

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Мр Ненад П. Пецић

УНАПРЕЂЕЊЕ МЕТОДОЛОГИЈЕ  
КОНТРОЛЕ УГИБА  
АРМИРАНОБЕТОНСКИХ КОНСТРУКЦИЈА

докторска дисертација

Београд, 2012

Универзитет у Београду  
Грађевински факултет

Мр Ненад П. Пецић:

УНАПРЕЂЕЊЕ МЕТОДОЛОГИЈЕ КОНТРОЛЕ УГИБА  
АРМИРАНОБЕТОНСКИХ КОНСТРУКЦИЈА

докторска дисертација

Ментор:

Проф. др Снежана Маринковић, дипл. инж. грађ.,  
Грађевински факултет Универзитета у Београду

Комисија:

1. Проф. др Дејан Бајић, дипл. инж. грађ.,  
Грађевински факултет Универзитета у Београду
2. Проф. др Душан Најдановић, дипл. инж. грађ.,  
Грађевински факултет Универзитета у Београду
3. Проф. др Снежана Маринковић, дипл. инж. грађ.,  
Грађевински факултет Универзитета у Београду
4. В. проф. др Ђорђе Лађиновић, дипл. инж. грађ.,  
Факултет техничких наука Универзитета у Новом Саду

Датум одбране:

## УНАПРЕЂЕЊЕ МЕТОДОЛОГИЈЕ КОНТРОЛЕ УГИБА АРМИРАНОБЕТОНСКИХ КОНСТРУКЦИЈА

### *Резиме*

Напредак у развоју алата за пројектовање грађевинских конструкција није пратила одговарајућа подршка у области провере деформација армирано-бетонских елемената. Већина софтвера, који су данас у употреби, користи метод коначних елемената. Стандардни типови коначних елемената у комерцијалним софтверима не подржавају прикладно израчунавање угиба бетонских конструкција са укључивањем ефеката настанка прлина и скупљања и течења бетона. С друге стране, употреба конструкционих материјала високих чврстоћа омогућава смањивање димензија носећих елемената. Због повећане деформабилности, провера угиба постаје неопходна, а сам услов ограничења деформација често меродаван за пројектовање.

Већина прописа и препорука за пројектовање даје два начина за проверу угиба. Поједностављени начини омогућавају брз и једноставан прорачун. Уобичајено су на страни сигурности и, стога, захтевају веће димензије конструкцијских елемената. За разлику од њих, сложенији начини захтевају обимнији прорачун који укључује релевантне особине бетонских конструкција, услова средине и процеса градње, али често омогућавају мање димензије елемената. Овакви прорачуни, осим што нису брзи, захтевају и додатна знања.

Еврокод 2 (*EN 1992-1-1:2004*) за прорачун бетонских конструкција такође даје два начина за контролу угиба. Поједностављени начин дат је у облику граничног односа распон/статичка висина. Овај поступак није добро припремљен за практичну употребу и има озбиљна ограничења: критеријум је изведен за неодговарајући однос квази-сталног и граничног оптерећења. Осим тога, није обухваћена притиснута арматура која није неопходна према граничном стању носивости. Други начин је заснован на општем поступку израчунавања угиба – интегралне кривине дуж елемента. За прорачун дуготрајних ефеката услед скупљања и течења бетона користи се метода ефективног модула. Утицај настанка прлина на крутост носача моделира се интерполационим коефицијентом према *CEB-FIP* Моделу коду 1990. Ни овај начин није нарочито прикладан за практичне прорачуне: у случају статички неодређених конструкција,

моментни дијаграм који се добија стандардним инжењерским прорачуном, методом коначних елемената са крутошћима бруто пресека, није одговарајући за израчунавање кривина. Услед настанка прелина и скупљања и течења бетона долази до прерасподеле момената савијања која може имати и великог утицаја на израчунати угиб. Опција прерасподеле углавном није подржана софтверима који се користе за пројектовање што израчунавање угиба чини веома сложеним.

У тези је презентирани унапређени метод за контролу угиба заснован на интегралнењу кривина. Метод следи поступак Еврокода 2 за прорачун ефективних кривина и укључује потребне прерасподеле момента савијања. Развијен је за линијске елементе и плоче које носе у једном правцу, за једнакоподељено дуготрајно (квази-стално) оптерећење. Изведени су алгебарски изрази за израчунавање угиба коришћењем оригиналног система бездимензионих параметара. Вредности свих битних чинилаца за прорачун угиба (коэффициент течења, дилатација скупљања, чврстоћа на затезање и модул еластичности бетона, димезије пресека, количина и распоред затегнуте и притиснуте арматуре, распон носача и ниво оптерећења) могу се слободно бирати у границама уобичајених вредности. Израчунати алгебарски резултат је близак оном који се добија нумеричким интегралнењем кривине за неколико основних статичких система (просто и континуално ослањање). Развијени метод је подесан за практичне инжењерске прорачуне.

Као независна студија, поређени су резултати прорачуна угиба ригорозним методом Еврокода 2 са мереним вредностима на армиранобетонским гредама и плочама. Мерени угиби из 6 експерименталних програма из литературе (4 на простим гредама, са 29 резултата, и 2 на континуалним гредама, са 10 резултата – укупно 66 експерименталних носача) показали су добро слагање са израчунатим вредностима. Спроведени су и нелинеарни прорачуни угиба коначним елементима, методом корак-по-корак, коришћењем *DIANA* софтвера. Резултати прорачуна неколико носача такође су упоређени са резултатима добијеним према Еврокоду 2. На основу ових анализа формулисано је неколико смерница за калибрацију модела Еврокода 2.

**Кључне речи:** армирани бетон, угиб, дуготрајно оптерећење, Еврокод 2, прерасподела.

Научна област: грађевинарство и геодезија

Ужа научна област: бетонске конструкције

**УДК** 624.012.45:624.041.65(043.3)

## **IMPROVED METHOD FOR DEFLECTION CONTROL OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES**

### *Summary*

Development of design tools for reinforced concrete is not followed with convenient procedures for the deflection check. Most of the software using finite element calculation does not support proper evaluation (including effects of cracking, creep and shrinkage) of the deflection of concrete structures. Use of high strength materials enables reduction of the size of structural elements. As a result, structures become more deformable and it is necessary to check deflection.

Simplified and refined methods are usually presented by most of design codes or recommendations for the deflection check. The simplified methods provide faster and easier calculation. They are generally on the safe side and require enlarged dimensions of structural elements. The refined methods involve relevant properties of concrete, environmental conditions and construction schedule, allowing for optimization of the size of structural elements. Apart from not being suitable for hand calculation, they often require some additional knowledge.

Eurocode 2 (EN 1992-1-1:2004) also provides two methods for the deflection check. Simplified criterion is in a form of span-to-depth ratio limit. This tool has serious limits. It is not well prepared for practical use (it is derived for an unsuitable ratio of the quasi-permanent to the ultimate load; it also does not include the compressive reinforcement other than required for ULS). The second, rigorous method is based on general approach for deflection calculation - integration of the curvatures along the element. The effective modulus method is used for calculation of long-term effects due to creep and shrinkage of concrete. Influence of concrete cracking to the stiffness is introduced by interpolation coefficient according to CEB-FIP Model code 1990. This more refined method seems to be easy applicable due to lack of the very important instruction: bending moment diagram of the statically indeterminate structures, resulting from an ordinary ULS analysis based on concrete gross sections, should be redistributed to account for effects of cracking, creep and shrinkage. This option is not usually supported by common engineering software and task becomes heavy. Evaluation of the redistributed diagram requires a time-dependant stiffness matrix and an iterative calculation following appearance of cracks.

An improved method for deflection calculation of reinforced concrete elements based on the integration of curvatures is presented in Thesis. It follows Eurocode 2 instructions for calculation of the curvatures and includes the necessary redistribution of bending moments. The method is developed for beam elements of rectangular section and one-way slabs for the long-term (quasi-permanent) uniform load. The algebraic expressions for calculation of the deflection are derived using original system of dimensionless parameters. All relevant design parameters for the deflection calculation (creep coefficient, shrinkage strain, tensile strength and modulus of concrete, cross section dimensions, area and arrangement of tensile and compressive reinforcement, span and load level) are left open for an arbitrary choice within common limits. Calculated result is close to the result obtained by integration of curvatures for several basic structural systems (simple and continuous beams). Developed method is suitable for engineering purposes, including hand calculation.

As an independent study, results of deflection calculation obtained by rigorous method of Eurocode 2 are compared with experimentally measured deflections of reinforced concrete beams and slabs. Results provided from six experimental programs available from literature (4 on simple beams, with 29 results, and 2 on continuous beams, with 10 results – total of 66 experimental girders) were in good compliance with the calculated deflections. DIANA software was also used for nonlinear finite element step-by-step analysis. Calculated deflections for several examples are compared with results obtained by numerical integration of curvatures according to Eurocode 2. Comparisons with experimental results and refined non-linear analysis are summarized into some guidelines for calibration of the method.

**Keywords:** reinforced concrete, deflection, long-term, Eurocode 2, redistribution

*Civil engineering*

*Concrete structures*

**UDC** 624.012.45:624.041.65(043.3)

## САДРЖАЈ

1	УВОД	1
2	УГИБ И КАКО ГА СРАЧУНАТИ	5
3	ПАРАМЕТРИ КОЈИ СЕ УВОДЕ У ПРОРАЧУН	12
3.1	Геометријске карактеристике носача	12
3.2	Модул еластичности (деформације) бетона и арматуре	13
3.3	Чврстоћа бетона при затезању савијањем	16
3.4	Количина и положај арматуре у пресецима	20
3.5	Величина оптерећења (ниво напрезања материјала)	22
3.6	Промена крутости због формирања прслина и садејство затегнутог бетона	23
3.7	Статички систем носача и облик дијаграма момента	25
3.8	Прерасподела утицаја у статички неодређеним системима услед промене крутости	26
3.9	Течење бетона	27
3.10	Скупљање бетона	31
3.11	Прерасподела утицаја у статички неодређеним системима услед течења и скупљања	33
4	ПРЕГЛЕД ПОСТУПАКА КОНТРОЛЕ УГИБА У НЕКОЛИКО ЗНАЧАЈНИЈИХ НОРМАТИВА	36
4.1	Контрола угиба према Еврокоду 2	36
4.2	Контрола угиба према <i>CEB-FIP</i> Модел коду <i>MC 1990</i>	52
4.3	Контрола угиба према препорукама Америчког института за бетон	59
4.4	Контрола угиба према Британском стандарду	63
4.5	Контрола угиба према руским прописима	69
5	ДЕФОРМАЦИЈЕ БЕТОНА ЗАВИСНЕ ОД ВРЕМЕНА	72
5.1	Течење бетона	72
5.2	Скупљање бетона	74
5.3	Прорачуни ефеката у времену у тези	76
5.4	Поступак за разграничење стања I и II примењен у тези	80



6	ОПЕРАЦИОНАЛИЗАЦИЈА ПРОРАЧУНА	85
6.1	Комплексност проблема и начин решавања	85
6.2	Опис модела за прорачун угиба који се користи у тези	86
6.3	Успостављање корелација	91
6.4	Израчунавање угиба	97
6.5	Форма за нумеричку апроксимацију	98
7	ПРЕВОЂЕЊЕ НЕЛИНЕАРНОГ ДЕЛА МОДЕЛА У БЕЗДИМЕНЗИОНИ ОБЛИК	101
8	АПРОКСИМАЦИЈЕ	113
8.1	Протокол – тачка (1)	115
8.1.1	Израчунавање $\tilde{y}_{i,II}$	115
8.1.2	Израчунавање $\tilde{y}_{i,I}$	115
8.1.3	Израчунавање $TS$	116
8.2	Протокол – тачка (2)	118
8.3	Протокол – тачка (3)	119
8.4	Протокол – тачка (4)	121
8.5	Нормирано садејство затегнутог бетона – параметар $TS$	122
8.6	Бездименциони коефицијент утицаја скупљања	126
8.7	Примери прорачуна угиба употребом алгебарских апроксимација	127
8.7.1	Пример 1: Проста греда	127
8.7.2	Пример 2: Континуална греда	129
9	ТЕСТ ПРЕКЛАПАЊА	133
10	ПОРЕЂЕЊЕ ПРОРАЧУНА СА ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИМ ВРЕДНОСТИМА	141
10.1	Избор експерименталних података	141
10.2	Особине експеримената о којима треба водити рачуна при интерпретацији резултата	142
10.2.1	Ефекат размере	142
10.2.2	Ефекат процента армирања	142
10.2.3	Ефекат нивоа напрезања	143
10.2.4	Брзина мерења угиба	143
10.2.5	Ефекат стварних материјалних карактеристика	143

10.3	Експерименти на простим гредама	145
10.3.1	<i>G. W. Washa</i> и <i>P. G. Fluck</i> (1952.)	145
10.3.2	<i>W. G. Corley</i> и <i>M. A. Sozen</i> (1966.)	155
10.3.3	<i>L. Bakoss, R. I. Gilbert, K. A. Faulkes</i> и <i>V. A. Pulmano</i> (1982.)	159
10.3.4	<i>J. P. Jaccoud</i> и <i>R. Favre</i> (1982.)	164
10.4	Експерименти на континуалним гредама	172
10.4.1	<i>G. W. Washa</i> и <i>P. G. Fluck</i> (1956.)	172
10.4.2	<i>L. Bakoss, R. I. Gilbert, K. A. Faulkes</i> и <i>V. A. Pulmano</i> (1982.)	179
10.5	Закључак о разматраним експериментима	184
11	ПОРЕЂЕЊЕ СА ДРУГИМ НЕЛИНЕАРНИМ ПРОРАЧУНИМА	187
11.1	Прорачуни експеримената на простим гредама	190
11.1.1	<i>L. Bakoss, R. I. Gilbert, K. A. Faulkes</i> и <i>V. A. Pulmano</i> (1982.)	190
11.1.2	<i>J. P. Jaccoud</i> и <i>R. Favre</i> (1982.)	191
11.2	Прорачуни експеримената на континуалним гредама	197
11.2.1	<i>G. W. Washa</i> и <i>P. G. Fluck</i> (1956.)	197
11.2.2	<i>L. Bakoss, R. I. Gilbert, K. A. Faulkes</i> и <i>V. A. Pulmano</i> (1982.)	199
11.3	Закључак поређења нелинеарних прорачуна	200
11.4	Калибрација модела	202
12	ЗАКЉУЧАК	204
12.1	Шта је урађено у оквиру тезе	204
12.2	Могућности даљег рада на проблемима разматраним у оквиру тезе	206
13	ПРИЛОЗИ	208
13.1	Прилог 1: Однос потребних рачунских површина арматура у пољу и над ослоном континуалних носача правоугаоних пресека	208
13.2	Прилог 2: Поређење резултата прорачуна добијених применом ААЕМ метода и ЕМ метода	214
13.3	Прилог 3: Одређивање вредности коефицијента $\omega$	217
13.4	Прилог 4: Поређење модела за разграничење стања I и II	220
14	ЛИТЕРАТУРА	224

АНЕКСИ (Биографија аутора - Изјава о ауторству - Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада - Изјава о коришћењу)	228
--	-----

## 1 УВОД

Поступци којима се врши доказивање граничног стања деформација армиранобетонских конструкција развијали су се паралелно са проширивањем сазнања о понашању конститутивних материјала и њихове спреге. Спроведена истраживања и опажања понашања изграђених конструкција показала су да, посебно код бетона, бројна својства имају утицаја на деформацију конструкције: промена механичких карактеристика у времену, формирање прелина, течење под дуготрајним оптерећењем, скупљање. Армирањем и стварањем спрегнутог система понашање се још усложњава: одсуство сличних особина код челика проузрокује унутрашњу прерасподелу напрезања. Услед тога, армиранобетонска конструкција чак и под непроменљивим спољним утицајима (сталним оптерећењем и условима средине) има промене напрезања и, нарочито, деформација.

Особине конститутивних материјала – бетона и челика – које су од утицаја на величину деформација су у досадашњим истраживањима сагледане. Параметри који знатније утичу су експериментално много испитивани и квантификовани за различите услове. Прецизност резултата истраживања појединачних особина углавном превазилази потребе стандардних инжењерских прорачуна. Ова истраживања су унапредовала испред своје практичне примене. Потпуно коришћење њихових резултата захтева детаљно познавање појава и примену сложених софтвера за прорачуне, па се углавном примењује у истраживачке сврхе. Сложеност проистиче из чињенице да већи број појава утиче на коначно понашање, при чему њихов удео (значај) варира у појединачним случајевима.

Истраживачи су, кроз историју, на различите начине покушавали да превазиђу сложеност проблема прорачуна деформација и омогуће неопходне прорачуне у инжењерској пракси. Првобитни поступци су, пре свега због ограничене технике рачунања и још недовољне истражености појава, били ограничени само на део особина, за које се процењивало да су од највећег утицаја. Посматрано кроз инжењерске потребе, савремена средства за прорачуне

практично немају ограничења. Брзи развој могућности за прорачуне, међутим, није пратио и адекватан развој алгоритама за практичне прорачуне. Један од новијих поступака намењених широкој пракси – поступак Еврокода 2 (*EN 1992-1-1: 2004*, [1]\*, који у скорашње време треба да постане и српски стандард за пројектовање бетонских конструкција) за индиректну контролу деформација – не укључује све релевантне особине на експлицитан начин, а неке и не узима у обзир. То је пре свега резултат жеље да се прорачуни учине прихватљиво сложеним за практичне потребе. Може се очекивати да се у скорије време појаве и обухватнији модели и пратеће параметарске анализе.

Стварању алгорита који уводи већи број параметара у прорачун би требало да претходи одговарајућа вишепараметарска анализа. С обзиром на број параметара и распон њихових вредности, у случају прорачуна деформација минимални број комбинација је такав да није прикладно спроводити прорачун тренутно расположивим најсложенијим поступцима (методом нелинеарне анализе применом коначних елемената са уграђеним комплексним моделима за понашање материјала). Веома опсежна, нелинеаром анализом методом коначних елемената рађена студија, чији су резултати сумирани у делу 7.4 литературе [2]\*\*, послужила је за формулацију поступка индиректне контроле угиба у Еврокоду 2. Управо због великог броја параметара, ова студија има суштинска ограничења: уместо анализе међусобне корелације свих укључених параметара, анализиран је утицај једног по једног појединачног параметра. Остали параметри су, притом, задржавали своје референтне вредности, чиме је знатно редукован број нумеричких експеримената. Тиме је суштински избегнуто одређивање корелација за различите комбинације два или више параметара, што, као ће бити показано у овој тези, није увек оправдано. Осим тога, све анализе спроведене су на носачима статичког система прости греде, а резултати потом екстраполирани на друге, статички неодређене системе. Тиме је такође вишеструко смањен број потребних анализа. И овај приступ садржи битна ограничења, с обзиром да у статички неодређеним

---

\* У тексту тезе свако позивање на литературу биће означено угластим заградама [ ] и бројем из пописа литературе, према поглављу 14. Изузетак је учињен само у случају Еврокода 2, који је у попису означен са [1], чија ће се ознака надаље изостављати због честог понављања (позивања).

\*\* Сва следећа позивања у тексту на литературу [2] односе се на резултате студије презентираних у поглављу 7.4 ове литературе.

системима долази до прерасподеле утицаја услед промене крутости и временских деформација бетона.

Због тога су, у практичном смислу, погоднији мање захтевни поступци нелинеарне анализе, који омогућавају резултативну анализу свеукупног спектра комбинација релевантних параметара за прихватљиво време. У овој тези примењен је поступак директне интеграције кривине линијских елемената, са итерацијама ради задовољавања граничних услова. Кривина се израчунава према актуелном моделу Еврокода 2, који је већ раније уведен у Модел коду 1990 (МС 1990) [3], а задржан је и у нацрту Модел кода 2010 (МС 2010 – финални драфт) [4]. Тако добијени резултат може се калибрисати применом измерених резултата и сложенијих анализа добијеним нелинеарним прорачунима.

*Циљ истраживања у овој тези је формулисање поступка прорачуна деформација армиранобетонских конструкција који би се могао користити у свакодневној пракси. Поступак се односи на линијске системе и плоче које преносе оптерећење у једном правцу.* С обзиром да овакви поступци већ постоје, у суштини циљ је да се формулише *поступак за прорачун угиба које ће обухватити већи број релевантних параметара у односу на постојеће, уз прихватљиву рачунску сложеност.* Сличан поступак могао би се применити и на плоче које преносе оптерећење у два правца. Међутим, механизми њиховог ношења, у односу на линијске системе, садрже и друге елементе који имају утицаја на величину угиба. Могућност прерасподеле утицаја у оба правца због промене крутости и временских деформација бетона нарочито усложњава прорачунски модел и чини га тешко подесним за систематско аналитичко проучавање. Критеријуми за ове системе се могу извести екстраполацијом резултата за линијске носаче. Потребне корекције се могу усвојити на основу мерених вредности са реалних конструкција и из експеримената, као и на основу резултата нелинеарних прорачуна на репрезентативно конструисаним моделима. Ово је, такође, веома сложен проблем.

Сврсисходност формулисања оваквог унапређеног поступка, у условима када су софтвери за свакодневни прорачун конструкција на прагу аутоматизације контроле угиба уз укључивање великог броја релевантних параметара, није у олакшавању процеса извођења захтеваних провера. Уобичајени пут пројектовања,

који се састоји у прорачунима граничног стања носивости, и, потом, провери граничног стања употребљивости на већ дефинисаном решењу конструкције, постаје све мање рационалан са употребом конструкционих материјала високих чврстоћа: меродавни пројектни захтеви све чешће су у домену граничних стања употребљивости. Бетон класе С60, на пример, има двоструко већу носивост од класе С30, али свега око 1,2 пута већи модул деформације. Модул еластичности арматурних челика практично не зависи од чврстоће. То значи да је лако могуће формирати знатно увећану носивост елемента уз непромењене димензије пресека, али и уз симболично увећану крутост. Последица је знатно увећана деформабилност, која постаје меродавна при пројектовању.

То значи да би било корисно већ при формирању решења конструктивног елемента размотрити, између осталих, и ограничења деформација. Међутим, савремени софтвери за прорачун грађевинских конструкција углавном користе метод коначних елемената и, за спровођење било које рафинисаније методе контроле деформација, неопходно је да се у целини формира решење конструкције, укључиво и димензионисање арматуре. Тиме је, у великој мери, практично ограничено претходно разматрање захтева граничног стања употребљивости.

*Суштинско унапређење постиже се уколико се поступци за контролу угиба дефинишу на прикладан начин у бездимензионом облику, какви су, на пример, поступци засновани на ограничавању односа распон/статичка висина. Када се користе на инверзан начин, они омогућавају релативно једноставно претходно сагледавање потребних димензија елемената, ради испуњења критеријума у погледу угиба.*

*Истраживање у тези усмерено је на формулисање унапређеног критеријума за контролу угиба у бездимензионом облику. Унапређење се састоји у укључивању већег броја релевантних параметара у односу на до сада употребљаване поступке. Циљ је и да се оствари прихватљива аналитичка сложеност која омогућава и инверзну употребу, за дефинисање потребних димензија елемената при пројектовању ради задовољења критеријума деформација.*

## 2 УГИБ И КАКО ГА СРАЧУНАТИ

У инжењерском смислу, угиб је мерљива физичка појава која, уколико прелази одређене границе, може да ствара проблеме при употреби конструкције. Најчешћи проблеми изазвани прекомерним угибом су: појава оштећења на кртим крутим преградним панелима, проблеми у функционисању опреме и визуелна неприхватљивост. Са позиције пројектанта конструкције чињеница да се угиб може измерити је неупотребљива: конструктивно решење се формира пре изградње. Потребни су:

- **дефиниција прорачунског угиба,**
- **начин његовог одређивања** (модел) и
- **ограничења угиба која треба примењивати.**

Рационалан приступ **дефиницији прорачунског угиба** требало би да уважи следеће чињенице:

- Већина досадашњих покушаја да се применом комплексних софтвера изврши рачунско предвиђање угиба конструкција чак и у контролисаним лабораторијским условима (модела) углавном није дала високо поуздане резултате. Овде треба правити разлику између резултата који су начињени у фази пројектовања експеримента - што представља суштинско рачунско предвиђање (одговара фази пројектовања конструкције), од реинтерпретације резултата добијене коришћењем накнадно измерених физичких и материјалних карактеристика, услова оптерећивања и осталих параметара модела. „Добро слагање“ рачунских и измерених величина на накнадно калибрисаном моделу је само мера прихватљивости модела, а поузданост резултата зависи од поузданости инпута.
- У инпуту прорачуна постоји више неизбежних генератора одступања прорачунатог од стварног угиба. То су, пре свега, разлике у величини пројектних и остварених карактеристика материјала (чврстоће бетона на затезање и модула еластичности) и разлике у осредњеним и реалним условима средине (влажност, температура). Сложеност историје

(времена настанка) - нарочито дуготрајних оптерећења, и, код реалних конструкција, апроксимативност прорачунског модела („статичког система“), као и суштинска разлика између стварних оптерећења и њиховог статистичког репрезента у неком погодном поједностављеном облику, на пример једнакоподељеног оптерећења, такође доприносе одступању рачунских од мерених вредности.

Стога, у садашњем тренутку приступ који би подразумевао покушај израчунавања (предвиђања) стварног угиба у стандардним инжењерским прорачунима не представља ни близу реалну опцију. Као алтернативни поступак може се употребити прорачун неке величине која је у (блиској) корелацији са стварним угибом. Потом се, углавном емпиријски, калибрише веза срачунате величине и прихватљивости опсега стварног очекиваног угиба конструкције.

У том погледу приступ Еврокода 2, (који ће се користити као модел за одређивање угиба у овој тези), заснован на угибу од дуготрајног „квази-сталног“ оптерећења  $q_{qp}$ :

$$q_{qp} = g + \psi_{02} \cdot q, \quad (2.1)$$

где су:

- $g$  – укупно стално оптерећење,
- $q$  – променљиво оптерећење,
- $\psi_{02}$  – статистички мултипликатор ( $\psi_{02} < 1$ ) који дефинише очекивани практично стално присутни део променљивог оптерећења,

представља у много чему добро решење. Најбитнији квалитети овог приступа огледају се у следећем:

- Прорачун није превише сложен – спроводи се у једном кораку (за једну диспозицију оптерећења). Кроз избор одређеног процента променљивог (повременог) оптерећења, зависно од његове врсте, остављена је могућност добре калибрације његовог утицаја рачунским симулацијама и/или на основу резултата мерења. Општији приступ који се често користи, са комбиновањем утицаја од сталних и повремених оптерећења (као, на пример, у *CEB Manual*-у, [5]) подразумева сложенији поступак суперпозиције

$$u_{g+q}(t) = u_{g+q}(0) + u_g(t) - u_g(0), \quad (2.2)$$



где су:

- $u_{g+q}(t)$  – тражени угиб у времену  $t$ ,
  - $u_{g+q}(0)$  – почетни угиб од укупног оптерећења,
  - $u_g(t)$  - угиб у времену  $t$  од сталног оптерећења,
  - $u_g(0)$  - почетни угиб од сталног оптерећења.
- У нумеричком алгоритму (могу да) учествују сви битни параметри који опредељују величину стварног угиба: модул еластичности (деформације) и чврстоћа при затезању бетона (који су директно укључени, тако да се специфични материјали и ситуације могу увести у прорачун), историја оптерећења и услови средине (који се могу индиректно укључити, кроз правилно пондерисане вредности коефицијента течења и дилатације скупљања).
- Коначно, величина која се срачунава има „димензију“ угиба – представља идеализовани угиб за успостављени модел, претпостављене (процењене) карактеристике материјала и услове средине, као и за упросечена очекивана оптерећења. На тај начин израчуната величина суштински представља добру *меру деформабилности* реалне конструкције и погодна је за ограничавање са добро изабраним (рачунски и експериментално калибрисаним) критеријумима.

**Начин одређивања** усвојеног прорачунског угиба (мере деформабилности) неизбежно има утицаја на величину резултата. Начин одређивања обухвата два проблема:

- које параметре увести у прорачун, и
- избор модела (начина „уградње“ у прорачун) за сваки од укључених параметара.

Увођење великог броја параметара усложњава прорачун. Рачунска (нумеричка) комплексност поступка уз примену рачунара и софтвера не представља проблем. Међутим, свака оптимизација броја улазних параметара омогућава лакше сагледавање начина решавања конкретног проблема при практичној употреби критеријума у пројектовању.

Оптимизација броја улазних параметара модела може се вршити искључивањем експлицитног учешћа појединог параметра, када се установи да он

у интервалу својих вредности нема великог утицаја на коначни резултат, и његовим увођењем неком репрезентативном константном вредношћу. Предност оваквог приступа је боља прегледност, за практичну употребу, модела са мањим бројем (преосталих) параметара. Недостатак је у систематском одступању резултата у појединим ситуацијама, које не мора да буде на страни сигурности. На пример, уколико се чврстоћа бетона при затезању уведе са неком фиксном вредношћу која одговара, некој класи чврстоће (или МБ) и старости од 28 дана, резултати (рачунски угиби) за случај оптерећивања конструкције при мањој старости нису на страни сигурности. Уколико се, пак, такав параметар уведе са својом граничном вредношћу која је на страни сигурности за све ситуације, модел ће увек систематски одступати на страну сигурности и бити мање рационалан.

Смањење броја параметара којим модел оперише може се постићи коришћењем нових, бездимензионих параметара, који се формулишу на основу полазних (на пример коефицијент армирања замењује површину арматуре и површину бетона). Предност оваквог приступа је задржавање широког инпута уз добру компактност модела. Недостатак може бити у тежем директном сагледавању ефеката промене појединих конкретних параметара, јер су они сада 'маскирани' у некој комбинацији са другим параметрима. Овај недостатак се лако отклања у другом кораку: фиксирањем вредности осталих параметара добија се распон бездимензионог параметра када се мења посматрани конкретни параметар који у њему учествује.

Анализа са параметрима у бездимензионом облику је нарочито погодна за моделска испитивања и зато је примењена као приступ у овом раду. Поред анализе утицаја појединих конкретних параметара на величину прорачунског угиба, један од основних циљева тезе је и формулисање добро заснованог система бездимензионих параметара.

Параметри и појаве који ће се увести у прорачун су опште познати чиниоци који одређују величине реалних угиба (деформација) армиранобетонских конструкција:

1. геометријске карактеристике носача (распон, облик и величина бетонског попречног пресека);
2. модул еластичности (деформације) бетона и арматуре;

3. чврстоћа бетона при затезању;
4. количина и распоред арматуре у пресеку;
5. историја и величина укупног оптерећења (ниво напрезања материјала);
6. промена крутости због формирања прелина и садејство затегнутог бетона;
7. статички систем носача (облик дијаграма момента);
8. прерасподела утицаја у статички неодређеним системима услед промене крутости;
9. течење бетона;
10. скупљање бетона и
11. прерасподела утицаја у статички неодређеним системима услед течења и скупљања бетона.

У наставку (трећем поглављу), сваки од претходних 11 чинилаца је детаљније размотрен, описан и образложен начин увођења у модел (поглавља 3.1 – 3.11). Синтезно, то представља примењени модел у овом раду. Приказане су и инструкције из Еврокода 2 за одређивање вредности појединих инпута.

Имајући у виду већ објашњену разлику између стварних и прорачунских угиба, ограничења угиба која се примењују би требало обавезно калибрисати у односу на примењени модел прорачунског угиба, поређењем рачунских величина и мерених и других рачунских резултата (добитених рафинираним прорачунима, који се не користе у свакодневном инжењерском раду: применом софтвера за нелинеарне прорачуне, анализа корак по корак у времену, уз праћење историје оптерећења и слично).

***Форма резултата који ће се извести у овој тези***, као што ће бити показано, ***омогућава да се проблем калибрације решава потпуно независно од израде и испитивања модела***. Резултат се изводи у облику рачунског угиба за задате (усвојене) релевантне параметре, на који се може примењивати изабрано ограничење. Иако ће проблем калибрације бити размотрен, он није у основном интересовању тезе.

С обзиром да се у тези користи модел Еврокода 2 за срачунавање угиба, могу се преузети и ***ограничења угиба*** која би требало примењивати. Као емпирички установљена задовољавајућа ограничења наводе се распон/250, за

укупни угиб  $u$ , распон/500, за прираст угиба након завршетка грађења (након наношења додатног сталног терета). Сама ограничења потичу из *ISO 4356* [6].

Форма резултата који ће се извести у овој тези и у погледу критеријума за ограничавање *укупног угиба* омогућава потпуну флексибилност: могу се бирати различита ограничења, па није неопходно да се критеријум фиксира.

С друге стране, контрола величине прираста угиба након завршетка грађења, захтева нешто другачији прорачунски модел од оног који се примењује за укупни угиб. Решење се може формулисати полазећи од принципа исказаног релацијом (2.2).

Ако се са  $t_1$  означи тренутак окончања грађења, а са  $t_2 > t_1$  тренутак у коме се посматра увећање угиба од сталних и повремених оптерећења након завршетка грађења - „активни угиб“  $u_{g+q}(t_1 \rightarrow t_2)$  износи:

$$u_{g+q}(t_1 \rightarrow t_2) = u_{g+q}(t_2) - u_g(t_1) = [u_{g+q}(0) + u_g(t_2) - u_g(0)] - u_g(t_1). \quad (2.3)$$

Израчунавање активног угиба може се спровести на основу израза на десној страни релације (2.3), употребом поступка за одређивање дуготрајних угиба који ће бити изведен у тези.

Поступак је управо намењен за срачунавање угиба у времену од дуготрајних оптерећења, какви су  $u_g(t_2)$  и  $u_g(t_1)$ . Потребно је применити одговарајуће вредности коефицијента течења  $\varphi(t_2, t_0)$  и  $\varphi(t_1, t_0)$  и дилатације скупљања  $\varepsilon_{sk}(t_2)$  и  $\varepsilon_{sk}(t_1)$ . Одређивање адекватног замењујућег (за одређену историју оптерећења) коефицијента течења коментарисано је у наредном поглављу.

Почетни угиби  $u_{g+q}(0)$  и  $u_g(0)$  такође се могу приближно одредити на исти начин, узимајући да је  $\varphi = 0$  и  $\varepsilon_{sk} = 0$ . Приближност се огледа у томе да су изведене аналитичке апроксимације резултата нумеричке интеграције кривине за прорачун дуготрајних угиба (приказане у поглављу 8) калибрисане тако да дају што мања одступања за вредности коефицијента течења у опсегу  $\varphi = 1,0 \div 3,0$ . Изван тог опсега допуштена су већа одступања, како аналитичке апроксимације не би имале превише сложене једначине. С обзиром да у релацији (2.3) учествује разлика  $[u_{g+q}(0) + \dots - u_g(0)]$ , као и да је повремено оптерећење  $q$  код бетонских зграда најчешће доста мање од  $g$ , апроксимација у нумеричком смислу није велика.

Проблем израчунавања почетног угиба такође је решаван током рада на овој тези. Решење је једноставније од оног за дуготрајне угибе, јер не зависи од величине величине коефицијента течења и дилатације скупљања. Може се подједнако ефикасно изразити помоћу сложених бездимензионих параметара примењених у тези, с тим да су изрази (без  $\varphi$  и  $\varepsilon_{sk}$ ) доста компактнији.

Оно што, међутим, нарочито усложњава проблем аналитичког моделирања активног угиба јесте учешће три нова параметра: још један коефицијент течења  $\varphi(t_1, t_0)$ , још једна дилатација скупљања  $\varepsilon_{sk}(t_1)$  и однос повременог и сталног терета ( $q/g$ ). Њихово задржавање као потпуно слободних параметара (што је био приступ код скоро свих параметара при израчунавању дуготрајног угиба) изузетно би компликовало модел, с обзиром да број корелација међу параметрима расте са квадратом броја параметара.

Ефикасан приступ решавању проблема активног угиба може да пође од успостављања односа за сва три нова параметра:  $\varphi(t_1, t_0)/\varphi(t_2, t_0)$ ,  $\varepsilon_{sk}(t_1)/\varepsilon_{sk}(t_2)$  и  $q/g$ , са неколико дискретних вредности (2 – 3 би биле сасвим довољне). Тиме би аналитичка сложеност била доста умањена и практично сведена у ранг проблема дуготрајног угиба. Ова процена се заснива на чињеници да се не ради о параметрима модела који уводе нове „особине“ појаве, већ о удвајању параметара чије су корелације са другим „особинама“ у тези већ анализирани на проблему дуготрајног угиба. Подесно заснивање односа  $\varphi(t_1, t_0)/\varphi(t_2, t_0)$ ,  $\varepsilon_{sk}(t_1)/\varepsilon_{sk}(t_2)$  и  $q/g$  заслужује солидну мултипараметарску анализу и представља само за себе захтеван и, у суштини, решив проблем. У овој тези он није разматран.

Резултати разматрања проблема активног угиба у [2] указују и на друге могућности за спровођење овог ограничења. На крају поглавља 4.1 дат је коментар у погледу једноставнијег долажења до решења.

### 3 ПАРАМЕТРИ КОЈИ СЕ УВОДЕ У ПРОРАЧУН

У другом поглављу набројано је 11 карактеристика које утичу на величине реалних угиба, а које се укључују у модел. Неке од њих укључују више од једне величине коју треба описати (квантификовати), тако да је број појединачних параметара нешто већи. Овде ће бити наведене њихове основне особине и принципјелно објашњен начин увођења у модел. С обзиром да се у тези разрађује поступак Еврокода 2, детаљније су приказани и одговарајући поступци за одређивање потребних вредности нумеричких параметара према Еврокоду.

*У погледу начина употребе у моделу параметри су подељени на „директне“ (експлицитне) и „индиректне“ (имплицитне).*

*Директни параметар слободно поприма жељену вредност при прорачуну. Овакви параметри представљају суштински квалитет модела јер омогућавају увођење специфичних прорачунских ситуација, на пример оптерећивања бетона при старости различитој од оне при којој се постижу номиналне карактеристике (28 дана). На тај начин се може сагледати и утицај евентуалног одступања остварених и пројектованих карактеристика конструкције на деформабилност конструкције.*

*Модел у суштини нема индиректних нумеричких параметара. Имплицитност се пре свега односи на примену одређених хипотеза или ограничења при анализи. Тако је, на пример, код континуалних система усвојено армирање над ослонцима пропорционално арматури у пољу, у складу са прорачуном према граничном стању носивости (ово ограничење се може једноставно третирати на страни сигурности, као што је објашњено у погл. 3.4).*

#### 3.1 Геометријске карактеристике носача

Распон носача, облик и величина бетонског попречног пресека су, поред начина ослањања, основне величине које дефинишу деформабилност елемента конструкције.

*Распон носача је директан параметар у моделу.*

Анализирају се носачи правоугаоног бетонског пресека, што одговара армиранобетонским плочама. Пресек се описује ширином и висином. Висина и статичка висина пресека су два независна параметра. Статичка висина се уводи уз помоћ висине пресека, дефинисањем положаја арматуре (дато у поглављу 3.4).

***Ширина и висина правоугаоног пресека су такође директни параметри у моделу.***

Сумарно, геометријске карактеристике бетонског носача су описане са три директна нумеричка параметра.

### 3.2 Модул еластичности (деформације) бетона и арматуре

Модул еластичности је основна мера почетне деформације након оптерећивања. У случају арматуре то је и једина мера укупне деформације. Код бетона он је један од параметара за дефинисање укупног одговора на оптерећење.

Модул еластичности бетона, најчешће секантни модул, зависи од старости бетона у тренутку оптерећивања и од нивоа напрезања. Поред овога, на његову величину значајнијег утицаја имају утицаја и физичко-механичке карактеристике агрегата (овај утицај је генерално пропорционалан – може се обухватити на нивоу референтне вредности, на пример за старост од 28 дана), а на коначно (при великој старости) достигнуте вредности – и врста цемента.

Обрасци за прорачунско дефинисање модула бетона у литератури су бројни и, у квалитативном погледу, слични: дефинише се почетна вредност, а модул расте са старашћу бетона. У квантитативном погледу, резултати се разликују, најчешће у зависности од разлика у примењеним компонентама, рецептури и поступку одређивања.

Обрасци из Еврокода 2 су довољно обухватни и обрађују утицај практично свих релевантних параметара.

Почетна вредност, секантни модул између напона 0 и  $0,4 \times f_{cm} = 0,4(f_{ck} + 8)$  МПа при старости од 28 дана, дата је са

$$E_{cm} = 22[(f_{ck} + 8)/10]^{0,3} \quad GPa, (f_{ck} \text{ и } MPa) \quad (3.1)$$

када је агрегат од кварцита.  $f_{cm}$  је средња, а  $f_{ck}$  карактеристична вредност чврстоће на притисак.

За агрегат од кречњака вредност се смањује за 10 %, од пешчара 30 %, а у случају базалтних агрегата повећава за 20 %.

Пораст модула у времену дефинисан је релацијом

$$E_{cm}(t) = e^{0,3s\left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right)} \times E_{cm} \quad (3.2)$$

где је  $t$  старост бетона у данима, а коефицијент  $s$  зависи од класе чврстоће цемента и износи 0,20 (класа  $R$ ), 0,25 (класа  $N$ ) и 0,38 (класа  $S$ ). Сходно овоме, за  $t \rightarrow \infty$ , „коначне“ вредности модула су 1,06 (класа  $R$ ), 1,08 (класа  $N$ ) и 1,12 (класа  $S$ ) пута веће од почетне при старости од 28 дана.

С обзиром да у реалним конструкцијама оптерећења која производе угиб настају у више корака, одговор конструкције се дешава при различитим величинама модула деформације бетона. Претпоставимо да се последње дуготрајно оптерећење наноси при старости  $t = 180$  дана. Модул бетона тада износи 1,04 (класа  $R$ ), 1,05 (класа  $N$ ) и 1,07 (класа  $S$ ) почетног. То значи да велики део преосталих оптерећења настаје у времену када се модул веома мало разликује од модула у тренутку активације тежине конструкције. (При израчунавању односа модула је учињена претпоставка да је тежина конструкције активирана при старости од 28 дана. Уколико то није случај, као почетни модул може се узети вредност за одговарајућу старост; релативни односи су другачији, али са сличним нумеричким вредностима.)

Ако се усвоји историја оптерећења: 50 % при старости од 28 дана, а затим линеарни пораст до 100 % у старости од 180 дана – пондерисани (заменењујући) модул бетона (који ће дати исту еластичну дилатацију као она која се добија интеграцијом усвојене историје) износи  $1,025 \times E_{cm}(28)$ , за класу цемента  $S$ , која у времену даје највећу разлику. За класу цемента  $R$  „просечни“ модул износи свега 1,013 почетног.

Разлика од 1 – 2,5 % у величини модула еластичности бетона, посматрана са аспекта одступања која уносе остали чиниоци у поступку срачунавања угиба, је занемарљива.

***У моделу који се користи у овом раду модул еластичности бетона је директни параметар, чија се вредност може бирати.*** Тиме је остављена могућност да се врши пондерисање вредности, у складу са историјом оптерећења.



Међутим, претходна анализа указује да се, са задовољавајућом прецизношћу, може користити вредност модула бетона достигнута при активацији сопствене тежине, уколико је то блиско старости од 28 дана. Резултат мало одступа и то на страну сигурности. За знатно млађе бетоне при оптерећивању има смисла урадити пондерисање.

Требало би имати у виду да вредности почетног модула еластичности (секантног или тангентног) срачунате према претходним инструкцијама нису прикладне за све врсте прорачуна. Поступак оптерећивања при експерименталном одређивању модула не одговара начину наношења реалних дуготрајних оптерећења. Осим тога од значаја је и временски интервал након оптерећивања до читавања резултата. Нешто више објашњења о овом дато је у поглављу 5.

За почетну, еластичну анализу, прикладне вредности модула су на нивоу од око 85% вредности срачунатих претходним поступком, [7]. Управо толико редуковани модул користи се за прорачуне почетног угиба у руским нормама [8]. Израчунате вредности почетних модула (из чврстоће на притисак) према америчким *ACI* препорукама [9] осетно су мање од оних које дефинише Еврокод 2 и оквирно се уклапају у редукацију од око 15 %.

Као што је већ назначено у поглављу 2, прорачун почетног угиба није од директног интереса за проблем дуготрајног угиба који се обрађује у овој тези. За прорачун деформација од дуготрајних оптерећења потребна је коректна веза напона (оптерећења) и укупне дилатације. Параметри који је описују – модул еластичности, почетна (еластична) дилатација и дилатација течења (описана коефицијентом течења) чине спрегнути систем података (види поглавље 5): када је модул дефинисан, остали подаци се калибришу према његовој вредности. Резултат крупноинкременталног прорачуна дуготрајне деформације не зависи много од (умерене) варијације вредности модула еластичности бетона (при прорачуну) ако су вредности коефицијента течења одређене у складу са одређеном вредношћу модула, то јест, ако је очувана укупна дилатација коју производи напон одређене величине.

*Модул еластичности арматуре је такође директни параметар у моделу и његова вредност се бира.* Декларисана вредност у Еврокоду 2 од 200 *GPa* сасвим задовољава потребе прорачуна.

Модули еластичности бетона и арматуре су два нова директна нумеричка параметра, што са претходних 3 даје, досад, укупно 5 директних нумеричких параметара.

### 3.3 Чврстоћа бетона при затезању савијањем

Код великог дела армиранобетонских конструкција укупно затезање у појединим деловима распона изазвано савијањем, скупљањем и спреченим деформацијама превазилази чврстоћу при затезању и долази до формирања прслина. Последица је смањење крутости и повећање деформација. Релативни прираст угиба при настанку прслина је утолико већи уколико је конструкција мање армирана. Ово је најчешће случај са армиранобетонским плочама, које су, због мале конструктивне висине, и најинтересантније при изучавању угиба. Настанак прслина у пољу и дужина потеза са прслинама, који су директно условљени чврстоћом на затезање, значајније опредељују величину почетног и дуготрајног угиба.

Средња вредност чврстоће бетона при затезању савијањем  $f_{ctm,fl}$  је рачунски трансформисана чврстоћа бетона при (аксијалном) затезању  $f_{ctm}$ . С обзиром да бетон у затегнутој зони, пре отварања прслине, показује нееластично понашање, дијаграм напона затезања није троугаони него „пунџи“ и резултанта напона затезања је већа од резултанта линеарног дијаграма нормалног напона затезања услед савијања. Већи је и момент  $M_{cr}$  који одговара тако насталом спрегу, иако је напон у најзатегнутијем влакну  $f_{ct}$  (или  $f_{ctm}$ ). Да би се омогућило коришћење уобичајених формула линеарне еластичности материјала ( $M_{cr} = W \times f_{ct}$ ), чврстоћа при затезању  $f_{ctm,fl}$  је тако калибрисана да буде  $M_{cr} = W \times f_{ctm,fl}$ .

Уочено је да жилавост пресека према отварању прслина расте са смањивањем висине. Корелационе формуле су се кроз време мењале. Формула (3.23) Еврокода 2 за чврстоћу на затезање савијањем је:

$$f_{ctm,fl} = (1,6 - h/1000) \times f_{ctm} \quad (3.3)$$

али не мање од  $f_{ctm}$ , где је  $h$  висина пресека у милиметрима.

Обрасци који дефинишу вредност чврстоће при затезању традиционално је изводе из чврстоће при притиску. Тако је и у Еврокоду 2, за старост од 28 дана:

$$f_{ctm} = 0,30 \times f_{ck}^{2/3} \quad (\text{за класе до } C50 \approx MB60). \quad (3.4)$$

Пораст током времена приказан је сразмерно порасту средње чврстоће при притиску  $f_{cm} = (f_{ck} + 8)$ :

$$f_{ctm}(t) = (f_{cm}(t) / f_{cm})^\alpha \times f_{ctm} = e^{s \left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right) \times \alpha} \times f_{ctm} \quad (3.5)$$

где су  $f_{cm}$  и  $f_{ctm}$  чврстоће при старости од 28 дана,  $\alpha = 1$  за  $t < 28$  и  $\alpha = 2/3$  за  $t \geq 28$  дана, а  $s$  је већ објашњено код модула еластичности. У зависности од класе цемента (вредности за  $s$ ), однос  $[f_{ctm}(\infty) / f_{ctm}(28)]$  креће се од 1,14 до 1,29. За старост од 180 дана распон  $[f_{ctm}(180) / f_{ctm}(28)]$  је од 1,08 до 1,17.

Распон вредности није велики, али није ни занемарљив. У прорачунском погледу величина чврстоће при затезању долази до посебног изражаја код конструкција које су по свом напрезању блиско прелазу из стања без прлина у стање са прлинама, што је често случај код носача мале висине – армиранобетонских плоча.

Једна од значајнијих одредница чврстоће бетона при затезању јесте веће расипање резултата мерења на узорцима једне серије, у односу на друге механичке карактеристике. Може се рећи да је ова чињеница од мањег значаја при одређивању угиба: уколико се претпостави равномерно расипање резултата у простору (дуж конструкције) у односу на средњу вредност  $f_{cm}(t)$ , укупни ефекат је близак оном који даје униформна вредност  $f_{cm}(t)$  дуж целог носача.

Оно што, међутим, суштински отежава поступак прорачуна угиба јесте постепено развијање слике прлина (и тиме постепено мењање крутости) у случају сложених историја оптерећења. Наиме, величина чврстоће при затезању, кроз време, двојачко учествује у опредељивању угиба. Прво, дефинише границу између зоне са прлинама и неиспрскале зоне – односно границу промене (модела) крутости на савијање. Друго, у тренутку настајања прлине дефинише, према својој актуелној вредности, степен деградације везе бетон-арматура и резидуално учешће затегнутог бетона у преносу унутрашњих сила. Ово двојство у многоме отежава пондерисање вредности  $f_{ctm}$ : резултат не зависи само од

материјалних карактеристика кроз време и историје оптерећења (као код, на пример модула еластичности), већ и од статичког система.

Поред тога, настајање прелина и смањивање крутости додатно поспешују затезања која настају као последица скупљања. Ефекат скупљања изражава се такође двојачко. Прво, конструктивно спречено дилатирање од скупљања конструкције као целине има за последицу настајање сила затезања (и, евентуално, момената) у пресецима. Друго, на нивоу самих пресека настаје напрезање при скупљању бетона услед присутне арматуре. Ови напони су самоуравнотежени и не дају пресечне силе, али се у пресецима без прелина јавља затезање на јаче армираној страни – што би требало да буде страна коју затеже и момент савијања чиме се смањује „отпорност“ према настајању прелина.

Стога је, имајући у виду напред споменути потенцијално већи утицај чврстоће при затезању на прорачунски угиб носача који се налазе на граници преласка у стање са прелинама, прагматично да се угиб срачунава за две различите, прикладно одабране, вредности чврстоће при затезању.

Уколико нема конструктивних ограничења за подужно скупљање конструкције, за правилно справљен, уграђен и негован бетон вредност  $f_{cm,fl}$  при старости која одговара времену активирања тежине конструкције (на пример 28 дана) је на страни сигурности. Ефекат скупљања на нивоу пресека може се урачунати умањивањем  $f_{cm,fl}$  за величину напона затезања који производи скупљање на ивци пресека која је затегнута од спољних оптерећења ( $f_{cm,fl,red}$ ). Овај приступ, међу првима су предложили Сканлон (*Scanlon*) и Мареј (*Murray*) 1982. године [10] за прорачун према *ACI* препорукама [9]. Према овом предлогу прорачунска вредност чврстоће на затезање савијањем  $f_r$  (*modulus of rupture*) би требало да се умањи на скоро половину нормативне вредности у [9]. Сканлон и Бишоф (*Bischoff*) предлажу да смањење буде за  $\frac{1}{3}$  [11] (у односу на вредност према релацији (4.26)), што је и уграђено у *ACI* 318-08.

Напон затезања услед скупљања се може израчунати (на пример *АЕМ* поступком; у поглављу 10 наведене су овако израчунате вредности за неке од разматраних експерименталних носача) или се паушално узима кроз коефицијент интерполације  $\beta = 0,5$  за дуготрајна дејства (релација (4.1а)). Паушална редукција је у износу од  $(1 - \sqrt{0,5}) \times 100 = 30 \%$  (детаљније коментарисано у поглављу 5.4).

Међутим, при употреби чврстоће при затезању савијањем  $f_{ctm,fl}$  за одређивање момента појаве прслина ( $M_{cr}$ ) чак и непосредно при оптерећивању ( $t_0$ ) требало би имати у виду да, при уобичајеним поступцима у пракси, нега бетона често престаје пре првог оптерећивања, чиме отпочиње скупљање. Скупљање, обављено од тренутка престанка неге до оптерећивања, може да код јаче армираних носача произведе солидно затезање (и неколико  $MPa$ ) пре свега на страни пресека уз арматуру која је постављена за прихват момента савијања. То значи да ће, у тренутку оптерећивања, преостали „капацитет“ бетона на затезање савијањем бити умањен за величину насталог затезања услед обављеног скупљања до оптерећивања, у носачу који још нема прслине од оптерећења (у [12] је анализиран и показан утицај раног скупљања на већ на почетни угиб). Гали (*Ghali*) у [13] предлаже израчунавање напона (затезања) услед скупљања, а у [14] наглашава да је чврстоћа на затезање савијањем условљена бројним факторима, те да отпорност према настанку прслина не би требало да се фиксира нормативно, већ да буде предмет пажљивог избора према конкретним условима. Гилберт (*Gilbert*) у већем броју својих радова указује на утицај раног скупљања на смањење отпорности према настанку прслина. У [15] и [16] предлаже измене актуелних аустралијских прописа и *ACI* [9] препорука које укључују и редукцију прорачунске чврстоће на затезање.

Израчунавање величине затезања услед већ обављеног скупљања може се спровести, на пример, *AAEM* поступком, уз коришћење неколико података који су при пројектовању у домену претпоставки: историја првог оптерећивања, релативна влажност средине и одговарајуће вредности коефицијента течења и дилатације скупљања за посматрани период ( $t_1, t_{sk}$ ). Ово је, са аспекта пројектанта и практичне примене, превише приметна процедура. Могуће поједностављење састоји се у томе да се, при израчунавању момента појаве прслина ( $M_{cr}$ ), користи чврстоћа при аксијалном затезању  $f_{ctm}$ , као паушално редукована (почетна) вредност чврстоће при затезању савијањем  $f_{ctm,fl}$  за ефекте иницијалног скупљања до првог оптерећивања.

***Овај једноставан приступ ( $f_{ctm,fl,red} \approx f_{ctm}$ ) ће се користити при сагледавању сагласности модела Еврокода 2 за прорачун угиба са експерименталним вредностима угиба у поглављу 10.***

Уколико постоје конструктивна ограничења која изазивају напрезање услед скупљања, или постоји сумња у могућност слабијег квалитета извођења, нека додатно умањена вредност  $f_{ctm,fl,red}$  омогућава сагледавање деформабилности конструкције и у оваквим условима.

***Чврстоћа бетона при затезању савијањем  $f_{ctm,fl}$  је такође директни параметар у моделу и њена вредност може изабрати.***

Укупан број директних нумеричких параметара до сада је 6.

### 3.4 Количина и положај арматуре у пресецима

Количина арматуре на више начина утиче на величину угиба. Директни утицај се огледа у формирању крутости композитног пресека (са или без прслина). Индиректни утицај је у ограничавању слободних деформација бетона услед скупљања и течења. У свим овим случајевима мера утицаја је површина арматуре у пресеку, као и њен распоред (положај).

***Површина арматуре и њен положај су директни параметри у моделу и њихова вредност се може изабрати.*** Површина затегнуте арматуре је директни параметар. Површина притиснуте арматуре је изражена кроз однос према површини затегнуте арматуре и такође је директан параметар. Код статички неодређених елемената (греде са континуитетом на једном или оба краја) основни директни параметари су површине затегнуте и притиснуте арматуре за максимални момент у пољу добијен стандардним прорачуном са крутошћу бетонског бруто пресека. За анализе спроведене у тези (аутоматско извођење масовног нумеричког експеримента, за велики број комбинација вредности директних параметара), затегнуте арматуре код ослонаца изведене су из затегнуте арматуре у пољу, у складу са стандардним прорачуном граничног стања носивости, поступком који је објашњен у поглављу 13.1. Такође је усвојен исти однос површина затегнуте и притиснуте арматуре код ослонца као и у пољу.

Када се изведени обрасци за прорачун угиба користе за континуалне системе са затегнутом арматуром у зони ослонаца која значајније одступа од релативних односа приказаних у Прилогу 1 у поглављу 13.1, може се применити приступ на страни сигурности. Уколико је арматура код ослонца већа од имплицитно претпостављене, примена образаца је на страни сигурности. Уколико

је обрнут случај, прорачун се може спровести тако што ће се обрасци срачунати са редукованом (мањом од усвојене) арматуром у пољу која одговара усвојеној арматури изнад ослонаца у складу са примењеним принципом пропорционалности према прорачуну граничног стања носивости (*ULS*).

Сам софтвер коришћен у тези може да спроводи прорачун за потпуно независне арматуре код ослонаца у односу на оне у пољу, као и за различите односе површина затегнуте и притиснуте арматуре у пољу и код ослонаца, односно, појединачни прорачун је могућ за било коју комбинацију вредности директних параметара. Ова опција је искоришћена у поглављима 10 и 11, при анализи експериментално добијених резултата – мерених угиба.

У моделу у тези је усвојено да је арматура константна на потезу елемента на коме је момент истог знака. Ово такође може да одступа од ситуације у реалним конструкцијама, с обзиром да се арматура може смањивати на местима са малим моментима. Међутим, код већине реалних конструкција (нарочито код армиранобетонских плоча), уколико се поједине шипке поткрађују, а узме се у обзир обезбеђење сидрења, арматура је физички присутна у мање више пуном износу. Чак и код значајније редуковане арматуре, нумерички ефекат ове претпоставке није велики: крутост није адекватно процењена на местима са малим моментима, а то значи и са малим кривинама – која не дају велики допринос угибу. Ове претпоставке су потврђене анализама у студији [2], што је и приказано у табели 4.3 у поглављу 4.1.

