}(k)\} = E\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]^T[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]\} = \\ &= tr E\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]^T\} = tr E\{[\mathbf{x}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) - \mathbf{g}][\mathbf{x}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) - \mathbf{g}]^T\} = \\ &= tr E\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - (\mathbf{L}\mathbf{y}(k) + \mathbf{g} - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1))][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - (\mathbf{L}\mathbf{y}(k) + \mathbf{g} - \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}(k|k-1))]^T\}. \end{aligned}$$

Применом следећих релација:

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{D}\bar{\mathbf{x}}(k),$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}(k),\mathbf{x}(k)} = E\{[\mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)][\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)]^T\} \text{ и}$$

$\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k-1)} = E\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]^T\}$  и алгебарских операција добија се израз за квадратну форму

$$\begin{aligned} J &= tr \left\{ \mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k-1)} + \mathbf{L}(\mathbf{P}_{\mathbf{y}(k)} + \bar{\mathbf{y}}(k)\bar{\mathbf{y}}^T(k))\mathbf{L}^T + (\mathbf{g} - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1))(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1))^T + \right. \\ &\quad \left. 2\mathbf{L}\bar{\mathbf{y}}(k)(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1))^T - 2\mathbf{L}\mathbf{P}_{\mathbf{y}(k),\mathbf{x}(k)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Применом матричних израза за парцијални извод матричних производа (који важе за сваку  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$  матрицу)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \{tr[\mathbf{F}\mathbf{H}\mathbf{F}^T]\} = 2\mathbf{H}\mathbf{F} \text{ и}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \{tr[\mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{H}]\} = \mathbf{D}^T\mathbf{H}^T,$$

добија се за минимум функције

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{g}} = 2(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)) + 2\mathbf{L}\bar{\mathbf{y}}(k) = 0, \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{L}} = 2\mathbf{L}(\mathbf{P}_{\mathbf{y}(k)} + \bar{\mathbf{y}}(k)\bar{\mathbf{y}}^T(k)) - 2\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k),\mathbf{y}(k)} + 2(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1))\bar{\mathbf{y}}(k)^T = 0. \quad (4.63)$$

Решење система матричних једначина (4.62) и (4.63) је

$$\mathbf{g} = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{L}\bar{\mathbf{y}}(k) \text{ и} \quad (4.64)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}(k),\mathbf{y}(k)}\mathbf{P}_{\mathbf{y}(k)}^{-1}, \quad (4.65)$$

јер је  $\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k),\mathbf{y}(k)} = \mathbf{P}_{\mathbf{y}(k),\mathbf{x}(k)}^T$ .

Заменом израза (4.64) и (4.65) у (4.60) добија се

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k-1)}\mathbf{D}^T[\mathbf{D}\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k-1)}\mathbf{D}^T + \mathbf{R}]^{-1}[\mathbf{y}(k) - \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]. \quad (4.66)$$

Апостериори коваријација

Да би се оценила тачност оцене  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  неопходно је израчунати апостериори коваријациону матрицу:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k)} &= E\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)]^T\} = \\ &E\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{P}_{\mathbf{x}(k),\mathbf{y}(k)}\mathbf{P}_{\mathbf{y}(k)}^{-1}(\mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k))][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{P}_{\mathbf{x}(k),\mathbf{y}(k)}\mathbf{P}_{\mathbf{y}(k)}^{-1}(\mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k))]^T\} = \\ &\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k-1)} - \mathbf{P}_{\mathbf{x}(k),\mathbf{y}(k)}\mathbf{P}_{\mathbf{y}(k)}^{-1}\mathbf{P}_{\mathbf{y}(k),\mathbf{x}(k)} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k-1)} - \mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k-1)}\mathbf{D}^T[\mathbf{D}\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k-1)}\mathbf{D}^T + \mathbf{R}]^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k-1)}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Алгоритам дискретног Калмановог филтера

*Иницијализација:* Усвајамо  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_{\mathbf{x}0}$ ,  $k = 1$ ;

Корак 1 (Временско ажурирање): Познато  $\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1)$  и  $\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k-1|k-1)}$  и ажурира се временски ефекат динамичког система

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{E}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{F}\mathbf{u}(k-1)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k-1)} = \mathbf{E}\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k-1|k-1)}\mathbf{E}^T + \mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{M}^T.$$

Корак 2 После извршеног новог мерења  $\mathbf{y}(k)$  ажурира се мерење (ефекат мерења)

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k-1)}\mathbf{D}^T[\mathbf{D}\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k-1)}\mathbf{D}^T + \mathbf{R}]^{-1},$$

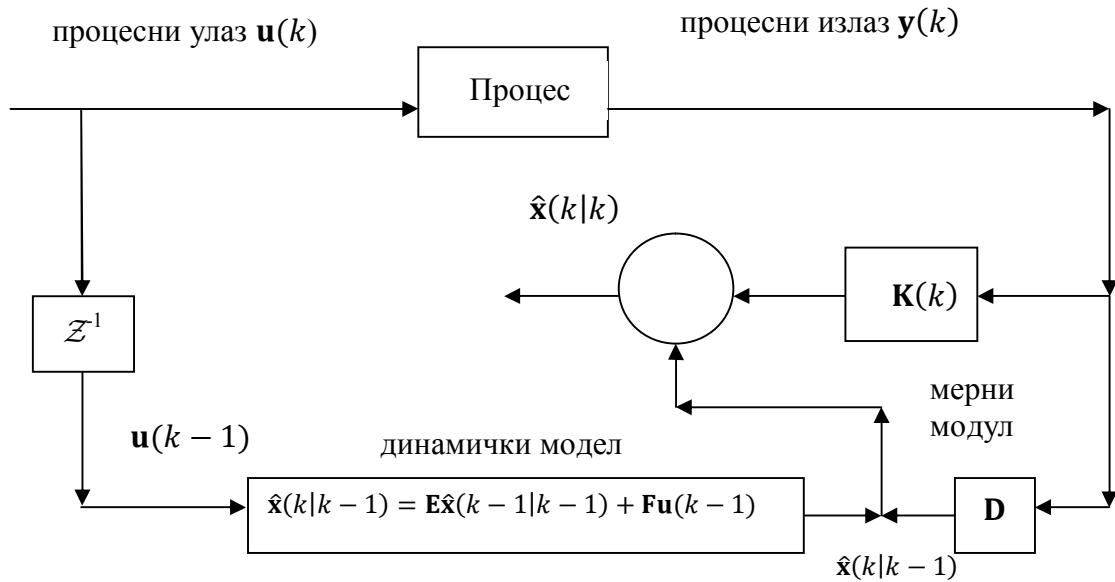
$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k)} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{D})\mathbf{P}_{\mathbf{x}(k|k-1)},$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]$$

и добија се оптимална оцена.  $\mathbf{K}(k)$  се назива Калманово појачање.

Усваја се  $k = k + 1$  и враћамо се на *корак 1*.

Иначе, Калманов филтер може се применити и када је систем нелинеаран, и тада се врши линеаризација модела развијањем у Тејлоров ред. На слици 4.3 приказана је структура Калмановог филтера.



Слика 4.3: Структура Калмановог филтера [Весеграл, 2005.]

#### 4.2.5 Метода потпростора

Модел простора стања се приказује и у следећем облику, слично као у формулама (4.52) и (4.53):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k), \quad (4.68)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k). \quad (4.69)$$

где су:  $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{D}$  матрице одговарајућих димензија. Разлика у формули (4.68) у односу на (4.52) је што се претпоставља да је вектор белог шума  $\mathbf{w}$  некорелисан, па стога матрица  $\mathbf{M}$  је јединична.

Основне претпоставке за идентификациону технику методом потпростора су:

1. познат је вектор временске серије улазног сигнала  $\mathbf{u}(k), k = 1, \dots, N$ ,
2. познат је вектор временске серије излазног сигнала  $\mathbf{y}(k), k = 1, \dots, N$ ,
3. познат (оцењен) је вектор стања динамичког система  $\hat{\mathbf{x}}(k), k = 1, \dots, N$ .

Ако су испуњене ове претпоставке онда се може формирати линеарна регресија модела простора стања:

$$\mathbf{Y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}(k) = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\mu}(k) + \mathbf{S}(k). \quad (4.70)$$

У једначини (4.70) непознати су коефицијенти блок матрице  $\boldsymbol{\theta}$ . Њихова оцена се добија применом методе најмањих квадрата.

За оцену коефицијената матрица динамичког система у овом раду су приказане и примењене рачунарске методе симулације система, Ојлерова метода и Тустинова апроксимација. Ове две методе су познате у нумеричкој анализи као методе за решавање система диференцијалних, односно диференцијалних једначина првог реда. Приликом идентификација система решава се обрнут проблем од симулације система; позната су решења диференцијалних једначина, али је непознат систем диференцијалних једначина.

#### 4.2.5.1 Ојлерова метода

Ојлерова метода је нумеричка метода првог реда намењена решавању ординарних диференцијалних једначина (једначина првог реда) са задатим почетним условима. Интеграција модела динамичког система применом Ојлорове методе објасниће се једноставним примером апериодичним системом првог реда. Такође, слегање конструкције се може описати системом првог реда. Функција преноса апериодичног система је:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{a}{s+a} \quad (4.71)$$

где је:

$X(s)$  – Лапласова трансформација излазног сигнала ,

$U(s)$  – Лапласова трансформација улазног сигнала.

Диференцијална једначина система је

$$\dot{x}(t) + ax(t) = au(t), \quad (4.72)$$

а одговарајућа интегрална једначина је

$$x(t) = \int_{-\infty}^t [-ax(\tau) + au(\tau)] d\tau. \quad (4.73)$$

Вредност одзива система у тренутку одабирања  $t = kT$  на побуду  $u(t)$  и за почетни услов  $x(0)$  може се изразити са

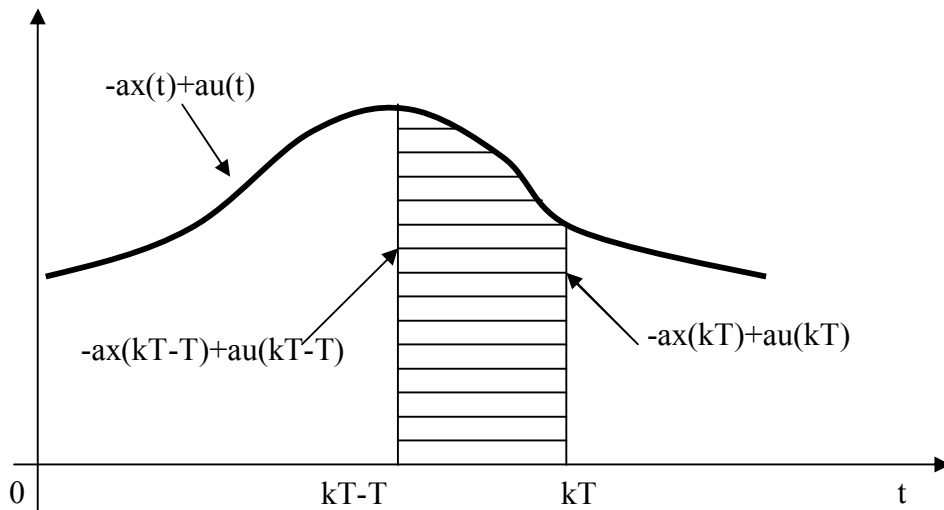


$$\begin{aligned}
 x(kT) &= \int_{-\infty}^{kT-T} [-ax(\tau) + au(\tau)]d\tau + \int_{kT-T}^{kT} [-ax(\tau) + au(\tau)]d\tau \\
 &= x(kT-T) + \int_{kT-T}^{kT} [-ax(\tau) + au(\tau)]d\tau
 \end{aligned}
 \tag{4.74}$$

Први члан на десној страни претходне једначине је вредност одзива у тренутку  $t = kT - T$ , а други члан представља површину, која је у интервалу  $kT - T \leq t < kT$ , са горње стране ограничена функцијом  $-ax(t) + au(t)$ , а са доње временском осом (Слика 4.4).

Постоје различити поступци за одређивање вредности шрафиране површине. Најједноставнија је Ојлерова метода у којој се та површина третира као паралелограм ширине  $T$  и висине једнаке вредности подинтегралне функције у тачки  $t = kT - T$ . Ако се усвоји да је висина  $-ax(kT - T) + au(kT - T)$ , вредност одзива  $x(t)$  у тренутку  $t = kT$  апроксимира се

$$\begin{aligned}
 x(kT) &= x(kT - T) + T[-ax(kT - T) + au(kT - T)] \\
 &= (1 - aT)x(kT - T) + T au(kT - T)
 \end{aligned}
 \tag{4.75}$$



Слика 4.4: Илустрација поступка нумеричке интеграције [Стојић, 1998]

Применом  $Z$ - трансформација на једначину (4.75) добија се функција дискретног преноса, што је дискретни еквивалент функцији преноса (4.71)

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{aTz^{-1}}{1-(1-aT)z^{-1}} = \frac{a}{\frac{z-1}{T}+a}. \quad (4.76)$$

Када се шрафирана површина посматра као паралелограм чија је висина једнака вредности подинтегралне функције у тренутку  $t = kT$ , тада се одзив система  $x(t)$  у тренутку  $t = kT$  апроксимира следећим изразом:

$$\begin{aligned} x(kT) &= x(kT - T) + T[-ax(kT) + au(kT)] \\ &= \frac{x(kT-T)}{1+aT} + \frac{aT}{1+aT}u(kT). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Функција дискретног преноса за диференцну једначину (4.77) је

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{aT}{1+aT-z^{-1}} = \frac{a}{\frac{z-1}{Tz}+a}. \quad (4.78)$$

#### 4.2.5.2 Тустинова апроксимација

Шрафирана површина на слици 4.4 може се посматрати и као паралелограм чија је висина једнака аритметичкој средини подинтегралне функције у тренуцима одабирања  $t = kT - T$  и  $t = kT$ . У овом случају апроксимирана вредност одзива система  $x(t)$  у тренутку  $t = kT$  је

$$\begin{aligned} x(kT) &= x(kT - T) + \frac{T}{2}[-ax(kT - T) + au(kT - T) - ax(kT) + au(kT)] \\ &= \frac{1-\frac{aT}{2}}{1+\frac{aT}{2}}x(kT - T) + \frac{\frac{aT}{2}}{1+\frac{aT}{2}}[au(kT - T) + au(kT)]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Функција дискретног преноса за диференцну једначину (4.79) је

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{aT(z+1)}{(2+aT)z+aT-2} = \frac{a}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)}+a}. \quad (4.80)$$

### 4.3 ПРИМЕНА МЕТОДЕ ПОТПРОСТОРА У ДЕФОРМАЦИОНОЈ АНАЛИЗИ

У овом потпоглављу детаљно је приказан математички поступак примене простора стања у деформационој анализи. Приказан је поступак од избора променљивих за једначину која се примењује за описивање понашања

конструкција (2.1) до преласка у систем диференцијалних једначина Ојлеровом методом и Тутсиновом апроксимацијом.

### 4.3.1 Избор променљивих стања система у деформационој анализи

Основна једначина на којој се описује понашање објекта је једначина механичког линеарног система (2.1):

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + F \frac{dx}{dt} + Kx = f(t) \quad (4.81)$$

где је:

$F$  - спољашња сила,

$M \frac{d^2x}{dt^2}$  - сила инерције,

$F \frac{dx}{dt}$  - сила вискозног пригушења (консолидација терена)

$Kx$  - сила еластичности (стишљивост)

$x$  - померај (излазни сигнал),

$\dot{x}$  - брзина,

$\ddot{x}$  - убрзање,

$C$  - коефицијент пригушења,

$K$  - крутост тла,

$M$  - маса.

Да би ову диференцијалну једначину  $II$  реда превели у систем једначина првог реда (нормална или Кошијева форма система диференцијалних једначина првог реда) када на десној страни постоје изводи улазног сигнала по времену изабраћемо помоћну променљиву на следећи начин:

Применом Лапласове трансформације, односно теореме о диференцирању оригинала, сводимо диференцијалну једначину на алгебарски облик:

$$[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + F[sX(s) - x(0)] + KX(s) = (b_1s + b_0)f(s).$$

Пошто оцењене координате тачака из нулте епохе мониторинга узимамо као почетне, што подразумева да је  $x(0) = 0$ , а самим тим и брзина померања је  $x'(0) = 0$ , онда горња једначина добија облик:

$$(Ms^2 + Fs + K)X(s) = (b_1s + b_0)f(s). \quad (4.82)$$

Усвојићемо следеће координате стања:

$x = x_1$ ,  $x_2 = sx(t) - \beta f(t)$ , односно  $\dot{x}_1 = x_2 + \beta f(t)$ . После диференцирања задње једначине добија се  $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 + \beta sf$ . Заменом у (4.82) се добија

$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{M}x_1 - \frac{F}{M}(x_2 + \beta f) + \frac{b_1}{M}sf + \frac{b_0}{M}f - \beta sf. \quad (4.83)$$

Да би се елиминисао извод уз улазни сигнал потребно је да је  $\beta = \frac{b_1}{M}$ , и онда се једначина (4.83) своди на

$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{M}x_1 - \frac{F}{M}x_2 + \frac{Mb_0 - b_1F}{M^2}f. \quad (4.84)$$

У пракси се случај да на десној страни диференцијалне једначине фигурише извод улазног сигнала по времену сусреће приликом изградње објекта, јер се временом повећава оптерећење тла услед изградње. Такође, у периоду пуњења акумулације водом промена силе којом вода делује на брану је у функцији од времена.

Ако је улазни сигнал константан (инваријантан у времену), онда је једноставније превођење у нормалан облик једначине

$$(Ms^2 + Fs + K)X(s) = f, \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x}_1 \end{aligned}$$

па је

$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{M}x_1 - \frac{F}{M}x_2 + \frac{f}{M}. \quad (4.86)$$

Диференцијална једначина другог реда (4.85) изражена као систем диференцијалних једначина првог реда је

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{F}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f + \mathbf{G}w, \quad (4.87)$$

односно, у општем облику

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}f + \mathbf{G}w,$$

где је  $\mathbf{w}$  вектор поремећаја система.

Систем једначина (4.87) се, у случају када су димензије вектора  $\mathbf{x}$  мале, може решити применом Лапласове трансформације, а ако су веће применом нумеричких метода. Ако занемаримо поремећај система и применимо Лапласову трансформацију добијамо једначину

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{f}(s) \\ \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{f}(s) \end{aligned} \quad (4.88)$$

Матрица фундаменталних решења (карактеристична матрица) је

$$\Phi(s) = L\{\Phi(t)\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}. \quad (4.89)$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} s + \frac{F}{M} & 1 \\ \frac{s^2 + \frac{F}{M}s + \frac{K}{M}}{s^2 + \frac{F}{M}s + \frac{K}{M}} & \frac{s}{s^2 + \frac{F}{M}s + \frac{K}{M}} \\ -\frac{K}{M} & \frac{s}{s^2 + \frac{F}{M}s + \frac{K}{M}} \end{bmatrix}$$

Као што је наведено у потпоглављу (4.2.3) карактеристична матрица је неопходна да би се одредила једначина дискретног система.

Најчешћи случај у пракси је да је једначина (2.1), односно (4.82) диференцијална једначина II реда са константним коефицијентима; такође, улазни сигнали се не мењају у функцији од времена и њихова вредност је позната. На овај начин се могу описивати понашања конструкција током експлоатације објекта.

### 4.3.2 Примена Ојлерове методе у деформационој анализи

Ојлерову методу применићемо на диференцијалну једначину (4.81), и то за случај када се површина третира као паралелограм ширине  $T$  и висине једнаке вредности подинтегралне функције у тачки  $t = kT$ , а предикција се изводи за тренутак  $t = (k + 1)T$ . Пре примене ове методе једначина (4.81) се своди на систем диференцијалних једначина I реда помоћу избора променљивих простора стања. Систем једначина има следећи облик:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{C}{M}x_2(t) - \frac{K}{M}x_1(t) + \frac{F}{M} = -ax_2(t) - bx_1(t) + m(t) \end{aligned} \quad (4.90)$$

Применом Ојлерове методе добијају се одговарајуће диферендне једначине простора стања

$$\begin{aligned} x_1[(k+1)T] &= x_1(kT) + Tx_2(kT) \text{ и} \\ x_2[(k+1)T] &= (1-aT)x_2(kT) - bTx_1(kT) + Tm(kT) \end{aligned} \quad (4.91)$$

или у матричном облику

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ -bT & 1-aT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix} m(kT). \quad (4.92)$$

Формула (4.92) има форму линеарне регресије модела простора стања, који је приказан у формули (4.70) и има облик

$$\mathbf{Y}(k) = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\mu}(k) + \mathbf{S}(k).$$

У матрици  $\boldsymbol{\mu}$  непознати су коефицијенти који се односе на брзину деформација  $bT$  и  $1-aT$ ; коефицијенти који се односе на величину померања су познати, јер  $T$ , период одабирања, је познат. Ојлерова метода нам дефинише облик система диференцијалних једначина и од четири коефицијента матрице  $\boldsymbol{\mu}$  непозната су два. Узимајући у обзир да нам фигуришу непознати параметри само у другој врсти матрице  $\boldsymbol{\mu}$  онда матричну једначину можемо записати као:

$$x_2[(k+1)T] = [-bT \quad 1-aT] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + Tm(kT). \quad (4.93)$$

Матрична једначина (4.93) приказује случај SISO динамичког система. Када се моделира MIMO динамички систем тада матрица непознатих коефицијената  $\boldsymbol{\mu}$  састоји се од блокова матрица величине  $2 \times 1$ , чија је структура иста као у (4.93). Матрица коефицијената улазног сигнала  $\mathbf{F}$  је позната, и облика је  $[T]^T$ . Такође, матрица коефицијената мерених величина  $\mathbf{D}$  (матрица дизајна I реда) је увек позната у Геодезији и она успоставља везу између мерених величина и непознатих параметара. Вредности непознатих променљивих простора стања  $\mathbf{x}(k)$  добијају се оцењивањем по МНК за сваки тренутак одабирања  $k$ . Оцењивањем вектора  $\mathbf{x}(k)$  за сваки тренутак одабирања добија се временска серија координата. Брзина система се одређује применом формула за нумеричко диференцирање.

Нумеричко диференцирање се изводи применом предњих разлика:

$$\begin{aligned}\Delta(k) &= x_1[(k+1)T] - x_1(kT), \\ \Delta^2(k) &= \Delta(k+1) - \Delta(k).\end{aligned}$$

Израз за рачунање брзине помераја је:

$$x_2(kT) = \frac{1}{T} \left[ \Delta(k) - \frac{1}{2} \Delta^2(k) \right]. \quad (4.94)$$

### 4.3.3 Примена Тустинове апроксимације у деформационој анализи

Поступак избора променљивих простора стања је увек исти; непознате су координате по осаму у хоризонталној равни и брзине помераја по овим осаму и/или координата у вертикалној равни (висина) и брзина помераја по висини. Применом Тустинове апроксимације у једначини (4.90) добијају се одговарајуће диференчне једначине простора стања

$$\begin{aligned}x_2[(k+1)T] &= \frac{1}{2+aT+\frac{bT^2}{2}} \left[ \left( 2 - aT - \frac{bT^2}{2} \right) x_2(kT) - 2bTx_1(kT) + Tm(kT+1) + Tm(kT) \right] \\ x_1[(k+1)T] &= x_1(kT) + \frac{T}{2} [x_2(kT+1) + x_2(kT)].\end{aligned} \quad (4.95)$$

Пошто су сви коефицијенти динамичког система у изразу за  $x_1[(k+1)T]$  познати неопходно је само оценити коефицијенте који су у изразу за  $x_2[(k+1)T]$ . Матрични облик једначине за  $x_2[(k+1)T]$  је

$$x_2[(k+1)T] = \frac{1}{2+aT+\frac{bT^2}{2}} \begin{bmatrix} 2 - aT - \frac{bT^2}{2} & 2bT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(kT) \\ x_1(kT) \end{bmatrix} + \frac{T}{2+aT+\frac{bT^2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m(kT+1) \\ m(kT) \end{bmatrix}. \quad (4.96)$$

Матрична једначина (4.96) приказује случај SISO динамичког система. Када се моделира MIMO динамички систем тада матрица непознатих коефицијената  $\mathbf{A}$  састоји се од блокова матрица величине  $2 \times 1$ , чија је структура иста као у (4.96). Матрица коефицијената улазног сигнала  $\mathbf{F}$  је непозната, и облика је  $\frac{T}{2+aT+\frac{bT^2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

#### 4.4 ОПИС ДИНАМИЧКИХ СВОЈСТАВА ОБЈЕКТА

У овом потпоглављу су описани модели динамичког система који не припадају класичном моделирању помоћу црне кутије “black-box” већ “gray-box”. Структура функције преноса или структура решења, као и ред, диференцијалне једначине су познати, а непознати су коефицијенти функције преноса или решења диференцијалне једначине. Овакав поступак идентификације система је, по мишљењу аутора рада, изузетно погодан за одређивање физичких карактеристика тла или конструкције (што је у шестом поглављу показано). Приликом испитивања тла узимају се узрози на искуствено одређеним местима. Познато је да је тло нехомогене структуре, па се поставља питање колико су подаци о тлу поуздани. Применом геодетског мониторинга, који је јефтинији од узимања узорака из бушотина и покрива већу површину (цео објекат), могу се проверити усвојене претпоставке о тлу, односно могу се оценити физичке карактеристике. У првом делу овог потпоглавља описани су облици функција преноса које су познате из искуства и најчешће се примењују; у другом делу поступак одређивања коефицијената решења диференцијалне једначине и одређивање модела на основу решења, а на крају о избору периода одабирања, односно временског периода између епоха мерења.

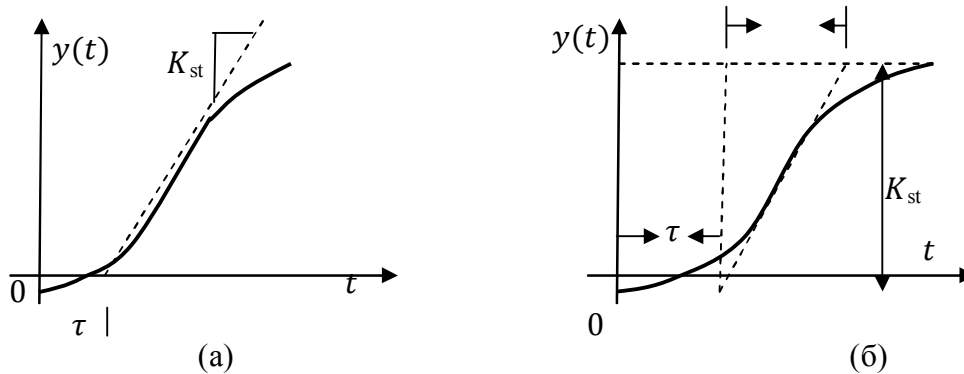
##### 4.4.1 Најчешће примењиване функције преноса

У поглављу 3.2 већ је било речи о систему првог реда: приказани су графици излазног сигнала, када је улазни сигнал одскочан; дата су најчешће функције преноса за овај улазни сигнал. На овом месту биће речи о поступку одређивања параметара система првог реда.

Одскочни одзив ових процеса има апериодичан карактер; облика пригушене инверзне експоненцијалне функције са константним чланом и указује на ограничену функцију која има једну временску константу. Када одговор система одговара напред наведеном, онда се несумњиво ради о систему првог реда.



Типични графици одскочног одзива приказани су на слици 4.5 (исти су као на слици 3.5).



Слика 4.5: Одскочни одзив типичних процеса [Стојић,1998]

Када је одзив система као на слици 4.5 (а) динамичке карактеристике система се могу успешно описати следећом функцијом преноса

$$G_{ob}(s) = K_{st} \frac{e^{-\tau s}}{s}. \quad (4.97)$$

Пошто се у изразу (4.97) налази у бројиоцу члан  $e^{-\tau s}$  постоји чисто временско (транспортно) кашњење система -  $\tau$ , односно одговор система у тренутку  $t$  биће, уствари одговор на улазни сигнал из тренутка  $t - \tau$ . Овде се посматра одскочни улазни сигнал, чија вредност је константна за свако  $t \geq 0$ , чисто временско кашњење значи да ће се реакција (одговор) система десити тек од тренутка  $\tau$ . У функцији (4.98)  $K_{st}$  представља нагиб најстрмије тангенте одскочног одзива-статичко појачање.

Применом Лапласове трансформације (3.14) и формуле за остатак (3.15) добија се за одговор система функција  $y(t) = K_{st}h(t - \tau)$ ,  $h(t - \tau)$  је одскочна функција, а диференцијална једначина је облика

$$\dot{y} = K_{st}h(t - \tau). \quad (4.98)$$

Овакав облик функције се може применити код система код којих карактеристике система не утичу на процес (проток, брзина обраћаја). Пошто понашање грађевинске конструкције или тла зависи од карактеристика система облик функције преноса (4.97) није применљив у деформационој анализи.

Ако је одзив система као на слици 4.5 (б) онда је функција преноса следећег облика:

$$G_{ob}(s) = \frac{K_{st}}{T_{ob}s+1} e^{-\tau s}. \quad (4.99)$$

Статичко појачање у овом случају добија се на следећи начин

$$K_{st} = \frac{y_{st} - y_{nov}}{A}, \quad (4.100)$$

где је  $y_{st}$  стара стационарна вредност излазног сигнала у тренутку побуде, а  $y_{nov}$  нова стационарна вредност излазног сигнала која се успоставља довољно дуго времена после побуде одскочним сигналом величине  $A$ . Временска константа објекта  $T_{ob}$  је обрнуто пропорционална нагибу најстрмије тангенте одскочног одзива објекта.

Одговор система је функција  $y(t) = \frac{K_{st} e^{-\frac{t}{T_{ob}}}}{T_{ob}} h(t - \tau)$ , а диференцијална једначина је облика

$$T_{ob}\dot{y} + y = K_{st}h(t - \tau). \quad (4.101)$$

Као што је познато геодетска мерења нису високофреквентна мерења, него се њима мере дугопериодичне промене. Такође, мерења се не обављају перманентно, нпр. у тренутку наношења оптерећења, а и само оптерећење се наноси постепено у току градње објекта. Из горе наведених разлога геодетским методама није могуће одредити чисто временско кашњење, па у функцијама преноса (4.97) и (4.100) не постоји члан  $e^{-\tau s}$ . Поставља се и питање да ли има сврхе одређивати га када се ради о грађевинским конструкције.

Најједноставнији начин одређивања статичког појачања је мерење вредности излазног сигнала након завршетка прелазног (нестабилног) режима процеса и његово дељење са вредности улазног одскочног сигнала. Временска константа објекта може се одредити на један од следећих начина:

- екстраполацијом иницијалног нагиба криве одговора система – пресек временске осе и тангенте почетног нагиба је временска константа;
- одређивањем времена када је прошло 63% прелазног режима система – то време је временска константа објекта.

*У пракси геомеханичари и статичари прорачунавају деформације тла и конструкције, одређују максималну вредност померања као временског дијаграма деформација. Овај временски дијаграм може да послужи за одређивање временске константе система (објекта), а на основу*

вредности константе одређују се и динамика опажања (о овоме ће бити речи на крају овог поглавља).

- применом нумеричких метода за решавање система нелинерних једначина.

Систему првог реда припада слегање тла и објеката и може се применити следећи облик функције преноса:

$$G_{ob}(s) = \frac{K_{st}}{T_{ob}s+1}. \quad (4.102)$$

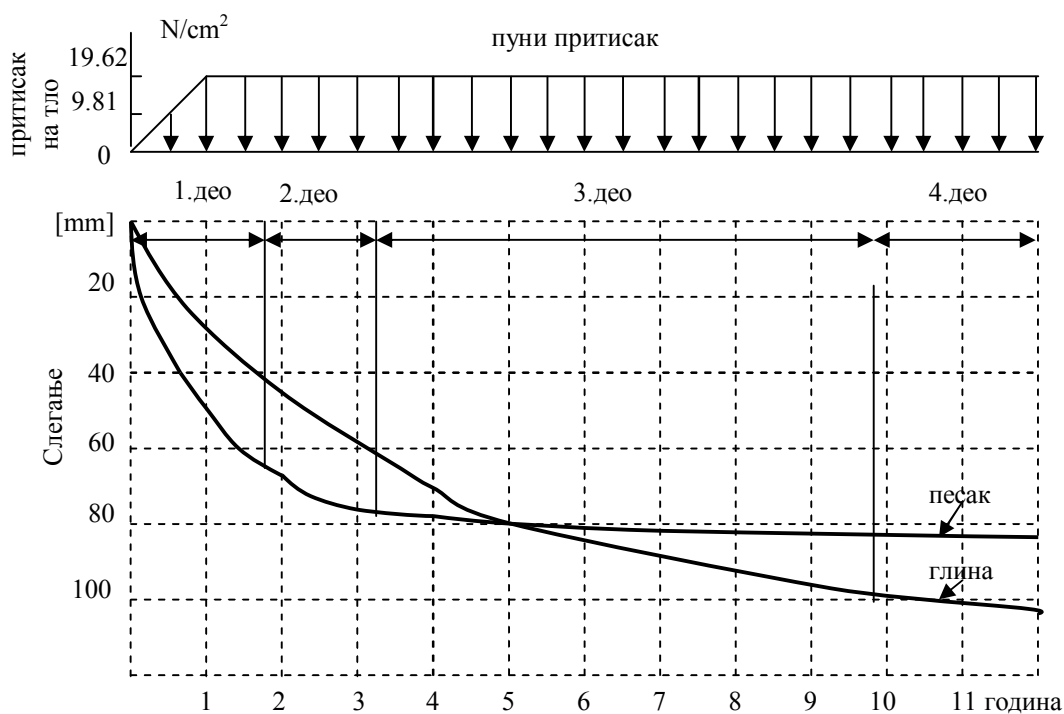
У формули (4.102) не постоји члан  $\tau$ - чисто временско кашњење система, јер је временско кашњење 0. Ова формула је иста као и формула за импулсни одговор (3.13), али пошто оптерећење које делује на тло је одскачна функција, онда је одговор система одскачни одзив. Параметри система, временска константа објекта и статичко појачање, могу да се одреде на основу разлика вектора слегања већ после три епохе. То значи да се успешно може предиктовати понашање објекта и тла. На основу предикције померања проверава се пројектовано понашање и на време се може реаговати ако је угрожена стабилност и функционалност објекта.

#### 4.4.2 Идентификација система на основу претпостављеног облика решења диференцијалне једначине

Динамички системи се описују диференцијалним/ диференцијалним једначинама. Конструкција и тло се посматрају као линеарни динамички системи са концентрисаним параметрима, параметри система су инваријантни у односу на време. За описивање система у овом случају примењују се диференцијалне једначине са константним параметрима.

Графички приказ вредности излазног сигнала, као што је већ речено, омогућава нам да одредимо ред система. На основу реда система и претпоставке да се систем описује диференцијалном једначином са константним параметрима могуће је претпоставити облик решења диференцијалне једначине. Пошто се усваја облик решења значи да је структура система позната, а непознате су вредности параметра; у овом случају се примењује поступак моделирања „сива кутија“. Поступак идентификације биће објашњен на примеру слегања објекта.

График слегања објекта има облик инверзне експоненцијалне функције (слика 4.6). Слегање објеката који су изграђени на песковитом земљишту карактерише се у почетном периоду грађења већом брзином, а по достизању пуног притиска од тежине објекта брзина слегања после извесног времена слаби. Када се објекат гради на глиновитом земљишту слегање има мању брзину у почетку грађења, али и каснијим дуготрајним слабијим слегањем. На основу графика се може закључити да је временска константа за песак око једне године, а за глину око три године при оптерећењу од  $19.62 \frac{N}{cm^2}$  (63% од укупне величине слегања).



Слика 4.6: Слегање објекта у току времена [Цветковић, 1970]

Диференцијална једначина првог реда са константним коефицијентима у општем случају има следећи облик:

$$\dot{y} + P(u)y = Q(u), \quad (4.103)$$

где су  $P(u)$  и  $Q(u)$  полиноми који зависе само од улазног сигнала. Решење диференцијалне једначине (4.103) је следећег облика

$$y = e^{-\int P(u)dt} [\int Q(x)e^{-\int P(u)dt} dt + C] = y_1 + Ce^{-\int P(u)dt}, \quad (4.104)$$

где је  $y_1$  партикуларно решење

$$y_1 = e^{-\int P(u)dt} \int Q(x)e^{-\int P(u)dt} dt = \int Q(x)dt. \quad (4.105)$$

Када се ради о слегању објекта карактеристике тла и објекта су константне, а оптерећење се наноси у релативно кратком времену па се може усвојити да је константно. Функција решења једначине (4.103) је

$$y(t) = y_1 + Ce^{-Pt}. \quad (4.106)$$

У аутоматском управљању се овакав поступак решавања примењује за одређивање параметара система када су познати тестирајући улазни сигнали. Међутим, при геодетском мониторингу најчешће су непознати улазни сигнали, а познати су вектори померања. Пошто се брзина померања не мери, онда се она одређује нумеричким диференцирањем; или се једначина (4.103) нумеричком интеграцијом преводи у интегралну. Прелазак из диференцијалне у интегралну једначину се изводи због стабилности система, јер је решење интегралне једначине стабилније.

Потребно је одредити три непозната параметра ( $y_1$ ,  $C$  и  $P$ ) на основу нелинеарног система једначина (4.106). За оцењивање параметара се мора применити нека од метода за решавање нелинеарног система. Уобичајено је да се у пракси примењује Гаус-Њутнова метода; нелинеарни систем једначина се линеаризује развијањем у Тејлоровог реда првог степена у околини решења, а поступак оцењивања се заснива на МНК. Због нелинерности система неопходно је веома тачно одредити приближна решења система да би решење конвергирало глобалном минимуму.

#### 4.4.3 Избор периода одабирања

У овом потпоглављу је дат предлог за дефинисање временског размака мониторинга објекта у прелазном стању, односно периоду стабилизације. Овај предлог је изнесен на основу могућности апроксимације понашања објекта системом I реда и избора периода одабирања из теорије система. Избор периода одабирања је условљен динамиком објекта, односно структуром објекта. Период одабирања мора задовољити услов из *Теореме одабирања*, а тај услов је да период одабирања мора бити мањи 3 до 4 пута од временске константе објекта

$$T = \frac{T_{ob}}{(3 \sim 4)}. \quad (4.107)$$

Пројектом се предвиђа величина слегања објекта и време консолидације. Тренутак када у прелазном стању слегање објекта достигне 63% вредности предвиђеног укупног слегања објекта је временска константа система. Геодетским мониторингом објекта се могу одредити параметри система и на основу њих се може кориговати временски план опажања.

5.

## НЕЛИНЕАРНИ ДИНАМИЧКИ МОДЕЛИ У ВРЕМЕНСКОМ ДОМЕНУ

Некада се може појавити проблем да се не може процес апроксимирати линеарним динамичким моделом. Добија се неприхватљива разлика, са аспекта тачности, између моделираног и стварног одговора система. У оваквим случајевима се морају применити нелинеарни поступци моделирања. Један од њих је Волтера модел који комбинује  $n$ - тоструку конволуцију и функцију преноса  $n$ -тог степена; други поступак је вештачке неуронске мреже које функционишу на поједностављеном принципу биолошких неуронских мрежа.

### 5.1 ВОЛТЕРА СЕРИЈА

Шпански математичар Вито Волтера (*Vito Volterra*) први је увео нови концепт у теорију функција који се од тада назива Волтера серија. Међутим, прву значајнију примену серије у анализи нелинеарних кола учинио је математичар Норберт Винер (*Norbert Wiener*) са Института за технологију у Масачусетсу (*Massachusetts Institute of Technology*). Он је применио Волтера серију за анализу великог броја проблема, а најзначајнија је примена у анализи спектра фреквентно модулисаних таласа са Гаусовим улазним поремећајима. Након Винерове примене почиње се користити ова серија за анализу једноставнијих система због компликоване рачунице. За моделирање деформационих процеса у геодезији Волтера серију први је применио Пфеуфер 1990. [Heine, 1999].

### 5.1.1 Математички приказ серије

У овом потпоглављу дат је математички приказ серије за случај континуираног система у циљу бољег разумевања проблематике, јер се на основу овог приказа јасно може закључити структура серије, као и поступак описивања нелинеарности.

Линеарни каузални систем са меморијом може се описати помоћу конволуције, као што је приказано формулом (2.3)

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)u(t - \tau)d\tau, \quad (5.1)$$

где је:  $y(t)$  - излазни сигнал у тренутку  $t$ ,  $u(t - \tau)$  – улазни сигнал у тренутку  $t - \tau$  и  $g(\tau)$ - импулсни одговор. Нелинеарни систем без меморије може се приказати Тејлоровим редом

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [u(t)]^n, \quad (5.2)$$

$a_n$  су коефицијенти Тејлоровог реда. Волтерова серија комбинује ова два начина представљања да би се описао нелинеарни систем са меморијом

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n g_n(t_1, \dots, t_n) \prod_{r=1}^n u(t - t_r) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 g_1(t_1)u(t - t_1) + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 g_2(t_1, t_2)u(t - t_1)u(t - t_2) +$$

$$\frac{1}{3!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_3 g_3(t_1, t_2, t_3)u(t - t_1)u(t - t_2)u(t - t_3), \quad (5.3)$$

где је  $g_n(t_1, \dots, t_n)$  Волтера параметар. За  $n = 1$   $g_1(t_1)$  представља импулсни одговор  $g(\tau)$ , а за  $n > 1$   $g_n$  је „импулсни одговор вишег степена“. Први интеграл уз  $\frac{1}{1!}$  је конволуциони интеграл, а уз  $\frac{1}{2!}$  и  $\frac{1}{3!}$  су двоструки и троструки конволуциони интеграл. Уобичајена претпоставка, због мањег рачунања коефицијента, је да су коефицијенти  $g_n$  симетрични, што значи да  $g_n(t_1, \dots, t_n)$  има исту вредност без обзира на пермутацију  $t_i$ .

Као што постоји аналогија са  $n$ - тоструком конволуцијом тако постоји и аналогија са  $n$ - тоструком Лапласовом трансформацијом

$$(f_1, \dots, f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n g_n(t_1, \dots, t_n) e^{-s_1 t_1} \dots e^{-s_n t_n} \quad (5.4)$$

или Фуријевом трансформацијом

$$G_n(f_1, \dots, f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n g_n(t_1, \dots, t_n) e^{-i\omega_1 t_1} \dots e^{-i\omega_n t_n}, \quad (5.5)$$

где је као у (3.29) и (3.30)  $\omega_j = 2\pi f_j$ ,  $f_j = \frac{j}{N}$ ,  $1 \leq j \leq [N/2]$ , а  $s_j = i\omega_j$ . Јасно је



да је  $G_1(f_1)$  линеарна функција преноса, а  $G_n(f_1, \dots, f_n)$  је функција преноса  $n$ - тог степена.

### 5.1.2 Нелинеарни Волтера модел у дискретном облику

Зависност излазног сигнала у тренутку  $kT$  од улазног сигнала код SISO система са меморијом једнаком  $m$  и поремећајем  $e$  се приказује на следећи начин

$$y(kT) = f(u(kT), u([k-1]T), \dots, u([k-m]T), e(kT)). \quad (5.6)$$

Излазни сигнал без поремећаја (поремећај се посматра као адитивни члан и нема меморију) је

$$y^0(kT) = y(kT) - v(kT) = f(u(kT), u([k-1]T), \dots, u([k-m]T)), \quad (5.7)$$

и може се развити у Тејлоров ред под претпоставком да је  $u(kT) = u([k-1]T) = \dots = u([k-m]T) = u_0$

$$\begin{aligned} y^0(kT) = & f(u_0) + \frac{1}{1!} \left\{ u(kT) \frac{\partial f(u_0)}{\partial u(kT)} + \dots + u([k-m]T) \frac{\partial f(u_0)}{\partial u([k-m]T)} \right\} \\ & + \frac{1}{2!} \left\{ u^2(kT) \frac{\partial^2 f(u_0)}{\partial u^2(kT)} + u(kT)u([k-1]T) \frac{\partial^2 f(u_0)}{\partial u(kT)\partial u([k-1]T)} + \dots \right. \\ & \left. + u^2([k-m]T) \frac{\partial^2 f(u_0)}{\partial u^2([k-m]T)} \right\} \\ & + \text{чланови вишег реда} \end{aligned} \quad (5.8)$$

или ако се парцијални изводи помноже са одговарајућом реципрочном вредношћу факторијела

$$\begin{aligned} y^0(kT) = & f(u_0) + a_0 u(kT) + a_1 u([k-1]T) + \dots + a_m u([k-m]T) \\ & + a_{00} u^2(kT) + a_{01} u(kT)u([k-1]T) + \dots + a_{mm} u^2([k-m]T) \\ & + \text{чланови вишег реда.} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Након развоја нелинеарне функције у Тејлоров ред у околини тачке  $u_0$  потребно је израз (5.8) или (5.9) заменити у (5.1), односно у импулсни одговор. Када се изврши ова замена добија се, као што је наведено у уводу поглавља 4, једначина која је практично неприменљива због: неопходности непрекидне регистрације података, неограничене интеграције вишеструких интеграла и бесконачно много кофицијената. Да би се превазишао овај проблем прелази се уместо вишеструких

интеграла и бесконачно параметара на вишеструку суму и ограничен број параметара и добија се следећи израз

$$y^0(kT) = \bar{g}_0 + \sum_{r=1}^M \left\{ \sum_{l_1=0}^{m_1} \dots \sum_{l_s=0}^{m_s} \bar{g}_s(l_1 \dots l_s) u([k-l_1]T) \dots u([k-l_s]T) \right\}, \quad (5.10)$$

где је:  $M$ - степен Тејлоровог реда,  $\bar{g}_0 = f(u_0)$ ,  $a_l = \bar{g}_1(l_1)$ ,  $a_{l_1 l_2} = \bar{g}_2(l_1 l_2)$  итд. Коефицијенти  $\bar{g}_s(l_1 \dots l_s)$  се називају Волтера коефицијенти.

### 5.1.2.1 Структура модела

Из једначине (5.10) могу се добити следећи модели

$$\begin{aligned} y^0(kT) &= \bar{g}_0 + \sum_{l_1=0}^{m_1} \bar{g}_1(l_1) u(kT - l_1) && \text{линеарни део модела} \\ &+ \sum_{l_1=0}^{m_1} \sum_{l_2=0}^{m_2} \bar{g}_2(l_1, l_2) u([k-l_1]T) u([k-l_2]T) && \text{квадратни део} \\ &+ \sum_{l_1=0}^{m_1} \sum_{l_2=0}^{m_2} \sum_{l_3=0}^{m_3} \bar{g}_3(l_1, l_2, l_3) u([k-l_1]T) u([k-l_2]T) u([k-l_3]T) && \text{кубни део модела} \\ &+ \text{чланови вишег реда} && \end{aligned} \quad (5.11)$$

Општи модел се добија комбинацијом делова (степен) модела. У зависности од степена нелинеарности процеса и захтева тачности примењује се различити степени модела. Степен нелинеарности модела је теоријски неограничен. Повећањем степена модела нагло се повећава број коефицијената који се морају израчунати; што доводи до нумеричких проблема. За SISO системе број Волтера коефицијената ( $N_{VK}$ ) може бити преко

$$N_{VK} = 1 + \sum_{r=1}^M \frac{(m+r)!}{r!m!}. \quad (5.12)$$

Овај број коефицијената је израчунала Хајнен 1993. [Heine, 1999] уз услов да су мешовити производи исти

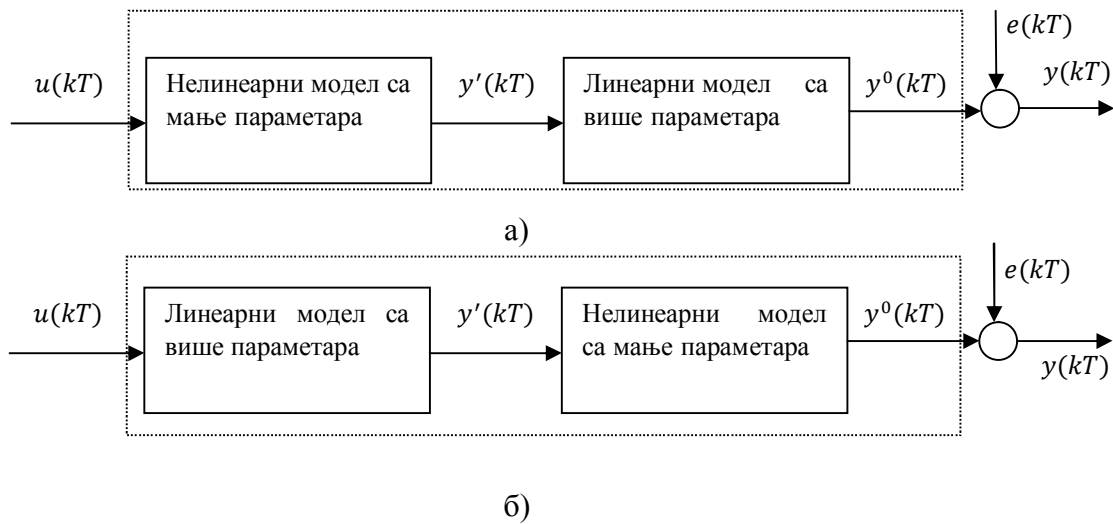
$$\begin{aligned} \bar{g}_2(l_1, l_2) u([k-l_1]T) u([k-l_2]T) &= \bar{g}_2(l_2, l_3) u([k-l_2]T) u([k-l_1]T) \\ \bar{g}_3(l_1, l_2, l_3) u([k-l_1]T) u([k-l_2]T) u([k-l_3]T) &= \bar{g}_3(l_2, l_3, l_1) u([k-l_2]T) u([k-l_3]T) u([k-l_1]T) \\ &= \bar{g}_3(l_1, l_3, l_2) u([k-l_1]T) u([k-l_3]T) u([k-l_2]T) = \bar{g}_3(l_2, l_1, l_3) u([k-l_2]T) u([k-l_1]T) u([k-l_3]T) \\ &= \bar{g}_3(l_3, l_2, l_1) u([k-l_3]T) u([k-l_2]T) u([k-l_1]T) = \bar{g}_3(l_3, l_1, l_2) u([k-l_3]T) u([k-l_1]T) u([k-l_2]T). \end{aligned} \quad (5.13)$$

На основу једначине (5.12) за SISO систем који се описује кубним моделом са меморијом 10 број коефицијената је 364.

Природно је да ће код MISO система број Волтера коефицијената у моделу бити много већи. Ако се у једначина (5.10) број улазних сигнала повећа са 1 на  $p$ , онда се добија следећа једначина

$$y^0(kT) = \bar{g}_0 + \sum_{r=1}^M \left\{ \sum_{j=1}^p \sum_{l_{1j}=0}^{m_j} \dots \sum_{j=1}^p \sum_{l_{rj}=0}^{m_j} \bar{g}_{rj}(l_{1j} \dots l_{rj}) u_j([k - l_{1j}]T) \dots u_j([k - l_{rj}]T) \right\}. \quad (5.14)$$

Овај комплексни модел могуће је поједноставити ако се подели на подсистеме где се комбинују линеарни и нелинеарни модели (слика 5.1). Код нелинеарних подмодела примењује се мањи степен нелинеарности да би био мањи број коефицијената, а код линеарног подмодела већи број коефицијената. Излаз из једног подмодела је уједно и улаз у други подмодел. Постоје две врсте поделе модела на подмоделе у зависности да ли је први подмодел линеаран (Винер структура) или нелинеаран (Хамерштајн структура).



Слика 5.1: Моделирање система помоћу подсистема:  
 а) Хемерштајн структура б) Винер структур [Heine, 1999]

За практичну идентификацију на основу деформационих модела растављање на подмоделе је тешко, јер је одређивање априорне структуре система тешко изводљиво.

У литератури се могу наћи бројне препоруке за смањење броја Волтера коефицијената. Овде ће бити приказан само предлог Пфеуфера из 1988. године [Heine, 1999]. Он је предложио да се ограничи број улазних сигнала који делују са

квадратом, односно да се не користе мешовити производи улазних сигнали. MISO систем у овом случају је следећег облика

$$y^0(kT) = \bar{g}_0 + \sum_{j=1}^p \sum_{l_j=0}^{m_1} \bar{g}_{1j}(l_j)u([k - l_1]T) + \sum_{j=1}^p \bar{g}_{2j}(l_{jmax}, l_{jmax})u_j^2([k - l_{jmax}]T). \quad (5.15)$$

Одређивање  $l_{jmax}$ , односно која је меморија система, је проблематично. Најчешћен се примењује међусобна корелациона функција. По предлогу Пфеуфера прво се примењује линеарни модел са већим бројем параметара, а затим излаз из линеарног модела је улаз у нелинеарни модел са квадратним члановима.

### 5.1.2.2 Оцена параметара модела

Уобичајена је претпоставка да су поремећаји симетричне случајне променљиве. Волтера серија у матричном облику је

$$\mathbf{y}^0 = \mathbf{A}\bar{\mathbf{g}}. \quad (5.16)$$

У (5.16) непознат је вектор коефицијената  $\bar{\mathbf{g}}$ . Да би се оценио вектор коефицијента могу се применити следеће методе (Табела 5.1).

Табела 5.1: Методе оцењивања Волтера параметара [Heien, 1999]

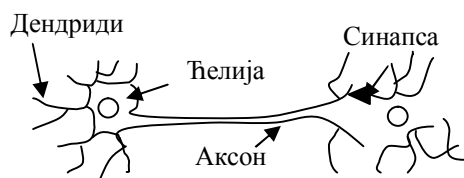
Метода	Претпоставке	Функција која се минимизира
Бауес-оцена	Позната функција ризика $C(y - \hat{y})$ и густина расподеле $f_{yg}(y, g)$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(y - \hat{y}) f_{yg}(y, g) dy dg$
Метода максималне веродостојности	Позната густина расподеле $f_{yg}(y, g)$	Функција максималне веродостојности
Марковљев модел	Позната коваријациона матрица поремећаја $\mathbf{C}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\}$	$\mathbf{v}^T \mathbf{C}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{v} = \min$
Оцена са минималном дисперзијом	нема	$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min$

Детаљнији приказ метода оцењивања није дат, јер у раду није примењивано моделирање помоћу Волтера серије. Овај поступак моделирања није примењен због великог броја коефицијената који се морају израчунати. Међутим, псеудолинеарна регресија и оцена помоћу грешке једначине, где се усваја степен диференцијалне једначине, могу се подвести под Волтера серију са ограниченим бројем параметара. Ове две горе наведене методе су примењене у овом раду.

## 5.2 ВЕШТАЧКЕ НЕУРОНСКЕ МРЕЖЕ

Идеју за развој вештачких неуронских мрежа научници су пронашли у функционисању људског нервног система. Они су схватили да се све људске функције, укључујући и меморију, налазе у неуронима и везама између њих. Самим рођењем човек стиче одређене функције, али и учи (нпр. говор) и може да их мења (нпр. ако не користи једну руку она ће атрофирати). Спознаја да неурон учи довела је до промене у начину размишљања при решавању широког спектра проблема, односно покушава се опонашати функционисање мозга. Моделирају се алгоритми који се састоје од већег броја компоненти, где се у свакој компоненти обављају елементарне операције; компоненте су повезане функцијама (тежинама).

Кратко ће се објаснити функционисање људског мозга да би се боље разумео концепт вештачких неурона. Већина неурона се налази у мозгу (око  $10^{11}$ ), а сваки неурон има око  $10^4$  веза. Неурон се састоји од: тела ћелије, дендрида и аксона. Дендрид је мрежа рецептора у облику корена дрвета која се састоји од влакана. Влакно прима надражај и шаље га у виду електричног сигнала у тело ћелије. У њему се сумирају сигнали из свих влакана; формира се излазни сигнала који се путем аксона, појединачно дуго влакно, шаље другим неуроним. Место контакта аксона једног неурона са дендридом другог неурона назива се синапса. У неуронима се одвија комплексан хемијски процес, а учење се одвија мењањем јачине синаптичких веза, слично као тежина у МНК. На слици 5.2 дат је поједностављен приказ два неурона.



Слика 5.2: Поједностављен приказ биолошких неурона

[<http://hagan.okstate.edu/nnd.html>]

Неке неуронске структуре су дефинисане у мозгу човека, а неке се стичу учењем или губе временом. Ове промене које настају временом су резултат слабљења или јачања синапси.

Вештачке неуронске мреже нису комплексне као биолошке, али им је концепт сличан. Састоје се од великог броја елементарних рачунских јединица, које обављају елементарне рачунске операције и међусобно су повезане. Везе између јединица се остварује помоћу функција (тежина). У исто време више јединица обављају своје задатке помоћу паралелних веза као код биолошких неурона.

### 5.2.1 Историјски развој и примена

Историју вештачких неуронских мрежа стварали су научници различитих области. Своје зачетке има крајем XIX и почетком XX века у радовима физичара, психолога и неуропсихолога. Научници из тог времена су теоријски разматрали функционисање биолошке неуронске мреже, пре свега начин учења и препознавања. За развој неуронских мрежа, као гране вештачке интелигенције, од пресудног значаја је развој компјутерске технологије.

Модеран поглед на вештачке неуронске мреже дали су Варен Мек Кулох (Warren Mc Culloch) и Валтер Питс (Walter Pitts) 1940. године. Они су у свом раду показали да се у мрежи, у принципу могу применити било које аритметичке и логичке операције. Прву практичну примену мреже урадио је Франк Розенблат (Frank Rosenblatt) крајем 1950. године. Он је са групом сарадника применио перцептрон мрежу са одговарајућим правилом учења на проблем препознавања узорка. Овај рад дао је велики подстрек за интензивнију примену мрежа; касније је показано да се перцептрон мрежа може применити само за одређене случајеве. Негде у исто време Бернард Виндроу (Bernard Widrow) и Тед Хоф (Ted Hoff) су увели нови алгоритам учења и применили га за тренирање адаптивне линеарне неуронске мреже. Нажалост оба концепта су имала ограничења и нису се могла применити на сложенијим проблемима.

Шездесетих година прошлог века интересовање за мреже је престало због недостатка идеја и брзих компјутера. 1972. године Теуво Кохомен (Teuvo Kohonen) и Џејмс Андерсон (James Anderson) су независно развили нови концепт неуронске мреже која о начину рачунања одлучује на основу претходних резултата, као меморија код човека.

Осамдесетих година прошлог века појављују се брзи рачунари, па самим тим расте и интерес за неуронске мреже. Статистику у процесу оцењивања и рекурентну мрежу први је применио Џон Хопфилд (John Hopfield). У овом периоду развијен је и алгоритам ширења уназад за тренирање вишеслојних перцептрон мрежа. Овај алгоритам је открило више истраживача независно.

Примена вештачких неуронских мрежа у геодезији, односно у деформационој анализи почела је крајем деведесетих година прошлог века. Прву примену моделирања клизишта планинског масива у Немачкој помоћу неуронских мрежа урадила је Хајнен 1999. у оквиру своје докторске дисертације. Џон-Боско је 2005. показао могућности примене адаптивне неуронске мреже за моделирање деформација конструкције моста. Такође, на Техничком универзитету у Истанбулу, Грађевински факултет, постоји група геодета на челу са Акирмлазом која је приликом мониторинга Моста султана Мехмета ГПС технологијом применила Калманов филтер и неуронске мреже за моделирање понашања конструкције.

Неуронске мреже се примењују у: друштвеним, медицинским и техничким наукама; и с њима се сусрећемо у свакодневном животу, а да нисмо свесни тога. У Табели 5.2 су наведене области примена мрежа са конкретном апликацијом у тој области. Табела примене је преузета из табеле примена неуронских мрежа, која је приказана у делу о неуронским мрежама програмског пакета Матлаб, с напоменом да детаљан опис примене у оквиру неке области није преузет у целости.

Табела 5.2: Примена вештачких неуронских мрежа

Област	Примена
Аеронаука	аутопилот, симулирање лета, контролни системи авиона
Аутомобилска индустрија	аутоматски управљачки системи и откривање кварова
Армија	откривање циљева, сензори, радари
Елетроника	контрола процеса, анализа и синтеза гласа и слике
Забава	анимација и специјални ефекти
Производња	аутоматско управљање и контрола процеса, дизајнирање и анализа производа
Медицина	анализа канцера, оптимизација времена трансплатације
Нафтна индустрија	истраживања
Роботика	контрола покрета, визуелизација
Говор	препознавање гласа
Безбедност	анализа објеката
Телекомуникације	компресија слике и података, аутоматски информациони системи
Транспорт	оптимизација транспорта
Банкарство	провера докумената

## 5.2.2 Модел неурона

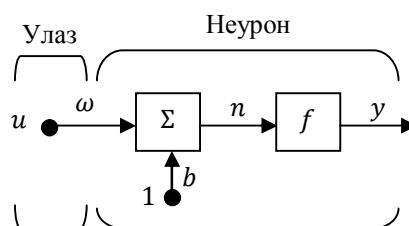
Неурон се дели с обзиром на број улазних сигнала на:

- појединачни неурон – улаз је скалар,
- неурон са више улазних сигнала – улаз је вектор.

### 5.2.2.1 Појединачни неурон

Улазни сигнал ( $u$ ) је скалар. Он се множи са тежином ( $\omega$ ) и пондерисани сигнал ( $u\omega$ ) се прослеђује у суматор ( $\Sigma$ ). У суматор долази један јединични сигнал – други улаз, који се претходно множи са утицајем ( $b$ - bias). Излазни сигнал из суматора се зове мрежни излаз и једак је  $n = u\omega + 1 * b$ . Овај сигнал се обрађује кроз функцију преноса (активациона функција)  $f$  и добија се неуронски излаз  $y = f(n) = f(\omega u + b)$ . На слици 5.3 приказан је појединачни неурон.





Слика 5.3: Појединачни неурон  
[\[http://hagan.okstate.edu/nnd.html\]](http://hagan.okstate.edu/nnd.html)

Ако повежемо са биолошким неуроном онда тежина  $\omega$  одговара јачини сигнала у синапси; тело ћелије представља суматор  $\Sigma$ , а функција преноса  $f$  и неуронски излаз  $y$  представљају сигнал у аксону.

Актуелни излаз из неурона зависи од изабране функције преноса. Утицај  $b$  је сличан тежини  $\omega$ , само је сигнал који се множи са њиме увек 1 (Хевисајдов сигнал). Овај утицај у неурону се може изоставити. Тежине  $\omega$  и  $b$  су параметри који се оцењују (усклађују) у неурону. Уобичајено је да се функција преноса унапред изабере, а да се тежине  $\omega$  и  $b$  подешавају по правилу учења, тако да се постигне захтевани циљ да се обрадом улазних података кроз неурон добије жељени излаз.

### Функција преноса

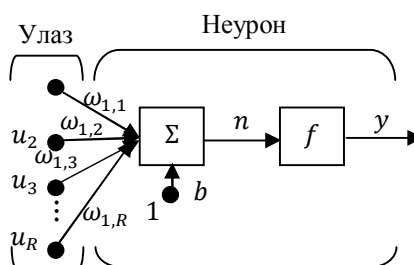
Функција преноса је линеарна или нелинеарна функција од мрежног излаза  $n$ . Приликом креирања неуронске мреже она се унапред дефинише да омогући успостављање везе између улазних и излазних сигнала. У табели 5.3 приказане су неке од најчешће примењиваних функција преноса.

Табела 5.3: Функције преноса (активационе функције)

[\[http://hagan.okstate.edu/nnd.html\]](http://hagan.okstate.edu/nnd.html)

Назив функције	Математички облик функције
Хард лимит	$y = 0 \quad n < 0$ $y = 1 \quad n \geq 0$
Симетрична хард лимит	$y = -1 \quad n < 0$ $y = 1 \quad n \geq 0$
Линеарна	$y = n$
Лог- сигмоид	$y = \frac{1}{1 + e^{-n}}$
Хиперболични-тангент сигмоид	$y = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$

### 5.2.2.2 Неурон са више улаза



Слика 5.4: Неурон са више улаза [\[http://hagan.okstate.edu/nnd.html\]](http://hagan.okstate.edu/nnd.html)

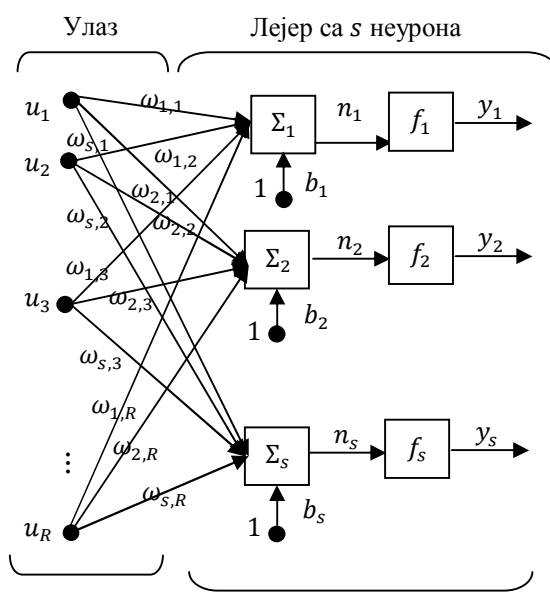
На слици 5.4 приказан је неурон са више улазних сигнала. Код овог неурона на улазу је вектор димензија  $R \times 1$ . Пошто је на улазу вектор мора да постоји и вектор тежина  $\mathbf{W}_{1 \times R}$ , јер сваки улазни сигнал треба да се пондерише одговарајућом тежином. У суматору  $\Sigma$  се сабира производ сваког улазног сигнал и одговарајуће тежине и утицаја  $b$ . Мрежни излазни сигнал  $n$ , излазни сигнал из суматора, је једнак

$$n = \omega_{1,1}u_1 + \omega_{1,2}u_2 + \dots + \omega_{1,R}u_R + b = \mathbf{W}\mathbf{u} + b,$$

док је неуронски излазни сигнал  $y = f(\mathbf{W}\mathbf{u} + b)$ .

## 5.2.3 Архитектура мреже

За решавање већине практичних проблема један неурон са више улаза није довољан. Потребно је више неурона који раде паралелно, формирају слој (лејер), или више слојева неурона. На слици 5.5 приказана је мрежа са једним слојем.



$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{W}\mathbf{p} + \mathbf{b})$$

Слика 5.5: Неуронска мрежа са једним лејером [<http://hagan.okstate.edu/mnd.html>]

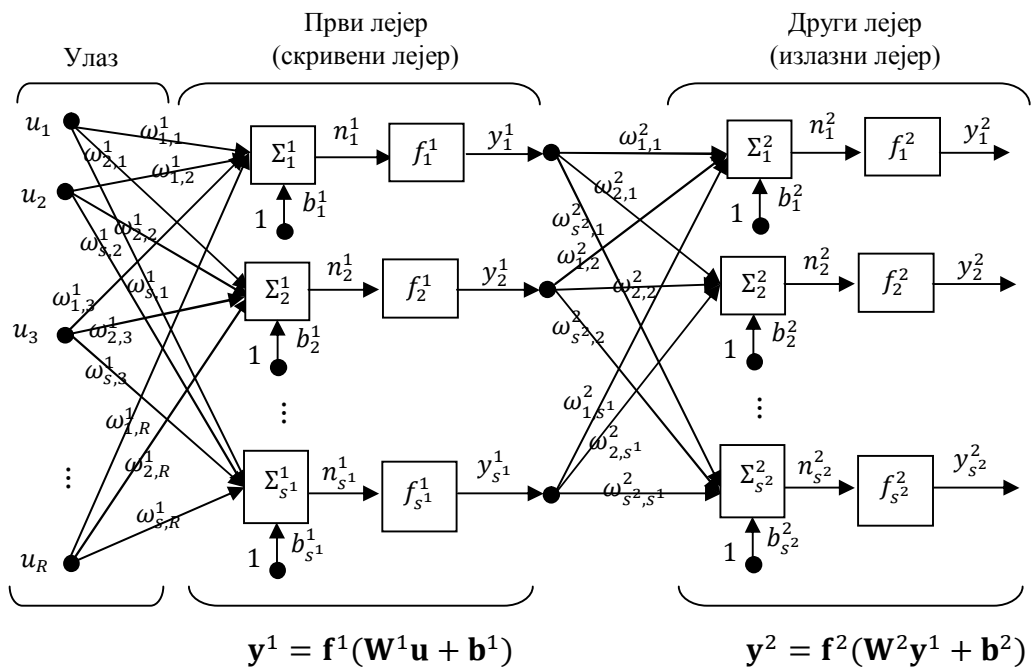
Лејер садржи матрицу тежина  $\mathbf{W}$  димензија  $s \times R$ ,  $s$  суматора  $\Sigma$ ,  $s$  вектор утицаја  $\mathbf{b}$  димензија  $s \times 1$ ,  $s$  функција преноса и излазни вектор  $\mathbf{y}$  димензија  $s \times 1$ . Сваки улазни сигнал је помоћу матрице тежина повезан са сваким неуроном. Матрица тежина је следеће структуре

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \omega_{1,3} & \cdots & \omega_{1,R} \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \omega_{2,3} & \cdots & \omega_{2,R} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{s,1} & \omega_{s,2} & \omega_{s,3} & \cdots & \omega_{s,R} \end{bmatrix}.$$

Први број у индексу тежине означава број неурона у лејеру, а други број означава редни број улазног сигнала у улазном вектору. Сви неурони у лејеру не морају имати исту функцију преноса. Да би неурони имали различите функције комбинују се две мреже које раде паралелно. Обе мреже имају исти улаз, а свака креира свој излаз.

### 5.2.3.1 Мрежа са више лејера

Мрежа садржи више лејера, а сваки лејер има своју матрицу тежина  $\mathbf{W}$ , свој вектор утицаја  $\mathbf{b}$ , вектор мрежних улаза  $\mathbf{n}$  и излазни вектор  $\mathbf{y}$ . На слици 5.6 приказана је мрежа са два лејера. На улазу је вектор  $\mathbf{u}$  димензија  $R \times 1$ . У првом лејеру се налази  $s^1$  неурон, а у другом  $s^2$  неурона.



Слика 5.6: Неуронска мрежа са два лејера [<http://hagan.okstate.edu/nnd.html>]

Излаз из првог лејера је улаз у други лејер, и тако редом до излазног лејера. Број улазних сигнала у лејеру, од другог лејера до излазног лејера, једнак је броју неурона у претходном лејеру. Матрица тежина у лејеру, од другог лејера до излазног лејера, има следеће димензије

број неурона у том лејеру  $\times$  број неурона у претходном лејеру.

Лејер чији излаз уједно и излаз из мреже назива се излазни лејери, а лејери чији је излаз улаз у следећи лејер називају се скривени лејери.

Мрежа са више лејера је много ефикаснија од мреже са једним лејером. Нпр. мрежа од два лејера где је функција преноса у првом лејеру сигмоид, а у другом

линеарна може се научити (утренирати) да описује већину произвољних функција веома добро.

Број улазних и излазних сигнала унапред је познат у мрежи. То значи да је број неурона у излазном лејеру унапред познат. У деформационој анализи тај број  $1t, 2t$  или  $3t$ , где је  $t$  број тачака у контролној мрежи, а први број означава једно- дво- или тродимензионалну мрежу. Број улазних сигнала зависи од тога које променљиве се опажају, односно чији утицај се жели анализирати. Карактеристике улазног и излазног сигнала нам помажу да дефинишемо функцију преноса. Остаје проблем броја неурона у скривеним лејерима и овај проблем се интензивно изучава. Из искуства је познато да су два или три лејера довољна за решавање већине практичних задатака. Такође, поставља се и питање да ли користити утицај  $b$  у лејеру као непознати параметар или не. Утицај је још једна непозната и мрежа са њим је ефикаснија у описивању. Такође, улазни вектор не садржи све параметре који делују на систем и утицај  $b$  може да садржи неопажане утицаје, као и мерну несигурност опажаних параметара.

#### 5.2.4 Стварање неуронске мреже

Процес дизајнирања мреже састоји се од следећих корака:

1. дефинисање модела (избор улазних и излазних променљивих),
2. избор алгоритма (нпр. перцептром, адлине, ширење уназад),
3. дефинисање броја слојева и броја неурона у скривеним слојевима,
4. одређивање типа веза између слојева и избор функција преноса у лејерима,
5. избор правила учења и почетних вредности за тежине и утицаје у свим лејерима мреже,
6. избор критеријума за тестирање и верификацију мреже,
7. поступак учења,
8. поступак тестирања и
9. верификација мреже.

Стварање вештачке неуронске мреже одвија се у две фазе: прво се обавља фаза учења или тренирања, а затим се научена мрежа тестира. Нормално, као и код

свих метода идентификације система ако применимо више структура мрежа на крају се мора уради поступак валидације. О поступцима валидације биће више речи у шестом поглавља.

### Учење

Учење је поступак мењања тежина у мрежи у зависности од улазних и излазних података, а у неким случајевима само од улазних података. Када су познати излазни подаци, онда су то жељене вредности излазних променљивих у излазном лејеру, и тада се ради о тзв. надгледаном учењу. Један од надгледаних алгоритама, а који је примењен у овом раду, је мрежа ширења уназад. Код неких мрежа жељени излаз не мора бити познат и тада се ради о ненадгледаном учењу.

Пре самог учења потребно је прикупити податке (улазне и излазне) на којима ће се обавити тренирање и тестирање мреже, као и дефинисати архитектуру мреже. Прикупљени подаци се деле на два подузорка: узорак за тренирање и узорак за тестирање. Правила за поделу нема, али је уобичајено да се 70% података користи за учење, а 10% за тестирање и 20% за валидацију. Подаци у узорку се распоређују случајно, осим код временских серија где се мора поштовати редослед прикупљања података (опажања) у времену, тј. мрежу треба тренирати са најстаријим подацима, а тестирати са новијим подацима.

Након што је дефинисан модел, прикупљени и расподељени улазни и излазни подаци, изабран алгоритам неуронске мреже, правило учења и функције преноса потребно је мрежу учити на припремљеним подацима како би она препознала везу између података и била у могућности да предиктује или симулира излаз на основу улазних података. Сама фаза учења је процес подешавања тежина у мрежи који се одвија у више итерација кроз мрежу. Једна итерација представља учитавање једног улазног и излазног вектора. У свакој итерацији рачунају се нове тежине, а код надгледаних алгоритама и нова грешка. На основу израчунатих грешака врши се рачунање нових тежина у мрежи. Обично се мрежа тренира у неколико хиљада итерација.

Најважније питање у овој фази је колико дуго треба да се тренира мрежа да би се добила тражена тачност апроксимације процеса. Не постоји јасно правило за

одређивање броја итерација. Одговор на ово питање се може добити на основу искуства или применом оптимизационих алгоритама, као што је техника унакрсног тестирања. Ова техника се састоји од следећих корака:

- мрежа се тренира на узорку за тренирање одређени број итерација (нпр. 10000),
- тако научена мрежа се тестира на узорку за тестирање, и добијени резултати тестирања и тежине и утицаји се сачувају,
- затим се мрежа наставља тренирати у још неколико хиљада итерација, где су почетни подаци за тежине и утицаје вредности из последње итерације тренирања мреже,
- мрежа се поново тестира на узорку за тестирање са тежинама и утицајима из последњег учења мреже и ако су добијени бољи резултати него на основу података из претходне епохе учења и тестирања подаци о мрежи се похрањују,
- поступак се понавља све док се добијају бољи резултати тестирања.

### Тестирање

У фази тестирања тежине и утицаји су фиксни, користе се вредности добијене из задње итерације учења. Обавља се на узорку који није коришћен за учење мреже. Тестирање је поступак оцењивања квалитета мреже. Оцењивање мреже се обавља на основу грешке која се добија по формули

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^{mer} - y_i)^2}, \quad (5.17)$$

где је:  $y_i^{mer}$  - мерени (жељени) излазни сигнал,  $y_i$  - моделирани излазни сигнал и  $n$  - број неурона у излазном лејеру. Добијена грешка је мера успешности предвиђања будућих података. Такође, као мера квалитета предикције може се користити и коефицијент корелације.

### 5.2.5 Мрежа ширења уназад

У овом раду је детаљно описан алгоритам мреже „ширења уназад“ (backpropagation), јер он је примењен за решавање практичних примера (поглавље 6). Овај алгоритам изабран је јер садржи више лејера; већ је речено да мреже са два лејера, где је у првом лејеру функција преноса логаритамска сигмоид функција, а у другом линеарна функција може да опише сваку функцију уз довољан број итерација учења.

Алгоритам мреже „ширења уназад“ био је пресудан за широку комерцијалну употребу неуронских мрежа. Његов први креатор био је Паул Вербос (Paul Werbos) 1974. године, а проширена је од стране Румелхарта (Rumelhart), Хинтона (Hinton) и Вилиамса (Williams) 1986. Године. Била је то прва неуронска мрежа са једним или више скривених лејера, и која нема ограничења у врсти проблема који се могу решавати као мрежа са једним лејером. Овај алгоритам ради на следећи начин:

*Пропагира се улаз кроз мрежу до излазног лејера и одређује се грешка излаза, ова грешка се пропагира уназад од излазног до првог скривеног лејера уграђујући је у формулу за учење.*

Стандардни алгоритам мреже „ширења уназад“ укључује оптимизацију грешке користећи нумерички алгоритам градијентног опадања (gradient descent).

За објашњење алгоритма претпоставимо да мрежа садржи  $m$  скривених лејера, односно структура мреже је  $R - s^1 - s^2 - \dots - s^m + s^{m+1}$ , где је  $R$ - улаз са  $R$  улазних сигнала, а  $s^{m+1}$  је излазни лејер. Мерени (жељени) излаз означимо са  $y_1^{mer}, y_2^{mer}, \dots, y_q^{mer}$ , односно излазни лејер садржи  $q$  неурона. Усвајају се почетне вредности тежина за све лејере  $\mathbf{W}^j(0)$  и утицаја  $\mathbf{b}^j(0)$  ( $j = 1, 2, \dots, m + 1$ ).

Мрежа се пропагира унапред, односно на основу усвојених функција преноса, рачунају се излази лејера од првог до излазног лејера. Познато је да је излаз из  $l$ -тог лејера ( $l = 0, 1, 2, \dots, m$ ) једнак

$$\mathbf{y}^{l+1} = \mathbf{f}^{l+1}(\mathbf{W}^{l+1}\mathbf{y}^l + \mathbf{b}^{l+1}). \quad (5.18)$$

У првом скривеном лејеру излаз из претходног лејера су улазни сигнали, па је  $\mathbf{y}^0 = \mathbf{u}$ . Оцена суме квадрата одступања у итерацији је

$$\hat{F}(x) = [\mathbf{y}^{mer}(k) - \mathbf{y}^{m+1}(k)]^T [\mathbf{y}^{mer}(k) - \mathbf{y}^{m+1}(k)] = \mathbf{e}^T \mathbf{e}, \quad (5.19)$$



где је  $k$  – број итерације учења.

Метода градијентно опадање

Вредности непознатих параметара (тежина и утицаја) се добијају по следећој формули

$$\omega_{i,j}^l(k+1) = \omega_{i,j}^l(k) - \alpha \frac{\partial \hat{F}(x)}{\partial \omega_{i,j}^l}, \quad b_i^l(k+1) = b_i^l(k) - \alpha \frac{\partial \hat{F}(x)}{\partial b_i^l}, \quad (5.19)$$

где је  $\alpha$ - корак опадања (учења).

За рачунање парцијалних извода примењује се правило ланца

$$\frac{df(n(\omega))}{d\omega} = \frac{df(n(\omega))}{dn} \times \frac{dn(\omega)}{d\omega}. \quad (5.20)$$

Примењујући (5.20) парцијални изводи у (5.19) се рачунају као

$$\frac{\partial \hat{F}(x)}{\partial \omega_{i,j}^l} = \frac{\partial \hat{F}(x)}{\partial n_i^l} \times \frac{\partial n_i^l}{\partial \omega_{i,j}^l}, \quad \frac{\partial \hat{F}(x)}{\partial b_i^l} = \frac{\partial \hat{F}(x)}{\partial n_i^l} \times \frac{\partial n_i^l}{\partial b_i^l}. \quad (5.21)$$

Познато је да је мрежни излаз у лејеру  $l$  за  $i$ -ти неурон једнак

$$n_i^l = \sum_{j=1}^{s^{l-1}} \omega_{i,j}^l y_j^{l-1} + b_i^l. \quad (5.22)$$

Парцијални изводи мрежног излаза по тежини и утицају су

$$\frac{\partial n_i^l}{\partial \omega_{i,j}^l} = y_j^{l-1}, \quad \frac{\partial n_i^l}{\partial b_i^l} = 1, \quad (5.23)$$

а парцијални извод грешке по мрежном излазу назива се осетљивост

$$s_i^l = \frac{\partial \hat{F}}{\partial n_i^l}. \quad (5.24)$$

Заменом израза (5.23) и (5.24) у (5.21) добија се

$$\frac{\partial \hat{F}(x)}{\partial \omega_{i,j}^l} = s_i^l y_j^{l-1}, \quad \frac{\partial \hat{F}(x)}{\partial b_i^l} = s_i^l, \quad (5.25)$$

док израз за рачунање тежина и утицаја по методи градијентног опадања (5.19) се може записати у следећем облику примењујући (5.25)

$$\omega_{i,j}^l(k+1) = \omega_{i,j}^l(k) - \alpha s_i^l y_j^{l-1}, \quad b_i^l(k+1) = b_i^l(k) - \alpha s_i^l, \quad (5.26)$$

или у матричном облику

$$\mathbf{W}^l(k+1) = \mathbf{W}^l(k) + \alpha \mathbf{s}^l (\mathbf{y}^{l-1})^T, \quad \mathbf{b}^l(k+1) = \mathbf{b}^l(k) + \alpha \mathbf{s}^l, \quad (5.27)$$

где је вектор осетљивости

$$\mathbf{s}^l = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{F}(x)}{\partial n_1^l} \\ \frac{\partial \bar{F}(x)}{\partial n_2^l} \\ \vdots \\ \frac{\partial \bar{F}(x)}{\partial n_{s_l}^l} \end{bmatrix} = \frac{\partial \bar{F}(x)}{\partial \mathbf{n}^l}. \quad (5.28)$$

Да би се израчунала осетљивост потребно је наћи Јакобијан матрицу, матрицу парцијалних извода мрежних излаза у  $l + 1$  лејеру по мрежним излазима у  $l$ -том лејеру

$$\frac{\partial \mathbf{n}^{l+1}}{\partial \mathbf{n}^l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1^{l+1}}{\partial n_1^l} & \frac{\partial n_1^{l+1}}{\partial n_2^l} & \dots & \frac{\partial n_1^{l+1}}{\partial n_{s_l}^l} \\ \frac{\partial n_2^{l+1}}{\partial n_1^l} & \frac{\partial n_2^{l+1}}{\partial n_2^l} & \dots & \frac{\partial n_2^{l+1}}{\partial n_{s_l}^l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial n_{s_l}^{l+1}}{\partial n_1^l} & \frac{\partial n_{s_l}^{l+1}}{\partial n_2^l} & \dots & \frac{\partial n_{s_l}^{l+1}}{\partial n_{s_l}^l} \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Коефицијенти Јакобијан матрице се рачунају на основу следећих израза

$$\frac{\partial n_i^{l+1}}{\partial n_j^l} = \frac{\partial \left[ \sum_{j=1}^{s_l} w_{i,j}^{l+1} y_j^l + b_i^{l+1} \right]}{\partial n_j^l} = w_{i,j}^{l+1} \frac{\partial y_j^l}{\partial n_j^l}, \quad (5.30)$$

јер је  $y_j^l$  излаз из  $l$ -тог лејера у функцији од мрежног излаза тог лејера ( $y_j^l = f^l(n_j^l)$  – овде  $f^l$  означава активациону функцију). Горњи израз се може записати као

$$\frac{\partial n_i^{l+1}}{\partial n_j^l} = w_{i,j}^{l+1} \frac{\partial f^l(n_j^l)}{\partial n_j^l} = w_{i,j}^{l+1} \dot{f}^l(n_j^l), \quad (5.31)$$

а у матричном облику је

$$\frac{\partial \mathbf{n}^{l+1}}{\partial \mathbf{n}^l} = \mathbf{W}^{l+1} \dot{\mathbf{F}}^l(\mathbf{n}^l). \quad (5.32)$$

Матрица  $\dot{\mathbf{F}}^l(\mathbf{n}^l)$  је следеће структуре

$$\dot{\mathbf{F}}^l(\mathbf{n}^l) = \begin{bmatrix} \dot{f}^l(n_1^l) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dot{f}^l(n_2^l) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dot{f}^l(n_{s_l}^l) \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Када се уради ширење напред, израчунају се вредности излаза лејера од првог скривеног лејера до излазног лејера и израчуна се грешка излаза, почиње се са

ширењем уназад, односно ажурирањем тежина и утицаја. Прво се ради иницијализација излазног лејера, што подразумева рачунање вектора осетљивости овог лејера.

Осетљивост у излазном слоју  $(m + 1)$  – ом се рачуна по следећој формули

$$\begin{aligned} s_i^{m+1} &= \frac{\partial \hat{F}}{\partial n_i^{m+1}} = \frac{\partial (\mathbf{y}^{mer} - \mathbf{y}^{m+1})^T (\mathbf{y}^{mer} - \mathbf{y}^{m+1})}{\partial n_i^{m+1}} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{s^{m+1}} (y_j^{mer} - y_j^{m+1})^2}{\partial n_i^{m+1}} \\ &= -2(y_i^{mer} - y_i^{m+1}) \frac{\partial y_i^{m+1}}{\partial n_i^{m+1}} = -2(y_i^{mer} - y_i^{m+1}) \dot{f}^{m+1}(n_i^{m+1}), \end{aligned} \quad (5.34)$$

јер је  $\frac{\partial y_i}{\partial n_i^{m+1}} = \frac{\partial f^m(n_i^{m+1})}{\partial n_i^{m+1}} = \dot{f}^{m+1}(n_i^{m+1})$ . У матричном облику једначина (5.34) се записује као

$$\mathbf{s}^{m+1} = -2\dot{\mathbf{F}}^{m+1}(\mathbf{y}^{mer} - \mathbf{y}^{m+1}). \quad (5.35)$$

После израчунате осетљивости излазног лејера мреже ажурирају се тежине у излазном лејеру по формули (5.27), а онда се осетљивост и ажурирање тежина изводе од последњег скривеног лејера до првог ( $s^m \rightarrow s^{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow s^1$ ) по следећем изразу у матричном облику

$$\mathbf{s}^l = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{n}^l} = \left( \frac{\partial \mathbf{n}^{l+1}}{\partial \mathbf{n}^l} \right)^T \frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{n}^{l+1}} = \dot{\mathbf{F}}^l(\mathbf{n}^l) (\mathbf{W}^{l+1})^T \frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{n}^{l+1}} = \dot{\mathbf{F}}^l(\mathbf{n}^l) (\mathbf{W}^{l+1})^T \mathbf{s}^{l+1}. \quad (5.36)$$

6.

## ДЕФОРМАЦИОНА АНАЛИЗА КОНСТРУКЦИЈА - ПРИМЕРИ

У већини случајева грађевинске конструкције представљају нелинеарне динамичке системе. Приликом моделирања система увек се покушава да се систем опише на једноставнији начин, али са задовољавајућом тачности; том приликом се узимају у обзир само компоненте (улазни сигнали) који су предмет интересовања, а не сва оптерећења која делују на конструкцију. Поједностављења приликом моделирања се уводе ради лакшег поступка моделирања и добијања модела једноставније структуре. Најједноставнији приступ је посматрање динамичког система као линеарног. Линеарни динамички систем се описује на један од следећих начина:

1. функције преноса,
2. линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима,
3. импулсним одговором и
4. системом једначина простора стања.

У случајевима када линеарна апроксимација не даје задовољавајуће резултате динамички систем се мора посматрати као нелинеаран. За успостављање везе између оптерећења и деформације (узрочно-последичног модела) примењују се Волтера модели и вештачке неуронске мреже.

На почетку овог поглавља детаљније су приказана оптерећења која делују на конструкцију и изазивају деформације истих. Дат је посебан осврт на фундарање објеката, као и узроке слегања и деформација. Пре примера који су обрађени у овом поглављу, дати су поступци верификације (валидације) модела.

## 6.1 ОПТЕРЕЋЕЊА КОНСТРУКЦИЈЕ

На конструкцију и тло делују оптерећења која изазивају деформације елемената конструкције и/или тла. Појавом деформација долази до промене геометрије објекта и појављују се притисци у елементима конструкције који могу довести до прлина, пластичних деформација, па чак и лома елемента. Приликом пројектовања конструкције потребно је узети у обзир сва оптерећења која делују на конструкцију, јер се оптерећења суперпонирају ради одређивања максималних напона у елементима конструкције. Оптерећења се могу поделити према:

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| - пореклу                      | - природне (гравитационе, метеоролошке, сеизмичке и принудне силе)   |
|                                | - услед људских активности (аутомобили, машине, покрети људи, експлозије)  |
| - начину дејства               | - директна дејства (концентрисани или расподељени терети)  |
|                                | - индиректна дејства (убрзања основе, слегања ослонаца)  |
| - брзина деловања конструкције | - вертикална оптерећења (стална тежина конструкције и повремена – снег)  |
|                                | - хоризонтална оптерећења (потреси и ветар)  |
| - одговору конструкције        | - статичка оптерећења (непроменљива и не изазивају убрзање конструкције или елемента)  |
|                                | - динамичка оптерећења (променљива, нагло нанешена и изазивају убрзање конструкције или елемента)  |
| - промени у времену и простору | - стална оптерећења (делују током целог века конструкције: сопствена тежина, тежина неносећих делова конструкције, притисак тла, слегање ослонаца)               |
|                                | - повремена оптерећења (корисна оптерећења, покретни терети, ветар, снег, температурне промене)  |
| - карактеру                    | - основна оптерећења (сопствена тежина конструкције, тежина неносећих делова конструкције, корисна оптерећења – намештај, покретне преграде, људи, возила, снег) |
|                                | - допунска оптерећења (ветар, термичка дејства, силе бочних удара, кочење дизалице)  |
|                                | - изузетна оптерећења (сеизмичка оптерећења, неравномерно слегање ослонаца, удари возила, експлозије).   |

Грађевинска техничка регулатива за димензионисање конструкције у Србији заснива се на теорији граничних стања и теорији допуштених напона. Према стандардима за све врсте оптерећења (врста конструктивног елемента и материјала (нпр. бетон, челик, дрво и др.), удар ветра, количину снега у зависности од надморске висине и врсте крова) позната је вредност оптерећења у  $\left[\frac{kN}{m^2}\right]$ . Правилним избором материјала за конструкцију и рационалним

коришћењем попречних пресека долази се до адекватне вредности оптерећења. На пример, за челичне конструкције, и прорачун према допуштеним напонима, постоје три случаја прорачуна оптерећења у зависности која се оптерећења узимају приликом прорачуна:

1. само основна оптерећења, меродавни утицаји за димензионисање конструкција множе се коефицијентом сигурности  $\vartheta = 1.50$ ;
2. основна и допунска оптерећења, прорачунате димензије конструкција множе се коефицијентом сигурности  $\vartheta = 1.33$ ;
3. основна, допунска и изузетна оптерећења, прорачунате димензије конструкција множе се коефицијентом сигурности  $\vartheta = 1.33$ .