Површина затегнуте арматуре у пољу и њен положај (одстојање од затегнуте ивице) су директни нумерички параметри. Тиме је одређена и статичка висина. Површина евентуалне притиснуте арматуре изражена је у односу на површину затегнуте арматуре. То су три нова директна нумеричка параметра, што са претходних 6, даје укупно девет директних нумеричких параметара. Усвојено је да је положај притиснуте арматуре (одстојање од притиснуте ивице) исти као и затегнуте у односу на затегнуту ивицу. Тиме је избегнуто повећање броја параметара модела. Површине затегнуте и, евентуално, притиснуте арматуре изнад ослонаца континуалних система изводе се из врсте статичког система, уз претпоставку о истом положају – статичкој висини и нису нови параметри.

### 3.5 Величина оптерећења (ниво напрезања материјала)

Величина оптерећења је један од основних директних чинилаца угиба кроз протокол: оптерећење → пресечне силе → напони → дилатације → кривина → угиб. За анализе у тези усвојено је да су сва оптерећења једнакоподељена.

Поред величине укупног оптерећења, од утицаја на величину стварног угиба је и његова историја, као што је већ напоменуто у претходном, другом поглављу. Уведен је принцип прорачуна коришћењем једног, квази-сталног, дуготрајног оптерећења. Детаљнији преглед ефеката ове апроксимације дат је у поглављу 4.1. Такође је дат и начин одређивања прикладног (еквивалентног) коефицијента течења  $\varphi_{eq}$  (релација (4.9)).

Питање које заслужује посебну пажњу јесте начин описивања величине оптерећења који ће се усвојити. Прва погодна станица претходног протокола (оптерећење → ... → угиб), са аспекта бездимензионог увођења у прорачун, јесу пресечне силе (моменти савијања). У овом раду је, међутим, напон у арматури усвојен као репрезент величине оптерећења, пре свега због погодности које пружа у погледу бездимензионог укључивања осталих релевантних параметара.

**Референтни напон**, који представља величину оптерећења, **је напон у затегнутој арматури  $\sigma_{al}$  у референтном** (претходно специфицираном) **пресеку**. То је пресек у пољу са највећим моментом савијања. **Оно што је посебно битно, јесте да се модел калибрише на напон који се срачунава из пресечних сила добијених стандардним инжењерским поступком** (прорачун са крутостима бетонских бруто пресека). **Напон  $\sigma_{al}$  се одређује по моделу пресека са прслином (стање II)**. Прорачуни у моделу се спроводе узимајући у обзир више релевантних појава (на пример прерасподелу статичких утицаја због промене крутости и временских деформација) услед којих „стварни“ момент савијања и рачунски напони у истом пресеку и од истог оптерећења углавном имају другу, измењену, вредност.

**Референтни напон у арматури  $\sigma_{al}$  је директни параметар модела и његова вредност се може бирати**. Посебна погодност оваквог приступа је да се у комбинацији са, такође независном, површином затегнуте арматуре прорачун може вршити и за елементе који имају арматуру битније различиту од оне коју даје прорачун граничног стања носивости. Код већине актуелних поступака за



индиректну контролу деформација, па тако и код Еврокода 2, имплицитно је уграђен принцип да арматура одговара прорачуну *ULS*.

Укупан број директних нумеричких параметара до сада је 10.

### 3.6 Промена крутости због формирања прслина и садејство затегнутог бетона

Еластични угиб армиранобетонских конструкција се повећава при настајању прслина због пораста напона у пресеку са прслином и његовој околини, због промене механизма ношења у односу на претходно стање без прслине.

Само по себи, настајање појединачне прслине не мора да води знатнијем повећању угиба, ако је носач јако армиран (претходно формирани спрег притиснути бетон – затегнути бетон се трансформише у спрег са сличним краком бетон – арматура; уколико напон у арматури није велики, дилатација затегнуте стране нема велики скок у односу на стање без прслина). Међутим, присуство веће површине арматуре је најчешће условљено са већим пројектним напрезањем, што значи да и након формирања прслине следи даље повећање оптерећења и под овим условима се формира суштинска разлика у величини угиба између носача са прслинама и носача без прслина.

Уколико је, пак, површина арматуре у пресеку мала, то значи да након формирања прслине не следи даље велико повећање оптерећења. Међутим, у том случају, већи пораст угиба се дешава већ при самом формирању прслине: арматура је близу искоришћења при оптерећењу блиском оптерећењу појаве прслине, те је њена дилатација знатно већа у односу на претходну дилатацију затегнутог бетона. Код мало армираних пресека са прслином мала је и површина притиснутог бетона па, по настанку прслине, расту и напон и дилатација на притиснутој страни пресека. Увећане ивичне дилатације воде повећаној кривини којој одговара и већи угиб.

Из тога следи да се, у већини случајева, присуство прслина изазваних оптерећењем може повезати са осетнијом разликом у величини и реалног и прорачунског угиба у односу на хомогени носач.

Крутост на савијање носача без прслина је солидно репрезентована моментом инерције трансформисаног („идеализованог“) пресека, у који улазе бетон и арматура ( $EI_I$ ).

За оцену крутости носача са прслинама уобичајило се потпомагање са асимптотском вредношћу коју представља крутост трансформисаног пресека са прслином ( $EI_{II}$ ), у који улазе (само) притиснути бетон и арматура. Одмеравање „растојања“ од асимптоте врши се уз помоћ удаљености делујућег оптерећења од оптерећења које изазива настајање прслине. Овај приступ следи и Модел код *МС* 1990 [3] и Брансонов поступак (*Branson*, [17]), с тим да је жељени ефекат постигнут на два различита, комплементарна, начина.

Треба истаћи да овакав приступ нумерички добро покрива суштински различите ситуације у случају када је оптерећење доста веће од оног које одговара појави прслина: већем оптерећењу може да одговара мала површина арматуре са великим напоном, или, велика површина арматуре са малим напоном. У првом случају садејство затегнутог бетона опада јер не може да испрати велику дилатацију растезања арматуре, док у другом садејство слаби због убацивања великог напона затезања у бетон између прслина, кроз велику контактну површину (обим) арматуре.

Предлози за срачунавање почетног (еластичног) угиба који се срећу кроз литературу (преглед неких дат је у четвртном поглављу) најчешће су базирани на модификацији једне од две граничне вредности: прорачунског угиба изведеног са крутошћу пресека без прслине (брuto –  $EI_c$  или трансформисаног -  $EI_I$ ) или за пресек са прслином ( $EI_{II}$ ). Овакав приступ углавном је био мотивисан тежњом да се формулише једноставан алгоритам, прикладан за скромније рачунске могућности.

Брансон је 1963. [17] године формулисао логичан комплетан приступ: ефективна (заменејућа) крутост носача са прслинама је експлицитно смештена између две граничне вредности -  $EI_I \approx EI_c$  и  $EI_{II}$ , коришћењем напред поменутог добро заснованог параметра (односа активног оптерећења и оптерећења које доводи до настанка прслине) за калибрацију резултата:

$$I_{eff} = \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^n \times I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^n \right] \times I_{II} . \quad (3.6)$$

Вредност експонента  $n$  одређена је из експерименталних резултата. Када се одређује ефективна крутост носача на кратком потезу (на коме управо делује активни момент интензитета  $M$ ),  $n \approx 4$ . За носач, посматран као целину, на потезу са позитивним моментом (између нултих тачака, или, за просту греду за цео распон),  $n \approx 3$ , при чему је  $M$  највећи момент у распону.

Исти принцип следи и поступак *CEB*-а [5], али се одмеравање резултата у односу на стање без прелина и „потпуно“ испрскало стање (без садејства затегнутог бетона,  $EI_{eff} = EI_{II}$ ) врши не на нивоу крутости, као у Брансоновом поступку [17], него у следећем кораку прорачуна – на нивоу кривине пресека  $\kappa$ :

$$\kappa_{eff} = \beta \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \times \kappa_I + \left[ 1 - \beta \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \right] \times \kappa_{II}. \quad (3.7)$$

У логичком смислу, то је исти приступ. У нумеричком погледу даје сличне резултате, посебно након интеграције дуж носача као целине када долази до потирања локалних разлика супротног знака. Формално посматрано – то су инверзни приступи ( $\kappa = 1/EI$ ) и потпуно поклапање се може десити само у случају специјалног односа геометријских карактеристика, активног оптерећења и  $M_{cr}$ . Може се показати да је за то потребно, при  $\beta = 1$  (краткотрајно дејство) и  $I_c \approx I_I$ , да буде:

$$\frac{I_{II}}{I_I - I_{II}} = \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \quad (3.8)$$

што, за велики број комбинација параметара, није испуњено. То, међутим, не мора да буде препрека за добро слагање коначних нумеричких резултата.

У овој тези користиће се, као што је у уводу (првом поглављу) објашњено приступ *CEB*-а, односно сада *fib*-а, који је уграђен у Еврокод 2.

### 3.7 Статички систем носача и облик дијаграма момента

Статички систем носача и облик дијаграма момента савијања дефинишу угиб носача на нивоу основних кинематичких и деформацијских једначина.

Разматра се 5 основних статичких шема (*sys*), при једнакоподељеном квази-сталном оптерећењу. То су:

- проста греда ( $sys = PG$ );

- једнострано (потпуно) укљештен носач („ $G$ “ штап,  $sys = G$ );
- обострано (потпуно) укљештен носач („ $K$ “ штап,  $sys = K$ );
- једнострано еластично укљештен носач (крајње поље континуалног носача,  $sys = KP$ );
- обострано еластично укљештен носач (унутрашње поље континуалног носача,  $sys = UP$ ).

Разматраће се, између осталог, и могућност да се и у случају армираног бетона успоставе корелације у величини прорачунског угиба, за различите статичке системе, налик онима које постоје код носача од идеално еластичног хомогеног материјала (на пример, угиб просте греде са истим попречним пресеком, при истом распону и једнакоподељеном оптерећењу 5 пута је већи од угиба обострано укљештеног носача).

Успостављање оваквих корелација могуће је само уз одређене апроксимације. Различити закони промене крутости дуж распона за поједине статичке системе (смене потеза са прслинама и без прслина) онемогућавају успостављање егзактних релација какве постоје за еластичне хомогене материјале.

Статички систем је директан нумерички параметар (особина) модела, који се бира између 5 анализираних система. Укупан број директних параметара до сада је 11 (10 нумеричких и један нумерички).

### 3.8 Прерасподела утицаја у статички неодређеним системима услед промене крутости

У случају оптерећења које настаје по фазама могуће је постепено отварање прслина у појединим регијама носача, након наношења довољно великог оптерећења. Уколико се оптерећење наноси у више корака, промена крутости и прерасподела пресечних сила које се тада дешавају представљају нумерички веома сложене проблеме нелинеарне анализе конструкција.

Прерасподела утицаја у статички неодређеним системима услед промене крутости која се узима у обзир у овој тези има ограничен обим и специфичан циљ.

Ограничен обим произилази из претпоставке да се стално (дуготрајно) оптерећење наноси у једном кораку (у прорачунском смислу). Са аспекта циља

тезе ово није апроксимација: усвојени еталонски норматив за контролу деформација (Еврокод 2) предвиђа срачунавање угиба под такозваним квази-перманентним (квази-сталним) оптерећењем. Иако није експлицитно сугерисано да се оно третира као јединствено (то јест настало у једном кораку), другог избора практично нема: поступак за одређивање средње кривине не оставља могућност за коректно вршење суперпозиције. Самим тиме се примењена апроксимација уклапа у инструкције норматива.

Последица (овако или некако другачије дефинисане) прерасподеле је промена вредности момената, у односу на уобичајене дијаграме пресечних сила, базиране на крутостима бетонских бруто пресека. Сходно томе, интегралом на основу њих израчунатих кривина добијају се другачије вредности у односу на бруто дијаграме (без прерасподеле). Када се укључе деформације од течења и скупљања бетона, о чему ће бити речи у наставку, резултат израчунат без узимања у обзир прерасподеле момената може толико да одступи од резултата са урачунатом прерасподелом да се обезвреди труд уложен у овај посао. Примери разлике у срачунатим резултатима дати су у [5], [18] и у поглављу 10.4.1.3. Узрок је у томе што се на местима „сувишних“ ослонаца (ослонаца статичке неодређености) добијају рачунска померања као последица различитих кривина у истим пресецима при прорачуну статичких утицаја и при обухватању испрскалости носача и присуства арматуре.

Специфичан циљ се огледа у обухватању утицаја овако дефинисане прерасподеле услед промене крутости на срачунати угиб калибрисањем резултата на дијаграм момената савијања који се добија прорачуном са бруто бетонским крутостима (стандардни инжењерски прорачун). ***Тиме се омогућава практична употреба која од пројектанта не захтева директно вршење прерасподеле.***

### 3.9 Течење бетона

Течење бетона је од великог значаја при израчунавању угиба бетонских конструкција напрегнутих на савијање. Оваква ситуација произилази из две чињенице. Прва је да бетон под дуготрајним оптерећењем може вишеструко повећати почетну (еластичну) деформацију. Повећање деформације се уобичајено изражава уз помоћ величине коефицијента течења, што је детаљније разматрано у

поглављу 5. Друга је да, због велике запреминске тежине бетона, стални (дуготрајни) терет код армиранобетонских конструкција има веома висок удео у укупном терету, што чини да је допринос течења укупном угибу најчешће један од највећих.

Увођење ефекта течења бетона на кривину пресека спроводи се на начин који је глобално објашњен у поглављу 4.1. (метода ефективног модула – *ЕММ*), а оперативно приказан у поглављу 7 (израчунавање кривине за пресеке са и без прелине, са узимањем у обзир и течења бетона). Параметар којим је квантификован утицај течења бетона је коефицијент течења  $\varphi(t, t_0)$ . ***Коефицијент течења је директан параметар у моделу и његова вредност се може произвољно бирати.***

Поступак за израчунавање коефицијента течења дат је у информативном Анексу Б Еврокода 2. ***У тези се користи коефицијент течења који је повезан са еластичном дилатацијом у тренутку оптерећивања,*** за разлику од дефиниције Еврокода 2 и Модел кода *МС* 1990 [3]. Начин прерачунавања објашњен је у поглављу 5.1 (релација (5.6)).

Коефицијент течења  $\varphi(t, t_0)$  срачунава се према изразу:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \quad (3.9)$$

где су:

$\varphi_0$  – номинална вредност коефицијента течења дата изразом:

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (3.10)$$

$\varphi_{RH}$  – коефицијент којим се узима у обзир утицај релативне влажности на номиналну вредност коефицијента течења:

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH / 100}{0,1 \sqrt[3]{h_0}} \quad \text{за } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa} \quad (3.11)$$

$$\varphi_{RH} = \left[ 1 + \frac{1 - RH / 100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \cdot \alpha_1 \right] \cdot \alpha_2 \quad \text{за } f_{cm} > 35 \text{ MPa} \quad (3.12)$$

$RH$  – релативна влажност средине у %

$\beta(f_{cm})$  – коефицијент којим се узима у обзир утицај чврстоће бетона на номиналну вредност коефицијента течења:

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad (3.13)$$

$f_{cm}$  – средња вредност чврстоће бетона при притиску у старости од 28 дана (MPa)

$\beta(t_0)$  – коефицијент којим се узима у обзир утицај старости бетона у тренутку оптерећења на вредност номиналног коефицијента течења:

$$\beta(t_0) = \frac{1}{(0,1 + t_0^{0,20})} \quad (3.14)$$

$h_0$  – номинална величина елемента у mm:

$$h_0 = \frac{2A_c}{u} \quad (3.15)$$

$A_c$  – површина попречног пресека елемента

$u$  – обим елемента у контакту са атмосфером

$\beta(t, t_0)$  – коефицијент којим се дефинише дијаграм течења у зависности од времена после оптерећења, дат изразом:

$$\beta(t, t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)}{\beta_H + (t - t_0)} \right]^{0,3} \quad (3.16)$$

$t$  – старост бетона у посматраном тренутку у данима

$t_0$  – старост бетона у тренутку оптерећења у данима

$(t - t_0)$  – стварно (некориговано) трајање оптерећење

$\beta_H$  – коефицијент који зависи од релативне влажности (RH у %) и номиналне величине елемента ( $h_0$  у mm) и може да се срачуна као:

$$\beta_H = 1,5 [1 + (0,012 RH)^{18}] h_0 + 250 \leq 1500 \quad \text{за } f_{cm} \leq 35 \quad (3.17)$$

$$\beta_H = 1,5 [1 + (0,012 RH)^{18}] h_0 + 250 \alpha_3 \leq 1500 \alpha_3 \quad \text{за } f_{cm} > 35 \quad (3.18)$$

$t_0$  – старост бетона у тренутку оптерећења у данима

$\alpha_{1/2/3}$  – коефицијенти којима се узима у обзир утицај чврстоће бетона:

$$\alpha_1 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,7} \quad \alpha_2 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,2} \quad \alpha_3 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,5} \quad (3.19)$$

Утицај врсте цемента на величину коефицијента течења може да се узме у обзир модификовањем старости у тренутку оптерећења  $t_0$  у изразу (3.14) према:

$$t_0 = t_{0,T} \left( \frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right)^\alpha \quad (3.20)$$

где су:

$t_{0,T}$  – старост бетона у тренутку оптерећења, коригована због утицаја температуре према изразу (3.21)

$\alpha$  – степен који зависи од врсте цемента и износи>

- 1      за цемент класе *S*
- 0        за цемент класе *N*
- 1        за цемент класе *R*.

Утицај повишених или снижених температура у опсегу 0 – 80 °C на зрелост бетона може да се узме у обзир кориговањем старости бетона према следећем изразу:

$$t_T = \sum_{i=1}^n e^{-(4000/[273+T(\Delta t_i)]-13,65)} \cdot \Delta t_i \quad (3.21)$$

где су:

$t_T$  – старост бетона коригована због температуре, којом треба да се замени  $t$  у одговарајућим једначинама

$T(\Delta t_i)$  – температура у °C у периоду времена  $\Delta t_i$

$\Delta t_i$  – број дана у којима доминира температура  $T$ .

Овако срачунате вредности  $\varphi(t, t_0)$  узимају се у прорачун са тангентним модулом еластичности  $E_c$ . Може се узети да је величина тангентног модула  $1,05 \times E_{cm}$ , где је секантни модул  $E_{cm}$  између напона 0 и 0,4 чврстоће бетона  $f_{cm}$ .

Са коефицијентом течења као директним нумеричким параметром, укупан број параметара модела до сада је 12 (11 нумеричких и један ненеумерички).



### 3.10 Скупљање бетона

Скупљање бетона производи кривине у случајевима несиметричног армирања. Увођење ефекта скупљања бетона на кривину пресека спроводи се на начин који је глобално објашњен у поглављу 4.1. (метода ефективног модула – *ЕММ*), а оперативно приказан у поглављу 7 (израчунавање кривине за пресеке са и без прслине, са узимањем у обзир и скупљања бетона). Параметар којим је квантификован утицај скупљања бетона је дилатација скупљања  $\epsilon_{sk}$  (или  $\epsilon_{cs}$ ). ***Дилатација скупљања је директан параметар у моделу и њена вредност се може произвољно бирати.***

Скупљање бетона, поред директног доприноса угибу кроз повећање кривине, утиче на повећање угиба развојем затезања услед спречених деформација. Затезање настаје локално, на нивоу пресека – услед ограничавања слободног скупљања уграђеном подужном арматуром и, глобално, на нивоу конструкције – ако ослонци спречавају подужно дилатирање (крути зидови и слично). И овај ефекат се може директно увести у прорачун. Потребно је да се чврстоћа на затезање (поглавље 3.2.) умањи за срачунато или процењено овако изазвано укупно затезање. С обзиром да је чврстоћа на затезање директан параметар, ово не представља нови проблем.

Поступак за израчунавање укупне дилатације скупљања  $\epsilon_{sk}$  (или  $\epsilon_{cs}$ ) дат је поглављу 3 и информативном Анексу Б Еврокода 2.

Укупна дилатација скупљања  $\epsilon_{cs}$  добија се као збир две компоненте:

$$\epsilon_{cs} = \epsilon_{cd} + \epsilon_{ca} \quad (3.22)$$

где су:

$\epsilon_{cd}$  – дилатација скупљања услед сушења;

$\epsilon_{ca}$  – сопствена дилатација скупљања.

Коначна вредност дилатације скупљања услед сушења  $\epsilon_{cd,\infty}$  једнака је  $k_h \times \epsilon_{cd,0}$ . Вредности коефицијента  $k_h$  у зависности од номиналне величине попречног пресека  $h_0$  приказане су у табели 3.1.

$h_0$	$k_h$
100	1,0
200	0,85
300	0,75
$\geq 500$	0,70

Табела 3.1 Вредности коефицијента  $k_h$

$\varepsilon_{cd,0}$  се израчунава према изразима:

$$\varepsilon_{cd,0} = 0,85 \left[ (220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{10}\right) \right] \cdot 10^{-6} \cdot \beta_{RH} \quad (3.23)$$

$$\beta_{RH} = 1,55 \left[ 1 - \left(\frac{RH}{100}\right)^3 \right] \quad (3.24)$$

где су:

$\alpha_{ds1}$  – коефицијент који зависи од врсте цемента и износи

- 3      за цемент класе  $S$
- 4      за цемент класе  $N$
- 6      за цемент класе  $R$ ;

$\alpha_{ds2}$  – коефицијент који зависи од врсте цемента и износи

- 0,13    за цемент класе  $S$
- 0,12    за цемент класе  $N$
- 0,11    за цемент класе  $R$ .

Промена дилатације скупљања услед сушења у току времена  $\varepsilon_{cd}(t)$  дата је изразима:

$$\varepsilon_{cd}(t) = \beta_{ds}(t, t_s) \cdot k_h \cdot \varepsilon_{cd,0} \quad (3.25)$$

$$\beta_{ds}(t, t_s) = \frac{(t - t_s)}{(t - t_s) + 0,04 \sqrt{h_0^3}} \quad (3.26)$$

где су:

$t$  – старост бетона у посматраном тренутку у данима

$t_s$  – старост бетона у данима на почетку скуљања (крај неге).

Сопствена дилатација скупљања  $\varepsilon_{ca}$  се добија из израза:

$$\varepsilon_{ca}(t) = \beta_{as}(t) \varepsilon_{ca,\infty} \quad (3.27)$$

где су:

$$\varepsilon_{ca,\infty} = 2,5 (f_{ck} - 10) 10^{-6} \quad (3.28)$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2t^{0,5}) \quad (3.29)$$

Са дилатацијом скупљања као директним нумеричким параметром, укупан број директних параметара модела је 13 (12 нумеричких и један ненеумерички).

### 3.11 Прерасподела утицаја у статички неодређеним системима услед течења и скупљања

Након оптерећења и формирања почетног стања, као што је објашњено у поглављу 3.5, долази до промене кривина у пресецима услед течења и скупљања бетона. Овако настали прираштаји не морају да буду и углавном нису сагласни са спреченим померањима на местима „сувишних“ ослонаца (ослонаца статичке неодређености). Услед тога јављају се током времена додатне самоуравнотежене реакције. Последица је и промена дијаграма момената савијања.

Ови допунски моменти настају континуално у времену и такође представљају дуготрајне утицаје. Стога и они изазивају деформације услед течења, при чему напонима услед њих одговарају континуално опадајуће вредности коефицијента течења, према једначини (3.9), сходно растућој старости бетона при настајању напона.

Некомпатибилност прираштаја кривине у времену услед течења и скупљања бетона је у суштини последица „поремећајног“ ефекта арматуре у пресецима, која нема ове особине бетона. Уколико пресеци нису превише армирани ни моменти услед прерасподеле неће бити велики. Проблем угиба највише изражен код носача са малом конструктивном висином у односу на распон, а то су пре свега армиранобетонске плоче које уобичајено нису преармиране. Анализе спроведене током рада на овој тези показале су да, за уобичајено армиране елементе и под неекстремним условима средине, допунски

моменти на местима ослонаца услед прерасподеле често не прелазе 15% вредности првобитних момената при оптерећивању. Због тога се у првом реду поставља питање да ли је уопште потребно њихово третирање.

Потврдан одговор на претходно питање следи из неких специфичних прорачунских ситуација. Армиранобетонске плоче се често налазе у условима да су близу границе појаве прслина у распону. С друге стране, мало армирани елементи знатно мењају крутост након формирања прслина и исказују веће угибе. У прорачунском смислу, ово означава могућност да деформабилност елемента буде знатно потцењена, уколико се занемари прерасподела чији је ефекат повећање момента у пољу праћено отварањем прслина којих није било при оптерећивању. Пример оваквог прорачуна приказан је у [18].

Могући одговор на претходни проблем био би да се (превентивно) прорачун спроводи без прерасподеле, али са редукованом чврстоћом на затезање. То је употребљива једноставна могућност. Међутим, мана оваквог приступа је неселективно систематско увођење допунске сигурности. Наиме, у не малом проценту случајева ослоначки моменти расту, а моменти у пољу, чија величина доминантно формира вредност прорачунских угиба, се смањују - то јест ефекат прерасподеле је чак повољан. Тиме је ефекат (у том случају непотребне) редукације чврстоће на затезање практично удвостручен, а квалитет прорачуна суштински умањен.

С обзиром да је циљ тезе унапређење методологије контроле угиба, начињен је модел који укључује ефекте прерасподеле. Имајући у виду релативну величину самих момената прерасподеле, изабран је апроксимативан приступ за њихово израчунавање.

Коначне вредности момената прерасподеле процењене су из захтева задовољења захтева ослонаца статичке неодређености и чињенице да се они постепено развијају кроз време, услед чега, као што је напред напоменуто, производе ефекте течења са континуално променљивим (опадајућим) вредностима коефицијента течења. У нумеричком смислу изабран је приступ да се одреди пондерисани коефицијент течења  $\omega \times \varphi(t, t_0)$  тако да рачунски производи одговарајући замењујући ефекат.

Одговарајући замењујући ефекат подразумева да су дилатације услед течења при континуалном развоју момената (напона) услед прерасподеле у тренутку времена  $t$  исте као што би се добиле када би потребни моменти прерасподеле постојали већ у тренутку  $t_0$  и били константни у читавом интервалу  $(t, t_0)$ , с тим да њиховим напонима одговара коефицијент течења  $\omega \times \varphi(t, t_0)$ . Сажето речено, циљ је да се добију „стварне“ вредности потребних момената прерасподеле, при чему се они рачунски третирају као да постоје у читавом интервалу  $(t, t_0)$ , са својом финалном вредношћу. Прикладна вредност коефицијента  $\omega$  може да буде око 0,7, као што је објашњено у Прилогу 3 у поглављу 13.3.

Након израчунавања коначног дијаграма момената (дијаграма који укључује прерасподелу) поново се спроводи контрола напона на затегнутој страни пресека. Уколико је у зонама које су након оптерећивања ( $t_0$ ) биле без прслина дошло до повећања момента тако да буде превазиђена чврстоћа на затезање при савијању, прорачун ових потеза се спроводи се сада по моделу за носач са прслинама.

***Укупан број директних параметара модела је 13 (12 нумеричких и један ненумерички – статички систем).***

#### 4 ПРЕГЛЕД ПОСТУПАКА КОНТРОЛЕ УГИБА У НЕКОЛИКО ЗНАЧАЈНИЈИХ НОРМАТИВА

У наставку је дат осврт на неколико актуелних поступака контроле угиба. Поступци потичу из норматива који се домицилно или у међународној уговорној пракси примењују често или на већим подручјима. То су поступци контроле угиба према:

1. Еврокоду 2 (*Eurocode 2*)
2. *CEB-FIP* Модел коду *MC 1990*
3. *ACI* препорукама (*ACI Manual of Concrete Practice*)
4. Британском стандарду (*British standard*)
5. Руским прописима (СНиП)

##### 4.1 Контрола угиба према Еврокоду 2

Еврокод 2 у поглављу 7.4 дефинише проблематику контроле угиба.

Критеријум у погледу величине дозвољеног угиба узет је према *ISO 4356* [6] и износи  $\text{распон}/250$ , при квазисталном оптерећењу. За прихватљив прираст угиба након завршетка грађења („активни угиб“) усвојена је вредност  $\text{распон}/500$ .

Појам квазисталног оптерећења дефинисан је у Еврокоду 0 (*EN 1990: 2002*, [19]). Састоји се од свих дуготрајних оптерећења и процењеног дела променљивих оптерећења, који се такође узима као дуготрајно дејство. Мултипликатор величине променљивог оптерећења  $\psi_{02}$  ( $\psi_{02} < 1$ ), дат у самом Еврокоду 0 [19] или Националном документу, утврђује проценат променљивог оптерећења који ће се придодати сталним теретима.

Поступак контроле угиба према Еврокоду 2 је у наставку детаљније анализиран у односу на друге поступке чији је преглед дат у тези, уз критичко сагледавање. Основни разлог за детаљност произилази из чињенице да је Еврокод 2 норматив чији је приступ за контролу угиба разрађиван у тези. У анализи је коришћена студија [2], у којој је, у ствари, публикован документ радне групе комисије *TC 250 CEN*-а која је сачинила текст стандарда.

Понуђене су две могућности: контрола угиба без директног прорачуна и прорачун угиба.

Контрола угиба прорачуном спроводи се поступком који је заживео у препорукама *CEB*-а крајем седамдесетих. Може се наћи у *CEB* билтену [20] (1981.), потом у *CEB Manual*-у [5] (1985.) и, коначно, Модел коду *MC* 1990 [3] (1993.). Облик дат у Еврокоду 2, односно нацрту Модел кода *MC* 2010 [4] (2011.) нема суштинских измена. Параметри деформације процењују се према правилу

$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I \quad (4.1)$$

где су:

- $\alpha$  – посматрани параметар деформације који може да буде, на пример, дилатација, кривина, а, као упрошћење, и угиб;
- $\alpha_I, \alpha_{II}$  – вредности параметра срачунате за стање без прслина и за стање са прслином;
- $\zeta$  – коефицијент интерполације, којим се узима садејство затегнутог бетона између прслина, дат као

$$\zeta = 1 - \beta \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (4.1a)$$

за пресек са прслином, односно  $\zeta = 0$ , за пресеке без прслина;

- $\beta$  – коефицијент,  $\beta = 1,0$  за краткотрајно и  $\beta = 0,5$  за дуготрајно или много пута понављано оптерећење;
- $\sigma_s$  – напон у затегнутој арматури, срачунат за пресек са прслином;
- $\sigma_{sr}$  – напон у затегнутој арматури, срачунат за пресек са прслином од оптерећења при коме настаје прслина.

Деформације од оптерећења могу да се одреде користећи чврстоћу при затезању на нивоу њене средње вредности ( $f_{cm}$ ) и ефективни модул еластичности бетона  $E_{c,eff}$ . Када може да се поуздано сматра да нема аксијалних напона затезања изазваних скупљањем или услед температуре, може да се користи чврстоћа при затезању савијањем ( $f_{cm,fl} \geq f_{cm}$ ).

За оптерећења чије трајање изазива утицаје течења, укупна деформација, заједно са течењем, срачунава се коришћењем методе ефективног модула еластичности који се израчунава као

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (4.2)$$

где су:

- $E_{cm}$  – средња вредност секантног модула бетона између напона  $\sigma_c = 0$  и  $0,4 f_{cm}$  при старости од 28 дана;
- $\varphi(t, t_0)$  – коефицијент течења који одговара оптерећењу и интервалу трајања оптерећења.

Кривине  $1/r_{cs}$  услед скупљања одређују се као

$$\frac{1}{r_{cs}} = \varepsilon_{cs} \alpha_e \frac{S}{I} \quad (4.3)$$

где су:

- $\varepsilon_{cs}$  – слободна дилатација скупљања;
- $S$  – статички момент површине арматуре у односу на тежиште пресека;
- $I$  – момент инерције површине пресека;
- $\alpha_e$  – ефективни однос модула еластичности  $\alpha_e = E_s/E_{c,eff}$ .

Ригорозни поступак састоји се у одређивању кривина према инструкцијама (4.1) – (4.3) у довољно великом броју пресека, а угиб се потом срачунава нумеричким интегралњем. Поједностављени поступак следи релацију (4.1), тако да се угиб једном срачуна за носач без прелина, а затим за носач у стању потпуно са прелинама. Након тога се изврши интерполација, користећи израз (4.1).

Контрола угиба без директног прорачуна спроводи се ограничавањем односа распон/статичка висина. Поступак је идентичан са поступком из финалног нацрта Модел кода *МС 2010* [4].

Основни гранични однос распон/статичка висина –  $l/d$  – одређује се према формули (4.4) (формула 7.16а у Еврокоду 2), односно формули (4.5) (формула 7.16б у [1]), зависно од величине коефицијента армирања  $\rho$

$$\frac{l}{d} = K \left[ 11 + 1,5 \sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho} + 3,2 \sqrt{f_{ck}} \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{3/2} \right], \text{ ако је } \rho \leq \rho_0 \quad (4.4)$$

$$\frac{l}{d} = K \left[ 11 + 1,5 \sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12} \sqrt{f_{ck}} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right], \text{ ако је } \rho > \rho_0 \quad (4.5)$$

где су:

- $K$  – коефицијент којим се узима у обзир статички систем, приказан у табели 4.1;



- $\rho_0$  – референтни коефицијент површине арматуре  $\rho_0 = \sqrt{f_{ck}} \cdot 10^{-3}$ ;
- $\rho$  – однос потребне површине затегнуте арматуре и бетона (коефицијент затегнуте арматуре) у средини распона за момент савијања од прорачунских оптерећења (за конзоле у пресеку на ослонцу);
- $\rho'$  – однос потребне површине притиснуте арматуре и бетона (коефицијент притиснуте арматуре) у средини распона за момент савијања од прорачунских оптерећења (за конзоле у пресеку на ослонцу);
- $f_{ck}$  – карактеристична вредност чврстоће бетона у *MPa*.

Изгази (4.4) и (4.5) изведени су под претпоставком да је напон у челику од одговарајућег прорачунског оптерећења у ГСУ, у пресеку са прслином у средини распона греде или плоче, или у пресеку на ослонцу конзоле, *310 MPa* (што приближно одговара вредности  $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ ). Када се користе другачије вредности напона, односи  $l/d$  добијени према изразима (4.4-5) треба да се помноже са  $310/\sigma_s$ . Најчешће је на страни сигурности да се претпостави да је

$$310/\sigma_s = 500/(f_{yk} A_{s \text{ req}}/A_{s \text{ prov}}) \quad (4.6)$$

где су:

- $\sigma_s$  - напон затезања у челику у средини распона (за конзоле на ослонцу) од прорачунског оптерећења у ГСУ;
- $A_{s \text{ prov}}$  - стварна површина челика у том пресеку;
- $A_{s \text{ req}}$  - потребна површина челика у том пресеку у граничном стању носивости.

За греде и плоче, осим равних плоча (директно ослоњене плоче без капитела), са распонима већим од *7 m*, које носе преградне зидове који би могли да буду оштећени услед превеликих угиба, вредности  $l/d$  дате изразима (4.4-5) треба да се помноже са  $7/l_{eff}$  ( $l_{eff}$  је ефективни распон у метрима).

За плоче без капитела чији већи распон прелази *8,5 m*, које носе преградне зидове који би могли да буду оштећени услед превеликих угиба, вредности  $l/d$  дате изразима (4.4-5) треба да се помноже са  $8,5/l_{eff}$ .

Коефицијент  $K$ , који зависи од статичког система може да се редефинише у Националном документу. Предложене вредности, заједно са израчунатим

величинама граничног односа  $l/d$  према изразима (4.4-5), за бетон класе C30 и  $\sigma_s = 310 \text{ MPa}$ , за различите конструкцијске системе и проценте арматуре  $\rho = 0,5 \%$  и  $\rho = 1,5 \%$ , дате су у табели 4.1 (табела 7.4N превода Еврокода 2 [21]).

Табела 4.1: Вредности коефицијента  $K$  у изразима (4.4) и (4.5), [21]

Конструкцијски систем	$K$	Велики напони у бетону $\rho = 1,5\%$	Мали напони у бетону $\rho = 0,5\%$
Слободно ослоњена греда, слободно ослоњена плоча која носи у једном или у два правца	1,0	14	20
Крајње поље континуалног гредног носача или континуалне плоче која носи у једном правцу, или плоче која носи у два правца, континуална преко једне, дуже стране	1,3	18	26
Унутрашње поље гредног носача или плоче која носи у једном или у два правца	1,5	20	30
Плоча ослоњена на стубове без греда (равна плоча) ( <i>flat slab</i> ) (у односу на већи распон)	1,2	17	24
Конзола	0,4	6	8
<p><b>Напомена 1:</b> Дате вредности усвојене су тако да су генерално на страни сигурности и прорачун често може да покаже да су могући тањи елементи.</p> <p><b>Напомена 2:</b> За плоче које носе у два правца провера треба да се изврши према краћем распону. За равне плоче (плоче на стубовима без капитета) треба да се узме већи распон.</p> <p><b>Напомена 3:</b> Граничне вредности дате за плоче без капитета одговарају мање строгим ограничењима од оних које даје однос <b>распон/250</b> за угибе у средини распона у односу на стубове. Искуство је показало да су те граничне вредности задовољавајуће.</p>			

У [21], у коментару табеле наводи се: “Вредности дате изразима (7.16) и у табели 7.4N усвојене су према резултатима параметарске студије за низ слободно ослоњених греда или плоча правоугаоног попречног пресека, коришћењем генералног поступка датог у 7.4.3. Узете су у обзир различите класе чврстоће бетона и  $500 \text{ MPa}$  за карактеристичну вредност границе развлачења арматуре. За дату површину затегнуте арматуре срачунат је моменат за гранично стање носивости, при чему је претпостављено да је квази-стално оптерећење 50% од одговарајућег укупног прорачунског оптерећења. Добијене границе односа  $l/d$  задовољавају граничне вредности угиба дате у 7.4.1 (5).“

Опис и главни резултати параметарске студије, која се помиње у претходном коментару, могу се наћи у [2]. Анализом у студији обухваћена је већина појава које утичу на величину угиба. У наставку су приказане неке од битних претпоставки учињене при анализи у студији и сумирани важнији закључци. Неки од њих употребљени су и у овој тези.

Анализирани су статички одређени носачи, система просте греде, [2].

Крутогост носача одређивана је према инструкцијама Еурокода 2 за ригорозан прорачун угиба. За стање са прслинама интерполира се кривина између вредности за пресек са и без прслине, према закону (4.1). Временске деформације бетона обухватају се употребом ефективног модула (4.2).

Оптерећење се састојало од сопствене тежине ( $g_1$ ), додатног сталног ( $g_2$ ) и корисног ( $q$ ) терета, који почињу да делују у  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ , респективно. Разматра се корисни терет у износу  $\psi_{02} \cdot q$ , као стално дејство почев од  $t_3$ . Имајући у виду предложени начин суперпозиције (2.2) у [5], за овако комплексну историју требало би израчунавати угибе:

- $u_{g_1}(t_1, \zeta_1)$  са  $\varphi(t, t_1)$  и  $\zeta_1$ ;
- $u_{g_1+g_2}(t_2, \zeta_2)$  са  $\varphi(t, t_2)$  и  $\zeta_2$ ;
- $u_{g_1+g_2+q}(t_3, \zeta_3)$  са  $\varphi(t, t_3)$  и  $\zeta_3$ ;
- $u_{g_1}(t_2, \zeta_1)$  са  $\varphi(t, t_2)$  и  $\zeta_1$ ;
- $u_{g_1+g_2}(t_3, \zeta_2)$  са  $\varphi(t, t_3)$  и  $\zeta_2$ .

Коначни угиб требало би срачунавати сложенем суперпозицијом:

$$u_{g_1+g_2+q, \infty} = u_{g_1}(t_1, \zeta_1) + [u_{g_1+g_2}(t_2, \zeta_2) - u_{g_1}(t_2, \zeta_1)] + [u_{g_1+g_2+q}(t_3, \zeta_3) - u_{g_1+g_2}(t_3, \zeta_2)] \quad (4.7)$$

Оваквом процедуром узима се у обзир прогресивно настајање прслина. На пример, део угиба услед  $g_1$  настаје у  $t_2$  услед прслина изазваних са  $g_2$ . Течење услед напона од  $g_1$  изазваних прерасподелом у пресецима након отварања прслина односи се на  $t_2$ .

Овај, прилично приметан поступак, поједностављен је претпоставком да је већ у  $t_1$  нането оптерећење (сопствена тежина и краткотрајно оптерећење при изградњи) у износу адекватном  $g_1 + g_2 + \psi_{01} \cdot q$ , које је формирало стабиллизовану слику прслина. У том случају,  $\zeta_1 = \zeta_3$  и  $\zeta_2 = \zeta_3$ , па израз (3.7) постаје:

$$u_{g_1+g_2+q, \infty} = u_{g_1}(t_1, \zeta_3) + u_{g_2}(t_2, \zeta_3) + u_q(t_3, \zeta_3) \quad (4.8)$$

Угиб услед скупљања срачунаван је са крутошћу која одговара квази-сталном оптерећењу, узимајући ефективни модул срачунат са коефицијентом течења који одговара старости при којој почиње скупљање (крај неге).

Параметарска анализа у студији [2] обухватила је утицај следећих параметара на гранични однос распон/статичка висина:

1. Различите историје оптерећења. Разматрано кроз различите вредности времена оптерећивања  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ .
2. Упоредивање меродавности тоталног и активног угиба, ограничених на распон/250 и распон/500, респективно.
3. Релативна влажност разматрана је у опсегу од 50 до 80 %.
4. Усвојена површина арматуре наспрам рачунски потребне: ефекат „заокруживања“ при усвајању потребног броја профила арматуре – претпостављено да се при усвајању површина повећава између 5 и 10%.
5. Распоред арматуре дуж носача. Разматран је утицај смањивања арматуре у зони ослонца, где се моменти смањују.
6. Класе чврстоће бетона.
7. Однос величине појединих оптерећења. Усвојено је  $g_1/g_2/q = 0,45/0,30/0,25$  за плоче које носе у једном правцу и  $g_1/g_2/q = 0,60/0,20/0,20$  за равне плоче.

Криве које представљају граничне односе распон/статичка висина дате су у функцији коефицијента армирања  $\rho$ . Коефицијент армирања дефинисан је као однос површине затегнуте арматуре  $A_s$  и ефективне површине попречног пресека,  $\rho = A_s/bd$ , где је са  $d$  означена статичка висина пресека.

Референтне вредности анализираних параметара коришћене у [2] су:

- Попречни пресек простих греда  $100 \times 30$  *cm* (ширина  $\times$  висина), при чему је статичка висина усвојена као  $9/10$  укупне висине.
- Релативна влажност износи 70 %.
- Историја оптерећења  $t_1/t_2/t_3 = 10/60/365$  дана.
- Однос појединих оптерећења  $g_1/g_2/q = 0,45/0,30/0,25$  од  $q_{tot} = g_1 + g_2 + q$ .
- Квази-стално оптерећење је 30% карактеристичне вредности ( $\psi_{02} = 0,30$ ).
- Затегнута и притиснута арматура су оне које су стриктно неопходне за гранично стање носивости (*ULS*).
- Чврстоћа бетона је  $30$   $N/mm^2$  (бетон класе *C30*).
- Арматура је са границом течења од  $500$   $N/mm^2$  и константна је дуж греде.

Анализе у студији [2] спроведене су тако што је један од претходних параметара вариран, док су остали имали наведене референтне вредности.

Поступак израчунавања који је употребљен у [2], за сваку вредност коефицијента армирања  $\rho$ , је следећи:

- Усвоји се нека вредност распона  $l$ .
- Срачуна се гранична носивост пресека ( $M_{ULS}$ ). Када је неопходна притиснута арматура (да би се успоставила равнотежа са претпостављеном затегнутом арматуром оптерећеном до границе течења, то јест када нема довољно притиснутог бетона), она се израчуна и даље узима у обзир при прорачуну угиба.
- Израчуна се гранично једнакоподељено оптерећење  $q_{ULS}$ , из распона и момента носивости пресека. Тотално експлоатационо оптерећење  $q_{tot}$ , имајући у виду вредности парцијалних коефицијената сигурности за оптерећења износи  $q_{tot} = 0,72 q_{ULS}$ , а квази-стално  $q_{qp} = 0,59 q_{ULS}$ .
- Израчунају се вредности појединачних оптерећења  $g_1$ ,  $g_2$  и  $q$ , користећи њихов релативни однос.
- Израчуна се угиб, користећи ригорозни поступак. Ако вредност није  $l/250$  за тотални угиб или  $l/500$  за активни, поступак се понавља (претпоставља се ново  $l$ ), све до конвергенције.

Примењени поступак има две значајније слабости.

Прва је практичног карактера али нема последица на изведене закључке. Примењена је тзв. димензиона анализа, односно велики број параметара има материјалну димензију: распон, оптерећење, површина арматуре. Тиме је процес израчунавања успорен, а обим рачунања повећан с обзиром да поступак, дефинисан на овај начин, мора да буде итеративан. Уз примену рачунара, обим прорачуна није од значаја. Димензиона анализа, међутим, знатно отежава ефикасно успостављање корелација између параметара. ***У овој тези ће бити показано да се овакав поступак може спроводити еквивалентном бездимензионом анализом (без суштинских апроксимација), и то без итерација на статички одређеним носачима.***

Друга слабост је суштинска и тиче се начина на који је површина арматуре повезана са величином оптерећења. Наиме, притиснута арматура је урачуната

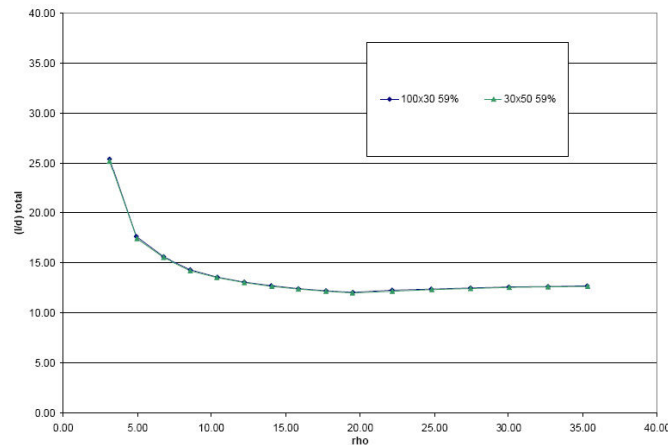
само онда када је неопходна према прорачуну граничног стања носивости (*ULS*). Арматура која би била постављена у притиснуту зону управо због смањења угиба, није уведена у разматрање, чиме је вредност критеријума значајно померена на конзервативну страну. Осим тога, примењени поступак води томе да је активни пресек са прслином одређен из претпоставке да је затегнута арматура искоришћена (у границама 90-95 %), што уопште не мора да буде тачно. Управо код настојања да се прекорачени угиб смањи, може се повећавати и површина затегнуте арматуре (преко оне потребне за *ULS*), чиме се увећава активни пресек. Овај проблем се, ипак, задовољавајуће може компензовати применом релације (4.6). ***У овој тези притиснута арматура је уведена као независни параметар. Напон у затегнутој арматури је такође један од параметара, тако да се величина активног пресека са прслином (наравно и пресека без прслине) уводи независно од величине оптерећења.***

Резултати студије су, уз теоријска разматрања и искуствене податке, у Еврокоду 2 и Модел коду *MC 2010* [4], помоћу коефицијената *K* (табела 4.1) екстраполирани и на статички неодређене системе. Одлика статички неодређених система од армираног бетона је зависност дијаграма пресечних сила од променљиве крутости изазване настанком прслина, а у времену и услед течења и скупљања бетона. Практично, настаје прерасподела (промена) пресечних сила (пре свега момената савијања) у односу на еталонске дијаграме који се добијају уобичајеном анализом на основу крутости бруто пресека и који се користе при пројектовању. Због тога одређивање угиба ригорозним поступком, уколико се врши интегралне кривине које одговарају моментном дијаграму произашлом из уобичајене статичке анализе, може да да резултате који значајно одступају од формално коректних. Екстраполација резултата за просту греду може бити проблематична управо зато што су дијаграми пресечних сила статички одређених конструкција независни од промене крутости. Развој кривине услед скупљања и течења бетона у њима ограничава само арматура, што се описује на нивоу пресека, а не читавог статичког система. ***У овој тези основни статички неодређени системи третирају се на формално коректнији начин. Дијаграми момената савијања коригују се двапут: према измени крутости услед настанка прслина (почетна прерасподела) и у времену, како би увећане***

кривине услед временских деформација бетона поново задовољиле услове ослањања (прерасподела у времену). Другим речима, не врши се екстраполација резултата просте греде, већ се угиб прорачунава и за статички неодређене системе. Тиме се ствара основ за прецизније формулисање критеријума контроле угиба.

Утицај напред наведених недостатака у студији [2] може се јасно разграничити. Имајући у виду описани приступ анализи утицаја појединих параметара, изведени су важни валидни закључци. Преглед је дат у наставку.

**Утицај димензија попречног пресека** сагледан је поређењем резултата (граничних односа за  $l/d$ ) за пресеке  $100 \times 30$  *cm* и  $30 \times 50$  *cm*. Добијени су идентични резултати, приказани на слици 4.1, што се могло очекивати, с обзиром да се *може спроводити бездимензиона анализа*.



Слика 4.1: Гранични односи  $l/d$  за две величине пресека, [2]

**Утицај историје оптерећења** је размотрен кроз две додатне историје -  $t_1/t_2/t_3 = 7/14/365$  дана и  $t_1/t_2/t_3 = 28/90/365$  дана, поред референтне  $t_1/t_2/t_3 = 10/60/365$  дана. Прорачун граничног односа  $l/d$  спроведен је за две вредности коефицијента армирања:  $\rho = 0,5 \%$  и  $\rho = 1,5 \%$ . У табели 4.2 су приказане релативне разлике граничног односа  $l/d$ , у  $\%$  у односу на референтну историју.

	$t_1/t_2/t_3 = 7/14/365$	$t_1/t_2/t_3 = 28/90/365$
$\rho = 0,5 \%$	-2 %	+2 %
$\rho = 1,5 \%$	-3 %	+3 %

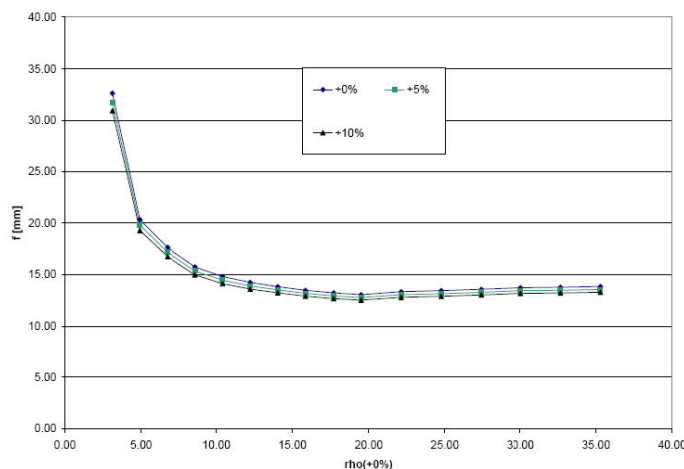
Табела 4.2: Утицај историје оптерећења на гранични однос  $l/d$ , према [2],  $[(l/d)(10/60/365) - (l/d)(t_1/t_2/t_3)] / (l/d)(10/60/365)$

Као што се види, утицај историје оптерећења на резултат је веома ограничен. Ово уводи могућност увођења веома значајног поједностављења. Укупно оптерећење за прорачун угиба може се нанети одједном, уз примену еквивалентног (пондерисаног) коефицијента течења  $\varphi_{eq}$  у облику:

$$\varphi_{eq} = \frac{g_1\varphi(t, t_1) + g_2\varphi(t, t_2) + \psi_{02}q\varphi(t, t_3)}{g_1 + g_2 + \psi_{02}q} \quad (4.9)$$

*Пристап једнократног наношења оптерећења при одређивању угиба, које према Еврокоду 2 треба да буде интензитета квази-сталног оптерећења, примењен је у и овој тези. С друге стране, коефицијент течења представља један од улазних параметара у тези и може се прикладно бирати, тако да одговара историји оптерећења.*

*Ефекат „заокруживања“ при усвајању потребног броја профила затегнуте арматуре – претпостављено да се при усвајању површина повећава између 5 и 10 %, разматран је директним срачунавањем угиба за нето површину, нето површину увећану за 5 % и нето површину увећану за 10 %. Очекивано, добијени су нешто мањи угиби са повећаном арматуром, приказани на слици 4.2.*



Слика 4.2: Величине угиба за потребну (+ 0%), 5 и 10 % увећану површину арматуре, [2]

Овај резултат није од значаја за разматрања у тези, с обзиром да је површина арматуре директан (слободан) параметар, који није једнозначно повезан са величином оптерећења, као што је то у студији [2].



**Распоред арматуре дуж носача.** Разматран је утицај смањивања арматуре у зони ослонца, где се моменти смањују. Анализа је урађена тако што су срачунати угиби ( $u$ ) простих греда (са процентима армирања  $\rho = 0,5 \%$  и  $\rho = 1,5 \%$ ) које у зони ослонца имају само минималну арматуру, а арматура према максималном моменту постоји у средишњих 60 %, 70 %, 80 % и 90 % распона. Ови угиби су упоређени са израчунатим угибима ( $u_{100 \%}$ ) греда које максималну арматуру имају читавом дужином распона (100 % - без смањивања). Резултати су приказани у табели 4.3.

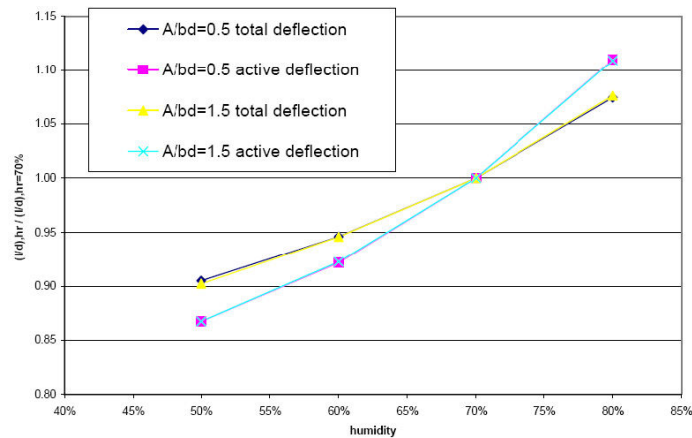
Табела 4.3: Односи угиба са пуном (100 %) и скраћеним дужинама потребне арматуре у средини распона просте греде, [2]

дужина максималне арматуре (% распона) →	100 %	90 %	80 %	70 %	60 %
$u/u_{100 \%}$ (за $\rho = 0,5 \%$ )	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
$u/u_{100 \%}$ (за $\rho = 1,5 \%$ )	1,0	1,0	1,0	1,0	1,3

Види се да нема значајнијег утицаја у разматраним примерима, осим при великим коефицијентима армирања и знатнијем скраћивању. Потенцијално проблематични носачи по питању угиба су понајвише армиранобетонске плоче. Оне по два основа спадају у „неосетљиве“ елементе по овом питању: коефицијенти армирања управо нису велики, а уобичајени начини конструисања арматуре, када се има у виду и потребна дужина сидрења, много је ближи „100 %“ него „60 %“ у смислу претходне анализе.

*У анализама спроведеним у тези усвојено је да је арматура константна на дужини на којој је момент истог знака. Претходна анализа указује да та претпоставка није груба апроксимација. Ово се односи и на зоне са негативним моментима, код континуалних носача, с тим да су односи површина доње и горње арматуре, (сваке у својој зони) адекватни односу позитивних и негативних момената. На овај начин није обухваћено истовремено присуство обе главне арматуре у зонама у којима момент мења знак. Међутим, ту су величине момената (а самим тиме и одговарајућих кривина) мале, па се може очекивати да је и утицај апроксимације мали. Величина арматуре на притиснутој страни пресека, која спада у параметре у тези, такође је константна на потезу на коме је момент истог знака.*

**Утицај релативне влажности** разматран је у [2] у опсегу од 50 до 80 %. Поново су разматране две вредности процента армирања,  $\rho = 0,5 \%$  и  $\rho = 1,5 \%$ . Резултати поређења граничног односа распон/статичка висина, за различите влажности са вредностима за референтну влажност од 70 %, приказани су на слици 4.3.



Слика 4.3: Гранични односи  $l/d$  у зависности од релативне влажности, [2]

Са слике 4.3 се види да је утицај различите релативне влажности у односу на референтну битан и да се креће у опсегу  $\pm 15 \%$  за активни, односно  $\pm 10 \%$  за тотални угиб. Ово је очекиван резултат, с обзиром да величина деформација течења и скупљања суштински зависе од влажности. Са дијаграма се такође сагледава да величина утицаја релативне влажности не зависи од величине коефицијента армирања. И овај резултати није неочекиван: у основи поступка је линеарна теорија течења, а разматрани статички одређени систем не активира све битне нелинеарне проблеме – нема прерасподеле статичких утицаја.

*Величина релативне влажности свој утицај на величину угиба исказује кроз величину коефицијента течења и дилатације скупљања. Распон овог утицаја може, у комбинацији са прерасподелом код статички неодређених система бити и већи од овде приказаног. У тези су ефективни коефицијент течења и дилатација скупљања директни параметри, тако да се, преко њих, утицај релативне влажности неометано уводи у прорачун.*

**Однос величине појединих оптерећења**, или, прецизније, процентуално учешће  $g_1$ ,  $g_2$  и  $q$  у укупном оптерећењу. Када се примени напред објашњена апроксимација у смислу једнократног оптерећивања квази-сталним оптерећењем,

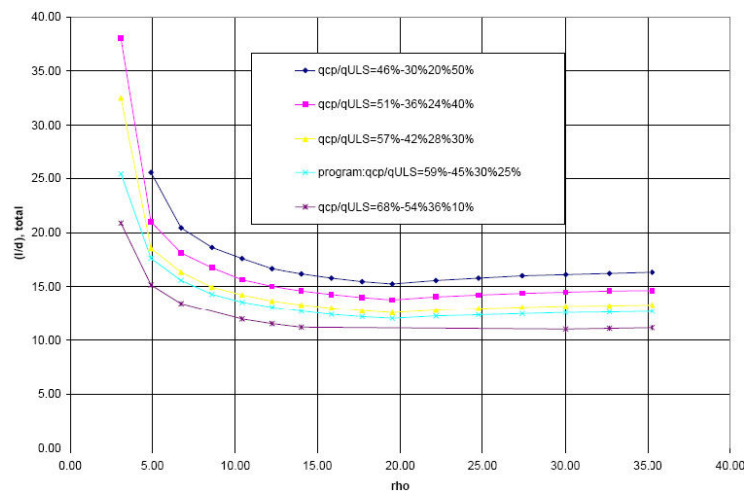
уз примену ефективног коефицијента течења  $\varphi_{eq}$ , ниже процентуално учешће променљивог оптерећења  $q$  резултује у већем нивоу квази-сталног терета  $q_{qp}$  и већем ефективном коефицијенту течења  $\varphi_{eq}$ , и, сходно томе, већем угибу. Потребни однос распон/статичка висина се, у том случају, смањује.