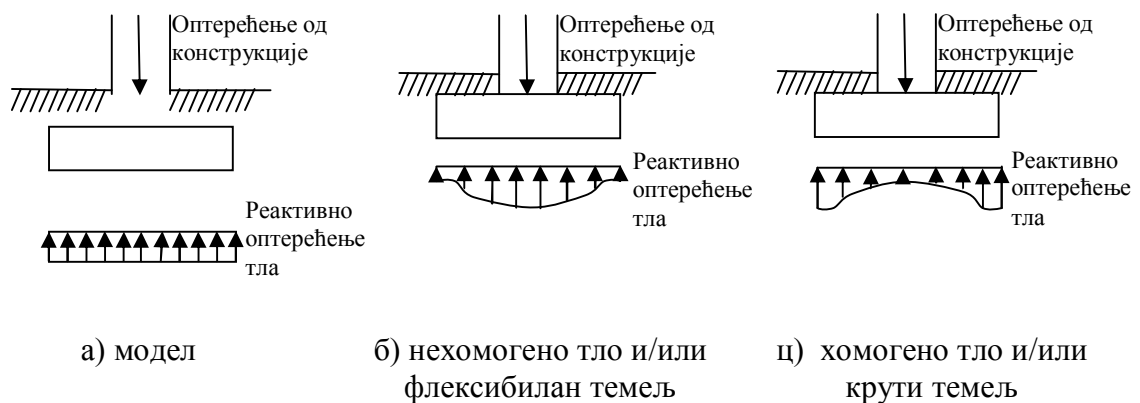
До сада је било речи о оптерећењима која делују на конструкцију. Сва ова оптерећења се преко темеља преносе на тло испод темеља и у околини. У наставку овог потпоглавља биће више речи о темељима, преносу оптерећења на тло и поступцима моделирања тла.

### 6.1.1 Темељи

Темељи, као саставни део сваке инжењерске конструкције, су најчешће подземни елементи који имају улогу преноса оптерећења конструкције на тло. Правилним пројектовањем темеља треба обезбедити предвиђене услове ослањања конструкције, пренос оптерећења у допуштеним напрезањима тла, те уз допуштена слегања и минимизацију неравномерности слегања ослонаца. Дубину фундарања у односу на површину тла треба бирати у функцији састава и особина тла на коме се конструкција фундара, тако да услови одговарају захтевима против слома у тлу, а слегања су у прихватљивим границама. Такође, дубином фундарања је неопходно продрети у слојеве тла који не мрзну и немају велике промене влажности. Приликом фундарања темељи се могу класификовати на:

- појединачни темељи – темељ самац (испод једног стуба),
- темељне траке (испод зидова),
- темељне греде и темељни роштиљ (испод низа стубова) и
- темељне плоче (за велика оптерећења и/или лоше тло).

Приликом пројектовања темеља једна од претпоставки је да концентрисана сила, која делује на темељ у тежишту, изазива једнако подељено реактивно оптерећење тла. Ово је апроксимација реалног стања, јер расподела и интензитет реактивног оптерећења тла зависе од врсте тла и односа крутости темеља и тла. Нехомогеном тлу и/или флексибилном темељу одговарају веће ординате реактивног притиска у централном делу темеља; док код везаног тла и/или крутог темеља веће ординате се јављају на ивицама. На слици 6.1 приказан је распоред напона у зависности од врсте тла и крутости темеља.



Слика 6.1: Распоред напона у зависности од врсте тла и/или темеља  
[\[http://www.scribd.com/doc/51375437/08-Plitki-temelji\]](http://www.scribd.com/doc/51375437/08-Plitki-temelji)

Уобичајено је да се неравномерност расподеле напрезања у контактної површи занемарује због непоуздане процене расподеле напрезања у реалним условима, као и малог утицаја на димензионисање темеља. Такође, претпоставка приликом прорачуна је да постоји поклапање деформација темеља и тла у нивоу њиховог споја. На овај начин расподела реактивног оптерећења је функција еластичних и пластичних особина тла, као и особина темељне конструкције. Ово значи да деформације тла изазивају промену у статичкој одређености елемената горње конструкције због интеракције конструкција-тло.

На основу свега раније наведеног може се закључити да се тло мора узимати као конструктивни елемент приликом прорачуна. Међутим, у прорачуну конструкције се одвојено анализира горња конструкција објекта и тло. Прорачун за горњу конструкцију претпоставља стабилност ослонаца; док реакција тла због

оптерећења горњом конструкцијом се посматра у независној анализи. На овај начин занемарује се повратни утицај тла на конструкцију.

Данас, са развојем рачунарске технике, могуће је заједно моделирати конструкцију објекта и тла. Утицај тла, који се манифестује контактним напрезањем, се одређује помоћу усвојеног модела, који представља идеализацију тла. Уобичајени модели контактнег напрезања су: линеарна дистрибуција, Винклерова подлога и еластично изотропни хомогени потпростор. Сви ови поступци моделирања тла имају своје недостатке. Код линеарног модела, који се примењује код крутих темеља и за деформабилна (мека) тла, све врсте тла имају исти пренос оптерећења и не користи се ниједна механичка карактеристика тла. Винклеров модел третира тло као еластичну подлогу, и заснива се на пропорционалности између притиска ( $q$ ) и слегања ( $y$ )

$$q = ky, \quad (6.1)$$

где је  $k$  - коефицијент крутости тла. У овом моделу тло се апроксимира бесконачним низом независних еластичних опруга. Притисак у некој тачки – опрузи је последица само слегања те тачке, односно нема интеракције и терења између тачака контактне површи. Недостаци овог модела су што притисак у некој тачки није последица самог слегања те тачке; тло се не слеже само испод темеља него и у околини. Коефицијент крутости није константа тла и зависи чак и од облика и величине блока контактне површи (узорка) из којег се одређује. Модел еластичног изотропног потпростора примењује теорију еластичности (модел деформација и Поасонов коефицијент) за описивање понашања тла. Врло је груба апроксимација, јер деформације тла нису еластичне због доношења константног оптерећења, које се не уклања.

Из напред наведеног се може закључити да се моделирање тла заснива на одређеним претпоставкама које не одговарају реалности. Узорци тла који служе за одређивање физичких параметара не репрезентују цело тло испод и око темеља, а зависе од облика и величине узорка. Једино се реална слика понашања конструкције и тла може добити добро испланираним програмом праћења. Слегање, које се региструје геодетским методама, може да послужи за разматрање оптерећења горње конструкције због тла и за одређивање физичких параметара тла. Овако добијени подаци о тлу су релевантнији, јер се репери могу поставити



на више места на констукцији и тлу и на тај начин боље репрезентовати одговор од параметара који су добијени геотехничком анализом тла, јефтинији су и дају апсолутна померања.

## **6.2 УЗРОЦИ СЛЕГАЊА И ДЕФОРМАЦИЈА ОБЈЕКТА**

У претходном потпоглављу наведена су сва оптерећења конструкције која изазивају контактни притисак на тло и његову реакцију. Под утицајем наношења оптерећења јављају се слегања која могу бити равномерна и неравномерна; у границама предвиђених или изван предвиђених вредности. Приликом прорачуна конструкције и моделирања слегања објекта предвиђају се вредности померања и претпоставља се да су равномерна. Међутим, због непознавања „истините“ структуре тла, немогућности да се предвиде сва оптерећења и пропуста приликом градње често су слегања изван предвиђених вредности и иста могу бити неравномерна. Узроци слегања су разни и могу се поделити на: опште и посебне [Цветковић, Ч., 1970]. Општи узроци везани су за:

- физичко-механичке особине тла и подложност тла на слегање и клизање;
- својства тла у коме се под утицајем оптерећења јављају еластичне или пластичне деформације;
- хетерогени геолошки састав тла са стабилним и нестабилним тлом, које подлеже неравномерном слегању и померању услед дејства тежине објекта;
- хидротехничке услове везане са сезонским и дневним променама температуре и нивоа подземних вода.

Посебни узроци везани за: пропусте приликом испитивања тла, неподесно изабран начин фундирања због непознавања особина тла на коме се поставља темељ, као и пропусте приликом грађења (лоше дренирање атмосферских и поплавних вода, испирање ситних честица водом која се процеђује, подлокавање тла протицањем површинске воде, влажење лесног и отапање промрзлог тла, вештачко снижавање нивоа подземних вода, измена притиска тежине објекта надоградњом, неравномерно распоређивање притиска од тежине објекта на

контактну површ темеља, крутост и величина темељне стопе и због подземних радова).

### **6.3 ВАЛИДАЦИЈА МОДЕЛА**

Приликом моделирања динамичког система уобичајено је правило да се 70% мерених података користи за оцењивање параметара модела, а 30% за валидацију модела. Поступком верификације модела се добијају одговори на следећа питања:

1. Који модел боље апроксимира мерене податке?
2. Да ли је модел прихватљив за практичну примену?

За валидацију модела се примењују следећи поступци:

1. упоређење симулираног и предиктованог излаза из модела са мереним излазом;
2. анализа аутокорелације и међусобне корелације поправака са улазним сигнаlima;
3. анализа одговора модела на импулсни, одскочни и фреквентни одзив;
4. полови и нуле линеарног параметарског модела;
5. упоређење одговора непараметарских модела (импулсни, одскочни и фреквентни) са линеарним (функција преноса и простор стања) и нелинеарним параметарским моделима;
6. Упоређење модела применом Акаике информационог критеријума или Акаике грешке предикције.

У овом раду су за верификацију модела примењени критеријуми под тачкама 1, 2 и 6 и због тога они су детаљно приказани у овом раду.

#### **6.3.1 Симулирање и предиктовање моделског излаза**

Симулирање значи да се на основу улазних сигнала, почетних услова (стања система у почетном тренутку) и модела рачунају вредности улазних сигнала. Предикција се базира на предвиђању излаза  $k$ - корака унапред на основу ранијих

и тренутних улазних сигнала, ранијих излазних сигнала и модела. (Видети потпоглавље 2.3.2.2.)

Предикција се примењује за контролу управљања системима. Симулација је боља за валидацију модела и она је због тога примењена у свим примерима. Квантитавни критеријум који се примењује за валидацију модела је следећи

$$Fit_{[\%]} = \left[ 1 - \frac{|y - \hat{y}|}{|y - \bar{y}|} \right] * 100, \quad (6.2)$$

где је:  $y$  - вектор мерених излаза,  $\hat{y}$  - вектор симулираних или предиктованих моделских излаза и  $\bar{y}$  - аритметичка средина од вектора мерних излаза. Ако се деси да је подешавање  $Fit$  негативно онда су могућа два разлога:

- алгоритам за оцењивање не конвергира и
- оцена параметара модела није добијена минимизацијом поправака  $\varepsilon = |y - \hat{y}|$ .

### 6.3.2 Анализа поправака

Поправке су разлике између симулираних или предиктованих и мерених вредности излазних сигнала из валидационог скупа података. Валидациони скуп података је последњих (по тренуцима одабирања) 30% података временске серије и он се није користио за оцену параметара модела. Анализа се састоји од два теста: случајности и независности.

Тест случајности проверава да ли је аутокорељациона функција поправака унутар интервала поверења, односно да ли су поправке међусобно некорелисане. Неколико форми статистичког тестирања случајности је развијено. Типичан тест случајности подразумева да се прво добије оцена аутоковаријационе функције (видети формулу 3.22)

$$\hat{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} \varepsilon_t \varepsilon_{t+k}. \quad (6.3)$$

Тест величина је

$$\zeta_{N,M} = \frac{N}{\hat{c}_0^2} \sum_{k=1}^M \hat{c}_k^2, \quad (6.4)$$

$M$  је максималан корак аутоковаријационе функције. Ако су поправке случајне, онда ће тест величина имати асимптотску  $\chi^2(M)$  расподелу. Поправке су случајног карактера ако модел функција преноса система (динамички део модела) „добро“ апроксимира реалну функцију преноса система. За остваривање независности поправака најпогодније су метода грешке предикције и метода помоћне променљиве за оцењивања параметара система.

Тест независности подразумева да поправке нису корелисане са претходним улазним сигналима. Ако постоји корелација онда модел није описао (употребио) све информације које се налазе на улазу. Независност између улаза  $u$  и грешке симулације или предикције  $\varepsilon$  се тестира помоћу оцене коваријације

$$\hat{c}_{\varepsilon u}^N(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=k}^N \varepsilon_t u_{t-k}. \quad (6.5)$$

Ако су поправке  $\varepsilon_t$  независне од претходних улаза  $u_{t-k}$  онда величина  $\sqrt{N} \hat{c}_{\varepsilon u}^N(k)$  асимптотски има нормалну расподелу  $N(O, P)$ , где је  $P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{\varepsilon}(k) c_u(k)$ .

Други начин провере случајности и независности је помоћу графика аутокорелационе и корелационе функције. Да би се прихватиле хипотезе о случајности и независности вредности аутокорелације и корелације морају бити унутар интервала поверења. Поступак рачунања интервала поверења приказан је у потпоглављу 3.4.3. Овај начин провере независности и случајности примењен је у овом раду.

### 6.3.3 Акаике (Akaike's) критеријуми за валидацију модела

Постоје два Акаике критеријума за валидацију: финална грешка предикције (FPE – Final Prediction Error) и Акаике информациони критеријум (AIC- Akaike's Information Criterion). Ови критеријуми се рачунају из дела временске серије који су намењени за валидацију. Када се користе исти подаци за оцењивање параметара модела и валидацију апроксимација се побољшава са повећањем степена модела, а такође, побољшава се и флексибилност структуре модела.

FPE се рачуна по следећој формули

$$FPE = V \left( \frac{1+\frac{d}{N}}{1-\frac{d}{N}} \right), \quad (6.6)$$

где је:  $V = \det \left[ \frac{1}{N} \sum_1^N \boldsymbol{\varepsilon}(t, \theta) \boldsymbol{\varepsilon}^T(t, \theta) \right]$ ,  $d$ - број оцењених параметара у моделу,  $N$ - број података дела временске серије за валидацију.

AIC се дефинише као негативна логаритамска функција максималне веродостојности за следеће аргументе: коваријациону матрицу  $\boldsymbol{\Lambda}$  и параметре расподеле  $\boldsymbol{\theta}$ . За Гаусову нормалну расподелу параметри расподеле су  $\boldsymbol{\Lambda}$  и  $\boldsymbol{\theta}$ . Логаритамска функција максималне веродостојности је:

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Lambda}) = -\frac{1}{2} \sum_1^N \boldsymbol{\varepsilon}(t, \theta)^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(t, \theta) - \frac{N}{2} \log(\det \boldsymbol{\Lambda}) + const. \quad (6.7)$$

Максимизирањем претходног аналитичког израза по  $\boldsymbol{\Lambda}$  и  $\boldsymbol{\theta}$  добија се

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Lambda}) = const + \frac{Np}{2} + \frac{N}{2} \log(\det \boldsymbol{\Lambda}), \quad (6.8)$$

$p$  је број излазних сигнала.

AIC се рачуна по следећој формули

$$AIC = \log V + \frac{2d}{N}. \quad (6.9)$$

За оба критеријума важи правило:

*Тачнији је модел код кога су критеријуми FPE и AIC мањи.*

#### **6.4 СЛЕГАЊЕ ОБЈЕКТА- ПРИМЕР 1.**

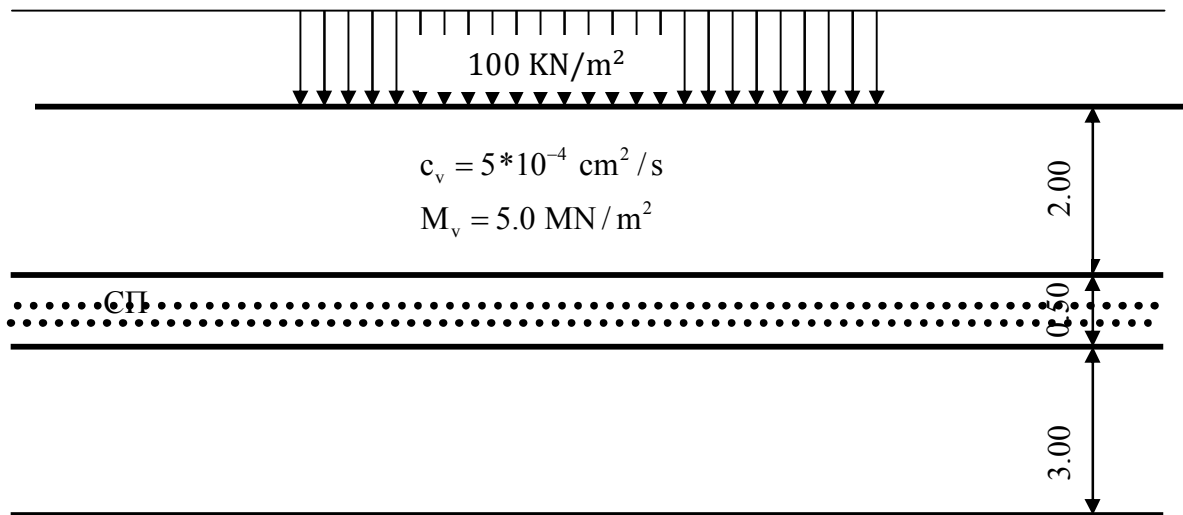
За пример слегања објекта узет је задатак 4.7 из Збирке задатака из основа механике тла [Максимовић, Сантрач, 2001.]. Задатак из збирке је узет из разлога што може да се симулира већи број епоха мерења, жеље аутора рада да се из геодетских мерења одреде физички параметри терена, као и направи се предлог одређивања временског плана опажања. У пракси геодете нису упознате са овим параметрима и период одабирања (временски план опажања) није константан. Константност периода одабирања код временских серија се подразумева. Када овај услов није испуњен могуће је интерполовати податке, али само за један тренутак опажања. На основу прорачунатог слегања, цео поступак прорачуна је приказан у раду, симулирана су геодетска опажања. Претпостављено је да је слегање равномерно и да у току периода опажања на објекат не делују поремећаји.

##### ***Прорачун слегања објекта***

Симулирање слегања терена је урађено по формулама за слегање површине терена услед консолидације слојева глине на сваких 30 дана у току две године.

##### **ПОСТАВКА ПРОБЛЕМА – ЗАДАТАК:**

*На широку површину нането је за кратко време оптерећење од  $0.1 \text{ MN/m}^2$ . Профил терена је средње пластична глина дебљине 5.5 m коју хоризонтално пресеца слој песка (СП) дебљине 0.5 m. Испод глине је нестишљива и водонепропусна подлога. Модул стишљивости глине износи  $5.0 \text{ MN/m}^2$ , коефицијент консолидације је  $5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$ . На слици 6.2 дат је профил терна.*



Слика 6.2: Профил терена

### РЕШЕЊЕ ГЕОМЕХАНИЧКОГ ПРОБЛЕМА:

- Укупна консолидација горњег ( $s_{c1}$ ) и доњег ( $s_{c2}$ ) слоја глине износи:

$$s_{c1} = \frac{\Delta\sigma'_z}{M_v} H_1 = \frac{0.1 \text{ MN/m}^2}{5.0 \text{ MN/m}^2} * 2.0 \text{ m} = 0.04 \text{ m},$$

$$s_{c2} = \frac{\Delta\sigma'_z}{M_v} H_2 = \frac{0.1 \text{ MN/m}^2}{5.0 \text{ MN/m}^2} * 3.0 \text{ m} = 0.06 \text{ m}.$$

Горњи слој се може дренирати двострано, а доњи слој само једнострано преко горње површине. Висине слојева за дренирање су:

$$H_{d1} = \frac{H_1}{2} = 1.0 \text{ m}, \quad H_{d2} = H_2 = 3.0 \text{ m}.$$

- За дато време ( $t$ ) у годинама временски фактор за слој (1) и (2) износи:

$$T_{v1} = \frac{c_v}{H_{d1}^2} t = \frac{5 * 10^{-4} \left[ \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \right] * (3600 * 24 * 365) [\text{s}]}{(100 \text{ cm})^2} t = 1.5768t,$$

$$T_{v2} = \frac{c_v}{H_{d2}^2} t = \frac{5 * 10^{-4} \left[ \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \right] * (3600 * 24 * 365) [\text{s}]}{(300 \text{ cm})^2} t = 0.1752t.$$

- Просечан степен консолидације слоја (1) и (2) износи:

$$\text{за } T_v \leq 0.287 \Rightarrow U = 2\sqrt{\frac{T_v}{\pi}},$$

$$\text{за } T_v > 0.287 \Rightarrow U = 1 - 10^{-(T_v + 0.085)/0.933}.$$

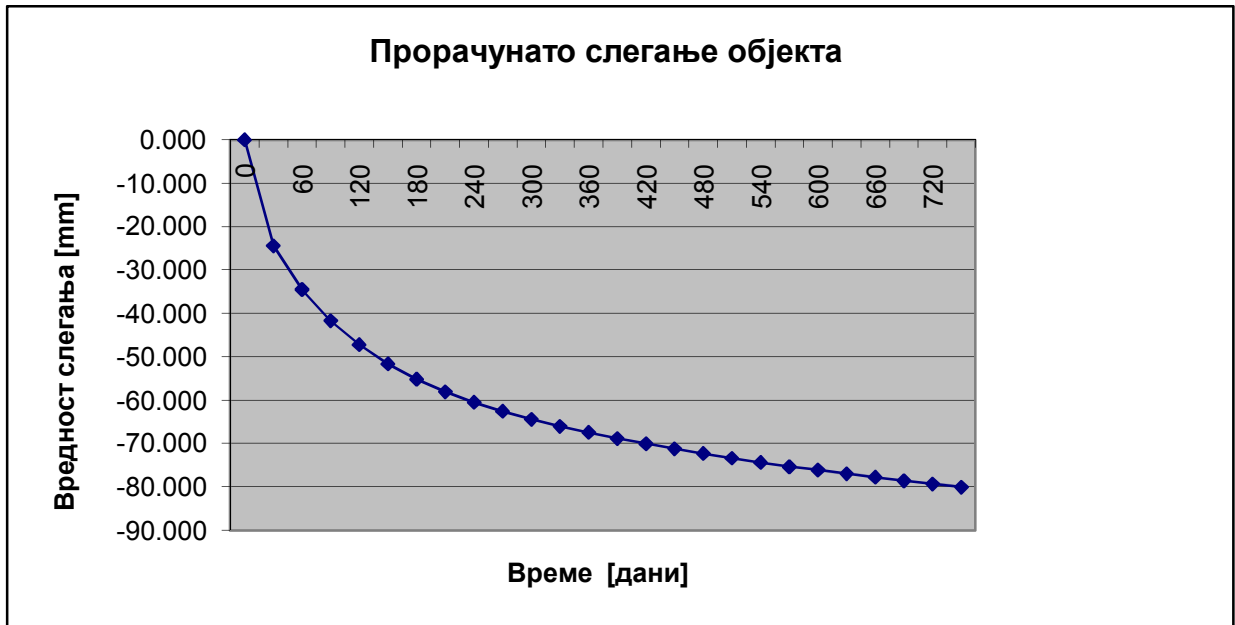
- Просечан степен консолидације оба слоја заједно је једнак општој аритметичкој средини просечног степена консолидације слоја (1) и (2):

$$U = \frac{U_1 s_{c1} + U_2 s_{c2}}{s_{c1} + s_{c2}}.$$

Консолидационо слегање у функцији од времена ( $t$ ) је:  $s_c(t) = (s_{c1} + s_{c2})U(t)$ .

t(godina)	t(dani)	Tv1	Tv2	U1	U2	U	Sc(t)[mm]
0.00	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.08	30	0.130	0.014	0.406	0.135	0.244	-24.373
0.16	60	0.259	0.029	0.574	0.191	0.345	-34.469
0.25	90	0.389	0.043	0.689	0.235	0.416	-41.648
0.33	120	0.518	0.058	0.774	0.271	0.472	-47.226
0.41	150	0.648	0.072	0.836	0.303	0.516	-51.614
0.49	180	0.778	0.086	0.881	0.332	0.551	-55.141
0.58	210	0.907	0.101	0.914	0.358	0.580	-58.039
0.66	240	1.037	0.115	0.937	0.383	0.605	-60.469
0.74	270	1.166	0.130	0.954	0.406	0.625	-62.550
0.82	300	1.296	0.144	0.967	0.428	0.644	-64.367
0.90	330	1.426	0.158	0.976	0.449	0.660	-65.984
0.99	360	1.555	0.173	0.983	0.469	0.674	-67.445
1.07	390	1.685	0.187	0.987	0.488	0.688	-68.786
1.15	420	1.814	0.202	0.991	0.507	0.700	-70.030
1.23	450	1.944	0.216	0.993	0.524	0.712	-71.198
1.32	480	2.074	0.230	0.995	0.542	0.723	-72.303
1.40	510	2.203	0.245	0.996	0.558	0.734	-73.356
1.48	540	2.333	0.259	0.997	0.574	0.744	-74.366
1.56	570	2.462	0.274	0.998	0.590	0.753	-75.339
1.64	600	2.592	0.288	0.999	0.602	0.761	-76.077
1.73	630	2.722	0.302	0.999	0.616	0.769	-76.925
1.81	660	2.851	0.317	0.999	0.629	0.777	-77.740
1.89	690	2.981	0.331	0.999	0.642	0.785	-78.524
1.97	720	3.110	0.346	1.000	0.655	0.793	-79.279
2.05	750	3.240	0.360	1.000	0.667	0.800	-80.006





Слика 6.3: График прорачунатог слегања

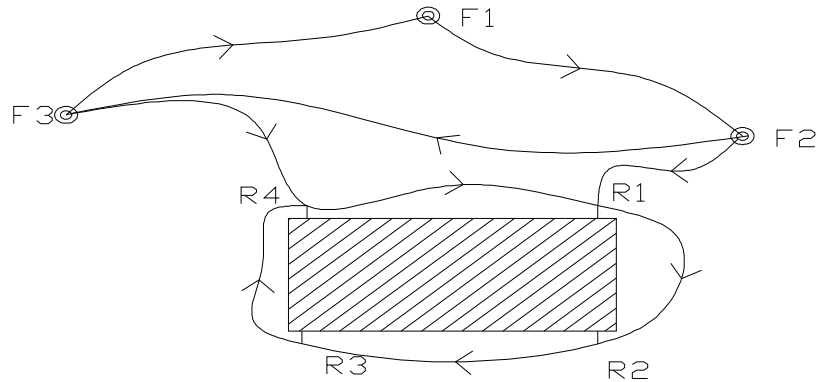
**Контролна мрежа објекта са симулираним мерењима**

Прати се слегање четири репера на објекту са ознакама: R1, R2, R3, R4. На стабилном терену изван зоне утицаја објекта стабилована су три репера: F1, F2, F3. Приближне висине репера и план опажања су дати у табели 6.1.

Табела 6.1: Приближне висине и план опажања

Приближне висине		План опажања		
Бр. репера	$H$ [m]	Од	До	Број станица
F1	100.00	F1	F2	2
F2	101.30	F2	F3	4
F3	101.20	F3	F1	2
R1	101.80	F2	R1	4
R2	101.90	R1	R2	2
R3	102.00	R2	R3	2
R4	102.15	R3	R4	2
		R4	R1	2
		R4	R3	4

Тачност мерења висинске разлике на станици је 1 mm . На слици 6.4 дата је скица контролне мреже, а у табели 6.2 симулирани резултати мерења.



Слика 6.4: Скица контролне мреже

Табела 6.2: Висинске разлике добијене симулирањем мерења

Тренугак опажања [дани]	Висинска разлика [m]								
	F1-F2	F2-F3	F3-F1	F2-R1	R1-R2	R2-R3	R3-R4	R4-R1	R4-F3
0	1.2998	-0.1010	-1.1999	0.5002	0.0995	0.1005	0.1505	-0.3500	-0.9498
30	1.3001	-0.1001	-1.1997	0.4753	0.1009	0.0999	0.1500	-0.3495	-0.9256
60	1.3000	-0.1005	-1.1999	0.4647	0.1003	0.1007	0.1497	-0.3496	-0.9148
90	1.2993	-0.1009	-1.1998	0.4581	0.1003	0.1003	0.1503	-0.3495	-0.9080
120	1.3005	-0.1007	-1.2000	0.4527	0.0993	0.1001	0.1496	-0.3494	-0.9033
150	1.3002	-0.0999	-1.2004	0.4471	0.1000	0.0996	0.1503	-0.3498	-0.8974
180	1.3003	-0.1004	-1.1998	0.4443	0.1000	0.1000	0.1500	-0.3501	-0.8942
210	1.2992	-0.0997	-1.1996	0.4424	0.1002	0.1000	0.1503	-0.3498	-0.8921
240	1.2998	-0.1002	-1.2006	0.4394	0.1001	0.1001	0.1506	-0.3501	-0.8892
270	1.3003	-0.0994	-1.2004	0.4376	0.1001	0.0996	0.1497	-0.3495	-0.8875
300	1.3002	-0.0999	-1.2003	0.4353	0.1002	0.0996	0.1503	-0.3498	-0.8861
330	1.2999	-0.1007	-1.2009	0.4346	0.0998	0.1001	0.1501	-0.3500	-0.8846
360	1.2996	-0.1002	-1.2005	0.4319	0.1006	0.1000	0.1495	-0.3500	-0.8832
390	1.2994	-0.1002	-1.1996	0.4313	0.1003	0.0995	0.1498	-0.3501	-0.8819
420	1.2994	-0.0994	-1.2000	0.4296	0.1003	0.1001	0.1496	-0.3494	-0.8798
450	1.3006	-0.0993	-1.2003	0.4280	0.1000	0.0999	0.1496	-0.3498	-0.8779
480	1.2998	-0.1005	-1.2001	0.4281	0.0996	0.0995	0.1499	-0.3500	-0.8774
510	1.2997	-0.1001	-1.2002	0.4266	0.1007	0.0997	0.1494	-0.3498	-0.8772
540	1.3000	-0.1004	-1.1998	0.4260	0.0999	0.0991	0.1501	-0.3493	-0.8750
570	1.2993	-0.1000	-1.2003	0.4240	0.0995	0.1001	0.1498	-0.3500	-0.8749
600	1.2998	-0.0998	-1.1997	0.4252	0.0994	0.0996	0.1504	-0.3502	-0.8748
630	1.3001	-0.0991	-1.1997	0.4242	0.1002	0.1008	0.1499	-0.3505	-0.8732
660	1.3005	-0.1007	-1.1997	0.4219	0.1002	0.0995	0.1500	-0.3509	-0.8726
690	1.3002	-0.1002	-1.1995	0.4211	0.0990	0.0995	0.1504	-0.3500	-0.8712
720	1.3004	-0.1013	-1.2003	0.4203	0.0996	0.0999	0.1506	-0.3500	-0.8700
750	1.2997	-0.1000	-1.2003	0.4203	0.0999	0.1002	0.1503	-0.3500	-0.8695

У овом примеру динамички систем се састоји од следећих компоненти:

1. улазни сигнали – просечан степен консолидације оба слоја  $U$  за сваку карактеристичну тачку на објекту (четири) која припада одскочној функцији,
2. конструкција
3. излазни сигнали- мерене висинске разлике (девет висинских разлика).

На основу напред наведеног систем припада групи отворених SIMO систем (потпоглавље 2.1).

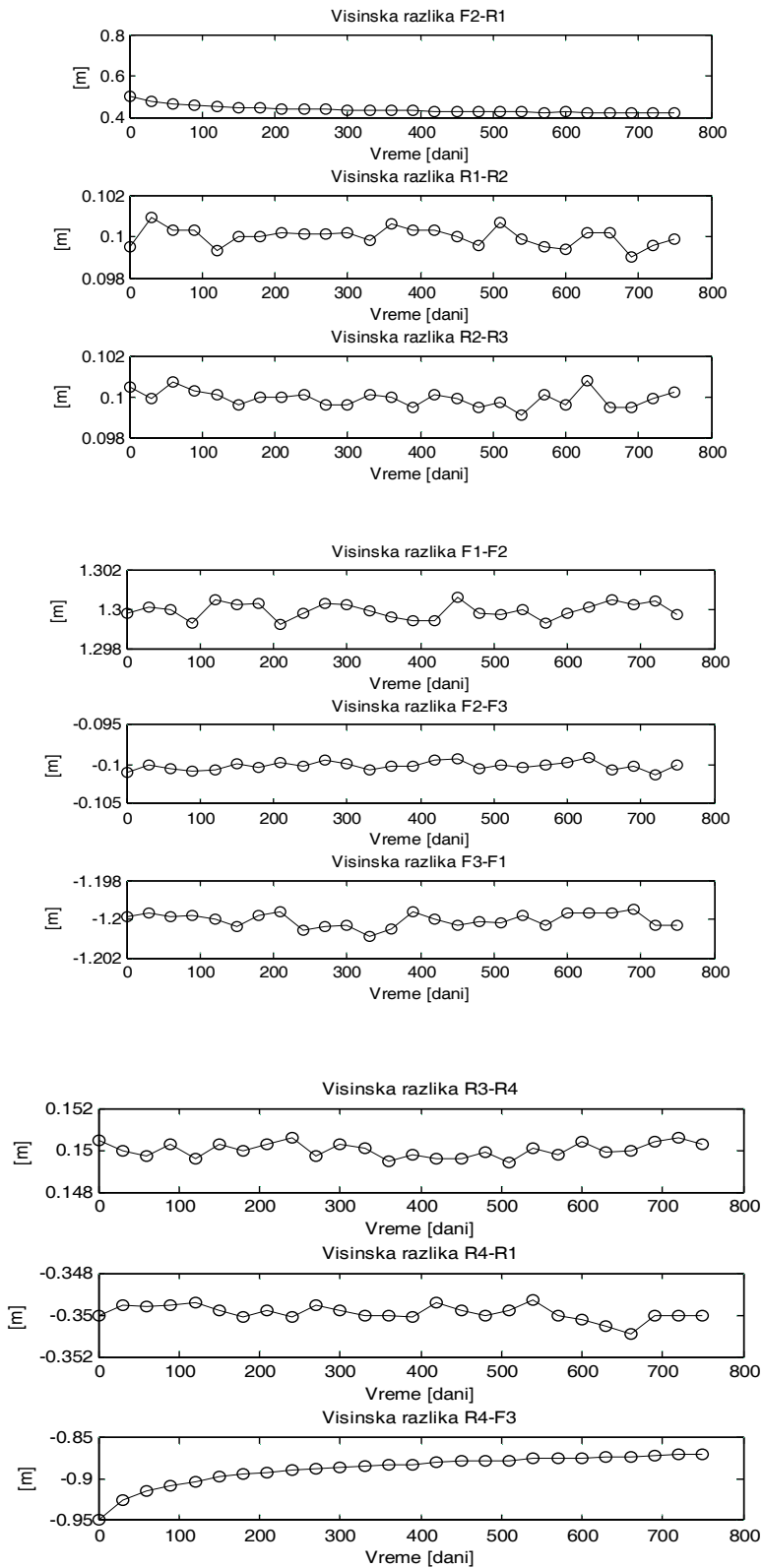
#### **6.4.1 Анализа података временских серија- пример 1.**

Као што је у поглављу 3 наведено процедура анализе података састоји се од следећих корака:

1. графичке представе података да би се закључило о реду система,
2. детрендовање података и провера стационарности или слабе стационарности детрендованих података серија,
3. анализа аутокорелације, парцијалне корелације и међусобне корелације да би се деонео закључак о степену модела,
4. избор врсте модела и структуре модела,
5. оцена параметара модела и
6. валидација модела.

#### ***Графичка представа података***

Графичка представа резултата мерења висинских разлика је дата на слици 6.5.



Слика 6.5: Графичка представа мерених висинских разлика

На основу графика мерених података може се закључити да:

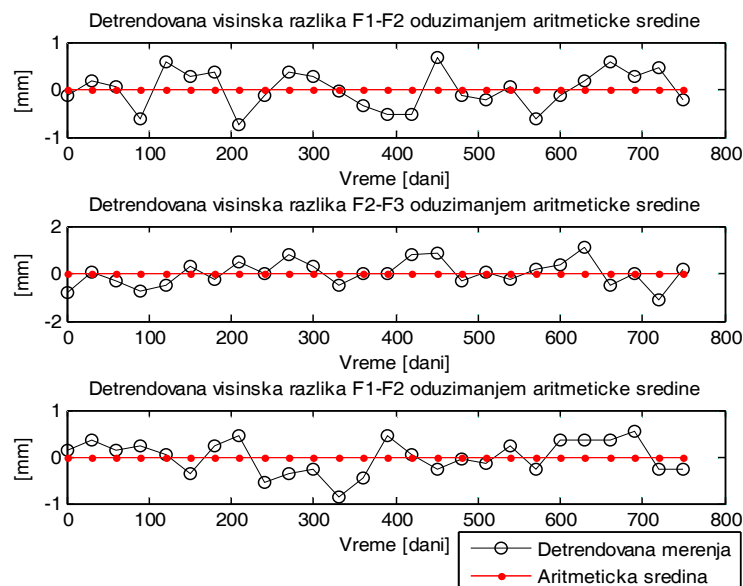
1. да временска серије висинских разлике F2-R1 и R4-F3 припадају систему првог реда,
2. улазни сигнали – просечан степен консолидације припада систему првог реда,
3. остале временске серије (висинске разлике између стабилних тачака и једнако понашајућих тачака) припадају тзв. процесу случајног корака.

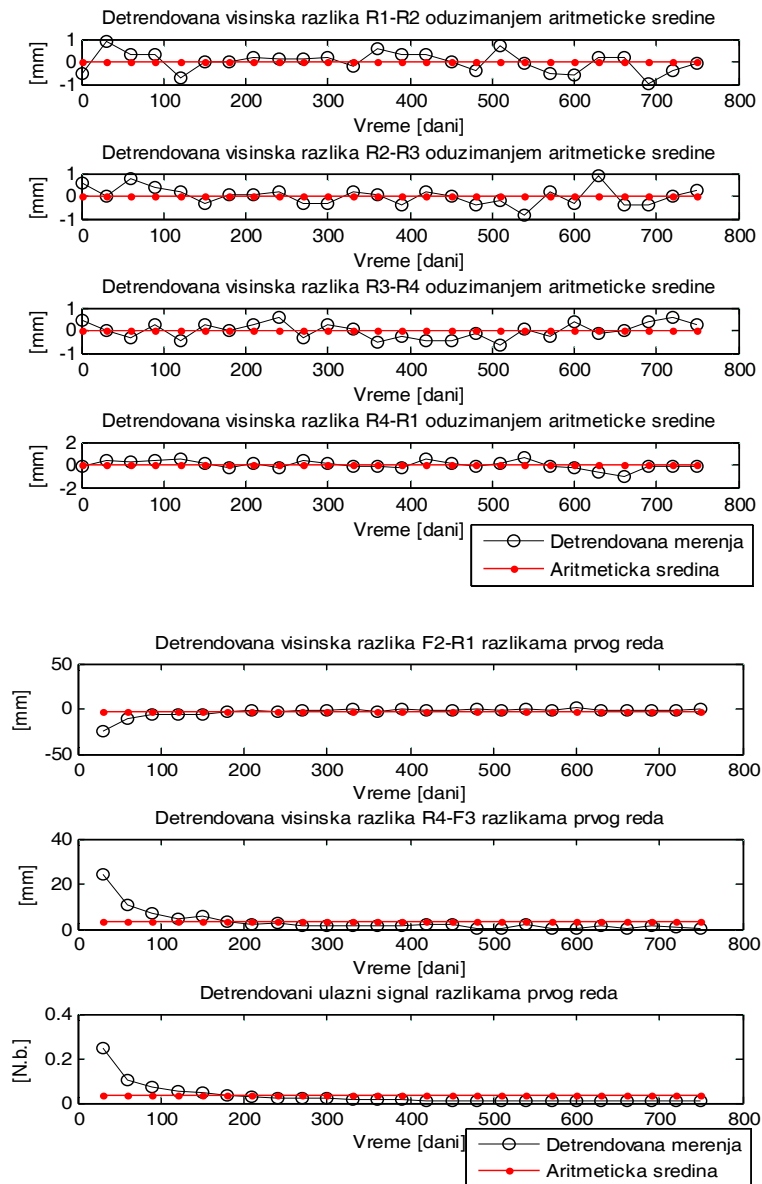
### *Детрендовање података и провера стационарности*

На основу графика јасно је да се висинске разлике између стабилних тачака и једнако понашајућих тачака (F1-F2, F2-F3, F3-F1, R1-R2, R2-R3, R3-R4 и R4-R1) детрендују одузимањем аритметичке средине, а F2-R1 и R4-F3 због тога што припадају систему првог реда морају се детрендовати апроксимацијом функцијом. Приликом обраде података примењено је детреновање: разликама првог реда и апроксимација функцијом. Ово је уређено да би се проверило колике се разлике у оценама параметара добијају ако процес није стационаран или слабо стационаран, и да би се указало на сложеност поступка анализе временске серије.

#### *1. Детрендовање висинских разлика F2-R1 и R4-F3 разликама првог реда (поступак 1)*

Графички приказ детрендованих временских серија дат је на слици 6.6.





Слика 6.6: Графичка представа детрендованих висинских разлика и просечног степена консолидације (пример 1 - поступак 1.)

Тест значајности детрендовања урађен је по формули (3.65) и добијени су следећи резултати (Табела 6.3):

Табела 6.3: Тест значајности детрендовања висинских разлика (пример 1 - поступак 1.)

Од	До	$R^2$
F1	F2	0.00
F2	F3	0.00
F3	F1	0.00
F2	R1	0.93
R1	R2	0.00
R2	R3	0.00
R3	R4	0.00
R4	R1	0.00
R4	F3	0.93

На основу коефицијента значајности детрендовања може се закључити да висинске разлике између стабилних тачака и једнако понашајућих тачака није потребно детрендовати и то је учињено само што су детрендоване вредности мање, блиске нули, односно да би систем приликом оцењивања био стабилнији. За висинске разлике F2-R1 и R4-F3 коефицијент је близак јединици, па је детрендовање значајно.

Провера слабе стационарности временских серија уређена је дељењем временских серија у два подскупа од 1 до 13 мерења и од 14 до 26 мерења. Прво је проверена једнакост парцијалних аутокорељационих коефицијената ових подскупова за корак 1 по формули (3.69) (Табела 6.4).

Табела 6.4: Тест стационарности парцијалне аутокорељације висинских разлика (пример 1- поступак 1.)

Од	До	$r_1$	$r_2$	$z_1$	$z_2$	$\hat{\sigma}_{z_1}$	$\hat{\sigma}_{z_2}$	$t$
F1	F2	-0.168	0.0637	-0.1696	0.0638	0.3162	0.3162	0.5217
F2	F3	0.0774	-0.0178	0.0775	-0.0178	0.3162	0.3162	0.2133
F3	F1	0.3992	0.125	0.4227	0.1257	0.3162	0.3162	0.6641
F2	R1	0.3936	-0.3581	0.4161	-0.3747	0.3162	0.3333	1.7212
R1	R2	-0.2815	0.0258	-0.2894	0.0258	0.3162	0.3162	0.7048
R2	R3	0.1204	-0.3115	0.121	-0.3222	0.3162	0.3162	0.991
R3	R4	-0.4207	0.3864	-0.4486	0.4076	0.3162	0.3162	1.9145
R4	R1	0.1539	0.3676	0.1552	0.3857	0.3162	0.3162	0.5155
R4	F3	0.421	-0.1803	0.4489	-0.1823	0.3162	0.3333	1.3736

Пошто су све вредности теста нулте хипотезе  $t$ , тест једнакости средњих вредности, мање од квантила Студентове расподеле  $t_{0.95} = 1.96$  закључује се да не постоји промена аутокорељације унутар серије.

Провера стационарности дисперзије и средње вредности временске серије урађена је тестирањем хипотезе о хомогености мерења и једнакости средњих вредности подсерија. Поступци тестирања ове две хипотезе су добро познати и због тога није приказан поступак тестирања (детаљан приказ се може наћи у Перовић,1989). У табели 6.5 приказани су тестови хомогености и једнакости средњих вредности подсерија.

Табела 6.5: Тест стационарности дисперзија и средњих вредности подсерија (пример 1- поступак 1.)

Од	До	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	F- тест	$F_{0.95}(f_1, f_2)$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	t- тест	f	$t_{0.97}(f)$
F1	F2	0.3927	0.4279	1.1870	2.6866	0.0115	-0.0115	0.1433	24.0000	2.0639
F2	F3	0.4799	0.5988	1.5573	2.6866	-0.1000	0.1000	0.9397	24.0000	2.0639
F3	F1	0.4011	0.3042	1.7382	2.6866	-0.0885	0.0885	1.2671	24.0000	2.0639
<b>F2</b>	<b>R1</b>	<b>6.5090</b>	<b>0.9998</b>	<b>42.3795</b>	<b>2.7876</b>	<b>-5.3000</b>	<b>-0.9167</b>	<b>2.3976</b>	<b>12.6124</b>	<b>2.0175</b>
R1	R2	0.4183	0.4609	1.2139	2.6866	0.1038	-0.1038	1.2031	24.0000	2.0639
R2	R3	0.3330	0.4340	1.6983	2.6866	0.1192	-0.1192	1.5718	24.0000	2.0639
R3	R4	0.3545	0.3602	1.0327	2.6866	0.0423	-0.0423	0.6037	24.0000	2.0639
R4	R1	0.2522	0.4123	2.6734	2.6866	0.1115	-0.1115	1.6642	24.0000	2.0639
<b>R4</b>	<b>F3</b>	<b>6.3547</b>	<b>0.7935</b>	<b>64.1291</b>	<b>2.7876</b>	<b>5.2231</b>	<b>1.0333</b>	<b>2.3574</b>	<b>12.4050</b>	<b>1.9977</b>

На основу теста стационарности закључујемо да временске серије висинских разлика F2-R1 и R4-F3 нису стационарни процеси. У литератури се наводи да сви линеарни модели облика функције преноса захтевају стационарност процеса, док модели простора стања се могу применити и на неке нестационарне процесе. Да би се проверило колики је утицај нестационарности процеса на моделирање система, а самим тиме и оцењивање параметара модела у раду је приказан поступак моделирања и за овако детрендоване податке.

### *Анализа аутокорељације, парцијалне корелације и међусобне корелације*

Анализа аутокорељације урађена је на сва три начина који су приказани у потпоглављу 3.4, односно

1. графиком временске серије,
2. графиком подскупова временских серија и
3. аутокорељационом функцијом.

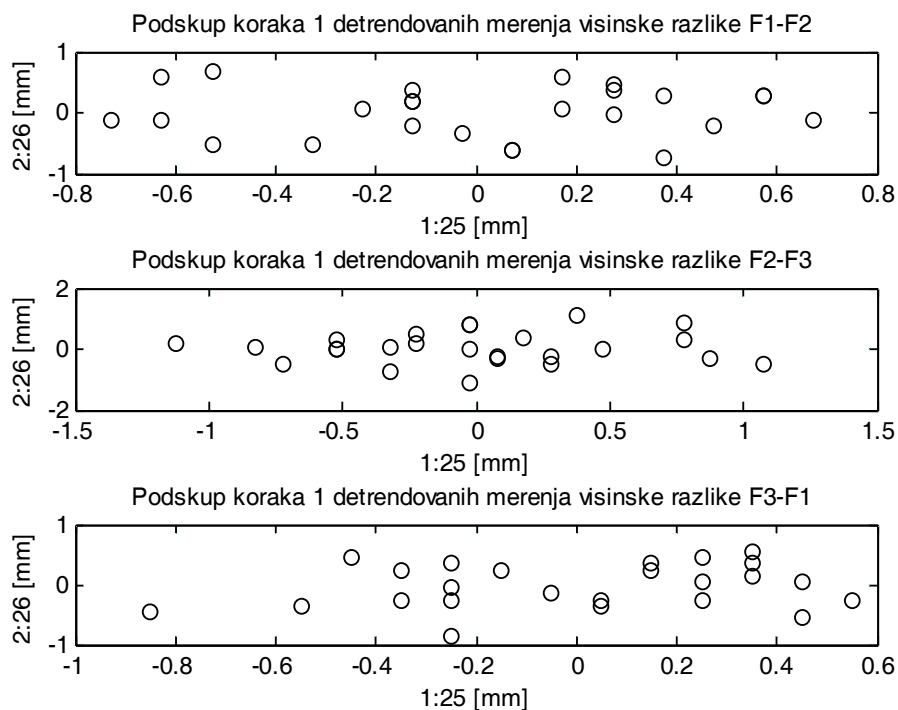


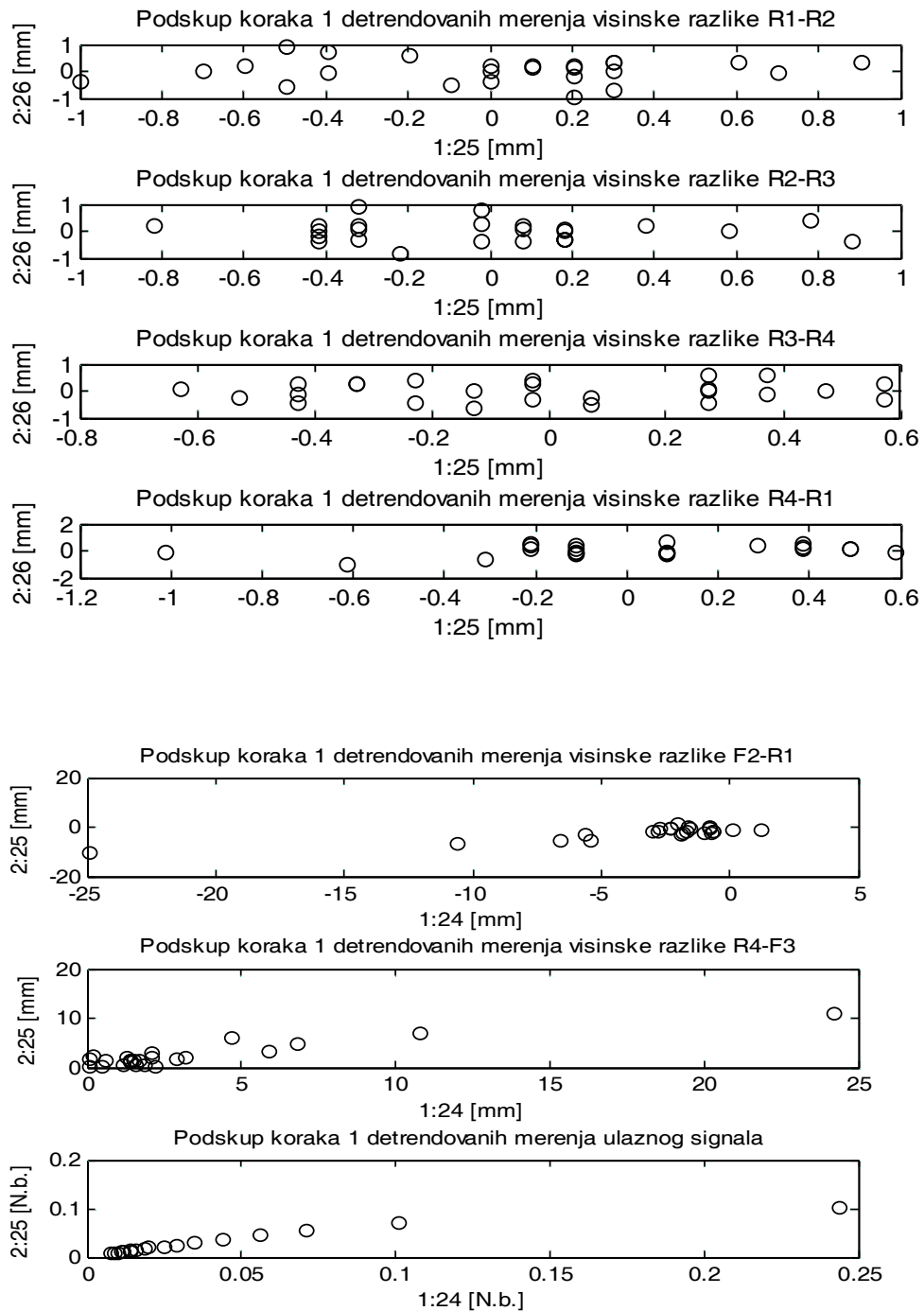
График временске серије

На слици 6.6 приказани су графици временских серија на основу којих се могу донети закључци о постојању аутокорељације и њеном предзнаку. Временске серије детрендованих висинских разлика F2-R1 и R4-F3 имају позитивну аутокорељацију и највероватније је значајна само за корак 1, а код других је она безначајна.

График подскупова временских серија

На основу ових графика могу се донети закључци о постојању аутокорељације, њеном облику (функционалној зависности) и предзнаку и о постојању грубих грешака. У овом примеру анализирани су само подскупови корака 1, јер је из графика временских серија закључило да је значајна аутокорељација највероватније само корака 1 за висинске разлике F2-R1 и R4-F3 (слика 6.7).





Слика 6.7: Графичка представа детрендованих подскупова висинских разлика и улазног сигнала корака 1 (пример 1- поступак 1.)

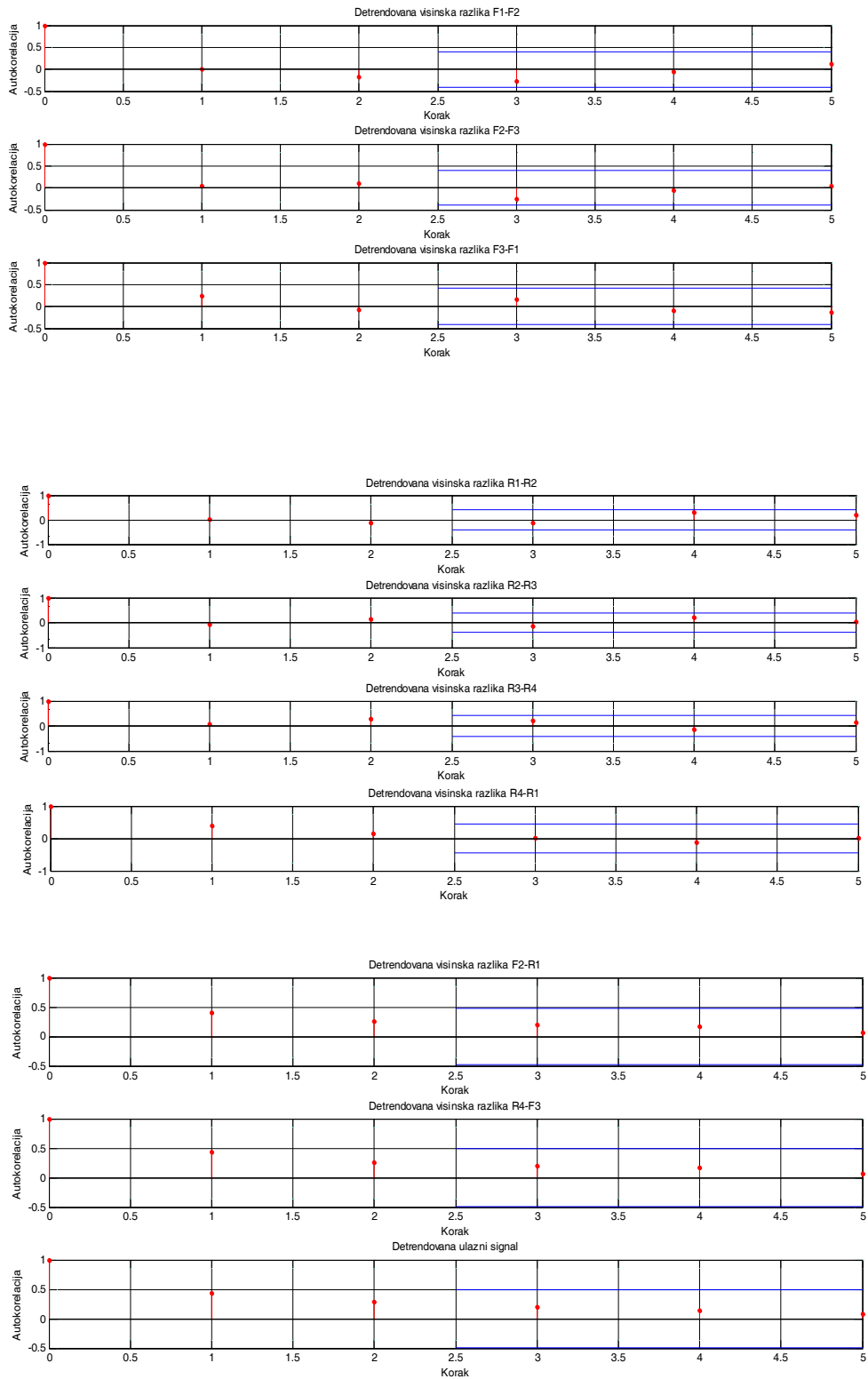
На основу графика детрендованих подскупова корака 1 може се закључити да постоји позитивна аутокорељација за висинске разлике F2-R1, R4-F3 и улазни одскочни сигнал, јер би регресиона права била из левог доњег угла ка десном

горњем углу графика. Такође, може се закључити да постоји линеарна зависност између подскупова. Распоред тачака на осталим графицима је случајан, па не постоји аутокорељација корака 1 између подскупова.

Аутокорељациона функција (корелограм)

Корелограм омогућује да се донесу закључци колико претходних вредности параметра утиче на тренутну вредност параметра (слика 6.8). Недостатак је што коефицијент аутокорељације претпоставља линеарну зависност између подскупова.

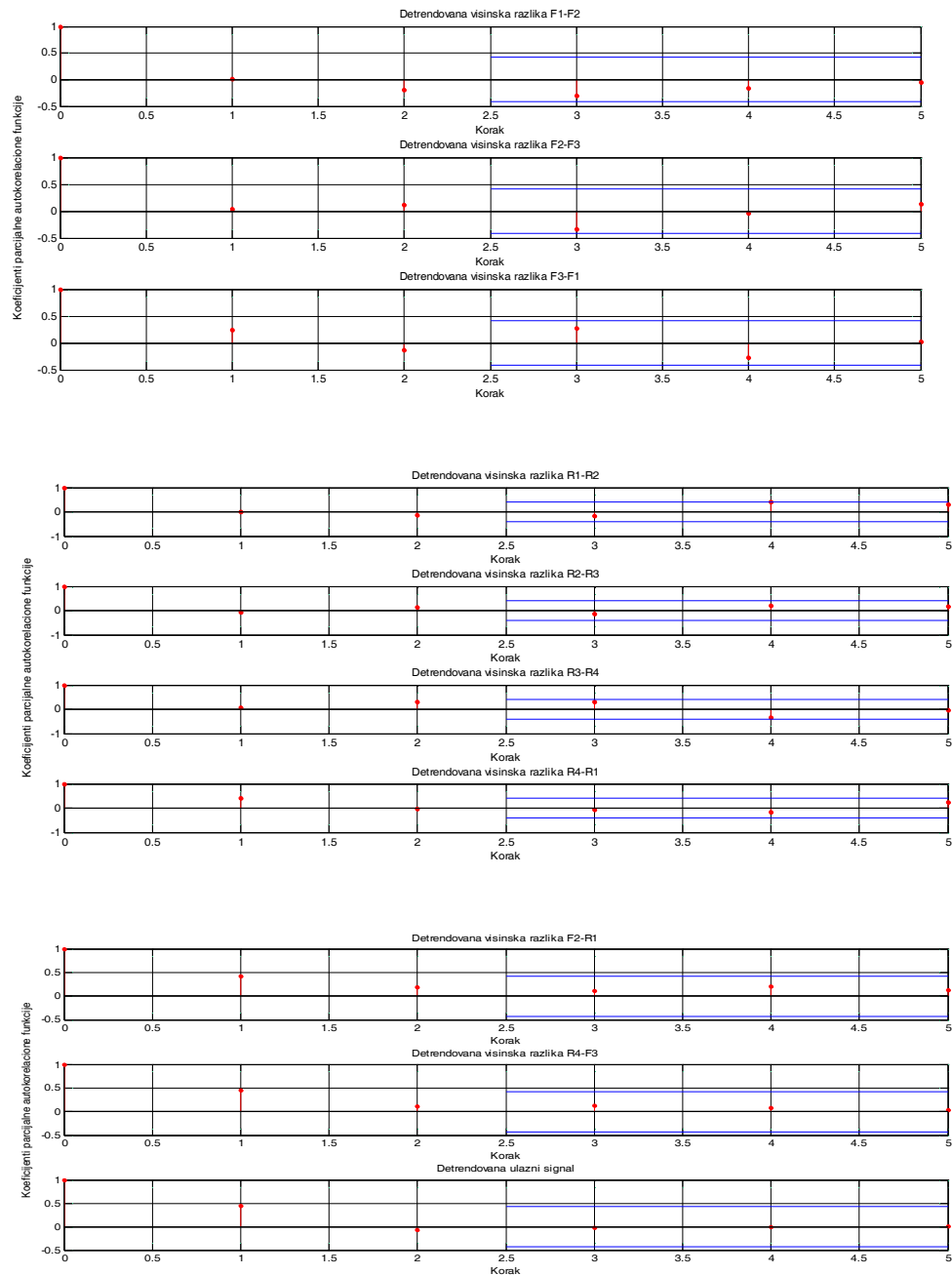
На слици 6.8 приказана је аутокорељациона функције до корака 5, а интервал поверења је за вероватноћу  $p = 0.95$  (на графику интервал поверења је означен континуираном плавом линијом унутар оквира, а вредност аутокорељације за одређен корак је означен тачком). За детрендоване висинске разлике F2-R1, R4-F3 и улазни одскочни сигнал са графика може се закључити да зависност за корак 1 је на граници поверења, а остале вредности аутокорељационог коефицијента су унутар интервала поверења. На основу овога се закључује да у моделима функције преноса – са променљивом средином (МА)  $n_c = 0 \sim 1$  (вредност коефицијента за корак 1 је на граници интервала поверења), а ефективна величина узорка добијена по формули (3.27) за висинске разлике F2-R1 и R4-F3 је 10.



Слика 6.8: Аутокорељациона функција детрендованих висинских разлика и просечног степена консолидације (пример 1- поступак 1.)

Парцијална аутокорељациона функција

На слици 6.9 приказани су графици парцијалне аутокорељационе функције на основу којих се доноси закључак о степену аутокорељационог модела или аутокорељационих делова модела функције преноса.

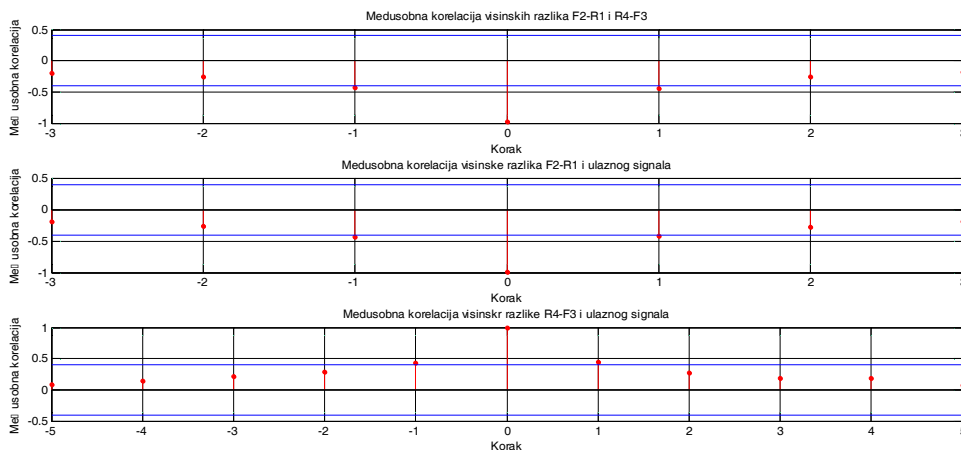


Слика 6.9: Парцијална аутокорељациона функција детрендованих висинских разлика и просечног степена консолидације (пример 1- поступак 1.)

За висинске разлике F2-R1 и R4-F3 степен аутокорелационог дела модела функције преноса је  $n_a = 1$ , јер су за корак 1 вредности коефицијената изван интервала поверења за  $p = 0.95$ , а за остале излазне сигнале  $n_a = 0$ .

### Међусобна корелација

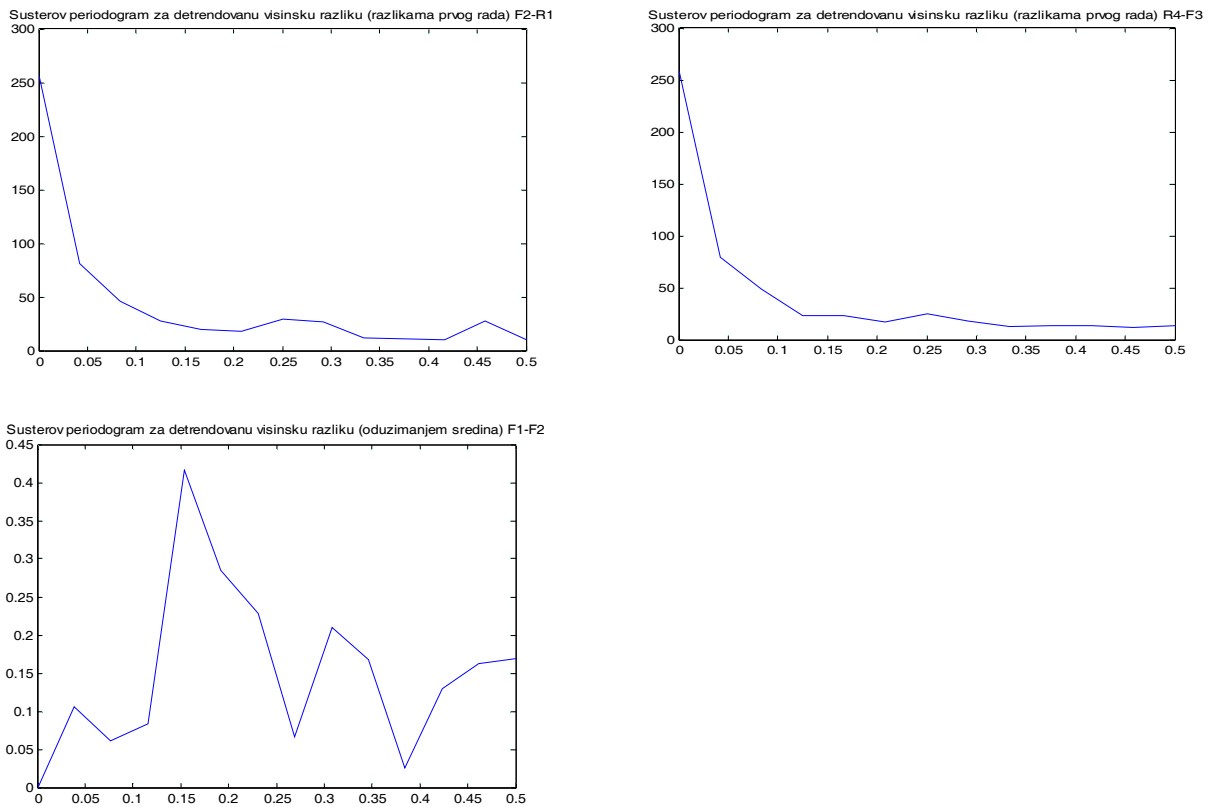
Међусобна корелација нам омогућава да проверимо да ли постоји линеарна зависност између временских серија. Приликом идентификације система најинтересантнија је зависност између улазних и излазних сигнала. Пошто на основу претходно изнесеног за моделирање су интересантне само висинске разлике F2-R1 и R4-F3, а остале се могу описати као случајни корак, анализирана је зависност између њих и просечног степена консолидације (слика 6.10).



Слика 6.10: Међусобна корелација детрендованих висинских разлика F2-R1, R4-F3 и просечног степена консолидације (пример 1- поступак 1.)

На основу анализе вредности коефицијената међусобне корелације које су изван интервала поверења за  $p = 0.95$  закључује се да постоји зависност за исти временски тренутак и корак 1, па је  $n_b = 2$ .

## Анализа висинских разлика у фреквентном домену – Шустеров периодограм



Слика 6.11: Шустеров периодограм за детрендоване висинске разлике F2-R1, R4- F3 и F1-F2 (пример 1- поступак 1.)

На основу графика Шустеровог периодограма могу се донети исти закључци као и на основу анализе у временском домену. Јасно је да прва стандардна фреквенција има доминантан утицај код висинских разлика F2-R1 и R4-F3, док код осталих не постоји ниједна значајна фреквенција. Такође, не постоји ни у једној временској серији периодичност у појави података. У деформационој анализи временске серије су мале величине у статистичком смислу па се изравнати периодограми не могу користити.

### Закључак на основу анализе временских серија

1. Моделирати треба само висинске разлике (временске серије) мерене између стабилних и нестабилних репера F2-R1 и R4-F3. Остале висинске разлике су резултат процеса случајног хода, односно разлике у мерењима

између епоха су последица грешака мерења;

2. Висинске разлике  $F2-R1$  и  $R4-F3$  припадају систему првог реда- дефинисан је модел простора стања;
3. За моделирања висинских разлика  $F2-R1$  и  $R4-F3$  функцијом преноса добијено је:
  - Анализом парцијалне аутокорељације закључено је на тренутну вредност утиче само претходна вредност висинске разлике – ауторегресивни модел  $n_a = 1$ ,
  - Анализом аутокорељације закључено да на тренутну грешку мерења може да утиче предходна грешка, јер је на граници интервала поверења- модел са променљивом средином  $n_c = 0 \sim 1$ ,
  - Анализом међусобне корелације закључено је да на тренутну вредност висинске разлике утиче тренутна и претходна вредност улазног сигнала  $n_b = 2$ ;
4. Не постоји периодични утицај.
5. Не постоји зависност између мерених висинских разлика, па се због тога могу моделирати посебно.

2. Детрендовање висинских разлика  $F2-R1$  и  $R4-F3$  апроксимацијом функције (пример1- поступак 2.)<sup>1</sup>

Пошто приказани поступак детрендовања висинских разлика  $F2-R1$  и  $R4-F3$  није обезбедио стационарност процеса морало се приступити другачијем поступку детрендовања. Аутор је покушао да детрендовање изврши разликама другог реда, али се не добија стационаран процес; она је обезбеђена када се разлике првог реда апроксимирају функцијом. Облик функције, која најбоље апроксимира разлике првог реда, је

$$w^1(t_i) = d - fe^{-kt_i}. \quad (6.10)$$

<sup>1</sup> У наставку су приказане само информације о детрендовању за висинске разлике  $F2-R1$ ,  $R4-F3$  и улазни сигнал, а за остале временске серије поступак детрендовања је као у поступку 1.

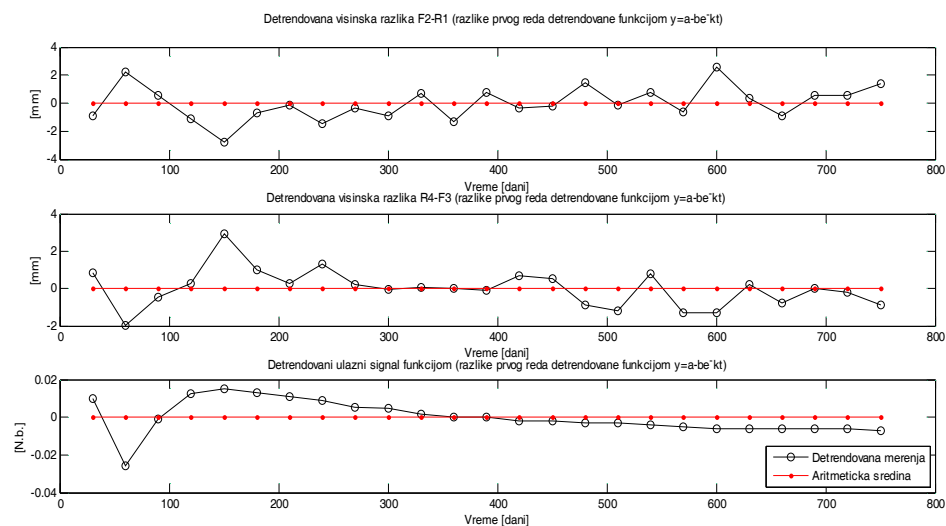


Оцењене вредности параметара функције са оценом априорног стандардног одступања дате су у табели 6.6.

Табела 6.6: Оцене параметара и априорног стандардног одступања апроксимирајућих кривих (пример 1- поступак 2.)

Сигнал	$\hat{a}$ [mm]	$\hat{f}$ [mm]	$\hat{k}$	$\hat{\sigma}_0$
F2-R1	-1.3644	44.7896	8.2990	1.2253
R4-F3	1.3896	-42.4219	8.0062	1.0362
Консолидација-Улазни сигнал	0.0139	-0.4293	8.1265	0.0090

Графички приказ детрендованих временских серија дат је на слици 6.12.



Слика 6.12: Графичка представа детрендованих висинских разлика и просечног степена консолидације (пример 1- поступак 2.)

Тест значајности детрендовања урађен је по формули (3.65) и добијени су следећи резултати (Табела 6.7):

Табела 6.7: Тест значајности детрендовања висинских разлика (пример 1- поступак 2.)

Од	До	$R^2$
F2	R1	0.996
R4	F3	0.997

За висинске разлике F2-R1 и R4-F3 коефицијент је близак јединици, и значајно је већи у односу на детрендовање разликама првог реда (поступак 1.)

Провера слабе стационарности временских серија уређена је дељењем временских серија у два подскупа од 1 до 13 мерења и од 14 до 26 мерења. Прво је

проверена једнакост парцијалних аутокорелационих коефицијената ових подскупова за корак 1 по формули (3.69) (Табела 6.8).

Табела 6.8: Тест стационарности парцијалне аутокорелације висинских разлика (пример 1- поступак 2.)

Од	До	$r_1$	$r_2$	$z_1$	$z_2$	$\hat{\sigma}_{z_1}$	$\hat{\sigma}_{z_2}$	$t$
F2	R1	-0.0073	-0.3586	-0.0073	-0.3752	0.3162	0.3333	0.8008
R4	F3	0.1688	-0.1813	0.1705	-0.1834	0.3162	0.3333	0.7701

Пошто су све вредности теста нулте хипотезе  $t$ , тест једнакости средњих вредности, мање од квантила Студентове расподеле  $t_{0.95} = 1.96$  закључује се да не постоји промена аутокорелације унутар серије.

Провера стационарности дисперзије и средње вредности временске серије урађена је тестирањем хипотезе о хомогености мерења и једнакости средњих вредности подсерија. У табели 6.9 приказани су тестови хомогености и једнакости средњих вредности подсерија.

Табела 6.9: Тест стационарности дисперзија и средњих вредности подсерија (пример 1- поступак 2.)

Од	До	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	F-тест	$F_{0.95}(f_1, f_2)$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	t-тест	$f$	$t_{0.97}(f)$
F2	R1	1.2550	0.9996	1.5763	2.7876	-0.4138	0.4483	1.8891	24	2.0639
R4	F3	1.1120	0.7929	1.9669	2.7876	0.3295	-0.357	1.7633	24	2.0639

На основу теста стационарности закључујемо да временске серије висинских разлика F2-R1 и R4-F3 јесу стационарни процеси.

### *Анализа аутокорелације, парцијалне корелације и међусобне корелације*

Анализа аутокорелације урађена је на сва три начина који су приказани у потпоглављу 3.4, односно

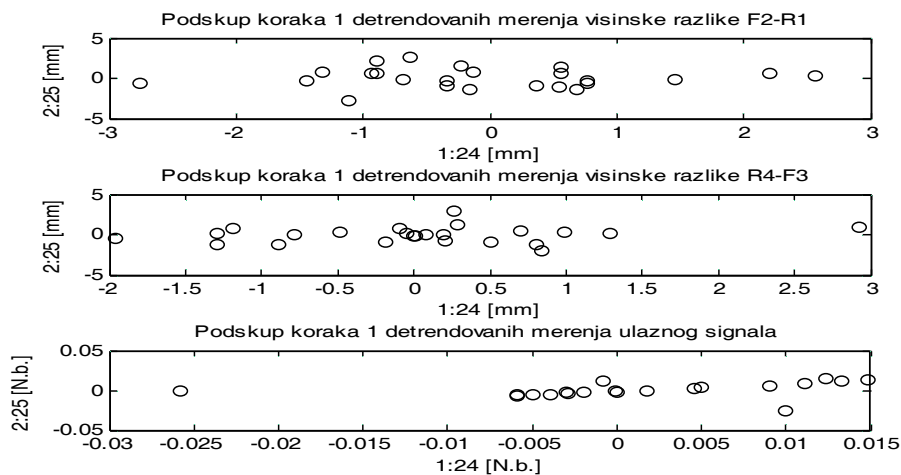
1. графиком временске серије,
2. графиком подскупова временских серија и
3. аутокорелационом функцијом.

График временске серије

На слици 6.12 приказани су графици временских серија на основу којих се могу донети закључци о постојању аутокорељације и њеном предзнаку. Временске серије детрендованих висинских разлика F2-R1 и R4-F3 имају позитивну аутокорељацију за корак 1, али је она највероватније безначајна.

График подскупова временских серија

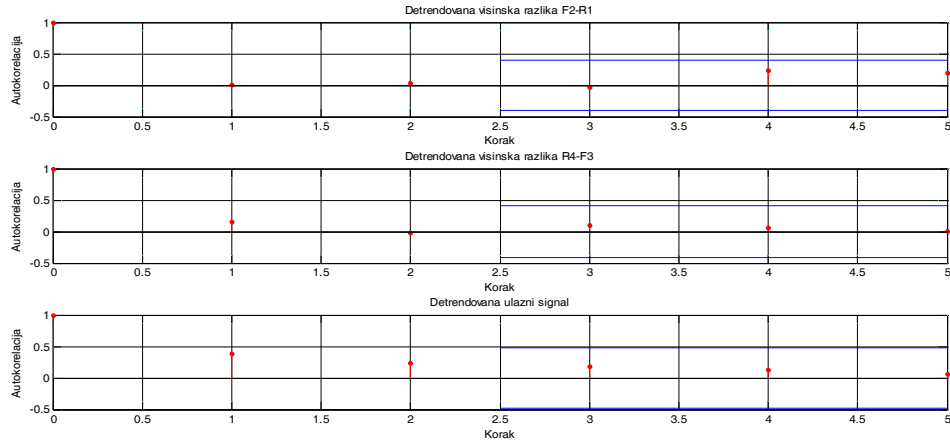
График подскупова временских серија приказан је на слици 6.13. На основу графика могу се донети закључци о: постојању грубих грешака, облику функционалне зависности и предзнаку аутокорељационог коефицијента. Јасно је да не постоје грубе грешке јер су сви парови мерења корака 1 сконцентрисани око хоризонталне праве која пролази кроз нулу дијаграма. Распоред тачака на дијаграму је случајан, па се закључује да не постоји функционална зависност. Познато је да ако се кроз тачке дијаграма може „провући“ регресиона права из левог доњег угла дијаграма ка десном горњем онда постоји позитивна аутокорељација, а ако се права простире из десног доњег ка левог горњем онда постоји негативна аутокорељација. Пошто је права којом се врши апроксимација подскупова корака 1 хоризонтална не може се одредити предзнак аутокорељације, односно не постоји.



Слика 6.13: Графичка представа детрендованих подскупова висинских разлика и улазног сигнала корака 1 (пример 1- поступак 2.)

Аутокорелациона функција (корелограм)

Корелограм је приказан на слици 6.14.

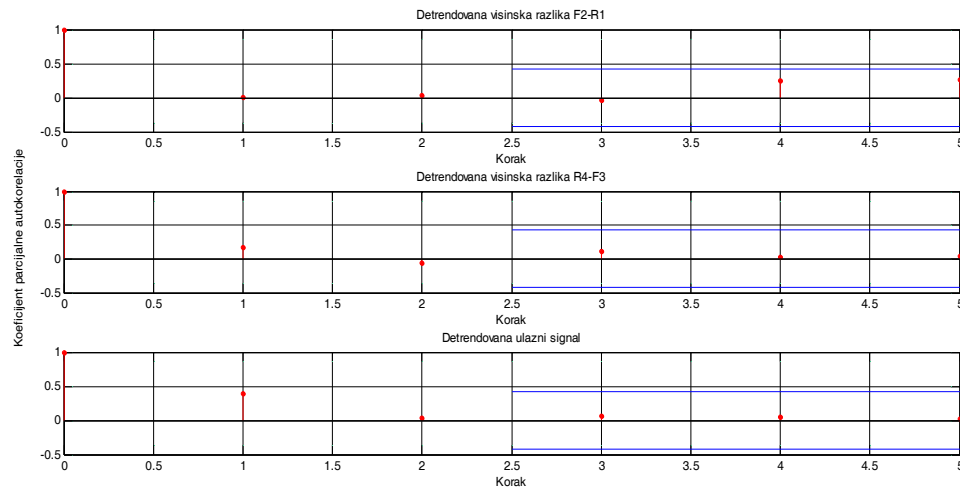


Слика 6.14: Аутокорелациона функција детрендованих висинских разлика и просечног степена консолидације (пример 1- поступак 1.)

На слици 6.14 приказана је аутокорелациона функција до корака 5, а интервал поверења је за вероватноћу  $p = 0.95$ . За детрендоване висинске разлике F2-R1, R4-F3 и улазни одскочни сигнал са графика може се закључити да тренутну вредност сигнала не утичу вредности претходних сигнала. На основу овога се закључује да у моделима функције преноса – са променљивом средином (МА)  $n_c = 0$ , а ефективна величина узорка добијена по формули (3.27) за висинску разлику F2-R1 је 25 и за R4-F3 је 18.

Парцијална аутокорелациона функција

На слици 6.15 приказани су графици парцијалне аутокорелационе функције на основу којих се доноси закључак о степену аутокорелационог модела или аутокорелационих делова модела функције преноса.

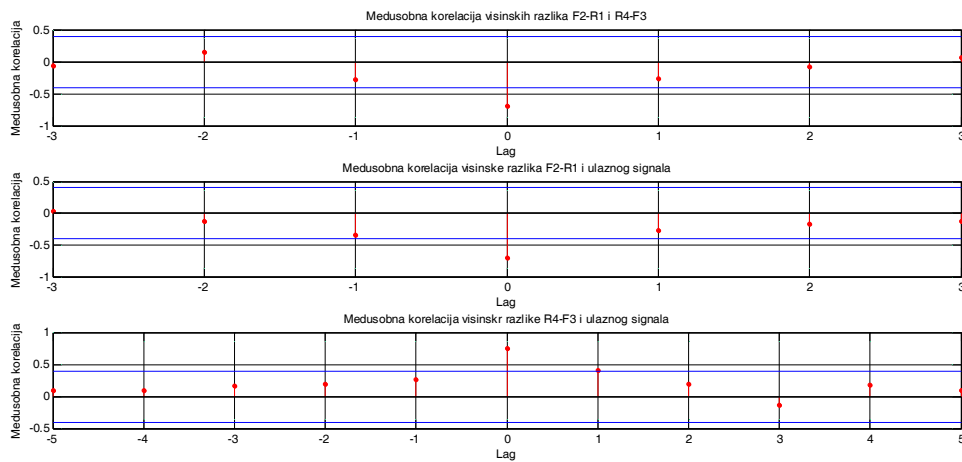


Слика 6.15: Парцијална аутокорејациона функција детрендованих висинских разлика и просечног степена консолидације (пример 1- поступак 2.)

За висинске разлике F2-R1 и R4-F3 степен аутокорејационог дела модела функције преноса је  $n_a = 0$ .

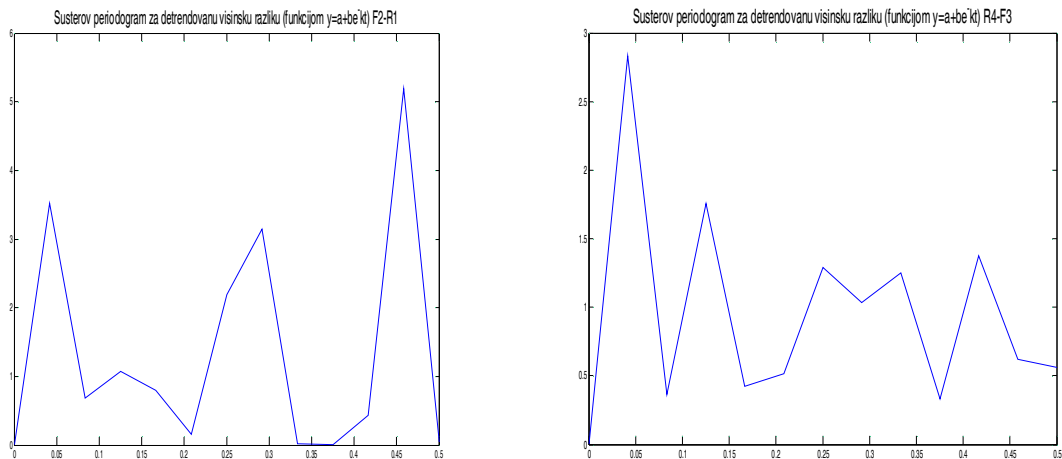
### Међусобна корелација

График међусобне корелације детрендованих висинских разлика F2-R1 и R4-F3, F2-R1 и улазног сигнала и R4-F3 и улазног сигнала приказан је на слици 6.16. На основу графика се може закључити да постоји међусобна корелација за корак 0, односно на тренутну вредност сигнала утиче тренутна вредност другог сигнала, а на вредност висинске разлике R4-F3 утиче и предходна вредност улазног сигнала, јер за корак 1 коефицијент међусобне корелације је изван интервала поверења. Степен модела за висинску разлику F2-R1 је  $n_b = 1$ , а за R4-F3 је  $n_b = 2$ .



Слика 6.16: Међусобна корелација детрендованих висинских разлика F2-R1, R4-F3 и просечног степена консолидације (пример 1- поступак 2.)

**Анализа висинских разлика у фреквентном домену – Шустеров периодограм**



Слика 6.17: Шустеров периодограм за детрендоване висинске разлике F2-R1 и R4-F3 (пример 1- поступак 2.)

На основу графика Шустеровог периодограма могу се донети исти закључци као и на основу анализе у временском домену.

**Закључак на основу анализе временских серија**

1. За моделирања висинских разлика  $F2-R1$  и  $R4-F3$  функцијом преноса добијено је:
  - Анализом парцијалне аутокорељације закључено је на тренутну вредност утиче само претходна вредност висинске разлике – ауторегресивни модел  $n_a = 0$ ,
  - Анализом аутокорељације закључено да на тренутну грешку мерења може да утиче претходна грешка, јер је на граници интервала поверења- модел са променљивом средином  $n_c = 0$ ,
  - Анализом међусобне корелације закључено је да на тренутну вредност висинске разлике утиче тренутна и претходна вредност улазног сигнала  $n_b = 1$ ;
2. Не постоји периодични утицај.
3. Не постоји зависност између мерених висинских разлика, па се због тога могу моделирати посебно.

**6.4.2 Модели линеарно временски-инваријантних система- пример 1**

У овом потпоглављу примењени су модели који су приказани у поглављу 4, модели облика функције преноса и модели простора стања. Кроз овај пример анализирана је разлика између динамичког и кинематичког модела. Такође, кроз све структуре модела обрађени су детрендовани (стационарни) подаци и подаци који су детрендовани разликама првог реда, али није обезбеђена стационарност процеса, што је показано у претходном потпоглављу. Поступак детрендовања некада може бити јако приметан посао и због тога је анализирана разлика у оценама.

**6.4.2.1 Модели облика функције преноса- пример 1.**

За оцену параметара модела коришћено је 70% података временске серије. Број чланова серије је 26, значи за оцену је коришћено првих 18 мерења

временске серије. Као што је наведено у потпоглављу 6.3.1 валидација је рађена симулирањем, јер је поузданија за верификовање модела, и урађена је предикција један корак унапред. Степен модела је иницијално дефинисан на основу анализе временских серија из претходног потпоглавља. За дефинитиван степен модела узиман је модел код кога су сви параметри значајни.

**Ауторегресивни модел са спољним улазним сигналом (ARX) (пример 1- поступак 1.)**

Модел ARX пр.1.1 (поступак 1)<sup>2</sup>

ARX модел приказан је у потпоглављу 4.1.1. Из једначина (4.1) на основу анализе временских серија добија се систем једначина за детрендоване висинске разлике F2-R1 и R4-F3 :

$$\text{F2-R1: } y_1(t) + a_{1_1}y(t-1) = b_{1_1}u(t) + b_{1_2}u(t-1) + e_1(t), \quad (6.11)$$

$$\text{R4-F3: } y_2(t) + a_{2_1}y(t-1) = b_{2_1}u(t) + b_{2_2}u(t-1) + e_2(t),$$

односно  $n_a = 1$  и  $n_b = 2$ , а степен модела је  $n = n_a + n_b = 3$ . Добијене су следеће оцене параметара модела са стандардним одступањима (табела 6.10).

На основу оцене параметара и стандардних одступања може се закључити да су значајни параметри само  $b_{1_1}$  и  $b_{2_1}$ , који пондеришу тренутну вредност улазног сигнала. Да би се проверило који су параметри модела значајни оцењене су вредности параметара за различите комбинације параметара  $b_{1_1}$  и  $b_{2_1}$  са осталим параметрима из модела (6.11).