У табели 4.4 су приказани односи квази-сталног  $q_{qp}$  и граничног оптерећења  $q_{ULS}$ , при различитим процентуалним учешћима  $g_1$ ,  $g_2$  и  $q$ . Гранично оптерећење је добијено факторисањем сталних ( $g_1$ ,  $g_2$ ) терета са 1,35, а променљивог  $q$  са 1,50. У квази-сталном оптерећењу променљиво оптерећење  $q$  учествује са фактором  $\psi_{02} = 0,30$ .

Табела 4.4: Односи квази-сталног ( $q_{qp}$ ) и граничног оптерећења ( $q_{ULS}$ ) при различитим учешћима сталних ( $g_1$ ,  $g_2$ ) и повременог терета ( $q$ )

$q_{qp}/q_{ULS}$	$g_1/q_{tot}$	$g_2/q_{tot}$	$q/q_{tot}$
46 %	30 %	20 %	50 %
51 %	36 %	24 %	40 %
57 %	42 %	28 %	30 %
59 %	45 %	30 %	25 %
68 %	54 %	36 %	10 %

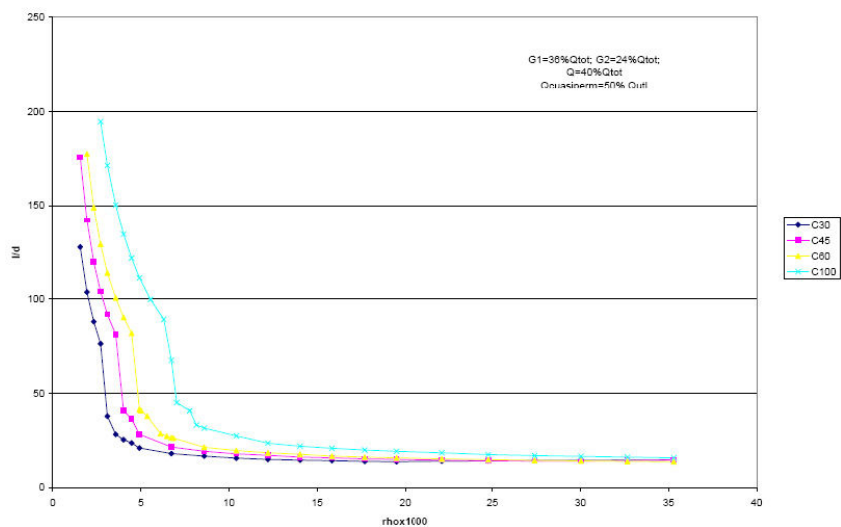
Потребни односи распон/статичка висина за нивое квази-сталног оптерећења приказане у табели 4.4 дати су на слици 4.4.



Слика 4.4: Гранични односи  $l/d$  у зависности од односа  $q_{qp}/q_{ULS}$ . [2]

Са дијаграма на слици 4.4 може се закључити да је однос квази-сталног и граничног оптерећења битан параметар при одређивању угиба, те да није подесно да се он експлицитно искључи тако што ће се претходно изабрати једна вредност. Ако се ипак изабере таква опција, најмање неподесна вредност је управо референтна вредност у студији [2] од 59 %. У Еврокоду 2 (а такође и у Модел коду МС 2010 [4]) учињен је пропуст: презентирани једначине (4.4) и (4.5), како је и наведено у коментару табеле 4.1, односе се на однос квази-сталног и граничног оптерећења од 50 %. У [18] је показано да је потребно да дебљина армиранобетонске плоче буде мања од 8 *cm*, да би се критеријум применио, или, другачије речено, критеријум Еврокода 2 за индиректну проверу угиба није примењљив ни на једну реалну конструкцију. **У тези је величина квази-сталног оптерећења директан параметар, који се репрезентује напоном у затегнутој арматури, тако да претходно фиксирање односа квази-сталног и граничног оптерећења није потребно.**

**Утицај класе чврстоће бетона** огледа се кроз два параметра, чија средња вредност расте са чврстоћом: модула еластичности и чврстоће на затезање. Ефекти су приказани на слици 4.5.

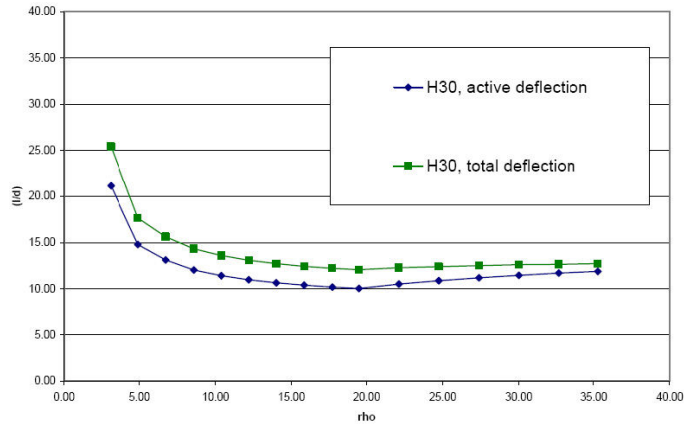


Слика 4.5: Гранични односи  $l/d$  у зависности од класе чврстоће бетона, [2]

**У тези су модул еластичности бетона и чврстоћа на затезање директни параметри. Тиме је постигнута већа флексибилност, јер се могу директно уносити вредности различите од оних које даје норматив. На тај начин се може уважити и историја оптерећења која одступа од просечне.**

**Упоредивање меродавности тоталног и такозваног „активног угиба“.**

На слици 4.6 су приказане вредности граничних односа распон/статичка висина за ограничење тоталног угиба на распон/250 и активног угиба, на распон/500, при референтним вредностима свих параметара.



Слика 4.6: Гранични односи  $l/d$  за тотални и активни угиб, [2]

Види се да је меродаван услов активног угиба. Овде наступа проблем који није могуће обухватити примењеним приступом анализе. Наиме, претпоставка о иницијалном наношењу оптерећења при градњи у износу адекватном пуном експлоатационом оптерећењу, чиме се формира стабилизована слика прелина, није на страни сигурности при одређивању величине активног угиба: прираштај угиба је већи при накнадном настајању прелина.

Проблем активног угиба није директно разматран у тези. Методологијом која се примењује за прорачун дуготрајног угиба, он би се могао приближно срачунати у облику (модификоване) разлике два дуготрајна угиба. Резултат приказан на слици 4.6, међутим, указује да би другачије постављен критеријум за контролу дуготрајног угиба довео његове захтеве на сличан ниво као и критеријум активног угиба (на пример, поштравањем услова са  $l/250$  на  $l/300$ ). То би било прагматичније решење, с обзиром да је рачунање дуготрајног угиба мањи посао од рачунања активног угиба. У том погледу, **резултати који се изводе у тези су потпуно флексибилни: критеријум угиба није уграђен у модел, већ се дуготрајни угиб израчунава и може се поредити са произвољно изабраним ограничењем.**

## 4.2 Контрола угиба према *CEB-FIP* Модел коду *MC 1990*

*CEB-FIP* Модел код *MC 1990*, [3], дефинише општи и поједностављени поступак за верификацију деформација конструкција.

Општи поступак полази од дефинисања везе момент кривина, за стања I (без прслина), II (са прслинама) и III (гранична стања, није од интереса за прорачун угиба). Као што је већ напред напоменуто, ригорозни поступак Еврокода 2 изведен је из овог модела, уз мања поједностављења.

Ригорозни поступак подразумева израчунавање кривина у већем броју пресека и нумеричку интеграцију. Детаљније инструкције за прорачун се могу наћи у *CEB Manual*-у [5].

Претпостављајући могућност суперпозиције, укупна кривина ( $1/r_t = \kappa_t$ ) у тренутку  $t$  израчунава се као збир еластичне кривине ( $1/r_0 = \kappa_0$ ) и кривина услед течења ( $1/r_\varphi = \kappa_\varphi$ ) и скупљања ( $1/r_{cs} = \kappa_{cs}$ ) бетона:

$$\frac{1}{r_t} = \kappa_t = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_\varphi} + \frac{1}{r_{cs}} = \kappa_0 + \kappa_\varphi + \kappa_{cs}. \quad (4.10)$$

При разматрању утицаја дуготрајног оптерећења и скупљања, дилатација у бетону  $\varepsilon(t)$  времену  $t$  израчунава се као

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{\Delta\sigma_c}{E_c(t_0)} [1 + \chi(t, t_0)\varphi(t, t_0)] + \varepsilon_{cs}(t) \quad (4.11)$$

где су

- $\sigma_c(t_0)$  – почетни дуготрајни напон;
- $\Delta\sigma_c$  – промена почетног напона у временском интервалу  $(t - t_0)$ ;
- $E_c(t_0)$  – модул еластичности бетона у тренутку  $t_0$ ;
- $\varphi(t, t_0)$  – коефицијент течења за оптерећење нането у  $t_0$ , за интервал  $(t - t_0)$ ;
- $\chi(t, t_0)$  – коефицијент старења за промену напона  $\Delta\sigma_c$  за интервал  $(t - t_0)$ ;
- $\varepsilon_{cs}(t)$  – дилатација скупљања бетона до тренутка  $t$ .

Релација (4.11) представља примену ефективног  $E_{c,eff}$

$$E_{c,eff} = \frac{E_c(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (4.12)$$

на почетни дуготрајни напон  $\sigma_c(t_0)$  и коригованог ефективног модула  $E_c^*$

$$E_c^* = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi(t, t_0)\varphi(t, t_0)} \quad (4.13)$$

на промену напона  $\Delta\sigma_c$  у временском интервалу  $(t - t_0)$ . Када се користи дефиниција коефицијента течења  $\varphi = \varphi_{28}(t, t_0)$  према Модел коду *МС* 1990 [3] (то јест да је дилатација течења изражена у односу на еластичну деформацију која одговара номиналној старости бетона од 28 дана и номиналном модулу еластичности бетона  $E_c = E_c(28)$ ), у изразима (4.11) и (4.12) уместо  $\varphi(t, t_0)$  стоји (види поглавље 5.1, релација (5.6)):

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{28}(t, t_0) \frac{E_b(t_0)}{E_b(28)}. \quad (4.14)$$

Кривина се израчунава за стање I и за стање II.

При израчунавању кривине могу се користити помоћни коефицијенти  $k_s$ ,  $k_\varphi$  и  $k_{cs}$ , дати у [5], који уводе ефекат арматуре, течења и скупљања на кривину, респективно. Аналогни коефицијенти у југословенском Приручнику за примену ПБАБ 87 [22] носе ознаке  $k_a$ ,  $k_\varphi$  и  $k_s$ , које су коришћене у овој тези. Коефицијенти се израчунавају из геометријских карактеристика пресека, уз коришћење модула еластичности бетона  $E_c(t_0)$ , коефицијента течења  $\varphi(t, t_0)$  и коефицијента старења  $\chi(t, t_0)$ . Коефицијенти се, као и кривина, израчунавају за стање I и за стање II. Изрази за  $k_{a,I}$ ,  $k_{a,II}$ ,  $k_{\varphi,I}$ ,  $k_{\varphi,II}$ ,  $k_{s,I}$  и  $k_{s,II}$  дати су у поглављу 7 као једначине (7.26-31). Применом ових коефицијената кривине услед савијања моментом постају

$$\kappa_0 = k_s \kappa_c \quad \text{или} \quad \kappa_0 = k_a \kappa_b \quad (4.15)$$

$$\kappa_\varphi = k_s (1 + k_\varphi \varphi(t, t_0)) \kappa_c \quad \text{или} \quad \kappa_\varphi = k_a (1 + k_\varphi \varphi(t, t_0)) \kappa_b \quad (4.16)$$

$$\kappa_{cs} = k_{cs} \frac{\varepsilon_{cs}(t)}{d} \quad \text{или} \quad \kappa_{sk} = k_{sk} \frac{\varepsilon_{sk}(t)}{d} \quad (4.17)$$

где су:

- $d$  – висина пресека и
- $\kappa_c$  или  $\kappa_b$  – кривина израчуната са крутошћу бруто бетонског пресека:

$$\kappa_c = \kappa_b = \frac{M}{E_c(t_0)I_c}. \quad (4.18)$$

На потезу са прслинама средња дилатација у бетону и арматури, а тиме и средња кривина, могу се срачунати по правилу (4.1). Кривина се израчунава за стање I и за стање II тако што се изрази (4.15-17) израчунавају уз помоћ одговарајућих коефицијената, зависно од стања, а потом интерполира према (4.1).

У *CEB Manual*-у [5] дати су и нумерички примери који укључују интегралне кривине. Одговарајућа пажња посвећена је утицају промене крутости услед настанка прслина и временских деформација бетона на промену дијаграма момента савијања. Наводи се да прорачун мора да буде итеративан, а да разлике израчунатих угиба у односу на резултате добијене интегралним кривина изведених из дијаграма базираних на константној крутости (без прерасподеле) не морају да буду занемарљиве.

Нумерички примери урађени су за обострано укљештену греду правоугаоног пресека 30×50 *cm* и распона 9,0 *m*. Примери чине целину, у форми веома продуктивне вишепараметарске анализе, имајући у виду расположиву рачунску технику (1985.). Носач је оптерећен сталним теретом, чији интензитет износи половину граничног оптерећења. Вариране су арматуре у пољу и над ослонцем, али тако да њихов збир остане константан (чиме се постиже приближно константна гранична носивост греде као целине). Варирани су и коефицијент течења, модул еластичности и чврстоћа на затезање бетона. Скупљање бетона није разматрано. Међу бројним резултатима овог нумеричког експеримента, са аспекта истраживања у овој тези, посебно се издвајају следећа три:

- Код носача чија је арматура била сагласна са дијаграмом момената који следи из уобичајене еластичне статичке анализе на основу крутости бруто пресека, угиби израчунати на основу тог дијаграма одступали су више од 30 % од вредности добијене нумеричким интегралним „коректног“ дијаграма, који укључује потребне прерасподеле.
- Када се умерено ( $\pm 25$  %) варира арматура код ослонца у односу на потребну према бруто (непрерасподељеном) дијаграму, уз кориговање арматуре у пољу (тако да се задржи иста гранична носивост конструкције - иста „стрела“ дијаграма), распон величина рачунских угиба, добијених нумеричким интегралним коректног (прерасподељеног) дијаграма момента, није велики.



- Резултати добијени апроксимативним поступцима (на пример билинеарни метод) уз употребу дијаграма момента савијања који одговара бруто пресеку, одступали су и до 80 % од резултата добијених нумеричким интегралњем.

Иако базиран на појединачним примерима, први и трећи резултат указују да коришћење дијаграма момента добијеног уобичајеном статичком анализом заснованом на константним крутостима бруто пресека није добар приступ. Када се спроводи нумеричко интегралњење, уложени труд није адекватан квалитету резултата. Овај проблем је такође разматран у [18]. Код апроксимативних поступака могућа одступања могу још више обесмислити резултат.

Други резултат указује да би се стрела моментног дијаграма (при једнакоподељеном оптерећењу) могла ефикасно користити као параметар при изучавању угиба, код носача са континуитетом. Мултипараметарске анализе спроведене у тези показале су да је овај приступ резултативан у смислу сажимања модела (смањивања броја директних параметара, без умањења општости).

Модел код *МС 1990* [3] у суштини не даје метод за прорачун кривине услед скупљања: наведени изрази (4.15) потичу из пратећих докумената, док их је Еврокод 2 прокламовао у облику датом релацијом (4.3). У *fib textbook-у Structural concrete* [23] констатује се да је приступ дат релацијом (4.3) рационално објашњив за стање I. Његова употреба и за стање II, а посебно коришћење интерполационог коефицијента  $\zeta$  изведеног из оптерећења према (4.1a) – имајући у виду декларисану независност скупљања од оптерећења, није довољно документована. Изабрани приступ напросто следи усвојену логику прорачуна. У тези је у наставку, у поглављу 10, показано да овај приступ Еврокода 2 показује одступања при предвиђању угиба носача са израженим скупљањем, у односу на експериментално одређене вредности.

Поједностављени поступак Модел кода *МС 1990* [3] даје мултипликаторе „обичног“ еластичног угиба  $a_c$ , срачунатог на основу крутости бруто бетонског пресека:

$$a = (1 + \varphi)a_c, \quad (4.19a)$$

за носач без прслина у распону  $M_d < M_r$  (за конзолу на ослонцу), односно

$$a = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \eta (1 - 20\rho_{cm}) a_c, \quad (4.196)$$

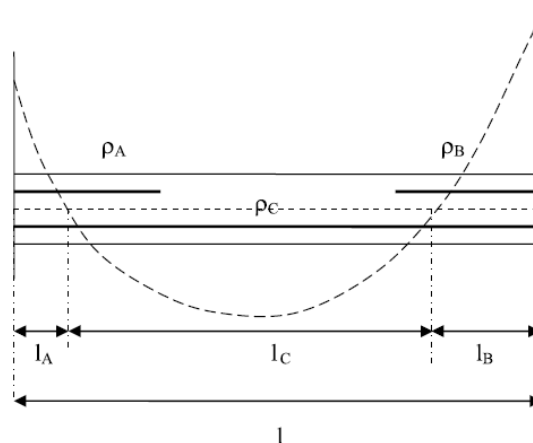
за носач са прслинама  $M_d \geq M_r$ , где су:

- $a_c$  – еластични угиб срачунат са крутошћу бетонског бруто пресека  $E_c I_c$ ;
- $h$  – висина пресека;
- $d$  – статичка висина;
- $M_r$  – момент појаве прслина, одређен из бруто бетонског пресека;
- $M_d$  – момент у средини распона (за конзолу момент на ослонцу) греде или плоче од честе комбинације дејстава;
- $\rho_m$  – средњи коефицијент армирања затегнутом арматуром према релацији (4.20);
- $\rho_{cm}$  – средњи коефицијент армирања притиснутом арматуром;
- $\eta$  – корекциони фактор, приказан у табели 4.5, који уводи ефекте прслина и течења;
- $\varphi$  – коефицијент течења.

Табела 4.5: Вредности корекционог фактора  $\eta$  према Модел коду *MC 1990*

$\rho_m$ (%)	0,15	0,2	0,3	0,5	0,75	1,0	1,5
$\eta$	10	8	6	4	3	2,5	2

Средњи коефицијент армирања затегнутом/притиснутом арматуром  $\rho_m$  израчунава се у складу са моментним дијаграмом према слици 4.7.



Слика 4.7: Дефинисање дужина и коефицијената армирања за образац (4.20)

Вредност средњег коефицијента армирања добија се на основу израза

$$\rho_m = \rho_A \frac{l_A}{l} + \rho_C \frac{l_C}{l} + \rho_B \frac{l_B}{l} \quad (4.20)$$

где су:

- $\rho_A$ ,  $\rho_B$  – коефицијенти армирања затегнутом/притиснутом арматуром на левом и десном крају елемента, респективно;
- $\rho_C$  – коефицијент армирања у пресеку са максималним моментом у пољу;
- $l_C$ ,  $l_A$  и  $l_B$  – делови распона – потези са моментом истог знака, према слици 4.7.

Из релације (4.19б) изводи се услов у форми ограничења односа распон/статичка висина ( $l/d$ ) у облику:

$$\frac{l}{d} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\delta \eta (l/a)_{\text{lim}}}} \quad (4.21)$$

где је  $(l/a)_{\text{lim}}$  подесно ограничење угиба, а са  $\delta$  је означена карактеристика система

$$\delta = \frac{a_c h^3}{l^4}. \quad (4.22)$$

Поступак дозвољава да се релације (4.21) и (4.22) примењују на носаче са разноврсним облицима пресека, тако што се они своде на правоугаоне пресеке са истом висином и истим моментом инерције. Притом се вредност момента појаве прслина  $M_T$  одређује према оригиналном пресеку. Као подесно ограничење, за уобичајене свакодневне провере означено је  $(l/a)_{\text{lim}} = 300$ .

Коначно, као најједноставнији метод верификације, дато је експлицитно ограничење односа распон/статичка висина у облику:

$$\frac{l}{d} \leq \lambda = \lambda_0 k_T k_l \left( \frac{400}{f_{yk}} \right) \quad (4.23)$$

где су

- $\lambda_0$  – коефицијент из табеле 4.6;
- $k_T = 1,0$  за „Т“ пресеке чија ширина плоче не прелази 3 ширине ребра и  $k_T = 0,8$  када је однос већи од 3;
- $k_l = 7/l \leq 1$ , где је  $l$  распон у метрима;
- $f_{yk}$  – карактеристична вредност границе течења арматуре у МПа.

Табела 4.6: Вредности коеф.  $\lambda_0$  за савијане елементе без нормалне силе, [3]

Конструкцијски систем	Велики напони у бетону $\rho = 1,5\%$	Мали напони у бетону $\rho = 0,5\%$
Слободно ослоњена греда, слободно ослоњена плоча која носи у једном или у два правца	18	25
Крајње поље континуалног гредног носача или континуалне плоче која носи у једном правцу, или плоче која носи у два правца, континуална преко једне, дуже стране	23	32
Унутрашње поље гредног носача или плоче која носи у једном или у два правца	25	35
Плоча ослоњена на стубове без греда ( <i>flat slab</i> ) (у односу на већи распон)	21	30
Конзола	7	10

Треба приметити да се коефицијенти у Табели 4.1 из Еврокода 2, када се прерачунају на напон у арматури  $f_{yk} = 400 \text{ MPa}$ , разликују од приказаних вредности у табели 4.6 из Модел кода *MC 1990* [3] само за вредност заокруживања на целе бројеве.

### 4.3 Контрола угиба према препорукама Америчког института за бетон

Амерички Институт за бетон (*ACI*) је кроз своју дугу традицију настојао да понуди једноставне поступке за инжењерске прорачуне. То је случај и са контролом угиба у зградарству, који је регулисан препорукама *ACI* 318 [9], које се односе на пројектовање бетонских конструкција у зградарству. У ситуацијама када је потребан рафиниранији прорачун, могу се користити препоруке комитета *ACI* 435 [24], који се специфично бави проблемом контроле деформација бетонских конструкција.

У основи препорука комитета *ACI* 318 [9] за срачунавање угиба гредних носача и плоча које носе у једном правцу налази се већ дуго Брансонов (*Branson*) метод публикован 1963 [17].

За одређивање тренутних („еластичних“) кривина носача користи се ефективни  $I_e$  момент инерције пресека:

$$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^m I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^m \right] I_{cr} \leq I_g \quad (M \geq M_{cr}) \quad (4.24)$$

где су:

- $I_g$  – момент инерције бетонског бруто пресека;
- $I_{cr}$  – момент инерције пресека пресека са прслином;
- $M_{cr}$  – момент савијања који отвара прслину на посматраном пресеку;
- $M$  – експлоатациони момент савијања у пресеку од оптерећења при коме се срачунава кривина;
- $m$  – експонент, који је одређен експериментално.

На основу експерименталних вредности угиба за носаче система просте греде и континуалне носаче правоугаоног ([17], [25], [26]) и „Т“ пресека ([27]), Брансон је утврдио да је у изразу 4.24 адекватан степен  $m = 4$  при одређивању крутости пресека у зони носача са прслинама.

Надаље, такође на основу експерименталних резултата, за носаче система просте греде, Брансон је утврдио да се замењујућа крутост за читав распон може одредити у облику:

$$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \leq I_g \quad (M \geq M_{cr}) \quad (4.25)$$

где је  $M_a$  највећи експлоатациони момент савијања на носачу од оптерећења при коме се срачунава угиб – момент у средини распона. Овај поступак наведен је као препорука комитета *ACI 435* од 1966. године, а у препорукама за прорачун зграда, *ACI 318*, налази се од 1971. године.

Вредности чврстоће на затезање  $f_r$  и модула еластичности  $E_c$  изводе се из чврстоће на притисак  $f_c'$  према релацијама *ACI 318* (прерачунао у *SI* јединице):

$$f_r = (2/3) \times 0,6228 \sqrt{f_c'} \quad (f_c' \text{ у МПа, } f_r \text{ у МПа}) \quad (4.26)$$

$$E_c = 4,733 \sqrt{f_c'} \quad (f_c' \text{ у МПа, } E_c \text{ у GPa}) \quad (4.27)$$

Редукциони фактор  $(2/3)$  уведен је у (4.26) изменама 2008. године (*ACI 318-08*) да би се уважио утицај спречених деформација, пре свега скупљања, на увећање угиба.

За континуалне носаче *ACI 318* [9] препоручује осредњени ефективни момент инерције, на основу крутости пресека на ослонцима и у распону у облику:

$$I_e = 0,5I_{e(m)} + 0,25(I_{e(1)} + I_{e(2)}) \quad (4.28)$$

где се индекси  $m$ , 1 и 2 односе на ефективне крутости пресека у средини распона и на оба краја носача.

Сам Брансон је, поново на основу експерименталних резултата, као подеснији начин пондерисања предложио нешто другачији проценат учешћа појединих крутости, [28]:

$$I_e = 0,70I_{e(m)} + 0,15(I_{e(1)} + I_{e(2)}) \quad (4.29)$$

за носаче са континуитетом на оба краја. За носаче континуалне на једном крају:

$$I_e = 0,85I_{e(m)} + 0,15I_{e(1)} \quad (4.30)$$

што је, такође, прихватио и препоручио и комитет *ACI 435*. Треба напоменути да се овако израчунате ефективне крутости односе на расподељена оптерећења. У случају концентрисаних оптерећења, коефицијенти у изразима су другачији.

Уколико се не спроводи детаљнији прорачун, *ACI 318* [9] нуди поједностављен поступак Брансона за одређивање прираштаја угиба услед скупљања и течења бетона. Повећање угиба се добија множењем почетног угиба фактором:

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50\rho'} \quad (4.31)$$

где је:

- $\rho'$  – коефицијент армирања притиснутом арматуром у средини распона (на ослонцу за конзолу);
- $\zeta$  – коеф. дуготрајног оптерећења, са вредношћу 2,0 за 5 или више година.

Примена обрасца (4.31) практично води утростручавању почетног угиба у времену од дуготрајног оптерећења, ако нема притиснуте арматуре.

У опцијама које подразумевају нешто прецизније одређивање угиба, *ACI 435* [24], поред осталих, наводи и неколико поступака за прорачун угиба од дуготрајних оптерећења заснованих на процени ефективне крутости. Између њих је и Брансонов поступак, чија је напред описана најједноставија варијанта садржана у *ACI 318* [9].

Сложенији поступак (Брансон, 1977., *ACI 435*, 1978.) подразумева да се прираст угиба услед течења и скупљања одређују одвојено, уз узимање у обзир конкретних величина коефицијента течења и дилатације скупљања.

Прираст угиба услед течења добија се множењем инцијалног угиба од дуготрајних оптерећења фактором:

$$\lambda_{creep} = \frac{0,85 C_t}{1 + 50\rho'} \quad (4.32)$$

где је  $C_t$  коефицијент течења бетона, за посматрани период трајања оптерећења.

Код континуалних носача се може користити осредњени мултипликатор  $\lambda_{creep(av)}$ . За поље са континуитетом на оба краја:

$$\lambda_{creep(av)} = 0,70\lambda_{creep(m)} + 0,15(\lambda_{creep(1)} + \lambda_{creep(2)}). \quad (4.33)$$

За континуитет само на једном крају:

$$\lambda_{creep(av)} = 0,85\lambda_{creep(m)} + 0,15\lambda_{creep(1)} \quad (4.34)$$

где индекси  $m$ , 1 и 2 означавају да се вредност  $\lambda_{creep}$  одређује на основу арматура у распону ( $m$ ) и на крајевима 1 и 2 носача.

Угиб од скупљања  $\delta_{sh}$  израчунава се као:

$$\delta_{sh} = K_{sh}\phi_{sh}L^2 = K_{sh}\left(A_{sh}\frac{\epsilon_{sh}}{h}\right)L^2$$

где су:

- $K_{sh}$  – коефицијент угиба од скупљања, зависан од статичког система;

- $\phi_{sh}$  – кривина услед скупљања;
- $L$  – распон елемента конструкције.

Кривина услед скупљања  $\phi_{sh}$  се може израчунати као  $\phi_{sh} = A_{sh}\epsilon_{sh}/h$ , где је  $\epsilon_{sh}$  дилатација скупљања,  $h$  висина пресека, а коефицијент  $A_{sh}$  се израчунава као:

$$A_{sh} = 0,7(\rho - \rho')^{1/3} \left( \frac{\rho - \rho'}{\rho} \right)^{1/2} \quad \text{за } \rho - \rho' \leq 3,0\%, \text{ односно} \quad (4.35)$$

$$A_{sh} = 1,0 \quad \text{за } \rho - \rho' > 3,0\%. \quad (4.36)$$

Брансон је [28] дефинисао вредности коефицијента статичког система  $K_{sh}$ :

- 0,500 за конзолу;
- 0,125 за просту греду;
- 0,084 за континуалну греду са два распона;
- 0,090 за крајњи распон континуалне греде са три распона;
- 0,065 за обострано укљештен распон или унутрашње поље континуалног носача са три или више распона.

*ACI 435* [24] даје суштински исте вредности, само заокружене на две децимале.

Најједноставнији начин провере деформабилности конструкција у *ACI 318* [9] дат је у облику граничног односа распон/статичка висина, али је примена предвиђена само у случајевима када не могу настати већа оштећења у случају прекомерног угиба. Бишоф (*Bischoff*) и Сканлон (*Scanlon*) су у [29] дали решење у истом облику и за конструкције на које се примењује захтев провере угиба.

Приказани поступак је стекао велику популарност због своје експлицитности и наглашене једноставности. Једноставност је, међутим, произвела и одређена ограничења која се огледају у непрецизности у појединим случајевима. Међу значајнијим ограничењима јесу потцењивање угиба мало армираних конструкција при оптерећењима непосредно након формирања прслина (што је чест случај код армиранобетонских плоча) [30] и прецењивање величине дуготрајних угиба конструкција од бетона високих чврстоћа [31].

Као најригорознији поступак за доказивање угиба, *ACI 435* [24], наводи општи принцип заснован на израчунавању кривине у већем броју пресека и њеној интеграцији. Иако је споменуто неколико поступака, *Appendix B* из 2003, [32], у суштини, презентира само (матрични облик) методе коригованог ефективног модула ([33]) за израчунавање кривине бетонских пресека, са и без прслине.



#### 4.4 Контрола угиба према Британском стандарду

Британски стандард *BS 8110* [34] у делу 1 (*Part 1*, 1997.) дефинише поступак индиректне контроле угиба ограничавањем односа распон/статичка висина. Поступак је у суштини адекватан истом типу поступка у Еврокоду 2, односно Модел коду *MC 2010* [4]: базни односи, дефинисани као бројеви за основне статичке системе приказани у табели 4.7, модификују се корекционим факторима који уводе у прорачун битне параметре.

Табела 4.7: Основни односи распон/статичка висина према *BS 8110*, [34]

Основни односи распон/статичка висина за правоугаоне и Т (Г) пресеке		
начин ослањања	правоугаони пресеци	Т (Г) пресеци са $b/b_w \leq 0,3$
конзола	7	5,6
проста греда	20	16,0
континуални носач	26	20,8

Корекционих фактора има неколико. Овде се наводе редоследом који је дат у самом Стандарду.

Први фактор се односи на велике распоне. Као такви означени су они преко 10 m, а корекција се спроводи када се жели ограничити прираст деформације након израде осетљивих преграних елемената. Базни однос распон/статичка висина се смањује пропорционално распону, множењем фактором 10/распон. Исти принцип примењен је и у Еврокоду 2, али корекција почиње већ са распонима који превазилазе 7 m. Овакве корекције у суштини проистичу из непрецизности поступка заснованог на критеријуму однос распон/статичка висина када се „зађе“ у зоне у којима неки од утицајних параметара има вредност битно различиту од уобичајеног распона. Једноставно речено – њима се отклања разлика настала представљањем неке комплексније криве поједностављеним обликом, на пример правом.

Други фактор уводи величину експлоатационог напона  $f_s$  у затегнутој арматури. Ово је експлицитан приступ, за разлику од поступка у Еврокоду 2, који базни коефицијент израчунава за референтан (фиксиран) експлоатациони напон (310 МПа) а потом га коригује односом напона при појединачној провери и референтног напона. Еврокод 2 дефинише јединствену криву коју, потом,

линеарно скалира мултипликатором на бази односа конкретног и референтног експлоатационог напона. Корекциони фактор у *BS* 8110 [34], израз (4.37), у погледу величине напона није линеаран. Овакав приступ нуди могућност добијања веће прецизности.

$$\text{Modification factor} = 0,55 + \frac{(477 - f_s)}{120 \left( 0,9 + \frac{M}{bd^2} \right)} \leq 2,0 \quad (4.37)$$

где је може узети да је

$$f_s = \frac{2f_y A_{sreq}}{3A_{sprov}} \times \frac{1}{\beta_b}. \quad (4.38)$$

У изразима (4.37-38) ознаке су:

- $M$  – прорачунски гранични момент у пресеку у средини распона, односно код ослонца за конзолу;
- $A_{sreq}$ ,  $A_{sprov}$  – потребна и усвојена површина арматуре у пресеку са моментом  $M$ ;
- $b$ ,  $d$  – ширина (притиснутог дела) и статичка висина пресека;
- $f_y$  – прорачунска вредност границе течења за арматуру;
- $\beta_b$  – коефицијент прерасподеле момената савијања.

Трећи фактор уводи допринос притиснуте арматуре. За разлику од поступка Еврокода 2, који је овај битан параметар суштински „заборавио“, повољан ефекат притиснуте арматуре дат је у *BS* кроз лако применљив мултипликатор прикан изразом:

$$\text{Modification factor} = 1 + \frac{100A'_{sprov}}{bd} / \left( 3 + \frac{100A'_{sprov}}{bd} \right) \leq 1,5. \quad (4.39)$$

У изразу (4.39) са  $A'_{sprov}$  означена је усвојена арматура у притиснутом делу пресека.

Четврта корекција примењује се на случајеве са деформацијама течења или скупљања бетона већим од уобичајених. Односи се на ситуације када је слободна дилатација скупљања већа од 0,00075 или коефицијент течења већи од 3. Препоручује се као довољна редукција допуштеног односа распон/статичка висина од 15 %. Еврокод 2 је по овом питању применио конзервативнији приступ:

изведени гранични односи распон/статичка висина обухватају и екстремније вредности параметара скупљања и течења (принцип анvelope).

У целини, када се пореде поступци контроле угиба засновани на примени граничног односа распон/статичка висина према Еврокоду 2 и BS 8110 [34], може се оценити да је Еврокод 2 начинио корак уназад.

Сложенији поступци за контролу угиба дати су у делу 2 (*Part 2*) BS 8110 [35] и засновани су на израчунавању и интеграцији кривине елемента. Понуђене су две могућности. Једноставнија, када се кривина израчунава само у „репрезентативном“ пресеку (за обострано ослоњене елементе пресек у средини распона, односно на ослонцу, за конзолу) и на основу ње израчунава угиб. Сложенија опција подразумева израчунавање кривине у већем броју пресека и, потом, нумеричко интеграљење.

Једноставнија опција, заснована на „репрезентативном“ пресеку у суштини одговара сличној опцији према Еврокоду 2, као и билинеарном поступку [5]. Кривина услед дуготрајних оптерећења или скупљања такође се израчунава коришћењем ефективног модула за бетон, полазећи од уобичајене претпоставке о равном пресеку.

Из напона у бетону  $f_c$  и арматури  $f_s$  добија се кривина

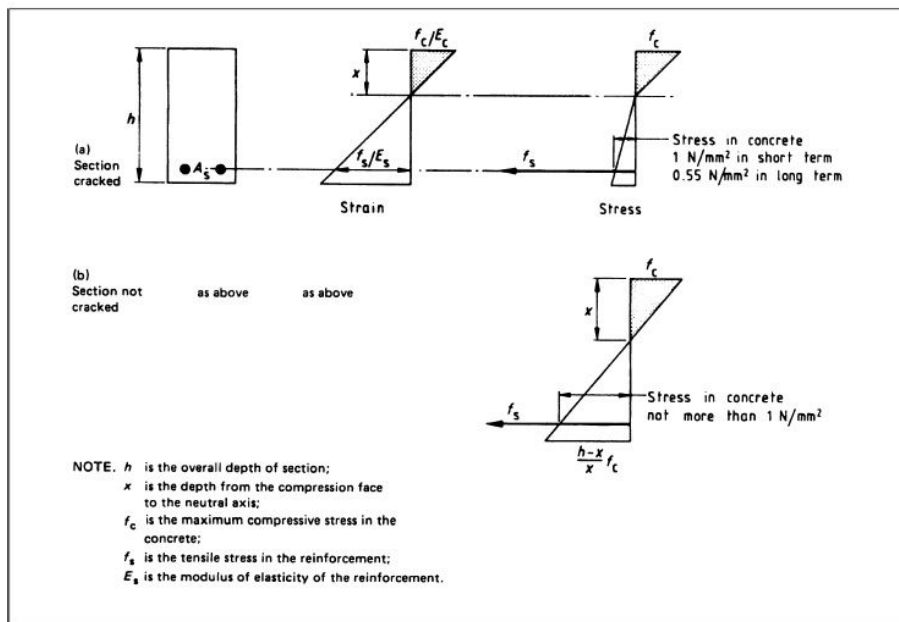
$$\frac{1}{r_b} = \frac{f_c}{xE_c} = \frac{f_s}{(d-x)E_s} \quad (4.40)$$

где су:

- $1/r_b$  – кривина у средини распона, или, за конзолу, код ослонца;
- $x$  – положај неутралне линије, односно висина притиснуте зоне;
- $E_c$  – модул за бетон;
- $E_s$  – модул еластичности за арматуру;
- $d$  – статичка висина пресека.

Положај неутралне линије код пресека са прслином одређује се из услова равнотеже и додатног услова да је дијаграм напона у бетону у затегнутој зони троугаони, који полази од неутралне линије, са вредношћу од 1 MPa, за краткотрајна, односно, 0,55 MPa, за дуготрајна оптерећења, слика 4.8. Увођење ограниченог напона у затегнутом бетону у услов равнотеже је директно урачунавање доприноса затегнутог бетона између прслина. Код пресека без

прслине принцип је исти, с тим да је ограничење напона затезања  $1 \text{ MPa}$  у оба случаја.



Слика 4.8 Одређивање положаја неут. линије према *BS 8110 part 2* [35]

За израчунавање укупне дуготрајне кривине дата је процедура у 4 корака:

1. Срачуна се тренутна (почетна) кривина за тотално и за дуготрајни део оптерећења;
2. Срачуна се дуготрајна кривина од дуготрајног дела оптерећења;
3. Саберу се дуготрајна кривина и разлика тренутних кривина за тотално и дуготрајно оптерећење;
4. Дода се на претходно кривина услед скупљања.

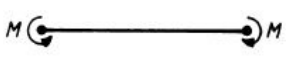
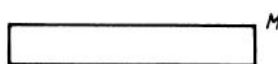
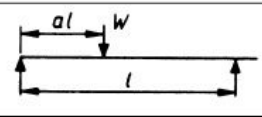
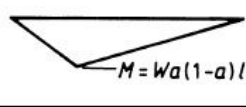


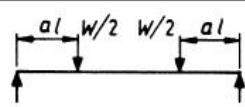
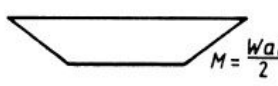
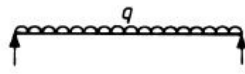

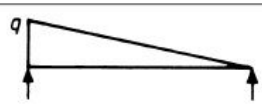
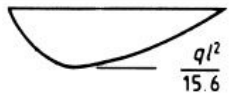
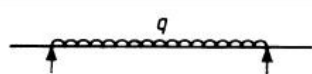

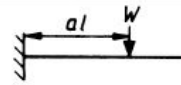
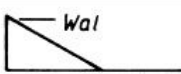
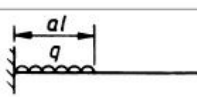
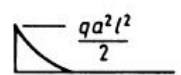
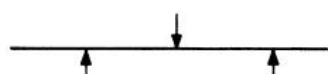
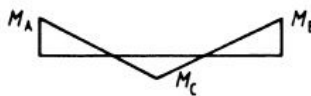
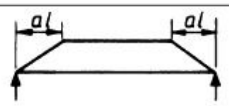

Кривина услед скупљања одређује се као

$$\frac{1}{r_{cs}} = \frac{\varepsilon_{cs} \alpha_e S}{I} \quad (4.41)$$

где све ознаке имају исто значење као и код поступка Еврокода 2. Иако је образац исти као и у Еврокоду 2, његова примена даје нешто другачије резултате имајући у виду принцип успостављања равнотеже у пресеку, приказан на слици 4.8.

*BS 8110*, за разлику од Еврокода 2, даје и помоћне инструкције потребне за комплетирање прорачуна заснованог на методи репрезентативног пресека. У

табели 4.8 презентирана је табела 3.1 BS 8110 [35], са коефицијентима  $K$  за израчунавање угиба за неколико основних шема оптерећења.

шема оптерећења	дијаграм момента	коефицијент $K$
		0.125
		$\frac{3 - 4a^2}{48(1-a)}$ if $a = \frac{1}{2}$ $K = \frac{1}{12}$
		0,0625
		$0.125 - a^2/6$
		0.104
		0.102
		$K = 0.104 (1 - \frac{\beta}{10})$ $\beta = \frac{M_A + M_B}{M_C}$
		end deflection $= \frac{a(3-a)}{6}$ load at end $K = 0.333$
		$\frac{a(4-a)}{12}$ if $a = l$ $K = 0.25$
		$K = 0.083 (1 - \frac{\beta}{4})$ $\beta = \frac{M_A + M_B}{M_C}$
		$\frac{1}{80} \frac{(5 - 4a^2)^2}{3 - 4a^2}$

Табела 4.8: Вредности коефицијента угиба  $K$  (табела 3.1 BS 8110, [35])

Угиб  $a$  се, са претходно израчунатом кривином репрезентативног пресека  $1/r_b$ , и коефицијентом  $K$  из табеле 4.8, добија као:

$$a = Kl^2 \frac{1}{r_b} \quad (4.42)$$

где је  $l$  ефективни распон елемента.

Сложенија опција подразумева израчунавање вредности кривине према напред описаном поступку у четири корака у већем броју пресека, а потом интеграљење дуж елемента релације

$$\frac{1}{r_x} = \frac{d^2 a}{dx^2} \quad (4.43)$$

где су:

- $1/r_x$  – кривина на месту  $x$ ;
- $a$  – угиб на месту  $x$ .

Релација (4.43) представља уобичајену једначину теорије еластичности линијских носача у којој је кривина деформационе линије апроксимирана другим изводом.

Треба подвући да *BS 8110* [35] садржи и коментаре неких проблема који могу бити од значаја за пројектанте при контроли деформација. Препоручује се да се део повремениог терета третира као стално оптерећење (Еврокод 2 ово уводи кроз квази-стално оптерећење). Указује се да крути преградни елементи могу (ефектом лука) сами пренети део своје тежине ближе ослонцима и тиме смањити угиб. Такође се скреће пажња да су ослонци у прорачунским моделима идеализовани и да те претпоставке могу доста да утичу на прорачун. Међутим, посебно треба подвући инструкцију (*BS 8110 Part 2*, поглавље 3.4) да је, за рафинираније прорачуне, потребно и анализу пресечних сила, као уводни корак у контроле стања употребљивости, спровести узимајући у обзир промену крутости услед настанка прелина. Еврокод 2 и ово питање неоправдано прескаче, иако, као што је у [18] показано, може бити од великог утицаја на коначан резултат прорачуна. У поглављу 10, у табели 10.18, приказано је поређење неколико резултата прорачуна угиба са прерасподељеним дијаграмом момената са вредностима „угиба“ добијеним интеграљењем стандардног моментног дијаграма. Поједине разлике су биле веће од 80 %.

Сумарно, *BS 8110* као норматив нуди исте врсте опција као и Еврокод 2. Неки од прорачунских модела су различити, али не у мери која би дала битно другачије резултате прорачуна при истим инпутима. *BS 8110*, за разлику од Еврокода 2, нуди могућност увођења у прорачун стварне притиснуте арматуре. Посматрано са аспекта инжењера – пројектанта и практичне примене, може се оценити да су поступци разрађенији а инструкције комплетније.

#### 4.5 Контрола угиба према руским прописима

Руски прописи СП 52-101 [8] дају веома разрађене инструкције за прорачун угиба. Полазиште је од општег теоријског принципа, који се заснива на интеграцији кривине. Поједностављена варијанта користи кривину најнапрегнутијег пресека у распону, док се општи поступак заснива на интеграцији кривине у већем броју пресека. Инструкције за израчунавање кривине су детаљне.

За елементе или делове елемената без прслина, кривина  $1/r$  се срачунава као:

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)_1 + \left(\frac{1}{r}\right)_2 \quad (4.44)$$

где је  $\left(\frac{1}{r}\right)_1$  кривина од краткотрајног (повременог) оптерећења, а  $\left(\frac{1}{r}\right)_2$  кривина од сталног и дуготрајног терета.

За елементе или делове елемената са прслинама, кривина  $1/r$  се срачунава као:

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)_1 - \left(\frac{1}{r}\right)_2 + \left(\frac{1}{r}\right)_3 \quad (4.45)$$

где је  $\left(\frac{1}{r}\right)_1$  кривина од краткотрајног дејства укупног оптерећења,  $\left(\frac{1}{r}\right)_2$  кривина од краткотрајног дејства сталног и дуготрајног терета, а  $\left(\frac{1}{r}\right)_3$  кривина од дуготрајног дејства сталног и дуготрајног терета.

Кривина савијаних армиранобетонских елемената без прслина израчунава се по формули:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E_{b1}I_{red}} \quad (4.46)$$

где је  $M$  момент савијања од оптерећења од кога се израчунава кривина.  $I_{red}$  је момент инерције идеализованог пресека (трансформисаног пресека сведеног на бетон), при чему је површина арматуре уведена са односом  $\alpha = E_s/E_{b1}$  и:

- $E_{b1} = 0,85E_b$ , за краткотрајни ефекат оптерећења;
- $E_{b1} = \frac{E_b}{1 + \varphi_{b,cr}}$ , за дуготрајни ефекат оптерећења,

где је  $\phi_{b,cr}$  коефицијент течења, дат зависно од релативне влажности ваздуха и класе (чврстоће) бетона. Вредности  $\phi_{b,cr}$  се крећу од 1,0 (класа В60 и релативна влажност преко 75 %) до преко 5,0 (класа В10 и релативна влажност испо 40 %). За нормалну влажност (40 – 75 %) и умерене класе чврстоће (В25 – В40) вредности су у опсегу од 2,0 до 2,5.

За елементе или делове елемената са прслинама, кривина  $1/r$  се срачунава као:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E_{b,red} I_{red}} \quad (4.47)$$

где је  $I_{red}$  момент инерције идеализованог пресека (трансформисаног пресека сведеног на бетон), при чему се урачунава само површина притиснутог бетона одређена по уобичајеном поступку за пресеке са прслином, а површине затегнуте и притиснуте арматуре уведене су са односима  $\alpha_{s1}$  и  $\alpha_{s2}$ , респективно.

Притом су:

- $E_{b,red}$  - трансформисани модул деформације притиснутог бетона, који се израчунава као  $E_{b,red} = \frac{R_{b,ser}}{\epsilon_{1,red}}$ , где је  $R_{b,ser}$  нормативна чврстоћа на притисак за прорачуне ГСУ, а  $\epsilon_{1,red}$  износи  $24 \cdot 10^{-4}$ , за високу,  $28 \cdot 10^{-4}$ , за нормалну и  $34 \cdot 10^{-4}$ , за ниску влажност ваздуха;
- $\alpha_{s1} = \frac{E_s}{E_{b,red}}$  и  $\alpha_{s2} = \frac{E_s}{\psi_s E_{b,red}}$ ;
- $\psi_s = 1 - 0,8 \frac{M_{crc}}{M}$ . (4.48)

Момент појаве прслина  $M_{crc}$  у релацији (4.48) израчунава се као

$$M_{crc} = R_{bt,ser} W_{pl} = R_{bt,ser} W \gamma \quad (4.49)$$

где је где је  $R_{bt,ser}$  нормативна чврстоћа на затезање за прорачуне ГСУ, а „пластични“ отпорни момент  $W_{pl}$  се добија множењем обичног отпорног момента  $W$  израчаног из  $I_{red}$ , множењем коефицијентом  $\gamma$  чије су вредности табулисане. Вредност коефицијента  $\gamma$  за, на пример, правоугаони пресек износи 1,3.



Поједностављени поступак, заснован на кривини  $\left(\frac{1}{r}\right)_{\max}$  пресека са максималним моментом у распону (моментом на ослонцу код конзоле) даје максимални угиб  $f$  према обрасцу:

$$f = Sl^2 \left(\frac{1}{r}\right)_{\max} \quad (4.50)$$

при чему је  $S$  коефицијент угиба у функцији максималног момента, према теорији еластичности (на пример,  $5/48$  за просту греду и једнакоподељено оптерећење). За сложене шеме оптерећења дозвољена је супрепозиција, при чему се коефицијент  $S$  пондерише на прописани начин.

Дате су инструкције за израчунавање кривина за прорачун угиба и у нелинеарној области. На пример, деформацијско понашање бетона описано је трилинеарним дијаграмом. Основни квалитет приказаног поступка је прорачунска експлицитност.

## 5 ДЕФОРМАЦИЈЕ БЕТОНА ЗАВИСНЕ ОД ВРЕМЕНА

### 5.1 Течење бетона

Повећање деформација (дилатација) бетона при дуготрајном оптерећењу – течење бетона – одавно је уочено, доста изучавано и много описивано. Као начин квантификације усталио се коефицијент течења  $\varphi$ , чија дефиниција има мање варијетете. Коефицијент течења  $\varphi(t, t_0)$  се односи на повећање  $\varepsilon_\varphi(t, t_0)$  иницијалне (тренутне еластичне) дилатације  $\varepsilon_{el}(t_0)$ , настале при оптерећивању бетона у тренутку  $t_0$  константним дуготрајним напонам који се одржава у временском интервалу дужине  $t - t_0$ :

$$\varepsilon(t, t_0) = \varepsilon_{el}(t_0) + \varepsilon_\varphi(t, t_0) = \varepsilon_{el}(t_0) + \varphi(t, t_0) \varepsilon_{el}(t_0) = \varepsilon_{el}(t_0) [1 + \varphi(t, t_0)] \quad (5.1)$$

где је  $\varepsilon(t, t_0)$  укупна дилатација бетона у тренутку  $t$ . Одавде следи дефиниција коефицијента течења  $\varphi(t, t_0)$  као односа прираштаја дилатације и почетне (еластичне) дилатације:

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_\varphi(t, t_0)}{\varepsilon_{el}(t_0)} = \frac{\varepsilon(t, t_0) - \varepsilon_{el}(t_0)}{\varepsilon_{el}(t_0)}. \quad (5.2)$$

Величина овако дефинисаног коефицијента течења зависи, између осталог, од старости бетона при оптерећивању  $t_0$  и од дужине трајања константног оптерећења  $t - t_0$ .

Алтернативно, како то чини Модел код *MC* 1990 [3], а потом и Еврокод 2, коефицијент течења  $\varphi = \varphi_{28}(t, t_0)$  се може повезати са еластичном деформацијом  $\varepsilon_{el}(t_0=28) = \varepsilon_{el}(28)$  при старости бетона од 28 дана:

$$\varepsilon(t, t_0) = \varepsilon_{el}(t_0) + \varepsilon_\varphi(t, t_0) = \varepsilon_{el}(t_0) + \varphi_{28}(t, t_0) \varepsilon_{el}(28) \quad (5.3)$$

где је

$$\varphi_{28}(t, t_0) = \frac{\varepsilon_\varphi(t, t_0)}{\varepsilon_{el}(28)} = \frac{\varepsilon(t, t_0) - \varepsilon_{el}(t_0)}{\varepsilon_{el}(28)}. \quad (5.4)$$

Однос еластичних деформација се може, увођењем модула еластичности бетона  $E_b(t_0)$  у старости  $t_0$ , представити у облику

$$\frac{\varepsilon_{el}(t_0)}{\varepsilon_{el}(28)} = \frac{E_b(28)}{E_b(t_0)}. \quad (5.5)$$

Вредност коефицијента течења се онда лако прерачунава

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{28}(t, t_0) \frac{E_b(t_0)}{E_b(28)}. \quad (5.6)$$

Међутим, успостављање модула еластичности, као конвенционалне везе напона и еластичне (“тренутне”) дилатације ствара доста проблема у теоријском изучавању проблема деформација. Уобичајена дефиниција модула еластичности подразумева вредност секантног модула при одређеном инкременту напона, као што је то случај у прописима многих држава, и умерено зависи од старости бетона. Усвајање константне вредности (која зависи од старости  $t_0$ ) за све нивое напона у домену експлоатационих напрезања не представља нарочито грубу апроксимацију. Међутим, протокол за експериментално одређивање секантног модула најчешће подразумева више циклуса оптерећења и растерећења. С друге стране, стално оптерећење у конструкцији наноси се једнократно и одговара му мања вредност модула еластичности од оне која се добија експериментално након “тренирања” узорка.

Поред тога, на измерену вредност модула утицај има и временски интервал  $\Delta t$  од оптерећивања до читавања (који се најчешће мери минутима), с обзиром да се деформације течења брзо развијају по nanoшењу оптерећења. Овај проблем није од значаја за крупноинкременталне практичне прорачуне, с обзиром да су вредности коефицијента течења најчешће калибрисане на овакве вредности модула еластичности. Овакве вредности модула еластичности, међутим, не одговарају за дефинисање функција (закона) течења које се користе у савременим софтверима за нелинеарну анализу. На пример једна од првих и често коришћених функција течења  $J(t, t_0)$ , која исказује величину укупне дилатације бетона у тренутку  $t$  услед јединичног напона који почиње да делује у  $t_0$ , има облик:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_b(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] \quad (5.7)$$

Мерени модули исказују у ствари

$$E_b(t_0) = \frac{1}{J(t_0 + \Delta t, t_0)} \quad (5.8)$$

уместо  $1/J(t_0, t_0)$ , где је  $t_0$  најчешће 28 дана. С обзиром да инкрементални поступци нелинеарне анализе често подразумевају дискретизацију коначних временских интервала у логаритамске редове, почетни (нумерички) временски интервали су веома кратки, најчешће много краћи од  $\Delta t$ , и функција течења постаје неприкладна.

## 5.2 Скупљање бетона

Паралелно са течењем бетона под дуготрајним оптерећењем одвија се и процес скупљања. У прорачунском смислу, скупљање се описује дилатацијом скупљања  $\varepsilon_{sk}(t)$  (или  $\varepsilon_{cs}(t)$ ), чија величина зависи од сличних параметара као и коефицијент течења  $\varphi$ , али је независна од величине оптерећења.

Када се конструкција оптерети сталним дуготрајним теретом у тренутку  $t_0$ , бетон добија почетни дуготрајни напон  $\sigma(t_0)$ . Напон је резултат деловања оптерећења и формиране променљиве крутости дуж елемената као последице образовања прслина, када се прекорачи чврстоћа на затезање. Иако се оптерећење одржава константним, напон се мења услед прерасподеле утицаја у систему. У статички одређеним системима, прерасподела се одвија на нивоу пресека – **прерасподела напона** између бетона и арматуре, као последица промене дилатација бетона услед течења и скупљања у спрегнутом систему бетон – арматура.

У статички неодређеним системима, поред прерасподеле напона у пресецима, долази и до промене пресечних сила. Промене кривине услед прираштаја дилатација изазваних течењем и скупљањем бетона, као и ефеката дуготрајног оптерећења на спој бетон – арматура у зонама са прслинама, у већини случајева нису компатибилне са спреченим померањима услед “сувишних” ослонаца (ослонаца статичке неодређености). Настају допунске (самоуравнотежене) реактивне силе које за последицу имају промену првобитних утицаја у пресецима конструкције, односно врши се **и прерасподела утицаја**. На нивоу пресека то такође производи промену напона у бетону и арматури.

Напони у бетону и арматури се, дакле, мењају током времена и при константном дуготрајном оптерећењу. Уколико је спољно оптерећење константно, промене напона у бетону и арматури одвијају се постепено, сагласно

развоју скупљања и течења. Када се функција течења (5.7) испише у инкременталном (диференцијалном) облику, и потом интегралом, може се добити позната релација ААЕМ методе која повезује укупну дилатацију у бетону  $\varepsilon(t)$  и новонастали напон  $\sigma(t)$  у тренутку  $t$ :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E_b(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{E_b(t_0)} [1 + \chi(t, t_0)\varphi(t, t_0)] + \varepsilon_{sk}(t) \quad (5.9)$$

где је  $\chi(t, t_0)$  коефицијент старења чија вредност у себи укључује закон промене - преласка напона  $\sigma(t_0)$  у  $\sigma(t)$ , [33]. Диференцијалним инкрементима напона  $\Delta\sigma(\tau)$ , који преводе  $\sigma(t_0)$  у  $\sigma(t)$ , одговарају коефицијенти течења  $\varphi(t, \tau)$ , који су описани одређеним законом у коме је сада променљива старост  $t$  при настанку напона  $\Delta\sigma(\tau)$ . Анализе су показале да при монотоним историјама оптерећења са умереним и континуалним променама напона, коефицијент старења  $\chi(t_1, t_0)$  углавном има вредности у уском опсегу од 0,75 до 0,85, те се за практичне прорачуне деформација под константним дуготрајним оптерећењем вредност може фиксирати на  $\chi(t, t_0) \approx 0,8$ . Сам кориговани ефективни модул  $E_b^*(t, t_0)$  је:

$$E_b^*(t, t_0) = \frac{E_b(t_0)}{1 + \chi(t, t_0)\varphi(t, t_0)}, \quad (5.10)$$

а релација (5.9) се пише:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E_b(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{E_b^*} + \varepsilon_{sk}(t). \quad (5.11)$$

Метода ефективног модула (ЕММ), коју предлаже и Еврокод 2 за ригорозни прорачун деформација, може се посматрати као поједностављена варијанта ААЕМ методе у којој је усвојено  $\chi(t, t_0) = 1$ . Кориговани ефективни модул постаје „обични” ефективни модул  $E_{b,eff}$ :

$$E_{b,eff}(t, t_0) = \frac{E_b(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)}, \quad (5.12)$$

а релација (5.9) се пише:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_b(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] + \varepsilon_{sk}(t) = \frac{\sigma(t)}{E_{b,eff}} + \varepsilon_{sk}(t). \quad (5.13)$$

Ова апроксимација у ствари значи да се узима да промена напона  $\sigma(t)$  -  $\sigma(t_0)$  не настаје постепено током временског интервала  $(t - t_0)$ , већ се дилатација израчунава као да промена постоји у целом интервалу, то јест од самог почетка  $(t_0)$ . С обзиром да промене напона услед прерасподеле углавном нису велике, грешка при оваквом израчунавању дилатација је у већини случајева прихватљива. Разлике временских угиба добијених прорачуном *ААЕМ* и *ЕМ* методом приказане су у Прилогу 2 у поглављу 13.2..

### 5.3 Прорачуни ефеката у времену у тези

Иако софтвер који је написан за потребе анализа у овој тези ради *ААЕМ* методом, **прорачуни у тези су урађени ЕМ методом** (стављајући да је  $\chi(t, t_0) = 1$ ), како би се добила пуна сагласност са изабраним нормативом – Еврокодом 2. Прорачуни се спроводе у већем броју еквидистантних пресека дуж носача, израчунавањем напона, дилатација и кривина. Током прорачуна проверава се напон на затегнутој страни пресека и пореди са претходно дефинисаном чврстоћом на затезање. Користе се уобичајене основне претпоставке за прорачун пресека:

- Уколико напон затезања не превазилази чврстоћу на затезање, прорачун пресека се спроводи по моделу без прслине (стање I);
- Уколико прорачун хомогеног пресека покаже напон затезања већи од чврстоће, прорачун се понавља по моделу пресека са прслином (стање II). Усваја се да бетон у зони растезања нема напон (занемарење напона затезања у бетону за пресеке са прслином);
- Течење је линеарно и суперпозиција ефеката је могућа;
- Пресеци остају равни и након оптерећења;
- Дијаграм напона у бетону је линеаран;
- Понашање арматуре (челика) је потпуно линеарно еластично, са константним модулом  $E_a$ ;
- Спој бетона и арматуре је идеалан, односно дилатације су компатибилне.

У погледу практичне реализације прорачуна, постоји неколико момената које би требало истаћи.

Најзначајнија одредница је да се прорачун спроводи за једно, дуготрајно (квази-стално) оптерећење, које се наноси у тренутку  $t_0$ , а чији се ефекти посматрају у времену  $t$  (уобичајено  $t \rightarrow \infty$ ). *ААЕММ* је инкрементална метода и прорачун ефеката у времену  $t$  се састоји од прорачуна:

- стања након оптерећивања – ( $t_0$ );
- прираштаја (промене) величина у интервалу - ( $t - t_0$ );
- коначног стања – ( $t$ ), као суме почетног стања ( $t_0$ ) и прираштаја и ( $t - t_0$ ).

С обзиром да анализа промене током времена показује померање неутралне линије напона ка затегнутој страни пресека, настаје проблем код прорачуна пресека са прслином (стање II), у погледу одређивања површине коначно (у  $t$ ) напонски активног (притиснутог) бетона. Сам проблем није математички захтеван, када се прорачун спроводи уз помоћ рачунара. Питање је више принципијелно: да ли усвојити да се нови (већ усвојен линеарни) дијаграм напона у бетону простире до новог положаја неутралне линије (у  $t$ ), залазећи у претходно затегнуту област – односно, да ли се већ настала прслина “скраћује” (затвара на делу уз неутралну линију у  $t_0$ ), или учинити нову претпоставку. Физички, “активирање” бетона испод првобитне неутралне линије (у  $t_0$ ) није нереално: он је при прорачуну занемарен, али непосредно уз неутралну линију затезање не прелази чврстоћу и бетон није напрсноу – није потребно “затварање” прслине за повећање активног притиснутог дела пресека у интервалу ( $t - t_0$ ). Међутим, оваква промена (увећање активног пресека) доводи до нове (геометријске) нелинеарности проблема. У систему се појављују нови елементи који примају утицаје, а који су претходно били неактивни, што, у суштини омета примену принципа суперпозиције *ААЕМ* методе заснованог на коначним интервалима: пресек се континуално мења током интервала ( $t - t_0$ ). Овај проблем се може за практичне прорачуне превазићи на више начина, од којих су најчешћа два једноставна. Први, да се формира активни притиснути пресек у  $t$  до новог положаја неутралне линије и даље врши суперпозиција са оваквим пресеком (у наредним временским интервалима), упркос формалној противречности. У нумеричком погледу “штета” је мала: напони на новоуведеном делу пресека су мали и близу тежишта пресека – ефекат нелинеарности који не дозвољава суперпозицију је симболичан.

Управо на малом ефекту напона на овом делу пресека заснива се други начин: задржава се непроменљиви активни притиснути пресек у интервалу од  $t_0$  до  $t^-$  (у  $t^+$  може настати промена активног пресека услед нових оптерећења). Овај приступ препоручује и *ACI 435* [32], јер суштински не ствара препреке за суперпозицију. Ефекти овакве апроксимације такође су мали (Гали, [36]). ***Константан активни притиснути део пресека са прслином кроз време усвојен је као принцип прорачуна у овој тези.***

*ЕММ* у ситуацији са једним дуготрајним оптерећењем, за одређивање стања у  $t_1$ , практично не захтева рачунање стања у  $t_0$  (што је видљиво из релације (5.13)), осим у мери која је потребна да се утврди модел пресека - стање I или стање II. Тиме је прорачун пресека у  $t$ , за ефекте течења бетона у свему еквивалентан обичној еластичној анализи, с тим да бетон у композитном пресеку учествује са ефективним модулом  $E_{b,eff}$ . Када се овакав приступ прорачуна формално спроводи, а изоставља прорачун у  $t_0$ , активни притиснути део пресека са прслином у  $t$  у суштини одговара напред објашњеном првом начину савлађивања допунске геометријске нелинеарности. Уколико се одреди стање у  $t_0$ , а потом задржи непромењен притиснути део пресека са прслином, долази се до другог начина. Као што је већ напред поменуто, у прорачуни у тези су урађени *ЕМ* методом, са задржавањем активног притиснутог пресека из  $t_0$ .

Аутор тези сматра да је то методолошки исправнији приступ, нарочито када се у прорачун укључе ефекти скупљања бетона што је коментарисано у наставку. Саме нумеричке разлике између два приступа у већини реалних ситуација (уобичајених вредности инпута) нису значајне.

Коректно израчунавање ефеката истовременог дејства течења и скупљања бетона није једноставно. Скупљање изазива унутрашњу прераспodelу напона (прераспodelу на нивоу пресека), а код статички неодеређених система и промену пресечних сила (прераспodelу утицаја). Долази до (прорачунског) померања неутралне линије напона и то, као што је описано напред код течења, континуално у времену. Ова геометријска нелинеарност има исти смисао као и објашњена нова нелинеарност код течења. Проблем се додатно методолошки усложњава код прорачуна пресека са прслином (стање II). Скупљање код пресека са арматуром у зони притиснутог бетона изазива напоне затезања, који остају



након суперпозиције са утицајима од оптерећења и течења, бар у зони непосредно око неутралне линије напона (чији је положај дефинисан само на основу оптерећења и утицаја течења). То захтева допунско итерирање и редефинисање положаја неутралне линије напона, уколико се усвоји принцип да она увек “показује” нулу напона и границу (напонски активног притиснутог) бетона. Код софтвера који спроводе нелинеарну анализу инкременталним поступцима ово не чини никакву суштинску разлику у односу на ситуацију када се разматра само утицај течења бетона, јер се прорачун ионако спроводи у итерацијама.

За практичне прорачуне, “унакрсно” итерирање величине притиснуте зоне пресека са прслином из утицаја течења и утицаја скупљања чини се превише захтевним. *CEB* је у билтену 158 [5] сугерисао поједностављење које се састоји у независном разматрању утицаја скупљања и течења. Притом се (активни) притиснути део пресека са прслином одређује на само основу оптерећења и утицаја течења, а утицаји услед скупљања се одређују принципијелно на исти начин и за стање I и за стање II, *AAEM* методом. Еврокод 2 је задржао исти принцип, с тим да сугерише *EM* метод.

Независно да ли се користи *AAEMM* или *EMM*, применом овог принципа добиће се, код прорачуна пресека са притиснутом арматуром у стању II, напони затезања услед сумарног ефекта оптерећења, течења и скупљања у зони уз неутралну линију напона, тачније у “притиснутој” зони. Самим тим се компромитује претходно прокламовани, код прорачуна ефеката услед течења, принцип промене активног притиснутог пресека у стању II у складу са померањем неутралне линије услед течења. Задржавање активног бетонског пресека у стању II на нивоу рачунске притиснуте зоне након доношења оптерећења (у  $t_0$ ) при прорачуну утицаја и од течења и од скупљања, представља по мишљењу аутора ове тезе методолошки исправнији приступ, који је и примењен за прорачуне у тези. Исти принцип прокламује и *ACI 435* [32]. Већ је напоменуто да у нумеричком смислу нема значајнијих разлика.

#### 5.4 Поступак за разграничење стања I и II примењен у тези

Модел Еврокода 2 за израчунавање кривине услед дуготрајних дејстава, приказан у поглављу 4.1, нема доследан теоријски одговор на проблем срачунавања носача са прслинама.

Одређивање средње кривине, исказано релацијама (4.1-3), не може ни у једној варијанти прорачуна да се примени без допунских апроксимација, чак ни при константном (дуготрајном, квази-сталном) оптерећењу. Варијанте се у претходној реченици односе на примену релације (4.1) на директно израчунавање угиба или на израчунавање и интеграцију кривине.

Основни разлог лежи у дефиницији интерполационог коефицијента  $\zeta$  (4.1a) за одређивање средње кривине. Коефицијент  $\beta$  који се користи при његовом израчунавању има вредност 1 при оптерећивању ( $t_0$ ). Током времена, при одређивању ефеката услед дуготрајних (или много пута поновљених) оптерећења,  $\beta$  има вредност 0,5. Основни циљ смањења вредности коефицијента  $\beta$  јесте у ствари редукација рачунске вредности момента појаве прслина  $M_{cr}$  [7]:

$$\zeta = 1 - \beta \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2 = 1 - \frac{(\sqrt{\beta} M_{cr})^2}{M^2} = 1 - \frac{M_{cr,red}^2}{M^2} \quad (5.14)$$

У стварности, ефекат спречених деформација скупљања, на нивоу пресека услед уграђене арматуре, и за елемент као целину, услед укрућења за хоризонталне утицаје (армиранобетонских зидова, на пример) јесте настајање допунски напона затезања, који нису постојали при оптерећењу. Ови напони затезања, заједно са напонима затезања услед оптерећења иницирају настајање нових прслина, тачније проширивање зона са прслинама (на местима где интезитет напона затезања услед оптерећења, при оптерећивању, сам није био довољан за отварање прслина).

Овај, изворни, смисао коефицијента  $\beta$  се веома ретко спомиње у инструкцијама за примену. Последица је неисправно третирање стања носача (I или II) у времену, услед дуготрајног оптерећења: активни момент  $M$  треба поредити са  $M_{cr,red}$ , а не са  $M_{cr}$ , што се често (погрешно) ради.

Пре-дефинисана вредност коефицијента  $\beta$  од 0,5 за дуготрајна дејства у суштини уводи „редукцију“ чврстоће на затезање од  $(1 - \sqrt{0,5}) \times 100 \% = 30 \%$ .

Уколико се имају у виду најчешће вредности чврстоће на затезање при оптерећивању (2 – 3  $MPa$ ), као и очекивани пораст (развој) чврстоће на затезање, ова редуција, за дуготрајна стања, износи око 1  $MPa$ .

Анализа армиранобетонских пресека без прслина (на пример *ААЕМ* методом) само на утицаје услед скупљања показује да се напон затезања од око 1  $MPa$  добија већ при врло умереним процентима армирања (армиранобетонске плоче, [13], [18]) и умереним дилатацијама скупљања, **само услед унутрашње спречених деформација**. Другим речима, **постојање елемената који ограничавају слободно скупљање (спољашње спречене деформације) изискује и већу редуцију  $M_{cr}$  од оне коју обезбеђује прописани коефицијент  $\beta = 0,5$** .

Сумарно, претходно значи да се, чак и при непроменљивом дијаграму момената савијања (квази-стално оптерећење, статички одређени носач), слика прслина мења (проширује) кроз време. С друге стране, протокол за израчунавање кривине током времена (дефинисан са (4.1-3), или, детаљније, са (4.15-18)) не предвиђа могућност да пресек током времена пређе из стања I у стање II. То значи да би, за коректно третирање прорачуна *ЕМ* методом (или *ААЕММ*), било потребно увести временске кораке за симулирање развоја прслина, током којих пресеци не би мењали стање – промена би се вршила на прелазу између временских инкремената. Ово не значи ништа друго до прелазак на *step-by-step* прорачун, који би сваки пут укључивао и, код статички неодређених система, прераспделу утицаја услед промене крутости. Притом би временски инкременти требало да буду добро усклађени са „темпом“ развоја затезања услед скупљања, како би се „ухватили“ тренуци настајања нових прслина. Ово није једноставно предвидети, тако да такође захтева итерирање.

Осим што се овако губи основна предност *ЕММ* или *ААЕММ*, као крупноинкременталне методе, проблем се поново доводи на ниво сложености који, као што је објашњено у првом поглављу, није подесан за практичне или масовне прорачуне. Стога су неопходне допунске апроксимације. Могуће су разноврсне апроксимације, од којих се овде наводе две најједноставније.

Прва варијанта: Успостави се почетно ( $t_0$ ) стање момената, прслина и њима одговарајућих почетних кривина (крутости), према одговарајућој вредности чврстоће на затезање  $f_{cm,fl}(t_0)$ . Израчунају се кривине стања I и стања II у времену

$t$ . Код статички неодређених система, израчуна се потребни момент временске прерасподеле (види поглавље 3.11.). Момент прерасподеле се израчунава из услова да збирне кривине услед почетних момената и услед њега задовољавају спреченост померања на ослонцима статичке неодређености. Збирне кривине одређују се тако што се установи (проширена) слика прслина која одговара  $\sqrt{\beta} \times f_{cm,fl}(t_0)$ , а потом и кривине према релацији (4.1). Коефицијент интерполације  $\zeta$  се израчунава према (5.14), користећи коначни дијаграм момената. Суштина овог приступа јесте да се формира коректно почетно стање ( $t_0$ ), као и да се према њему израчунају адекватни прираштаји кривина у времену. Апроксимација се састоји у томе да се зонама које су у  $t_0$  испуњавале услов

$$M_{cr, red} \leq M < M_{cr} \quad (5.15)$$

једнократно, ***на крају посматраног интервала*** ( $t, t_0$ ) ***промени модел крутости*** из стања I у стање II.

Добра страна прве варијанте састоји се у томе што, у случају статички неодређених система, коректно процењује потребни момент почетне прерасподеле ( $t_0$ , види поглавље 3.8.), уз умерену апроксимацију за одређивање потребног момента временске прерасподеле (види поглавље 3.11). Такође, израчунате вредности почетних угиба су коректне.

Друга варијанта: Успоставља се директно коначно стање момената, прслина и њима одговарајућих коначних кривина (крутости), према редукованој вредности чврстоће на затезање  $f_{cm,fl,red}$ . Овим је слика прслина одмах (вештачки, у  $t_0$ ) проширена, и самим тиме стабилизована. Код статички неодређених система притом се израчунава потребни момент временске прерасподеле. Коефицијент интерполације  $\zeta$  се поново израчунава према (5.14), користећи коначни дијаграм момената. Суштина овог приступа јесте да се формира само коначно стање ( $t$ ). Апроксимација се састоји у томе да се зонама које су у  $t_0$  испуњавале услов (5.15) одмах, ***на почетку посматраног интервала*** ( $t, t_0$ ), ***промени модел крутости*** из стања I у стање II.

Добра страна друге варијанте састоји се у томе што, осим компактности прорачуна, омогућава избор нивоа редукције чврстоће на затезање  $f_{cm,fl,red}$ : напред објашњена пре-дефинисана редукција од 30%, садржана у коефицијенту  $\beta$  није

довољна у ситуацијама са великим скупљањем или при постојању конструктивно спречених померања (у првој варијанти „инпут“ је  $f_{ctm,fl}(t_0)$  и уколико се он редукује анулирају се њена наведене предности) Слабости друге варијанте састоје се у томе да се не добија коректно почетно стање ( $t_0$ ), као ни адекватни моменти почетне и временске прерасподеле, у случају статички неодређених система.

У истраживањима спроведеним током рада на овој тези анализиране су обе варијанте. Коришћени софтвер урађен је тако да подржава прву варијанту. У нумеричком смислу, друга варијанта се може извести из прве модификацијом инпута:

$$f_{ctm,fl}(t_0) \rightarrow f_{ctm,fl,red} \text{ и } \beta(t) = 0,5 \rightarrow \beta(t) = 1$$

Оно што је посебно значајно јесте да обе варијанте дају нумерички блиске вредности коначних угиба  $u(t)$ , када се у другој варијанти задржи пре-дефинисана редукација садржана у  $\beta(t) = 0,5$ , која аутоматски функционише у првој варијанти (разлике у резултатима анализираних су у Прилогу 4 у поглављу 13.4). Ово, пре свега, говори да су обе варијанте апроксимирања добро засноване за поступак израчунавања угиба нумеричком интеграцијом кривине. Тиме се отвара могућност за коришћење предности друге варијанте која се састоји у слободном избору прикладне вредности редуковане чврстоће на затезање савијањем  $f_{ctm,fl,red}$ .

У анализама у тези се, након прорачуна напона и дилатација у изабраним еквидистантним пресецима (појединачни распон је подељен на 50 једнаких делова), израчунава одговарајућа кривина пресека  $\kappa$ , по моделу за стање I ( $\kappa_I$ ) или стање II ( $\kappa_{II}$ ), зависно од величине напона на затегнутој ивици. У случају стања I, ово је репрезентативна кривина за цео сегмент који се налази око пресека (лево и десно по пола дужине од 1/50 распона). За пресеке који су у стању II, репрезентативна кривина одређује се интерполирањем између кривина за стање I и стање II, према моделу који је прокламован још у Моделу код МС 1990 [3], а задржан и у Еврокоду 2:

$$\kappa = \zeta \kappa_{II} + (1 - \zeta) \kappa_I \tag{5.14}$$

где је  $\zeta$  коефицијент интерполације, детаљније објашњен у поглављу 4.1.

Код статички неодређених система прорачун кривина је итеративан и за почетно ( $t_0$ ) и за коначно стање ( $t$ ), како би се задовољили услови на местима

ослонаца статичке неодређености. Полазни дијаграм момента савијања у  $t_0$ , добијен прорачуном статичке неодређености са крутостима бетонских бруто пресека, коригује се изменом реакција ради задовољења контурних услова. За задовољење контурних услова са кривинама измењеним у интервалу  $(t - t_0)$ , поново се врши измена реакција и пресечних утицаја. Ова потоња измена у суштини представља прераспodelу утицаја током времена услед ефеката течења и скупљања. Начин спровођења корекције почетног стања и прераспodelе у времену детаљније је објашњен у поглављу 3.10 и формулама приказаним у поглављу 7.

## 6 ОПЕРАЦИОНАЛИЗАЦИЈА ПРОРАЧУНА

У овом поглављу дат је резиме претходних пет поглавља. Укратко се образлаже избрани начин решавања проблема прорачуна угиба, описује модел прорачуна и сумирају (побрајају) директни параметри модела.

### 6.1 Комплексност проблема и начин решавања

Величина угиба армиранобетонске конструкције зависи од великог броја параметара. Они су побројани у другом и коментарисани у трећем поглављу. Притом, неки од њих, као што су величина деформације течења, чврстоћа на затезање бетона при оптерећивању и величина скупљања имају знатно већи утицај на величину деформације савијаних елемената од осталих параметара. Постојећа експериментална изучавања (мерења у контролисаним условима) величине ових параметара практично увек показују расипања резултата мерења која се исказују и десетинама процената. У случају реалних конструкција, варијабилност историје оптерећења и услова средине проширује границе варирања вредности ових параметара. Из тога је могуће извући неколико рационалних закључака.

Прво, поуздано предвиђање угиба реалних конструкција у фази пројектовања је тешко оствариво услед расипања вредности најважнијих инпута.

Друго, требало би имати у виду да су армиранобетонске конструкције најчешће многоструко статички неодређене. Чак и када су инпути прецизније сагледани (што је практично могуће само у експерименталним условима) ефикасно предвиђање угиба захтева сложеније поступке нелинеарне анализе који ће обухватити настајање прслина и прерасподелу пресечних сила услед промене крутости при настајању прслина и прираста кривина због скупљања и течења бетона, за дефинисану историју оптерећења.

Треће, тако сложени проблеми морају се решавати применом комплексних софтвера који могу да спроводе нелинеарне анализе, чиме у први план долази питање моделирања проблема: идеализација конструкције и избор модела за материјале. Овакви софтвери су комерцијално доступни, али њихово коришћење захтева знатно обимније и другачије теоријско образовање од оног које је потребно за успешно инжењерско пројектовање. Иако произвођачи софтвера

најчешће истичу да су они једноставни за коришћење, научни истраживачи знају да се „подесним“ моделирањем може добити практично било који, унапред жељени, резултат за многе појаве које нису у домену простих услова равнотеже.

Четврто, ако су претходни проблеми савладани, што би значило да је конструкција у контролисаним условима, параметри материјала и историја оптерећења добро сагледани а софтвер правилно употребљен, утицај распона вредности за инпуте се може сагледати многоструким израчунавањем за разне комбинације вредности појединачних параметара.

Свеукупно, 1 – 4 значи да би рад пројектанта, који би требало уложити за предвиђање угиба, обимом и сложеностју превазишао рад који је потребан за остале елементе пројектовања. Са тог аспекта, сврсисходније је, неким једноставнијим поступком, проверити и ограничити деформабилност конструкције.

***Избор прорачунског угиба под квазисталним оптерећењем за меру деформабилности конструкције представља једно од оптималних решења: могуће је увести утицај скоро свих релевантних параметара и појава, уз прихватљиву рачунску сложеност.***

## 6.2 Опис модела за прорачун угиба који се користи у тези

Поступком су обухваћени линијски армиранобетонски носачи и плоче које преносе оптерећење у једном правцу изложени савијању без нормалне силе.

Анализирају се следећи конструктивни системи (види и поглавље 3.7.):

- проста греда;
- греда слободно ослоњена на једном и укљештена на другом крају („G“ штап);
- греда укљештена оба краја („K“ штап);
- греда слободно ослоњена на једном и еластично укљештена на другом крају (крајње поље континуалног носача неједнаких распона) и
- греда еластично укљештена на оба краја (унутрашње поље континуалног носача неједнаких распона).

Угиб се израчунава за носаче са правоугаоним попречним пресеком, за једнакоподељено дуготрајно оптерећење.



Примењује се ригорозни поступак Еврокода 2 заснован на интеграљењу кривине дуж распона. Кривина се израчунава применом ефективног модула за бетон  $E_{b,eff}$  (ЕММ):

$$E_{b,eff} = \frac{E_b}{1 + \varphi}. \quad (6.1)$$

То је приступ који поставио Модел код *МС* 1990 [3], а задржао и Модел код *МС* 2010 [4]. Када се урачунају ефекти (унутрашње) прерасподеле напона између бетона и арматуре, на нивоу пресека, која започиње заједно са почетком временских деформација бетона, стриктна примена методе ефективног модула (ЕММ) у ствари води оперативном прорачуну методом коригованог ефективног модула  $E_b^*$  (ААЕММ), као крупноинкременталном поступку:

$$E_b^* = \frac{E_b}{1 + \chi\varphi}. \quad (6.2)$$

Управо је прорачун применом ААЕМ методе инаугурисан у *CEB Manual*-у [5], са директним инструкцијама за бездимензионе коефицијенте за прорачун кривине и са дијаграмима за одређивање припадајућег коефицијента старења  $\chi$ . Овај поступак уведен је у праксу на територији бивше Југославије појавом Приручника [22], с тим да је препоручена употреба уобичајене средње вредности коефицијента старења  $\chi = 0,8$ .

С друге стране, клаузуле из поглавља 7.4 Еврокода 2 сугеришу, а инструкције из литературе [37] или примери презентирани у [7] у коментарима Модел кода *МС* 1990, указују да се прорачун спроводи уз апроксимацију објашњену у поглављу 5.2 уз образац (5.13).

У тим прорачунима бетон се, за дуготрајна оптерећења и за утицаје изазване скупљањем при прорачуну карактеристика композитног пресека урачунава са ефективним модулом  $E_{b,eff}$ , а даљи прорачун се проводи уобичајеним методама техничке теорије еластичности. У теоријском смислу, то је поједностављена (апроксимативна) примена методе ефективног модула, јер њена доследна примена на (дужем) коначном интервалу води у ААЕММ. У практичном смислу, то означава и примену ААЕМ методе са апроксимацијом  $\chi = 1,0$ . Разлике нумеричких резултата, добијених применом овако поједностављеног поступка и

(коректном) *ААЕМ* методом, нису велике. Коментар о разликама у величини резултата дат је у Прилогу 2 у поглављу 13.2.

Софтвер, написан за потребе анализе која се спроводи у тези, може да ради по *ААЕМ* методи. Анализе у тези су (намерно) спроведене у складу са апроксимативним инструкцијама Еврокода 2, *ЕМ* методом.

При прорачуну кривина (и, тиме, угиба) урачунато је и следеће:

- промена крутости услед настајања прслина (види поглавља 3.6. и 4.1.);
- прерасподела момената савијања у статички неодређеним системима услед промене крутости изазване настајањем прслина (види погл. 3.8.);
- прерасподела момената савијања у статички неодређеним системима услед прираштаја кривина изазваних скупљањем и течењем бетона и евентуално настајање нових прслина као последица промене момената у пресецима (види поглавље 3.11.).

***Модел има укупно 13 директних параметара, чија се вредност или значење слободно бирају.*** Дванаест директних параметара су нумеричке величине. Тринаести параметар је ненумерички – статички систем носача.

***Почетни*** директни параметри прорачуна су:

1. распон  $L$ , види поглавље 3.1;
2. ширина бетонског пресека  $b$ , види поглавље 3.1;
3. висина бетонског пресека  $d$ , види поглавље 3.1;
4. модул еластичности бетона  $E_b$  (или  $E_c$ ), види поглавље 3.2;
5. модул еластичности арматуре  $E_a$ , види поглавље 3.2;
6. чврстоћа на затезање бетона савијањем  $f_{bzs}$  (или  $f_{ctm,fl}$ ), види погл. 3.3;
7. површина затегнуте арматуре  $A_{a1}$ , види поглавље 3.4;
8. одстојање затегнуте арматуре од затегнуте ивице пресека  $a_1 = a$ , види поглавље 3.4;
9. површина притиснуте арматуре  $A_{a2}$  и њено одстојање од притиснуте ивице пресека  $a_2$  (усвојено је да је  $a_2 \approx a_1 = a$ ), види поглавље 3.4;
10. величина (квази-сталног) дуготрајног оптерећења, изражена преко напона у затегнутој арматури  $\sigma_{a1}$  у пресеку са највећим моментом у пољу, види поглавље 3.5;
11. величина коефицијента течења бетона  $\varphi$ , види поглавље 3.9;

12. величина дилатације скупљања бетона  $\varepsilon_{sk}$  ( $\varepsilon_{cs}$ ) види поглавље 3.10 и
13. статички систем носача - *sys*, види поглавље 3.7.

Након трансформације дела прорачунског модела у бездимензиону форму настају нови (директни) параметри модела, *који у себи садрже све претходне инпуте. Има их укупно 11 и могу се поделити у две групе: бездимензиони параметри (карактеристике) и димензионе величине. Од изузетног значаја је да је читав нелинеарни део модела преведен у бездимензиону форму: димензионе величине остају као прости мултипликатори коначног резултата нелинеарног бездимензионог дела модела и немају утицаја на корелациону параметарску анализу.*

*Димензионе величине су (укупно 4 од 11):*

1. распон  $L$ ;
2. модул еластичности арматуре  $E_a$ ;
3. статичка висина пресека  $h = d - a$ ;
4. напон у затегнутој арматури  $\sigma_{a1}$  у пресеку са највећим моментом у пољу, од оптерећења од кога се рачуна угиб, види поглавље 3.5.

*Трансформисани директни бездимензиони параметри нелинеарног дела модела су (7 параметара):*

1. статички систем - *sys*;
2. однос површина притиснуте и затегнуте арматуре  $A_{a2}/A_{a1}$ ;
3. коефицијент положаја арматуре  $\alpha = a/d$ ;
4. коефицијент течења бетона  $\varphi$ ;
5. дилатација скупљања бетона  $\varepsilon_{sk}$ ;
6.  $\rho = (E_a/E_b) \times [A_{a1}/(b \times h)] = n \times A_{a1}/(b \times h)$  - пондерисани коефицијент армирања затегнутом арматуром ( $n = E_a/E_b$ ) – сложени параметар и
7.  $C = (f_{bzsml}/E_b)/(\sigma_{a1}/E_a)$  - *нови (сложени) бездимензиони параметар чија се употреба промовише у тези.* (6.3)

Пондерисани коефицијент армирања  $\rho$  се већ дуго користи у литератури. *Нови бездимензиони параметар  $C$ , заједно са коефицијентом  $\rho$ , смањује број директних параметара нелинеарног дела модела за чак 6 параметара.  $C$  и  $\rho$  у нелинеарном језгру проблема замењују 8 димензионих величина:*

$$E_b, E_a, f_{bzsml}, \sigma_{a1}, A_{a1}, L, b \text{ и } h.$$

Притом, коефицијент армирања сам традиционално замењује три параметра -  $A_{a1}$ ,  $b$  и  $h$ . Коефицијент  $C$ , заједно са пондерисаним обликом коефицијента армирања  $\rho$ , замењује следећих 5 параметра -  $L$ ,  $E_b$ ,  $E_a$ ,  $f_{bzs}$  и  $\sigma_{a1}$ . Поступак „замене“, остварен трансформацијом у бездимензиони облик, приказан је у поглављу 7.  $C$  и  $\rho$  су у нелинеарном делу „елиминисали“ (нето):

$$8 \text{ (побројаних)} - 2 \text{ (они сами, додати)} = 6 \text{ параметара.}$$

Четири параметра ( $L$ ,  $E_a$ ,  $\sigma_{a1}$  и  $h$ ) прешла су у димензиони – линеарни део, па је проблем укупно редукован (нето) на  $13 - 6 + 4 = 11$  параметара. **Међутим, нелинеарно језгро проблема битно је компактирано – са почетних 13 параметара на преосталих 7, што га чини подесним за изучавање: број међусобних корелација преосталих параметара знатно је редукован.**

**Овим се остварује први од циљева тезе: формулисање сложених параметара који поједностављују прорачун. Важно је напоменути да у овим трансформацијама нису чињене апроксимације: сви почетни параметри су задржали свој пуни нумерички утицај.**

Димензиони мултипликатори ( $L$ ,  $E_a$ ,  $\sigma_a$  и  $h$ ) немају утицаја на корелације. Они само формирају коначни димензиони резултат – рачунски угиб.

Иако компактирано, нелинеарно језгро још увек садржи велики број параметара – 7. Даље аналитичко (без апроксимација) компактирање (вероватно) није могуће. У тези је спроведена анализа корелација, разматрањем по неколико реперезентативних вредности за параметре.

**Генерално, анализирано је:**

$$5(sys) \times 4(A_{a2}/A_{a1}) \times 3(\alpha) \times 3(\varphi) \times 3(\varepsilon_{sh}) \times 5(C) =$$

**2700 комбинација параметара за успостављање корелација**, како би се сви параметри задржали у прорачуну. Пондерисани коефицијент армирања  $\rho$  представљао је основну континуалну променљиву. Пет разматраних статичких система ( $sys$ ) наведено је у поглављу 3.5. Четири односа површина притиснуте и затегнуте арматуре су  $A_{a2}/A_{a1} = 0, 0,25, 0,5$  и  $1,0$ . Вредности за  $\alpha$  су  $0,05, 0,10$  и  $0,20$ . Анализиран је већи број вредности коефицијента течења у различитим варијантама осталих параметара. Систематично у односима са осталим параметрима посматране су вредности параметрима  $\varphi = 1,0, 2,0$  и  $3,0$ . Тестови резултата који укључују скупљање урађени су за вредности  $\varepsilon_{sk} = 0,3, 0,6$  и  $0,9 \%$ .

Анализе су укључивале такође и већи број вредности параметра  $C$ , с тим да су систематично посматране вредности  $C = 0,05, 0,07, 0,10, 0,15$  и  $0,20$ .

### 6.3 Успостављање корелација

Резултативност рада на успостављању корелација је, због веома великог броја комбинација параметара, битно условљена начином на који се проблем решава. Поступак који је примењен у тези ослоњен је у великој мери на ефикасност употребљених бездимензионих параметара: осим већ поменутих – пондерисаног коефицијента армирања  $\rho$  и новоуведеног коефицијента  $C$  – у наставку су представљена још четири нова оригинална сложена бездимензиона параметра. То су:

- *гранични пондерисани коефицијент армирања  $\rho_C$ ,*
- *нормирани пондерисани коефицијент армирања  $\tilde{\rho}$ ,*
- *нормирано (бездимензионо) садејство затегнутог бетона  $TS$ , и*
- *$\tilde{\omega}_{sk}$  бездимензиони коефицијент повећања угиба услед скупљања.*

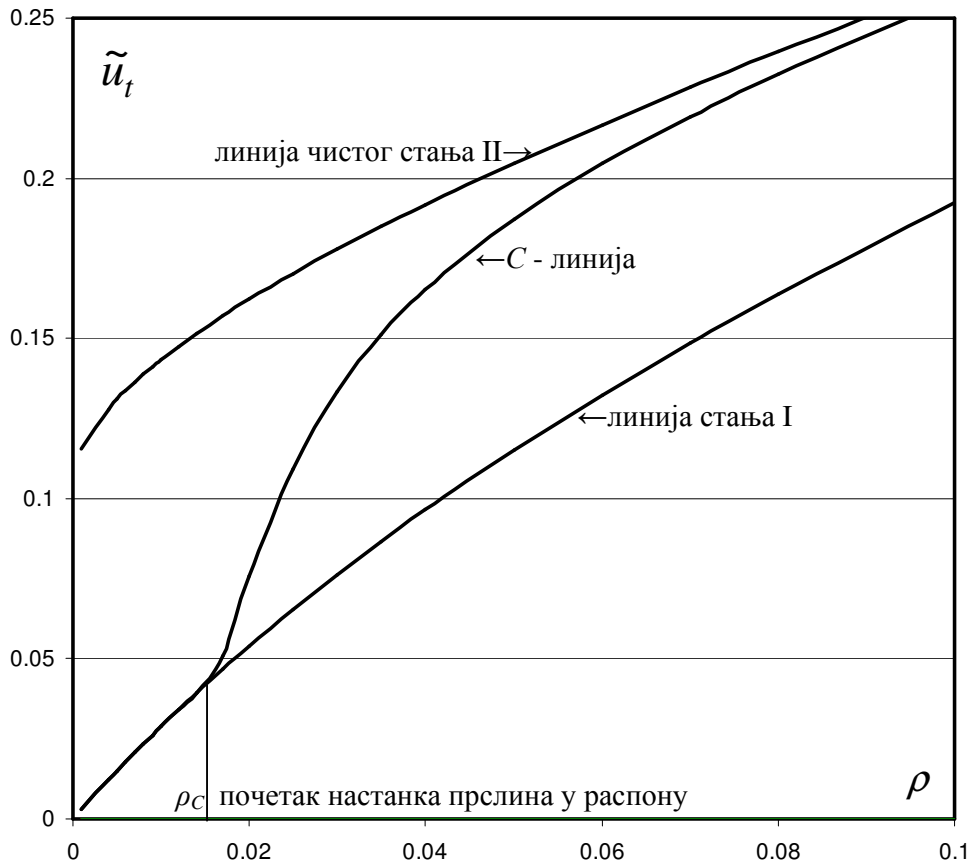
*Са новоуведеним бездимензионим параметром  $C$  могуће је* (заједно са коефицијентом армирања  $\rho$  и преосталим геометријским карактеристикама  $L, h, b, \alpha, A_{a2}/A_{a1}$ ), не само описати геометријске особине носача, већ и **утврдити постојање прлина и разграничити зоне са прлинама, без експлицитног дефинисања  $\sigma_{a1}$  и  $f_{bzsm}$**  (потребан је само њихов однос, који је садржан у  $C$ , у бездимензионом облику; поступак је приказан у седмом поглављу). С обзиром да је напон у затегнутој арматури изабран за репрезента оптерећења у моделу, **за неку вредност  $\sigma_{a1}$ , оптерећење** (величина момената савијања дуж носача) **је пропорционално коефицијенту  $\rho$ , при одређеној вредности  $C$ .**

То значи да са порастом коефицијента  $\rho$  расте и оптерећење, па ће при некој вредности  $\rho = \rho_C$  највећи момент у пољу достићи вредност  $M_r$ . Чврстоћа на затезање  $f_{bzsm}$ , потребна за израчунавање  $M_r$ , заједно са  $\sigma_{a1}$ , „садржана“ је у  $C$ . Тиме су обухваћене све потребне величине за једнозначно одређивање  $\rho_C$ . Превођењем у бездимензиони облик (поглавље 7) нестаје експлицитни утицај ширине пресека  $b$ , док распон  $L$  и статичка висина  $h$  постају независни линеарни мултиликатори, тако да остаје:

$$\rho_C = \rho(C, \alpha, A_{a2}/A_{a1}). \quad (6.4)$$

Коефицијент армирања  $\rho$  је у анализама основна (независна) променљива („ $x$ “ оса дијаграма). Угиб у времену (то јест, његов бездимензиони репрезент, израз (7.61.),  $\tilde{y}_t$  представља функцију која се израчунава („ $y$ “ оса).  $\tilde{y}_t$  се израчунава за једну комбинацију вредности преосталих 6 параметара нелинеарног језгра проблема ( $sys, C, \alpha, A_{a2}/A_{a1}, \varphi, \varepsilon_{sk}$ ), чиме се добија једна линија.

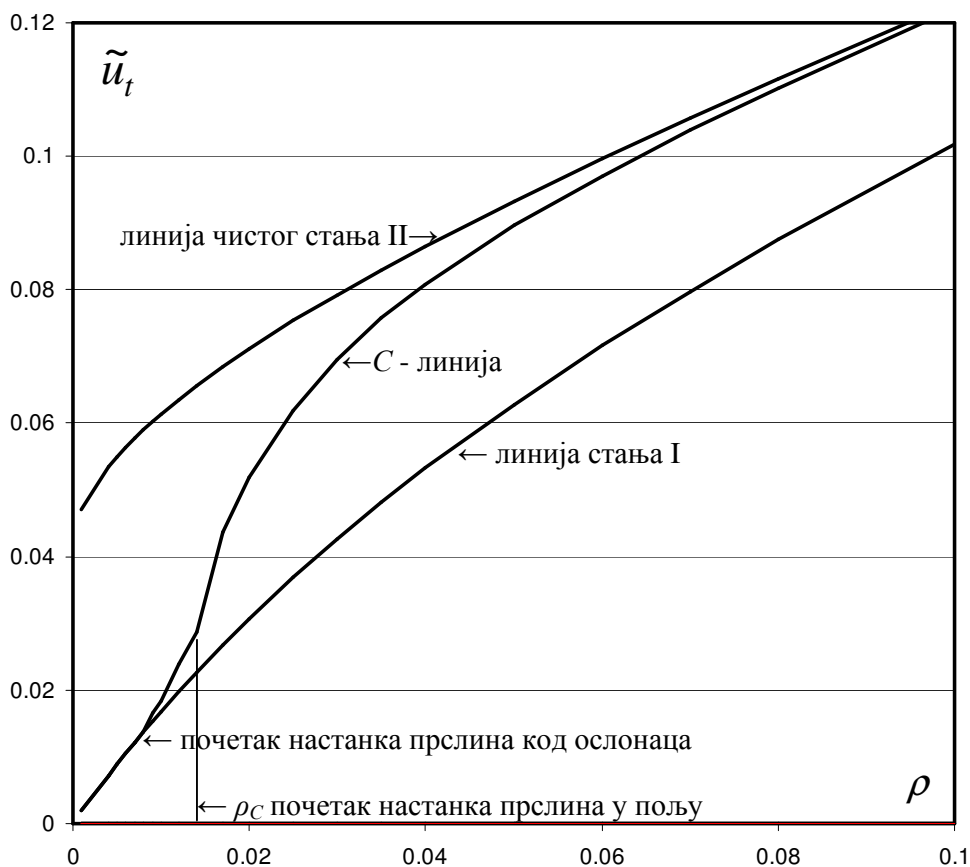
У наставку, ове линије ће се називати ***C* - линије**, с обзиром да ће се на дијаграмима најчешће приказивати фамилија линија за неколико различитих вредности параметра  $C$ , уз фиксне све остале параметре ( $sys, \alpha, A_{a2}/A_{a1}, \varphi, \varepsilon_{sk}$ ). Реалне вредности параметра  $C$  су, имајући у виду дефиницију (6.3), позитивне, али и сигурно мање од 1. У прорачунском смислу, велика вредност за  $C$  (на пример  $C = 1,0$ ) даје угиб носача без прелина (стање I). Насупрот томе, вредност  $C = 0$  доводи до прорачуна угиба са крутошћу пресека са прслином („чисто“ стање II). Тиме се добијају две граничне  $C$  линије, између којих су смештене све остале.



Слика 6.1 Пример  $C$  – линије за просту греду

Код просте греде, реалне  $C$  линије се, за мале вредности  $\rho$  (а то, сходно претходном објашњењу, значи и за мале нивое оптерећења) поклапају са линијом стања I ( $C = 1,0$ ) све до тачке у којој је  $\rho = \rho_C$  (настанак прелина у пољу), где почиње одвајање од линије стања I и померање ка горњој асимпоти, линији стања II ( $C = 0$ ). На слици 6.1 приказан је пример  $C$  линије за просту греду.

Код статички неодређених (континуалних) система, с обзиром на релативне односе момената савијања у пољу и код ослонаца, прелине се прво развијају изнад ослонаца (при нижем нивоу оптерећења од оног које је потребно да изазове настајање прелина у пољу). То значи да одвајање реалне  $C$  линије од линије стања I почиње при мањој вредности  $\rho < \rho_C$ , с обзиром да је  $\rho$ , као што је напред објашњено, и мера величине оптерећења. При  $\rho = \rho_C$ ,  $C$  линија има још један прелом (први прелом је на месту одвајања од линије стања I). На слици 6.2 приказана је  $C$  линија за обострано укљештену греду.



Слика 6.2 Пример  $C$  – линије за обострано укљештену греду

**Гранични коефицијент армирања  $\rho_c$**  се користи за трансформисање обичног пондерисаног коефицијента армирања  $\rho$  у **нормирани пондерисани коефицијент армирања  $\tilde{\rho}$** , који је дефинисан у поглављу 8.1.3 релацијом (8.12) .

Четврти сложени параметар је **нормирано (бездимензионо) садејство затегнутог бетона  $TS$**  (нормирани „*tension stiffening*“), бездимензиони сложени параметар уз помоћ кога се веома ефикасно међусобно „преклапају“  $C$  - линије различитих статичких система, као што је објашњено у поглављу 8.5.  $TS$  је дефинисан у наставку, у поглављу 6.4.

Термин „преклапа“ у претходном пасусу означава могућност довођења функција које описују нелинеарно језгро прорачуна угиба за различите вредности параметара у исту аналитичку форму, која се потом може експлицитно изразити као (једна) функција релевантних параметара. Поступак „преклапања“ примењен у тези има, уопштено описано, следеће кораке:

1. Посматра се засебно сваки од статичких система ( $sys$ ), у првом кораку без скупљања. Изабере се по једна (еталонска) вредност за три параметра нелинеарног језгра, на пример  $\alpha = 0,1$ ,  $A_{a2}/A_{a1} = 0$  и  $\varphi = 2,0$ . Потом се бира један од ова три параметра, чија се вредност фиксира на еталонску. Изабере се комбинација вредности за преостала два параметра. Конструирају се  $C$  – линије, као функције од  $\rho$  и изабране комбинације параметара. Дефинише се (пронађе) алгебарска трансформација координатног система  $(\rho, \tilde{y}_t)$ , тако да се  $C$  – линије за изабрану комбинацију што боље преклопе (подударе) са  $C$  – линијама за еталонску комбинацију параметара.
2. Када се први корак спроведе за све комбинације вредности три параметра, дефинише се (пронађе) алгебарска зависност између коефицијената трансформација координатног система у првом кораку. На тај начин је решење угиба, за сваки појединачни систем ( $sys$ ), без скупљања, описано једном серијом  $C$  – линија (дијаграмом линија у систему  $(\rho, \tilde{y}_t)$ ) за еталонску комбинацију три параметра и сетом алгебарских трансформација, које производе вредности за остале комбинације вредности тих параметара.



3. Дефинишу се (изнађу) алгебарске трансформације координатног система  $(\rho, \tilde{u}_i)$ , које међусобно преклапају еталонске дијаграме различитих статичких система ( $sys$ ), слично као у првом кораку унутар појединачног система. За еталон у овом кораку изабрани су дијаграми за просту греду ( $sys = PG$ ) и на њих преликани дијаграми за једнострано ( $sys = G$ ) и обострано ( $sys = K$ ) укљештен штап. Дијаграми за преостала два статичка система преликани су прво на сродни статички систем ( $KP \rightarrow G, UP \rightarrow K$ ), а потом начин на просту греду (овде се појављује нови параметар – степен укљештења, који је засебно анализиран). Резултат прва три корака јесте један дијаграм (серија  $C$  – линија за просту греду и еталонске вредности три параметра у систему  $(\rho, \tilde{u}_i)$ ) и нови (увећан) сет алгебарских трансформација који производе вредности коефицијента угиба, без скупљања, за све вредности разматраних параметара, али и све разматране статичке системе.
4. За добијање аналитичке форме резултата потребно је једначинама описати серију  $C$  – линија која настаје као резултат у трећем кораку. За решавање овог проблема употребљени су нови сложени бездимензиони параметри  $\tilde{\rho}$  и  $TS$ . Њихова примена, као што је приказано у поглављу 8.5, преклапа серију  $C$  – линија сваке појединачне комбинације параметара у једну линију. Захваљујући доброј заснованости ових параметара, трансформација је стабилна - независна од изабране еталонске вредности коефицијента течења  $\varphi = 2,0$  и притиснуте арматуре  $A_{a2}/A_{a1}$ .
5. Решење за увођење утицаја скупљања тражено је у облику увећања дуготрајног угиба услед оптерећења и течења бетона, као што је приказано у поглављу 6.5, релација (6.11). За потребе овог решења уведен је још један (оригинални), пети нови бездимензиони параметар  $\tilde{\omega}_{sk}(PG, \rho, SET)$  - коефицијент повећања угиба просте греде услед скупљања, дефинисан са (6.11) и у поглављу 8 релацијом (8.29). Његова аналитичка форма, дефинисана са релацијама (8.22) – (8.28), урађена је за просту греду, а потом тестирана у погледу сагласности са већ претходно дефинисаним алгебарским трансформацијама изведеним у

корацама 1 – 4. Резултати овог тестирања, коментарисани у поглављу 9, показали су да је усвојени приступ успешан.

Приказани поступак у корацама 1 – 5 укључује (умерене) нумеричке апроксимације, које су неопходне за алгебарско описивање и алгебарско преклапање  $C$  - линија.

**Употребом свих пет нових (оригиналних) сложених бездимензионих параметра ( $C, \rho_C, \tilde{\rho}, TS, \tilde{\omega}_{sk}$ ) остварен је допунски циљ постулиран у тези: изналажење унапређеног поступка прорачуна који би обједињавао различите конструктивне системе.**

*Као коначни продукт рада у тези добија се аналитички израз. Овај израз, са грешком која је у највећем броју случајева испод 10% (коментарисано у поглављу 9), даје нумеричку вредност угиба прорачунату ригорозним поступком према Еврокоду 2 уз уважавање нелинеарних ефеката, са могућношћу експлицитног дефинисања свих релевантних параметара: статичког система и распона носача, величине дуготрајног оптерећења, димензија пресека, модула еластичности бетона, чврстоће на затезање бетона, површине и положаја затегнуте и притиснуте арматуре, коефицијента течења и дилатације скупљања бетона.*

Треба посебно подвући да је изабрани приступ преклапања  $C$  – линија искључиво алгебарским трансформацијама и њихово описивање алгебарским изразима један од чинилаца који уносе одступања у изведене аналитичке апроксимације. Установљене корелационе зависности су могле, у више случајева, да буду описане доста прецизније, али сложенијим функцијама. Управо захваљујући доброј заснованости бездимензионих параметара „сажимање“ мноштва  $C$  – линија у практично једну, може се урадити прилично прецизно. С друге стране, један од циљева истраживања у тези јесте да се изведени резултат може и практично примењивати. Такође, у уводним поглављима образложено је да је поузданост резултата у практичним условима у великој мери условљена поузданошћу инпута. Због тога су изабране умерено сложене аналитичке форме, мање подложне грешкама при практичном рачунању, које дају апроксимативне вредности са прихватљивим одступањем у односу на оно које уноси непоузданост инпута.

#### 6.4 Израчунавање угиба

Еталонски угиб за било коју комбинацију 13 полазних директних параметара:

$$L, b, d, E_b, E_a, f_{bzs}, A_{a1}, a_1, A_{a2}, \sigma_{a1}, \varphi, \varepsilon_{sk}, sys$$

добива се нумеричким интеграљењем кривине са поделом распона  $L$  на 50 једнаких сегмената.

У првом кораку успоставља се стање након оптерећивања (стање  $t_0$ ). Када је статички систем проста греда, то подразумева само дефинисање постојања и ширине зоне са прлинама. За преостале, статички неодређене системе итерира се полазни дијаграм момената (који одговара стандардном статичком прорачуну са крутостима бруто пресека) до задовољења услова наметнутих ослонцима статичке неодређености. Израчунају се средње кривине према поступку објашњеном у поглављу 4.1. Задовољеност услова статичке неодређености проверава се такође нумеричком интеграцијом на 50 сегмената. Дефинишу се зоне са прлинама према итерираном дијаграму. Срачунава се и почетни угиб.

У другом кораку срачунава се стање након обављеног задатог скупљања и течења бетона (стање  $t$ ). Код прости греде то поново подразумева само израчунавање укупних средњих кривина, које укључују течење и скупљање бетона (види поглавље 4.1.), и нумеричку интеграцију кривине. Код статички неодређених система, почетни дијаграм момената се још једном итерира, као што је објашњено у поглављу 3.11. Задовољеност услова статичке неодређености поново се проверава нумеричком интеграцијом. Дефинишу се и зоне са прлинама према коначном дијаграму и редукованој вредности чврстоће на затезање (види поглавље 3.3). Срачунава се коначни угиб.

Оперативно се у ствари нумеричким интеграљењем срачунава (бездимензиони) коефицијент угиба  $\tilde{u}_t$  (види израз (7.61)), који представља резултат прорачуна нелинеарног језгра проблема и зависи (само) од 7 трансформисаних директних бездимензионих параметара:

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_t(sys, \rho, C, \alpha, A_{a2}/A_{a1}, \varphi, \varepsilon_{sk}) = \tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk}) \quad (6.5)$$

где  $SET$  означава једну комбинацију четири параметра  $SET = (C, \alpha, A_{a2}/A_{a1}, \varphi)$ .

Сам коначни угиб добија се уз помоћ 4 директне димензионе величине као:

$$u_t = \tilde{u}_t \times \frac{L^2}{h} \times \frac{\sigma_{a1}}{E_a} \quad (6.6)$$

што је повољан облик и за формулисање критеријума за индиректне провере.

**Угиб  $u_t$  представља резултат ригорозног прорачуна према Еврокоду 2, без апроксимација (еталонска вредност).**

### 6.5 Форма за нумеричку апроксимацију

Нумеричка апроксимација за израчунавање угиба спроводи се на претходно, ригорозним поступком, израчунатим еталонским вредностима  $\tilde{u}_t$ . Вредности се израчунавају за сваки од статичких система ( $sys$ ), као фамилије  $C$  - линија са коефицијентом армирања  $\rho$  као директном „континуалном“ променљивом. Прорачун се, у ствари, спроводи за дискретне вредности  $\rho$  на претходно изабраном интервалу вредности. Провлачењем интерполационе криве кроз израчунате вредности за  $\tilde{u}_t$  конструише се континуална линија, за одговарајући  $SET$  (једној линији одговара један  $SET$ ). **У првом кораку не разматра се утицаја скупљања:**

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0) = \tilde{u}_t(sys, \rho, SET) \quad (6.7)$$

**Нумеричка апроксимација има два циља.**

**Први циљ** је да се израчунатим  $\tilde{u}_t$  линијама, за различите комбинације параметара ( $SET$  – ове) **дâ аналитичка форма**, како би се могле директно користити без прорачуна који генерише „тачну“ (еталонску) вредност  $\tilde{u}_t$ .

**Други циљ је** да се покуша да се изнађе **иста аналитичка форма за различите статичке системе**. На тај начин добио би се компактнији апроксимативни аналитички поступак.

**За добијање нумеричке апроксимације решење за  $\tilde{u}_t = \tilde{u}_t(sys, \rho, SET)$  се приказује у облику** (за носач са прслинама у пољу,  $\rho \geq \rho_c$ ):

$$\tilde{u}_t(sys, \rho, SET) = \tilde{u}_{t,II}(sys, \rho, SET) - [\tilde{u}_{t,II}(sys, \rho_c, SET) - \tilde{u}_{t,I}(sys, \rho_c, SET)] \cdot TS \quad (6.8)$$

где су:

- $\tilde{u}_{t,II}(sys, \rho, SET)$  – бездимензиони коефицијент угиба, према (7.61), срачунат за комбинацију параметара  $(sys, \rho, SET)$ , са крутошћу пресека са прслином („чисто“ стање II);
- $\tilde{u}_{t,II}(sys, \rho_C, SET)$  – бездимензиони коефицијент угиба, према (7.61), срачунат за комбинацију параметара  $(sys, \rho = \rho_C, SET)$ , са крутошћу пресека са прслином („чисто“ стање II);
- $\tilde{u}_{t,I}(sys, \rho_C, SET)$  – бездимензиони коефицијент угиба, према (7.61), срачунат за комбинацију параметара  $(sys, \rho = \rho_C, SET)$ , са крутошћу пресека без прслина (стање I);
- $TS = TS(sys, \rho, SET) = \frac{\tilde{u}_{t,II}(sys, \rho, SET) - \tilde{u}_t(sys, \rho, SET)}{\tilde{u}_{t,II}(sys, \rho_C, SET) - \tilde{u}_{t,I}(sys, \rho_C, SET)}$  (6.9)

нормирано садејство затегнутог бетона.

За носач који нема прслине у пољу ( $\rho \leq \rho_C$ ), угиб се изражава у облику:

$$\tilde{u}_t(sys, \rho, SET) = \tilde{u}_{t,I}(sys, \rho, SET) \times R(sys, \rho, \rho_C) \quad (6.10)$$

где је  $R(sys, \rho, \rho_C)$  фактор увећања угиба код континуалних система услед настајања прслина код ослонаца (приказан у поглављу 8.2), пре него се оне јаве и у пољу. Код просте греде је  $R(sys, \rho, \rho_C) = R(PG, \rho, \rho_C) \equiv 1$ .

**Утицај скупљања на угиб** је, као што је већ објашњено у поглављу 3.10., двојак. Ефекти насталих затезања услед спречених деформација могу се обухватити прорачуном са редукованом вредношћу чврстоће на затезање  $f_{cm,fl,red}$ . Допринос кривина насталих услед скупљања угибу носача израчунаваће се у форми линеарног повећања дуготрајног угиба  $\tilde{u}_t$  одређеног само од утицаја течења ( $\tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$ ) у облику:

$$\tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk}) = \tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0) \times [1 + \varepsilon_{sk} \times \omega_{sk}(sys, \rho, SET)] \quad (6.11)$$

где су:

- $\tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk})$  – коначни угиб у времену  $t$ , укључујући и кривине услед скупљања;

- $\tilde{u}_t(\text{sys}, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$  – коначни угиб у времену  $t$ , без кривина услед скупљања;
- $\omega_{sk}(\text{sys}, \rho, SET)$  – коефицијент повећања угиба од референтне дилатације скупљања.

$\tilde{u}_t$  је суштински бездимензиона величина, која ће се претворити у димензиони угиб тек применом једначине (6.6), односно множењем и напоном, који је репрезент величине оптерећења. Угиб услед скупљања је, генерално, независан од величине оптерећења. Услед тога линеарни мултипликатор  $\omega_{sk}$  у једначини (6.11) треба да има форму која ће да анулира утицај величине оптерећења на део угиба услед скупљања, при примени израза (6.6). То је постигнуто увођењем бездимензионог коефицијента угиба  $\tilde{\omega}_{sk}$ , као што је објашњено у поглављу 8, једначина (8.29).  $\tilde{\omega}_{sk}$  се израчунава за референтни напон  $\sigma_{a1}$  од 250 МПа и референтну дилатацију скупљања  $\varepsilon_{sk} = 0,0005$ . Мултипликатор у облику односа референтног и конкретног напона  $\sigma_{a1}$  у изразу (8.29) регулише нумерички ефекат величине оптерећења на угиб услед скупљања, који настаје применом израза (6.6).

Резултати спроведених анализа корелација, показују да сложени бездимензиони параметри  $TS = TS(\text{sys}, \rho, SET)$  и  $\omega_{sk} = \omega_{sk}(\text{sys}, \rho, SET)$ , у систему са трансформисаним основним параметрима, веома мало зависе од статичког система ( $\text{sys}$ ), што је кључно за обједињавање аналитичких апроксимација.