Табела 6.10: Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX пр.1.1 (поступак 1.)

Параметар модела	Стандардно одступање
$\hat{a}_{1_1} = 0.567$	$\hat{\sigma}_{a_{1_1}} = 0.400$
$\hat{b}_{1_1} = -85.849 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{1_1}} = 25.065 \text{ mm}$
$\hat{b}_{1_2} = -65.778 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{1_2}} = 44.125 \text{ mm}$
$\hat{a}_{2_1} = 0.301$	$\hat{\sigma}_{a_{2_1}} = 0.366$
$\hat{b}_{2_1} = 88.174 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{2_1}} = 20.629 \text{ mm}$
$\hat{b}_{2_2} = 37.617 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{2_2}} = 37.857 \text{ mm}$

<sup>2</sup> ARX пр.1.1 (поступак 1) значи ARX модел пр.1.1- пример 1. у оквиру поглавља, 1. верзија модела (први модел је на основу анализе временске серије, а остали се добијају на основу значајности параметара), поступак бр. означава начин детрендовања временских серија



Модел ARX пр1.2 (поступак 1)

Систем моделских једначина је следећег облика

$$F2-R1: \quad y_1(t) = b_{1_1}u(t) + b_{1_2}u(t - 1) + e_1(t), \quad (6.12)$$

$$R4-F3: \quad y_2(t) = b_{2_1}u(t) + b_{2_2}u(t - 1) + e_2(t),$$

односно  $n_a = 0$  и  $n_b = 2$ , а степен модела је  $n = n_a + n_b = 2$ . Добијене су следеће оцене параметара модела са стандардним одступањима (табела 6.11)

Табела 6.11: Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX пр.1.2 (поступак 1.)

Параметар модела	Стандардно одступање
$\hat{b}_{1_1} = -89.451 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{1_1}} = 22.242 \text{ mm}$
$\hat{b}_{1_2} = -6.254 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{1_2}} = 12.110 \text{ mm}$
$\hat{b}_{2_1} = 87.710 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{2_1}} = 20.817 \text{ mm}$
$\hat{b}_{2_2} = 7.881 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{2_2}} = 11.374 \text{ mm}$

Анализом оцена параметара и оцена стандардних одступања параметара модела јасно је да параметри  $b_{1_2}$  и  $b_{2_2}$  нису значајни.

Модел ARX пр1.3 (поступак 1)

Систем моделских једначина је следећег облика

$$F2-R1: \quad y_1(t) + a_{1_1}y(t - 1) = b_{1_1}u(t) + e_1(t), \quad (6.13)$$

$$R4-F3: \quad y_2(t) + a_{2_1}y(t - 1) = b_{2_1}u(t) + e_2(t),$$

$n_a = 1$ , а  $n_b = 1$ . Добијене су следеће оцене параметара модела са стандардним одступањима (табела 6.12).

Табела 6.12: Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX пр.1.3 (поступак 1.)

Параметар модела	Стандардно одступање
$\hat{a}_{1_1} = -0.0002$	$\hat{\sigma}_{a_{1_1}} = 0.075$
$\hat{b}_{1_1} = -100.347 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{1_1}} = 14.074 \text{ mm}$
$\hat{a}_{2_1} = -0.046$	$\hat{\sigma}_{a_{2_1}} = 0.084$
$\hat{b}_{2_1} = 93.427 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{2_1}} = 15.552 \text{ mm}$

Анализом оцена добија се да су само параметри  $b_{1_1}$  и  $b_{2_1}$  значајни.

Модел ARX пр1.4 (поступак 1)

Систем моделских једначина је следећег облика

$$\text{F2-R1: } y_1(t) = b_{1_1} u(t) + e_1(t), \quad (6.14)$$

$$\text{R4-F3: } y_2(t) = b_{2_1} u(t) + e_2(t),$$

$n_a = 0$ , а  $n_b = 1$ . Добијене су следеће оцене параметара модела са стандардним одступањима (табела 6.13)

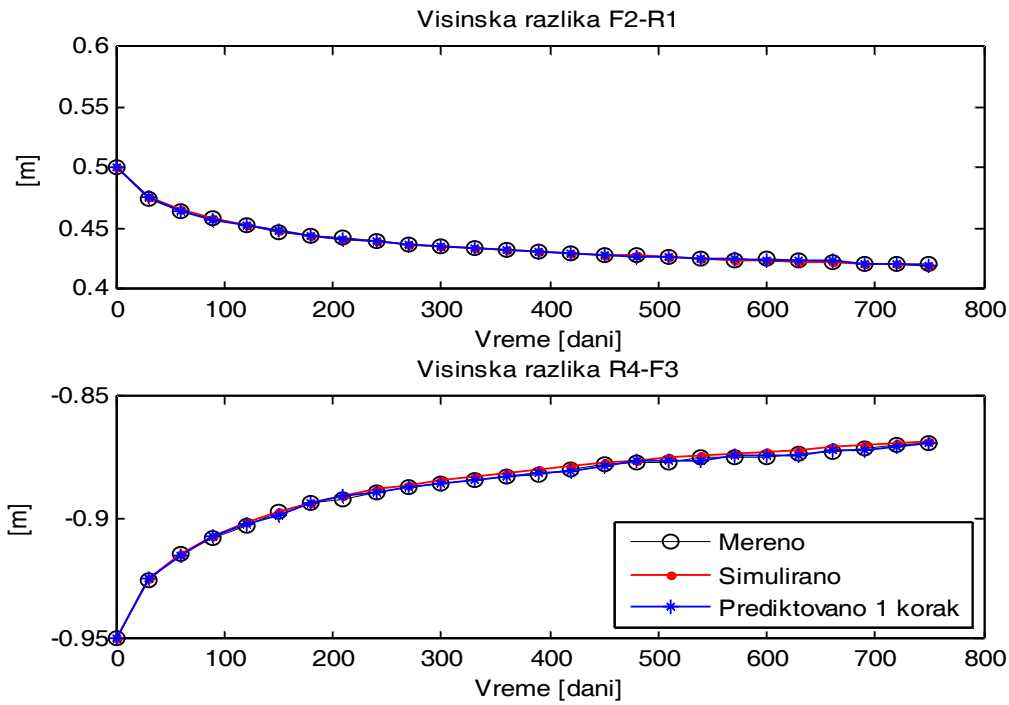
Табела 6.13: Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX пр.1.4 (поступак 1.)

Параметар модела	Стандардно одступање
$\hat{b}_{1_1} = -100.391 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{1_1}} = 4.702 \text{ mm}$
$\hat{b}_{2_1} = 101.497 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{2_1}} = 4.617 \text{ mm}$

На основу добијених оцена јасно је да су параметри значајни, односно слегање у овом примеру може да се опише статистичким моделом, модел који зависи само од улазних сигнала (видети потпоглавље 2.3.3.1). Пошто су оцењени значајни параметри модела може се приступити валидацији модела. Валидација модела је урађена

1. упоређењем симулираног и предиктованог (корак 1) излаза из модела са мереним излазом;
2. анализа аутокорелације и међусобне корелације поправака са улазним сигнаlima и
3. упоређење модела применом Акаике информационог критеријума или Акаике грешке предикције.

На слици 6.18 приказана је симулација и предикција корака 1 за модел (6.14).



Слика 6.18: Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за модел ARX пр.1.4 (поступак 1.)

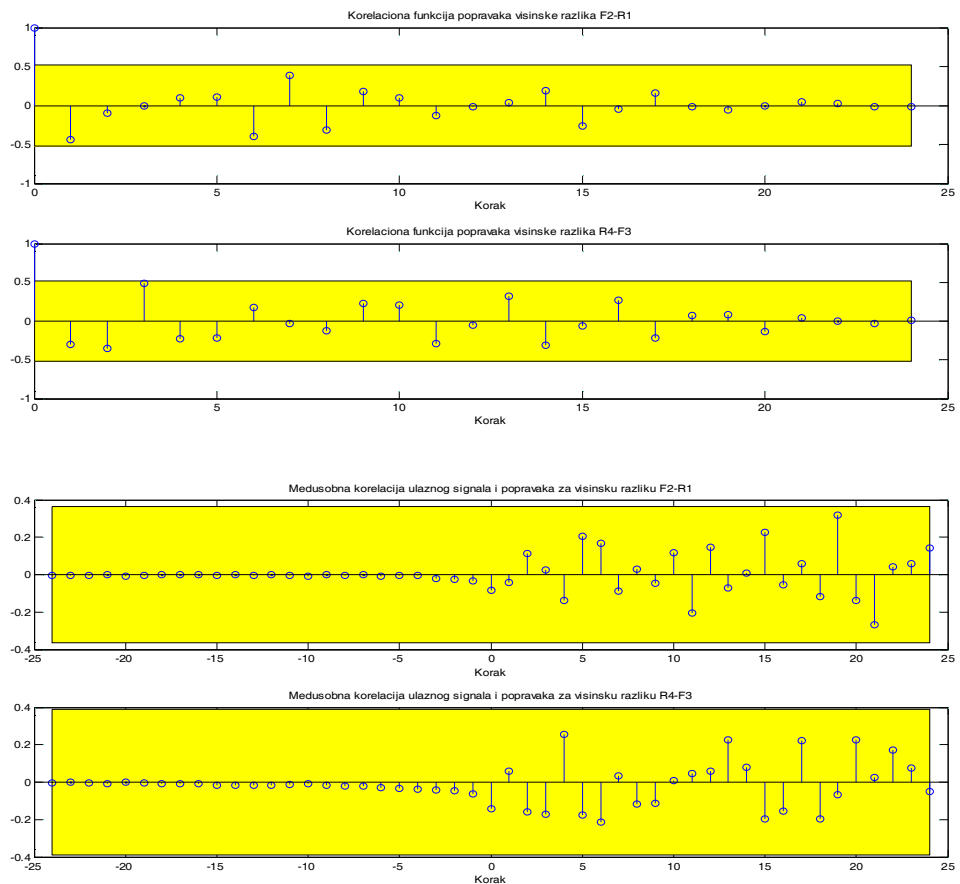
Критеријум апроксимације *Fit* и Акаике критеријум приказан је у табели 6.14.

Табела 6.14: Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел ARX пр.1.4 (поступак 1.)

Од	До	Симулација <i>Fit</i> [%]	Предикција <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
F2	R1	96.8	95.6	0.30	-1.22
R4	F3	93.4	96.5		

Ови критеријуми ће касније бити упоређени са другим моделима. На слици 6.19 приказана је независност и случајност поправака. Функција преноса (4.4) и (4.5) за модел мерених података временских серија, који је задовољио све критеријуме валидације, је

F2-R1:	$A(z) = 1 - z^{-1};$	$B(z) = -100.391(1 - z^{-1});$	Функција преноса линеарног система: $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ , Функција преноса поремећаја: $H(z) = \frac{1}{A(z)}$
R4-F3:	$A(z) = 1 - z^{-1};$	$B(z) = 101.497(1 - z^{-1});$	Функција преноса линеарног система: $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ , Функција преноса поремећаја: $H(z) = \frac{1}{A(z)}$



Слика 6.19: Случајност и независност поправака висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за модел ARX пр.1.4 (поступак 1.)

Са слике 6.19 јасно је да су поправке случајне, не постоји аутокорељација јер су коефицијенти аутокорељације су унутар интервала поверења за све кораке (интервал поверења је осненчени правоугаоник). Такође, не постоји зависност између улазног сигнала и поправке, коефицијенти међусобне корелације су унутар интервала поверења за све кораке. То значи да у улазним сигналима нису остале неке информације које модел не описује. Апсолутне вредности оцењених параметара одговарају збиру укупне консолидације горњег и доњег слоја  $s_{c1} + s_{c2} = 40 \text{ mm} + 60 \text{ mm} = 100 \text{ mm}$ , коефицијенти модела имају физичко значење укупне консолидације слојева.

**Ауторегресивни модел са спољним улазним сигналом (ARX) (пример 1- поступак 2.)**

За поступак 2., када су временске серије стационарне, приказани су само дефинитивни, најбољи модели за одређену врсту модела. Степен модела је одређен тако да су сви параметри модела статистички значајни.

Систем моделских једначина детрендованих података је следећег облика и исто је као за пр.1.4 (поступак 1.)

$$\text{F2-R1: } y_1(t) = b_{1_1} u(t) + e_1(t), \quad (6.15)$$

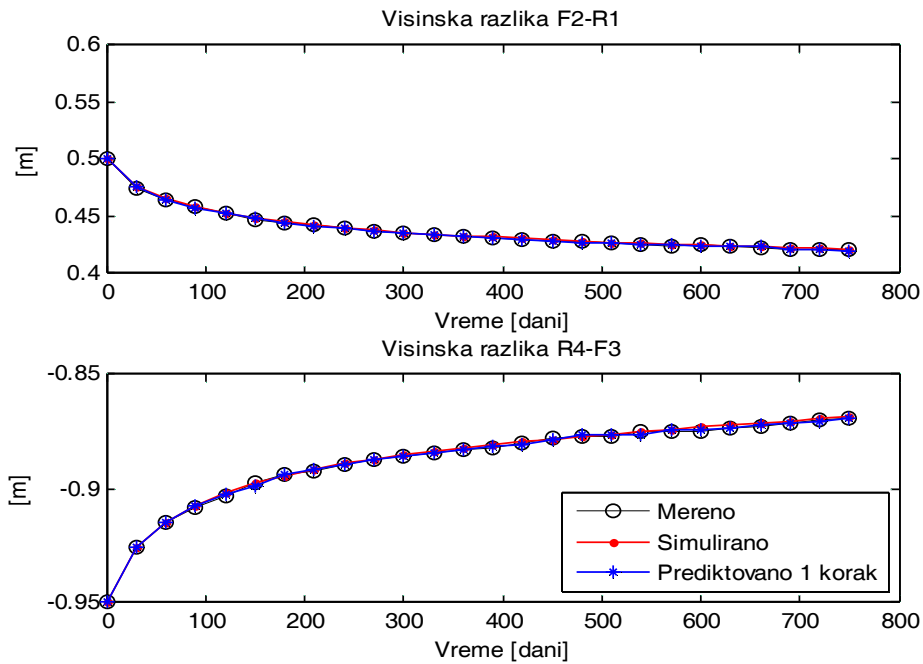
$$\text{R4-F3: } y_2(t) = b_{2_1} u(t) + e_2(t),$$

$n_a = 0$ , а  $n_b = 1$ . Добијене су следеће оцене параметара модела са стандардним одступањима (табела 6.15)

Табела 6.15: Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX (пример1- поступак 2.)

Параметар модела	Стандардно одступање
$\hat{b}_{1_1} = -96.894 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{1_1}} = 18.804 \text{ mm}$
$\hat{b}_{2_1} = 84.309 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{2_1}} = 18.126 \text{ mm}$

На основу добијених оцена јасно је да су параметри значајни, односно слегање у овом примеру може да се опише статистичким моделом, модел који зависи само од улазних сигнала (видети потпоглавље 2.3.3.1). У односу на поступак 1. оцене имају веће стандардно одступање и оцењене вредности мање су блиске укупној консолидацији горњег и доњег слоја. На слици 6.20 приказана је симулација и предикција корака 1 за модел (6.15).



Слика 6.20: Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за модел ARX (пример 1- поступак 2.)

Критеријум апроксимације *Fit* и Акаике критеријум приказан је у табели 6.16.

Табела 6.16: Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел ARX (пример 1- поступак 2.)

Од	До	Симулација <i>Fit</i> [%]	Предикција <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
F2	R1	95.0	95.7	0.26	-1.36
R4	F3	95.9	96.5		

Проверена је независност и случајност поправака и све вредности су унутар интервала поверења.

Функција преноса (4.4) и (4.5) за модел мерених података, који је задовољио све критеријуме валидације, је

F2-R1:	$A(z) = 1 - z^{-1} - m_1;$	$B(z) = -96.894(1 - z^{-1}) + m_3;$	Функција преноса система: $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ , Функција преноса поремећаја: $H(z) = \frac{1}{A(z)}$
R4-F3:	$A(z) = 1 - z^{-1} - m_2;$	$B(z) = 84.309(1 - z^{-1}) + m_3;$	Функција преноса система: $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ , Функција преноса поремећаја: $H(z) = \frac{1}{A(z)}$

где су функције:  $m_1 = \hat{d}_{F2-R1} - \hat{f}_{F2-R1} e^{-k_{F2-R1}t}$ ,  $m_2 = \hat{d}_{R4-F3} - \hat{f}_{R4-F3} e^{-k_{R4-F3}t}$  и  $m_3 = \hat{d}_{ul} - \hat{f}_{ul} e^{-k_{ul}t}$ .

Упоређењем модела ARX за поступак 1. и поступак 2. јасно је да не постоје значајне разлике за све критеријуме валидације модела и у оба поступка модел је статички (видети потпоглавље 2.3.3.1). За одређивање параметара апроксимирајуће криве потребно је доста труда да би се:

1. одредио облик функције који ће обезбедити стационарност,
2. одредиле приближне вредности параметара функције,
3. применили нелинеарни поступци оцењивања (у овом примеру примењен је нелинеарни метод најмањих квадрата).

**Ауторегресивни модел (AR) (пример 1- поступак 1.)**

Ауторегресивни модел приказан је у потпоглављу 4.1.2. Једначине линеарног модела за детрендоване податке су:

$$F2-R1: \quad y_1(t) + a_{1_1}y(t - 1) = e_1(t), \quad (6.16)$$

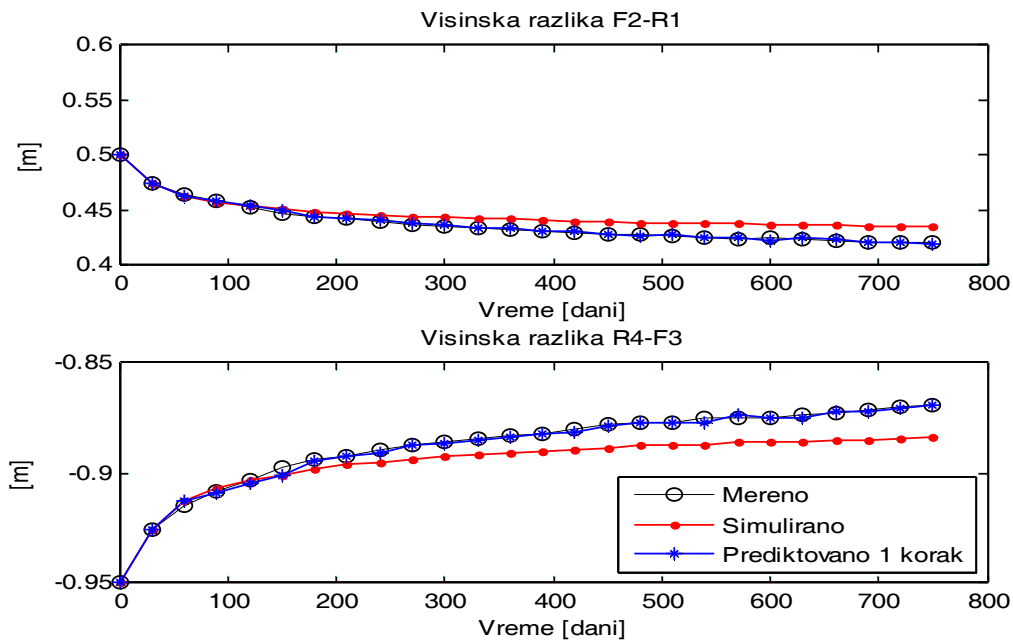
$$R4-F3: \quad y_2(t) + a_{2_1}y(t - 1) = e_2(t),$$

а оцене параметара модела са оценама стандардних одступања су (табела 6.17)

Табела 6.17: Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел AR (пример 1- поступак 1.)

Параметар модела	Стандардно одступање
$\hat{a}_{1_1} = -0.5055$	$\hat{\sigma}_{a_{1_1}} = 0.2093$
$\hat{a}_{2_1} = -0.5283$	$\hat{\sigma}_{a_{2_1}} = 0.2067$

На слици 6.21 приказана је симулација и предикција корака 1 за модел (6.16).



Слика 6.21: Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за модел AR (пример 1- поступак 1.)

Критеријум апроксимације *Fit* и Акаике критеријум приказан је у табели 6.18.

Табела 6.18: Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел AR (пример 1- поступак 1.)

Од	До	Симулација <i>Fit</i> [%]	Предикција <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
F2	R1	47.4	92.6	43.94	3.78
R4	F3	52.3	93.8		

Процент апроксимације процеса на основу модела предикцијом један корак унапред је врло добар, док симулације не задовољава. Анализом разлика између мерених података и симулираних може се закључити да разлике између мерења и предикције три корака унапред не би прелазила 2 mm. Акаике информациони критеријум је мали, а финална грешка предикције има велику вредност. Проверена је независност и случајност поправака и све су вредности коефицијената аутокорељације и међусобне корелације унутар интервала поверења.



Функција преноса облика (4.13) је

F2- R1:	$A(z) = (1 - z^{-1})[1 - 0.5055z^{-1}]$ ;	Функција преноса линеарног система: $G(z) = \frac{1}{A(z)}$ ;
R4- F3:	$A(z) = (1 - z^{-1})[1 - 0.5283z^{-1}]$ ;	Функција преноса линеарног система: $G(z) = \frac{1}{A(z)}$ ;

**Ауторегресивни модел (AR) (пример 1- поступак 2.)**

У табели (6.19) дате су оцене параметара са оценом стандардног одступања за детрендоване податке по моделу (6.16) .

Табела 6.19: Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел AR (пример 1- поступак 2.)

Параметар модела	Стандардно одступање
$\hat{a}_{1_1} = -0.0575$	$\hat{\sigma}_{a_{1_1}} = 0.2451$
$\hat{a}_{2_1} = -0.1905$	$\hat{\sigma}_{a_{2_1}} = 0.2423$

Оцене параметара модела нису значајне, односно овај модел је непримењив. Исти закључак се добио и на основу анализе парцијалне аутокорељационе функције, јер коефицијенти су унутар интервала поверења за било који корак.

**Ауторегресивни модел са померајућом средином и спољашњим побудама ARMAX (пример 1- поступак 1. и поступак 2.)**

Математички облик модела приказан је једначином (4.8). Ова врста модела за овај пример не може се применити, јер се добијају оцене параметара које су мање од двоструке вредности стандардног одступања параметра, изузев за коефицијент који је уз улазни сигнал. Примењени ARX модел је показао да тренутна вредност излаза зависи само од тренутног улаза и изузетно добро апроксимира реалан процес.

**Ауторегресивни модел са померајућом средином ARMA (пример 1- поступак 1.)**

ARMA модел за детрендоване податке у овом примеру за први поступак детрендовања је следећег облика

$$F2-R1: \quad y_1(t) + a_{1_1}y(t-1) = e_1(t) + c_{1_1}e_1(t-1) + c_{1_2}e_1(t-2), \quad (6.17)$$

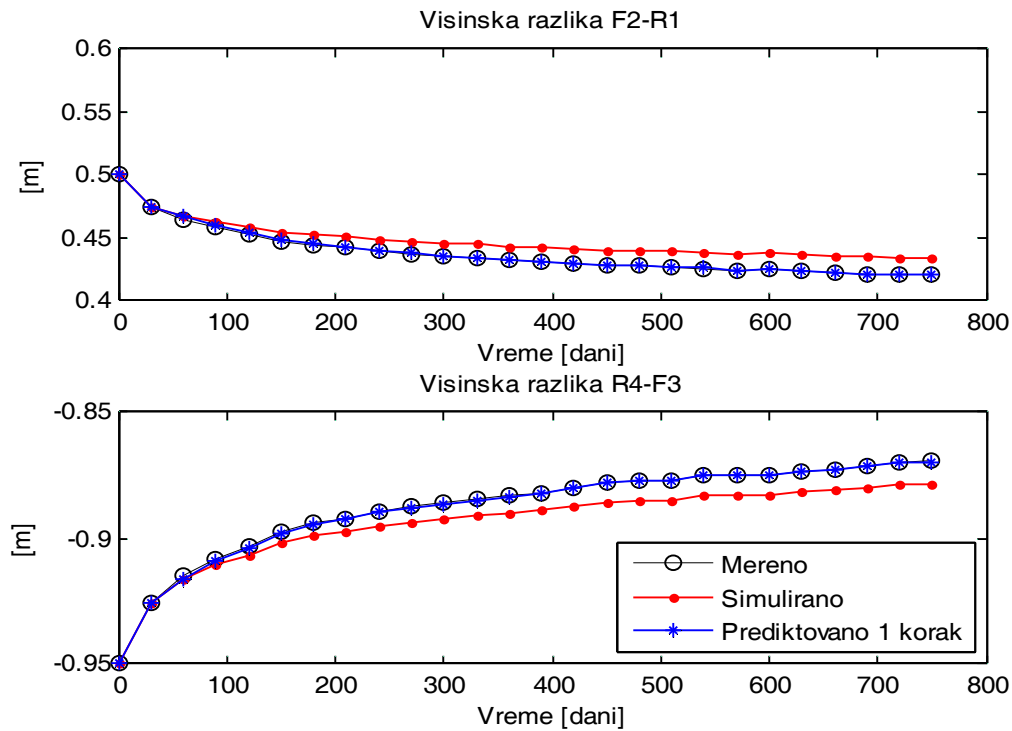
$$R4-F3: \quad y_2(t) + a_{2_1}y(t-1) = e_2(t) + c_{2_1}e_2(t-1) + c_{2_2}e_2(t-2),$$

степен модела је  $n_a + n_c = 1 + 2 = 3$ . Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања су табели 6.20.

Табела 6.20: Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARMA (пример 1- поступак 1.)

Параметар модела	Стандардно одступање
$\hat{a}_{1_1} = -0.7426$	$\hat{\sigma}_{a_{1_1}} = 0.05141$
$\hat{c}_{1_1} = -1.1426$	$\hat{\sigma}_{c_{1_1}} = 0.1879$
$\hat{c}_{1_2} = 0.9838$	$\hat{\sigma}_{c_{1_2}} = 0.06941$
$\hat{a}_{2_1} = -0.8414$	$\hat{\sigma}_{a_{2_1}} = 0.1022$
$\hat{c}_{2_1} = 0.007991$	$\hat{\sigma}_{c_{2_1}} = 0.3291$
$\hat{c}_{2_2} = -0.8326$	$\hat{\sigma}_{c_{2_2}} = 0.2684$

На слици 6.22 приказана је симулација и предикција корака 1 за модел (6.17), а проверена је и независност и случајност поправака, али није приказана због уштеде простора.



Слика 6.22: Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за модел ARMA (пример 1- поступак 1.)

Критеријум апроксимације *Fit* и Акаике критеријум приказан је у табели 6.21.

Табела 6.21: Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел ARMA (пример 1- поступак 1.)

Од	До	Симулација <i>Fit</i> [%]	Предикција <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
F2	R1	42.9	95.5	0.53	-0.64
R4	F3	64.5	97.3	0.98	-0.026

Овај модел има висок проценат апроксимације предикцијом један корак у напред. Симулација је незадовољавајуће тачности. У односу на AR модел при симулацији грешка симулације континуирано расте и највећа је последњој епохи и износи - 14.2 mm за висинску разлику F2-R1 и 9.0 mm за висинску разлику R4-F3. У првих шест епоха грешка симулације достиже половину укупне грешке, а затим се полако повећава. Акаике критеријуми су много бољи у односу на AR модел. Функције преноса за мерене податке су следећег облика:

F2-R1:	$A(z) = (1 - z^{-1})(1 - 0.7426z^{-1});$ $C(z) = 1 - 1.1426z^{-1} + 0.9838z^{-2};$ Функција преноса линеарног система: $G(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$ ;
R4-F3:	$A(z) = (1 - z^{-1})(1 - 0.8414z^{-1});$ $C(z) = 1 + 0.007991z^{-1} + 0.8326z^{-2};$ Функција преноса линеарног система: $G(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$ ;

**Ауторегресивни модел са померајућом средином ARMA (пример 1- поступак 2.)**

Овај модел за детрендоване временске серије не може се применити, јер коефицијенти нису значајни, али се може применити модел са променљивом средином.

**Модел са померајућом средином MA (поступак 2.)**

Модел је приказан формулом (4.14). MA модел за детрендоване податке у овом примеру за други поступак детрендовања је следећег облика

$$\begin{aligned}
 \text{F2-R1:} \quad y_1(t) &= e_1(t) + c_{1_1}e_1(t-1) + c_{1_2}e_1(t-2), & (6.18) \\
 \text{R4-F3:} \quad y_2(t) &= e_2(t) + c_{2_1}e_2(t-1).
 \end{aligned}$$

Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања дате су у табели 6.22

Табела 6.22: Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел MA (пример 1- поступак 2.)

Параметар модела	Стандардно одступање
$\hat{c}_{1_1} = 0.5934$	$\hat{\sigma}_{c_{1_1}} = 0.1196$
$\hat{c}_{1_2} = 0.9363$	$\hat{\sigma}_{c_{1_2}} = 0.0349$
$\hat{c}_{2_1} = 0.8862$	$\hat{\sigma}_{c_{2_1}} = 0.09986$

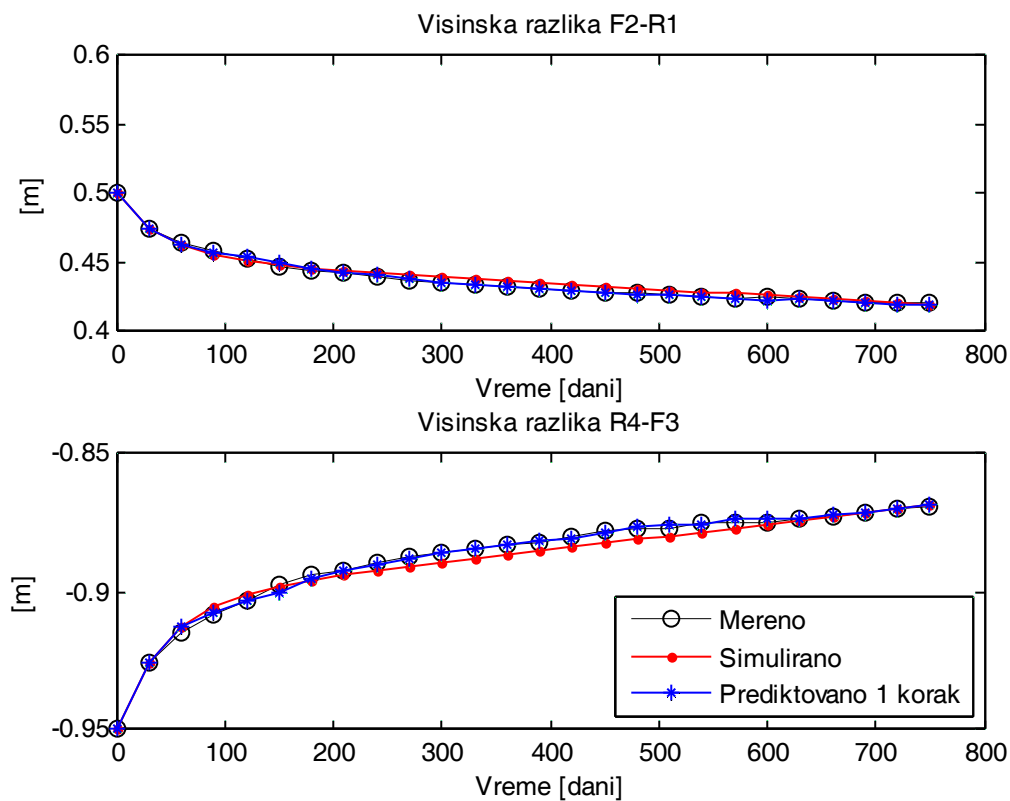
На слици 6.23 приказана је симулација и предикција корака 1 за модел (6.18), а проверена је и независност и случајност поправака, али није приказана због уштеде простора.

Критеријум апроксимације *Fit* и Акаике критеријум приказан је у табели 6.23.

Табела 6.23: Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел МА (пример 1- поступак 2.)

Од	До	Симулација <i>Fit</i> [%]	Предикција <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
F2	R1	83.9	93.9	0.77	-0.25
R4	F3	86.3	94.9	0.78	-0.24

Максимална разлика између мерених и моделираних података за висинску разлику F2-R1 је 5.3 mm у 13. епохи и за R4-F3 је 4.6 mm у 16. епохи. Добијени критеријуми валидације су добри и значајно су бољи него за ARMA модел (поступак 1.). Најзначајнија разлика је код симулације, где је проценат симулације бољи за 40%. Јасно је да се грешке модела и сензора могу моделирати када се елиминише тренд у мерењима. За ARX модел није потребна стационарност процеса, али за моделе где се моделирају и поремећаји који делују на систем неопходна је стационарност процеса.



Слика 6.23: Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за модел МА (пример 1- поступак 2.)

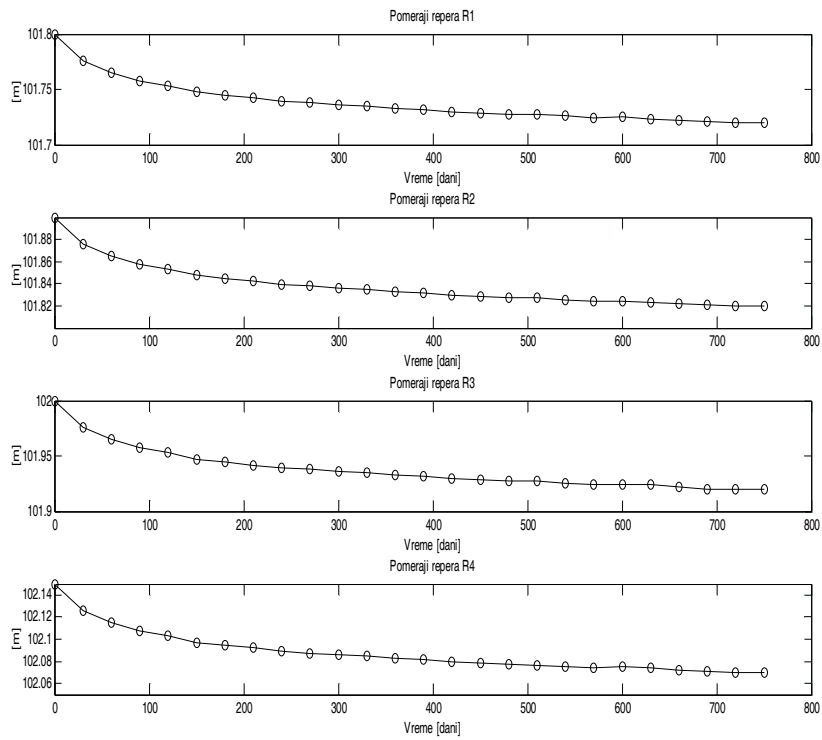
#### 6.4.2.2 Модели простора стања- пример 1

Модел простора стања припада линеарно временски инваријантним моделима. Као што је приказано и у поглављу 4 за оцену параметара модела примењена је Ојлерова метода и Тустинова апроксимација. Излазни сигнали, односно променљиве стања су оцењене висине репера на објекту: R1, R2, R3 и R4, које су добијене по поступку посредног изравњања за сваку епоху мерења, и брзине померања које су добијене поступком нумеричког диференцирања. Тежине су израчунате као реципрочна вредност броја станица. Улазни сигнал је просечан степен консолидације. Из искуства аутора је познато да на основу релативно малог броја епоха мерења успешно може да се моделира цео процес слегања. Због овога је рађена оцена параметара на основу четири и осамнаест епоха мерења. Такође, у овом примеру су оцењени параметри модела за мерења детрендована разликама првог реда и детрендована функцијом. Први поступак детрендовања није обезбедио стационарност процеса.

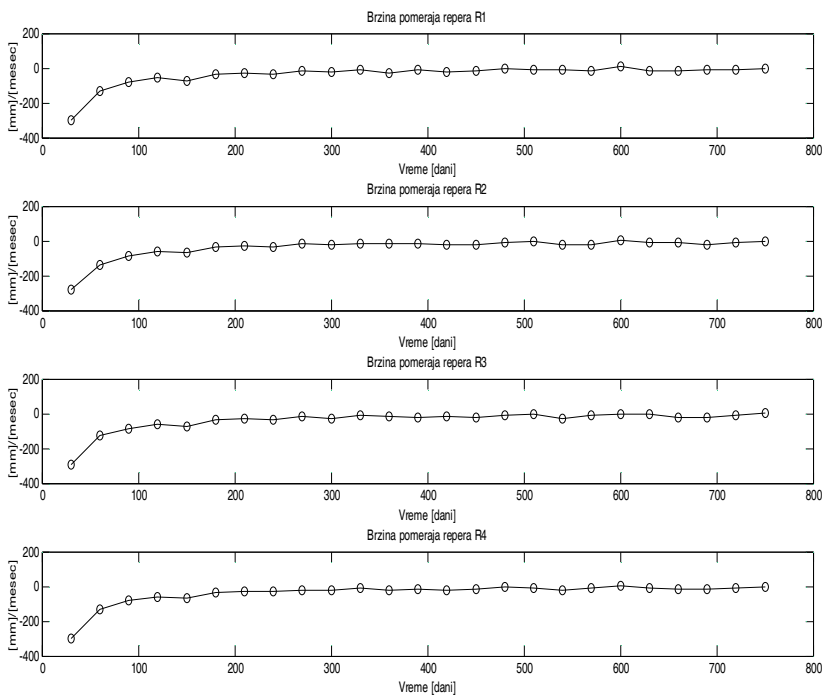
#### *Детрендовање података временске серије*

На слици (6.24) приказане померања репера на објекту, а брзина померања репера на слици (6.25). На основу графичке представе померања закључује се да се консолидација терена изводи по инвезној експоненцијалној функцији. Брзина померања има облик експоненцијалне функције. Да би се одредили параметри кривих за апроксимацију тренда неопходно је применити нелинеарне поступке оцењивања. У овом раду примењен је нелинеарни МНК, а као критеријум за завршетак итеративног процеса коришћен је следећи критеријум:

$$\frac{\mathbf{n}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{n}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} < 0.0001.$$



Слика 6.24: Померања оцењених висина репера на објекту (пример 1)



Слика 6.25: Брзина померања оцењених висина репера на објекту (пример 1)

За разлике првог реда оцењених висина репера функција апроксимације кривом је следећег облика

$$w^1(t_i) = a - be^{-kt_i}, \quad (6.19)$$

и добијене су следеће оцене параметара (табела 6.24)

Табела 6.24: Оцењени параметри апроксимирајућих кривих за померање репера (пример 1)

	R1	R2	R3	R4
$\hat{a}$ [mm]	-1.38	-1.32	-1.35	-1.37
$\hat{b}$ [mm]	22.22	21.09	21.61	22.37
$\hat{k}$ [1/mesec]	8.16	7.32	7.68	8.17
$\hat{\sigma}$	1.08	0.96	1.15	1.02

Брзине померања репера и улазни сигнал се апроксимирају следећом кривом

$$w_{br}^1(t_i) = ae^{bt_i} + ce^{dt_i}, \quad (6.20)$$

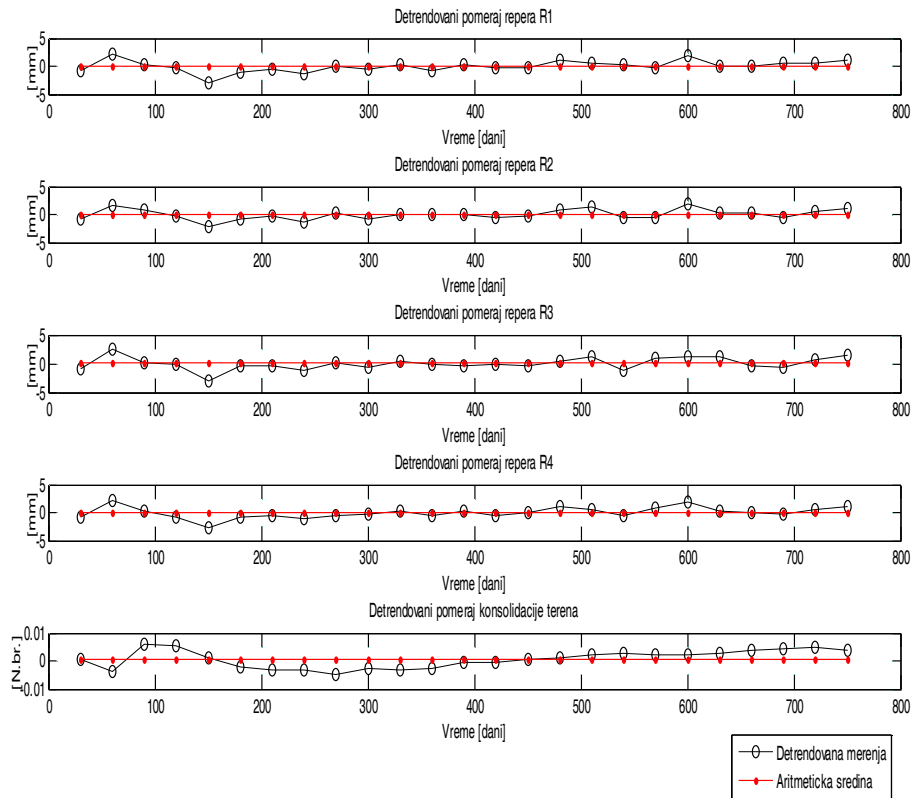
и добијене су оцене параметара (табела 6.25)

Табела 6.25: Оцењени параметри апроксимирајућих криви за брзине померања репера и улазни сигнал (пример 1)

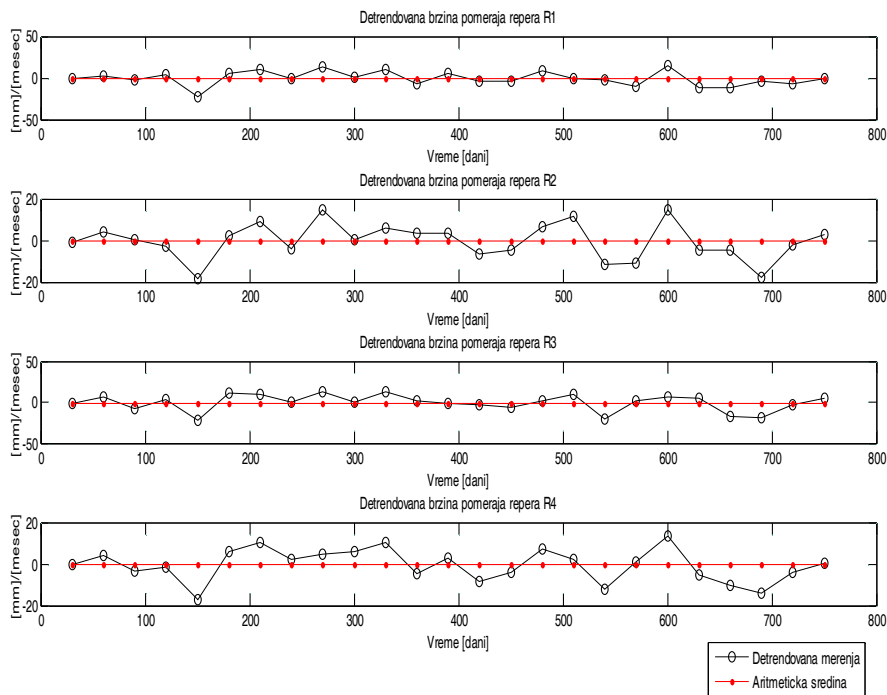
	R1	R2	R3	R4	Улазни сигнал
$\hat{a}$ [mm/mesecu]	-754.7	-567.3	-720.0	-751.7	0.7012 [N.b]
$\hat{b}$ [1/mesec]	-15.08	-11.76	-15.10	-14.89	-17.11
$\hat{c}$ [mm/mesecu]	-88.79	-72.55	-93.59	-87.72	0.0818 [N.b]
$\hat{d}$ [1/mesec]	-1.49	-1.27	-1.55	-1.48	-1.61
$\hat{\sigma}$	9.10	9.29	10.91	8.42	0.0035

На слици (6.26) и (6.27) приказани су детрендовани подаци временских серија.





Слика 6.26: Детрендована померања репера и просечни степен консолидације терена (пример 1)



Слика 6.27: Детрендована брзина померања репера (пример 1)

Значајност детрендованих података је проверена по формули (3.65) и добијене су следеће оцене коефицијената (табела 6.26)

Табела 6.26: Тест значајности детрендовања временских серија (пример 1)

Временска серија	$R^2$
Померај репера R1	0.958
Померај репера R2	0.964
Померај репера R3	0.951
Померај репера R4	0.963
Улазни сигнал	0.996
Брзина помераја репера R1	0.980
Брзина помераја репера R2	0.979
Брзина помераја репера R3	0.972
Брзина помераја репера R4	0.984

Коефицијент значајности је близак јединици што значи да је детрендовањем значајно смањено „растурање“ резултата мерења. Међутим, да ли је обезбеђена стационарност процеса провериће се анализом подскупова временских серија. Први подскуп чини првих тринаест детрендованих података, а други преосталих дванаест.

Прво је проверена једнакост парцијалних аутокорелационих коефицијената ових подскупова за корак 1 по формули (3.69) (Табела 6.27).