## 7 ПРЕВОЂЕЊЕ НЕЛИНЕАРНОГ ДЕЛА МОДЕЛА У БЕЗДИМЕНЗИОНИ ОБЛИК

Претпоставке прорачуна су:

- бетонски пресек је константан, правоугаони са ширином  $b$  и висином  $d$ ;
- арматура (затегнута  $A_{a1}$  и притиснута  $A_{a2}$ ) је константна дуж потеза на коме је момент истог знака;
- одстојање затегнуте и притиснуте арматуре од одговарајуће ивице је исто ( $a_1 = a_2 = a$ ) и исто у зони позитивних и зони негативних момената (статичка висина  $h$  је свуда иста)
- оптерећење је једнакоподељено дуготрајно (квази-стално оптерећење), које се наноси одједном у тренутку  $t_0$ .

Угиб се израчунава у тренутку  $t$ , укључујући ефекте течења (изражене коефицијентом течења  $\varphi(t, t_0)$ ), скупљања (дилатација  $\varepsilon_{sk}(t)$ ) и настанка прслина, када ивични напон затезања прекорачи чврстоћу  $f_{bzs}$ .

Обрасци за израчунавање карактеристика пресека, дати у наставку, исписани су тако да се индекс 1 односи на затегнуту, а индекс 2 на притиснуту страну пресека. Када се они касније примењују, додатне ознаке + и -, као горњи индекси, односе се на зоне са позитивним и негативним моментима, респективно.

Доњи индекси I и II односе се на величине срачунате за пресек без и са прслином, респективно. Доњи индекс  $i$  означава карактеристике идеализованог (трансформисаног) пресека, сведеног на бетон са модулом еластичности  $E_b(t_0)$ . Доњи индекс  $z$  означава карактеристике трансформисаног пресека сведеног на бетон са коригованим ефективним модулом:

$$E_b^*(t_1, t_0) = \frac{E_b(t_0)}{1 + \chi(t_1, t_0)\varphi(t_1, t_0)}.$$

Бездимензиони облик неке величине означен је истим именом, само надвучен знаком  $\sim$ , осим када је за ту величину уведена посебна бездимензиона ознака. То је углавном случај са стандардним бездимензионим коефицијентима, као што је, на пример, коефицијент армирања  $\rho$ . Начин (трансформација) превођења у бездимензиони облик исписан је између угластих заграда  $\langle \rangle$ .

1. Пондерисани коефицијент армирања затегнутом арматуром:

$$\rho = \frac{E_a}{E_b(t_0)} \frac{A_{a1}}{bh} = \frac{nA_{a1}}{bh}; \quad n = \frac{E_a}{E_b(t_0)} \quad (7.1)$$

2. Одстојање затегнуте и притиснуте арматуре од одговарајуће ивице пресека:

$$\alpha = \frac{a_1}{d} = \frac{a_2}{d} = \frac{a}{d} \quad (7.2)$$

3. Однос површина притиснуте и затегнуте арматуре у пресеку:

$$\eta = \frac{A_{a2}}{A_{a1}} \quad (7.3)$$

4. Укупна површина арматуре у пресеку:

$$\tilde{A}_a = \left\langle \frac{nA_a}{bh} \right\rangle = \frac{n(A_{a1} + A_{a2})}{bh} = \rho(1 + \eta) \quad (7.4)$$

5. Одстојање тежишта укупне арматуре од притиснуте ивице пресека:

$$\tilde{y}_{2a} = \left\langle \frac{y_{2a}}{h} \right\rangle = \frac{1 - \alpha + \alpha\eta}{(1 - \alpha)(1 + \eta)} \quad (7.5)$$

6. Сопствени момент инерције арматуре (састоји се само од положајних момената инерције затегнуте и притиснуте арматуре):

$$\tilde{I}_a = \left\langle \frac{nI_a}{bh^3} \right\rangle = \rho \left[ (1 - \tilde{y}_{2a})^2 + \eta \left( \tilde{y}_{2a} - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^2 \right] \quad (7.6)$$

7. Површина бетонског бруто пресека:

$$\tilde{A}_{b,I} = \left\langle \frac{A_{b,I}}{bh} \right\rangle = \frac{1}{1 - \alpha} \quad (7.7)$$

8. Одстојање тежишта бетонског бруто пресека од притиснуте ивице:

$$\tilde{y}_{2b,I} = \left\langle \frac{y_{b2,I}}{h} \right\rangle = \frac{0,5}{1 - \alpha} \quad (7.8)$$

9. Сопствени момент инерције бетонског бруто пресека:

$$\tilde{I}_{b,I} = \left\langle \frac{I_{b,I}}{bh^3} \right\rangle = \frac{1}{12(1 - \alpha)^3} \quad (7.9)$$



10. Површина идеализованог пресека, стање I:

$$\tilde{A}_{i,I} = \left\langle \frac{A_{i,I}}{bh} \right\rangle = \tilde{A}_a + \tilde{A}_{b,I} \quad (7.10)$$

11. Одстојање тежишта идеализованог пресека од притиснуте ивице пресека, стање I:

$$\tilde{y}_{2i,I} = \left\langle \frac{y_{2i,I}}{h} \right\rangle = \tilde{y}_{2b,I} + (\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2b,I}) \frac{\tilde{A}_a}{\tilde{A}_{i,I}} \quad (7.11)$$

12. Сопствени момент инерције идеализованог пресека, стање I:

$$\tilde{I}_{i,I} = \left\langle \frac{I_{i,I}}{bh^3} \right\rangle = \tilde{I}_{b,I} + \tilde{I}_a + \tilde{A}_{b,I} (\tilde{y}_{2i,I} - \tilde{y}_{2b,I}) (\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2b,I}) \quad (7.12)$$

13. Површина трансформисаног пресека (бетон са  $E_b^*$ ), стање I:

$$\tilde{A}_{z,I} = \left\langle \frac{A_{z,I}}{bh} \right\rangle = (1 + \chi\varphi) \tilde{A}_a + \tilde{A}_{b,I} \quad (7.13)$$

Са  $\varphi$  је овде, и надаље, скраћено означен коефицијент течења  $\varphi(t, t_0)$ , ради прегледности израза. Исто тако,  $\chi$  означава коефицијент старења  $\chi(t, t_0)$ .

14. Одстојање тежишта трансформисаног пресека од притиснуте ивице, стање I:

$$\tilde{y}_{2z,I} = \left\langle \frac{y_{2z,I}}{h} \right\rangle = \tilde{y}_{2b,I} + (1 + \chi\varphi) (\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2b,I}) \frac{\tilde{A}_a}{\tilde{A}_{z,I}} \quad (7.14)$$

15. Сопствени момент инерције трансформисаног пресека, стање I:

$$\tilde{I}_{z,I} = \left\langle \frac{I_{z,I}}{bh^3} \right\rangle = \tilde{I}_{b,I} + (1 + \chi\varphi) \tilde{I}_a + \tilde{A}_{b,I} (\tilde{y}_{2z,I} - \tilde{y}_{2b,I}) (\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2b,I}) \quad (7.15)$$

16. Коефицијент висине притиснуте зоне  $x$  пресека с прслином, стање II:

$$s = \frac{x}{h} = \tilde{A}_a \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \left( \rho + \eta\rho \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)}{\tilde{A}_a^2}} \right] \quad (7.16)$$

17. Површина притиснутог бетона – активни бетонски пресек, стање II:

$$\tilde{A}_{b,II} = \left\langle \frac{A_{b,II}}{bh} \right\rangle = s \quad (7.17)$$

18. Положај тежишта бетонског пресека, стање II:

$$\tilde{y}_{2b,II} = \left\langle \frac{y_{2b,II}}{h} \right\rangle = \frac{s}{2} \quad (7.18)$$

19. Сопствени момент инерције бетонског пресека, стање II:

$$\tilde{I}_{b,II} = \left\langle \frac{I_{b,II}}{bh^3} \right\rangle = \frac{s^3}{12} \quad (7.19)$$

20. Површина идеализованог пресека, стање II:

$$\tilde{A}_{i,II} = \left\langle \frac{A_{i,II}}{bh} \right\rangle = \tilde{A}_a + \tilde{A}_{b,II} \quad (7.20)$$

21. Одстојање тежишта идеализованог пресека од притиснуте ивице пресека, стање II:

$$\tilde{y}_{2i,II} = \left\langle \frac{y_{2i,II}}{h} \right\rangle = \tilde{y}_{2b,II} + (\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2b,II}) \frac{\tilde{A}_a}{\tilde{A}_{i,II}} \quad (7.21)$$

22. Сопствени момент инерције идеализованог пресека, стање II:

$$\tilde{I}_{i,II} = \left\langle \frac{I_{i,II}}{bh^3} \right\rangle = \tilde{I}_{b,II} + \tilde{I}_a + \tilde{A}_{b,II} (\tilde{y}_{2i,II} - \tilde{y}_{2b,II}) (\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2b,II}) \quad (7.22)$$

23. Површина трансформисаног пресека (бетон са  $E_b^*$ ), стање II:

$$\tilde{A}_{z,II} = \left\langle \frac{A_{z,II}}{bh} \right\rangle = (1 + \chi\varphi) \tilde{A}_a + \tilde{A}_{b,II} \quad (7.23)$$

24. Одстојање тежишта трансформисаног пресека од притиснуте ивице, стање II:

$$\tilde{y}_{2z,II} = \left\langle \frac{y_{2z,II}}{h} \right\rangle = \tilde{y}_{2b,II} + (1 + \chi\varphi) (\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2b,II}) \frac{\tilde{A}_a}{\tilde{A}_{z,II}} \quad (7.24)$$

25. Сопствени момент инерције трансформисаног пресека, стање II:

$$\tilde{I}_{z,II} = \left\langle \frac{I_{z,II}}{bh^3} \right\rangle = \tilde{I}_{b,II} + (1 + \chi\varphi)\tilde{I}_a + \tilde{A}_{b,II}(\tilde{y}_{2z,II} - \tilde{y}_{2b,II})(\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2b,II}) \quad (7.25)$$

26. Коэффициент угиба, који уводи допринос арматуре у пресеку, [22], стање I:

$$k_{a,I} = \frac{\tilde{I}_{b,I}}{\tilde{I}_{i,I}} \quad (7.26)$$

27. Коэффициент угиба, који уводи допринос арматуре у пресеку, [22], стање II:

$$k_{a,II} = \frac{\tilde{I}_{b,II}}{\tilde{I}_{i,II}} \quad (7.27)$$

28. Коэффициент угиба, који уводи утицај течења бетона, [22], стање I:

$$\begin{aligned} k_{\varphi,I} &= \left\langle 1 - \frac{E_a I_a + A_a (y_{a2} - y_{2i,I})(y_{a2} - y_{2z,I})}{E_b^* I_{z,I}} \right\rangle = \\ &= 1 - (1 + \chi\varphi) \frac{\tilde{I}_a + \tilde{A}_a (\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2i,I})(\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2z,I})}{\tilde{I}_{z,I}} \end{aligned} \quad (7.28)$$

29. Коэффициент угиба, који уводи утицај течења бетона, [22], стање II:

$$k_{\varphi,II} = 1 - (1 + \chi\varphi) \frac{\tilde{I}_a + \tilde{A}_a (\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2i,II})(\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2z,II})}{\tilde{I}_{z,II}} \quad (7.29)$$

30. Коэффициент угиба, који уводи утицај скупљања бетона, [22], стање I:

$$k_{sk,I} = \left\langle \frac{E_a A_a}{E_b^* I_{z,I}} d(y_{2a} - y_{2z,I}) \right\rangle = (1 + \chi\varphi) \tilde{A}_a \frac{\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2z,I}}{(1 - \alpha) \tilde{I}_{z,I}} \quad (7.30)$$

31. Коэффициент угиба, који уводи утицај скупљања бетона, [22], стање II:

$$k_{sk,II} = \left\langle \frac{E_a A_a}{E_b^* I_{z,II}} d(y_{2a} - y_{2z,II}) \right\rangle = (1 + \chi\varphi) \tilde{A}_a \frac{\tilde{y}_{2a} - \tilde{y}_{2z,II}}{(1 - \alpha) \tilde{I}_{z,II}} \quad (7.31)$$

32. Највећи момент у пољу  $M_{D,b}$ , изражен преко напона у арматури  $\sigma_a$  у истом пресеку, од дуготрајног (квази-сталног) оптерећења од кога се одређује угиб. Момент се, у статички неодређеним системима, одређује уобичајеним поступком заснованом на крутостима бетонског бруто пресека:

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{D,b} &= \left\langle \frac{M_{D,b}}{bh^2(\sigma_a/n)} \right\rangle = \\ &= \frac{s^+}{1-s^+} \left[ \frac{1}{2} s^+ \left( 1 - \frac{s^+}{3} \right) + \rho^+ \eta^+ \left( 1 - \frac{\alpha}{s^+(1-\alpha)} \right) \left( 1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]\end{aligned}\quad (7.32)$$

33. Стрела  $f$  дијаграма момента од једнакоподељеног оптерећења у распону у коме се одређује угиб ( $f = qL^2/8$ ), изражена као умножак карактеристичног (максималног) момента у пољу  $M_{D,b}$ . Као пример, приказана је нумеричка вредност мултипликатора  $N_1^o(sys)$  за „G“ штап:

$$f = N_1^o(sys) \times \tilde{M}_{D,b} \quad (=) \quad \frac{16}{9} \tilde{M}_{D,b} \quad (7.33)$$

34. Негативни ослоначки момент (моменти)  $-M_{O,b}$  од једнакоподељеног оптерећења у распону у коме се одређује угиб, изражен као умножак карактеристичног (максималног) момента у пољу  $M_{D,b}$ . Момент се одређује уобичајеним поступком заснованом на крутостима бетонског бруто пресека. Као пример, приказана је нумеричка вредност мултипликатора  $N_2^o(sys)$  за „G“ штап:

$$-\tilde{M}_{O,b} = - \left\langle \frac{M_{O,b}}{bh^2(\sigma_a/n)} \right\rangle = N_2^o(sys) \times \tilde{M}_{D,b} \quad (=) \quad \frac{16}{9} \tilde{M}_{D,b} \quad (7.34)$$

35. Коefицијент армирања затегнутом арматуром  $\rho^-$  који одговара (негативном) ослоначком моменту. Као једноставна апроксимација, могло би се усвојити да је  $\rho^- : \rho^+ = M_{O,b} : M_{D,b}$ . Коришћена је прецизнија релација, објашњена у поглављу 13 у Прилогу 1:

$$\rho^- = F(sys, \rho^+) \quad (7.35)$$

36. Момент дуж распона, изражен помоћу бездимензионе координате  $\xi$ . Код статички неодређених система, моментни дијаграм добијен на основу крутости бруто бетонског пресека (еталонски дијаграм  $M_{0,b}(\xi)$ ). Као пример, дата је једначина момента за „G“ штап. Зглобни ослонац је на  $\xi = 0$ , укљештење на  $\xi = 1$ :

$$\tilde{M}_{0,b}(\xi) = \left\langle \frac{M_{0,b}(\xi)}{bh^2(\sigma_a/n)} \right\rangle (= 4f\xi(1-\xi) - \xi\tilde{M}_{0,b}) \quad (7.36)$$

37. Корекција еталонског дијаграма  $\Delta M_0(\xi)$ , која уважава промену крутости услед настанка прслина при оптерећивању ( $t_0$ ). Допунски дијаграм, настао услед промена реакција, је линеаран. Као пример, дата је корекција момента за „G“ штап, описана променом ослоначког момента  $M_{0,b}$  за величину  $\delta_0 \times M_{0,b}$ . Коефицијент  $\delta_0$  ће се одредити итерацијама:

$$\Delta\tilde{M}_0(\xi) = \left\langle \frac{\Delta M_0(\xi)}{bh^2(\sigma_a/n)} \right\rangle (= -\xi\delta_0\tilde{M}_{0,b}) \quad (7.37)$$

38. Почетни дијаграм момента након доношења оптерећења ( $t_0$ ), узимајући у обзир промену крутости услед настанка прслина:

$$\tilde{M}_0(\xi, \delta_0) = \left\langle \frac{M_0(\xi, \delta_0)}{bh^2(\sigma_a/n)} \right\rangle = \tilde{M}_{0,b}(\xi) + \Delta\tilde{M}_0(\xi, \delta_0) \quad (7.38)$$

39. Сложени бездимензиони параметар, чија се употреба промовише у тези:

$$C = \frac{E_a f_{bzs}}{E_b(t_0)\sigma_a} = \frac{nf_{bzs}}{\sigma_a} \quad (7.39)$$

40. Момент отварања прслина, одређен са карактеристикама идеализованог пресека:

$$\tilde{M}_r = \left\langle \frac{M_r}{bh^2 f_{bzs}} \right\rangle = \frac{\tilde{I}_{i,I}}{\frac{1}{1-\alpha} - \tilde{y}_{2i,I}} \quad (7.40)$$

41. Интерполациони коефицијент почетне кривине ( $t_0$ ), Еврокод 2, МС 1990, [3], у коме је  $\beta_0 = 1$ :

$$\beta_0 \left( \frac{M_r}{M_0(\xi, \delta_0)} \right)^2 = \beta_0 \left( \frac{\tilde{M}_r}{\tilde{M}_0(\xi, \delta_0) C} \right)^2 \quad (7.41)$$

42. Средња почетна кривина ( $t_0$ ) од јединичног момента, на потезу са прслинама:

$$\bar{\kappa}_{0,eff}(\xi, \delta_0) = k_{a,II} \left[ 1 - \beta_0 \left( \frac{\tilde{M}_r}{\tilde{M}_0(\xi, \delta_0) C} \right)^2 \right] + k_{a,I} \beta_0 \left( \frac{\tilde{M}_r}{\tilde{M}_0(\xi, \delta_0) C} \right)^2 \quad (7.42)$$

43. Почетна кривина ( $t_0$ ) од момента  $M_0(\xi)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_0(\xi, \delta_0) &= \langle \kappa_0(\xi, \delta_0) \cdot h \rangle = \\ &= \begin{cases} \tilde{M}_0(\xi, \delta_0) k_{a,I}^+, & \text{ako } 0 \leq \tilde{M}_0(\xi, \delta_0) < \tilde{M}_r^+ \cdot C \\ \tilde{M}_0(\xi, \delta_0) \bar{\kappa}_{0,eff}^+(\xi), & \text{ako } \tilde{M}_r^+ \cdot C \leq \tilde{M}_0(\xi, \delta_0) \\ \tilde{M}_0(\xi, \delta_0) k_{a,I}^-, & \text{ako } -\tilde{M}_r^- \cdot C \leq \tilde{M}_0(\xi, \delta_0) < 0 \\ \tilde{M}_0(\xi, \delta_0) \bar{\kappa}_{0,eff}^-(\xi), & \text{ako } \tilde{M}_0(\xi, \delta_0) \leq -\tilde{M}_r^- \cdot C \end{cases} \end{aligned} \quad (7.43)$$

44. Критеријум на ослонцу (ослонцима) статичке неодређености, на примеру спречене ротације, за „G“ штап:

$$\int_0^1 \tilde{\kappa}_0(\xi, \delta_0) \cdot \xi \cdot d\xi (=) 0 \quad (7.44)$$

Итерира се  $\delta_0$  до задовољења критеријума.

45. Коефицијент за рачунање угиба. На пример, за „G“ штап је усвојено место на  $0,4L$  гледано од зглобног ослонца ( $\xi = 0$ ):

$$k_{ugib}(\xi) = \begin{cases} 0,6\xi, & 0 \leq \xi \leq 0,4 \\ 0,24 - 0,4(\xi - 0,4), & 0,4 < \xi \leq 1 \end{cases} \quad (7.45)$$

46. Почетни угиб:

$$\tilde{u}_0 = \left\langle \frac{u_0}{(L/h^2)(\sigma_a/E_a)} \right\rangle = 12(1-\alpha)^3 \int_0^1 \tilde{\kappa}_0(\xi, \delta_0) k_{ugib}(\xi) d\xi \quad (7.46)$$

47. Промена момента због прерасподеле утицаја кроз време, услед скупљања и течења бетона и смањења садејства затегнутог бетона ( $\beta_0 = 1 \rightarrow \beta_t = 0,5$ ). Поново је допунски дијаграм, настао услед прерасподеле, линеаран. Као пример, дата је корекција момента за „G“ штап, описана новом променом ослоначког момента  $M_{O,b}$  за величину  $\delta_t \times M_{O,b}$ . Коефицијент  $\delta_t$  ће се такође одредити итерацијама:

$$\Delta \tilde{M}_t(\xi, \delta_t) = \left\langle \frac{\Delta M_t(\xi, \delta_t)}{bh^2(\sigma_a/n)} \right\rangle (=) -\xi \delta_t \tilde{M}_{O,b} \quad (7.47)$$

48. Коначни дијаграм момента у тренутку  $t$ , узимајући у обзир промену крутости услед настанка прелина, скупљање и течење бетона и прераспodelу утицаја у интервалу  $t - t_0$ :

$$\tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) = \left\langle \frac{M_t(\xi, \delta_0, \delta_t)}{bh^2(\sigma_a/n)} \right\rangle = \tilde{M}_0(\xi, \delta_0) + \Delta \tilde{M}_t(\xi, \delta_t) \quad (7.48)$$

49. Кривина у тренутку  $t$ , од почетног момента у  $t_0$ , еластична и од течења и скупљања бетона, за пресек без прелине (стање I, димензионо):

$$\kappa_{t,I}(\xi, \delta_0) = k_{a,I} \left(1 + k_{\varphi,I} \varphi\right) \frac{M_0(\xi, \delta_0)}{E_b I_b} + k_{sk,I} \frac{\varepsilon_{sk}}{d} \quad (7.49)$$

50. Кривина у тренутку  $t$ , од почетног момента у  $t_0$ , еластична и од течења и скупљања бетона, за пресек са прслином (стање II, димензионо):

$$\kappa_{t,II}(\xi, \delta_0) = k_{a,II} \left(1 + k_{\varphi,II} \varphi\right) \frac{M_0(\xi, \delta_0)}{E_b I_b} + k_{sk,II} \frac{\varepsilon_{sk}}{d} \quad (7.50)$$

51. Кривина у тренутку  $t$ , од почетног момента у  $t_0$ , еластична и од течења и скупљања бетона, за пресек без прелине (стање I), бездимензионо:

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{t,I}(\xi, \delta_0) &= \left\langle h \cdot \kappa_{t,I}(\xi, \delta_0) \right\rangle = \\ &= 12 \frac{\sigma_a}{E_a} (1 - \alpha)^3 \left[ k_{a,I} \left(1 + k_{\varphi,I} \varphi\right) \tilde{M}_0(\xi, \delta_0) + k_{sk,I} \tilde{\varepsilon}_{sk} \right] \end{aligned} \quad (7.51)$$

52. Кривина у тренутку  $t$ , од почетног момента у  $t_0$ , еластична и од течења и скупљања бетона, за пресек са прслином (стање II), бездимензионо:

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_{t,II}(\xi, \delta_0) &= \langle h \cdot \kappa_{t,II}(\xi, \delta_0) \rangle = \\ &= 12 \frac{\sigma_a}{E_a} (1 - \alpha)^3 \left[ k_{a,II} (1 + k_{\varphi,II} \varphi) \tilde{M}_0(\xi, \delta_0) + k_{sk,II} \tilde{\epsilon}_{sk} \right]\end{aligned}\quad (7.52)$$

53. У претходним релацијама употребљена је трансформисана дилатација скупљања  $\tilde{\epsilon}_{sk}$ :

$$\tilde{\epsilon}_{sk} = \frac{1}{12(1 - \alpha)^2} \frac{E_a \epsilon_{sk}}{\sigma_a} \quad (7.53)$$

54. Кривина у тренутку  $t$  одредиће се суперпозицијом кривине која се развила на основу момената  $M_0(\xi, \delta_0)$  стања  $t_0$  (услед течења, укључујући и скупљање бетона) и кривине (еластичне, и од течења) која је резултат новонасталих момената прерасподеле  $\Delta M_t(\xi, \delta_t)$ . Интерполациони коефицијент (укупне) кривине за дуготрајна оптерећења, Еврокод 2, МС 1990, [3], у коме је  $\beta_t = 0,5$ , одређује се из коначног (укупног) момента  $M_t(\xi, \delta_0, \delta_t)$  и примениће се при израчунавању средње кривине (за потезе са прслинама) за обе кривине које се суперпонирају:

$$\beta_t \left( \frac{M_r}{M_t(\xi, \delta_0, \delta_t)} \right)^2 = \beta_t \left( \frac{\tilde{M}_r}{\tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t)} C \right)^2 \quad (7.54)$$

55. Средња кривина у тренутку  $t$  која потиче од  $M_0(\xi, \delta_0)$ , еластична и од течења, укључујући и скупљање бетона, на потезу са прслинама:

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_{t,eff}(\xi, \delta_0, \delta_t) &= \langle h \cdot \kappa_{t,eff}(\xi, \delta_0, \delta_t) \rangle = \\ &= \tilde{\kappa}_{t,II} \left[ 1 - \beta_t \left( \frac{\tilde{M}_r}{\tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t)} C \right)^2 \right] + \tilde{\kappa}_{t,I} \beta_t \left( \frac{\tilde{M}_r}{\tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t)} C \right)^2\end{aligned}\quad (7.55)$$



56. Кривина у тренутку  $t$ , од  $M_0(\xi, \delta_0)$ , еластична и од течења, укључујући и скупљање бетона:

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) &= \langle h \cdot \kappa_t(\xi, \delta_0, \delta_t) \rangle = \\ &= \begin{cases} \tilde{\kappa}_{t,I}^+(\xi, \delta_0, \delta_t), & \text{ако } 0 \leq \tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) < \tilde{M}_r^+ \cdot C \\ \tilde{\kappa}_{t,eff}^+(\xi, \delta_0, \delta_t), & \text{ако } \tilde{M}_r^+ \cdot C \leq \tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) \\ \tilde{\kappa}_{t,I}^-(\xi, \delta_0, \delta_t), & \text{ако } -\tilde{M}_r^- \cdot C \leq \tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) < 0 \\ \tilde{\kappa}_{t,eff}^-(\xi, \delta_0, \delta_t), & \text{ако } \tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) \leq -\tilde{M}_r^- \cdot C \end{cases} \end{aligned} \quad (7.56)$$

57. Моменти услед прерасподеле  $\Delta M_t(\xi, \delta_t)$  развијају се постепено. Еквивалентне деформације течења услед њих израчунавају се апроксимативно, као за константно оптерећење (у коначном износу) у интервалу  $t - t_0$ , али са редукованим коефицијентом течења  $\omega \times \varphi(t, t_0)$ . Прикладна вредност редукционог коефицијента  $\omega$  за овакву апроксимацију износи око 0,7, као што је објашњено у поглављу 13 у Прилогу 3. У том случају, кривине услед  $\Delta M_t(\xi, \delta_t)$  израчунавају се по напред објашњеном поступку за кривине од  $M_0(\xi, \delta_0)$ . Тако се, на пример, коефицијенти  $k_{\omega\varphi}$  израчунавају према изразима 28 и 29, само уносећи  $\omega \times \varphi(t, t_0)$  уместо  $\varphi(t, t_0)$ . Аналогно је и при израчунавању свих других израза који укључују  $\varphi(t, t_0)$ . Укупна средња (еластична и од течења) кривина од јединичног момента  $\Delta M_t(\xi, \delta_t)$ , за потез са прслинама (коефицијент средње кривине је, као што је објашњено уз 54, одређен према укупном моменту), износи:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\kappa}_{t,eff}^-(\xi, \delta_0, \delta_t) &= k_{a,II} \left( 1 + k_{\omega\varphi,II} \omega\varphi \right) \left[ 1 - \beta_t \left( \frac{\tilde{M}_r}{\tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t)} C \right)^2 \right] + \\ &+ k_{a,I} \left( 1 + k_{\omega\varphi,I} \omega\varphi \right) \beta_t \left( \frac{\tilde{M}_r}{\tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t)} C \right)^2 \end{aligned} \quad (7.57)$$

58. Кривина од јединичног момента прерасподеле  $\Delta M_t(\xi, \delta_t)$  износи:

$$\Delta \bar{\kappa}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) = \begin{cases} k_{a,I}^+ (1 + k_{\omega\varphi,I}^+ \omega\varphi), & \text{ако } 0 \leq \tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) < \tilde{M}_r^+ \cdot C \\ \Delta \bar{\kappa}_{t,eff}^+(\xi, \delta_0, \delta_t), & \text{ако } \tilde{M}_r^+ \cdot C \leq \tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) \\ k_{a,I}^- (1 + k_{\omega\varphi,I}^- \omega\varphi), & \text{ако } -\tilde{M}_r^- \cdot C \leq \tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) < 0 \\ \Delta \bar{\kappa}_{t,eff}^-(\xi, \delta_0, \delta_t), & \text{ако } \tilde{M}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) \leq -\tilde{M}_r^- \cdot C \end{cases} \quad (7.58)$$

59. Кривина од момента прерасподеле  $\Delta M_t(\xi, \delta_t)$  износи:

$$\Delta \tilde{\kappa}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) = \langle \Delta \kappa_t(\xi, \delta_0, \delta_t) \cdot h \rangle = \Delta \tilde{M}_t(\xi, \delta_t) \Delta \bar{\kappa}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) \quad (7.59)$$

60. Критеријум на ослонцу (ослонцима) статичке неодређености, на примеру спречене ротације, за „G“ штап:

$$\int_0^1 [\tilde{\kappa}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) + \Delta \tilde{\kappa}_t(\xi, \delta_0, \delta_t)] \xi \cdot d\xi (=) 0 \quad (7.60)$$

Итерира се  $\delta_t$  до задовољења критеријума.

61. Коначни угиб у тренутку  $t$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t &= \left\langle \frac{u_t}{(L/h^2)(\sigma_a / E_a)} \right\rangle = \\ &= 12(1 - \alpha)^3 \int_0^1 [\tilde{\kappa}_t(\xi, \delta_0, \delta_t) + \Delta \tilde{\kappa}_t(\xi, \delta_0, \delta_t)] k_{ugib}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (7.61)$$

## 8 АПРОКСИМАЦИЈЕ

У поглављу 6.4. једначином (6.8) приказана је форма изражавања резултата (бездимензионог коефицијента прорачунског угиба у времену  $\tilde{u}_t$ , након појаве прслина у пољу -  $\rho \geq \rho_C$ ) за коју ће се сачинити аналитичка апроксимација:

$$\tilde{u}_t(sys, \rho, SET) = \tilde{u}_{t,II}(sys, \rho, SET) - [\tilde{u}_{t,II}(sys, \rho_C, SET) - \tilde{u}_{t,I}(sys, \rho_C, SET)] \cdot TS \quad (8.1)$$

где  $SET$  скраћено означава комбинацију вредности четити параметра,  $SET = (C, \alpha, A_{a2}/A_{a1}, \varphi)$ . Угиб  $\tilde{u}_t$  је приказан уз коришћење новог бездимензионог параметра  $TS$ , чија се употреба промовише у тези:

$$TS = TS(sys, \rho, SET) = \frac{\tilde{u}_{t,II}(sys, \rho, SET) - \tilde{u}_t(sys, \rho, SET)}{\tilde{u}_{t,II}(sys, \rho_C, SET) - \tilde{u}_{t,I}(sys, \rho_C, SET)} \quad (8.2)$$

Изрази (8.1) и (8.2) су еквивалентни. Угиб  $\tilde{u}_t$  ће се, за добијање аналитичке апроксимације, израчунавати према релацији (8.1), тако што ће се сачинити аналитичке апроксимације за три функције које се појављују на десној страни релације (8.1):  $\tilde{u}_{t,II}$ ,  $\tilde{u}_{t,I}$  и  $TS$ . Разлог оваквог, у суштини индиректног, тражења аналитичке апроксимације за функцију  $\tilde{u}_t$  јесте истраживање корелација међу бројним параметрима нелинеарног дела проблема:  $sys, C, \alpha, A_{a2}/A_{a1}, \varphi, \varepsilon_{sk}$ .

Аналитичке форме добијене су тако што су корелације најпре успостављене за мањи број параметара, у форми са неколико слободних коефицијената. Потом су испитиване корелације преосталих параметара и одређиване вредности тих коефицијената. Овај поступак, генерално, не мора да буде резултативан. Резултативност поступка примењеног у тези почива на новим бездимензионим параметрима  $C$  и  $TS$  и трансформацији координатног система у коме се приказују резултати, као што ће бити објашњено у наставку.

Угиб носача без прслина је

$$\tilde{u}_t(sys, \rho, SET) = \tilde{u}_{t,I}(sys, \rho, SET). \quad (8.3)$$

Овај случај је покривен, с обзиром да је  $\tilde{u}_{t,I}$  једна од компоненти која се одређује за потребе израчунавања израза (8.1).

Општи протокол за изналагање аналитичке апроксимације има следеће кораке (1) – (4). Разрађена је **друга варијанта** у смислу објашњења датог у **поглављу 5.4. Прорачун се спроводи са редукованом чврстоћом на затезање**  $f_{ctm,fl,red}$ . Редукција може бити нормативна ( $1 - \sqrt{\beta} = 1 - \sqrt{0,5} \approx 0,3 = 30\%$ , према одредбама Еврокода 2) или друга прикладна, одабрана од стране пројектанта.

(1) Одређују се аналитичке апроксимације за просту греду ( $sys = PG$ ), за функције  $\tilde{u}_{t,II}$ ,  $\tilde{u}_{t,I}$  и  $TS$ , без утицаја скупљања  $\tilde{u}_t = \tilde{u}_t(PG, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0) = \tilde{u}_t(PG, \rho, SET)$ , за израчунавање релације (8.1). Проверава се валидност за разне комбинације параметара  $\rho$ ,  $C$ ,  $\alpha$ ,  $A_{a2}/A_{a1}$  и  $\varphi$ .

(2) Решење за једнострано („G“ штап,  $sys = G$ ) и обострано укљештен носач („K“ штап,  $sys = K$ ) се добија трансформацијом решења за просту греду. У основи трансформације су скалирање независно променљиве  $\rho$  и модификација коефицијената односа угиба између посматраних система. Прво се израчунава угиб одговарајуће просте греде за модификовану вредност  $\rho$ , а потом се прерачунава коригованим односом угиба. Прорачун се поново спроводи без утицаја скупљања.

(3) По добијању решења за  $\tilde{u}_t = \tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0) = \tilde{u}_t(sys, \rho, SET)$ , конструише се аналитичка апроксимација за функцију скупљања  $\omega_{sk} = \omega_{sk}(sys, \rho, SET)$ , према релацији (6.11)

$$\tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk}) = \tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0) \times [1 + \varepsilon_{sk} \times \omega_{sk}(sys, \rho, SET)] \quad (6.11)$$

Утицај скупљања се уводи према релацији (6.11) и објашњењима датим у наставку у поглављу 8.3. Функције  $\omega_{sk}(G, \rho, SET)$  и  $\omega_{sk}(K, \rho, SET)$  имају исту аналитичку форму као и  $\omega_{sk}(PG, \rho, SET)$ , с тим да су поједини коефицијенти другачији. Бездимензиони репрезент утицаја скупљања је  $\tilde{\omega}_{sk}(PG, \rho, SET)$ , повезан са  $\omega_{sk}(sys, \rho, SET)$  релацијом (8.29). Поново се проверава функционалност за разне комбинације параметара  $\rho$ ,  $C$ ,  $\alpha$ ,  $A_{a2}/A_{a1}$ ,  $\varphi$  и  $\varepsilon_{sk}$ .

(4) Угиб крајњег ( $sys = KP$ ) или унутрашњег ( $sys = UP$ ) поља континуалног носача једнаких или неједнаких распона одређује се тако што се прво одреди угиб  $G$  или  $K$ , носача истих карактеристика, према (2) (без скупљања) или (3) (ако се урачунава и утицај скупљања), а потом се резултат множи (модификованим) коефицијентом односа угиба који одговара еластичном укљештењу.

## 8.1 Протокол – тачка (1)

### 8.1.1 Израчунавање $\tilde{u}_{t,II}$

Угиб "чистог" стања II зависи од свих параметара ( $sys, \rho, \alpha, A_{a2}/A_{a1}, \varphi, \varepsilon_{sk}$ ) осим  $C$ . Као што је напред објашњено, прво се израчунава угиб без скупљања:

$$\tilde{u}_{t,II}(PG, \rho, \alpha, A_{a2}/A_{a1}, \varphi) = \tilde{u}_{t,II}(PG, \rho, SET) \quad (8.4)$$

где је  $SET$  употребљен ради краћег писања, с тим да вредност  $C$  нема утицаја.

Ради прегледности израза, са  $\rho_1$  означава се

$$\rho_1 = [0,28 + 0,3\varphi(1 + 0,1\varphi)]\rho, \quad (8.5)$$

а апроксимација за  $\tilde{u}_{t,II}$  има облик:

$$\tilde{u}_{t,II}(PG, \rho, SET) = \frac{0,125[1 + 0,1(A_{a2}/A_{a1})] + [1,93 - 0,25(A_{a2}/A_{a1})]\rho_1}{1 + [3 + 4(A_{a2}/A_{a1})(1,8 - 6\alpha)]\rho_1} \quad (8.6)$$

### 8.1.2 Израчунавање $\tilde{u}_{t,I}$

Угиб стања I зависи од свих параметара  $sys, \rho, \alpha, A_{a2}/A_{a1}, \varphi, \varepsilon_{sk}$ , осим  $C$ . Као што је напред објашњено, прво се израчунава угиб без скупљања:

$$\tilde{u}_{t,I}(PG, \rho, \alpha, A_{a2}/A_{a1}, \varphi) = \tilde{u}_{t,I}(PG, \rho, SET) \quad (8.7)$$

где је  $SET$  употребљен ради краћег писања, с тим да вредност  $C$  нема утицаја.

Поново, ради прегледности израза, са  $\rho_2$  и  $\rho_3$  означавају се:

$$\rho_2 = 0,294(1 + 1,2\varphi)\rho \quad (8.8)$$

$$\rho_3 = (1,28 - 2,8\alpha)\rho_2 \quad (8.9)$$

Апроксимација за  $\tilde{u}_{t,I}$  има облик:

$$\tilde{u}_{t,I}(PG, \rho, SET) = 3,2 \frac{1 + (0,8 + 2\alpha)\rho_2}{1 + [1 + (7 - 17\alpha)(A_{a2}/A_{a1})]\rho_2} \frac{1 + \rho_2}{1 + \rho_3} \rho_3 (1 - \sqrt[3]{\rho_3}) \quad (8.10)$$

### 8.1.3 Израчунавање $TS$

Увођење параметра  $TS$  у практичном смислу омогућава промену координатног система у коме се описује функција угиба  $\tilde{y}_i$ . Трансформацијом координата  $C$  – линије (које су изражавале вредност бездимензионог коефицијента угиба у функцији пондерисаног коефицијента армирања  $\rho$  при фиксираним вредностима свих осталих параметара) такође бивају трансформисане: мењају облик и нумеричке вредности, у складу са изменом независно променљиве.

У складу са претходним, нормирано садејство затегнутог бетона  $TS$  одређује се према (8.2) при  $sys = PG$ .

При израчунавању  $TS$  према (8.2) користи се гранични коефицијент армирања  $\rho_C$ , дефинисан у поглављу 6.3. Као што је назначено у релацији (6.4),  $\rho_C$ , генерално, зависи од три параметра:  $\rho_C = \rho(C, \alpha, A_{a2}/A_{a1})$ . Међутим, може се показати да је утицај притиснуте армиране мали. У табели 8.1 дате су вредности граничног коефицијента армирања  $\rho_C$  за неколико вредности  $C$  и  $\alpha = 0,1$  и  $\alpha = 0,2$ , при  $A_{a2}/A_{a1} = 0$  и при  $A_{a2}/A_{a1} = 1,0$ .

Табела 8.1: Вредности коефицијента  $\rho_C$  за неколико комбинација вредности параметара  $C$ ,  $\alpha$  и  $A_{a2}/A_{a1}$

$\rho_C$	$\alpha = 0,1$			$\alpha = 0,2$		
	$C \rightarrow$	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10
$A_{a2}/A_{a1} = 0$ (1)	0,01108	0,02324	0,03647	0,01398	0,02913	0,04532
$A_{a2}/A_{a1} = 1,0$ (2)	0,01122	0,02387	0,03795	0,01378	0,02928	0,04630
$[(2) - (1)]/(1) \%$	1,3	2,7	4,0	-1,4	0,5	2,1

Из резултата приказаних у табели 8.1 види се да се вредности  $\rho_C$  за  $A_{a2}/A_{a1} = 1,0$  разликују за свега неколико процената од вредности  $\rho_C$  за  $A_{a2}/A_{a1} = 0$ , при истим вредностима  $C$  и  $\alpha$ . Стога се за потребе израде аналитичке апроксимације може усвојити да  $\rho_C$  не зависи од односа  $A_{a2}/A_{a1}$ . Прикладност ове претпоставке потврђена је тестирањем аналитичких апроксимација у деветом поглављу.  $\rho_C$  се преко преостала два релевантна параметра изражава (апроксимира) као:

$$\rho_C = \rho(C, \alpha, A_{a2}/A_{a1} = 0) = C (0,22C + \alpha^2 + 0,3\alpha + 0,17) \quad (8.11)$$

„Нормирање“ садржано у дефиницији (8.2)  $TS$  (разлика  $[\tilde{u}_t(\rho) - \tilde{u}_{t,II}(\rho)]$  подељена је разликом  $[\tilde{u}_{t,II}(\rho_C) - \tilde{u}_{t,I}(\rho_C)]$ ) има повољне прорачунске ефекте. Они се, пре свега, огледају у томе да, као и  $\rho_C$ ,  $TS$  веома мало зависи од притиснуте арматуре, али, што је посебно значајно, практично не зависи од величине коефицијента течења  $\varphi$ .

За комплетирање укупног ефекта раздвајања утицаја појединих параметара потребно је још и нормирање пондерисаног коефицијента армирања. **Нови бездимензиони параметар, нормирани пондерисани коефицијент армирања  $\tilde{\rho}$**  дефинише се као:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\rho, C, \alpha, A_{a2}/A_{a1}) = \frac{\rho - \rho_C}{C}. \quad (8.12)$$

С обзиром да је већ установљено да  $\rho_C$  практично не зависи од  $A_{a2}/A_{a1}$ , тако и  $\tilde{\rho}$  зависи само од  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\rho, C, \alpha)$ .

Применом коефицијента  $\tilde{\rho}$  изводи се коначна трансформација почетног координатног система за решавање проблема:  $(\rho, \tilde{u}_t) \rightarrow (\tilde{\rho}, TS)$ . Показује се да је дефиниција  $TS$  у функцији  $\tilde{\rho}$  стабилна (независна) од свих појединачних параметара модела, изузев  $\alpha$ , и, што је нарочито погодно, сагласна са горњим протоколом (1) – (4), када се мења параметар  $sys$ . Другим речима, релација између бездимензионих параметара  $TS$  и  $\tilde{\rho}$  не зависи (или веома мало зависи) од параметара  $C$ ,  $A_{a2}/A_{a1}$  и  $\varphi$  (ово је приказано у поглављу (8.5). **Последица тога је да се у координатном систему  $(\tilde{\rho}, TS)$  читаве фамилије  $C$  – линија**, добијене варирањем параметара  $C$ ,  $A_{a2}/A_{a1}$  и  $\varphi$  **сажимају у једну линију**, која зависи само од преосталог параметра  $\alpha$ .  $TS$  има аналитичку (апроксимативну) једначину:

$$TS = \frac{1}{[(1 + (4 - 8\alpha)\tilde{\rho})]^2} \quad (8.13)$$

Једначина (8.13) се односи на  $sys = PG$ , али је, као што је већ напоменуто, сагласна са протоколом (1) – (4).

## 8.2 Протокол – тачка (2)

За једнострано укљештен елемент („G“ штап,  $sys = G$ ), угиб  $\tilde{u}_t(G, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$  без утицаја скупљања добија се на основу угиба  $\tilde{u}_t(PG, \rho_G, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$  коресподентне просте греде:

$$\tilde{u}_t(G, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0) = \frac{1}{1,6} \frac{\tilde{u}_t(PG, \rho_G, SET, \varepsilon_{sk} = 0)}{1 + k_G \rho_G} R(G, \rho, \rho_C) \quad (8.14)$$

где су:

$$\rho_{sys} = \rho_G = 1,1\rho \quad (8.15)$$

$$k_G = \sqrt{(A_{a2} / A_{a1})} (0,75 - 0,9\alpha) \quad (8.16)$$

$$R(G, \rho, \rho_C) = \begin{cases} 1 + 0,15 \left( \frac{1,8\rho_G}{\rho_C} - 1 \right), & \rho_G < \rho_C \\ 1, & \rho_G \geq \rho_C \end{cases} \quad (8.17)$$

За обострано укљештен елемент („K“ штап,  $sys = K$ ), угиб  $\tilde{u}_t(K, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$  без утицаја скупљања добија се на основу угиба  $\tilde{u}_t(PG, \rho_K, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$  коресподентне просте греде:

$$\tilde{u}_t(K, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0) = \frac{1}{2,3} \frac{\tilde{u}_t(PG, \rho_K, SET, \varepsilon_{sk} = 0)}{1 + k_K \rho_K} R(K, \rho, \rho_C) \quad (8.18)$$

где су:

$$\rho_{sys} = \rho_K = 1,2\rho \quad (8.19)$$

$$k_K = \sqrt{(A_{a2} / A_{a1})} (1,8 - 2,9\alpha) \quad (8.20)$$

$$R(K, \rho, \rho_C) = \begin{cases} 1 + 0,30 \left( \frac{2,0\rho_K}{\rho_C} - 1 \right), & \rho_K < \rho_C \\ 1, & \rho_K \geq \rho_C \end{cases} \quad (8.21)$$

Коефицијенти  $R(G, \rho, \rho_C)$  и  $R(K, \rho, \rho_C)$  су фактори увећања угиба ( $R(sys, \rho, \rho_C)$ ) дефинисани у поглављу 6.5 релацијом (6.10).



### 8.3 Протокол – тачка (3)

Допринос угиба услед скупљања укупном угибу елемента, када се он прорачунава по моделу приказаном у поглављу 4.1 и за неекстемне вредности дилатације скупљања, углавном није велики у односу на угиб услед оптерећења (ретко прелази четвртину укупног угиба). У релативном смислу, величина удела прорачунског угиба услед скупљања у укупном угибу постаје знатнија само онда када је угиб услед оптерећења мали, а скупљање велико.

За аналитичко израчунавање доприноса скупљања укупном угибу елемента изабран приступ у облику увећања угиба услед оптерећења и течења (релација (6.11)). У основном моделу Еврокода 2, међутим, прорачунски угиб услед скупљања описан је другачијим релацијама у односу на угиб услед течења. То значи да коефицијент увећања  $\omega_{sk}$  не може да буде описан једноставном функцијом, уколико се тежи прецизнијој апроксимацији.

У наставку је приказана сложенија апроксимација коефицијента  $\omega_{sk}$ , која уважава његове зависности од параметара модела. Ова апроксимација је добијена вишепараметарском анализом корелација као и у случају угиба услед оптерећења и течења. Међутим, имајући у виду претходна објашњења у погледу удела скупљања у формирању укупног угиба, може бити прагматично да се за процену удела скупљања изабере мање прецизна, али једноставнија форма: у нумеричком смислу укупно апроксимативно решење такође може да буде задовољавајуће.

Ради прегледности понавља се дефиниција (6.11):

$$\tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk}) = \tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0) \times [1 + \varepsilon_{sk} \times \omega_{sk}(sys, \rho, SET)] \quad (6.11)$$

За израчунавање  $\omega_{sk} = \omega_{sk}(sys, \rho, SET)$  у релацији (6.11) израчунавају се:

$$p_1(PG) = [1 - (A_{a2}/A_{a1})](0,245 - 0,3\alpha) \quad (8.22)$$

$$p_2(PG) = 0,38 - 0,12(A_{a2}/A_{a1}) + [1 + (A_{a2}/A_{a1})][0,2(A_{a2}/A_{a1}) - 0,1]\alpha - 0,03\varphi \quad (8.23)$$

$$p_3(PG) = 0,39 - 0,12(A_{a2}/A_{a1}) + 0,3(A_{a2}/A_{a1})\alpha - 0,03\varphi \quad (8.24)$$

$$p_i(G) = p_i(PG) + 0,02[1 - (A_{a2}/A_{a1})], \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.25)$$

$$p_i(K) = p_i(PG) + 0,04[1 - (A_{a2}/A_{a1})], \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.26)$$

$$p_4(sys) = \frac{p_3(sys) - 0,7\rho_{sys}}{1 + 0,7\rho_{sys}} \quad (8.27)$$

$$\tilde{\omega}_{sk}(sys, \rho, SET) = \begin{cases} p_1(sys), & \rho_{sys} < \rho_C \\ \min[p_2(sys), p_4(sys)] \times (1 - 3C \frac{\rho_C}{\rho_{sys}}), & \rho_{sys} \geq \rho_C \end{cases} \quad (8.28)$$

$\tilde{\omega}_{sk}(PG, \rho, SET)$  представља релативно повећање угиба просте греде од оптерећења (коме одговара референтни напон  $\sigma_{a1}$  од 250 MPa) услед референтне дилатације скупљања (као што је објашњено у поглављу 6.5). За референтну дилатацију скупљања усвојено је  $\varepsilon_{sk} = 0,0005 = 0,5 \text{ ‰}$ . За конкретне вредности дилатације скупљања и оптерећење са напоном  $\sigma_{a1}$  (MPa, од квази-сталног оптерећења), коефицијент повећања угиба  $\omega_{sk}(PG, \rho, SET)$  у изразу (6.11) износи

$$\omega_{sk}(PG, \rho, SET) = \tilde{\omega}_{sk}(PG, \rho, SET) \frac{1}{0,5} \frac{250}{\sigma_{a1}} \quad (8.29)$$

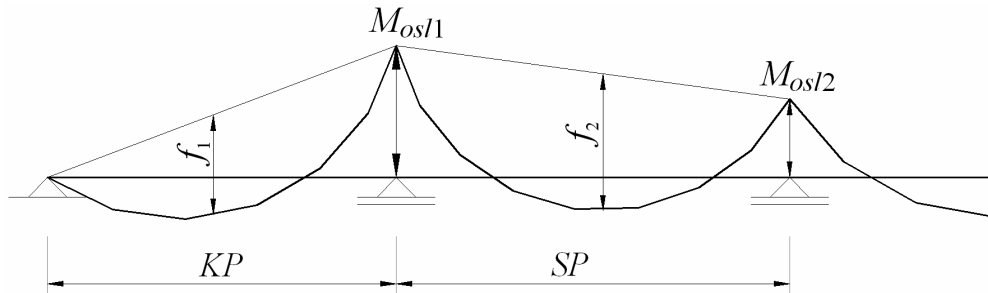
У изразу (6.11) дилатација скупљања  $\varepsilon_{sk}$  се такође уноси у ‰.

У поглављу 8.6 приказани су дијаграми функције  $\tilde{\omega}_{sk}(PG, \rho, SET)$ . Функционалност приступа садржаног у релацијама (6.11) и (8.29) проверена је упоређивањем „тачних“ (еталонских) вредности  $\tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk})$  – које се добијају поступком нумеричког интегралења према ригорозном методу Еврокода 2 и апроксимативних вредности добијених применом алгебарских функција приказаних у поглављима 8.1 – 8.3 на око 13000 нумеричких примера који укључују утицај скупљања. Ово тестирање је објашњено у поглављу 9.

#### 8.4 Протокол – тачка (4)

Резултат за носаче са еластичним укљештењима (вредност бездимензионог коефицијента угиба  $\tilde{u}_t$ ) добија се полазећи од вредности  $\tilde{u}_t$  за исти такав носач, али са пуним укљештењем. То значи да се за крајња поља континуалних носача ( $sys = KP$ ) узима вредност за одговарајући „G“ штап ( $sys = G$ ), док се за унутрашња поља ( $sys = UP$ ) користи „K“ штап ( $sys = K$ ).

У другом кораку врши се модификација вредности множењем коефицијентом чија вредност зависи од степена укљештења. Потребне величине за одређивање коефицијената модификације приказане су на слици (8.1).



Слика 8.1 Дефиниција величина за изразе (8.30) – (8.33)

За крајња поља:

$$\tilde{u}_t(KP, \rho, SET, \varepsilon_{sk}) = \left(1,9 - 0,85 \frac{M_{osl1}}{f_1}\right) \cdot \tilde{u}_t(G, \rho, SET, \varepsilon_{sk}), \quad (8.30)$$

$$\text{при } 0,7 \leq \frac{M_{osl1}}{f_1} \leq 1,2 \quad (8.31)$$

За унутрашња поља:

$$\tilde{u}_t(UP, \rho, SET, \varepsilon_{sk}) = (0,9) \times \left(5,4 - 3,3 \frac{M_{osl1} + M_{osl2}}{f_2}\right) \cdot \tilde{u}_t(K, \rho, SET, \varepsilon_{sk}), \quad (8.32)$$

$$\text{при } 1,1 \leq \frac{M_{osl1} + M_{osl2}}{f_2} \leq 1,6 \quad (8.33)$$

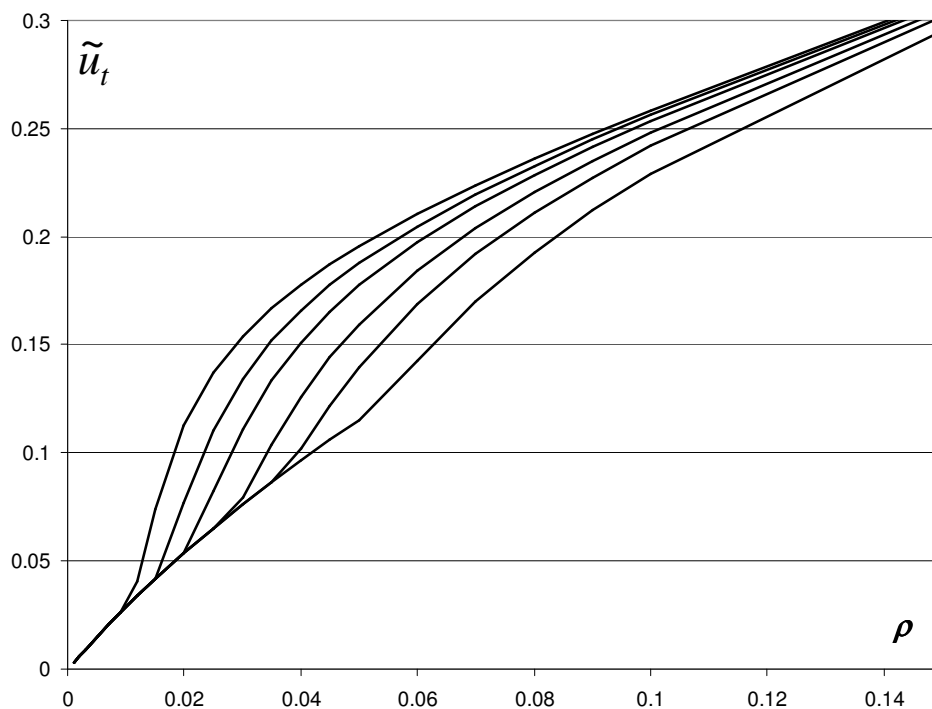
Израз (8.30) не прелази аутоматски у израз за „G“ штап када је  $M_{osl1} = f_1$ . То је стога што код континуалних носача са три и више поља након прерасподеле долази до ротације ослоначког пресека ка првом пољу и угиб бива нешто већи. G штап моделира само крајње поље континуалног носача са два једнака поља. Исто тако, мултипликатор (0,9) у (8.32) треба примењивати само код првог унутрашњег поља, чији се угиб смањује услед ротације пресека изнад ослонца према крајњем пољу. За друго унутрашње поље фактор је 1,0. С обзиром да угиби унутрашњих поља нису велики, може се увек изоставити фактор 0,9, на страни сигурности.

## 8.5 Нормирано садејство затегнутог бетона – параметар $TS$

Бездимензиони параметар  $TS$ , уведен релацијом (6.9) у поглављу 6.5 добија своју пуну вредност када се употреби у комбинацији са нормираним коефицијентом армирања дефинисаним релацијом (8.12)

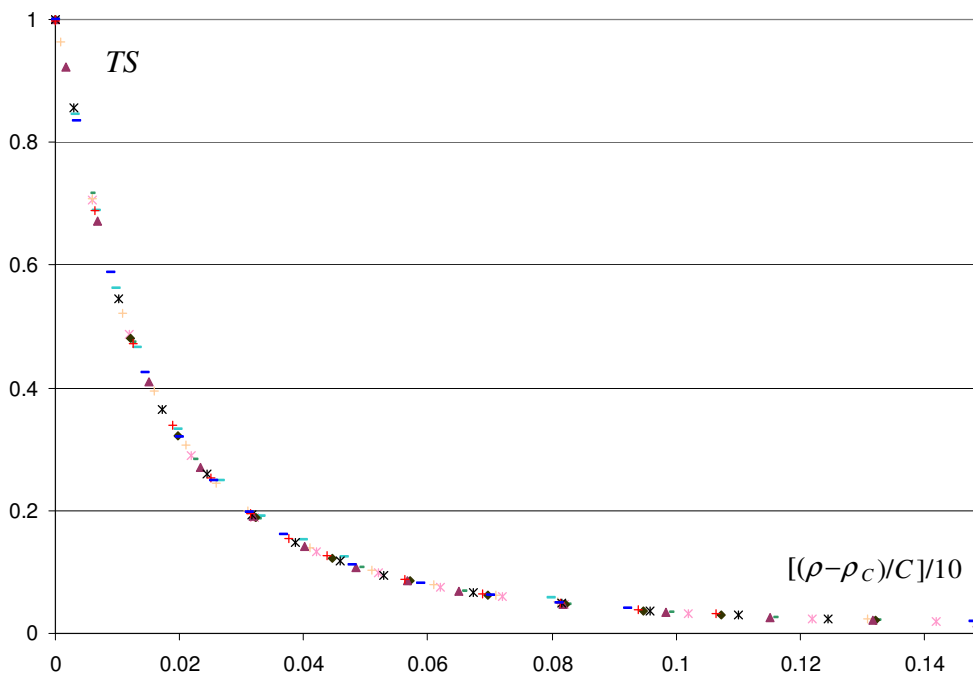
$$\tilde{\rho} = \frac{\rho_{sys} - \rho_C}{C}. \quad (8.12)$$

Сама дефиниција (6.9) параметра  $TS$  представља линеарну трансформацију функције  $\tilde{u}_t(\rho, SET)$ . Када је функција  $\tilde{u}_t$  приказана као  $C$  – линија променљиве  $\rho$  при фиксираним осталим параметрима,  $TS$  представља линеарну трансформацију те  $C$  – линије. Прелазак са  $\rho$  на  $\tilde{\rho}$  такође представља линеарну трансформацију независно променљиве  $\rho$ . Када се ураде обе трансформације серија  $C$  – линија прелази у серију  $TS$  линија изражених преко нове независно променљиве  $\tilde{\rho}$ . На слици 8.2, као пример, приказана је серија  $C$  – линија за просту греду и параметре у  $SET$ -у:  $\alpha = 0,1$ ,  $\varphi = 2,5$  и  $A_{a2}/A_{a1} = 0$ , са вредностима за  $C = 0,05, 0,07, 0,09, 0,12, 0,15$  и  $0,20$  од највише до најниже линије на дијаграму.



Слика 8.2 Серија  $C$  – линија ( $\tilde{u}_t$  - линија) за просту греду

$TS$  – линије добијене трансформацијом  $C$  – линија са слике 8.2, уз измену независно променљиве  $\rho$  у  $\tilde{\rho}$  приказане су на слици 8.3 (уместо  $TS$  - линија приказане су серије маркера за сваку од линија).

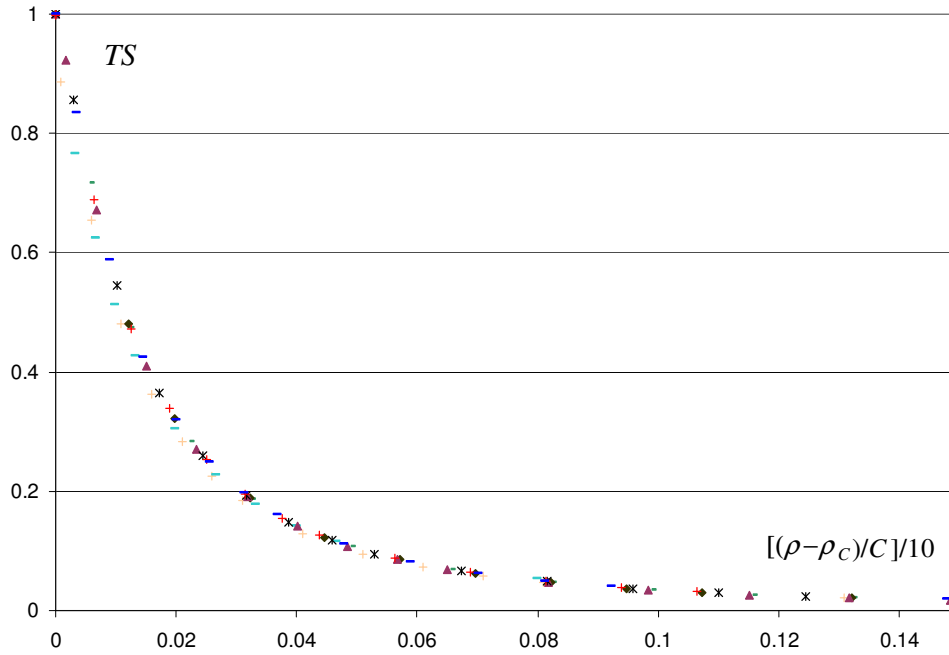


Слика 8.3 Серија  $TS$  – линија за просту греду

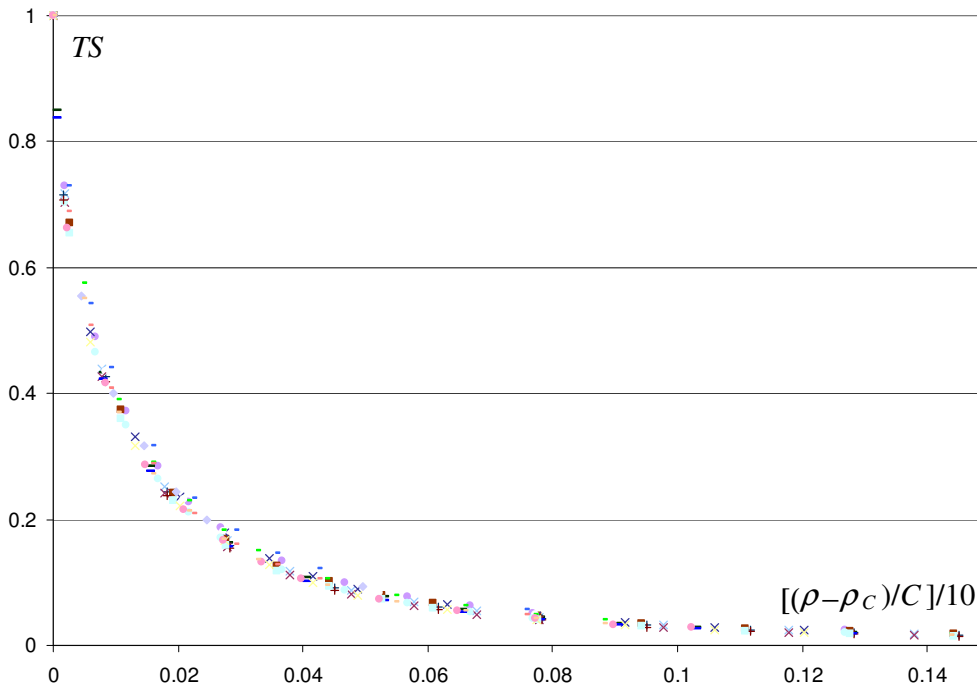
Као што се види са слике 8.3, након трансформације дошло је до потпуног преклапања  $C$  – линија. То говори да су  $TS$  и  $\tilde{\rho}$  добро засновани параметри модела (природне координате).

У овом координатном систему серија  $C$  – линија (то јест функција  $\tilde{u}_t$ ) описује се једном аналитичком једначином, чија је апроксимативна форма (8.13) приказана у поглављу 8.1.3. Као што је напред споменуто, серија је конструисана за одређене вредности параметара  $\alpha$ ,  $\varphi$  и  $A_{a2}/A_{a1}$ . Трансформација независно променљиве  $\rho$  у  $\tilde{\rho}$  је практично независна од  $A_{a2}/A_{a1}$ , с обзиром да  $\rho_C$  мало зависи од присуства притиснуте арматуре, као што је показано у поглављу 8.1.3 у табели 8.1. То, и слична (пропорционална) промена свих величина у разломку који дефинише параметар  $TS$  (релација (6.9)) доводи до тога да  $TS$  практично не зависи од односа  $A_{a2}/A_{a1}$ . Ова чињеница је илустрована дијаграмом на слици 8.4 на коме

су приказане две серије трансформисаних  $C$  – линија: једна за случај без притиснуте арматуре, док је код друге она максимална -  $A_{a2}/A_{a1} = 1,0$ .



Слика 8.4 Преклопљене серије  $TS$  – линија за  $A_{a2}/A_{a1} = 0$  и  $A_{a2}/A_{a1} = 1,0$

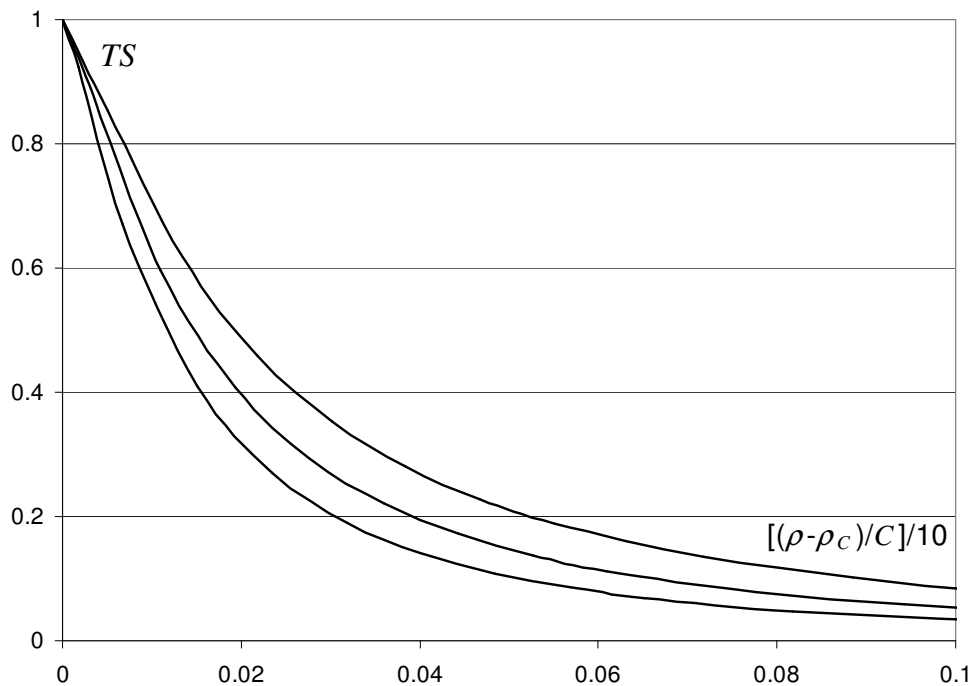


Слика 8.5 Преклопљене серије  $TS$  – линија за  $\varphi = 1,0$  и  $\varphi = 2,5$

На слици 8.4 са две серије  $TS$  – линија за  $A_{a2}/A_{a1} = 0$  и  $A_{a2}/A_{a1} = 1,0$  поново се, као и на слици 8.3 која садржи само једну серију, маркерима практично оцртава само једна линија. То потврђује да  $TS$  практично не зависи од присуства притиснуте арматуре.

На сличан начин може се проверити (не)зависност  $TS$  од вредности коефицијента течења  $\varphi$ . На слици 8.5 приказане су две серије  $TS$  – линија за  $\varphi = 1,0$  и  $\varphi = 2,5$ . Маркери поново оцртавају једну линију, али је овај пут „траг“ нешто шири. То означава постојање благе зависности параметра  $TS$  од вредности коефицијента течења  $\varphi$ . Ово је очекивано, с обзиром да се чиниоци  $\tilde{y}_t$ ,  $\tilde{y}_{t,II}$  и  $\tilde{y}_{t,I}$  у разломку релације (6.9) која дефинише  $TS$  не мењају потпуно пропорционално при измени вредности коефицијента течења.  $TS$  се, међутим, уз благу апроксимацију, може поново апроксимирати једном (средњом) линијом тако да практично не зависи од коефицијента течења  $\varphi$ . Тестирање апроксимације, приказано у поглављу 9, указује да је резултат задовољавајући.

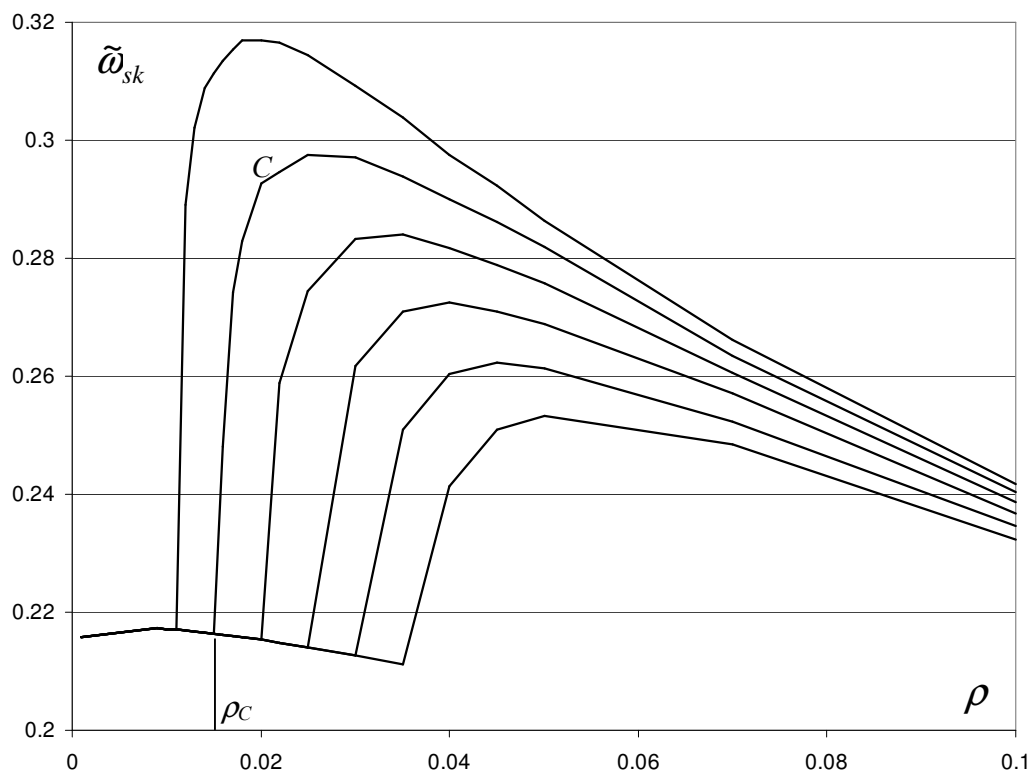
Параметар  $TS$  зависи од положаја арматуре у пресеку израженог коефицијентом  $\alpha$ . Ова зависност је приказана на слици 8.6.



Слика 8.6  $TS$  – линије за  $\alpha = 0$  (најнижа), 0,1 и 0,2 (највиша)

## 8.6 Бездимензиони коефицијент утицаја скупљања $\tilde{\omega}_{sk}$

Бездимензиони коефицијент  $\tilde{\omega}_{sk}(PG, \rho, SET)$  дефинисан релацијама (8.22) – (8.29) уводи утицај скупљања бетона на увећање угиба према релацији (6.11). На дијаграму на слици 8.6 приказан је коефицијент  $\tilde{\omega}_{sk}$  у функцији основне независне променљиве - пондерисаног коефицијента армирања  $\rho$ . Дијаграм је урађен за просту греду,  $\varepsilon_{sk} = 0,5 \text{ ‰}$ ,  $\sigma_a = 250 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $\varphi = 2,0$  и  $A_{a2}/A_{a1} = 0$ . Линије одговарају  $C$  – линијама за вредности  $C = 0,05, 0,07, 0,09, 0,11, 0,13$  и  $0,15$ , од највише ка најнижој.



Слика 8.7 Бездимензиони коефицијент  $\tilde{\omega}_{sk}$  увећања угиба услед скупљања

Тренд коефицијента  $\tilde{\omega}_{sk}$ , као што се може видети на слици 8.7 је следећи: До отварања прелина ( $\rho < \rho_c$ ) вредност је приближно константна (за  $SET$  на слици 8.7 је то нешто мање од 0,22 – означава повећање угиба од оптерећења услед скупљања за око 22 %, уколико је  $\varepsilon_{sk} = 0,5 \text{ ‰}$ , а оптерећење даје напон у арматури од  $\sigma_a = 250 \text{ MPa}$  (рачунато за пресек са прслином) и коефицијет течења је  $\varphi = 2,0$ ).



По настанку првих прслина ( $\rho$  нешто мало веће од  $\rho_C$ ) вредност коефицијента  $\tilde{\omega}_{sk}$  брзо расте – линије су веома стрме, указујући на увећани ефекат скупљања код носача у стању II на угиб у односу на стање I, у моделу Еврокода 2 приказаном у поглављу 4.1. Са повећањем вредности  $\rho$  (што, дуж једне  $C$  – линије, одговара порасту оптерећења) удео угиба услед скупљања се смањује. Разлог је, у ствари, повећање угиба услед оптерећења и течења бетона -  $\tilde{\omega}_{sk}$  изражава релативни однос увећања угиба услед скупљања и угиба услед оптерећења и течења бетона.

### 8.7 Примери прорачуна угиба употребом алгебарских апроксимација

У наредна два примера приказаће се употреба алгебарских апроксимација за израчунавање угиба конкретних носача ригорозним методом Еврокода 2. Први пример је статички одређен носач – проста греда. Други пример је континуални носач са два једнака распона.

#### 8.7.1 Пример 1: Проста греда

Срчунава се угиб просто ослоњене плоче која носи у једном правцу. Распон плоче је  $5,5 \text{ m}$ , дебљина  $d = 20,0 \text{ cm}$ , а статичка висина је  $h = 17,5 \text{ cm}$ . Површина затегнуте арматуре је  $11,3 \text{ cm}^2/\text{m}$ , а притиснуте арматуре нема. Квази-стално оптерећење износи  $9,0 \text{ kN/m}^2$ . Карактеристике бетона су  $E_b(t_0) = 33,0 \text{ GPa}$  и  $f_{bzs} = 2,9 \text{ MPa}$ . Модул арматуре је  $E_a = 200 \text{ GPa}$ . Коефицијент течења је  $\varphi = 2,2$ , а дилатација скупљања има вредност  $\varepsilon_{sk} = 0,4 \%$ .

- Карактеристике пресека:

$$n = 200/33,0 = 6,061;$$

$$\rho = \frac{6,061 \times 11,3}{100 \times 17,5} = 0,03914; \quad (7.1)$$

$$\alpha = \frac{2,5}{20,0} = 0,125; \quad (7.2)$$

$$\eta = A_{a2}/A_{a1} = 0. \quad (7.3)$$

- Карактеристике напрезања:

$M_{max} = 9,0 \times 5,5^2 / 8 = 34,03 \text{ kNm / m'}$  - максимални момент у пољу;

$\sigma_a = 187,3 \text{ MPa}$  - напон у арматури за пресек са максималним моментом у пољу, одређен по моделу за пресек са прслином. Напон се одређује уобичајеним методама отпорности материјала, са занемарењем учешћа затегнутог бетона. Положаје неутралне линије се може добити, на пример, према релацији (7.16);

$$f_{ctm,fl,red} = \sqrt{0,5 \times 2,9} = 2,05 \text{ MPa}$$

$$C = \frac{6,061 \times 2,05}{187,3} = 0,06633; \quad (7.39)$$

$$\rho_C = 0,06633 \times (0,22 \times 0,06633 + 0,125^2 + 0,3 \times 0,125 + 0,17) = 0,01577. \quad (8.11)$$

- Израчунавање  $\tilde{u}_{t,II}(PG, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$  и  $\tilde{u}_{t,II}(PG, \rho_C, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$

$$\rho_1(\rho) = [0,28 + 0,3 \times 2,2 \times (1 + 0,1 \times 2,2)] \times 0,03914 = 0,04247 \quad (8.5)$$

$$\tilde{u}_{t,II}(PG, \rho) = \frac{0,125 \times [1 + 0,1 \times 0] + [1,93 - 0,25 \times 0] \times 0,04247}{1 + [3 + 4 \times 0 \times (1,8 - 6 \times 0,125)] \times 0,04247} = 0,1836 \quad (8.6)$$

$$\rho_1(\rho_C) = [0,28 + 0,3 \times 2,2 \times (1 + 0,1 \times 2,2)] \times 0,01577 = 0,01711 \quad (8.5)$$

$$\tilde{u}_{t,II}(PG, \rho_C) = \frac{0,125 \times [1 + 0,1 \times 0] + [1,93 - 0,25 \times 0] \times 0,01711}{1 + [3 + 4 \times 0 \times (1,8 - 6 \times 0,125)] \times 0,01711} = 0,1503 \quad (8.6)$$

- Израчунавање  $\tilde{u}_{t,I}(PG, \rho_C, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$  (поглавље 8.1.2):

$$\rho_2(\rho_C) = 0,294 \times (1 + 1,2 \times 2,2) \times 0,01577 = 0,01688 \quad (8.8)$$

$$\rho_3(\rho_C) = (1,28 - 2,8 \times 0,125) \times 0,01688 = 0,01569 \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{t,I}(PG, \rho_C) = 3,2 \times \frac{1 + (0,8 + 2 \times 0,125) \times 0,01688}{1 + [1 + (7 - 17 \times 0,125) \times 0] \times 0,01688} \times \frac{1 + 0,01688}{1 + 0,01569} \times \\ \times 0,01569 \times (1 - \sqrt[3]{0,01569}) = 0,0377 \end{aligned} \quad (8.10)$$

- Израчунавање  $TS$  (поглавље 8.1.3):

$$\tilde{\rho} = \frac{0,03914 - 0,01577}{0,06633} = 0,3523; \quad (8.12)$$

$$TS = \frac{1}{[(1 + (4 - 8 \times 0,125) \times 0,3523)]^2} = 0,2364. \quad (8.13)$$

- Коэффициент угиба  $\tilde{u}_t$  без скупљања ( $\tilde{u}_t(PG, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$ ):

$$\tilde{u}_t(PG, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0) = 0,1836 - [0,1503 - 0,0377] \times 0,2364 = 0,1570. \quad (8.1)$$

- Израчунавање  $\omega_{sk}$  – утицај скупљања:

Када је  $\rho > \rho_C$  израчунавају се:

$$p_2(PG) = 0,38 - 0,12 \times 0 + [1 + 0] \times [0,2 \times 0 - 0,1] \times 0,125 - 0,03 \times 2,2 = 0,3015; \quad (8.23)$$

$$p_3(PG) = 0,39 - 0,12 \times 0 + 0,3 \times 0 \times 0,125 - 0,03 \times 2,2 = 0,3240; \quad (8.24)$$

$$p_4(PG) = \frac{0,3240 - 0,7 \times 0,03914}{1 + 0,7 \times 0,03914} = 0,2887; \quad (8.27)$$

$$\tilde{\omega}_{sk}(PG) = 0,2887 \times (1 - 3 \times 0,06633 \times \frac{0,01577}{0,03914}) = 0,2655; \quad (8.28)$$

$$\omega_{sk}(PG) = 0,2655 \times \frac{1}{0,5} \times \frac{250}{187,3} = 0,7088. \quad (8.29)$$

- Укупни бездимензиони коэффициент угиба

$$\tilde{u}_t(PG, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0,4 \%) = 0,1570 \times [1 + 0,4 \times 0,7088] = 0,1570 \times 1,284 = 0,2016. \quad (6.11)$$

- Угиб од квази-сталног оптерећења износи:

$$u_t = 0,2016 \times \frac{(5,5 \times 100)^2}{17,5} \times \frac{187,3}{200000} = 3,26 \text{ cm}. \quad (6.6)$$

Еталонска вредност бездимензионог коефицијента угиба, добијена према ригорозној методи Еврокода 2, нумеричком интеграцијом са поделом распона на 50 једнаких делова износи  $\tilde{u}_t(PG, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0,4 \%) = 0,2023$ . Вредност угиба добијена на овај начин је 3,27 cm, што је практично исти резултат као и онај добијен коришћењем алгебарске апроксимације.

### 8.7.2 Пример 2: Континуална греда

Срачунава се угиб континуалне плоче са два једнака распона под једнакоподељеним оптерећењем. Распон плоче је 5,5 m, а дебљина  $d = 16,0 \text{ cm}$ . Статичка висина је  $h = 13,5 \text{ cm}$ . Квази-стално оптерећење је  $8,0 \text{ kN/m}^2$ . Површина затегнуте арматуре у пољу је  $5,35 \text{ cm}^2/\text{m}$ , а притиснуте арматуре  $\frac{1}{2} \times 5,35 \text{ cm}^2/\text{m}$ . Арматура код ослонца је пропорционална односу момената над ослонцем и у пољу на начин објашњен у поглављу 13.1 ( $A_{a1} = 9,85 \text{ cm}^2/\text{m}$ ,  $A_{a2} = \frac{1}{2} \times 9,85 \text{ cm}^2/\text{m}$ ).

Карактеристике бетона су  $E_b(t_0) = 33,0 \text{ GPa}$  и  $f_{bzs} = 2,9 \text{ MPa}$ . Модул арматуре је  $E_a = 200 \text{ GPa}$ . Коефицијент течења је  $\varphi = 3,0$ , а дилатација скупљања  $\varepsilon_{sk} = 0,6 \text{ ‰}$ .

Прорачун се спроводи за половину носача, као за једнострано укљештени носач ( $\text{sys} = G$ ), према поглављу 8.2.

- Карактеристике пресека:

$$n = 200/33,0 = 6,061;$$

$$\rho = \frac{6,061 \times 5,35}{100 \times 13,5} = 0,02402; \quad (7.1)$$

$$\alpha = \frac{16,0 - 13,5}{16,0} = 0,1563; \quad (7.2)$$

$$\eta = A_{a2}/A_{a1} = 0,5 \quad (7.3)$$

- Карактеристике напрезања:

$$M_{max} = (9/128) \times 8,0 \times 5,5^2 = 17,02 \text{ kNm/m} - \text{максимални момент у пољу};$$

$$\sigma_a = 252 \text{ MPa} - \text{напон у арматури за пресек са максималним моментом у пољу};$$

$$f_{ctm,fl,red} = \sqrt{0,5} \times 2,9 = 2,05 \text{ MPa}$$

$$C = \frac{6,061 \times 2,05}{252} = 0,04931; \quad (7.39)$$

$$\rho_C = 0,04931 \times (0,22 \times 0,04931 + 0,1563^2 + 0,3 \times 0,1563 + 0,17) = 0,01243. \quad (8.11)$$

$$\rho_{sys} = \rho_G = 1,1 \times 0,02402 = 0,02642. \quad (8.17)$$

- Израчунавање  $\tilde{u}_{t,II}(PG, \rho_G, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$  и  $\tilde{u}_{t,II}(PG, \rho_C, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$

$$\rho_1(\rho_G) = [0,28 + 0,3 \times 3,0 \times (1 + 0,1 \times 3,0)] \times 0,02642 = 0,03831 \quad (8.5)$$

$$\tilde{u}_{t,II}(PG, \rho_G) = \frac{0,125 \times [1 + 0,1 \times 0,5] + [1,93 - 0,25 \times 0,5] \times 0,03831}{1 + [3 + 4 \times 0,5 \times (1,8 - 6 \times 0,1563)] \times 0,03831} = 0,1697 \quad (8.6)$$

$$\rho_1(\rho_C) = [0,28 + 0,3 \times 3,0 \times (1 + 0,1 \times 3,0)] \times 0,01243 = 0,01802 \quad (8.5)$$

$$\tilde{u}_{t,II}(PG, \rho_C) = \frac{0,125 \times [1 + 0,1 \times 0,5] + [1,93 - 0,25 \times 0,5] \times 0,01802}{1 + [3 + 4 \times 0,5 \times (1,8 - 6 \times 0,1563)] \times 0,01802} = 0,1509 \quad (8.6)$$

- Израчунавање  $\tilde{u}_{t,I}(PG, \rho_C, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$  (поглавље 8.1.2):

$$\rho_2(\rho_C) = 0,294 \times (1 + 1,2 \times 3,0) \times 0,01243 = 0,01681 \quad (8.8)$$

$$\rho_3(\rho_C) = (1,28 - 2,8 \times 0,1563) \times 0,01681 = 0,01416 \quad (8.9)$$

$$\tilde{u}_{i,1}(PG, \rho_C) = 3,2 \times \frac{1 + (0,8 + 2 \times 0,1563) \times 0,01681}{1 + [1 + (7 - 17 \times 0,1563) \times 0,5] \times 0,01681} \times \frac{1 + 0,01681}{1 + 0,01416} \times 0,01416 \times (1 - \sqrt[3]{0,01416}) = 0,0333 \quad (8.10)$$

- Израчунавање  $TS$  (поглавље 8.1.3):

$$\tilde{\rho} = \frac{0,02642 - 0,01243}{0,04931} = 0,2837; \quad (8.12)$$

$$TS = \frac{1}{[1 + (4 - 8 \times 0,1563) \times 0,2837]^2} = 0,3156. \quad (8.13)$$

- Коэффициент угиба просте греде без скупљања  $\tilde{u}_i(PG, \rho_G, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$ :

$$\tilde{u}_i(PG, \rho_G, SET, \varepsilon_{sk} = 0) = 0,1697 - [0,1509 - 0,0333] \times 0,3156 = 0,1326. \quad (8.1)$$

- Коэффициент угиба  $G$  носача без скупљања  $\tilde{u}_i(G, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0)$ :

$$k_G = \sqrt{0,5} \times (0,75 - 0,9 \times 0,1563) = 0,4309; \quad (8.16)$$

$$R(G, \rho, \rho_C) = 1,0 \quad (\rho_G > \rho_C); \quad (8.17)$$

$$\tilde{u}_i(G, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0) = \frac{1}{1,6} \times \frac{0,1326}{1 + 0,4309 \times 0,02642} \times 1,0 = 0,08194 \quad (8.14)$$

- Израчунавање  $\omega_{sk}$  – утицај скупљања:

Када је  $\rho_G > \rho_C$  израчунавају се:

$$p_2(PG) = 0,38 - 0,12 \times 0,5 + [1 + 0,5] \times [0,2 \times 0,5 - 0,1] \times 0,1563 - 0,03 \times 3,0 = 0,2300; \quad (8.23)$$

$$p_2(G) = 0,2300 + 0,02 \times [1 - 0,5] = 0,2400 \quad (8.25)$$

$$p_3(PG) = 0,39 - 0,12 \times 0,5 + 0,3 \times 0,5 \times 0,1563 - 0,03 \times 3,0 = 0,2634; \quad (8.24)$$

$$p_3(G) = 0,2634 + 0,02 \times [1 - 0,5] = 0,2734 \quad (8.25)$$

$$p_4(G) = \frac{0,2734 - 0,7 \times 0,02642}{1 + 0,7 \times 0,02642} = 0,2503; \quad (8.27)$$

$$\tilde{\omega}_{sk}(G) = 0,2400 \times (1 - 3 \times 0,04931 \times \frac{0,01243}{0,02642}) = 0,2233; \quad (8.28)$$

$$\omega_{sk}(G) = 0,2233 \times \frac{1}{0,5} \times \frac{250}{252} = 0,4431. \quad (8.29)$$

- Укупни бездимензиони коэффициент угиба

$$\tilde{u}_i(G, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0,71\%) = 0,08194 \times [1 + 0,6 \times 0,4431] = 0,08194 \times 1,266 = 0,1037. \quad (6.11)$$

- Угиб од квази-сталног оптерећења износи:

$$u_i = 0,1037 \times \frac{(5,5 \times 100)^2}{13,5} \times \frac{252}{200000} = 2,93 \text{ cm}. \quad (6.6)$$

Еталонска вредност бездимензионог коефицијента угиба, добијена према ригорозној методи Еврокода 2, нумеричком интеграцијом са поделом распона на 50 једнаких делова износи  $\tilde{y}_t(G, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0,6 \text{ ‰}) = 0,1051$ . Вредност угиба добијена на овај начин је 2,97 cm, што је за око 1 ‰ веће од вредности добијене коришћењем алгебарске апроксимације.

## 9 ТЕСТ ПРЕКЛАПАЊА

У овом поглављу се приказују поређења резултата – вредности бездимензионог коефицијента угиба  $\tilde{u}_t$  (једначина (7.61), за примену у изразу (6.6) за израчунавања угиба) добијене на *два начина*.

**Први начин је нумеричко интеграње кривине** поделом распона на 50 делова, према ригорозном методу Еврокода 2 приказаном у поглављу 4.1, са оперативном разрадом приказаном у поглављу 6. У моделу се користи друга варијанта разграничења стања I и стања II, према објашњењима датим у поглављу 5.4 и, сходно томе, у случају чврстоће на затезање савијањем улазна величина је њена редукована вредност  $f_{ctm,fl,red}$ , према објашњењу у поглављу 3.3. **Резултат прорачуна на први начин је „тачна“ (еталонска) вредност  $\tilde{u}_t$ .**

**Други начин подразумева употребу релација (6.8) и (6.11)**

$$\tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0) = \tilde{u}_{t,II}(sys, \rho, SET) - [\tilde{u}_{t,II}(sys, \rho_C, SET) - \tilde{u}_{t,I}(sys, \rho_C, SET)] \cdot TS \quad (6.8)$$

$$\tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk}) = \tilde{u}_t(sys, \rho, SET, \varepsilon_{sk} = 0) \times [1 + \varepsilon_{sk} \times \omega_{sk}(sys, \rho, SET)] \quad (6.11)$$

**и изведених апроксимативних алгебарских израза** за све факторе у релацијама (6.8) и (6.11), **који су приказани у поглављу 8.**

Анализе чији се резултати приказују у овом поглављу имају **два циља**.

**Први циљ је утврђивање успешности** (квалитета) **алгебарских апроксимација** величина потребних за израчунавање бездимензионог коефицијента угиба  $\tilde{u}_t$ . Овај циљ ће се постићи израчунавањем коефицијента  $\tilde{u}_t$  на оба начина за велики број комбинација свих улазних параметара и поређењем добијених вредности. Комбинације ће се сачинити тако што ће се сваком од улазних параметара доделити по неколико репрезентативних вредности, као што је приказано у наставку.

**Други циљ**, који је од велике важности, остварује се аутоматски уколико су алгебарске апроксимације успешне. Алгебарске апроксимације су укључивале **претпоставке о независности појединих величина од неких параметара модела**, као и претпоставке о сагласности форме апроксимација приликом

трансформација између различитих статичких система. Ове претпоставке у тези, у ствари, нису постулиране, већ су утвђене анализом корелација. Изузетно велики број комбинација параметара и, сходно томе, међусобних корелација, као што је наведено у поглављу 6.2, отежава да се оне појединачно прикажу и докажу, као што је то, на пример, чињено у поглављу 8.5 за параметар  $TS$ . Међутим, успешност алгебарских апроксимација (мала - прихватљива разлика од еталонске вредности) са собом аутоматски доноси потврду о независности или слабој зависности појединих величина: алгебарске апроксимације у изразима не садрже величине од којих параметар не зависи. Исти случај је и са трансформацијама вредности између статичких система: ови изрази, приказани у поглављима 8.2 и 8.4, на пример, не зависе од вредности коефицијента течења  $\varphi$ , који је један од битних чинилаца за величину дуготрајног угиба. Сагласност резултата одређена на два начина потврђује ову (не)зависност.

Тестирање преклапања „тачне“ и апроксимативне вредности  $\tilde{y}_i$  у склопу истраживања у тези обављено је на веома великом броју примера (комбинација параметара). У наставку ће бити приказани резултати тестирања (масовни нумерички експеримент) обављеног на 13608 примера без утицаја скупљања и исто толико примера који укључују скупљање. Један пример подразумева једну комбинацију вредности бездимензионих параметара нелинеарног језгра модела:  $\rho$ ,  $C$ ,  $\alpha$ ,  $A_{a2}/A_{a1}$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon_{sk}$  и  $sys$ . Сваки од тих појединачних примера, у суштини, репрезентује неограничено много носача са конкретним димензијама.

У обе групе примера анализирана су три статичка система ( $sys$ ): проста греда ( $PG$ ), једнострано ( $G$ ) и обострано укљештен носач ( $K$ ).

У првој групи примера, без утицаја скупљања, употребљене су три вредности коефицијента течења:  $\varphi = 1,5, 2,5$  и  $3,5$ . Вредности за коефицијент положаја арматуре  $\alpha$  биле су  $0,05, 0,10$  и  $0,20$ , а односи површина притиснуте и затегнуте арматуре  $A_{a2}/A_{a1} = 0, 0,25, 0,50$  и  $1,00$ . Коришћена је 21 вредност за пондерисани коефицијент армирања  $\rho$ , у интервалу од  $0,005$  до  $0,150$ . Имајући у виду његову дефиницију (7.1), ово одговара површинама затегнуте арматуре у пољу (распону) од (око)  $0,075\%$  до (око)  $2,5\%$  бетонског пресека. Параметар  $C$  је имао 6 вредности:  $0,05, 0,06, 0,07, 0,08, 0,10$  и  $0,15$ . Распон добро покрива реалне ситуације. На пример, за бетон класе  $C40$ , према номиналним вредностима



карактеристика бетона из Еврокода 2 ( $E_{cm} = 35 \text{ GPa}$ ,  $f_{ctm,fl,red} = \sqrt{0,5 \times 3,5} = 2,5 \text{ MPa}$ ) и за напон у арматури од квазисталног оптерећења од  $250 \text{ MPa}$ , коефицијент  $C$  има вредност  $C = (200/35) \times (2,5/250) = 0,057$ . На другом крају интервала, за исти бетон и за (неискоришћени) напон у арматури од  $100 \text{ MPa}$ ,  $C = (200/35) \times (2,5/100) = 0,142$ .

Укупан број примера у првој групи износио је:

$$3 (\text{sys}) \times 3 (\varphi) \times 3 (\alpha) \times 4 (A_{a2}/A_{a1}) \times 6 (C) \times 21 (\rho) = 13608.$$

У другој групи примера, без утицаја скупљања, употребљене су две вредности коефицијента течења:  $\varphi = 1,5$  и  $2,5$ . Вредности за коефицијент положаја арматуре  $\alpha$  биле су  $0,10$  и  $0,20$ , а односи површина притиснуте и затегнуте арматуре  $A_{a2}/A_{a1} = 0, 0,50$  и  $1,00$ . Поново је коришћена  $21$  вредност за пондерисани коефицијент армирања  $\rho$ , у интервалу од  $0,005$  до  $0,150$  (исте вредности као и у првој групи). И параметар  $C$  је имао истих  $6$  вредности:  $0,05$ ,  $0,06$ ,  $0,07$ ,  $0,08$ ,  $0,10$  и  $0,15$ , као и у првој групи примера. Коришћене су три вредности дилатације скупљања:  $\varepsilon_{sk} = 0,30 \text{ ‰}$ ,  $0,60 \text{ ‰}$  и  $0,90 \text{ ‰}$ . Вредност од  $0,90 \text{ ‰}$  представља екстремно велику дилатацију скупљања бетона. Она, међутим, није уврштена као реална вредност сама по себи. Примери друге групе урађени су за напон у арматури од  $\sigma_{a1}$  од  $250 \text{ MPa}$ . При примени релација (6.11) и (8.29), које уводе утицај скупљања, ефекат скупљања од  $0,90 \text{ ‰}$  при напону од  $\sigma_{a1} = 250 \text{ MPa}$  исти је као ефекат дилатације скупљања од  $0,45 \text{ ‰}$  при напону од  $\sigma_{a1} = 125 \text{ MPa}$ . На тај начин је добро покривен спектар могућих комбинација реалних дилатација скупљања бетона и напона у затегнутој арматури  $\sigma_{a1}$ .

Укупан број примера у другој групи износио је:

$$3 (\text{sys}) \times 2 (\varphi) \times 2 (\alpha) \times 3 (A_{a2}/A_{a1}) \times 6 (C) \times 21 (\rho) \times 3 (\varepsilon_{sk}) = 13608.$$

У табелама 9.1 и 9.2 приказано је по  $252$  резултата теста подударана „тачних“ и апроксимативних вредности  $\tilde{y}_t$ . Појединачни резултат, у табелама приказан **bold** цифром, представља релативну разлику апроксимативне и „тачне“ вредности, изражену у процентима „тачне“ вредности. Цифра с његове леве стране је индикатор:  $1$  означава да је носач без прслина;  $2$  значи прслине у зони ослонаца континуалних система, али без прслина у пољу а  $3$  се односи на носаче са прслинама у пољу.

Табела 9.1 Резултати теста преклапања

$\rho$	Постава преда			Гостава			К штава		
	$\alpha$	$\varphi$	$A/A_1$	$\alpha$	$\varphi$	$A/A_1$	$\alpha$	$\varphi$	$A/A_1$
$\downarrow$	0.1	2.5	0	0.1	2.5	0	0.1	2.5	0
$\downarrow$	0.05	0.06	0.07	0.05	0.06	0.07	0.05	0.06	0.07
$\downarrow$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$\downarrow$	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$\downarrow$	0.005	1	3	1	3	1	3	1	3
0.006	1	3	1	3	1	3	1	3	1
0.007	1	3	1	3	1	3	1	3	1
0.008	1	3	1	3	1	3	1	3	1
0.009	1	3	1	3	1	3	1	3	1
0.010	1	3	1	3	1	3	1	3	1
0.015	3	7	3	13	1	0	1	0	1
0.020	3	1	3	4	3	8	3	9	1
0.025	3	-1	3	0	3	3	5	3	6
0.030	3	-1	3	-1	3	1	3	2	5
0.035	3	-1	3	-1	3	0	3	1	3
0.040	3	-1	3	-1	3	0	3	2	3
0.045	3	-1	3	0	3	0	3	1	3
0.050	3	0	3	0	3	0	3	1	3
0.055	3	0	3	0	3	0	3	1	3
0.060	3	0	3	0	3	0	3	1	3
0.070	3	1	3	1	3	1	3	1	3
0.080	3	1	3	1	3	1	3	1	3
0.100	3	1	3	1	3	1	3	1	3
0.125	3	0	3	0	3	0	3	0	3
0.150	3	-1	3	-1	3	-1	3	-1	3
$\downarrow$	0.1	2.5	0	0.1	2.5	0	0.1	2.5	0
$\downarrow$	0.05	0.06	0.07	0.05	0.06	0.07	0.05	0.06	0.07
$\downarrow$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$\downarrow$	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$\downarrow$	0.005	1	3	1	3	1	3	1	3
0.006	1	3	1	3	1	3	1	3	1
0.007	1	3	1	3	1	3	1	3	1
0.008	1	3	1	3	1	3	1	3	1
0.009	1	3	1	3	1	3	1	3	1
0.010	1	3	1	3	1	3	1	3	1
0.015	3	9	3	18	1	0	1	0	1
0.020	3	1	3	5	3	11	3	15	1
0.025	3	-1	3	1	3	4	3	8	3
0.030	3	-2	3	-1	3	1	3	3	9
0.035	3	-2	3	-1	3	0	3	1	3
0.040	3	-2	3	-1	3	-1	3	0	3
0.045	3	-2	3	-1	3	-1	3	0	3
0.050	3	-1	3	-1	3	-1	3	0	3
0.055	3	-1	3	-1	3	0	3	1	3
0.060	3	0	3	0	3	0	3	1	3
0.070	3	0	3	0	3	0	3	1	3
0.080	3	1	3	1	3	1	3	1	3
0.100	3	2	3	1	3	1	3	2	3
0.125	3	2	3	1	3	2	3	2	3
0.150	3	2	3	2	3	2	3	2	3
$\downarrow$	0.1	2.5	0	0.1	2.5	0	0.1	2.5	0
$\downarrow$	0.05	0.06	0.07	0.05	0.06	0.07	0.05	0.06	0.07
$\downarrow$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$\downarrow$	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$\downarrow$	0.005	2	2	1	2	1	2	1	2
0.006	2	5	2	2	1	1	1	1	1
0.007	2	3	2	5	2	1	1	1	1
0.008	2	2	2	5	2	1	1	1	1
0.009	2	2	2	3	2	6	2	4	1
0.010	3	-11	2	4	2	5	2	6	2
0.015	3	2	3	0	3	-5	2	10	2
0.020	3	1	3	2	3	1	3	-1	3
0.025	3	1	3	1	3	2	3	1	3
0.030	3	1	3	1	3	1	3	2	3
0.035	3	1	3	1	3	1	3	2	3
0.040	3	1	3	1	3	1	3	2	3
0.045	3	1	3	1	3	1	3	2	3
0.050	3	1	3	1	3	1	3	2	3
0.055	3	2	3	2	3	2	3	2	3
0.060	3	2	3	2	3	2	3	2	3
0.070	3	2	3	2	3	2	3	2	3
0.080	3	1	3	2	3	1	3	1	3
0.100	3	0	3	0	3	0	3	0	3
0.125	3	-2	3	-2	3	-2	3	-2	3
0.150	3	-4	3	-4	3	-4	3	-4	3
$\downarrow$	0.1	2.5	0	0.1	2.5	0	0.1	2.5	0
$\downarrow$	0.05	0.06	0.07	0.05	0.06	0.07	0.05	0.06	0.07
$\downarrow$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$\downarrow$	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$\downarrow$	0.005	2	2	1	2	1	2	1	2
0.006	2	4	2	2	1	1	1	1	1
0.007	2	1	2	5	2	1	1	1	1
0.008	2	0	2	4	2	5	2	1	1
0.009	2	0	2	3	2	6	2	5	1
0.010	3	-8	2	2	2	4	2	5	2
0.015	3	3	3	2	3	-2	2	8	2
0.020	3	1	3	3	3	3	3	3	3
0.025	3	1	3	2	3	2	3	2	3
0.030	3	1	3	1	3	1	3	1	3
0.035	3	0	3	1	3	1	3	1	3
0.040	3	1	3	1	3	1	3	1	3
0.045	3	1	3	1	3	1	3	1	3
0.050	3	1	3	1	3	1	3	1	3
0.055	3	1	3	1	3	1	3	1	3
0.060	3	1	3	1	3	1	3	1	3
0.070	3	2	3	2	3	2	3	2	3
0.080	3	2	3	2	3	2	3	2	3
0.100	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0.125	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0.150	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Табела 9.2 Резултати теста преклапања (наставак)

$\rho$	Постава преда			Грешта			К штап		
	$\alpha$	$\varphi$	$A/A_1$	$\alpha$	$\varphi$	$A/A_1$	$\alpha$	$\varphi$	$A/A_1$
$\downarrow$	0.2	2.5	0	0.2	2.5	0	0.2	2.5	0
$C \rightarrow$	0.05	0.06	0.07	0.05	0.06	0.07	0.05	0.06	0.07
0.005	1	7	1	1	7	1	1	7	1
0.006	1	6	1	1	6	1	1	6	1
0.007	1	6	1	1	6	1	1	6	1
0.008	1	5	1	1	5	1	1	5	1
0.009	1	5	1	1	5	1	1	5	1
0.010	1	4	1	1	4	1	1	4	1
0.015	3	19	1	3	1	3	3	1	3
0.020	3	5	3	3	7	3	3	3	3
0.025	3	1	3	3	11	3	3	1	3
0.030	3	-1	3	3	5	3	3	9	3
0.035	3	-1	3	3	3	5	3	10	1
0.040	3	-1	3	3	0	3	3	7	1
0.045	3	0	3	3	0	3	3	5	1
0.050	3	0	3	3	1	3	3	3	5
0.055	3	0	3	3	1	3	3	3	5
0.060	3	1	3	3	1	3	3	2	3
0.070	3	1	3	3	1	3	3	2	3
0.080	3	1	3	3	1	3	3	2	3
0.100	3	1	3	3	1	3	3	0	3
0.125	3	0	3	3	0	3	3	0	3
0.150	3	-1	3	3	-1	3	3	-2	3
$\rho$	$\alpha$	$\varphi$	$A/A_1$	$\alpha$	$\varphi$	$A/A_1$	$\alpha$	$\varphi$	$A/A_1$
$\downarrow$	0.2	2.5	0.5	0.2	2.5	0.5	0.2	2.5	0.5
$C \rightarrow$	0.05	0.06	0.07	0.05	0.06	0.07	0.05	0.06	0.07
0.005	1	5	1	1	5	1	1	5	1
0.006	1	4	1	1	4	1	1	4	1
0.007	1	4	1	1	4	1	1	4	1
0.008	1	3	1	1	3	1	1	3	1
0.009	1	3	1	1	3	1	1	3	1
0.010	1	3	1	1	3	1	1	3	1
0.015	3	19	1	3	2	1	3	2	1
0.020	3	3	12	3	12	1	3	12	1
0.025	3	-2	3	3	11	3	3	17	1
0.030	3	-3	3	3	4	3	3	9	3
0.035	3	-3	3	3	-2	3	3	4	3
0.040	3	-3	3	3	-2	3	3	8	1
0.045	3	-2	3	3	-1	3	3	6	1
0.050	3	-2	3	3	-1	3	3	4	3
0.055	3	-1	3	3	0	3	3	3	11
0.060	3	-1	3	3	0	3	3	2	3
0.070	3	0	3	3	0	3	3	2	3
0.080	3	1	3	3	1	3	3	2	3
0.100	3	3	3	3	2	3	3	3	4
0.125	3	3	3	3	2	3	3	3	4
0.150	3	4	3	3	4	3	3	4	3

Примери у табели 9.1 урађени су за три наведена статичка система, за  $\alpha = 0,1$ ,  $\varphi = 2,5$ ,  $A_{a2}/A_{a1} = 0$  и  $A_{a2}/A_{a1} = 0,5$  и  $\varepsilon_{sk} = 0,3 \%$ . 21 вредност за  $\rho$  види се у првој колони. Вредности за  $C$  су напред побројане 0,05, 0,06, 0,07, 0,08, 0,10 и 0,15. Примери у табели 9.2 урађени су за исте комбинације вредности параметара, с тим да је  $\alpha = 0,2$  и  $\varepsilon_{sk} = 0,6 \%$ .

Резултати приказани у табелама 9.1 и 9.2 указују на веома добар квалитет алгебарске апроксимације: велика већина одступања је једноцифрена, а међу њима је много оних која су мања од 5 (%). Изузетак престављају двоцифрена одступања (највећи међу приказаним износи 21 %). Сва (већа) одступања јављају се у ситуацијама непосредно пре или после настанка прелина у пољу, што је видљиво према вредности индикатора. Као што је објашњено у поглављу 6.3, при одређеној (фиксној) вредности коефицијента  $C$ , коефицијент  $\rho$  је и мера оптерећења (његов раст одговара порасту оптерећења). Када се прати вредност индикатора у некој колони (чему одговара промена  $\rho$  при константном  $C$ ) прелазак са вредности 1 или 2 на 3 (осенчена поља) означава прелаз преко граничне вредности  $\rho_C$  пондерисаног коефицијента армирања  $\rho$ . Мала одступања у апроксимацијама појединачних величина могу дати већа одступања коначног резултата ( $\tilde{u}_i$ ) због промене прорачунског модела – стања I или стања II. ***Сва већа одступања алгебарске апроксимације констатована су на прелазу из стања I у стање II.***

Највеће одступање у првој групи примера (тестови без утицаја скупљања) износи -25 % („стварни“ угиб потцењен апроксимацијом). Слична је и вредност максималног одступања при прецењеном угибу: 23 %. Највећа одступања, осим што одговарају прелазу из стања I у стање II, добијена су за обострано укљештени носач, при симетричном армирању ( $A_{a2}/A_{a1} = 1,0$ ). То су ситуације када је „стварни“ угиб мали (односно, у реалним ситуацијама, није проблематичан), а то додатно повећава величину релативног одступања.

У другој групи примера (тестови са скупљањем) највеће одступање износи 48 % („стварни“ угиб прецењен апроксимацијом). Вредност максималног одступања при потцењеном угибу је -20 %. Највећа одступања поново су добијена на прелазу из стања I у стање II, у ситуацијама када угиб услед оптерећења и течења бетона има мањи удео у укупном угибу ( $\varphi = 1,5$ ,  $A_{a2}/A_{a1} = 1,0$ ), а при

екстремном скупљању ( $\varepsilon_{sk} = 0,9 \%$ ). Ту је процена утицаја скупљања посебно непрецизна, јер су  $\tilde{\omega}_{sk}$  линије веома стрме (слика 8.7). Релативни удео скупљања је велики због велике дилатације скупљања и због тога што је угиб од оптерећења и течења бетона. То су поново ситуације када је укупни „стварни“ угиб мали (односно, у реалним ситуацијама, није проблематичан).

Резимирајући резултате теста преклапања и претходне анализе, може се констатовати следеће:

1. Највећа одступања алгебарске апроксимације добијају се у граничним ситуацијама на прелазу из стања I у стање II (појава прелина у пољу). То су ситуације при којима природно долази до повећања угиба реалних конструкција и „слабост“ нумеричке апроксимације уствари одражава колебљиву вредност реалних угиба.
2. Чак и ако се алгебарска апроксимација примењује без разматрања нивоа оптерећења (у смислу наведеном под 1), добија се добар резултат: највеће одступање процењеног угиба у односу на еталонски, које није на стани сигурности (алгебарска апроксимација даје мању вредност од еталонске), износи 20 %.
3. Алгебарска апроксимација у појединим случајевима даје прецењене вредности угиба, скоро до 50 %. Осим што су ови (појединачни) случајеви на страни сигурности, сви они одговарају ситуацијама са мањим укупним угибом, у коме је слабо процењен велики удео угиба услед скупљања. Сви ови случајеви одговарају ситуацијама на прелазу из стања I у стање II (појава прелина у пољу).

Претходне ситуације, у којима алгебарска апроксимација није довољно прецизна, могу се лако превазићи. Ту, превасходно, треба имати у виду следећу чињеницу: предвиђање угиба на прелазу из стања I у стање II није ни у реалним ситуацијама поуздано. Добар пример за ово јесте испитивање експерименталних носача C12 и C22 оптерећених управо тако, што је описано у наставку у поглављу 10.3.4. Измерена вредност чврстоће на затезање на пробним телима одговарала је стању I, док су носачи при оптерећењу прешли у стање II. Предвиђање угиба урађено на основу мерених материјалних карактеристика, у оваквим случајевима, нужно даје већа одступања. Посматрано са аспекта практичне примене,

пројектанту је потребан поузданији резултат. Он се може добити уколико се избегне предвиђање угиба са чврстоћом на затезање која је на граници појаве прелина у пољу. Поузданији резултат у практичном смислу - на страни сигурности - може се добити са, на пример, 15 % редукованом вредношћу чврстоће на затезање. У том случају, приликом примене алгебарских апроксимација из поглавља 8 избегавају се „критичне“ зоне и квалитет апроксимације је сасвим добар - у високом проценту случајева испод 10 %. Посматрано на примеру табела 9.1 и 9.2 ово значи да се прескачу осенчени резултати, који одговарају промени вредности индикатора.

*У закључку, употреба алгебарских апроксимација функције  $\tilde{y}_i$  приказаних у поглављу 8, уз претходну инструкцију везану за разматрање прелаза из стања I у стање II, даје сасвим задовољавајући резултат. Уколико се жели резултат потпуно на страни сигурности, срачуната вредност  $\tilde{y}_i$  се може повећати за 10 %.*

## 10 ПОРЕЂЕЊЕ ПРОРАЧУНА СА ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИМ ВРЕДНОСТИМА

У овом поглављу приказују се поређења резултата прорачуна угиба према ригорозном поступку Еврокода 2, заснованог на нумеричком интегралењу кривине, са изабраним експерименталним резултатима доступним у литератури. Овим поређењима се не проверава успешност резултата изведених у тези, што је у суштини урађено у 9. поглављу, већ се утврђује сагласност изабраног модела прорачуна угиба са измереним вредностима. Из поређења се могу извући препоруке за калибрацију модела.

### 10.1 Избор експерименталних података

Експерименталних истраживања понашања армиранобетонских конструкција под дуготрајним оптерећењем на први поглед има много: у литератури [38], (1990.), *Espion* и *Halleux* наводе да располажу са 397 експерименталних резултата из 45 програма (један резултат означава једну публикувану вредност угиба – појединачну или средњу, већ према концепту експеримента), [39]. За потребе анализа представљених у [38] аутори су одбацили преко 100 резултата, углавном због нерасположивости кључних података неопходних за рачунско предвиђање дуготрајних угиба. Између задржаних 217 резултата, 117 се односи на греде правоугаоног пресека, а 64 на плоче. Преостале чине носачи другачијих облика попречног пресека („Т“, обрнуто „Т“, ошупљени). Сви разматрани носачи су били статичког система просте греде. *Espion* и *Halleux* наводе да нису разматрали континуалне носаче, с обзиром на мали број расположивих резултата (14) [38].

У овој тези ће се, у наставку, размотрити 4 програма у којима су носачи били система просте греде, са 29 резултата (46 носача) и 2 програма са континуалним носачима, са 10 резултата (20 носача). Основни критеријум за избор, поред доступности, био је обухватност експериментално одређених материјалних карактеристика. Поред тога, код носача система просте греде, то су они експерименти који су прихватљиво конципирани. Ово значи да се особине

експеримента, наведене у наставку у поглављу 10.2, могу на неки начин сагледати. У случају континуалних носача, с обзиром на малобројност резултата уопште, то су практично сви аутору тезе доступни експерименти (користе се оригинални извори, а не цитати).

## 10.2 Особине експеримената о којима треба водити рачуна при интерпретацији резултата

У наставку су побројане и коментарисане неке од битних одредница величине експериментално одређеног угиба о којима би требало водити рачуна при извођењу закључка у погледу прихватљивости теоријског модела.

### 10.2.1 Ефекат размере

Модел се често, из практичних разлога, конструишу са мањим распонима и мањим попречним пресецима у односу на прототип.

Мањи попречни пресеци узрокују повећање ефекта скупљања у погледу брзине и коначне вредности. Такође, непрецизност у погледу оствареног положаја арматуре има увећани ефекат.

Имајући у виду уобичајене размаке прслина, код малих распона однос дужина потеза без прслина и са прслинама може доста да се разликује у односу на прототип.

### 10.2.2 Ефекат процента армирања

Иако није неизбежно, модели су (углавном) јаче армирани него (просечни) прототип. Проблем превелике деформабилности се примарно везује за носаче мале конструктивне висине – за армиранобетонске плоче. Плоче су у пракси махом конструкције са нижим коефицијентима армирања. Већи коефицијент армирања повећава ефекте скупљања, услед спречености слободних деформација. Модел Еврокода 2 ове ефекте уводи паушално, кроз коефицијент  $\beta$ . При великим скупљањима и/или великим коефицијентима армирања редуција садејства затегнутог бетона, која њиме уводи, није довољна.



### 10.2.3 Ефекат нивоа напрезања

Оптерећење модела се најчешће пројектује тако да изазове одређени (очекивани стандардни) напон у постављеној арматури. Тиме се иницира настанак и развој прелина и формирање реалне крутости. Међутим, уколико је модел јако армиран, и при умереним напонима у арматури, добијају се високи „експлоатациони“ напони у бетону, каткад и врло близо границе нелинеарног течења.

### 10.2.4 Брзина мерења угиба

Код дуготрајних експеримената оптерећење модела се углавном изводи лагерованом терета. Терет се наноси у континуално, али у инкрементима, из практичних разлога. У зависности од броја модела и величине терета овај процес може да потраје. Мерење „почетног“ угиба може да касни у односу на почетак, а зависно од броја мерних места и технике мерења и у односу на завршетак оптерећивања, често и неколико часова. За то време може да се обави незанемарив део временског угиба. Експериментална потврда и квантификовање ове чињенице приказани су у литератури [40]. Ови експерименти су анализирани у наставку, у поглављу 10.3.4, где су детаљније приказани и резултати који се односе на „кашњење“ мерења. Овде се, као илустрација, наводи да је констатовано увећање почетног угиба (за који је усвојен онај након 5 минута од завршетка оптерећивања) након само једног часа између 5 и 11 %. Примера ради, у експериментима приказаним у поглављу 10.3.1., аутори су навели да је размак од оптерећивања до читавања почетног угиба код појединих носача износио и до осам часова!