Табела 6.27: Тест стационарности парцијалне аутокорелације померања, брзине померања и улазног сигнала (пример 1)

Величина	$r_1$	$r_2$	$z_1$	$z_2$	$\hat{\sigma}_{z_1}$	$\hat{\sigma}_{z_2}$	$t$
Померај репера R1	0.0368	-0.3122	0.0368	-0.3229	0.3162	0.3333	0.7829
Померај репера R2	0.1049	-0.0861	0.1053	-0.0863	0.3162	0.3333	0.4172
Померај репера R3	-0.0649	-0.0385	-0.0650	-0.0385	0.3162	0.3333	0.0577
Померај репера R4	0.1600	0.1218	0.1614	0.1224	0.3162	0.3333	0.0848
Улазни сигнал	0.4394	0.7231	0.4714	0.9142	0.3162	0.3333	0.9636
Брзина помераја репера R1	-0.2997	-0.2757	-0.3092	-0.2831	0.3162	0.3333	0.0568
Брзина помераја репера R2	-0.0868	-0.0757	-0.0870	-0.0758	0.3162	0.3333	0.0243
Брзина помераја репера R3	-0.2866	-0.0336	-0.2948	-0.0336	0.3162	0.3333	0.5684
Брзина помераја репера R4	0.0183	0.1378	0.0183	0.1387	0.3162	0.3333	0.2620

Пошто су све вредности теста нулте хипотезе  $t$ , тест једнакости средњих вредности, мање од квантила Студентове расподеле  $t_{0,99} = 2.576$  закључује се да не постоји промена аутокорељације унутар серије.

Провера стационарности дисперзије и средње вредности временске серије урађена је тестирањем хипотезе о хомогености мерења и једнакости средњих вредности подсерија. У табели (6.28) приказани су тестови хомогености и једнакости средњих вредности подсерија. Критеријум стационарности није задовољен за улазни сигнал, али он је задовољен за вероватноћу  $p = 0.999$ , јер је квантил  $F_{0,999}(12,11) = 7.62$  и  $t_{0,995}(17) = 3.96$ . Примењене су још неке апроксимирајуће функције, али се ова функција показала као најприкладнија. Уопште, сам поступак детрендовања може бити врло приметан и због тога је овде приказана и оцена са нестационарним подацима серије.

Проверавана је и значајност ауто-, парцијалне и међусобне корелације и закључено је да су исте безначајне. Овај закључак је битан јер приликом примене методе потпростора не мора се узимати у обзир корелисаност временских серија.

Табела 6.28: Тест стационарности дисперзија и средњих вредности подсерија померања, брзине померања репера и улазног сигнала (пример 1)

Величина	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	F- тест	$F_{0,99}(f_1, f_2)$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	t-тест	$f$	$t_{0,995}(f)$
Померња репера R1	1.1843	0.6557	3.2623	4.3974	-0.3912	0.3046	2.1031	23	2.8073
Померња репера R2	0.9456	0.8196	1.3312	4.3974	-0.2812	0.3046	1.6486	23	2.8073
Померња репера R3	1.1966	0.8830	1.8363	4.3974	-0.3403	0.3687	1.6252	23	2.8073
Померња репера R4	1.0630	0.7128	2.2241	4.3974	-0.3784	0.4099	2.1579	23	2.8073
Улазни сигнал	0.0034	0.0015	4.8119	4.3974	-0.0010	0.0025	3.4162	17.1	2.8968
Брзина померања репера R1	9.3464	7.7540	1.4529	4.3974	1.2886	-	1.1736	23	2.8073
Брзина померања репера R2	7.7294	9.5778	1.5355	4.2198	1.3216	-	1.6072	23	2.8073
Брзина померања репера R3	9.7095	10.4366	1.1554	4.2198	1.6022	-	1.1854	23	2.8073
Брзина померања репера R4	7.3018	8.1462	1.2447	4.2198	1.3990	-	1.3632	23	2.8073

**Кинематички модел- Ојлерова метода**

Показано је да померања конструкције услед оптерећења у вертикалној равни припадају систему првог реда, описују се диференцијалном/ диференцијалном једначином првог реда. Диференцијална једначина првог реда за Ојлерову методу за кинематички модел је

$$x[(k + 1)T] = (1 - aT)x[kT]. \quad (6.21)$$

Непознати параметар је  $(1 - aT)$ . Оцене параметра за разлике првог реда и детрендоване податке за четири и осамнаест епоха приказане су у табели (6.29).

Табела 6.29: Оцењене вредности параметара кинематичког модела- Ојлерова метода са оценом стандардног одступања (пример 1)

Број епоха	Померња репера	Разлике првог реда		Апроксимација функцијом	
		Параметар	Стандардно одступање	Параметар	Стандардно одступање
4. епохе	R1	0.4817	0.0647	-0.2091	0.6537
	R2	0.5246	0.0668	-0.0823	0.7561
	R3	0.4911	0.0657	-0.3227	0.5635
	R4	0.4833	0.0644	-0.2432	0.6377
18. епоха	R1	0.5194	0.0451	0.1391	0.2264
	R2	0.5586	0.0464	0.1620	0.2670
	R3	0.5241	0.0456	-0.0769	0.2174
	R4	0.5204	0.0449	0.2162	0.2452

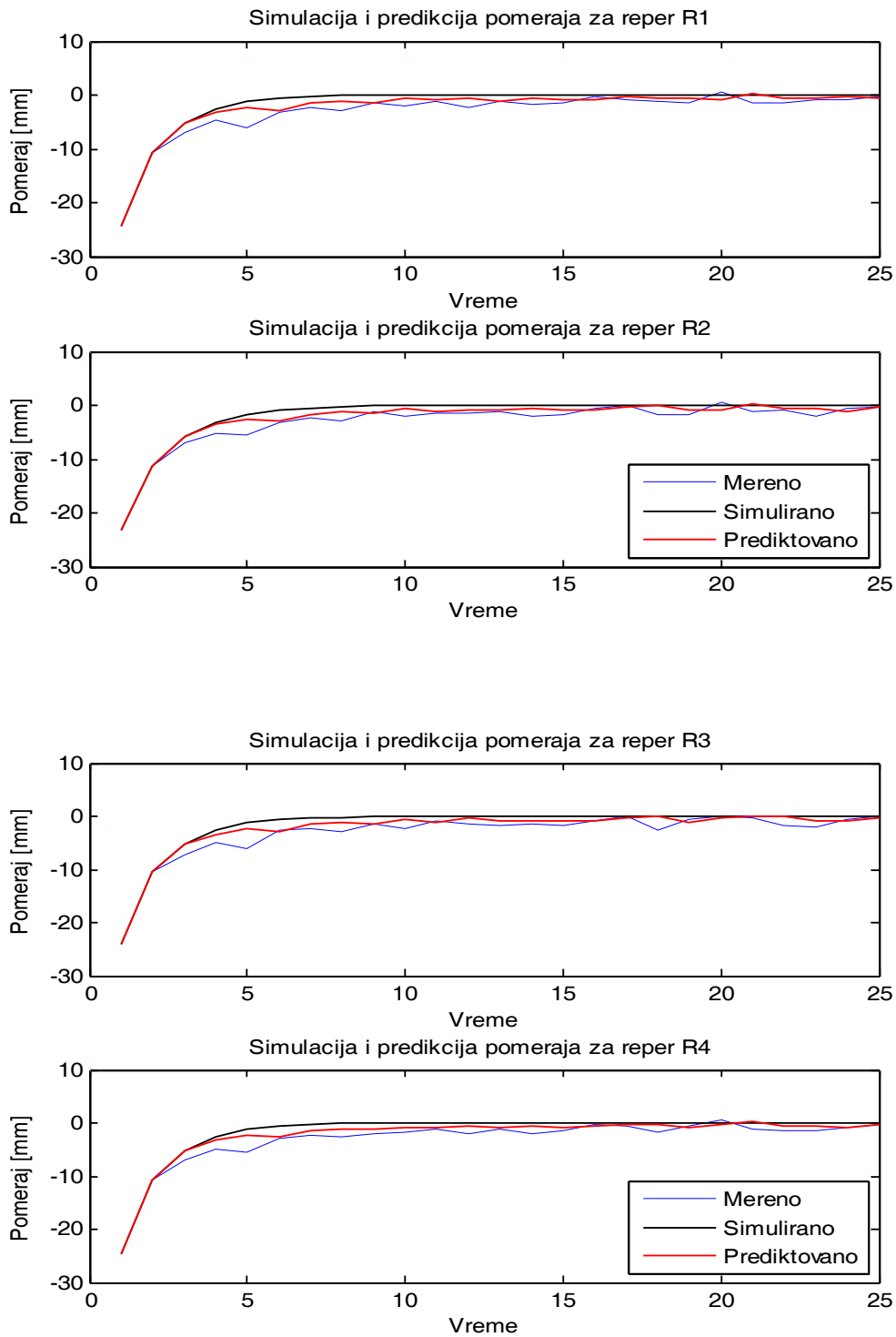
Јасно је да су оцене параметара за податке који су детрендовани апроксимирајућом функцијом безначајни, јер су оцене стандардних одступања веће од самих параметара по апсолутној вредности. Овакве оцене наводе на закључак да је апроксимирајућа функција добро моделирала мерене податке, а да су преостале варијације занемарљиве, нису постојали утицаји који би довели до значајнијег одступања од тренда.

Критеријум апроксимације *Fit* и Акаике критеријум приказан је у табели 6.30.

Табела 6.30: Критеријуми апроксимације и Акаике критеријум за кинематички модел- Ојлерова метода (пример 1)

Број епоха	Померња репера	Разлике првог реда				Апроксимација функцијом			
		Симулација <i>Fit</i> [%]	Предикција <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC	Симулација <i>Fit</i> [%]	Предикција <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
4. епохе	R1	64.6	75.3	3.57	1.24	77.2	74.8	2.96	1.06
	R2	66.1	77.2			81.6	81.1		
	R3	62.9	73.8			72.5	67.7		
	R4	65.5	77.9			77.3	73.6		
18. епоха	R1	66.4	76.6	1.48	0.39	81.0	81.1	1.14	0.13
	R2	68.1	78.4			80.2	80.4		
	R3	64.6	75.0			79.4	79.0		
	R4	67.4	79.5			80.0	81.2		

Упоређењем процента апроксимације из четири и осамнаест епоха може се закључити да су разлике око 2%, и да су безначајне. Добра страна ове методе је што се на основу малог броја епоха мерења може предвидети понашање процеса ако не делују поремећаји. Разлике између предикције за стационаран (детрендован функцијом) и нестационаран (детрендован разликама првог реда) процес су безначајне, нису веће од 5%. Међутим, разлике између симулације за ова два процеса су значајне и крећу се до 15%. Ова већа разлика за симулацију података може се објаснити тиме што је Ојлерова метода намењена за предикцију један корак унапред. Необично је што је симулација боља у односу на предикцију код стационарног процеса. Ова појава се може објаснити безначајношћу параметара модела. Иначе, ови подаци за стационарни процес су приказани само да би се приказала значајност или безначајност обезбеђења стационарног процеса. У овом примеру је обезбеђена стационарност процеса, али су параметри модела безначајни. За методу потпростора није неопходно да је процес стационаран, и процес може да буде и нелинеаран. На слици 6.28 приказан је график мерених, симулираних и предиктованих података за недетрендоване податке када је моделирање урађено на основу четири епохе мерења.



Слика 6.28: Мерени, симулирани и предиктовани подаци на основу четири епохе мерења за кинематички модел- Ојлерова метода (пример 1)

**Динамички модел – Ојлерова метода**

Ојлерова метода, када је у питању систем првог реда, има следећи облик

$$x[(k + 1)T] = (1 - aT)x[kT] + Tbm[kT]. \quad (6.22)$$

Када се примени овај модел добије се да је параметар уз  $x[kT]$  безначајан. Анализа степена модела у моделима функције преноса је показала безначајност претходног стања у динамичком моделу. Примена модела функције преноса даје значајне информације о моделу простора стања. Поступци одређивања степена модела код функције преноса су једноставнији, на основу ауто- и парцијалне корелације, и могу да послуже и за одређивање значајних параметара код Ојлерове методе. Примењени модел Ојлерове методе је

$$x[(k + 1)T] = Tbm[kT]. \quad (6.23)$$

У табели 6.31 дате су оцене параметра  $b$  са оценом тачности за нестационаран и стационаран процес за оцене добијене на основу четири и осамнаест епоха мерења.

Табела 6.31: Оцењене вредности параметара динамичког модела- Ојлерова метода са оценом стандардног одступања (пример 1)

Број епоха	Померња репера	Разлике првог реда		Апроксимација функцијом	
		Параметар	Стандардно одступање	Параметар	Стандардно одступање
4. епохе	R1	-589.3949	87.1598	-445.2	2640.8
	R2	-618.9573	87.1598	-991.1	2640.8
	R3	-590.2776	87.1598	-85.5	2640.8
	R4	-594.6072	87.1598	-1057.1	2640.8
18. епоха	R1	-589.3949	29.8956		
	R2	-618.9573	29.8956		
	R3	-590.2776	29.8956		
	R4	-594.6072	29.8956		

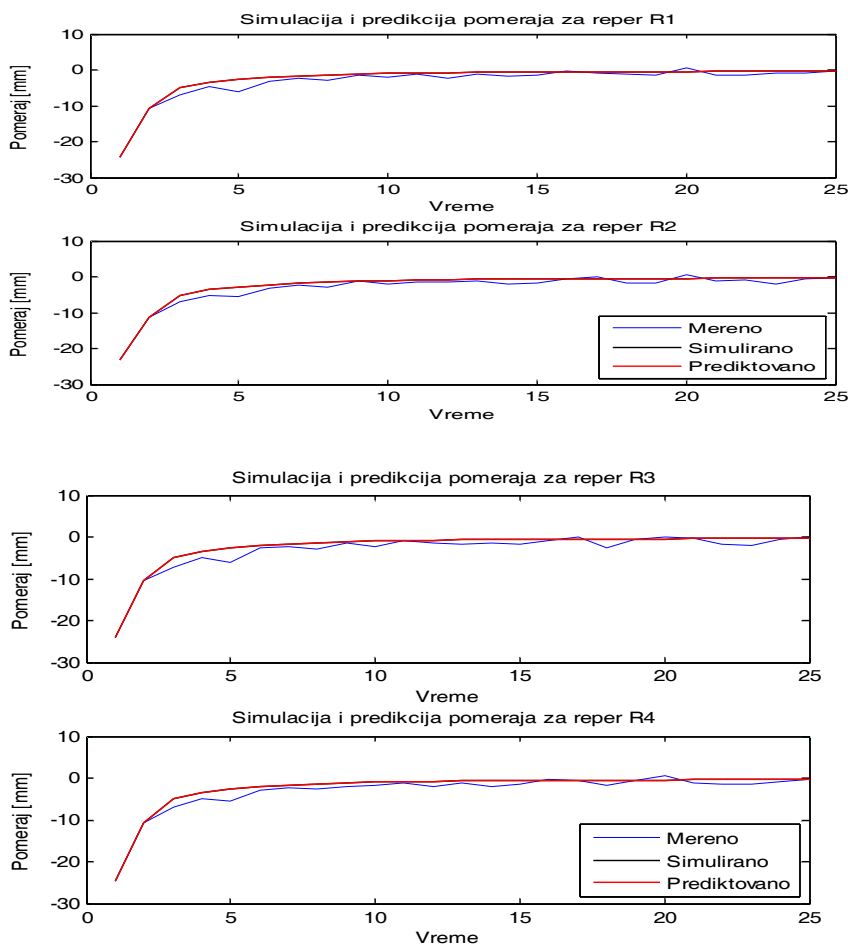
Јасно је да су оцене параметара за податке који су детрендовани апроксимирајућом функцијом безначајни, јер су оцене стандардних одступања веће од самих параметара по апсолутној вредности. Овакве оцене наводе на закључак да је апроксимирајућа функција добро моделирала мерене податке, а да су преостале варијације занемарљиве, нису постојали утицаји који би довели до значајнијег одступања од тренда.

Критеријум апроксимације *Fit* и Акаике критеријум приказан је у табели 6.32. Пошто са десне стране једначине (6.23) фигурише само улазни сигнал поступак симулације и предикције је идентичан.

Табела 6.32: Критеријуми апроксимације и Акаике критеријум за динамички модел- Ојлерова метода (пример 1)

Број епохе	Померња репера	Разлике првог реда			Апроксимација функцијом		
		Симулација <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC	Симулација <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
4. епохе	R1	77.9	4.76	1.50	77.9	3.00	1.07
	R2	78.2			78.2		
	R3	75.4			75.4		
	R4	79.1			79.1		
18. епохе	R1	81.4	0.77	-0.26			
	R2	81.8					
	R3	80.7					
	R4	82.0					

На слици 6.29 приказани су мерени, симулирани и предиктовани подаци за нестационаран процес. Параметри модела су добијени на основу четири епохе мерења



Слика 6.29: Мерени, симулирани и предиктовани подаци на основу четири епохе мерења за динамички модел- Ојлерова метода (пример 1)



**Динамички модел- Тустинова апроксимација**

Тустинова апроксимација је приказана у поглављу 4 формула (4.79). Речено је да је разлика у односу на Ојлерову методу у томе што се за висину паралелограма између тренутака  $[kT]$  и  $[(k + 1)T]$  узима аритметичка средина вредности функције у овим тренуцима. Модел апроксимације за овај пример, узимајући у обзир ауто-, парцијалну и међусобну корелацију улазне и излазних временских серија је следећег облика

$$x[(k + 1)T] = \frac{T}{2}b(m[kT] + m[(k + 1)T]). \quad (6.24)$$

У табели 6.33 приказане су оцене параметара са оценом стандардног одступања. Оцене су добијене из четири епохе мерења и подаци су детрендовани разликама првог реда.

Табела 6.33: Оцењене вредности параметара динамичког модела- Тустинова апроксимација са оценом стандардног одступања (пример 1)

Број епоха	Померња репера	Разлике првог реда	
		Параметар	Стандардно одступање
4. епохе	R1	-804.0193	68.9939
	R2	-844.3203	68.9939
	R3	-808.4405	68.9939
	R4	-812.5859	68.9939

И код ове апроксимације за серије које су детрендоване апроксимирајућом кривом добија се да је оцена параметра модела безначајна. Такође, не добија се значајно побољшање симулације ако се оцене параметра добију из већег броја епоха мерења

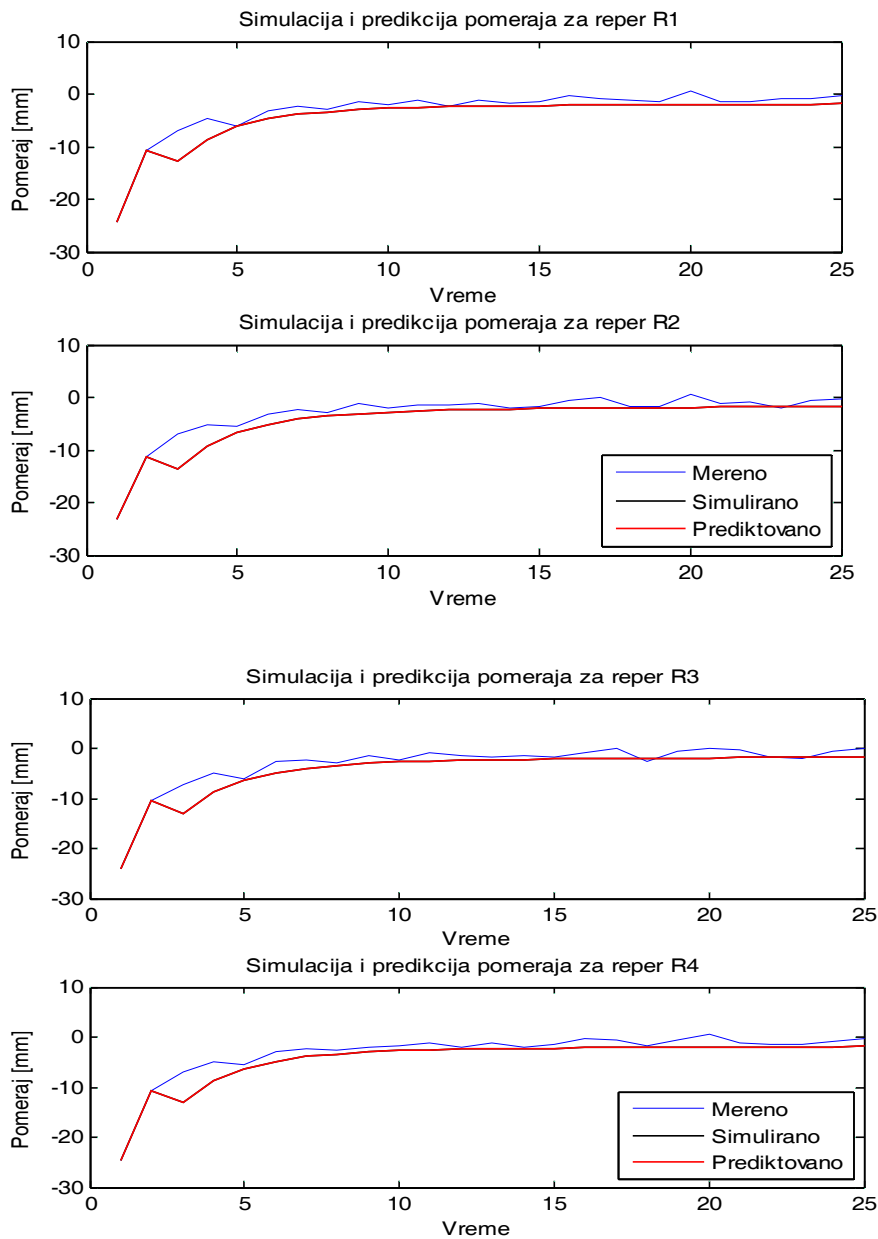
Критеријум апроксимације *Fit* и Акаике критеријум приказан је у табели 6.34.

Табела 6.34: Критеријуми апроксимације и Акаике критеријум за динамички модел- Тустинова апроксимација (пример 1)

Број епоха	Померња репера	Разлике првог реда		
		Симулација <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
4. епохе	R1	63.2	2.30	0.81
	R2	58.7		
	R3	62.3		
	R4	63.7		

Упоредом процената апроксимације симулацијом Ојлерове методе (табела 6.32) и Тустинове апроксимације (табела 6.34) види се да је проценат апроксимације бољи код Ојлерове методе за 15% до 20%. Међутим, Акаике критеријуми дају предност Тустиновој апроксимацији, јер су мањи.

На слици 6.30 приказани су мерени, симулирани и предиктовани подаци за нестационаран процес. Параметри модела су добијени на основу четири епохе мерења



Слика 6.30: Мерени, симулирани и предиктовани подаци на основу четири епохе мерења за динамички модел- Тустинова апроксимација (пример 1)

### 6.4.2.3 Одређивање параметара модела на основу претпостављеног облика функције преноса

У потпоглављима 4.4.1 и 4.4.2 описани су поступци идентификације система када је позната структура модела, тзв „сива“ кутија („gray box“). На основу графика слегања конструкције услед оптерећења (слика 4.6 или слика 6.5 за пример- висинске разлике F2-R1 и R4-F3) може се закључити следеће:

- график има облик инверзне опадајуће експоненцијалне функције са фактором пригушења;
- постоји временска константа система, а кашњење система у одговору се не може регистровати класичним геодетским методама (генерални нивелман);
- улазни сигнал је одскочни, јер се за кратко време (краће од месец дана) нанесе велико оптерећење, а излазни сигнал је померај (слегање)

На основу раније наведеног облик функције преноса је (4.102)

$$G_{ob}(s) = \frac{K_{st}}{T_{ob}s+1}, \quad (6.25)$$

$K_{st}$  – статичко појачање,  $T_{ob}$ - временска константа објекта (система), и на основу њега може се дефинисати и облик решења диференцијалне једначине. Да би се одредио облик решења диференцијалне једначине на основу функције преноса примењује се инверзна Лапласова трансформација

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(G_{ob}(s)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} e^{st} G_{ob}(s) ds. \quad (6.26)$$

Ово је комплексни интеграл по Бромвичевој контури [Тошић, 2002]. Применом Кошијеве теореме о остацима добија се решење овог одређеног интеграла (3.15)

$$Res_{s=a} f(s) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} [(s-a)^k f(s)], \quad (6.27)$$

где је  $a$  - пол функције  $f(s)$ , а  $k$  – број полова функције. Решење комплексног интеграла за функцију преноса  $G_{ob}(s)$  је

$$y(t) = \frac{K_{st}}{T_{ob}} e^{-\frac{t}{T_{ob}}}. \quad (6.28)$$

И за ову методу одређивања параметара модела за оцену параметара коришћене су разлике првог реда  $w^1(i)$ ,  $i$  је редослед разлике у временској серији. Временска константа објекта је добијена као количник друге и прве разлике првог реда

$$T_{ob} = \frac{w^1(2)}{w^1(1)}, \quad (6.29)$$

а статичко појачање је одређено из израза (6.28)

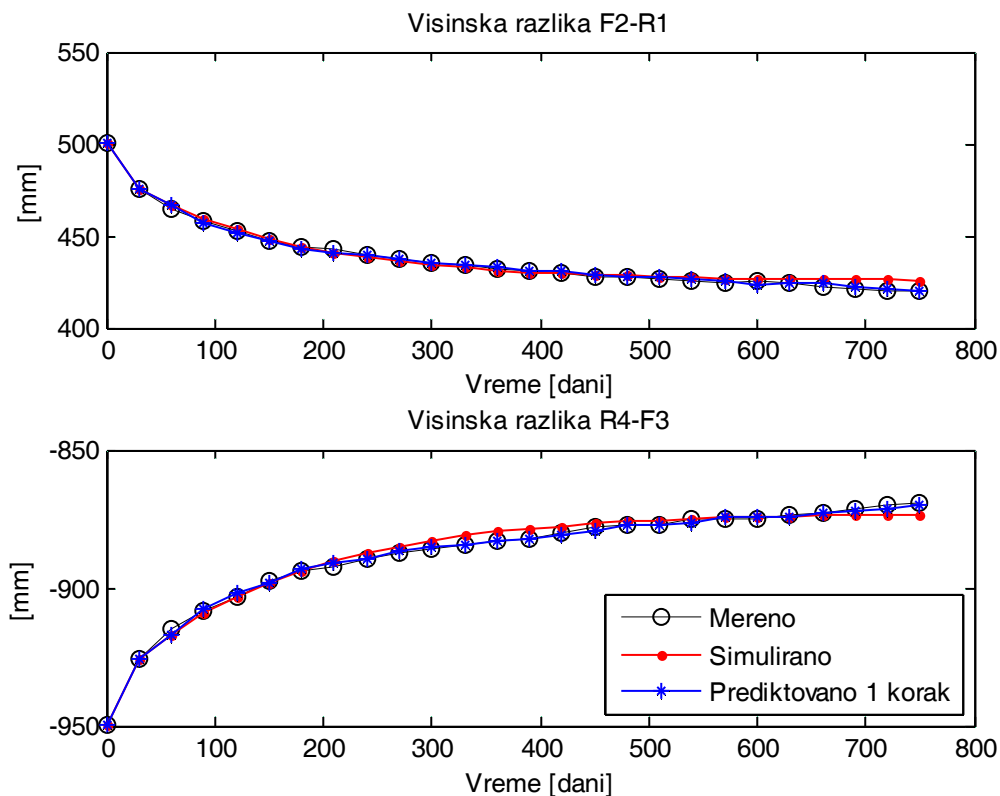
$$K_{st} = T_{ob} \frac{w^1(2)}{e^{-\frac{2T}{T_{ob}}}}, \quad (6.30)$$

$T = 0.0822$  – период одабирања. За оцену параметара за висинске разлике F2-R1 и R4-F3 на основу мерења из три епохе су добијене следеће оцене (табела 6.35). У табели је приказан и проценат апроксимације симулацијом и предикцијом један корак унапред.

Табела 6.35: Параметри динамичког процеса првог реда са критеријумом апроксимације (пример 1)

Од	До	$\hat{T}_{ob}$ [mesecc]	$\hat{K}_{st}$ [mm/mesecc]	Симулација Fit[%]	Предикција Fit[%]
F2	R1	0.4257	-0.006641	87.1	94.7
R4	F3	0.4463	0.006918	88.8	95.2

На слици 6.31 приказани су мерени, симулирани и предиктовани подаци за процес првог реда.

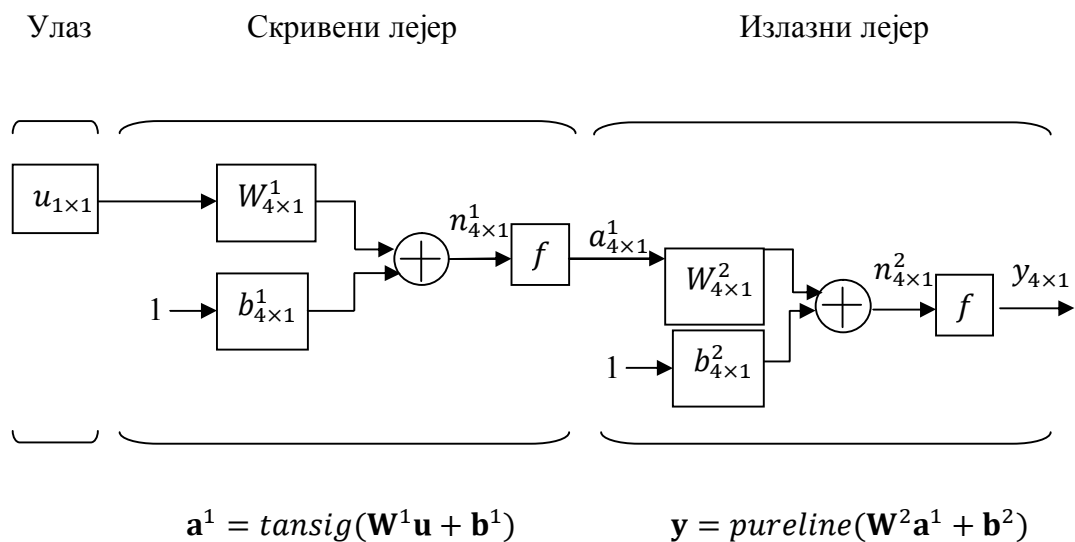


Слика 6.31: Мерени, симулирани и предиктовани подаци за динамички процес првог реда (пример 1)

### 6.4.3 Вештачка неуронска мрежа – пример 1

Вештачка неуронска мрежа је приказана у потпоглављу 5.2. Као што је и наведено у 5.2 за описивање динамичких карактеристика већине процеса примењује се мрежа ширења уназад, јер је речено да мреже са два лејера, где је у првом лејеру функција преноса логаритамска сигмоид функција, а у другом линеарна функција може да опише сваку функцију уз довољан број итерација учења.

Мрежа у овом примеру има један улазни сигнал (просечна консолидација терена), један скривени лејер и излазни лејер- висине репера (слика 6.32). У скривеном лејеру су четири неурона са, такође четири утицаја. Функција преноса је хиперболични-тангент сигмоид. У излазном лејеру су четири неурона, а активациона функција је линеарна (табела 5.3).



Слика 6.32: Вештачка неуронска мрежа за (пример 1)

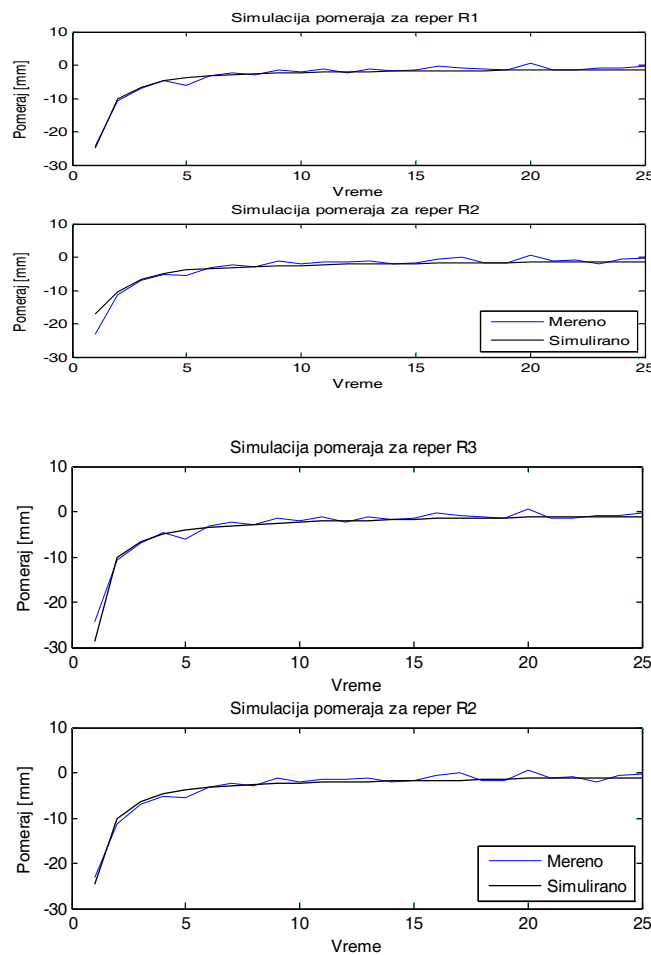
За оцењивање параметара модела (тежина и утицаја) примењен је програм *Matlab R2008a*, који у себи има развијен модул за вештачке неуронске мреже. Примењен је алгоритам мреже ширења уназад. Коришћен је Левенберг-Маркуард поступак за оцењивање параметара нелинеарног система. Мрежа је учена на скупу од 18

епоха, а тестирана на скупу од 8 епоха. Поступак учења је урађен два пута по 8 итерација. У ових осам итерација задовољен је критеријум да је стандардно одступање параметара мање од  $10^{-10}$ . Модел вештачке неуронске мреже је примењен и на разлике првог реда и на детрендоване податке функцијом. Критеријуми валидације су приказани у табели 6.36.

Табела 6.36: Критеријуми апроксимације за вештачку неуронску мрежу (пример 1)

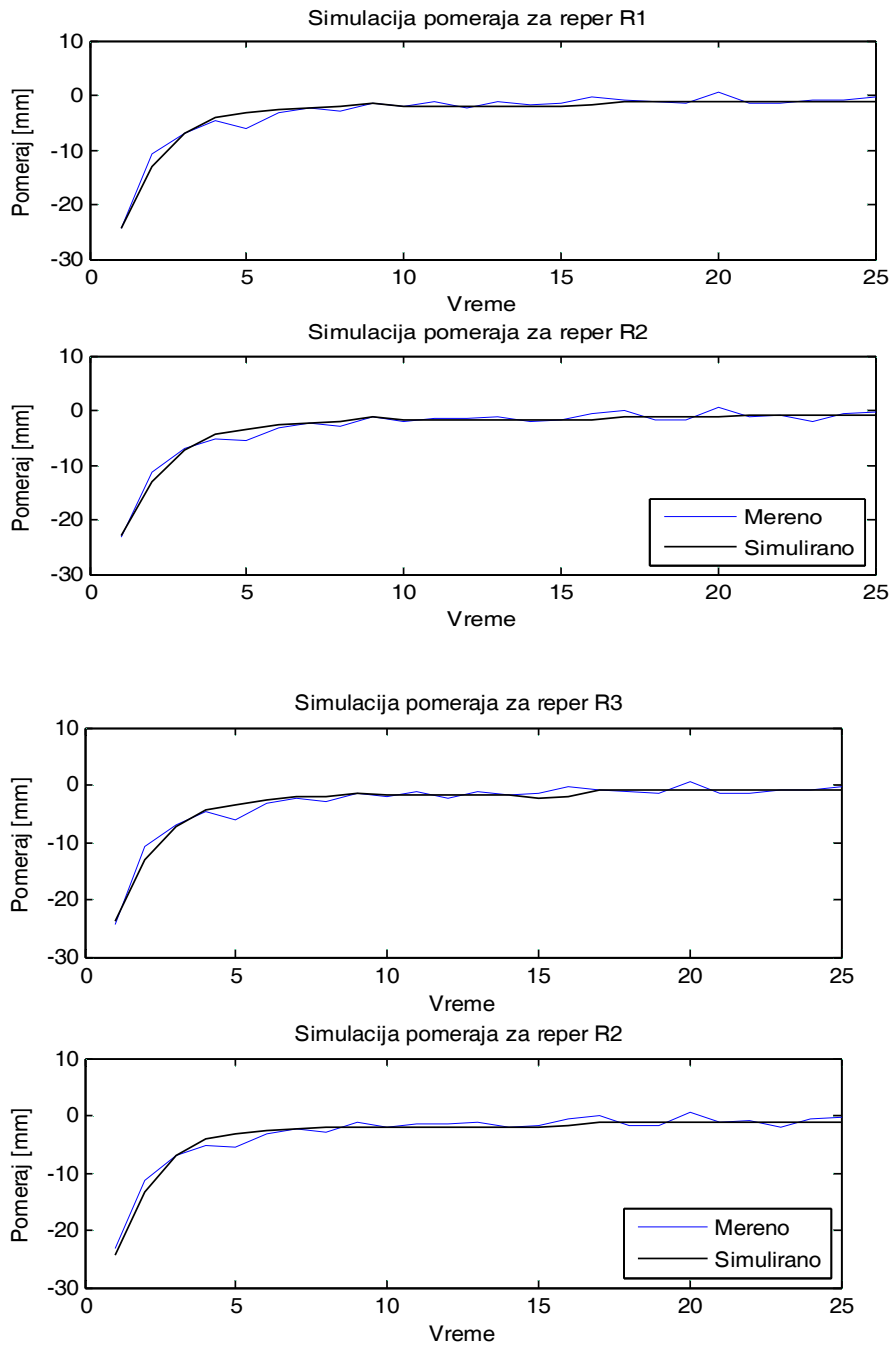
Померња репера	Разлике првог реда	Апроксимација функцијом
	Симулација <i>Fit</i> [%]	Симулација <i>Fit</i> [%]
R1	82.8	80.7
R2	67.6	82.9
R3	73.9	79.7
R4	85.2	81.4

На слици 6.33 приказани су мерени и симулирани подаци на основу модела вештачке неуронске мреже- мреже ширења уназад – недетрендоване податке.



Слика 6.33: Мерени и симулирани подаци за мрежу ширења уназад – недетрендовани подаци – пример 1.

На слици 6.34 приказани су мерени и симулирани подаци на основу модела вештачке неуронске мреже- мреже ширења уназад –детрендовани податке.



Слика 6.34: Мерени и симулирани подаци за мрежу ширења уназад – детрендовани подаци (пример 1)

#### 6.4.4 Закључак за пример 1.

Пример обрађује најчешћи задатак који геодети обављају у оквиру деформационе анализе, а то је праћење померања у вертикалној равни, тзв. слегање објекта. На основу свега приказаног може се закључити следеће:

1. Процес је првог реда.
2. Улазни и излазни сигнали су временске серије разлика првог реда.
3. Обезбеђивање стационарности је јако приметан поступак; разлике мерених висинских разлика и прираштаја оцењених висина репера се апроксимирају функцијом облика  $w^1(t_i) = d - fe^{-kt_i}$ , док се разлике прираштаја оцењених брзина померања репера детрендују функцијом  $(t_i) = ae^{bt_i} + ce^{dt_i}$ .
4. Анализом ауто-, парцијалне и међусобне корелације добијају се значајне информације о врсти и структури модела, односно о зависности унутар и између временских серија.
5. Разлике у симулацији и предикцији код ARX модела за стационарне и нестационарне (разлике првог реда) су безначајне.
6. Ауторегресивни модел је непоуздан за симулацију, али је за предикцију један корак унапред поуздан.
7. Модел са променљивом средином (МА) се може применити на стационарне податке, јер он описује поремећаје система и мање је поуздан од ARX, а ауторегресивни са променљивом средином (ARMA) може се применити само на нестационарне податке – поуздан је само за предикцију један корак унапред;
8. Метода потпростора има добру особину што на основу малог броја епоха се може успешно симулирати понашање система; Ојлерова метода је боља од Тустинове апроксимације за симулацију и предикцију.
9. Одређивање функције преноса, односно параметара диференцијалне једначине првог реда са константним коефицијентима (“gray-box”) веома добро симулира и предиктује систем; мали број епоха је неопходан за одређивање параметара система; не захтева се стационарност процеса.



10. Вештачке неуронске мреже захтевају доста рачунања; добијени су приближно исти проценати апроксимације мерених података симулацијом као код Ојлерове методе.

### **6.5 ИСПИТИВАЊЕ ПОНАШАЊА ПИЛОНА МОСТА НА ПРОБНО ОПТЕРЕЋЕЊЕ – ПРИМЕР 2**

Пре пуштања моста у употребу постоји законска обавеза да се мост испита на пробна оптерећења. Оптерећења на која се мост испитује су 85% од пројектованог оптерећења; распоређују се на мост тако да се целе конструкције и сегменти конструкције проверавају на симетрична и асиметрична оптерећења. Након сваког оптерећења конструкција се растеређује.

Током испитивања геодете су задужене за одређивање апсолутних угиба сегмената конструкције, који припадају глобалним статичким деформацијама, и праћење у 2Д равни пилона моста, ако постоје. За мерење померања у 1Д равни примењује се геометријски нивелман, а за одређивање помераја пилона могу се применити терестричка или ГПС метода.

У овом потпоглављу моделирано је понашање пилона према Новом Саду моста „Слободе“. На почетку је описана конструкција моста, програм и процедуре испитивања, као и поступак обраде ГПС података са добијеним стандардним одступањима оцена непознатих параметара. Моделирање понашања пилона је урађено по моделима као и у претходном потпоглављу. Једина разлика је што подаци нису детрендовани, само је од свих података временских серија  $Y$ ,  $X$  и температуре одузета почетна вредност, јер ми смо положај пилона моста одредили пре оптерећења у тренутку када је била одређена температура и може се само анализирати промена услед прираштаја температуре. Просторни положај који је одређен пре оптерећења представља почетни положај. Подаци нису детрендовани зато што модел треба да садржи физичке нивое временских серија.

### 6.5.1 Конструкција моста

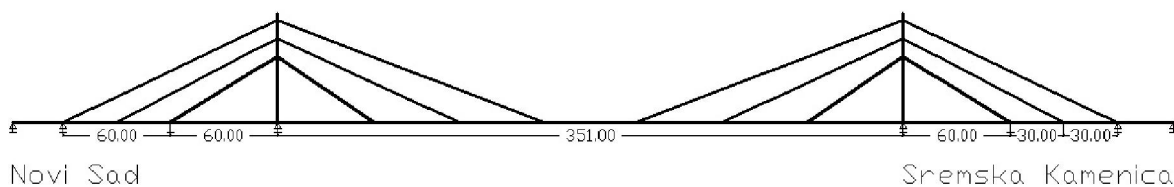
Мост "Слобода" је изграђен у периоду од 1976. до 1981. године и налази се на реци Дунав. Он повезује градове Нови Сад и Сремску Каменицу. Конструкција моста је делимично оштећена 1999. године, а у периоду 2003. – 2005. године мост је реконструисан, након чега је уследило пробно испитивање, чији подаци су коришћени за моделирање понашања пилона. Конструкција моста се састоји из:

- осам бетонских стубова различите дебљине од којих су два на обалама а остали су у кориту реке,
- главне конструкције изнад реке Дунав, укупне дужине 591 m,
- два метална стуба (пилона) изнад главне конструкције моста,
- приступне конструкције, која се према Новом Саду састоји од четири сегмента, а према Сремским Карловцима од три сегмента. Дужина свих сегмената је иста и појединачно износи 60 m.

Основна конструкција моста је кабловима повезана са централним металним стубовима (пилонима). Стубови су висине 60 m и фундирани су у основу конструкције. По три кабла повезују стубове и конструкцију. Учвршћења каблова на пилонима су на следећим висинама: 36 m, 46 m и 56 m. Каблови су дуж највећег централног распона, који износи 351 m, учвршћени на растојањима од стубова на: 54 m, 102 m и 150 m; а ка обалама на растојањима од: 60 m, 90 m и 120m од стуба. Панорамски снимци ширег окружења моста Слободе дати су на слици 6.35, а графички приказ подужног пресека моста на слици 6.36.