### 10.2.5 Ефекат стварних материјалних карактеристика

При пројектовању експеримената за израду модела и пробних тела пројектује се и бетон жељених карактеристика. Остварене карактеристике (чврстоћа на притисак, чврстоћа на затезање, модул еластичности, коефицијент течења, дилатација скупљања – побројане су само оне од интереса за прорачун угиба) се увек, мање или више, разликују од оних које су очекиване (то јест од

оних које предвиђају нормативи у складу са пројектом бетона, начином неге и оптерећивања и условима средине).

**При употреби експерименталних резултата за тестирање неког теоријског модела**, као, на пример, у овој тези поступка за контролу угиба према Еврокоду 2, **могућа су два приступа**.

**Први приступ** подразумева употребу само дела измерених параметара материјала, који су релевантни за проблем. Пример таквог приступа, при анализи подесности модела *ACI 318-83* и *CEB* Модел кода *MC-78* за предвиђање еластичних и дуготрајних угиба, дат је у литератури [39]. Ту је, од мерених вредности параметара бетона, коришћена само чврстоћа на притисак. Сви остали релевантни параметри (чврстоћа на затезање, модул еластичности, коефицијент течења и дилатација скупљања) изведени су из чврстоће на притисак, релативне влажности и старости при оптерећивању.

Смисао оваквог приступа је да се тестира свеукупни модел неке норме – модел који укључује и предвиђање материјалних карактеристика и предвиђање појаве, у овом случају угиба. Добра страна овог приступа је да одговара ситуацији у којој се налази пројектант. Слабост оваквог приступа проистиче из чињенице, познате свим истраживачима који се баве овом облашћу, да различите норме различито предвиђају материјалне карактеристике из побројаних параметара. То је, углавном, резултат разлика у примењиваним материјалима и композицији при справљању бетона у складу са праксом у појединим државама, који резултују бетоном различитих особина. Постоје, међутим, и разлике условљене несавршеностима самих норми.

**Други приступ** подразумева употребу свих измерених параметара приликом тестирања модела. Израчунавају се само они параметри који нису експериментално утврђени, и то према нормативу у складу са територијом где се експеримент врши. Добра страна овог приступа јесте да објективно тестира сам модел, док је успешност предвиђања материјалних карактеристика издвојена. На тај начин могу се користити експериментални резултати из различитих земаља, чиме се битно проширује база расположивих података. То је од посебног значаја када се тестирају модели који зависе од великог броја параметара који могу имати широк дијапазон вредности и знатног утицаја на коначан резултат, као што је то

случај са прорачуном угиба. Неколико експерименталних резултата из појединачног експеримента не могу се сматрати довољним за извођење поузданог закључка. Слабост другог приступа, са практичне стране, огледа се у томе да не репрезентује ситуацију у којој се налази пројектант, који је у позицији да предвиђа материјалне карактеристике. Међутим, у тој ситуацији предвиђање се врши према нормативу који важи за локалну територију, који најчешће даје прихватљиво блиске резултате сходно локалној пракси.

*У тези је коришћен други приступ.* Тестиран је сам модел прорачуна угиба, издвојено од модела предвиђања података. На тај начин омогућено је ваљано коришћење већег броја експерименталних података. Иако нису неопходне, приказане су вредности неких од релевантних података срачунатих према моделу Еврокода 2 (при тестирању модела коришћене су измерене вредности), као илустрација. У појединим случајевима, разлике измерених и срачунатих вредности параметара су довољно велике да пониште смисао тестирања модела, јер је резултат (угиб) знатно измењен. То је додатна чињеница у прилог коришћења другог приступа.

### 10.3 Експерименти на простим гредама

Четири разматрана програма су у наставку описана и коментарисана. Програми су именовани према ауторима истраживања и години публикавања резултата.

#### 10.3.1 *G. W. Washa* и *P. G. Fluck* (1952.)

Ово истраживање [25] представља практично прво систематично и веома обухватно сагледавање утицаја неколико параметара на временске деформације бетона. Основна идеја аутора била је да се сагледа утицај притиснуте арматуре на развој деформација услед скупљања и течења бетона и на угибе носача. Укупно 34 греде, различитих димензија правоугаоног попречног пресека и различито армираних (једнострано, обострано – са притиснутом арматуром једнаком половини затегнуте и обострано – симетрично), распона 3,8 – 6,3 *m*, посматране су под дуготрајним оптерећењем током 2½ године. Мерене су дилатације на

бетону у нивоима затегнуте и притиснуте арматуре и угиби, након оптерећења, које је извршено при старости бетона од 14 дана, и током времена. На пробним телима, цилиндрима и призмама, одређиване су чврстоће при притиску и модули еластичности бетона 14., 28. дана и након 2½ године. Скупљање и течење је такође мерено на призмама. Међу испитиваним гредама (и пробним телима) неколико се односило на лакоагрегатне и аерисане бетоне. Ови резултати нису разматрани у тези.

Експериментално истраживање које су урадили *Washa* и *Fluck*, осим што је једно од најранијих, једно је од најбољих у области изучавања временских деформација бетона. Његов најважнији квалитет састоји се у бројности експерименталних података, који су тако организовани да се на задовољавајући начин могу употребљавати средње вредности резултата. Урађен је пар носача сваког типа, тако да, на пример, вредности дилатација представљају средњу вредност од 4, а угиба од два резултата. Слично је и са већином пробних тела. То је од највећег значаја за изучавање проблема величине угиба, који је, као што је већ објашњено, условљен бројним чиниоцима, чије вредности и утицај могу варирати и под истим условима. Каснија експериментална истраживања су, махом, вршена на малом броју носача, уз мерење већег броја параметара (више мерних места). Такви резултати нису нарочито поуздани за калибрацију прорачунских модела.

Битне особине ових експеримената, као што ће у наставку бити детаљније приказано, јесу и доста висок коефицијент армирања греда (преко 1,5 % затегнуте, односно, преко 3,0 % укупне арматуре у пресеку) и висок ниво оптерећења – напона у бетону. Ниво оптерећења је такав да су носачи веома испрскали, а напон код појединих греда је на граници нелинеарног течења. Услед тога велики је утицај скупљања и течења бетона, чије су мерене вредности (на пробним телима) такође веома велике ( $\epsilon_{sk} \approx 0,75 \%$ ,  $\varphi \approx 4,6$ ). За израду модела коришћен је бетон комерцијалне рецептуре, а носачи и пробна тела, иако смештени у лабораторији, нису (намерно) чувани у константним, већ у природно променљивим амбијенталним условима.

Почетна читања инструмената узимана су 1 – 8 часова након почетка оптерећивања, услед чега садрже и одређени део деформације течења. Поред тога,

експериментално одређене вредности модула еластичности доста одступају од аналитичког предвиђања на основу измерених чврстоћа према тадашњим, а и садашњим *ACI* [9] препорукама. Аутори за ово систематско одступање нису имали објашњење. Такође је наведено да је у појединим носачима могло бити одступања у положају арматуре (по висини пресека). С обзиром да је, на пример, код носача серије *E* пројектована статичка висина износила свега око 5,9 cm (2,3“), ово је могло да има знатног утицаја на величину угиба.

### 10.3.1.1 Преглед геометријских података и оптерећења

Подаци су приказани у табели 10.1.

Табела 10.1 Преглед геометријских карактеристика и оптерећења за експеримент (*G. W. Washa* и *P. G. Fluck*, [25])

Ознака греде	ширина пресека	висина пресека	стат. висина	распон греде	однос $L/d$	затег. армат. $A_{st}$	прит. армат. $A_{sc}$	% затег. арматуре $A_{st}/bh$	% укупне арматуре $(A_{st}+A_{sc})/bh$	једнако-подељено опт.
	$b$ (mm)	$d$ (mm)	$h$ (mm)	$L$ (m)		$mm^2$	$mm^2$	%	%	$N/m'$
A1, A4	203	305	257	6,10	20	852	852	1,63	3,27	5516
A2, A5	203	305	257	6,10	20	852	400	1,63	2,40	5516
A3, A6	203	305	257	6,10	20	852	0	1,63	1,63	5516
B1, B4	152	203	157	6,10	30	400	400	1,68	3,35	1561
B2, B5	152	203	157	6,10	30	400	200	1,68	2,51	1561
B3, B6	152	203	157	6,10	30	400	0	1,68	1,68	1561
C1, C4	305	127	102	6,34	50	516	516	1,66	3,32	1197
C2, C5	305	127	102	6,34	50	516	258	1,66	2,49	1197
C3, C6	305	127	102	6,34	50	516	0	1,66	1,66	1197
D1, D4	305	127	102	3,81	30	516	516	1,66	3,32	3342
D2, D5	305	127	102	3,81	30	516	258	1,66	2,49	3342
D3, D6	305	127	102	3,81	30	516	0	1,66	1,66	3342
D7, D8	305	127	102	3,81	30	516	0	1,66	1,66	3342
D9, D10	305	127	102	3,81	30	516	0	1,66	1,66	3342
E1, E4	305	76	59	5,33	70	284	284	1,58	3,16	555
E2, E5	305	76	59	5,33	70	284	142	1,58	2,37	555
E3, E6	305	76	59	5,33	70	284	0	1,58	1,58	555

### 10.3.1.2 Преглед механичких карактеристика пробних тела

Преглед механичких карактеристика пробних тела дат је у табели 10.2. Приказани резултати су средина од два узорка, изузимајући вредности за 2½ године, који су средина од три резултата.

Табела 10.2 Преглед механичких карактеристика пробних тела за експеримент (*G. W. Washa* и *P. G. Fluck*, [25])

Носачи на које се узорак односи	чврстоћа на притисак			модул еластичности		
	<i>MPa</i>	<i>MPa</i>	<i>MPa</i>	<i>GPa</i>	<i>GPa</i>	<i>GPa</i>
	14. дан	28. дан	2½ год.	14. дан	28. дан	2½ год.
A1, A2, A3	24,06	26,89	25,72	20,48	23,85	23,17
B1, B2, B3, C1, C2, C3	18,75	20,68	21,99	18,00	20,68	23,51
E1, E2, E3, B4, B5, B6	22,82	26,48	25,72	19,51	22,55	24,20
E4, E5, E6, D1, D2, D3	18,41	23,99	23,17	17,44	19,10	23,44
A4, A5, A6, D6	25,92	29,30	25,30	20,27	21,65	22,96
C4, C5, C6, D4, D5	21,79	24,68	24,68	18,89	19,93	23,03

### 10.3.1.3 Преглед измерених и срачунатих почетних и временских деформација

На оптерећеним призмама димензија  $4 \times 4 \times 12$  инча мерене су укупне дилатације скупљања и течења. Константни напон притиска износио је  $10,86 \text{ MPa}$ . На неоптерећеним призмама истих димензија мерено је скупљање. Измерене вредности током времена приказане су графички у [25]. Приказана укупна дилатација након 2½ године износи око  $\varepsilon_{sk} + \varepsilon_{\varphi} = 3,3 \%$ , док су појединачно дилатација услед скупљања  $\varepsilon_{sk} \approx 0,75 \%$  и услед течења  $\varepsilon_{\varphi} \approx 2,55 \%$ .

Измерени модули еластичности пробних тела, при старости од 14 дана (бетони A4, A5, A6, C4, C5, C6, D4, D5, D6, последње две врсте табеле 10.2) износили су у просеку  $(20,27 + 18,89)/2 = 19,58 \text{ GPa}$ , што одговара еластичној дилатацији од  $\varepsilon_{el} = 10,86/19,58 = 0,55 \%$ . Израчуната вредност (измереног) коефицијента течења је  $\varphi \approx 4,6$  (коефицијент течења који се примењује са еластичном дилатацијом оствареном при оптерећивању).

Уколико би се извршило предвиђање вредности дилатације скупљања према релацијама Еврокода 2 приказаним у поглављу 3.10, дилатација скупљања имала би вредност  $\varepsilon_{sk} = \varepsilon_{cs} = 0,56 \text{ ‰}$  (израчунато за пресек призме димензија  $10,16 \times 10,16 \text{ cm}$ , просечну релативну влажност од  $50 \text{ ‰}$  и 915 дана од престанка неге), што предстаља нешто око  $\frac{3}{4}$  измерене вредности  $\varepsilon_{sk} \approx 0,75 \text{ ‰}$ .

Предвиђање вредности коефицијента линеарног течења може се такође урадити према релацијама Еврокода 2 приказаним у поглављу 3.9, за исте параметре и за оптерећење при старости од 14 дана. Добија се вредност  $\varphi = 3,6$ , када се користи вредност модула еластичности при оптерећењу израчуната из чврстоће бетона. Као што је већ напоменуто, измерене вредности модула нису одговарале предвиђању из чврстоће ни према *ACI* [9] нормама. Уколико се предвиђање вредности линеарног коефицијента течења изврши узимајући еластичну дилатацију према мереној вредности модула, добијена вредност износи  $\varphi = 3,1$  (обе претходне вредности коефицијента течења одговарају еластичној деформацији одређеној са модулом бетона при оптерећењу – при старости од 14 дана; разлика у вредности потиче од разлике рачунског и мереног модула при тој старости).

Граница напона притиска након које настају нелинеарне деформације течења износи, према Модел коду *MC* 1990 [3],  $40 \text{ ‰ } f_{cm}(t_0)$ . У случају призми на којима је вршено мерење то износи  $0,40 \times (25,92 + 21,79)/2 = 9,54 \text{ MPa}$ . Примењеном дуготрајном напону од  $10,86 \text{ MPa}$  одговара увећање линеарног коефицијента течења, према Модел коду *MC* 1990 [3], за око  $9 \text{ ‰}$ , што коначно даје  $\varphi = 1,09 \times 3,1 = 3,4$ . Као и код дилатације скупљања, вредност коефицијента течења добијена предвиђањем према Еврокоду 2 представља нешто око  $\frac{3}{4}$  измерене вредности  $\varphi \approx 4,6$ .

Преглед потребних података за израчунавање почетних угиба експерименталних греда и њихових вредности након  $2\frac{1}{2}$  године дат је у табели 10.3. Приказане су вредности чврстоће на притисак при старости од 14 и 28 дана, модула еластичности при старости од 14 дана (при оптерећењу), коефицијента течења и дилатације скупљања за период под оптерећењем ( $2\frac{1}{2}$  године) и чврстоће на затезање при оптерећењу. Вредности за чврстоћа на притисак и модула добијене су као средње вредности два резултата приказана у табели 10.2, према

пару носача који се разматра. Вредности коефицијената течења и дилатација скупљања за поједине носаче прерачунате су из измерених вредности на призмама, узимајући у обзир разлике у величини пресека и чврстоћи на притисак носача и призми. Коефицијент за прерачунавање одређен је као релативни однос коефицијената који уводе утицај чврстоће и средњег радијуса према одредбама Еврокода 2, приказаним у поглављима 3.9 и 3.10. Како је амбијентална влажност варијала од 20 до 80 %, за прорачун је усвојена средња вредност од 50 %.

Вредности чврстоће на затезање при оптерећивању 14. дана, које нису мерене, израчунате су из мерених чврстоћа на притисак при старости од 28 дана. У првом кораку добијена је чврстоћа на затезање 28. дана, а потом прерачуната на 14. дан (према релацијама (3.4) и (3.5) Еврокода 2 приказаним у поглављу 3.3). Као што је објашњено у поглављу 3.3, за прорачун момента појаве прелина  $M_{cr}$  ће се користити чврстоћа на аксијално затезање за старост при оптерећивању  $f_{cm}(14)$ , као апроксимација за  $f_{cm,fl,red}$ . У табели 10.3 су приказане и чврстоће на затезање савијањем одређене према Еврокоду 2 (нередукована  $f_{cm,fl}$ ) и *ACI* 318 [9] ( $f_r$  према (4.26), поглавље 4.3, редукована према *ACI* 318-08). Редукована вредност  $f_r$  према *ACI* 318-08 веома добро одговара  $f_{cm}(14)$ , која је употребљена при прорачуну.

Табела 10.3 Преглед карактеристика материјала за експеримент  
(*G. W. Washa* и *P. G. Fluck*, [25])

греда	чврстоћа 14. дан <i>MPa</i>	чврстоћа 28. дан <i>MPa</i>	модул 14. дан <i>GPa</i>	$\varphi$ 2½ год	$\epsilon_{cs}$ 2½ год %	$f_{cm}$ 14. дан <i>MPa</i>	$f_{cm,fl}$ 14. дан <i>MPa</i>	$f_r$ ( <i>ACI</i> ) 14. дан <i>MPa</i>
призме за $\varphi$ и $\epsilon_{cs}$	23,86	26,99	19,58	4,60	0,75	1,93	2,88	2,03
<i>A</i> серија	24,99	28,10	20,38	3,76	0,69	2,00	2,59	2,08
<i>B</i> серија	20,79	23,59	18,76	4,40	0,75	1,69	2,36	1,89
<i>C</i> серија	20,27	22,69	18,45	4,46	0,76	1,62	2,39	1,87
<i>D1, D2, D4, D5</i>	20,10	24,35	18,17	4,30	0,75	1,74	2,57	1,86
<i>D3, D6</i>	22,17	26,66	18,86	4,11	0,74	1,90	2,80	1,95
<i>E</i> серија	20,62	25,24	18,48	4,58	0,76	1,81	2,75	1,88

Поред досад приказаних података, за прорачун угиба потребна су још 2: величина модула еластичности арматуре, који је у експерименту износио 206,8 *GPa*, и величина напона у затегнутој арматури у пресеку у средини распона, услед дуготрајног оптерећења. Величине рачунских напона у арматури у пресецима у



средини распона, за сваки од експерименталних носача су (из практичних разлога, због подесне структуре табеле) приказане у табели 10.4, заједно са резултатима прорачуна (иако представљају улазне податке за прорачун). Напони су израчунати за пресек са највећим моментом (у средини распона). Коришћен је модел за пресек са прслином, са линеарним дијаграмом напона притиска и занемарењем напона затезања у бетону, са односом мерених модула еластичности бетона и арматуре (стандардни поступак граничног стања употребљивости). На овај начин израчунаваће се напони и у осталим примерима у наставку. Као илустрација, приказани су и одговарајући ивични напони притиска у бетону.

Преглед измерених почетних угиба експерименталних греда и њихових вредности након 2½ године дат је у табели 10.4, заједно са срачунатим вредностима добијеним ригорозним методом Еврокода 2 – нумеричким интегралњем кривине са поделом распона на 50 делова.

Табела 10.4 Преглед мерених и срачунатих угиба за експеримент  
(*G. W. Washa* и *P. G. Fluck*, [25])

града	почетни угиб мерени <i>mm</i> (2)	почетни угиб рачунски <i>mm</i> (3)	одступање [(3)-(2)]/(2) % (4)	угиб 2½ год мерени <i>mm</i> (5)	угиб 2½ год рачунски <i>mm</i> (6)	одступање [(6)-(5)]/(5) % (7)	напон у арматури <i>MPa</i> (8)	напон у бетону <i>MPa</i> (9)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
A1, A4	13,5	14,4	6,7	23,6	24,9	5,5	136,6	8,16
A2, A5	15,7	15,3	-2,5	32,2	32,5	0,9	136,5	9,12
A3, A6	17,0	16,2	-4,7	44,7	51,4	15,0	136,7	10,29
B1, B4	23,4	25,9	10,7	51,0	51,0	0,0	139,1	8,93
B2, B5	24,9	26,5	6,4	65,0	62,9	-3,2	137,7	9,43
B3, B6	26,4	27,3	3,4	86,4	95,5	10,5	135,9	10,11
C1, C4	40,1	42,7	6,5	80,0	78,7	-1,6	137,7	8,37
C2, C5	43,4	44,2	1,8	100,6	99,5	-1,1	136,7	9,05
C3, C6	47,7	46,3	-2,9	140,7	162,3	15,4	135,4	9,97
D1, D4	11,9	15,4	29,4	27,7	28,4	2,5	138,7	8,35
D2, D5	14,2	16,0	12,7	33,8	35,8	5,9	137,6	9,04
D3, D6	17,8	16,3	-8,4	48,5	55,6	14,6	136,0	10,09
E1, E4	59,4	52,5	-11,6	123,9	106,4	-14,1	142,0	8,84
E2, E5	55,9	53,7	-3,9	128,8	130,9	1,6	140,5	9,30
E3, E6	63,0	55,2	-12,4	184,9	197,7	6,9	138,7	9,90

#### 10.3.1.4 Разматрање резултата за за експеримент из литературе [25]

Генерално, може се констатовати веома добро слагање срачунатих и мерених дуготрајних угиба. Највеће одступање (колона (7) табеле 10.4, греде С3, С6) износи 15,4 %, док остала не прелазе 15 %. *(према мишљењу аутора тезе, граница за „добро слагање“ рачунских и експерименталних резултата је  $\pm 15$  %; двоструко већа разлика  $\pm 30$  % може се означити као слабо слагање које не оправдава труд уложен у добијање резултата нумеричким интеграљењем).* Носачи серије *E* имају (табела 10.1) висину пресека од 76 *mm* и статичку висину свега 59 *mm*. Услед тога, могуће непрецизности при постављању арматуре (што су и аутори нагласили) имају велики утицај. Осим тога, измерени угиби носача *E* серије износе  $L/30 \div L/40$ , што вишеструко надмашује прихватљиве вредности ГСУ, те они не представљају адекватне моделе реалних конструкција. Стога су њихови резултати, иако сасвим задовољавајући, искључени из оцењивања.

Детаљније сагледавање резултата овог експеримента и изведених нумеричких резултата треба да укључи и следеће веома битне чињенице.

Поступак Еврокода 2 ограничава (преко коефицијента  $\beta = 0,5$ ) рачунске ефекте скупљања на развој прслина при прорачуну угиба током времена. У прорачуну је, коришћењем чврстоће на аксијално затезање уместо чврстоће на затезање савијањем - да би се урачунали и ефекти скупљања пре оптерећења (као што је објашњено у поглављу 3.3) - укључена додатна редукација, с обзиром да је чврстоћа на затезање савијањем, генерално, већа од аксијалне чврстоће. За носаче из серије *B*, на пример, са средњом (израчунатом, Еврокод 2) вредношћу чврстоће на затезање од око 1,69 *MPa* при оптерећењу, ова вредност коефицијента  $\beta$  одговара разлици затезања изазваног скупљањем и прираста чврстоће на затезање у периоду након оптерећивања од  $(1 - \sqrt{0,5}) \times 1,69 = 0,50$  *MPa*. Чврстоћа на затезање савијањем износи  $(1,6 - 0,203) \times 1,69 = 2,36$  *MPa*. Прираст чврстоће на затезање од 14 дана до 2½ године износи 27,3 %. па је одговарајућа чврстоћа на затезање савијањем  $1,273 \times 2,36 = 3,00$  *MPa* (сви релативни односи величина су одређени према Еврокоду 2).

Величина израчунатих ивичних затезања *AAEM* методом услед измерене вредности скупљања након 2½ године на доњој ивици пресека без прслине за, на

пример, греде  $B2$  и  $B5$  износи око  $2,0$   $MPa$ . Распоживи (преостали) капацитет затезања за напоне од оптерећења (момента савијања) након  $2\frac{1}{2}$  године је  $3,0 - 2,0 = 1,0$   $MPa$ . У алгоритму је, коришћењем чврстоће на аксијално затезање уместо чврстоће на затезање савијањем, расположиви напон затезања  $1,69 - 0,50 = 1,2$   $MPa$ , што, у разматраном примеру, одлично апроксимира прорачун  $AAEM$  методом.

Констатовано скупљање у експерименту је веома велико ( $\epsilon_{sk} \approx 0,75$  %). С друге стране, и оптерећење бетона свих експерименталних носача је такође веома велико – такво да прслине од затезања услед савијања настају на великом делу распона. Носачи су јако армирани и велико скупљање је у стању да прошири слику прслина дуж распона, што је овде ирелевантно јер оне већ услед оптерећења сежу до близу ослонаца. То је, с једне стране, погодно за поузданост закључка: чврстоћа на затезање није мерена већ је у нумеричкој анализи израчуната. Управо услед великог оптерећења, нумерички резултат није посебно осетљив на умерене варијације вредности чврстоће на затезање. То, с друге стране, ограничава извођење закључка у погледу ефикасности учињене допунске рачунске редуције чврстоће на затезање употребом аксијалне чврстоће на затезање уместо чврстоће на затезање савијањем.

Иако је у експерименту констатовано добро слагање резултата, требало би приметити да су, генерално, највећа одступања у предвиђању угиба управо код носача код којих су ефекти скупљања на настајање затезања највећи - једноструко армираних носача  $A3$ ,  $A6$ ,  $B3$ ,  $B6$ ,  $C3$ ,  $C6$ ,  $D3$  и  $D6$ . (Део угиба који одговара скупљању ових греда износи  $36 - 39$  % угиба од оптерећења, односно  $27 - 28$  % укупног угиба.) Одступање може бити резултат неадекватне (прорачунске) редуције чврстоће на затезање коефицијентом  $\beta$ , и/или неадекватног (дела) модела за одређивање кривине услед скупљања за носаче са прслинама, који, подсећања ради, представља екстраполиран модел који се користи за кривине услед оптерећења, што је већ дискутовано у поглављима 5.2, 5.3 и 5.4 (коефицијент интерполације  $\zeta$  одређује се из нивоа затезања које производи оптерећење, независно од величине затезања које може да изазове скупљање).

Међутим, с обзиром да су рачунске вредности ових угиба веће од измерених, недовољна редуција садејства затегнутог бетона не може да буде

узрок. Прорачун затезања услед скупљања *ААЕМ* методом је показао да редукција није превелика, што би, поред потцењене вредности чврстоће на затезање, могао да буде узрок да рачунски угиби буду већи од мерених. Осим тога, са истом рачунском чврстоћом на затезање и истим нивоом редукције, преостали, обострано армирани носачи (*A1, A4, A2, A5, B1, B4 ...*) показали су највеће појединачно одступање од само 5,9 %, што представља одличан резултат. Удео скупљања у укупном рачунском угибу код, на пример симетрично армираних носача (*A1, A4, B1, B4, ...*) износи, међутим, у просеку свега 17 %. Ово указује да би (неодговарајући) модел за израчунавање кривине услед скупљања бетона за пресеке с прслином могао да буде један од могућих узрока знатнијег одступања рачунских вредности и мерених резултата.

Такође, требало би имати у виду да је извођење коначног закључка о прихватљивости модела за прорачун угиба Еврокода 2 на основу овог експеримента [25] ограничено и следећим чињеницама:

- сви експериментални носачи су статички одређени (просте греде);
- ниво рачунских напона у затегнутој арматури код свих носача (табела 10.4) је веома сличан и креће се у распону од 135 до 142 *МПа*), који је доста нижи од оних који су данас уобичајени;
- и поред мале конструктивне висине и адекватних распона, носачи због високих процената армирања и знатне испрскалости слабо репрезентују армиранобетонске плоче, као носаче са израженим проблемом угиба.

Поменута ограничења размотриће се у наредним експериментима.

Иако је истраживање у тези усмерено на прорачун угиба услед дуготрајних оптерећења, сагледаће се у свим анализираним експериментима и однос мереног и рачунског почетног угиба. Највеће одступање у случају почетног угиба у овом експерименту износи 29,4 % (греде *D1* и *D4*, колона (4) табеле 10.4, поново са искључењем серије *E*). С обзиром да су одступања у свим осталим случајевима мања од 15 %, и овај резултат би се могао означити као веома добар. Међутим, ако се узме у обзир од стране аутора поменуто вишечасовно „кашњење“ у читавању резултата код појединих мерења, стварни почетни угиби су мањи од мерених (и више од десетак процената; о овоме детаљније у поглављу 10.3.4), тако да су стварна одступања рачунских угиба доста већа. То је пре свега

узроковано примењеном превеликом рачунском редукијом чврстоће на затезање савијањем у алгоритму, која је усмерена на добијање коректног дуготрајног угиба. Уколико би се, при прорачуну почетних угиба, користила (нередукована) чврстоћа на затезање савијањем, резултати би били веома блиски коректно (= брзо) измереним. Тај резултат је сам по себи од вредности, али се овде не приказује јер није у фокусу проблема који се разматра у тези.

### 10.3.2 *W. G. Corley* и *M. A. Sozen* (1966.)

Ово истраживање [41] обухватило је 4 експерименталне просте греде *C1*, *C2*, *C3* и *C4*, све распона  $L = 1,829 \text{ m}$ . Циљ истраживања био је да се верификује један једноставан метод за процену дуготрајног угиба армиранобетонских греда, предложен од стране аутора. Греде су биле оптерећене концентрисано, у четвртинама распона (две силе, на  $L/4$  од ослоњаца) и расподељено, сопственом тежином. Греда *C2* је конструисана и оптерећена исто као и греда *C1*, али је након формирања прслина растерећена и служила је као контролни узорак. Стога су само преостале три греде изучаване под дуготрајним оптерећењем, и њихови резултати ће се приказати у наставку.

Мерени су угиби и дилатације на носачима током око две године. На цилиндрима димензија  $4 \times 12$  инча мерене су укупне дилатације скупљања и течења. Константни напон притиска износио је  $9,31 \text{ MPa}$ . На неоптерећеним цилиндима истих димензија мерено је скупљање. У тексту [41] су приказани и подаци о геометрији носача и оптерећењима, као и измерени почетни угиби и угиби након 23 месеца под оптерећењем.

#### 10.3.2.1 Преглед геометријских података и оптерећења за експеримент

Табела 10.5 Преглед геометријских карактеристика и оптерећења за експеримент (*W. G. Corley* и *M. A. Sozen*, [41])

Ознака греде	ширина пресека	висина пресека	стат. висина	распон греде	однос $L/d$	затег. армат. $A_{st}$	прит. армат. $A_{sc}$	% затег. арматуре $A_{st}/bh$	концентрисано опт.	једнако-подељено опт.
	$b \text{ (mm)}$	$d \text{ (mm)}$	$h \text{ (mm)}$	$L \text{ (m)}$		$\text{mm}^2$	$\text{mm}^2$	%	$N$	$N/m'$
<i>C1</i>	76,2	152,4	136,5	1,829	12	142	0	1,37	4982	279
<i>C3</i>	76,2	109,5	92,1	1,829	16,7	142	0	2,02	4982	200
<i>C4</i>	76,2	109,5	92,1	1,829	16,7	213	0	3,03	4982	200

### 10.3.2.2 Преглед механичких карактеристика пробних тела

Средња вредност чврстоће при старости од 28 дана, када је и вршено оптерећивање, износила је 24,13 *MPa*. Аутори су преостале, детаљне податке о измереним материјалним параметрима, начину и хронологији извођења испитивања и примењеној опреми приказали у тексту који није публикован у часопису. Тај материјал није био доступан аутору ове тезе. Из публикација других аутора, који су обрађивали појединачне експерименталне греде и наводили податке за њих, може се закључити да је било умерених разлика у материјалним карактеристикама појединих носача. Овде ће се потребни (недостајући) параметри за прорачун угиба (чврстоћа на затезање, модул еластичности) извести из наведене средње вредности чврстоће, према одредбама *ACI 318* [9]. Вредност израчунатог модула еластичности је 23,25 *GPa* (релација (4.27)). Вредност чврстоће на затезање савијањем, израчуната из средње чврстоће на притисак од 24,13 *MPa* према одредби *ACI 318* [9] (поглавље 4.3, релација (4.26), редукована вредност  $f_r$  према *ACI 318-08*), износи 2,04 *MPa*. Вредност  $f_{ctm}$  одређена из чврстоће према Еврокоду 2 износи 1,92 *MPa* и веома је блиска овој вредности. Она ће се, због приступа (као паушална редукација, види поглавље 3.3) који је употребљен у осталим примерима, користити при прорачуну.

### 10.3.2.3 Преглед измерених и срачунатих деформација

Деформације контролних цилиндара током две године приказане су у [41] графички, с тим да је у тексту наведено да су измерене (након 2 године) вредности дилатације скупљања  $\varepsilon_{sk} \approx 0,3 \text{ ‰}$  и коефицијента течења  $\varphi \approx 3,0$ . Средња вредност чврстоће при старости од 28 дана, када је и вршено оптерећивање, износила је 24,13 *MPa*.

Вредности коефицијената течења и дилатација скупљања за поједине носаче, приказане у табели 10.6, прерачунате су из измерених вредности на цилиндима, узимајући у обзир разлике у величини пресека носача и цилиндара на којима је вршено мерење течења и скупљања. Коефицијент за прерачунавање одређен је као релативни однос коефицијената који уводе утицај средњег радијуса према одредбама Еврокода 2, приказаним у поглављима 3.9 и 3.10.

Уколико се изврши предвиђање вредности коефицијента течења према релацијама Еврокода 2, приказаним у поглављу 3.9 (за пресек цилиндра пречника 10,16 cm чврстоће  $f_{cm} = 24,13 \text{ MPa}$ , за релативну влажност од 50 % и 700 дана након оптерећења извршеног при старости од 28 дана), добија се вредност  $\phi = 3,3$ , што је око 10 % веће од мерене вредности.

Дилатација скупљања одређена према релацијама Еврокода 2, приказаним у поглављу 3.10., има вредност  $\varepsilon_{sk} = \varepsilon_{cs} = 0,57 \text{ ‰}$  (израчунато за исте параметре као и коефицијент течења и 700 дана од престанка неге), што је скоро двоструко веће од измерене вредности  $\varepsilon_{sk} \approx 0,30 \text{ ‰}$ .

Табела 10.6 Преглед карактеристика материјала за експеримент  
(W. G. Corley и M. A. Sozen, [41])

греда	чврстоћа 28. дан MPa	модул 28. дан GPa	$\phi$ 23 мес.	$\varepsilon_{cs}$ 23 мес. ‰	$f_{ctm}$ 28. дан MPa	$f_{ctm,fl}$ 28. дан MPa	$f_r$ (ACI) 28. дан MPa
цилиндри за $\phi$ и $\varepsilon_{cs}$	24,13	23,25	3,00	0,30			
C1	24,13	23,25	3,00	0,30	1,92	2,77	2,04
C3	24,13	23,25	3,08	0,30	1,92	2,85	2,04
C4	24,13	23,25	3,08	0,30	1,92	2,85	2,04

Преглед измерених почетних угиба експерименталних греда и њихових вредности након 23 месеца дат је у табели 10.7, заједно са срачунатим вредностима добијеним ригорозним методом Еврокода 2 – нумеричким интегралњем кривине са поделом распона на 50 делова.

Табела 10.7 Преглед мерених и срачунатих угиба за експеримент  
(W. G. Corley и M. A. Sozen, [41])

греда	почетни угиб мерени mm (1)	почетни угиб рачунски mm (2)	одступање [(3)-(2)]/(2) % (3)	угиб 2½ год мерени mm (4)	угиб 2½ год рачунски mm (5)	одступање [(6)-(5)]/(5) % (6)	напон у арматури MPa (7)	напон у бетону MPa (8)
C1	3,05	2,84	-6,9	7,37	6,33	-14,1	140,8	10,1
C3	7,87	7,73	-1,8	17,27	17,05	-1,3	211,1	19,4
C4	6,10	6,01	-1,5	15,49	14,84	-4,2	144,5	17,3

#### 10.3.2.4 Разматрање резултата за за експеримент из литературе [41]

Генерално, може се констатовати веома добро слагање срачунатих и мерених дуготрајних угиба. Највеће одступање (колона (7) табеле 10.7) износи 14,1 % (носач C1). Детаљније сагледавање резултата овог експеримента и изведених нумеричких резултата треба да укључи и следеће веома битне чињенице. Иако су носачи поново јако армирани (као и у [25], чак и јаче), констатовано скупљање у експерименту је веома умерено ( $\epsilon_{sk} \approx 0,3 \%$ ), па је утицај скупљања на деформацију умањен. С друге стране, оптерећење притиснутог бетона експерименталних носача C3 и C4 је веома велико. Просечни напон притиска у пресеку са прслином носача C3 износи  $19,37/2 = 9,68 \text{ MPa}$ . Граница напона притиска након које настају нелинеарне деформације течења износи, према Моделу коду MC 1990 [3],  $40 \% f_{cm}(t_0)$ , што код разматраних носача износи управо толико:  $0,40 \times 24,13 = 9,65 \text{ MPa}$ .

Носач C3, оптерећен до нивоа рачунског затезања у арматури од  $211 \text{ MPa}$ , показао је одлично слагање измерених и рачунских дуготрајних угиба. Овај резултат је значајнији од осталих, с обзиром да су сви остали досад размотрени експериментални резултати (у [25] и у [41]) имали практично униформно напрезање арматуре у средњем пресеку, израчунато према моделу са прслином, од око  $140 \text{ MPa}$ . Ограничавајући моменат да би се прихватило да је модел Еврокода 2 успешан за различите нивое напрезања арматуре јесте да се ради о само једном експерименталном носачу.

Резимирајући резултате прорачуна за експерименте [25] и [41], за извођење коначног закључка о прихватљивости модела за прорачун дуготрајног угиба Еврокода 2, остају отворена питања условљена следећим чињеницама:

- сви експериментални носачи су статички одређени (просте греде);
- нема довољно потврда за различите нивое рачунских напона у затегнутој арматури;
- досад разматрани носачи због високих процената армирања слабо репрезентују армиранобетонске плоче, као носаче са израженим проблемом угиба.

Одговори у погледу поменутих ограничења потражиће се у наредним експериментима.



У погледу почетног угиба, у експерименту [41], највеће одступање износи 6,9 % (колона (4) табеле 10.7). Притом су све израчунате вредности мање од измерених, што би се поново могло објаснити присуством почетног дела временских деформација. И без тога, предвиђање почетног угиба је веома добро.

### 10.3.3 *L. Bakoss, R. I. Gilbert, K. A. Faulkes и V. A. Pulmano (1982.)*

Ово експериментално истраживање [42] обухватило је четири носача, два статичког система просте греде (означених са *1B1* и *1B2*) и два континуална носача преко једнаких распона (ознаке *2B1* и *2B2*). У овом поглављу размотриће се просте греде. Континуални носачи су обрађени у поглављу 10.4.2.

Проста греда *1B1* оптерећена је при старости од 28 дана сопственом тежином и двома једнаким концентрисаним силама у трећинама распона тако да се изазове настајање прлина. Концентрисано оптерећење је потом уклоњено, а угиб носача је праћен само под дејством сопствене тежине. Греда *1B2* је оптерећена на исти начин и чувана у истим условима, али је концентрисано оптерећење задржано трајно током 500 дана. Распони простих греда износили су 3,75 *m*. Величина концентрисаних оптерећења била је 2,6 *kN*. Релативна влажност је одржавана на просечном нивоу од 54 %. Нега бетона је вршена до 14. дана. Просте греде су оптерећене при старости од 28 дана.

За просте греде је коришћен бетон различите композиције од оног за континуалне носаче (бетон „А“). Чврстоће на притисак одређене су на цилиндрима 150×300 *mm*. Чврстоћа на затезање одређена је савијањем на призмама 153×153×712 *mm*. За мерење дилатације скупљања и коефицијента течења коришћене су призме димензија 100×150×400 *mm*, истог попречног пресека као и греде. Треба нагласити да су у извештају [42] наведени резултати мерења скупљања само за један а течења само за други бетон, па се може претпоставити да је тако и чињено. Стога ће се по једна карактеристика за сваки бетон узети према резултатима другог.

### 10.3.3.1 Преглед геометријских података и оптерећења за експеримент

Подаци о експерименталним гредама су приказани у табели 10.8

Табела 10.8 Преглед геометријских карактеристика и оптерећења за експеримент (*L. Bakoss, R. I. Gilbert, K. A. Faulkes* и *V. A. Pulmano*, [42])

греда	ширина пресека	висина пресека	стат. висина	распон греде	однос $L/d$	затег. армат. $A_{st}$	прит. армат. $A_{sc}$	% затег. арматуре $A_{st}/bh$	концен- трисано опт. $N$	једнако- подељено опт. $N/m'$
	$b$ (mm)	$d$ (mm)	$h$ (mm)	$L$ (m)		$mm^2$	$mm^2$	%		
1B1	100	150	130	3,750	25	226	0	1,69	$t_0 = 2600$ $t_0^+ = 0$	353
1B2	100	150	130	3,750	25	226	0	1,69	2600	353

### 10.3.3.2 Преглед механичких карактеристика пробних тела

Средња вредност чврстоће при старости од 28 дана, када је и вршено оптерећивање, износила је  $39,0 \text{ MPa}$ , а модула еластичности  $31,2 \text{ GPa}$  (бетон „А“). Средња мерена вредност чврстоће при затезању *савијањем* износила је  $4,9 \text{ MPa}$ .

Међутим, за одређивање момента појеве прслина при оптерећењу ( $M_{cr}$ ) ову вредност би требало умањити за напон затезања настао услед (арматуром) спреченог скупљања од момента престанка неге. Уколико се процена релативног дела скупљања у интервалу (28 дан, 14 дан) обави према одредбама Еврокода 2, добија се да је  $\varepsilon_{sk}(28, 14) \approx 0,30 \text{ ‰}$ . Одговарајући коефицијент течења износи  $\varphi(28, 14) \approx 1,0$  (вредности дилатације скупљања и коефицијента течења добијене на основу укупних вредности за период трајања експеримента од 500 дана; ове вредности су приказане у наставку, у поглављу 10.3.3.3). Прорачун ААЕМ методом за интервал времена (28, 14), за носач без прслина, даје напон затезања од  $2,0 \text{ MPa}$  услед скупљања. То значи да је за затезање при оптерећењу „расположива“  $f_{ctm,fl,red}(t_0) = 4,9 - 2,0 = 2,9 \text{ MPa}$ .

Уколико се, међутим, усвоји  $f_{ctm,fl,red}(t_0) \approx f_{ctm}(t_0)$ , што је, према објашњењу датом у поглављу 3.3, приступ који се користи за анализу свих експерименталних резултата у овом поглављу, добија се  $f_{ctm,fl,red}(t_0) = f_{ctm}(t_0) = 4,9/[1,6 - 150/1000] = 3,4 \text{ MPa}$  (употребљен фактор висине пресека Еврокода 2, приказан у поглављу 3.3). Прорачун у наставку је спроведен са овом вредношћу.

### 10.3.3.3 Преглед измерених и срачунатих деформација

Деформације контролних призми током нешто више од 500 дана приказане су у [42] графички. Измерена вредност дилатације скупљања за бетон експерименталних греда (бетон „А“) при старости од 528 дана износи  $\varepsilon_{sk} \approx 0,65 \%$ .

Измерена вредност коефицијента течења за исти период, али за бетон континуалних греда (бетон „В“) је  $\varphi \approx 2,4$ . Оптерећење призми за коефицијент течења континуалних греда извршено је 23 дана, док су просте греде оптерећене 28 дана. Када се изврши прерачунавање вредности коефицијента течења мереног за бетон „В“ према одредбама Еврокода 2, имајући у виду да је средња вредност чврстоће бетона „В“ 28. дана износила око 37,0 *MPa* (одређено из чврстоћа 22. и 42. дана, 33,1 и 41,3 *MPa*), а модул еластичности при истој старости 30,5 *GPa* (одређено из модула 22. и 42. дана - 27,3 и 31,9 *GPa*), добија се вредност коефицијента течења за експерименталне просте греде у износу  $\varphi \approx 2,0$  (коефицијент течења који се примењује са еластичном деформацијом срачунатом са модулом при оптерећивању). Уколико се при прерачунавању не користи однос мерених него рачунских модула еластичности, одређених из мерене чврстоће 28. дана, добија се вредност  $\varphi \approx 2,2$ .

Вредност  $\varphi \approx 2,2$  боље одговара стандардном односу коефицијента течења за оптерећење 23. дана према вредности коефицијента течења за оптерећење 28. дана од  $\varphi \approx 2,4$  (коефицијенти не би требало да се много разликују). С друге стране, прорачуни у тези спроводе се са мереним вредностима модула и методолошки им више одговара друга вредност  $\varphi \approx 2,0$ , одређена из мерених модула еластичности. Разлика од око 10 % између ове две вредности потекла је од тога што је мерена вредност модула еластичности бетона „В“ при старости од од 22 дана била око 10 % мања од теоријске вредности. Уопште узев, оба бетона, а нарочито бетон „В“, одступају од теоријског модела који повезује развој чврстоће и развој модула еластичности. Због тога су оба прерачунавања под знаком питања и прорачун ће се спровести са средњом од ове две вредности,  $\varphi = 2,1$ .

Прерачунавање вредности коефицијента течења и дилатације скупљања због разлике у величини пресека није потребно, с обзиром да су пресеци носача и пробних тела (призми) исти.

Уколико се изврши предвиђање вредности коефицијента течења према релацијама Еврокода 2, приказаним у поглављу 3.9 (за пресек призме  $10,0 \times 15$  cm, чврстоћу  $f_{cm} = 39,0$  MPa, релативну влажност од 54 % и старост од 500 дана; оптерећење извршено при старости од 28 дана), добија се вредност  $\varphi = 2,3$ , што је око 10 % веће од овде процењене мерене вредности. Дилатација скупљања одређена према релацијама Еврокода 2, приказаним у поглављу 3.10, имала би вредност  $\varepsilon_{sk} = \varepsilon_{cs} = 0,49$  ‰ (израчунато за исте параметре и 486 дана од престанка неге), што представља нешто око  $\frac{3}{4}$  измерене вредности  $\varepsilon_{sk} \approx 0,65$  ‰.

Измерени почетни угиб греде 1B2 и угиб при старости од 500 дана дати су у табели 10.9, заједно са срачунатим вредностима добијеним ригорозним методом Еврокода 2 – нумеричким интеграљењем са поделом распона на 50 делова. У табели је приказана и „мерена“ вредност угиба греде 1B1 при старости од 500 дана, само услед скупљања бетона (греда је растерећена од концентрисаног оптерећења одмах по формирању прслина, али је остала оптерећена сопственом тежином; „мерена“ вредност угиба је дата од стране аутора експеримента, тако што је од измереног укупног угиба одузет угиб од сопствене тежине). Коначно, приказани су и „мерени“ и рачунски резултати за оптерећену греду 1B2, али без утицаја скупљања („мерени“ су добијени одузимањем резултата за 1B1 од 1B2).

Табела 10.9 Преглед мерених и срачунатих угиба за експеримент  
(L. Bakoss, R. I. Gilbert, K. A. Faulkes и V. A. Pulmano, [42])

греда (1)	почетни угиб мерени mm (2)	почетни угиб рачунски mm (3)	одступање [(3)-(2)]/(2) % (4)	угиб 500 д. мерени mm (5)	угиб 500 д. рачунски mm (6)	одступање [(6)-(5)]/(5) % (7)	напон у арматури MPa (8)	напон у бетону MPa (9)
1B2	8,94	11,95	33,7	25,02	30,12	20,4	150,5	14,00
1B1	-	-	-	6,90	-	-	-	-
1B2 без $\varepsilon_{sk}$				18,12	20,48	13,0	150,5	14,00

#### 10.3.3.4 Разматрање резултата за за експеримент из литературе [42]

Одступање рачунске од мерене вредности дуготрајног угиба износи око 20%, што је још увек добар резултат, мада слабији него код претходних анализираних експеримената. Овај резултат, сам по себи, чак и када би показао одлично слагање не би био од већег значаја: из једног експерименталног носача не

могу се добити поуздани закључци за предвиђање појаве условљене бројним факторима, као што је угиб армиранобетонских конструкција.

Овај експеримент је уврштен међу разматране због другог разлога. Резултати приказани у табели 10.9 указују да је слагање мереног и рачунског угиба много боље уколико се искључи скупљање. Разматрани носач има у погледу оптерећења (напона у арматури) сличне карактеристике као и носачи из поглавља 10.3.1. Мерено скупљање је такође веома велико и слично као и у 10.3.1 ( $\varepsilon_{sk} \approx 0,70 \%$ ). Али за разлику од носача из 10.3.1, где је слагање мерених и рачунских угиба оцењено као веома добро, овде је коефицијент течења веома умерен (овде  $\varphi \approx 2,1$ , тамо  $\varphi \approx 4,0$ , у просеку), а слагање мерених и рачунских резултата доста слабије: рачунски угиб је 20,4 % већи од мереног. Узрок овоме није превелика редукција рачунске чврстоће на затезање савијањем. Прорачун је спроведен са чврстоћом  $f_{ctm,fl,red}$  (528. дан) =  $\sqrt{0,5} \times 3,4 = 2,4 \text{ MPa}$ .

Мерена  $f_{ctm,fl}$  (28. дан) износила је 4,9 MPa, што одговара рачунској вредности  $f_{ctm,fl}$  (528. дан) = 5,6 MPa (према Еврокоду 2). Напон затезања услед скупљања од  $\varepsilon_{sk} \approx 0,65\%$ , одређен ААЕМ методом за пресек без прслине, износи око 3,7 MPa, па је за држање затезања услед оптерећења расположиво око 5,6 – 3,7 = 1,9 MPa, што је мање од вредности употребљене у алгоритму (2,4 MPa). У 10.3.1 је релативно већи учинак течења „маскирао“ потцењеност учинка скупљања, што је укупно резултовало у бољем рачунском предвиђању угиба.

Рачунски угиб услед скупљања у случају греде 1B2 износи око 47 % угиба само услед оптерећења, односно око трећине укупног угиба. Раскорак рачунског и мереног угиба се доста смањује уколико се искључи скупљање бетона. То поново указује на могуће слабости дела модела који третира учинак скупљања на дуготрајни угиб конструкција.

Коначно, слабо предвиђање почетног угиба (прецењеност преко 30 %) указује на раскорак стварних и примењених улазних величина. Оволико одступање, у првом реду, може да настане уколико се чврстоћа на затезање носача битније разликује од оне утврђене на пробним телима. Међутим, чињеница да је постојала само једна оптерећена експериментална греда 1B2, не оставља простора за засновано тражење одговора, посебно у светлу веома успешног предвиђања у свим осталим експериментима.

#### 10.3.4 J. P. Jaccoud и R. Favre (1982.)

Ово обимно експериментално истраживање [40] је веома добро конципирано. Извршен је велики број мерења, која појединачно и у комбинацијама омогућавају извођење већег броја закључака везаних за проблематику угиба и прлина армиранобетонских конструкција у почетном стању и током времена, услед утицаја скупљања и течења бетона, пре свега армиранобетонских плоча. Мерене су све неопходне материјалне карактеристике на пробним телима. Мерења су споведена на четири серије експерименталних носача – плоча, означених са *A*, *B*, *C* и *D*, које носе у једном или у оба правца. Сами експериментални носачи веома добро моделирају носаче типа армиранобетонских плоча у погледу процената армирања и односа распон/конструктивна висина. Осим тога, када се имају у виду уобичајене дебљине и распони армиранобетонских плоча, може се рећи да фактор размере не прелази вредност 2.

За анализу у овој тези изабране су плоче серије *C*. Ова, најобимнија, серија имала је укупно 11 плоча (означених са *C0*, *C1*, *C2*, *C3*, *C11*, *C12*, *C13*, *C14*, *C15*, *C22* и *C24*) а њихово испитивање је управо фокусирано на неколико аспеката проблематике угиба. Све плоче су биле идентичне, (истог пресека  $75,0 \times 16,0$  *cm*, са истом подужном арматуром за савијање - 5RØ12 и истим распонем од 3,10 *m*. Плоче су за испитивање подељене у две групе *C1-C3* и *C11-C22*. Плоча *C0* је служила у пробне сврхе.

Седам плоча друге групе (*C11-C22*) оптерећено је са пет нивоа оптерећења од најмањег, које износи 0,2, до највећег од 0,6 рачунског граничног оптерећења (то јест, до границе експлоатационих оптерећења; за сваки поједини ниво била је једна или две плоче). Плоча *C11* оптерећена је са 0,2 рачунског граничног оптерећења. У експлоатационом смислу то оптерећење је испод границе настанка прлина услед савијања. Плоче *C12* и *C22*, са 0,3 граничног оптерећења, налазе се у условима настанка првих прлина услед савијања. Плоча *C13* (0,4 граничног оптерећења) је са прлинама. Плоче *C14* и *C24* (0,5 граничног оптерећења) имају даље напредовање прлина. Плоча *C15*, са 0,6 граничног оптерећења, је оптерећена до максималног експлоатационог нивоа.

Три плоче прве групе (C1-C3) су све оптерећиване до највишег нивоа оптерећења (0,6 граничног), али различитом брзином при првом оптерећивању (за 12 секунди, за 10 минута и за 10 часова). Потом је следило 10 циклуса брзог оптерећења/растерећења до истог нивоа. Након тога плоче су оптерећиване до лома. Овај део експеримента није од интереса за проблеме разматране у тези и овде се даље не описује.

Један од резултата, који се такође не налази у фокусу тезе, посебно је интересантан за тумачење величине почетног угиба. С обзиром да се у овом поглављу сагледавају и резултати предвиђања почетних угиба, пре свега ради бољег сагледавања предвиђања дуготрајних, приказаше се резултат ових мерења. Угиби су мерени неколико пута по оптерећењу: непосредно након оптерећивања ( $t - t_0 \approx 0$ ), после 5 минута ( $t - t_0 = 5$  мин.), након једног часа ( $t - t_0 = 1$  час), и даље након једног дана, 28 дана, 6 месеци, једне године и након 510 дана. Резултати мерења угиба након 5 минута усвојени су за почетни угиб (100 %). Сви остали изражени су процентуално у односу на њихове вредности. Резултати су приказани у табели 10.10. У заглављу табеле 10.10 приказани су и односи примењеног оптерећења и рачунске граничне носивости ( $M/M_u$ ) појединих плоча, као и релативна величина примењеног оптерећења у односу на (теоријску) вредност оптерећења при коме настају прслине ( $M/M_{cr}$ ).

Табела 10.10 Мерени угиби у функцији времена у % угиба након 5 минута од оптерећивања према [40]

$M/M_u \rightarrow$	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6
$M/M_{cr} \rightarrow$	0.71	1.07	1.07	1.43	1.79	1.79	2.14
$\downarrow t - t_0$	<b>C11</b>	<b>C12</b>	<b>C22</b>	<b>C13</b>	<b>C14</b>	<b>C24</b>	<b>C15</b>
$\approx 0$	100	91	95	87	92	84	91
5 мин.	100	100	100	100	100	100	100
1 час	109	109	110	111	107	108	105
1 дан	127	132	130	126	118	121	117
28 дана	227	205	220	172	149	159	144
6 месеци	345	323	306	227	195	194	175
1 година	418	350	350	238	204	209	177
510 дана	-	382	-	251	214	219	189

Из резултата приказаних у табели 10.10 се види да је брзина (протекло време од оптерећивања) при мерењу „почетног“ угиба од знатног утицаја на резултат. Уколико се само оптерећивање врши постепеним лагерованем терета, до завршетка наношења оптерећења може се остварити незанемарљив део временске деформације, тако да ни тренутно мерење не обезбеђује „чист“ резултат. Због тога је нумеричко третирање експерименталних података – мерених „почетних“ угиба, без детаљне анализе динамике експеримента, прилично непоуздано.

Све плоче су оптерећене при старости од 28 дана сопственом тежином и двема једнаким концентрисаним силама, на растојању 1,0 *m* од ослонаца, слика 10.1. Величином концентрисаних сила постигнут је жељени ниво дуготрајног оптерећења. У [40] су графички приказани резултати мерења угиба до 500 дана након оптерећења, с тим да су неке плоче посматране само до 1 године. У наставку ће прорачуни угиба бити спроведени за време од 1 године након оптерећења за све плоче друге групе, због практичног разлога: мерене вредности коефицијента течења и дилатације скупљања су у [40] експлицитно (табеларно) дате за време након једне године; за остала времена су приказане графички, на дијаграмима.

На пробним телима (коцкама, цилиндрима, призмама), одређиване су чврстоће на притисак и затезање и модули еластичности бетона при старости од 28. дана. Број пробних тела је велики према броју експерименталних носача, у односу на друге описане експерименте. Иако је основни разлог други део програма експерименталног истраживања (верификација узајамних релација механичких карактеристика дефинисаних у Модел коду *МС 1978*), то, наравно, повећава поузданост закључака у погледу угиба који се изводе на основу овако мерених параметара. Скупљање и течење је мерено на призмама. Цео експеримент је спроведен у контролисаним условима. Просечна релативна влажност износила је 60 %.

Експериментално истраживање [40] које су урадили *Jaccoud* и *Favre* једно је од најбољих у области изучавања временских деформација бетона. Његови најважнији квалитети састоје се у:

- доброј концепцији експерименталних носача, који верно моделирају реалне армиранобетонске плоче;

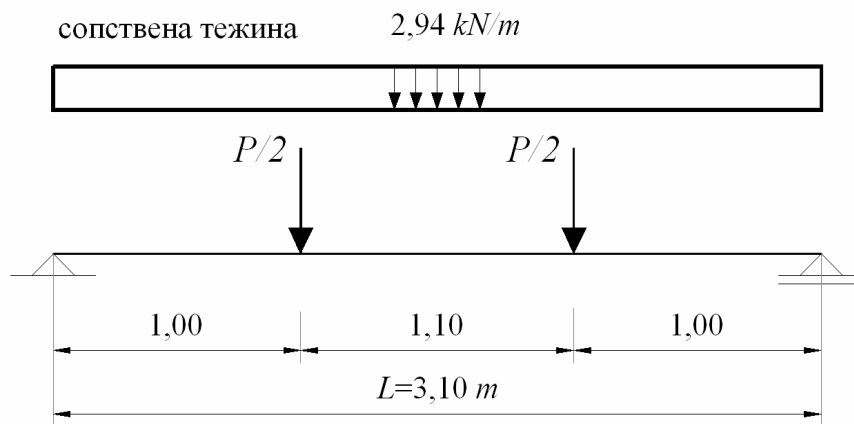


- мерењу свих потребних материјалних параметара и
- бројности експерименталних података, који су тако организовани да могу обезбедити задовољавајућу поузданост закључивања.