Слика 6.35: Панорамски снимци моста Слободе



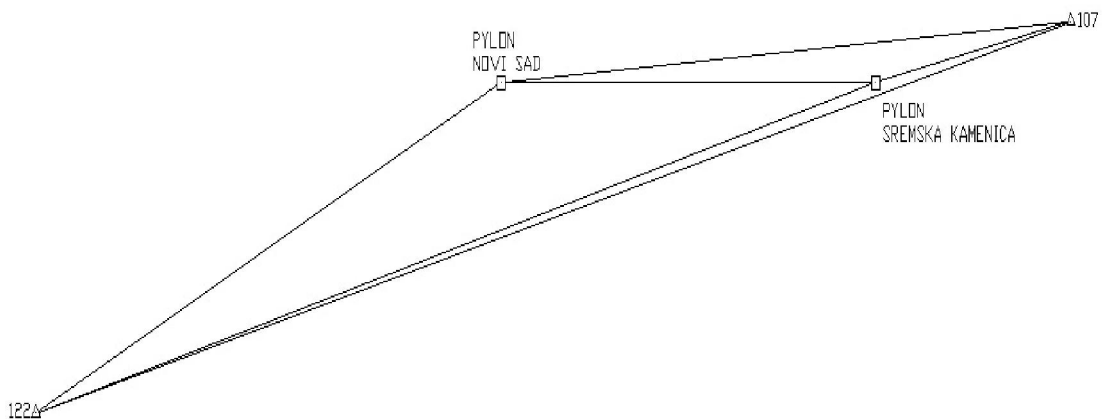
Слика 6.36: Подужни пресек моста са диспозицијом ослањања

### 6.5.2 Програм и процедуре испитивања

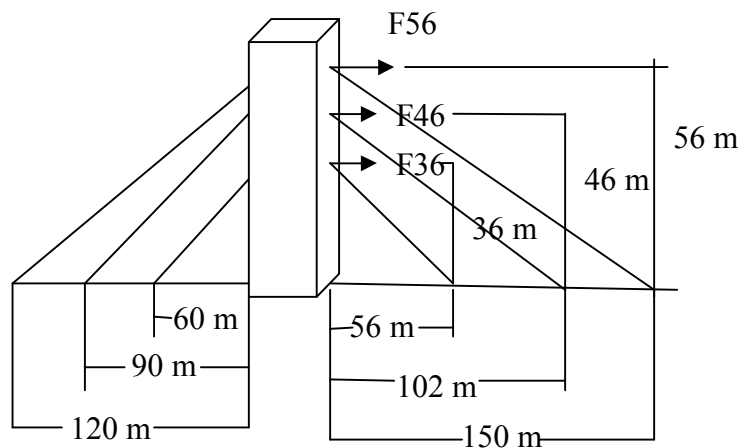
Конструкција моста је испитивана на статичка и динамичка оптерећења у складу са прописима који су били важећи у Републици Србији септембра 2005. године. Програм испитивања је обухватио мерење глобалних и локалних деформација, као и динамичких карактеристика конструкције. У овом раду је приказано само одређивање померања стуба (пилона) моста ка Новом Саду, које спада у глобалне деформације, и које се одређују геодетским методама.

### 6.5.2.1 Праћење померања пилона

Праћење померање врха пилона услед пробног оптерећење извршено је статичком ГПС методом. Пројектована је геодетска контролна мрежа, коју су чиниле четири тачке и то по једна тачка на стубовима моста (пилони) и по једна тачка на обе обале Дунава, као што је приказано на скици мреже (слика 6.37). Два Trimble 4600LS пријемника су постављена на врхове пилона, а по један пријемник типа HIPER и LEGACY на тачке мреже (геодетски стубови) на обали Дунава ка Новом Саду и обали ка Сремским Карловцима. Време мерења и вредности улазних сигнала дате су у табели 6.37 и односе се за пилон на обали ка Новом Саду.



Слика 6.37: Скица мреже за праћење пилона моста „Слобода“ у Новом Саду

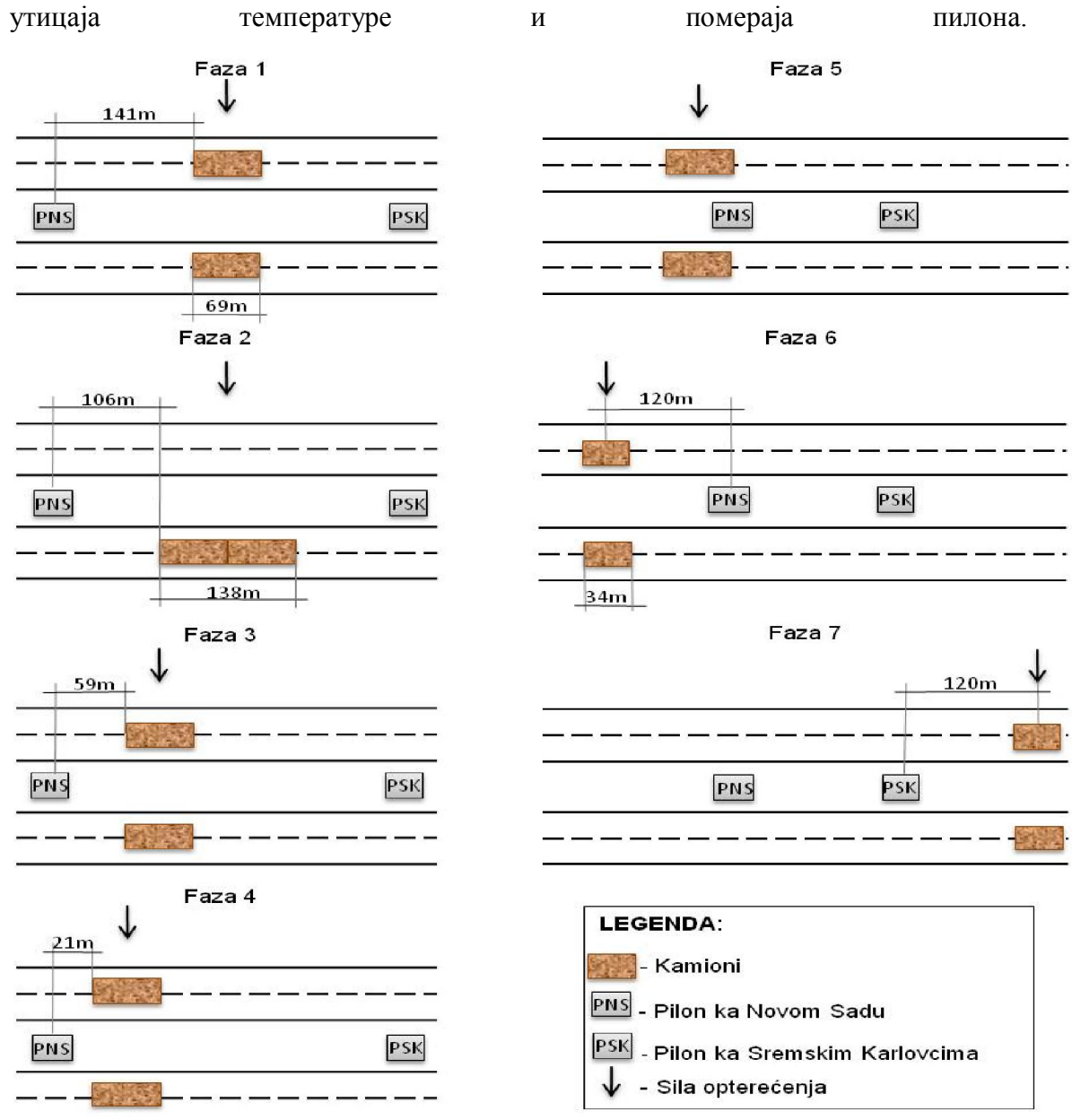


Слика 6.38: Графички приказ сила на пилону

Табела 6.37: Временски план опажања са вредностима улазних сигнала

Број епохе	Време	Сила у кабловима на:			Температура $tem$ [°C]	Фаза оптерећења
		56 m	46 m	36 m		
		F56 [MN]	F46 [MN]	F36 [MN]		
1	6 <sup>h</sup> 00 <sup>min</sup> – 6 <sup>h</sup> 25 <sup>min</sup>	0	0	0	17	Растерећење
2	6 <sup>h</sup> 25 <sup>min</sup> – 6 <sup>h</sup> 50 <sup>min</sup>	0	0	0	17	Растерећење
3	6 <sup>h</sup> 50 <sup>min</sup> – 7 <sup>h</sup> 15 <sup>min</sup>	0	0	0	17	Растерећење
4	7 <sup>h</sup> 25 <sup>min</sup> – 7 <sup>h</sup> 50 <sup>min</sup>	-0.426	-0.414	1.137	18	1
5	7 <sup>h</sup> 50 <sup>min</sup> – 8 <sup>h</sup> 15 <sup>min</sup>	-0.426	-0.414	1.137	18	1
6	8 <sup>h</sup> 15 <sup>min</sup> – 8 <sup>h</sup> 40 <sup>min</sup>	-0.426	-0.414	1.137	19	1
7	8 <sup>h</sup> 40 <sup>min</sup> – 9 <sup>h</sup> 05 <sup>min</sup>	-0.426	-0.414	1.137	20	1
8	9 <sup>h</sup> 15 <sup>min</sup> – 9 <sup>h</sup> 40 <sup>min</sup>	0	0	0	20	Растерећење
9	9 <sup>h</sup> 40 <sup>min</sup> – 10 <sup>h</sup> 05 <sup>min</sup>	0	0	0	21	Растерећење
10	10 <sup>h</sup> 20 <sup>min</sup> – 10 <sup>h</sup> 45 <sup>min</sup>	-0.130	-0.647	0.951	22	2
11	10 <sup>h</sup> 45 <sup>min</sup> – 11 <sup>h</sup> 10 <sup>min</sup>	-0.130	-0.647	0.951	23	2
12	11 <sup>h</sup> 15 <sup>min</sup> – 11 <sup>h</sup> 40 <sup>min</sup>	0	0	0	24	Растерећење
13	11 <sup>h</sup> 40 <sup>min</sup> – 12 <sup>h</sup> 05 <sup>min</sup>	0	0	0	25	Растерећење
14	12 <sup>h</sup> 05 <sup>min</sup> – 12 <sup>h</sup> 30 <sup>min</sup>	1.318	-1.413	-0.413	27	3
15	12 <sup>h</sup> 40 <sup>min</sup> – 13 <sup>h</sup> 05 <sup>min</sup>	1.263	-0.759	-1.050	28	4
16	13 <sup>h</sup> 15 <sup>min</sup> – 13 <sup>h</sup> 40 <sup>min</sup>	0	0	0	28	5
17	13 <sup>h</sup> 50 <sup>min</sup> – 14 <sup>h</sup> 15 <sup>min</sup>	0	0	0	28	6
18	14 <sup>h</sup> 15 <sup>min</sup> – 14 <sup>h</sup> 40 <sup>min</sup>	0	0	0	28	7
19	14 <sup>h</sup> 40 <sup>min</sup> – 15 <sup>h</sup> 05 <sup>min</sup>	0	0	0	29	Растерећење
20	15 <sup>h</sup> 05 <sup>min</sup> – 15 <sup>h</sup> 30 <sup>min</sup>	0	0	0	29	Растерећење

Тест оптерећење је изазивано помоћу 16 тешких камиона. Сваки камион са теретом је приближно имао масу од 42 тоне. Тежине камиона су измерене пре испитивања. Интензитет и позиција камиона на мосту (статичко оптерећење) је прорачунато да би изазвало 50-80% од максималног дозвољеног напрезања конструкције. Оптерећење познатим теретом изазивало је одговарајуће силе у кабловима, чије вредности су дате у табели 6.37. Статичко оптерећење је извршено по фазама од 1 до 7, где је свака фаза имала другачији распоред и вредност оптерећења (распоред камиона са теретом дат је на слици 6.39). Фазе оптерећења 5, 6 и 7 нису изазвале силе у кабловима на пилону ка Новом Саду, што је приказано у табели 6.37. Поменуте фазе су искоришћене само за анализу



Слика 6.39: Распоред оптерећења по фазама

Усвојено је да су силе у кабловима имају позитиван предзнак ка обали, а негативан ка централном делу моста. Негативна вредност силе, дате у табели 6.37, значи да се пилони нагињу један ка другоме, односно веће је напрезање унутрашњих сајли. Оптерећење је извршено по следећим фазама:

Фаза 1: Оптерећење је распоређено у обе коловозне траке (по 8 шлепера на средини средњег распона моста),

- Фаза 2: Несиметрично оптерећење (свих 16 шлепера у једној коловозној траци средњег распона моста),
- Фаза 3: Оптерећење се састојало од 16 шлепера распоређених у обе коловозне траке, на удаљености од 59 m од пилоне ка Новом Саду према средњем распону моста,
- Фаза 4: Оптерећење се састојало од 16 шлепера распоређених у обе коловозне траке, на удаљености од 21 m од пилоне ка Новом Саду према средњем распону моста,
- Фаза 5: Оптерећење се састојало од 16 шлепера распоређених у обе коловозне траке код пилоне ка Новом Саду, непосредно од пилоне ка обали,
- Фаза 6: Оптерећење се састојало од 8 шлепера распоређених у обе коловозне траке удаљених од пилоне ка Новом саду на 120 m према Новом Саду,
- Фаза 7: Оптерећење се састојало од 8 шлепера распоређених у обе коловозне траке удаљених од пилоне ка Сремским Карловцима од 120 m, према Сремским Карловцима.

Пројектовано трајање епохе мерења било је 25 минута, како би се добила фиксна решења вектора ГПС мерења. Такође, овим минималним избором трајања епохе мерења, омогућује се оцена утицаја температуре јер је улазни одскочни сигнал (оптерећење) исти за одређену фазу.

Након процесирања вектора, где су добијена фиксна решења, урађено је 2Д изравнање у локалном координатном систему, где је Y- оса дефинисана дуж подужне осе моста, а X-оса у смеру тока Дунава. Све епохе мерења (укупно 20) су изравнате обједињено. Координате врхова пилоне су оцењене за сваку епоху посебно, а координате геодетских стубова на обалама су сматране непромењеним за укупан период опажања, пошто изазвана оптерећења не утичу на геодетске стубове. Примењени поступак изравнања је идентичан као код Карлсруе методе за идентификацију стабилних тачака, где нестабилне тачке добијају различите координате по епохама, а стабилне тачке имају јединствене координате за све епохе. Овим поступком у изравнању је:

- број мерених величина 101, по 5 вектора за сваку епоху мерења (1 између врхова пилоне и 4 вектора од обалних геодетских стубова до

врхова пилона) и 1 вектор између обалних геодетских стубова за цео период опажања ( $20 \times 5 + 1$ );

- број укупно изравнатих тачака је 42, по 20 за врхове пилона и 2 тачке геодетских стубова ( $2 \times 20 + 2$ ).

Оцена стандардног одступања из изравнања за све изравнате тачке је:

- дуж Y- осе у интервалу од 1.1 mm до 2.2 mm,
- дуж X- осе у интервалу од 1.2 mm до 3.9 mm.

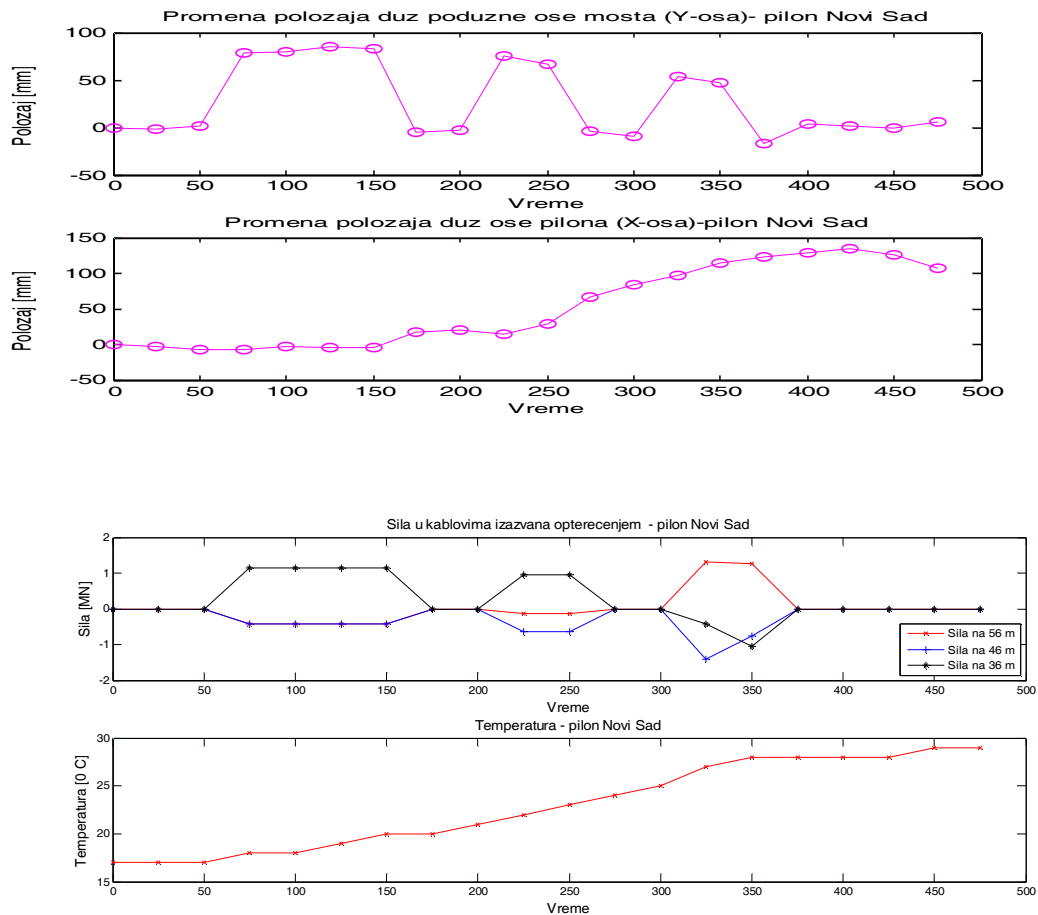
### 6.5.3 Анализа података временских серија – пример 2

На основу анализе података временских серија добијају се информације, као што је раније наведено, о: реду и линеарности или нелинеарности система (графички приказа података), врсти и степену модела (анализа ауто-, парцијалне и међусобне корелације). Ове информације се узимају за почетно моделирање, а за добијање дефинитивног модела неопходно је анализирати значајност параметара и извршити валидацију модела.

#### *Графичка представа података- пример 2*

Графички приказ података дат је на слици 6.40. На основу дијаграма промене положаја врха пилона дуж Y и X осе може се закључити да помераји динамичког система дуж Y – осе припадају систему другог реда са имагинарним половима, а помераји дуж X- осе припадају вероватно систему првог реда. Такође, овај приказ указује да на помераје дуж Y- осе доминантно утиче сила у кабловима, највише сила у каблу који је укотвљен на 56 m. На помераје у правцу X- осе доминантна је промена температуре.



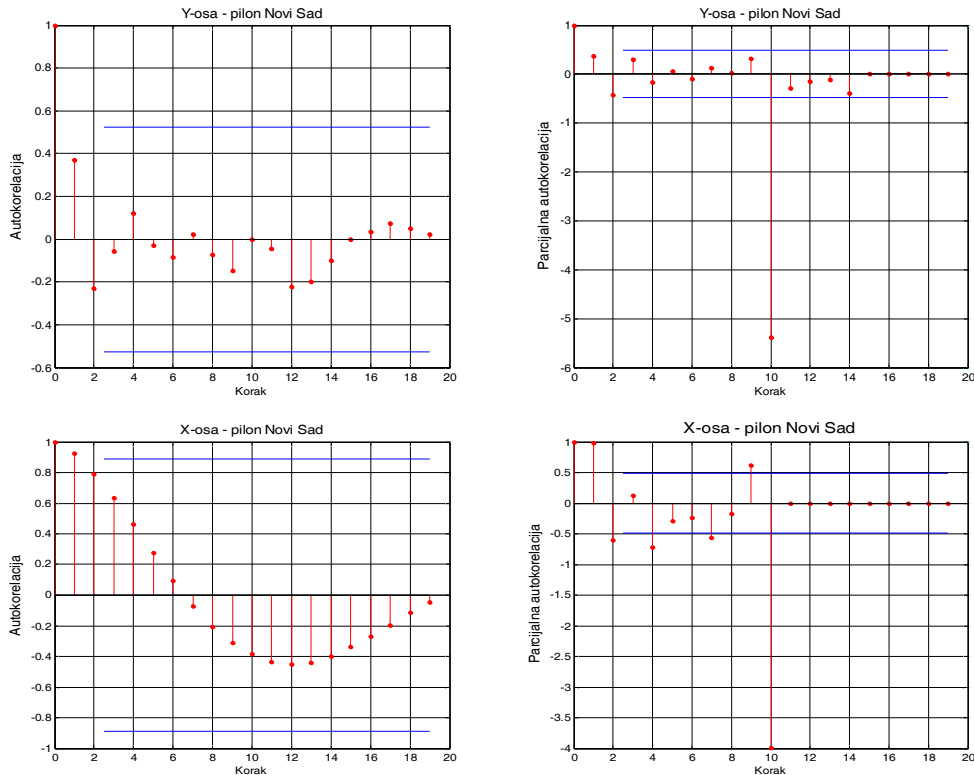


Слика 6.40: Графички приказ излазних и улазних сигнала (пример 2)

### Анализа аутокорељација, парцијалне аутокорељације и међусобне корелације (пример 2)

Анализом дијаграма аутокорељације (слика 6.41) може се закључити да претходни помераји дуж  $Y$ - осе не утичу на тренутну вредност помераја; на тренутну вредност помераја дуж  $X$ - осе утиче претходни померај (вредност коефицијента корелације за корак 1 је изван интервала поверења за ниво значајности  $\alpha = 0.05$ ). Познато је да аутокорељација даје информације о степену модела са померајућом средином (МА модел), па можемо рећи да је степен МА модела који описује помераје дуж  $Y$ - осе  $n_c = 0$ , а дуж  $X$ - осе  $n_c = 1$ . На основу корака за вредности парцијалне аутокорељације које су изван интервала поверења могу се донети закључци о степену ауторегресивног модела (AR модел). На основу графика парцијалне аутокорељације закључује се да је степен AR модела

који описује помераје дуж  $Y$ - осе  $n_a = 0$ , а дуж  $X$ - осе  $n_a$  између 1 до 9, али је највероватније 1 (јер је вредност парцијалне аутокорејације за корак 1 веома блиска 1). Такође, за корак 10 парцијална аутокорејација је већа од 1 и за  $Y$  и  $X$  осу што указује на нелогичност, односно детерминанта матрице имениоца за корак 10 је блиска 0.

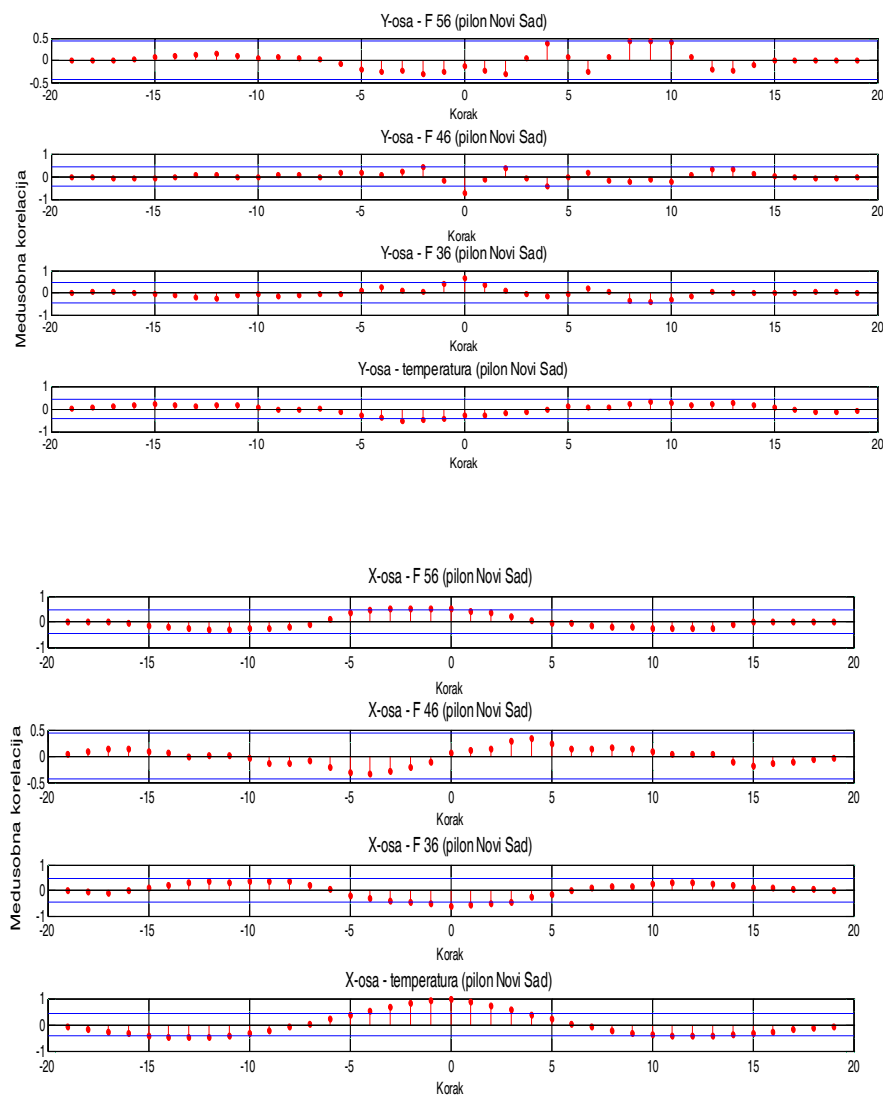


Слика 6.41: Аутокорејација и парцијална аутокорејација излазних сигнала (пример 2)

Слика 6.42 приказује међусобну корелацију између улазних и излазних сигнала. На основу графика се доносе следећи закључци о утицају улазних сигнала на излазне сигнале:

1. утицај силе F56 на померања
  - дуж  $Y$ - осе је до корака 4 и има највећи утицај од свих улазних сигнала јер је коефицијент највећи,
  - дуж  $X$ - осе је безначајан;
2. утицај силе F46 на померања
  - дуж  $Y$ - осе је до корака 4 и има мањи утицај на померања него сила F56, вредности коефицијената су мањи,
  - дуж  $X$ - осе је безначајан;

3. утицај силе F36 на померања
  - дуж Y- осе је безначајан,
  - дуж X- осе је до корака 3;
4. утицај температуре на померања
  - дуж Y- осе је занемарљив,
  - дуж X- осе је до корака 3 и највећи је;
5. утицај претходних померања на тренутну вредност померања
  - дуж Y- осе је занемарљив,
  - дуж X- осе је до корака 1, 2, 4, 7 или 9.



Слика 6.42: Међусобна корелација улазних и излазних сигнала (пример 2)

## 6.5.4 Модели линеарно временски-инваријантних система-

### пример 2

На основу графичке презентације излазних сигнала (слика 6.39) јасно је да линеарна апроксимација не одговара овом примеру, односно процес је нелинеаран. Систем је другог реда по Y- осе, а по X-оси не може се јасно закључити на основу анализе да ли је систем првог или другог реда. Ова нејасноћа настаје из разлога што геодетским методама мерења нису високо фреквентна. Очигледно је да процес дуж Y- осе има изражену нелинеарност, док на процес дуж X-осе доминантан утицај имају промене температуре, која се успешно може апроксимирати линеарним процесом. У овом примеру, за разлику од примера 1, приказани су само најадекватнији модели, односно није приказан цео поступак до одређивања најадекватнијег модела. Провера адекватности модела је, као што је већ речено, спроведена је на основу критеријума апроксимације процеса симулацијом и предикцијом један корак унапред, као и провером значајности параметара модела.

За оцену параметара коришћено је првих 15 епоха мерења, што је око 70% од укупне величине временске серије, а преосталих, од око 30% података, коришћено је за верификацију модела. Провером је установљено да не постоји кашњење система, односно одговор система је тренутан.

### 6.5.4.1 Модели облика функције преноса- пример 2

*Ауторегресивни модел са спољним улазом (ARX) када се процес посматра као линеаран (пример 2)*

Систем моделских једначина детрендованих података је следећег облика

$$\text{Померња дуж Y- осе: } y(t) = b_{y1}F56(t) + b_{y2}F46(t) + b_{y3}F56(t - 1) + e(t), \quad (6.31)$$

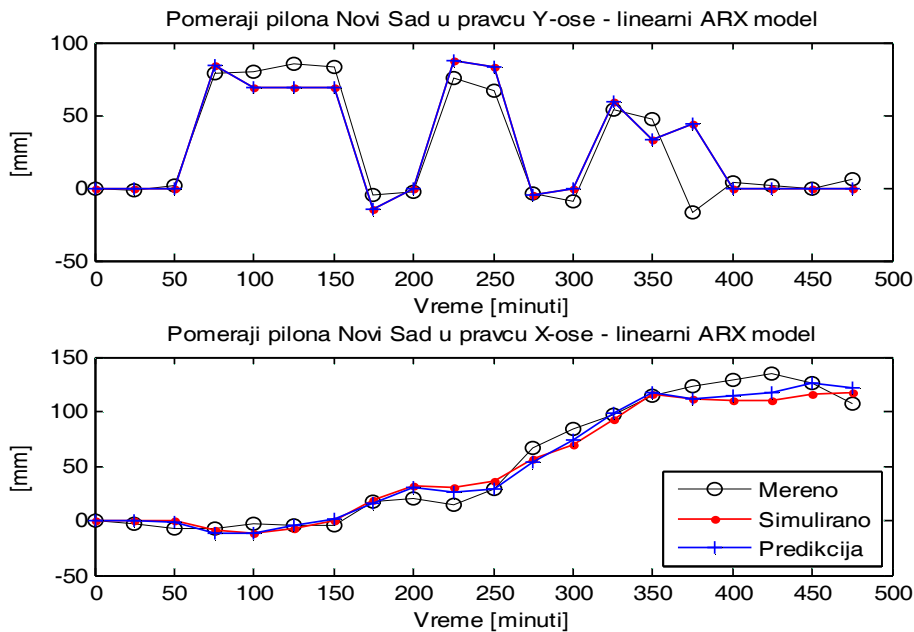
$$\text{Померња дуж X- осе: } x(t) + a_{x1}x(t - 1) = b_{x1}F36(t) + b_{x2}tem(t) + e(t),$$

$n_{ya} = 0$ , а  $n_{yb} = 3$ , а  $n_{xa} = 1$ ,  $n_{xb} = 2$ . Добијене су следеће оцене параметара модела са стандардним одступањима (табела 6.38)

Табела 6.38: Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX када је процес линеаран (пример 2)

Параметар модела	Стандардно одступање
Померња дуж Y- осе	
$\hat{b}_{y1} = -82.1790 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$	$\hat{\sigma}_{b_{y1}} = 9.04 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$
$\hat{b}_{y2} = -118.8605 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$	$\hat{\sigma}_{b_{y2}} = 6.53 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$
$\hat{b}_{y3} = 35.2847 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$	$\hat{\sigma}_{b_{y3}} = 10.25 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$
Померња дуж X- осе	
$\hat{a}_{x1} = -0.3980 [\text{mm}]$	$\hat{\sigma}_{a_{x1}} = 0.19 [\text{mm}]$
$\hat{b}_{x1} = -12.8098 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$	$\hat{\sigma}_{b_{x1}} = 4.44 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$
$\hat{b}_{x2} = 5.9883 \left[ \frac{\text{mm}}{^\circ\text{C}} \right]$	$\hat{\sigma}_{b_{x2}} = 1.37 \left[ \frac{\text{mm}}{^\circ\text{C}} \right]$

На основу оцењених вредности параметара и оцењених стандардних одступања параметара закључује се да су оцене параметара модела значајне (проверено је и статистичким тестирањем хипотеза). Модел померања дуж Y- осе припада тзв. статичким моделима, а дуж X- осе динамичким. На слици 6.43 приказана је симулација и предикција корака 1 за модел (6.31).



Слика 6.43: Симулација и предикција корака 1 померања за модел ARX када је процес линеаран (пример 2)

Критеријум апроксимације *Fit* и Акаике критеријум приказан је у табели 6.39.

Табела 6.39: Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел ARX када је процес линеаран (пример 2)

Померања дуж	Симулација <i>Fit</i> [%]	Предикција <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
Y- осе	56.6	56.6	1637.2	9.66
X- осе	80.6	83.7		

Процент апроксимације померања дуж Y- осе је незадовољавајући, а дуж X- осе је задовољавајући. Акаике информациони критеријум је велики, а финална грешка предикције има веома велику вредност. Проверена је независност и случајност поправака и све су вредности коефицијената аутокорељације и међусобне корелације унутар интервала поверења.

Функција преноса (4.4) и (4.5) за модел мерених података, који је задовољио критеријум значајности параметара, је

Y-оса	$A(z) = 1;$	$B(z) = (-82.1790 + 35.2847z^{-1})F56 - 118.8605F46;$	Функција преноса линеарног система: $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ , Функција преноса поремећаја: $H(z) = \frac{1}{A(z)}$ Пошто је $n_a = 0$ , модел припада коначном импулсном одговору (FIR)
X-оса	$A(z) = 1 - 0.3980z^{-1};$	$B(z) = -12.8098F36 + 5.9883tem;$	Функција преноса линеарног система: $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ , Функција преноса поремећаја: $H(z) = \frac{1}{A(z)}$

**Ауторегресивни модел са спољним улазом (ARX) када се процес посматра као нелинеаран (пример 2)**

Већина динамичких процеса грађевинских конструкција је нелинеарног карактера. Када није позната нелинеарна функција, као и у овом примеру, примењује се апроксимација. Најједноставнији облик апроксимације је полиномом.

За нелинеарни полиномски почетни модел поред улазних сигнала као и код линеарног узети су и квадрати суме сила која делује на ужад на висинама ослањања од 56 м – ознака  $F56^2$ , 46 м – ознака  $F46^2$  и 36 м – ознака  $F36^2$ . Укупно има седам улазних сигнала.

Провером значајности параметара и валидацијом модела установљено је да сви параметри нису значајни. На основу ових провера, закључено је да су најадекватније једначине грешака у овом примеру, дате изразом :

$$\begin{aligned} \text{Померња дуж Y- осе:} \quad y(t) &= b_{y1}F56(t) + b_{y2}F46(t) + b_{y3}tem(t) + b_{y4}F56^2(t) + \\ & b_{y5}F36^2(t) + e(t), \end{aligned} \quad (6.32)$$

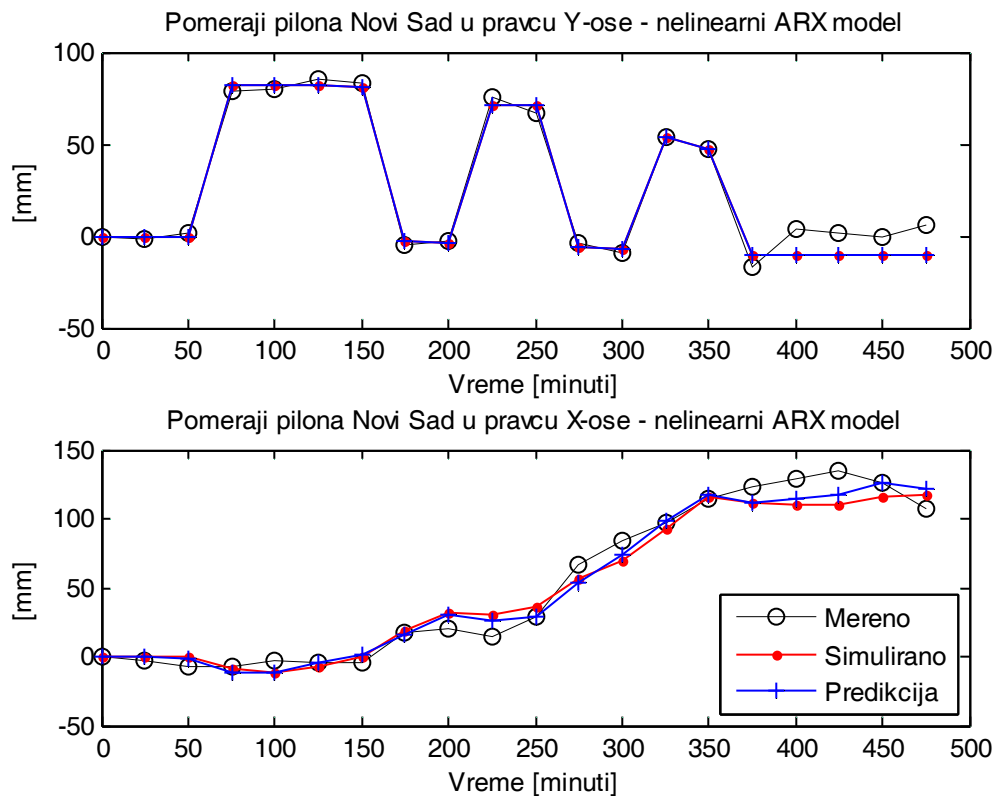
$$\text{Померња дуж X- осе:} \quad x(t) + a_{x1}x(t-1) = b_{x1}F36(t) + b_{x2}tem(t) + e(t),$$

$n_{ya} = 0$ , а  $n_{yb} = 5$ , а  $n_{xa} = 1$ ,  $n_{xb} = 2$ . Добијене су следеће оцене параметара модела са стандардним одступањима (табела 6.40)

Табела 6.40: Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел ARX када је процес нелинеаран (пример 2)

Параметар модела	Стандардно одступање
Померња дуж Y- осе	
$\hat{b}_{y1} = -62.9391 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$	$\hat{\sigma}_{b_{y1}} = 4.24 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$
$\hat{b}_{y2} = -146.0548 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$	$\hat{\sigma}_{b_{y2}} = 6.70 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$
$\hat{b}_{y3} = -0.8908 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{°C}} \right]$	$\hat{\sigma}_{b_{y3}} = 0.23 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{°C}} \right]$
$\hat{b}_{y4} = 39.9167 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}^2} \right]$	$\hat{\sigma}_{b_{y4}} = 4.47 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}^2} \right]$
$\hat{b}_{y5} = -64.9885 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}^2} \right]$	$\hat{\sigma}_{b_{y4}} = 4.96 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}^2} \right]$
Померња дуж X- осе	
$\hat{a}_{x1} = -0.3980 [\text{mm}]$	$\hat{\sigma}_{a_{x1}} = 0.21 [\text{mm}]$
$\hat{b}_{x1} = -12.8098 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$	$\hat{\sigma}_{b_{x1}} = 4.64 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{MN}} \right]$
$\hat{b}_{x2} = 5.9883 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{°C}} \right]$	$\hat{\sigma}_{b_{x2}} = 1.43 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{°C}} \right]$

Током анализе нелинеарности процеса дуж Y- осе примењено је више модела (квадратни и кубни полиномски и експоненцијални). Упоређењем процента апроксимације симулацијом и предикцијом један корак унапред утврђено је да нелинеарност најбоље описује квадратна полиномска регресија. Примена регресије за описивање нелинеарних процеса дуж X- осе није се могла применити, јер су оцене свих параметара који су уз нелинеарне улазне сигнале безначајни. Овај процес је линеаран. На основу оцењених вредности параметара и оцењених стандардних одступања параметара закључује се да су оцене параметара модела значајне (проверено је и статистичким тестирањем хипотеза). Модел померања дуж Y- осе припада тзв. статичким моделима, а дуж X- осе динамичким. На слици 6.44 приказана је симулација и предикција корака 1 за модел (6.32).



Слика 6.44: Симулација и предикција корака 1 померања за модел ARX када је процес нелинеаран (пример 2)

Критеријум апроксимације *Fit* и Акаике критеријум приказан је у табели 6.41.

Табела 6.41: Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел ARX када је процес нелинеаран (пример 2)

Померња дуж	Симулација <i>Fit</i> [%]	Предикција <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
Y- осе	82.8	82.8	1302.8	7.05
X- осе	80.6	83.7		

Проценти апроксимације помераја дуж обе осе су задовољавајући. Акаике информациони критеријум и финална грешка предикције имају мању вредност у односу када се процес посматра као линеаран, па је и по ова два критеријума други модел бољи. Проверена је независност и случајност поправака и све су вредности коефицијената аутокорељације и међусобне корелације унутар интервала поверења.

Функција преноса (4.4) и (4.5) за модел мерених података, који је задовољио критеријум значајности параметара, је



Y-оса	$A(z) = 1;$	$B(z) = -62.9391F56 - 146.0548F46 - 0.8908tem + 39.9167F56^2 - 64.9885F46^2;$	Функција преноса линеарног система: $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ ; Функција преноса поремећаја: $H(z) = \frac{1}{A(z)}$ Пошто је $n_a = 0$ , модел припада коначном импулсном одговору (FIR)
X-оса	$A(z) = 1 - 0.3980z^{-1};$	$B(z) = -12.8098F36 + 5.9883tem;$	Функција преноса линеарног система: $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ ; Функција преноса поремећаја: $H(z) = \frac{1}{A(z)}$

### Ауторегресивни (AR) модел (пример 2)

На основу анализе парцијалне аутокорелације добијено је да на тренутну вредност померања дуж Y- осе не утичу претходне вредности; дуж X- осе могу да утичу до корака 9, али највероватније по вредностима коефицијента доминантни су утицаји првог и другог корака. Тестирањем значајности параметара за AR модел дефинитивно је усвојено

Померња дуж Y- осе:  $y(t) + a_{y1}y(t - 1) = e(t),$  (6.33)

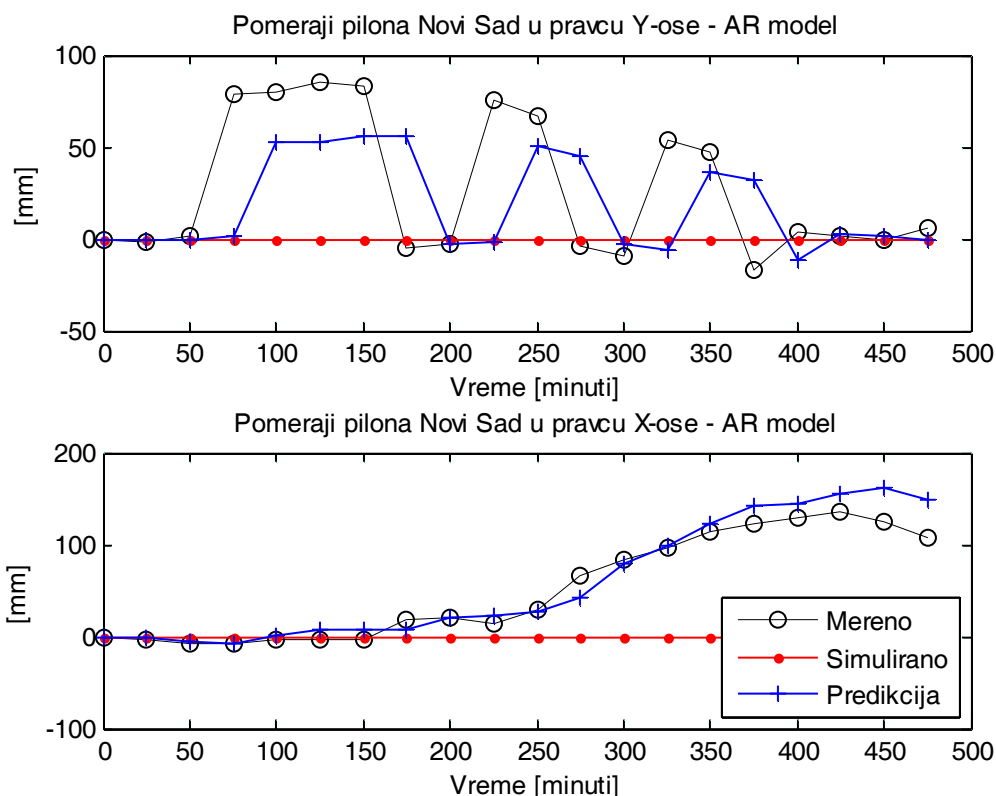
Померња дуж X- осе:  $x(t) + a_{x1}x(t - 1) + a_{x2}x(t - 2) = e(t),$

$n_{ya} = 1$ , а  $n_{xa} = 2$ . Добијене су следеће оцене параметара модела са стандардним одступањима (табела 6.42)

Табела 6.42: Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за модел AR (пример 2)

Параметар модела	Стандардно одступање
Померња дуж Y- осе	
$\hat{a}_{y1} = -0.6646[\text{mm}]$	$\hat{\sigma}_{a_{y1}} = 0.21[\text{mm}]$
Померња дуж X- осе	
$\hat{a}_{x1} = -0.1359[\text{mm}]$	$\hat{\sigma}_{a_{x1}} = 0.05[\text{mm}]$
$\hat{a}_{x2} = -1.1859[\text{mm}]$	$\hat{\sigma}_{a_{x2}} = 0.06[\text{mm}]$

На слици 6.45 приказана је симулација и предикција корака 1 за модел (6.33).



Слика 6.45: Симулација и предикција корака 1 померања за модел (пример 2)

Критеријум апроксимације *Fit* и Акаике критеријум приказан је у табели 6.43.

Табела 6.43: Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за модел AR (пример 2)

Померња дуж	Симулација <i>Fit</i> [%]	Предикција <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
Y- осе	-23.9	0.94	134150	11.80
X- осе	-37.4	70.7		

На основу добијених критеријума јасно је да је AR неподесан за симулацију, а може само да се користи за предикцију један корак унапред за моделирање померања дуж X- осе. Ови резултати за помераје дуж Y- осе су очекивани јер је анализа парцијалне аутокорејације показала да претходне вредности не утичу на тренутни излаз.

Моделирање у овом примеру је урађено и применом ARMAX и ARMA модела, али се ниједна врста модела није показала подесна за моделирања ових процеса. Очигледно је да се померања пилоне одвијају по одређеној законитости и да не делују поремећаји, па увођење поремећаја (моделирање грешака) нема

сврхе. Због лоших критеријума валидације модели и оцене параметара за ове две врсте модела нису приказани.

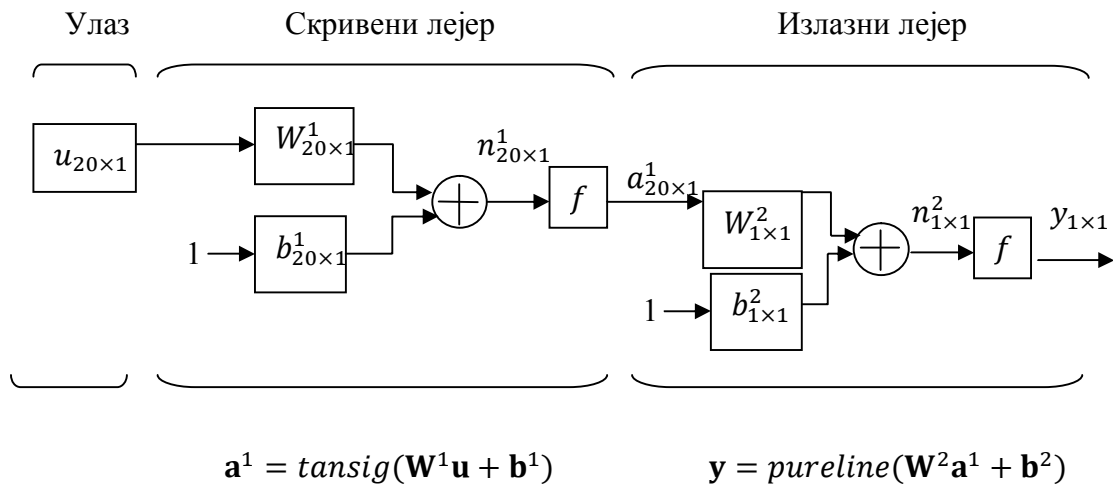
#### **6.5.4.2 Модел простора стања – пример 2**

Познато је да је систем диференцијалних/диференцијалних једначина нестабилан у нумеричком смислу. Приликом решавања система нелинеарних једначина појавио се проблем одређивања приближних вредности параметара модела, систем не конвергира. Примењене су и процедуре за решавање система које су уграђене у програмски пакет Матлаб, али се није могао постићи глобални минимум. Процедуре које су уграђене у овај пакет за решавање нелинеарног система једначина захтевају интервал за вредност параметара у коме ће се тражити глобални минимум.

Из горе наведених разлога подаци добијени моделирањем применом Ојлерове методе нису приказани, јер није остварен глобални минимум.

#### **6.5.5 Вештачка неуронска мрежа – пример 2**

Мрежа у овом примеру има четири улазна сигнала (F56- сила у каблу на висини котвљења од 56 m , F46- сила у каблу на висини котвљења од 46 m, F36- сила у каблу на висини котвљења од 36 m и промена температуре у току опажања), један скривени лејер и излазни лејер- помераји дуж осе (слика 6.45). У скривеном лејеру је испитиван број неурона и најбољи критеријуми валидације су постигнути са двадесет. Приказани су и критеријуми валидације (симулација) када је број неурона у скривеном лејеру четири. Функција преноса је хиперболични-тангент сигмоид. У излазном лејеру је један неурон, јер не постоји зависност између помераја по осама, а активациона функција је линеарна (слика 6.46).



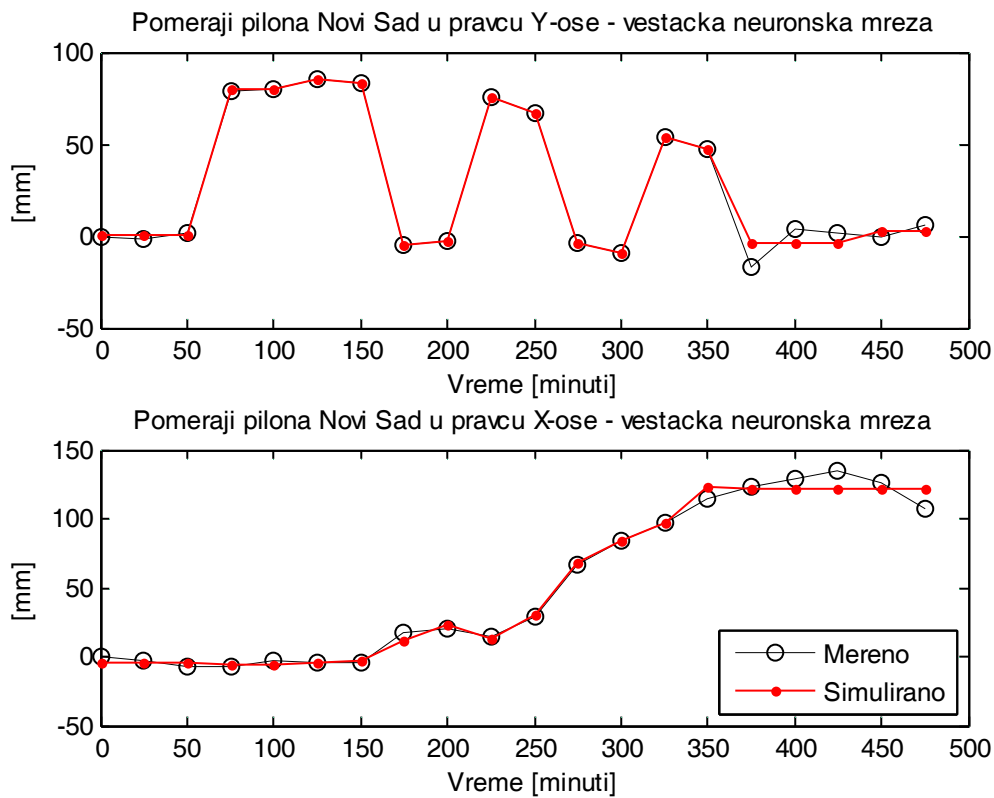
Слика 6.46: Архитектура вештачка неуронска мрежа (пример 2)

За оцењивање параметара модела (тежина и утицаја) примењен је програм *Matlab R2008a*, који у себи има развијен модул за вештачке неуронске мреже. Примењен је алгоритам мреже ширења уназад. Коришћен је Левенберг-Маркуард поступак за оцењивање параметара нелинеарног система. Мрежа је учена на скупу од 14 епоха, а тестирана на скупу од 6 епоха, и учена је на скупу од свих 20 епоха. Поступак учења је урађен два пута по 177 итерација. У ових 177 итерација задовољен је критеријум да је стандардно одступање параметара мање од  $10^{-10}$ . Критеријуми валидације су приказани у табели 6.44.

Табела 6.44: Критеријуми апроксимације за вештачку неуронску мрежу (пример 2)

Померња дуж	14 епоха за учење		20 епоха за учење	
	4 неурона у скривеном лејеру	20 неурона у скривеном лејеру	4 неурона у скривеном лејеру	20 неурона у скривеном лејеру
	Симулација <i>Fit</i> [%]	Симулација <i>Fit</i> [%]	Симулација <i>Fit</i> [%]	Симулација <i>Fit</i> [%]
Y-оса	-1.0	4.8	75.3	89.8
X-оса	72.0	88.7	69.1	89.4

На слици 6.47 приказани су мерени и симулирани подаци на основу модела вештачке неуронске мреже- мреже ширења уназад – за 20 неурона у скривеном лејеру и када је свих 20 епоха мерења укључено у учење мреже.



Слика 6.47: Мерени и симулирани подаци за мрежу ширења уназад (пример 2)

### 6.5.6 Закључак за пример 2.

Пример обрађује задатак који се обавља геодетским методама у оквиру деформационе анализе, а то је праћење одговора конструкције услед пробног оптерећења. Приликом испитивања сам експеримент није осмишљен за идентификацију система- моделирање, што је разлог малог број епоха мерења. Такође, геодетске методе мерења нису високофреквентне методе мерења па није могуће регистровати процес постепене промене положаја конструкције услед промене оптерећења, односно брзина мерења геодетским методама нам не омогућава да меримо у прелазном периоду процеса, већ само када је конструкција у стању мировања.

На основу свега приказаног може се закључити следеће:

1. Процес дуж Y- осе представља систем другог реда са комплексним

половима и са јако израженом нелинеарношћу; дуж X- осе је првог или другог реда, ако је другог реда онда је сигурно са реалним половима, јер је нелинеарност слаба.

2. У деформационој анализи геодетским методама битно је да улазне и излазне величине задрже своје физичке вредности, односно детрендовање података се изводи одузимањем од тренутне вредности претходне или почетне вредности временске серије.
3. Анализом аутокорелције, парцијалне и међусобне корелације добијају се значајне информације о врсти и структури модела, односно о зависности унутар и између временских серија.
4. Разлике у симулацији и предикцији код ARX модела и за процес који се посматра као линеаран или нелинеаран су безначајне.
5. Ауторегресивни модел је непоуздан за симулацију по обе осе, али је за предикцију један корак унапред поуздан за помераје дуж X- осе, који се може успешно апроксимирати линеарним моделима.
6. При примени методе потпростора стања постоји велики проблем у одређивању глобалног минимума, одговарајућих приближних вредности, па су тешко применљиве у пракси.
7. Вештачке неуронске мреже захтевају велики број епоха мерења да би се мрежа научила.

## 6.6 ОДРЕЂИВАЊЕ ОПТИМАЛНОГ ПЕРИОДА ОПАЖАЊА

У поглављу 2 (формула 2.2) речено је да период одабирања треба да је  $T = \frac{\tau}{3}$  или  $T = \frac{\tau}{4}$ , где је  $\tau$  временска константа система. Временска константа представља време које је потребно да прође да излазни сигнал достигао 63% вредности од укупне вредности излазног сигнала.

У примеру 1. укупна вредност излазног сигнала је -80 mm, а 63% вредности од укупне вредности излазног сигнала износи -50.4 mm. Ову вредност систем достигне за 135 дана. Сходно овоме, период опажања би требао да буде  $T = \frac{\tau}{4} = 33.7$  дана, што је приближно један месец.

За проверу примењивости ове тврдње приликом мониторинга конструкција симулиране су временске серије праћења објекта из примера 1, под истим условима (исти план опажања и стандардно одступање висинске разлике на станици  $\sigma_{st} = 0.3 \text{ mm}$ ), за период опажања 15 дана, 30 дана (већ су приказани резултати моделирања у потпоглављу 6.4.2.1) и 60 дана. Укупно време праћења објекта је 750 дана. У табели 6.45 приказани су основни подаци о временским серијама за наведене периоде опажања.

Табела 6.45: Основни подаци о временским серијама за различите периоде опажања

	Период опажања		
	15 дана	30 дана	60 дана
Укупан број епоха мерења (N)	51	26	12
Број епоха мерења за оцењивање (приближно 0.7N)	35	18	9
Број протеклих дана од почетка праћења до последње епохе мерења која је коришћена за оцену параметара модела	510	480	510

Подаци су детрендовани разликама првог реда. Провера је урађена на ауторегресивном моделу са спољним улазним сигналом (6.14), јер има најбоље параметре за валидацију модела. Систем моделских једначина је следећег облика

$$\text{F2-R1: } y_1(t) = b_{1_1} u(t) + e_1(t), \quad (6.34)$$

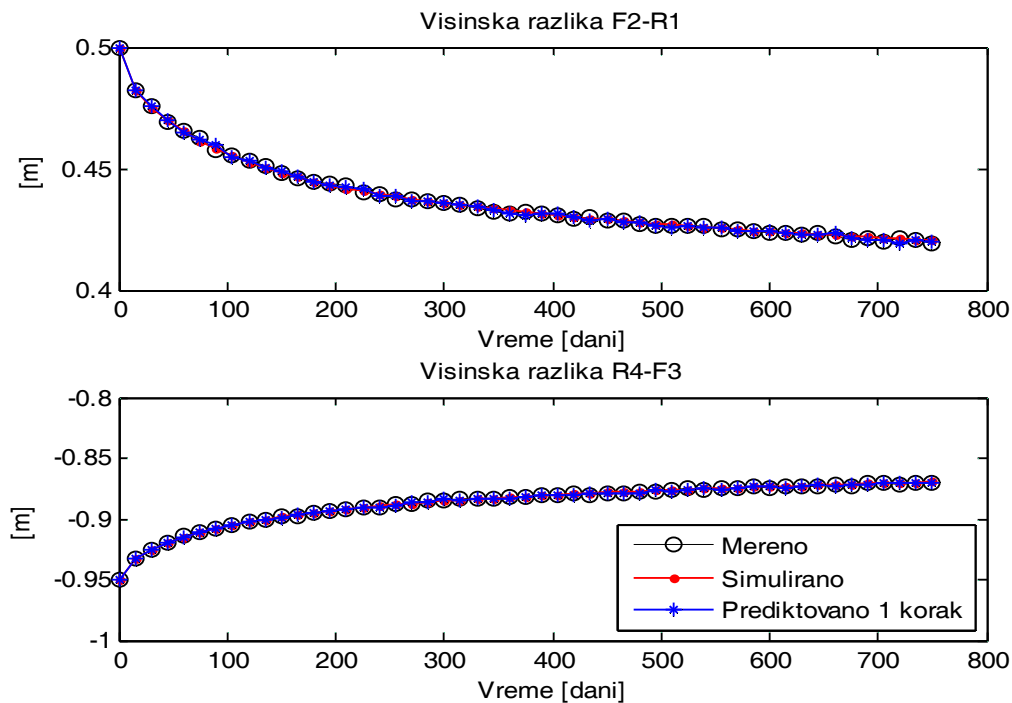
$$\text{R4-F3: } y_2(t) = b_{2_1} u(t) + e_2(t),$$

$n_a = 0$ , а  $n_b = 1$ . Добијене су следеће оцене параметара модела са стандардним одступањима (табела 6.46):

Табела 6.46: Оцене параметара модела са оценама стандардних одступања за различите периоде опажања

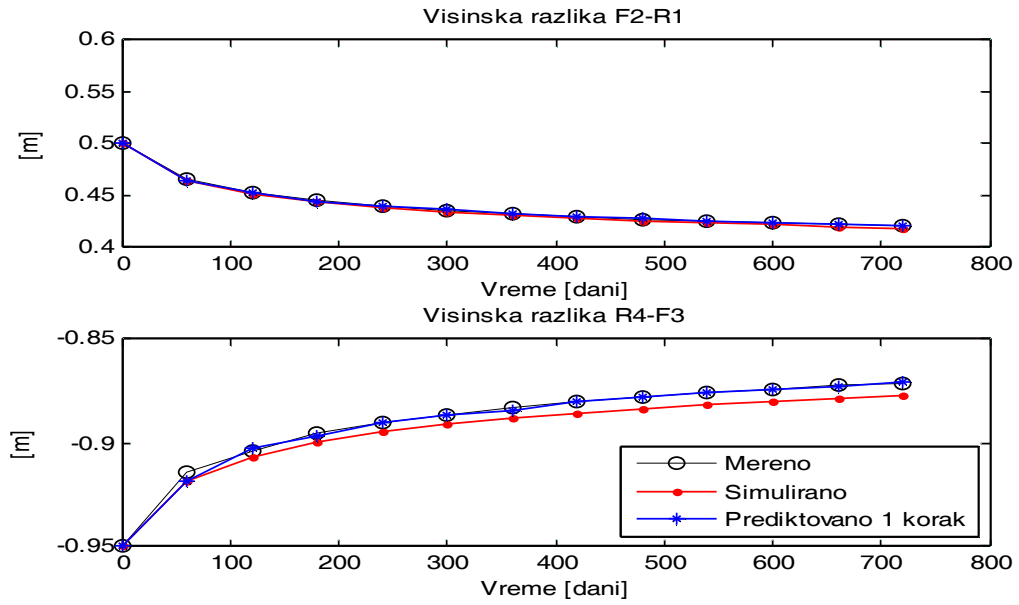
Период опажања 30 дана	
Параметар модела	Стандардно одступање
$\hat{b}_{1_1} = -100.391 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{1_1}} = 4.702 \text{ mm}$
$\hat{b}_{2_1} = 101.497 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{2_1}} = 4.617 \text{ mm}$
Период опажања 15 дана	
Параметар модела	Стандардно одступање
$\hat{b}_{1_1} = -98.730 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{1_1}} = 1.518 \text{ mm}$
$\hat{b}_{2_1} = 101.212 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{2_1}} = 4.952 \text{ mm}$
Период опажања 60 дана	
Параметар модела	Стандардно одступање
$\hat{b}_{1_1} = -102.835 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{1_1}} = 5.446 \text{ mm}$
$\hat{b}_{2_1} = 91.891 \text{ mm}$	$\hat{\sigma}_{b_{2_1}} = 9.793 \text{ mm}$

На слици 6.48 приказани су мерени, симулирани и предиктовани подаци за период опажања 15 дана, а на слици 6.49 за период опажања 30 дана.



Слика 6.48: Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за период опажања 15 дана





Слика 6.49: Симулација и предикција корака 1 висинских разлика F2-R1 и R4-F3 за период опажања 60 дана

Критеријум апроксимације *Fit* и Акаике критеријум приказан је у табели 6.47.

Табела 6.47: Критеријум апроксимације и Акаике критеријум за различите периоде опажања

Период опажања 30 дана					
Од	До	Симулација <i>Fit</i> [%]	Предикција <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
F2	R1	96.8	95.6	0.30	-1.22
R4	F3	93.4	96.5		
Период опажања 15 дана					
Од	До	Симулација <i>Fit</i> [%]	Предикција <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
F2	R1	96.4	95.7	0.47	-0.76
R4	F3	95.8	94.9		
Период опажања 60 дана					
Од	До	Симулација <i>Fit</i> [%]	Предикција <i>Fit</i> [%]	FEP	AIC
F2	R1	92.0	96.2	1.53	0.41
R4	F3	76.6	93.7		

На основу података у табели 6.46 и 6.47 може се закључити следеће:

1. Разлике између оцена параметара за различите параметре су статистички безначајне;
2. Значајне су разлике у тачности оцено параметара за параметар  $b_{1_1}$  за периоде опажања: 15 и 30 дана, 15 и 60 дана;
3. Значајне су разлике у тачности оцено параметара за параметар  $b_{2_1}$  за периоде опажања: 15 и 60 дана, 30 и 60 дана;
4. Безначајна је разлика између параметара валидације за период опажања 15 и 30 дана.

## 7.

**ЗАКЉУЧАК**

*Бављење научним истраживањем подразумева способност да се иде у новом правцу или да се успостави корисна веза са осталим наукама која баца тотално ново светло на предмет истраживања. Ова дисертација се бави применом знања из других научних области на деформациону анализу геодетским методама.*

Развој науке и технологије у свим областима људске делатности је довео да раније идеје и тежње човека сада постају стварност. Тако и у савременом грађевинарству остварују се идеје великих градитеља. Граде се објекти већих висина, већих распона носеће конструкције; дугим тунелима и мостовима повезују се различита места и технолошке целине; путеви и железнице намењене су за све бржи саобраћај. Користе се нови материјали који могу да испуне ове захтеве. Такође, све су строжији захтеви по питању квалитета градње и безбедности објекта. Да би се испунили захтеви о квалитету градње и безбедности објекта у току експлоатације мора се спроводити адекватан мониторинг конструкције и околног тла. Мониторингом се баве следеће струке: грађевинска, рударска и геодетска, које морају међусобно да сарађују да би се добиле исправне информације о узроцима деформација, стању конструкције и правовременој интервенцији на објекту, ако је потребно. Све ове струке изводе одређене врсте мерења на конструкцији и околном тлу. Једино геодетска струка изводи мерења у апсолутно и релативном систему, али не може извршити сва мерења у релативном систему јер мерна места морају бити доступна, нпр. мерења смицања тла која се изводе инклинометром.

Развој грађевинарства поставио је нове захтеве пред геодетски мониторинг. Данас се, писмо No. 25, FIG комисије 6.1, деформације посматрају као резултат процеса, односно мора се успоставити веза између узрока деформација (силе које делују на конструкцију и тло, карактеристике материјала) и последица (деформација - помераја, промене облика и димензија) у функцији од времена. Геодетска струка не мери улазне сигнале (узрок деформација), а не може да

региструје и све деформације објекта и тла па је неопходна сарадња са осталим струкама. Да би се деформациони процес дефинисао у физичком смислу (поглавље 2.3.2) неопходно је дати одговор на следећа питања:

1. У ком реду величина и у којим границама се налазе деформације [Pelzer, 1978] и ког је реда процес,
2. Колико су померања различитих тачака на објекту корелисана између себе (међусобна корелација) [Pelzer, 1978] и колика је корелисаност између улазних сигнала и помераја одређених тачака на објекту (међусобна корелација),
3. Да ли постоји корелација између деформација за различите временске тренутке (аутокорелација) [Pelzer, 1978],
4. Да ли постоји тренд (периодичност деформација) [Pelzer, 1978],
5. Дефинисање математичке везе између улазних и излазних сигнала - моделирање ,
6. Симулација или предикција деформација на основу усвојеног модела.

Одговори на ова питања добијају се применом идентификације система, која захтева од геодетског стручњака познавање одређених области из математика (комплексне анализе, Лапласове и  $Z$  трансформације, нових статистичких (анализа у временском и фреквентном домену података) и нумеричких метода (решавање нелинерног система једначина)), теорије система (функција преноса, простор стања, дискретизација система, вештачке неуронске мреже).

У овој дисертацији детаљно је објашњен и примењен апарат идентификације система за моделирање деформација конструкција и тла, односно посматрање деформација као резултат процеса. Идентификација система се базира на моделирању система на основу експерименталних података. Успешно моделирање подразумева следеће кораке:

1. Организација експеримента,
2. Прикупљање података,
3. Анализа и детрендовање података,

4. Дефинисање врсте и степена модела (код вештачких неуронских мрежа – дефинисање броја лејера и броја неурона у скривеним лејерима, као и активационих функција у лејерима),
5. Избор методе за оцењивање параметара,
6. Оцена параметара модела,
7. Провера значајности параметара,
8. Валидација модела.

Да би се дошло до информација о реду процеса, врсти и степену модела неопходна је детаљна анализа временских серија.

Први корак у анализи је визуелна представа временских серија. Визуелна представа омогућава одређивање реда система и да ли се реалан систем може апроксимирати линеарним моделом. Одређивање реда система нам омогућава да добијемо информацију о степену функције преноса или броју диференцијалних једначина када је у питању простор стања. Такође, упоређењем графика улазних серија са излазним серијама могу се донети закључци о доминантним улазним сигнаlima на излаз.

Следећи корак у анализи је детрендовање података. Тренд у деформационој анализи представља пројектовано понашање конструкције и околног тла. Уклањањем тренда омогућава се увид у одступање понашања објекта од пројектованог. Математички гледано детрендовањем се обезбеђује стационарност или слаба стационарност процеса, која се препоручује да би се добиле поуздане оцене параметара модела. Показано је да је то јако приметан посао, који подразумева дефинисање функције и решавање нелинеарног система једначина да би се одредили параметри функције. Приликом моделирања понашања конструкција и околног тла треба да се очува физички ниво сигнала па је оправдано детрендовање изводити разликама првог реда (деформације када се улазни сигнали не мањају нагло) или одузимањем почетне вредности од свих чланова временске серије (деформације изазване наглим променама оптерећења, нпр. испитивање конструкције моста на пробно оптерећење). На овај начин се не обезбеђује ни слаба стационарност процеса, али су разлике у оценама параметара када је детрендовањем обезбеђена слаба стационарност процеса и када је

детрендовање извршено на начин који је предложен занемарљиве. Овакав начин детрендовања је много једноставнији.

Даље се анализира зависност унутар и између временских серија. Она може бити у временском и фреквентном домену. Анализа у временском домену подразумева анализу: аутокорелације, парцијалне аутокорелације и међусобне корелације. Парцијална аутокорелација даје информације колико претходних излазних сигнала утиче на тренутну вредност излазног сигнала; аутокорелација помаже у моделирању поремећаја; међусобна корелација успоставља везу између улазних и излазних сигнала.

Анализа података у фреквентном домену је други вид анализе временских серија. Овом анализом се добијају исти резултати као у временском домену, али може боље да укаже на физички утицај неких појава на процес, нпр. на периодични утицај неких сигнала, односно фреквенције које највише утичу на одступање од тренда. Међутим, у геодетској пракси је мали број епоха мерења па се не можемо поуздати у ову анализу.

Линеарно временски инваријантни модели се могу успешно применити за моделирање нелинеарних процеса деформација конструкција. У ове моделе спадају модели облика функције преноса или претпостављеног облика функције преноса и простора стања. За дефинисање степена модела облика функције преноса неопходно је применити анализу података у временском домену, а дефинитиван степен се одређује на основу значајности параметара. Примењени су у раду динамички модели облика: ARX и ARMAX; кинематички модели облика: AR, MA и ARMA. Показано је да се највећи проценат апроксимације процеса симулацијом и предиктовањем остварује помоћу ARX модела. Кинематички AR модел се може применити за предикцију до три корака унапред. Када је изражена нелинеарност процеса, као у примеру 2, успешно се може апроксимирати полиномском регресијом другог степена. Ово је сасвим логично јер се већина процеса у конструкцијама може апроксимирати диференцијалним/диференцијалним једначинама првог или другог реда са константним коефицијентима (хомогено решење диференцијалне једначине другог реда добија се решавањем квадратне једначине). Моделе који у себи садрже део са променљивом средином (MA, ARMAX, ARMA) не треба примењивати у деформационој анализи.

Моделирање моделом простора стања је најчешће обрађивано у геодетској литератури. У овом раду су примењена два модела потпростора стања: Ојлерова метод и Тустнинова апроксимација. Динамички модел је на граници практичне примене од око 80% за симулацију када је процес првог реда (пример 1), а ако је процес другог реда (пример 2) онда су ове методе непримењиве, јер је проблем одредити глобални минимум процеса. Кинематички модел простора стања може се применити за предикцију један корак унапред ако се успешно одреде приближне вредности параметара модела. Добра страна је што се на основу малог броја епоха могу одредити параметри модела.

Неки процеси првог реда, као што је и слегање објеката, се могу успешно апроксимирати претпостављеним обликом функције преноса. На основу малог броја епоха мерења, у примеру 1 четири епохе, могу се добити параметри модела што овој методи даје предност у односу на друге.

Већина процеса у природи је нелинеарног карактера. За нелинеарно моделирање примењена је вештачка неуронска мрежа. За практичну примену, што је и наведено у раду, довољна је архитектура мреже са једним скривеним лејером, у којем је функција преноса хиперболични-тангент сигмоид, и алгоритмом ширења уназад. У излазном лејери је активациона функција линеарна. Број неурона у излазном лејеру је једнак броју излазних сигнала, а за број неурона у скривеном лејеру не постоји правило. Показано је када је нелинеарност процеса значајна да је потребан већи број неурона у скривеном лејеру. Неуронска мрежа са алгоритмом ширења уназад, која се користи за моделирање већине процеса, дала је резултате који су на граници практичне прихватљивост (процент апроксимације симулацијом око 80%). Разлог за ово је вероватно у малом броју епоха мерења.

На крају овог рада анализиран је временски интервал опажања према теорему о одабирању. Ова анализа је уређена на примеру 1 и моделу који се показао као најадекватнији за моделирање ARX. Показано је да је оправдано примењивати ову теорему за одређивање временског интервала опажања у деформационој анализи.

Моделирање деформација на основу експерименталних података (идентификација система) омогућава да се предвиди понашање конструкције и околног тла. За успешно моделирање потребно је коректно применити све

процедуре које су наведе у дисертацији и да постоји сарадња са осталим струкама које се баве мониторингом. Процеси првог реда се најбоље апроксимирају функцијом преноса (ARX модели), а процеси другог реда се најуспешније апроксимирају функцијом преноса која је облика полиномске регресије.



## **ЛИТЕРАТУРА**

Agülero C. J., Goodwin C. G., A Recursive Algorithm for MIMO Stochastic Model Estimation,

<http://ascc2004.ee.mu.oz.au/proceedings/papers/P243.pdf>

Akyilmaz, O., Celik, R. N., Apaydin, N., Ayan, T.: GPS Monitoring of the Fatih Sultan Mehmet Suspension Bridge by Using Assessment Methods of Neural Networks

<http://www.isprs.org/proceedings/xxxv/congress/comm7/papers/138.pdf>

Bayrak, T., Yalcumkaya, M., A Kinematic Analysis Program for Deformation Monitoring. 11<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurements, Santorini, Greece, 2003

Becerra M. V., Advanced System Identification, lectures, 2008

<http://www.personal.rdg.ac.uk/~shs99vmb/notes/asi/Lecture....pdf>

Bose K. N., Liang P., Neural Network Fundamentals with Graphs, Algorithms, and Applications, Tata McGraw-Hill Edition, New Delhi, 2001

Valcinkaya M., Bayrak T., Comparison of Static, Kinematic and Dynamic Geodetic Deformation Models for Kutludün Landslide in Northeastern Turkey, Natural Hazar (2005) 34:91- 110, Springer, 2005

Gassner, G., Wieser, A., Brunner, K. F. GPS Software Development for Monitoring of Landslides. FIG XXII Congress Washington, D.C. USA, 2002

[http://www.fig.net/pub/fig\\_2002/Ts5-6/TS5\\_6\\_lienhardt\\_wieser\\_brunner.pdf](http://www.fig.net/pub/fig_2002/Ts5-6/TS5_6_lienhardt_wieser_brunner.pdf)

Gevers M., A Personal View of the Development of System Identification, IEEE Control System Magazine, 2006

[http://perso.uclouvain.be/michel.gevers/PublisMig/IEEECSM\\_PersonalView.pdf](http://perso.uclouvain.be/michel.gevers/PublisMig/IEEECSM_PersonalView.pdf)

Demuth H., Beale M., Hagan M., Neural Network Toolbox™ 6, User's Guide, MathWorks

[http://www.mathworks.com/help/pdf\\_doc/nnet/nnet\\_ug.pdf](http://www.mathworks.com/help/pdf_doc/nnet/nnet_ug.pdf)

Ding XL., Qin H., Geotechnical Instruments in Structural Monitoring, Journal of Geospatial Engineering, Vol. 2, No.2, pp.45-56

[http://www.lsgi.polyu.edu.hk/staff/zi.li/vol\\_2\\_1/05\\_ding.pdf](http://www.lsgi.polyu.edu.hk/staff/zi.li/vol_2_1/05_ding.pdf)

Eichhorn A., Analysis of dynamic deformation processes with adaptive Kalman-filtering, Journal of Applied Geodesy 1, 2007, Pages 9-15

<http://www.degruyter.com/view/j/jag.2007.1.issue-1/jag.2007.002/jag.2007.002.xml>

Inamura T., Mita A., Database system for structural health monitoring of buildings

<http://adsabs.harvard.edu/abs/2006SPIE.6174..584I>

Ince D. C., Sahin M., Real-time Deformation Monitoring with GPS and Kalman Filter, Earth Planets Space, 52, 837-840, 2000

<http://www.terrepub.co.jp/journals/EPS/pdf/5210/52100837.pdf>

Jäger R., Kälber S., Oswald M., Bartges O., GNSS/GPS/LPS based Online Control and Alarm System (GOCA) - Mathematical Models and Technical Realisation of a System for Naturaland Geotechnical Deformation Monitoring and Analysis - , 3rd IAG / 12<sup>th</sup> FIG Symposium, Baden, May 22-24, 2006

[http://www.fig.net/commission6/baden\\_2006/PDF/GPS1/Jaeger.pdf](http://www.fig.net/commission6/baden_2006/PDF/GPS1/Jaeger.pdf)

Kalber, S., Jager, R. , GPS – Based Online Control and Alarm System (GOCA). 10<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurements, Orange, California, 2001

[http://rincon.gps.caltech.edu/FIG10sym/pdf/Session%20V\\_Paper%202.pdf](http://rincon.gps.caltech.edu/FIG10sym/pdf/Session%20V_Paper%202.pdf)

Khoon, T.Y. , L1, L2, Kalman Filter and Time Series Analysis in Deformation Analysis. FIG XXII Congress Washington, D.C. USA, 2002

[http://issge.ir/uploads/files/Journal/GeospatialEngineeringJournal\\_Vol1No1.pdf](http://issge.ir/uploads/files/Journal/GeospatialEngineeringJournal_Vol1No1.pdf)

Ковачевић, Б. , Ђуровић, Ж. , Fundamentals of Stochastic Signals, Systems and Estimation Theory with Worked Examples. Academic mind, Београд, 1999

Ковачич Б., Камник Р., Мерење помака и деформација помоћу електронских тахиметара

<http://kamen.uni-ml.si/dokument.aspx?id=1432>

Kuhlmann H., Kalman Filtering with Coloured Measurement Noise for Deformation Analysis, Proceedings, 11<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurement, Santorini, Greece, 2003

<http://www.fig.net/commission6/santorini/h-theoretical/%20aspects/h3.pdf>

Levenhagen, J., Identifikation synthetischer dznamischer Übertragungsmodelle und ihrer Störungen im Zeitberich- Dissertationen, Institut für Theoretische Geodäsie, 1998

Lee H. J., Choi H. J., Lee S. K., Time Series Modeling, 1997

<http://www.cheric.org/education/practical/mp5-25-38.pdf>

Ljung L., Linear System Identification as Curve Fitting, Report no.: LiTH-isy-R-2466, Vol 286: 203-215 2003//Conference in honor of Anders Lindquist

[http://jagger.me.berkeley.edu/sysid/handouts/curve\\_fitting.pdf](http://jagger.me.berkeley.edu/sysid/handouts/curve_fitting.pdf)

Ljung L., System Identification: Theory for the User, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.

Ljung L., Perspectives on System Identification

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1367578810000027>

Mastelic-Ivic S., Kahmen, H., Deformation Analysis with Modified Kalman-Filters. 10<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurements, Orange, California, 2001

[http://rincon.gps.caltech.edu/FIG10sym/pdf/Session%20IX\\_Paper%201.pdf](http://rincon.gps.caltech.edu/FIG10sym/pdf/Session%20IX_Paper%201.pdf)

Meng, X., Roberts, G. W., Dodson, A. H., Barnes, J., Rizos, C., Impact of GPS Satellite and Pseudolite Geometry on Structural Deformation Monitoring: Analytical and Empirical Studies, Journal of Geodesy 79: 809-822, 2004

<http://wenku.baidu.com/view/6c10e1f49e31433239689361.html>

Miima, J., B., Adapting Neural Networks for Modelling Geodetic Deformations

Pytharouli, S., Kantogianni, V. Psimoulis, P., Stiros, S., Spectral Analysis Techniques in Deformation Analysis Studies, INGENEO 2004 and FIG Regional Central and Eastern European Conference on Engineering Surveying, Bratislava, Slovakia, 2004

Milev, I., Integrierte Modelle zur physischen Interpretation geodätischer Deformationsuntersuchungen - Dissertationen, Deutsche Geodätische Kommission, München, 2001

Milovanović B., Identification of the Structure Behavior by Using of Durbin-Levinson Algorithm, Intergeo East, Belgrade, 2008

[www.intergeo-east.com](http://www.intergeo-east.com) [rgz.sr.gov.rs](http://rgz.sr.gov.rs)

Миловановић Б., Ашанин С., Божић Б., Идентификација понашања објеката на основу геодетских мерења, Интернационални научно стручни скуп ГНП 2008, Грађевинарство- наука и пракса, Жабљак, 2008

[www.gnp.ac.me](http://www.gnp.ac.me)

Milovanović B., Modeling of Engineering Structures Displacement by using Euler Method, FIG Working Week, Surveyors Key Role in Accelerated Development, Eilat, Israel, 3-8 May 2009

[www.fig.net/fig2009](http://www.fig.net/fig2009)

Milovanovic B., Miskovic Z., Gospavic Z., Vulic M., Modelling Behavior of Bridge Pylon for Test Load Using Regression Analysis with Linear and Non-linear Process, Geodetski list, Vol. 66 (88) No. 3, str. 205-220, Zagreb, 2011.

Миловановић Б., Госпавић З., Уљаревић Б., Пејовић М., Савремени концепт мониторинга конструкција на основу геодетских мерења, Интернационални научно стручни скуп ГНП 2012, Грађевинарство- наука и пракса, Жабљак, 2012

[www.gnp.ac.me](http://www.gnp.ac.me)

Митровић С, Металне и дрвене конструкције, предавање 1.

[www.vggs.rs/gradjevinski  
\\_odsek/predmeti\\_ispit/metalne\\_drvene\\_konsl/razno/Predavanje\\_1.pdf](http://www.vggs.rs/gradjevinski_odsek/predmeti_ispit/metalne_drvene_konsl/razno/Predavanje_1.pdf)

Nielsen A. A., Least Squares Adjustment: Linear and Nonlinear Weighted Regression Analysis, Technical University of Denmark, National Space Institute/ informatics and Mathematical Modelling

[www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/edoc\\_download../imm2804.pdf](http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/edoc_download../imm2804.pdf)

Nikitopoulou A., Protopsalti K., S. Stiros S., Monitoring dynamic and quasi-static deformations of large flexible engineering structures with GPS: Accuracy, limitations and promises, Engineering Structures, Volume 28, Issue 10, August 2006, Pages 1471-1482

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029606000691>

Ogaja, C., A Framework in Support of Structural Monitoring by Real Time Kinematic GPS and Multisensor Data. PhD thesis, School of Surveying & Spatial Information Systems, University of New South Wales, Sydney, Australia, UNISURV S-71, 191pp., 2002.

[http://www.gmat.unsw.edu.au/snap/staff/clement\\_ogaja.htm](http://www.gmat.unsw.edu.au/snap/staff/clement_ogaja.htm)

Pedersen M. K. G., System Identification, Lectures, Department of Software and Media Technology, Aalborg University Esbjerg, 2005

Pelcer, H., Geodätische Überwachung dynamischer System I, II Internationales Symposium über Deformationsmessungen mit geodätischen Methoden, Bonn, 1978

Перовић Г., Рачун изравнања, Књига I- Теорија грешака мерења, Научна књига, Београд, 1989

Салихбеговић А., Методе идентификације процеса, ЕТФ Сарајево, 2004, писања предавања за последипломске студије

<http://people.etf.unsa.ba/~asalihbegovic/IDENT-MODELING/Metode%20i%20tehnikе%20identifikacije%20sistema-0604.pdf>

Setan H., Som Md A.Z , Idris M. K., Deformation detection of lightweight concrete block using geodetic and non-geodetic methods, Proceedings, 11<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurement, Santorini, Greece, 2003

<http://www.fig.net/commission6/santorini/I-Monitoring%20Static%20and%20Dyn/I13.pdf>

Soderstrom, T., Stoica, P. ,Instrumental Variable Methods for System Identification, Circuits System Signal Processing, Vol. 21, No.1, 2002

Стојић, Р. М. , Сиситеми аутоматског управљања. Саобраћајни факултет Универзитета у Београду, IX измењено издање, Београд, 1999.

Стојић, Р. М. , Дигитални системи управљања. Завод за графичку технику Техолошко-металуршког факултета, Београд, 1998

Тошић Д., Математика III- кратак курс, Академска мисао, Београд, 2002

Freidovich L., Elements of Iterative Learning and Adaptive Control, презентације са предавања

[http://www8.tfe.umu.se/forskning/Control\\_Systems/Courses/IterativeLearningAndAdaptiveControl\\_2010/lectures/](http://www8.tfe.umu.se/forskning/Control_Systems/Courses/IterativeLearningAndAdaptiveControl_2010/lectures/)

Hagan T. M., Demuth B. H., Beale H. M., Neural Network Design/прва четири поглавља књиге и презентације предавања по поглављима књиге/

<http://hagan.okstate.edu/nnd.html>

Heinen, K., Beschreibung von Deformationsprozessen durch Volterra- und Fuzzz-Modelle sowie NeuronaleNetze, Deutsche Geodätische Kommission, Dissertationen, Heft Nr. 516, München, 1999

Heinen, K.,Modelling of geomechanical deformation processes demonstrated on a creeping slope in Thuringia,2000

Chrzanowski S. A, Proszynsky W., Gambin W., Continuum mechanics as a support for deformation monitoring, analysis, and interpretation, 3rd IAG / 12<sup>th</sup> FIG Symposium, Baden, May 22-24, 2006

[http://www.fig.net/commission6/baden\\_2006/pdf/mod1/szostak-chrzanowski.pdf](http://www.fig.net/commission6/baden_2006/pdf/mod1/szostak-chrzanowski.pdf)

Wilson J. W., System Identification ECE 683, Department of Electrical and Computer Engineering, Winter term, 2007

[https://ece.uwaterloo.ca/~ece683/Lecture\\_Slides/index.html](https://ece.uwaterloo.ca/~ece683/Lecture_Slides/index.html)

Yalcinkayäm M., Bayrak T., Comparison of Static, Kinematic and Dynamic

Geodetic Deformation Models for Kutlugün Landslide in Northeastern Turkey, Natural Hazards, 34: Pages 91–110, Springer, 2005

<http://www.springerlink.com/content/m001u546jv544pp4/>

**Материјал са интернет адреса:**

An Example Analysis, 64636 Module 4, Time Series and Forecasting, 2000

<http://www.sci.usq.edu.au/courses/MAT3102/M3/example.pdf>

Beckpropagation neural network,

<http://www.learantificia/neuralnetworks.com>

Временске серије: Notes\_1 – Notes\_11, GEOS 585A, Spring 2007,

[http://www.ltrr.arizona.edu/~dmeko/notes\\_...pdf](http://www.ltrr.arizona.edu/~dmeko/notes_...pdf)

Educational Repository for Intelligent Systems, Министарство знаности и технологије Републике Хрватске, 2003

<http://eris.foi.hr/11neuronske/nn-predavanje...htm>

FIG publication NO. 25 Models and Terminology for the Analysis of Geodetic Monitoring Observations. *Official Report of the Ad-Hoc Committee of FIG Working Group 6.1.*, 2002

Introduction to Spectral Analysis

[www.read.pudn.com/downloads164/doc/comm/750295/day...doc](http://www.read.pudn.com/downloads164/doc/comm/750295/day...doc)

MathWorks, System Identification Toolbox, Product Documentation

<http://www.mathworks.com/help/toolbox/ident/>

Partial Autocorrelation

[http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de/fedc\\_homepage/xplore/tutorials/sfehtmlnode59.html](http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de/fedc_homepage/xplore/tutorials/sfehtmlnode59.html)

Плитки темељи, поглавље из књиге

<http://www.scribd.com/doc/51375437/08-Plitki-temelji>



Sequence Analysis I: Uniform Series, Cross- and Auto-Correlation, and Fourier Transforms, 2000

<http://w3eos.who.edu/12.747/notes/lect06/106s02.html>

System Identification Using Time Domain Data

<http://www.facstaff.bucknell.edu/mastascu/econtrolhtml/Ident/Ident1.html>

The Durbin-Levinson Algorithm

<http://amath.colorado.edu/courses/4540/2012Spr/HandOuts/DurbinLevinson.pdf>

## **БИОГРАФИЈА**

Бранко Миловановић рођен је 17.01.1967. године у Бијељини, Република Српска (БиХ) као друго дете од мајке Душанке и оца Ђоке (1936.-1995.). Средњу геодетску школу завршио је у Бијељини. У току основог и средњег образовања је био одличан ђак.

На Грађевински факултет Универзитета у Београду, Одсек за геодезију, уписао се 1986. године, а дипломирао 1992. Просечна оцена у току студирања је 8.65. Уписао је последипломске студије 1992. године, смер Виша геодезија, на истом Факултету. Положио све прописане испите до фебруара 1996. са просечном оценом 9.11. Исте године Научно-наставно веће Универзитета у Београду прихватило је тему за израду магистарске тезе под насловом "Истараживање модификација метода оцењивања компоненти дисперзија", и исту је одбранио јуна 1998. године на Грађевинском факултету.

Након завршетка дипломских студија два месеца ради у Катастру непокретности у Краљеву. Од новембра 1992. године ради на Грађевинском факултету у Београду, Одсек за геодезију и геоинформатику. Прво је радио као асистент на предметима: Геодезија 1 и 2, Рачун изравнања 1 и 2 и Инжењерска геодезија 1 и 2, а од 2005. ангажован је на групацији предмета из Инжењерске геодезија.

Области интересовања су: деформациона анализа, пројектовање геодетских радова у инжењерству и теорија грешака. Учествовао је на пет технолошких пројеката, које финансира Влада Републике Србије. Већина пројеката се бавила деформационом анализом. Коаутор је Збирка одабраних задатака из Инжењерске геодзије. Објавио је два рада на SCi листи и преко двадесет научних и стручних радова који су публиковани. Такође, учествовао је у преко тридесет стручних послова из области инжењерске геодезије у којима је био пројектант. Аутор је програмских пакета за: изравнање геодетских мрежа и деформациону анализ у по Пелцеровом поступку и пројектовање геодетских мрежа у инжењерству.

Ожењен је супругом Сашом и отац је сина Давида.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а: Бранко Ђ. Милобановић  
број уписа \_\_\_\_\_

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Линеарно и нелинеарно моделирање геодетски  
регистрованих деформационих процеса  
конструкција

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 28.05.2012.

Ђ. Милобановић

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске  
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора Бранко Миловановић

Број уписа \_\_\_\_\_

Студијски програм Геодезија

Наслов рада Линеарно и нелинеарно моделирање геодетски  
регистрованих деформационих процеса конструкција

Ментор Доц. др Зоран Мишковић, дипл. грађ. инж.

Доц. др Миљивој Вулић, дипл. геод. инж.

Потписани 

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 28.06.2012.



Прилог 3.

### Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Линеарно и нелинеарно моделирање геодетских  
регистрованих деформационих процеса конструкција  
која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 28.06.2012.

B. Dimitrović