Једино суштинско ограничење овог експеримента састоји се у томе што су сви носачи статички одређени, тако да се не могу сагледати ефекти прерасподеле услед промене крутости и временских деформација бетона.

#### 10.3.4.1 Преглед геометријских података и оптерећења

Носачи су, осим сопственом тежином, били оптерећени са две концентрисане силе, према слици 10.1. Подаци о оптерећењу су, заједно са геометријским карактеристикама, приказани у табели 10.11.



Слика 10.1 Диспозиција оптерећења у експерименту [40]

Табела 10.11 Преглед геометријских карактеристика и оптерећења за експеримент (*J. P. Jaccoud* и *R. Favre*, [40])

Ознака греде	шир. прес.	вис. прес.	стат. вис.	распон греде	однос $L/d$	затег. арм. $A_{st}$	прит. арм. $A_{sc}$	% зат. армат. $A_{st}/bh$	% укупне арматуре $(A_{st}+A_{sc})/bh$	јед. подељ. опт.	конц. опт. $2 \times P/2 =$
	$b$ (mm)	$d$ (mm)	$h$ (mm)	$L$ (m)		$mm^2$	$mm^2$	%	%	$N/m'$	$kN$
C11	750	160	130	3,10	19,4	565	56,5	0,58	0,64	2880	5,77
C12, C22	750	160	130	3,10	19,4	565	56,5	0,58	0,64	2880	12,19
C13	750	160	130	3,10	19,4	565	56,5	0,58	0,64	2880	18,61
C14, C24	750	160	130	3,10	19,4	565	56,5	0,58	0,64	2880	25,04
C15	750	160	130	3,10	19,4	565	56,5	0,58	0,64	2880	31,45

#### 10.3.4.2 Преглед механичких карактеристика пробних тела

У табели 10.12 су приказане мерене вредности чврстоће на притисак, чврстоће на затезање и модула еластичности при старости од 28 дана (при оптерећењу). Средња вредност чврстоће на притисак 28. дана, одређена на цилиндрима  $150 \times 300 \text{ mm}$ , износила је  $30,55 \text{ MPa}$ . Средње вредности чврстоће на затезање и модула еластичности 28. дана, одређене на призмама  $120 \times 120 \times 360 \text{ mm}$ , износиле су  $2,80 \text{ MPa}$ , односно  $29,5 \text{ GPa}$ .

Предвиђањем вредности чврстоће на затезање при старости од 28 дана, из средње вредности чврстоће  $f_{cm} = 30,55 \text{ MPa}$ , добија се вредност од  $2,4 \text{ MPa}$ , што је око 14 % мање од средње измерене вредности и представља добар резултат, када је овај параметар у питању. Предвиђањем вредности модула еластичности при старости од 28 дана, из средње вредности чврстоће на притисак, добија се вредност од  $30,76 \text{ GPa}$ , што је око 4 % веће од средње измерене вредности и такође веома добро.

Табела 10.12 Преглед карактеристика материјала за експеримент  
(*J. P. Jaccoud* и *R. Favre*, [40])

Носачи на које се узорак односи	чврстоћа 28. дан <i>MPa</i>	$f_{cm}$ 28. дан <i>MPa</i>	модул 28. дан <i>GPa</i>	$\varphi$ 1 год. призме	$\varphi$ 1 год. носачи	$\varepsilon_{cs}$ 1 год. призме ‰	$\varepsilon_{cs}$ 1 год. носачи ‰
C11	28,82	2,56	29,0	-	2,00	-	0,305
C12, C14	29,40	3,06	28,3	2,42	2,06	0,419	0,365
C22	32,89	2,89	30,8	2,36	2,01	0,315	0,274
C13	30,93	2,82	29,2	-	2,00	-	0,305
C24	31,97	2,56	30,9	-	2,00	-	0,305
C15	29,29	2,90	28,7	2,15	1,83	0,317	0,276
средња	30,55	2,80	29,5	2,31	-	0,350	-

#### 10.3.4.3 Преглед измерених и срачунатих деформација

На оптерећеним призмама димензија  $120 \times 120 \times 360 \text{ mm}$  мерене су дилатације скупљања и течења. Константни напон притиска износио је  $4,0 \text{ MPa}$ . На неоптерећеним призмама истих димензија мерено је скупљање. Средња

измерена вредност дилатације скупљања, након једне године, износила је  $\varepsilon_{sk} = 0,35 \text{ ‰}$ , а коефицијента течења  $\varphi = 2,31$ .

Уколико би се извршило предвиђање вредности дилатације скупљања према релацијама Еврокода 2, приказаним у поглављу 3.10, дилатација скупљања имала би вредност  $\varepsilon_{sk} = \varepsilon_{cs} = 0,48 \text{ ‰}$  (израчунато за пресек призме димензија  $12,0 \times 12,0 \text{ cm}$ , просечну вредност измерене чврстоће од  $f_{cm} = 30,55 \text{ MPa}$ , релативну влажност од  $60 \text{ ‰}$  и 365 дана од престанка неге), што је за више од трећине веће од измерене вредности. Предвиђање вредности коефицијента линеарног течења може се такође урадити према релацијама Еврокода 2, приказаним у поглављу 3.9, за исте параметре и за оптерећење при старости од 28 дана. Добија се вредност  $\varphi = 2,35$ , што одлично одговара измереној вредности.

Преглед измерених вредности дилатација скупљања и коефицијената течења за експерименталне носаче након једне године дат је у табели 10.12, заједно са мереним вредностима механичких карактеристика. Приказане вредности течења и скупљања одговарају призмама пресека  $120 \times 120 \text{ mm}$ . При прорачуну угиба греда, имајући у виду да су димензије пресека модела  $750 \times 160 \text{ mm}$ , користи се 0,85 вредности коефицијента течења и 0,87 дилатације скупљања за призме. И ове вредности су приказане у табели 10.12. Недостајуће вредности за поједине греде (које нису мерене) усвојене су прерачунавањем из средње вредности коефицијента течења, односно дилатације скупљања.

Поред досад приказаних података, за прорачун угиба потребна су још два: величина модула еластичности арматуре, за који је усвојена вредност од  $200 \text{ GPa}$ , и величина напона у затегнутој арматури у пресеку у средини распона, услед дуготрајног оптерећења. Величине рачунских напона у арматури, у пресецима у средини распона, за поједине експерименталне носаче су (из практичних разлога, због подесне структуре табеле) приказане у табели 10.13, заједно са резултатима прорачуна (иако представљају улазне податке за прорачун). Као илустрација, приказани су и одговарајући рачунски ивични напони притиска у бетону.

Преглед измерених почетних угиба експерименталних греда и њихових вредности након једне године дат је у табели 10.13, заједно са срачунатим вредностима добијеним ригорозним методом Еврокода 2 – нумеричким интегралњем са поделом распона на 50 делова.

Табела 10.13 Преглед мерених и срачунатих угиба за експеримент  
(*J. P. Jaccoud* и *R. Favre*, [40])

греда (1)	поч. угиб $t = 5 \text{ min}$ мерени <i>mm</i> (2)	почетни угиб рачунски <i>mm</i> (3)	одступање $[(3)-(2)]/(2)$ % (4)	угиб 1 година мерени <i>mm</i> (5)	угиб 1 година рачунски <i>mm</i> (6)	одступање $[(6)-(5)]/(5)$ % (7)	напон у арматури <i>MPa</i> (8)	напон у бетону <i>MPa</i> (9)
C11	1.1	0.9	-18.2	4.5	3.3	-26.7	(93,3)	
C12	2.2	1.3	-40.9	7.6	7.0	-7.9	141,8	6,58
C22	2.0	1.2	-40.0	7.0	6.9	-1.4	141,3	6,81
C13	5.4	4.3	-20.4	12.6	11.7	-7.1	188,9	8,89
C14	8.5	6.9	-18.8	17.3	15.8	-8.7	236,5	10,97
C24	8.0	8.1	1.3	16.7	16.4	-1.8	235,6	11,36
C15	11.0	10.3	-6.4	19.5	18.7	-4.1	283,5	13,24

#### 10.3.4.4 Разматрање резултата за експеримент из литературе [40]

Генерално, може се констатовати одлично слагање срачунатих и мерених дуготрајних угиба. Највеће одступање (колона (7) табеле 10.13) износи 8,7 %, уколико се изузме резултат за плочу C11. Доста мање теоријско предвиђање у односу на измерени резултат (овде 26,7 %) констатовано је у више случајева обраде ове плоче (на пример [43]). Сами аутори у [40] дају исту вредност теоријског предвиђања која је приказана у колони (6) табеле 10.13. Тај рачунски резултат је практично неизбежан, с обзиром да се, због малог напрезања, проблем не удаљава од линеарне теорије еластичности. Најједноставније објашњење је да је на плочи C11 ипак дошло до настанка неколико прелина. Са инжењерског становишта тумачење је небитно: мерени дуготрајни угиб плоче C11 износи распон/700, што вишеструко задовољава критеријуме граничног стања употребљивости.

Од посебног значаја је што су одлични резултати добијени за различите нивое напрезања. Притом, експериментални носачи добро моделирају конструкције типа плоче, с обзиром да су армирани затегнутом арматуром у износу од 0,58 %. Измерене вредности скупљања нису велике, а због малог процента армирања и свеукупни утицај скупљања на величину угиба је доста умањен.

У целини гледано, имајући у виду напред описане квалитете овог експеримента, на задовољавајући начин су покривена нека од отворених питања произашла из анализа у 10.3.1-10.3.3.

У погледу прихватљивости модела за прорачун дуготрајних угиба Еврокода 2, на основу досад разматраних експеримента у поглављима 10.3.1-10.3.4, може се констатовати:

- да поступак даје веома добре резултате при предвиђању угиба статички одређених конструкција, и
- да су резултати предвиђања нешто слабији (али још увек задовољавајући) у случајевима конструкција са великим скупљањем.

Са практичног инжењерског аспекта то значи да се применом поступка Еврокода 2 за контролу угиба може остварити ефикасна контрола деформабилности статички одређених конструкција. Са теоријског аспекта, постоје разлози за редефинисање дела модела који уводи утицај скупљања на величину угиба.

Прихватљивост модела у случају статички неодређених конструкција биће размотрена у наставку, у поглављу 10.4.

Што се почетних угиба тиче, резултати приказани у табели 10.13 показују знатна одступања мерених и рачунских вредности. Практично сва одступања су, захваљујући спроведеним пратећим мерењима објашњива. Овде ће се само коментарисати највећа одступања од око 40 % код плоча C12 и C22 (обе оптерећене истим оптерећењем, које је пројектовано да буде око 7 % веће од границе настанка прслина). Чврстоћа на затезање, изведена из пробних тела, за обе плоче појединачно, даје рачунски момент појаве прслина  $M_{cr}$  који је већи од максималног момента од оптерећења (а не мањи за око 7 %, како је пројектовано, види табелу 10.10), тако да при прорачуну почетних угиба обе плоче остају у стању без прслина. У експерименту је, међутим, дошло до појаве прслина и мерени угиб је стога увећан у односу на рачунско предвиђање. При прорачуну дуготрајног угиба, који се спроводи са коефицијентом  $\beta$  редукованом чврстоћом на затезање, прслине се исказују и дуготрајни угиб има, за разлику од почетног, веома добро предвиђање.

## 10.4 Експерименти на континуалним гредама

Експеримената везаних за угибе армиранобетонских конструкција на статички неодређеним носачима нема много. Углавном су спровођени на континуалним носачима или армиранобетонским плочама. У наставку су разматрана два програма у оквиру којих је испитивано понашање континуалних носача са два једнака распона. Програми су именовани према ауторима истраживања и години публикавања резултата.

### 10.4.1 *G. W. Washa* и *P. G. Fluck* (1956.)

Ово истраживање [26] представља целину са претходним из 1952. године [25] које је извршено на простим гредама (описано у поглављу 10.3.1). Као и истраживање [25], и ово је веома систематично и обухватно сагледавање утицаја неколико параметара на временске деформације бетонских конструкција. Основна идеја била је, поново, да се сагледа утицај притиснуте арматуре на развој деформација услед скупљања и течења бетона. Три серије (*X*, *Y* и *Z*) са укупно 18 континуалних греда са по два једнака распона, различитих димензија правоугаоног попречног пресека и различито армираних у пољима (једнострано, обострано – са притиснутом арматуром једнаком половини затегнуте и обострано – симетрично), са по два једнака распона 6,1 – 6,3 *m*, посматрано је под дуготрајним оптерећењем током 2½ године. Мерене су реакције ослонаца, дилатације на бетону у нивоима затегнуте и притиснуте арматуре и угиби, након оптерећења, које је извршено при старости бетона од 14 дана, и током времена. На пробним телима, цилиндрима и призмама, одређиване су чврстоће при притиску и модули еластичности бетона 14., 28. дана и након 2½ године. За разлику од експеримента [25] из 1952. године, скупљање и течење није мерено.

И ово експериментално истраживање, које су урадили *Washa* и *Fluck*, осим што је једно од најранијих, једно је од најбољих у области изучавања временских деформација бетона. Његов најважнији квалитет, као и код претходног [25], поново се састоји у бројности експерименталних података, који су тако организовани да се могу извлачити закључци. Поново је рађен је пар носача сваког типа, али је, у односу на експерименте са простим гредама, број мерних

места (результата) за свако појединачно мерење у распонима удвостручен, с обзиром на симетрију поља. Тако сада, на пример, вредности угиба представљају средњу вредност од 4 резултата.

Битне особине ових експеримената јесу и доста висок коефицијент армирања греда (преко 1,5 % затегнуте, односно, преко 3,0 % укупне арматуре у пресецима у пољу, до чак 6,5 % укупне арматуре код ослонца) и висок ниво оптерећења – напона у бетону. Услед тога велики је утицај скупљања и течења бетона. Ниво оптерећења је такав да су носачи веома испрскали. За израду модела коришћен је бетон комерцијалне рецептуре, а носачи и пробна тела, иако смештени у лабораторији, нису (намерно), као и код претходног експеримента [25], чувани у константним, већ у природно променљивим амбијенталним условима, са релативном влажношћу која се кретала од 20 до 90 %.

Почетна читања инструмената узимана су и неколико часова након почетка оптерећивања, услед чега садрже и одређени део деформације течења. Такође је наведено да је у појединим носачима могло бити одступања у положају арматуре. С обзиром да је, на пример, код носача серије Z пројектована статичка висина свега око 5,9 cm (2,3 инча), ово је могло да има знатног утицаја на величину угиба.

Табела 10.14 Преглед геометријских карактеристика и оптерећења за експеримент (*G. W. Washa* и *P. G. Fluck*, [26])

Ознака греде	ширина пресека	висина пресека	стат. висина	распон греде 2×	однос $L/d$	једнако-подељено оптер.	напон у арматури	напон у бетону
	$b$ (mm)	$d$ (mm)	$h$ (mm)	$L$ (m)		$N/m'$	$MPa$	$MPa$
X1, X4	152	203	157	6,10	30	2773	138,2	9,05
X2, X5	152	203	157	6,10	30	2773	136,8	9,53
X3, X6	152	203	157	6,10	30	2773	135,1	10,17
Y1, Y4	305	127	102	6,34	50	2131	136,9	8,69
Y2, Y5	305	127	102	6,34	50	2131	135,8	9,33
Y3, Y6	305	127	102	6,34	50	2131	134,6	10,19
Z1, Z4	305	76	59	5,33	70	992	141,8	9,25
Z2, Z5	305	76	59	5,33	70	992	140,4	9,67
Z3, Z6	305	76	59	5,33	70	992	138,7	10,21

#### 10.4.1.1. Преглед геометријских података и оптерећења

Континуални носачи серије *X* имали су исте попречне пресеке у распонима (величина бетонског пресека, површина арматуре) и распоне као и носачи серије *B* експеримента приказаног у поглављу 10.3.1. Слично томе, серија *Y* по пресецима и распонима одговара серији *C*, а серија *Z* серији *E* овог експеримента.

Подаци о геометрији и оптерећењима експерименталних носача су приказани у табелама 10.14 и 10.15.

Табела 10.15 Преглед површина арматура у носачима за експеримент  
(*G. W. Washa* и *P. G. Fluck*, [26])

Ознака греде	затег. армат. поље $A_{st}$	прит. армат. поље $A_{ct}$	% затег. арматуре поље $A_{st}/bh$	% укупне арматуре поље $(A_{st}+A_{sc})/bh$	затег. армат. ослонац $A_{st}$	прит. армат. ослонац $A_{sc}$	% затег. арматуре ослонац $A_{st}/bh$	% укупне арматуре ослонац $(A_{st}+A_{sc})/bh$
	$mm^2$	$mm^2$	%	%	$mm^2$	$mm^2$	%	%
X1, X4	400	400	1,68	3,35	684	600	2,86	5,37
X2, X5	400	200	1,68	2,51	684	600	2,86	5,37
X3, X6	400	0	1,68	1,68	684	600	2,86	5,37
Y1, Y4	516	516	1,66	3,32	1000	1000	3,23	6,45
Y2, Y5	516	258	1,66	2,49	1000	1000	3,23	6,45
Y3, Y6	516	0	1,66	1,66	1000	1000	3,23	6,45
Z1, Z4	284	284	1,58	3,16	516	645	2,88	6,48
Z2, Z5	284	142	1,58	2,37	516	645	2,88	6,48
Z3, Z6	284	0	1,58	1,58	516	645	2,88	6,48

#### 10.4.1.2. Преглед механичких карактеристика пробних тела

Преглед механичких карактеристика пробних тела (чврстоћа и модула еластичности) при старости од 14 дана (при оптерећењу), старости од 28 дана и након 3 године дат је у табели 10.16. Приказани резултати су средина од три узорка, изузимајући вредности за 3 године, који су појединачни резултати.



Табела 10.16 Преглед механичких карактеристика пробних тела за експеримент (*G. W. Washa* и *P. G. Fluck*, [26])

Носачи на које се узорак односи	чврстоћа на притисак			модул еластичности		
	<i>MPa</i>	<i>MPa</i>	<i>MPa</i>	<i>GPa</i>	<i>GPa</i>	<i>GPa</i>
	14. дан	28. дан	3 год.	14. дан	28. дан	3 год.
Z1, Z2, Z3	23,65	26,41	33,23	20,55	23,65	28,41
X1, X2, X3	21,79	24,62	28,48	19,72	23,17	28,48
Y1, Y2, Y3	23,58	26,27	25,17	20,20	23,24	27,44
Z4, Z5, Z6	21,79	25,44	28,82	19,72	22,34	27,92
X4, X5, X6	22,75	26,06	31,17	19,37	23,31	27,99
Y4, Y5, Y6	22,75	28,75	29,86	19,72	23,31	26,48

#### 10.4.1.3 Преглед измерених и срачунатих деформација

Као што је већ поменуто, у оквиру овог експеримента није вршено мерење коефицијента течења и дилатације скупљања. Иако бетони греда овог експеримента имају нешто боље механичке карактеристике (табела 10.16) у односу на одговарајуће серије експеримента [25] (табела 10.2), за прорачуне у наставку усвојиће се исте вредности коефицијента течења  $\varphi \approx 4,6$  и дилатације скупљања  $\varepsilon_{sk} \approx 0,75 \%$  (за пресек величине  $4 \times 4$  инча), с обзиром да је читав експеримент спроведен на исти начин, с тим да ће се при прерачунавању вредности за поједине серије носача узети у обзир и да је средња вредност релативне влажности износила 55 % (амбијентална влажность је варирала од 20 до 90 %; при тесту на призмама, [25], средња вредност релативне влажности је износила 50 %).

Преглед потребних података за израчунавање почетних угиба експерименталних греда и њихових вредности након  $2\frac{1}{2}$  године дат је у табели 10.17. Приказане су вредности чврстоће на притисак при старости од 14 и 28 дана, модула еластичности при старости од 14 дана (при оптерећењу), коефицијента течења и дилатације скупљања за период под оптерећењем ( $2\frac{1}{2}$  године) и чврстоће на затезање при оптерећењу. Вредности за чврстоћа на притисак и модула добијене су као средње вредности два резултата приказана у табели 10.16, према пару носача који се разматра. Вредности коефицијената течења и дилатација

скупљања за поједине носаче прерачунате су из измерених вредности на призмама, узимајући у обзир разлике у величини пресека и чврстоћи на притисак носача и призми на којима је вршено мерење течења и скупљања у [25], и разлику у средњој релативној влажности. Коefицијент за прерачунавање одређен је као релативни однос коefицијената који уводе утицај чврстоће и средњег радијуса према одредбама Еврокода 2, приказаним у поглављима 3.9 и 3.10.

Табела 10.17 Механичке и реолошке карактеристике за прорачун носача  
(*G. W. Washa* и *P. G. Fluck*, [26])

греда	чврстоћа 14. дан <i>MPa</i>	чврстоћа 28. дан <i>MPa</i>	модул 14. дан <i>GPa</i>	$\phi$ 2½ год	$\epsilon_{cs}$ 2½ год %	$f_{cm}$ 14. дан <i>MPa</i>	$f_{cm,fl}$ 14. дан <i>MPa</i>	$f_r$ (ACI) 14. дан <i>MPa</i>
призме за $\phi$ и $\epsilon_{cs}$	23,86	26,99	19,58	4,60	0,75	1,93	2,88	2,03
X серија	22,27	25,34	19,55	4,02	0,71	1,81	2,53	1,96
Y серија	23,17	27,51	19,96	3,83	0,70	1,96	2,89	2,00
Z серија	22,72	25,93	20,13	4,27	0,72	1,85	2,82	1,98

Вредности чврстоће на затезање при оптерећивању 14. дана, које нису мерене, израчунате су из мерених чврстоћа на притисак при старости од 28 дана. У првом кораку добијена је чврстоћа на затезање 28. дана, а потом прерачуната на 14. дан (према релацијама (3.4) и (3.5) Еврокода 2 приказаним у поглављу 3.3). Као што је објашњено у поглављу 3.3, за прорачун момента појаве прслина  $M_{cr}$  ће се користити чврстоћа на аксијално затезање за старост при оптерећивању  $f_{cm}(14)$ , као апроксимација за  $f_{cm,fl,red}$ . У табели су приказане и чврстоће на затезање савијањем одређене према Еврокоду 2 (нередукована  $f_{cm,fl}$ ) и ACI 318 [9] ( $f_r$  према релацији (4.26) у поглављу 4.3, редукована према ACI 318-08).

Поред досад приказаних података, за прорачун угиба потребна су још два: величина модула еластичности арматуре, за који је, као и у експерименту [25], узето 206,8 *GPa*, и величина напона у затегнутој арматури у пресеку у средини распона, услед дуготрајног оптерећења. Величине рачунских напона у арматури, у пресецима у средини распона, за поједине експерименталне носаче су (из практичних разлога, због подесне структуре табеле) приказане у табели 10.14. Напони су израчунати за пресек са највећим моментом у пољу, према дијаграму момената који се добија са константном крутошћу (уобичајени инжењерски

дијаграм). Коришћен је модел за пресек са прслином, са линеарним дијаграмом напона притиска и занемарујући напоне затезања у бетону, са односом мерених модула еластичности бетона и арматуре (стандардни поступак граничног стања употребљивости). Као илустрација, приказани су и одговарајући ивични напони притиска у бетону.

Преглед измерених почетних угиба експерименталних греда и њихових вредности након 2½ године дат је у табели 10.18, заједно са срачунатим вредностима добијеним ригорозним методом Еврокода 2 – нумеричким интеграљењем са поделом распона на 50 делова.

Табела 10.18 Преглед мерених и срачунатих угиба за експеримент  
(*G. W. Washa* и *P. G. Fluck*, [26])

града (1)	почетни угиб мерени <i>mm</i> (2)	почетни угиб рачун. <i>mm</i> (3)	одступ. [(3)-(2)] /(2) % (4)	угиб 2½ год мерени <i>mm</i> (5)	угиб 2½ год рачун. <i>mm</i> (6)	одступ. [(6)-(5)] /(5) % (7)	угиб 2½ без прер. <i>mm</i> (8)	одступ. [(8)-(5)] /(5) % (9)	$M_{осл}/$ $M_{брutto}$ мерени (10)	$M_{осл}/$ $M_{брutto}$ рачун. (11)	одступ. [(11)-(10)] /(10) % (12)
X1, X4	14,2	16,4	15,5	29,0	31,8	9,7	37,7	30,0	1,22	1,14	-6,6
X2, X5	14,5	16,7	15,2	32,3	36,2	12,1	46,6	44,3	1,17	1,23	5,1
X3, X6	15,7	17,0	8,3	37,8	46,3	22,5	69,4	83,6	1,34	1,41	5,2
Y1, Y4	22,6	25,2	11,5	46,0	45,6	-0,9	58,0	26,1	1,25	1,20	-4,0
Y2, Y5	23,6	25,7	8,9	49,8	52,4	5,2	73,1	46,8	1,32	1,30	-1,5
Y3, Y6	25,4	26,4	3,9	59,9	68,3	14,0	112,7	88,1	1,40	1,51	7,9
Z1, Z4	26,4	32,7	23,9	58,9	62,8	6,6	80,3	36,3	1,29	1,21	-6,2
Z2, Z5	28,7	33,1	15,3	67,8	71,0	4,7	98,4	45,1	1,26	1,27	0,8
Z3, Z6	30,5	33,6	10,2	79,8	89,8	12,5	144,0	80,5	1,38	1,47	6,5

У табели 10.18 су приказане (колона (8)) и рачунске вредности дуготрајних угиба које се добијају када се за нумеричко интеграљење користи стандардни моментни дијаграм линеарне теорије еластичности за носач константне крутости (дијаграм без почетне и временске прерасподеле). Такође су дате и мерене (колона (10)) и рачунске (колона (11)) укупне релативне промене ослоначког момента након 2½ године. Мерене промене су одређене из мерених вредности ослоначке реакције, приказаних у [26]. Укупна релативна промена момента подразумева збир промена услед почетне и временске прерасподеле.

#### 10.4.1.4 Разматрање резултата за експеримент из литературе [26]

Генерално, може се констатовати веома добро слагање срачунатих и мерених дуготрајних угиба. Ако се изузме највеће одступање од 22,5 % (колона (7) табеле 10.18) за носаче X3 и X6, сва остала одступања су испод 15 %.

Међутим, од доброг поклапања мерених и рачунских вредности угиба значајнији су подаци који се односе на прерасподелу утицаја услед промене крутости и временских деформација бетона. Приказане вредности „угиба“ добијене нумеричким интегралњем кривина стандардног (непрерасподељеног) дијаграма момената и, нарочито, њихова релативна одступања у односу на мерене вредности, показују узалудност уложеног труда у овај посао: одступања су код разматраних носача и преко 80 %! Другим речима, занемаривање ефеката прерасподеле утицаја код статички неодређених конструкција није прихватљиво при прорачуну угиба.

С друге стране, мерени ефекти прерасподеле, квантификовани кроз промену величине ослоначког момента, показују добро слагање са нумеричким предвиђањем (колона (12) табеле 10.18). Највеће одступање рачунске укупне вредности момента не прелази 10 % (ослоначки момент је прикладан за квантификовање, с обзиром да је његова еталонска вредност, код континуалног носача са два једнака распона, једнака стрели дијаграма момената као укупној мери напрезања носача). Овај резултат је од већег значаја од доброг слагања мерених и рачунских угиба јер указује на добро моделирање крутости.

Поново треба приметити да је скупљање бетона у експерименту веома велико ( $\varepsilon_{sk} \approx 0,70 \%$ ). Иако је у експерименту, констатовано веома добро слагање резултата, поново су највећа одступања у предвиђању угиба управо код носача код којих су ефекти највећи – једноструко (у пољу) армираних носача X3, X6, Y3, Y6, Z3 и Z6. Уколико се искључе њихови резултати, предвиђање угиба преосталих носача може се окарактерисати као одлично, с обзиром да су сва одступања (колона (7) табеле 10.18), осим једног, мања од 10 %. Као што је већ напред, у поглављу 10.3.1 објашњено, одступање није резултат недовољне (прорачунске) редукције чврстоће на затезање коефицијентом  $\beta$ , јер су рачунски угиби већи од

мерених. Остаје и даље отворено питање адекватности (дела) модела за одређивање кривине услед скупљања за носаче са прслинама.

Када се сумирају резултати примене модела за прорачун угиба Еврокода 2 на досад разматране експерименте, може се рећи, да је, укључивањем и статички неодређених носача отворен пут ка коначном закључку о прихватљивости. Притом, код већине обрађених експеримената, констатована је проблематичност дела модела који уводи допринос скупљања угибу армиранобетонских конструкција у стању са прслинама. У наставку ће бити обрађен још један, другачије конципиран, експеримент на континуалним носачима, како би се поново тестирала ефикасност алгоритма на статички неодређеним носачима.

Предвиђање почетног угиба, уколико се искључе носачи серије *Z*, због истих разлога као и носачи серије *E* у 10.3.1 (мала конструктивна висина и питање прецизности постављања арматуре), може се такође означити као веома добро, иако нешто слабије него код претходно разматраних експеримената (просечно одступање је веће). Требало би приметити да су сви рачунски угиби већи од мерених, иако почетни мерени угиби, као што је објашњено у уводу, садрже и део временских, због споријег читавања. Генерално би се могло означити да је то последица коришћења редуковане вредности чврстоће на затезање савијањем, односно, да је величина редукције која је усмерена на добијање добрих временских, превелика за израчунавање почетних угиба.

#### 10.4.2 *L. Bakoss, R. I. Gilbert, K. A. Faulkes* и *V. A. Pulmano* (1982.)

Први део овог експерименталног истраживања, на простим гредама, обрађен је у поглављу 10.3.3. Ово експериментално истраживање [42] обухватило је два континуална носача преко једнаких распона (ознаке *2B1* и *2B2*).

Континуални носачи су оптерећени при старости од 23 дана једнаким концентрисаним силама у средини сваког распона. Носачи су постављени у оборени положај, тако да је концентрисано оптерећење деловало у хоризонталној равни. Тиме је избегнуто оптерећивање сопственом тежином. Концентрисано оптерећење је задржано трајно током 400 дана. Мерени су угиби, реакције ослонаца и дилатације у више пресека. Релативна влажност је одржавана на просечном нивоу од 54 %. Нега бетона је вршена до 14. дана.

За континуалне носаче је коришћен бетон различите композиције од оног за просте греде (бетон „B“). Чврстоће на притисак одређене су на цилиндрима  $150 \times 300 \text{ mm}$ . Чврстоћа на затезање одређена је савијањем на призмама  $153 \times 153 \times 712 \text{ mm}$ . За мерење дилатације скупљања и коефицијента течења коришћене су призме димензија  $100 \times 150 \times 400 \text{ mm}$ , истог попречног пресека као и греде. Као што је већ напоменуто у поглављу 10.3.3, у [42] су наведени резултати мерења скупљања само за један, а течења само за други бетон, па се може претпоставити да је тако и чињено. Стога ће се по једна карактеристика за сваки бетон узети према резултатима другог.

#### 10.4.2.1. Преглед геометријских података и оптерећења за експеримент

Геометријски подаци о експерименталним гредама и оптерећењу су приказани у табелама 10.19 и 10.20.

Табела 10.19 Преглед геометријских карактеристика и оптерећења за експеримент (*L. Bakoss, R. I. Gilbert, K. A. Faulkes и V. A. Pulmano, [42]*)

Ознака греде	ширина пресека	висина пресека	стаг. висина	распон греде $2 \times$	однос $L/d$	једнако-подељено оптер.	концен. оптер.	напон у армат.	напон у бетону
	$b \text{ (mm)}$	$d \text{ (mm)}$	$h \text{ (mm)}$	$L \text{ (m)}$		$N/m'$	$kN$	$MPa$	$MPa$
2B1, 2B2	100	150	130	3,500	23	0	6,00	128,3	11,46

Табела 10.20 Преглед површина арматура у носачима за експеримент (*L. Bakoss, R. I. Gilbert, K. A. Faulkes и V. A. Pulmano, [42]*)

Ознака греде	затег. арматура поље $A_{st}$	прит. арматура поље $A_{sc}$	% затег. арматуре поље $A_{st}/bh$	% укупне арматуре поље $(A_{st}+A_{sc})/bh$	затег. арматура ослонац $A_{st}$	прит. арматура ослонац $A_{sc}$	% затег. арматуре ослонац $A_{st}/bh$	% укупне арматуре ослонац $(A_{st}+A_{sc})/bh$
	$mm^2$	$mm^2$	%	%	$mm^2$	$mm^2$	%	%
2B1, 2B2	226	0	1,69	1,69	226	0	1,69	1,69

#### 10.4.2.2 Преглед механичких карактеристика пробних тела

Средња вредност чврстоће при старости од 22 дана износила је 33,1 *MPa*, а модула еластичности 27,3 *GPa* (бетон „B“). Оптерећивање је извршено 23. дана и прерачуната вредност модула (Еврокод 2, поглавље 3.2) износи  $E_{cm}(23) = 28,0$  *GPa*. Измерена вредност чврстоће при затезању **савијањем** при старости од 42 дана износила је 5,6 *MPa*. Када се изврши прерачунавање према одредбама Еврокода 2 приказаним у поглављу 3.3, добија се вредност чврстоће при затезању савијањем при оптерећивању  $f_{ctm,fl}(23) = 5,3$  *MPa*.

Вредност чврстоће на затезање савијањем која ће се употребити у прорачуну овде ће се, као и у поглављу 10.3.2.2, одредити на два начина.

Први начин, према објашњењу датом у поглављу 3.3, подразумева да се за прорачун угиба усвоји редукована вредност  $f_{ctm,fl,red} \approx f_{ctm}$ , што је приступ који је коришћен за анализу свих експерименталних резултата у овом поглављу. Добија се  $f_{ctm,fl,red} = f_{ctm} = 5,3/[1,6 - 150/1000] = 3,65$  *MPa* (употребљен фактор висине пресека према Еврокоду 2, приказан у поглављу 3.3). Као што је објашњено у поглављу 3.3, овај једноставан начин је погодан за инжењерске прорачуне.

Други начин подразумева да се тачније испрате услови за настанак прслина током времена. Коначна (стабилисана) слика прслина одређује се према тренутку у коме је најмања вредност разлике (тренутне) вредности чврстоће на затезање савијањем и (тренутног) напона затезања услед скупљања, израчунатог за пресек без прслине. Ако се релативни прираст чврстоће на затезање и (релативни) развој дилатације скупљања моделирају према одредбама Еврокода 2 (релативни, јер се скалирају на мерене вредности модула, коефицијента течења и дилатације скупљања; мерено течење и скупљање је обрађено у поглављу 10.4.2.3, у наставку), прорачун напрезања пресека без прслине може да се спроведе *ААЕМ* методом. Прорачуном за неколико вредности старости бетона добија се минимална вредност за прихват оптерећења расположивог дела чврстоће на затезање савијањем. За посматрани бетон то се добија при старости од 120 – 150 дана. За  $t = 120$ ,  $(t - t_0) = 97$ ,  $(t - t_{sk}) = 106$ ,  $\varphi(t, t_0) = 1,76$  и  $\varepsilon_{sk}(t, t_{sk}) = 0,56$  ‰ *ААЕМ* методом добија се ивични напон затезања услед скупљања од 3,30 *MPa*. Истовремена вредност чврстоће на затезање савијањем износи  $f_{ctm,fl}(120) = 5,92$

*MPa*. Расположиви део чврстоће за прихват затезања услед оптерећења је  $f_{cm,fl,red} \approx 5,92 - 3,30 = 2,62 \text{ MPa}$ . Истим прорачуном за  $t = 150$ ,  $(t - t_0) = 127$ ,  $(t - t_{sk}) = 136$ ,  $\varphi(t, t_0) = 1,87$  и  $\varepsilon_{sk}(t, t_{sk}) = 0,58 \%$  добија се опет  $f_{cm,fl,red} \approx 5,97 - 3,36 = 2,61 \text{ MPa}$ . За  $t < 120$  или  $t > 150$  дана добијају се веће вредности за  $f_{cm,fl,red}$ , тако да је меродавна вредност за прорачун  $2,61 \text{ MPa}$ .

Вредност од  $3,65 \text{ MPa}$ , усвојена према првом начину, подлеже (у алгоритму прорачуна) редукцији коефицијентом  $\sqrt{\beta}$  и коначни резултат се формира са  $\sqrt{0,5} \times 3,65 = 2,58 \text{ MPa}$ , што је, случајно, сасвим приближно вредности од  $2,61 \text{ MPa}$ , која је добијена приметним прорачуном. Прорачун у наставку је, као и у осталим експериментима, спроведен са овом вредношћу ( $3,65 \text{ MPa}$ ).

Претходна анализа урађена је да би се сагледао утицај величине (паушалне) рачунске редукције чврстоће на затезање савијањем коју врши коефицијент  $\beta$  на коначни резултат. Она је, међутим, показала да је, у разматраном експерименту, величина ове редукције прикладна. Стога се може искључити њен утицај на евентуално одступање рачунског угиба од мереног резултата.

#### 10.4.2.3 Преглед измерених и срачунатих деформација

Деформације контролних призми током нешто више од 500 дана приказане су у [42] графички. Измерена вредност дилатације скупљања за бетон који је коришћен за експерименталне просте греде (бетон „А“), при старости од 423 дана, износи  $\varepsilon_{sk} \approx 0,63 \%$ . Измерена вредност коефицијента течења период од 400 дана под оптерећењем, за бетон континуалних греда (бетон „В“) је  $\varphi \approx 2,3$ . Прерачунавање вредности коефицијента течења и дилатације скупљања због разлике у величини пресека није потребно, с обзиром да су пресеци носача и пробних тела (призми) исти.

Уколико се изврши предвиђање вредности коефицијента течења према релацијама Еврокода 2, приказаним у поглављу 3.9 (за пресек призме  $10,0 \times 15,0 \text{ cm}$ , чврстоћу  $f_{cm} = 37,0 \text{ MPa}$ , релативну влажност од  $54 \%$  и старост од 423 дана; оптерећење извршено при старости од 23 дана), добија се вредност  $\varphi \approx 2,3$ , што одговара измереној вредности (коефицијент течења који се користи са еластичном



деформацијом – модулом при оптерећењу). Дилатација скупљања одређена према релацијама Еврокода 2, приказаним у поглављу 3.10, имала би вредност  $\varepsilon_{sk} = \varepsilon_{cs} = 0,50 \text{ ‰}$  (израчунато за исте параметре и 409 дана од престанка неге), што представља око 80 % измерене вредности  $\varepsilon_{sk} \approx 0,63 \text{ ‰}$ .

Измерене средње вредности почетног угиба греда 2B1 и 2B2 и угиба при старости од 423 дана дате су у табели 10.21 (средња вредност од 3 мерења; мерење у једном распону није успело), заједно са срачунатим вредностима добијеним ригорозним методом Еврокода 2 – нумеричким интеграљењем са поделом распона на 50 делова. Приказана је и вредност рачунског угиба при истој старости добијена без утицаја скупљања.

Табела 10.21 Преглед мерених и срачунатих угиба за експеримент  
(*L. Bakoss, R. I. Gilbert, K. A. Faulkes и V. A. Pulmano, [42]*)

греда (1)	почетни угиб мерени <i>mm</i> (2)	почетни угиб рачунски <i>mm</i> (3)	одступање [(3)-(2)]/(2) % (4)	угиб 1 година мерени <i>mm</i> (5)	угиб 1 година рачунски <i>mm</i> (6)	одступање [(6)-(5)]/(5) % (7)	напон у арматури <i>MPa</i> (8)	напон у бетону <i>MPa</i> (9)
2B1, 2B2	4,92	4,24	-13,8	14,97	13,64	-8,9	128,3	11,46
без $\varepsilon_{sk}$					8,70			

#### 10.4.2.4 Разматрање резултата за експеримент из литературе [42]

Одступање рачунске од мерене вредности дуготрајног угиба износи око 9 %, што је одличан резултат. Почетни угиб такође има веома добро предвиђање. И код ових греда, као и у поглављу 10.3.3, рачунски угиб услед скупљања износи око половине угиба само услед оптерећења, односно око трећине укупног угиба.

Мерењем реакција аутори су констатовали малу прераспodelу утицаја, са повећањем ослоначког момента од око 8 %, чему одговара промена реакције средњег ослонца од око 2 %. Прорачуном је добијено повећање почетне вредности ослоначког момента за око 6,5 %, што је такође веома добар резултат. Мала прераспodelа момената је резултат чињенице да је носач готово читавом дужином униформно, једноструко армиран, истом површином арматуре у зони позитивних и негативних момената (обострано симетрично армирање присутно је само на око 1/6 распона, око тачке инфлексије; и овај потез је при прорачуну

угиба третиран као једноструко армиран, са арматуром према знаку момента). Услед тога, а и због сличних вредности позитивних и негативних момената, нема веће разлике у крутостима испрских потеза у пољу и код ослонаца, те се не јавља ни већа прерасподела момената савијања.

Резултат анализе овог експеримента је, као и претходни у поглављу 10.4.1, потврдио успешност предвиђања угиба модела Еврокода 2 и у случајевима статички неодређених носача.

### 10.5 Закључак о разматраним експериментима

У поглављу 10 размотрено је 6 експеримената, од којих је сваки укључивао од 2 до чак 34 експерименталних носача. Четири експеримента (серије) били су статичког система просте греде, док су два третирала континуалне носаче са два једнака распона. Распони носача кретали су се од 1,8 до 6,3 *m*, што се може означити као сасвим добар опсег размере за моделирање при изучавању угиба армиранобетонских плоча и греда, с обзиром да су распони у свим експериментима, осим једног, били већи од 3 метра.

Уколико би се прихватило да је тежиште проблема угиба на подручју армиранобетонских плоча, као носача са малом конструктивном висином, већина разматраних експеримената слабо моделира проблем са аспекта процента армирања. Велике релативне површине арматуре углавном одговарају бетонским гредама. Међутим, експеримент описан у поглављу 10.3.4 који заиста моделира армиранобетонске плоче, својим обимом и систематичношћу надоместио је ову мањкавост других серија.

Разматране експерименте карактерисао је прилично стереотипан ниво напрезања материјала: бетон је био доста оптерећен, док је напон у арматури одговарао слабијој искоришћености (напон у арматури, у великом броју експеримената износио је око 150 *MPa*; ова „уједначеност“ је у оквиру појединачних експеримената била углавном намерна, док посматрано на нивоу више серија представља случајност. Ипак, у оквиру два експеримента било је и битно другачијих (пре свега већих) напона у арматури, што је неопходно за извођење закључака.

Неуједначена техника мерења, а пре свега разлика у „брзини“ мерења у суштини онемогућава поуздано извођење закључака о квалитету модела Еврокода 2 за одређивање почетног угиба. Дуготрајни угиби нису зависни од брзине мерења и са тог аспекта употребљиве су на различите начине измерене вредности.

Разлике у величини пројектованих и остварених карактеристика материјала очитују се у разликама предвиђаних и стварних угиба, када се предвиђање не врши на основу стварних материјалних карактеристика. Разлике нарочито бивају додатно увећане код носача који се налазе на прелазу из стања I у стање II. У оваквим ситуацијама, у практичним случајевима, препоручљив је прорачун на страни сигурности са редукованим материјалним карактеристикама (чврстоћом на затезање, модулом еластичности бетона).

Када се анализирани експерименти сагледају у целини, може се резимирати следеће:

1. Модел Еврокода 2 за одређивање дуготрајних угиба, примењен кроз ригорозни поступак са интеграљењем кривине, може да да веома добар резултат у погледу предвиђања величине дуготрајног угиба.
2. Квалитет резултата у доброј мери зависи од квалитета (предвиђања) инпута. Препоручљиво је предвиђање за опсег вредности инпута, како би се поузданије сагледао резултат.
3. Део модела који уводи утицај скупљања на дуготрајни угиб код носача у стању II је међу вероватним узрочницима већег одступања при предвиђању угиба. Сама одступања (осим код носача са великим скупљањем и умереним или малим оптерећењем и течењем бетона) ипак нису неприхватљиво велика, услед умереног доприноса скупљања бетона укупном дуготрајном угибу. Резултат може бити доста слабији у комбинацији са slabим предвиђањем инпута.
4. Редукција чврстоће на затезање савијањем коју укључује коефицијент  $\beta$  често није довољна да обухвати ефекте спречених деформација у елементу и конструкцији као целини. Допунска (једноставна) паушална редукција употребом аксијалне чврстоће на затезање, уместо чврстоће на затезање савијањем, дала је добар резултат.

5. Приликом израчунавања угиба статички неодређених носача интегралњем кривине неопходно је увести ефекте прерасподеле момента савијања, како почетне, тако и оне која се одвија у времену. Интегралње кривине на основу стандардног моментног дијаграма, заснованог на хомогеним крутостима бруто пресека, може да да велика одступања резултата, која обесмишљавају труд уложен у израчунавање угиба „ригорозним“ поступком. Израчунавање прерасподељеног дијаграма момента не спада у свакодневну инжењерску рутину и захтева употребу одговарајућег софтвера. Ово стоји као озбиљна препрека практичној примени. Решење могу бити алгебарске апроксимације које већ укључују ефекте прерасподеле, као што је то случај са апроксимацијама приказаним у поглављу 8.

Сумирајући резултате предвиђања угиба експерименталних носача из овог поглавља и наведене закључке, може се рећи да примена модела Еврокода 2 и ригорозног поступка заснованог на интегралњу кривине за предвиђање угиба даје задовољавајуће практичне резултате. Осим неопходности коришћења прерасподељеног дијаграма момента, препоручљива је допунска редукција чврстоће на затезање савијањем, на пример употребом аксијалне чврстоће на затезање при одређивању момента настанка прслина.

За исправно вредновање резултата прорачуна угиба добијених применом ригорозног поступка Еврокода 2 требало би, поред тестирања на експериментално добијеним резултатима, урадити поређење са неким другим одговарајућим нелинеарним прорачуном. Овакво поређење, у зависности од обима и избора примера, може да да мноштво различитих података за разматрање. Поређење резултата прорачуна са мереним и другим рачунским вредностима јесте начин да се спроведе прилагођавање (калибрација) модела, да би се добили бољи резултати.

Калибрација ригорозног поступка прорачуна угиба Еврокода 2, као што је већ речено, није међу основним циљевима тезе. Основни разлог лежи у чињеници да ваљано спроведена калибрација захтева детаљну вишепараметарску анализу чији би обим и сложеност имали размере засебне тезе. Циљ разматрања у овом поглављу јесте да се формулишу неке од препорука за калибрацију модела, које се могу сагледати из поређења урађених у поглављу 10 и поређења у овом поглављу.

За поређења које ће се спровести у наставку изабрано је неколико примера који су већ разматрани као експериментални резултати у поглављу 10. Да би закључци били од вредности, паралелни нелинеарни прорачун би требало да буде вишег квалитета од оног примењеног у основном делу тезе. Такви прорачуни се заснивају на методи коначних елемената и поступцима корак-по-корак при наношењу оптерећења, успостављању равнотеже и анализи током времена. Нелинеарно се могу третирати геометријски и физички аспекти проблема.

Овде ће се извршити поређење са нелинеарним прорачунима урађеним програмским пакетом *DIANA* 9.3 [44]. Примери су обрађени моделирањем конструкција *L7BEN* гредним елементима класе II (подржавају физичку и геометријску нелинеарност), са три тачке по дужини и поделом висине пресека на 15 делова. Коришћен је *BRITTLE CRACKING* модел за настајање прслина. Овај модел, у мноштву расположивих, добро одговара техничкој теорији савијања. Распони су моделирани са 15 – 20 елемената. Виши квалитет прорачуна, у односу на прорачуне спроведене у основном делу тезе, састоји се превасходно у временској анализи поступком корак-по-корак, у погледу развоја деформација и напрезања у конструкцијама услед скупљања и течења бетона и прерасподеле

утицаја. Оптерећење је постепено наношено у 10 једнаких инкремената. За анализу су изабрани су логаритамски растући интервали времена. Усвојен је закон промене (развоја) дилатација течења (функција течења) и скупљања током времена према моделима Еврокода 2 приказаним у поглављима 3.9 и 3.10, који су скалирани тако да дају потребне вредности у дефинисаним тренуцима времена. Прорачуни у основном делу тезе спроведени су апроксимативном временском анализом у једном кораку који покрива укупно време посматрања конструкције.

Паралелни прорачун софтвером *DIANA* 9.3 је усмерен на **три циља**.

**Први**, генерални **циљ**, јесте да се упореде нумеричке вредности резултата – временских угиба добијене поступком према Еврокоду 2 примењеним у тези и нелинеарним корак-по-корак прорачуном, за исте улазне величине. При овом поређењу би требало имати у виду да су резултати прорачуна методом коначних елемената у приличној мери условљени избором типа елемената и материјалних модела (овде, на пример, моделом за настајање и развој прслина). Усвојени модел за *DIANA* прорачуне спада у једноставније и конзервативније по питању доприноса бетона у формирању крутости након настанка прслина. Овакви модели су дуго у примени и показали су се успешним код решавања општих проблема. Сложенији модели третирања прслина показују успешније резултате при тумачењу експерименталних података, али најчешће код специфичних проблема.

**Други циљ** јесте да се провере резултати прорачуна угиба добијени методом Еврокода 2 у случајевима када су они показали веће одступање од измерених. У поглављу 10, при обради експеримената констатовано је, у великој већини, веома добро слагање мерених и рачунских угиба. У појединим случајевима када су одступања била већа, иако су при прорачуну били употребљени материјални параметри измерени на пробним телима, из свеукупних података о експерименту могло се наслутити да узрок одступања лежи делимично и у одступању карактеристика пробних тела у односу на карактеристике експерименталних носача. Тако, на пример, у експерименту обрађеном у поглављу 10.3.4 наведено је да су носачи *C12* и *C22* оптерећени преко границе настанка првих прслина. Међутим, једноставна (линеарна) анализа почетних напона и њихово поређење са чврстоћом на затезање пробних тела, показује напоне затезања који су, код оба носача, мањи од границе настајања прслина.

Стога се стварна и рачунска почетна крутост, а тиме и мерени и рачунски почетни угиби доста разликују. То је увод и у могуће веће разлике временских угиба. У оваквим случајевима одступања резултата не ради се о слабостима модела за предвиђање угиба, већ о неадекватном инпуту. Начин да се то докаже јесте прорачун угиба другим поступком. Резултат другог прорачуна тада такође знатније одступа од мерене вредности.

**Трећи циљ** је сагледавање заснованости, у оквиру тезе већ изражене, сумње у део модела Еврокода 2 који уводи утицај скупљања на угиб код носача са прлинама. Размотриће се експерименти са великим дилатацијама скупљања. Уколико резултати *DIANA* прорачуна буду знатно боље предвиђали временске угибе у односу на прорачуне по Еврокоду 2, прорачунима по обе методе истих примера са и без утицаја скупљања (нумеричка симулација) квантификоваће се удео угиба услед скупљања у укупном угибу. На основу тога може се добити и одговарајући закључак.

За валидност поређења рачунских резултата добијених на два или више начина од прворазредног је значаја да они буду добијени на бази истих улазних величина. Код експлицитних инпута (на пример: величина пресека и оптерећења, модул еластичности) то не представља проблем. Имплицитни инпути, међутим, најчешће отварају више могућности које не морају да имају истоветне последице. Поступак Еврокода 2, на пример, једнозначно дефинише помоћу коефицијента  $\beta$  (редуковану) вредност (дуго)трајне чврстоће на затезање савијањем ( $f_{ctm,fl,red}(t)$ ) у износу од око 0,7 њене почетне вредности  $f_{ctm,fl}(t_0)$ , као што је објашњено у поглављу 3.3. С друге стране, различито скупљање бетона производи различите напоне затезања у пресецима услед спречених деформација који се, у мање-више свим озбиљнијим софтверима за нелинеарну анализу бетонских конструкција, срачунавају – остављајући тако различит преостали „капацитет“ чврстоће на затезање за пријем напона затезања услед оптерећења. Ако би се  $f_{ctm,fl}(t_0)$  употребила као (експлицитни) улаз у нелинеарну анализу, коначна (стабилисана) слика прлина добијена таквим софтвером разликовала би се од оне коју поставља модел Еврокода 2. Разликом у распореду крутости отвара се пут разлици у величини рачунских угиба. Ово би се могло избећи тако што би се употребиле исте вредности инпута, али за  $f_{ctm,fl,red}(t)$ . То, осим што изискује допунски прорачун

затезања услед скупљања (на пример *AAEM* методом, као што је већ чињено у неким од примера у поглављу 10), значи и уношење различитих вредности за  $f_{ctm,fl}(t_0)$  у поједине софтвере, с обзиром да она представља (технички) уобичајену улазну величину. Уношењем исте вредности  $f_{ctm,fl}(t_0)$  у модел Еврокода 2 и, овде, софтвер *DIANA*, делимично се ограничава квалитет сагледавања употребљивости модела крутости садржаног у релацији (3.7) односно (4.1). Наиме, могло би се десити да је принцип модела прихватљив, али да „тежински“ коефицијенти стања I и стања II, дефинисани уз помоћ коефицијента  $\beta$ , нису добро постављени. Прихватљивост модела већ је, међутим, практично потврђена добрим или чак, у не малом броју случајева, веома добрим слагањем са експерименталним резултатима у поглављу 10. У анализама у наставку управо ће се користити иста вредност  $f_{ctm,fl}(t_0)$  за *DIANA* прорачуне и за прорачуне према Еврокоду 2. То омогућава оцену целине модела крутости Еврокода 2 (који укључује и  $\beta = 0,5$ ).

### 11.1 Прорачуни експеримената на простим гредама

Обрадиће се два експериментална истраживања већ анализирана у поглављима 10.3.3. ([42]) и 10.3.4. ([40]).

#### 11.1.1 *L. Bakoss, R. I. Gilbert, K. A. Faulkes* и *V. A. Pulmano* [42], (1982.)

Поређење резултата прорачуна дуготрајног угиба ће се урадити за две вредности чврстоће на затезање савијањем. Прва је мерена вредност  $f_{ctm,fl}(t_0) = 4,9$  *MPa* (табела 11.1), а друга  $f_{ctm,fl,red}(t_0) = 3,4$  *MPa* (већ коришћена при прорачуну у поглављу 10.3.3, табела 11.2). Опис експеримента и остали потребни подаци за прорачун дати су у поглављу 10.3.3.

Табела 11.1: Рачунски и мерени угиби греде 1B2 након 500 дана

Греда 1B2 $f_{ctm,fl}(t_0) = 4,9$ <i>MPa</i> $M_r/M_{max} = 0,58$	мерени	Еврокод 2	$[(3)-(2)]/(2)$ %	<i>DIANA</i>	$[(5)-(2)]/(2)$ %
	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
угиб са скупљањем (A)	25,0	28,7	14,8 %	26,6	6,4 %
угиб без скупљања (B)	-	19,7	-	20,0	-
удео скупљања (A-B)	-	9,0	-	6,6	-
$\omega = (A-B)/B$	-	0,46	-	0,33	-



Табела 11.2: Рачунски и мерени угиби греде 1B2 након 500 дана

Греда 1B2 $f_{ctm,fl}(t_0) = 3,4 \text{ MPa}$ $M_r/M_{max} = 0,40$	мерени	Еврокод 2	$[(3)-(2)]/(2)$ %	DIANA	$[(5)-(2)]/(2)$ %
	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
угиб са скупљањем (A)	25,0	30,1	20,4	27,1	8,4
угиб без скупљања (B)	-	20,5	-	20,3	-
удео скупљања (A-B)	-	9,6	-	6,8	-
$\omega = (A-B)/B$	-	0,47	-	0,33	-

Овај експеримент је одабран за поређење нумеричких резултата јер је показао најслабије предвиђање угиба међу свим разматраним статички одређеним експерименталним носачима (поглавље 10.3).

DIANA прорачун је у овом примеру показао одлично слагање (разлика мања од 10 %) у односу на измерене вредности, при обе вредности чврстоће на затезање  $f_{ctm,fl}(t_0)$ . Прорачун према Еврокоду 2 је, иако са слабијим предвиђањем, дао добре резултате. У оба случаја ( $f_{ctm,fl}(t_0) = 4,9 \text{ MPa}$ , табела 11.1 и  $f_{ctm,fl}(t_0) = 3,4 \text{ MPa}$ , табела 11.2) предвиђање угиба само услед дуготрајног оптерећења је практично исто као и у DIANA прорачуну. Прецењена вредност угиба према Еврокоду 2 је у оба случаја резултат дела угиба који потиче од скупљања, који је око 40 % већи него у DIANA прорачуну. Максимални momenti у средини распона услед дуготрајног оптерећења су 1,7 ( $M_r/M_{max} = 0,58$  за  $f_{ctm,fl}(t_0) = 4,9 \text{ MPa}$ ) и 2,5 ( $M_r/M_{max} = 0,40$  за  $f_{ctm,fl}(t_0) = 3,4 \text{ MPa}$ ) пута већи од момента појаве прслина  $M_r$  израчунатог са карактеристикама идеализованог пресека (које се, због високог процента армирања, осетније разликују од карактеристика бетонског бруто пресека).

#### 11.1.2 J. P. Jaccoud и R. Favre [40], (1982.)

Поређење резултата прорачуна дуготрајног угиба ће се урадити за две серије вредности улазних параметара. Прво ће се приказати резултати DIANA прорачуна добијени за све експерименталне носаче (C11, C12, C22, C13, C14, C24 и C15) на основу мерених материјалних параметара. Вредности ових параметара, заједно са описом експеримента и резултатима прорачуна према Еврокоду 2, дате

су у поглављу 10.3.4. Потом ће бити приказани резултати *DIANA* прорачуна и прорачуна према Еврокоду 2 свих носача који су добијени на основу просечних вредности материјалних параметара (исти материјални инпут за све носаче – модул, чврстоћа на затезање, коефицијент течења и дилатација скупљања; различит је само ниво оптерећења).

Табела 11.3: Рачунски и мерени угиби греде C11 након 1 године

Греда C11 мерени инпут (1)	мерени (2)	Еврокод 2 (3)	$[(3)-(2)]/(2)$ % (4)	<i>DIANA</i> (5)	$[(5)-(2)]/(2)$ % (6)
угиб са скупљањем ( <i>A</i> ), <i>mm</i>	4,50	3,27	-27,3	2,63	-41,6
угиб без скупљања ( <i>B</i> ), <i>mm</i>	-	2,55	-	2,25	-
удео скупљања ( <i>A-B</i> ), <i>mm</i>	-	0,72	-	0,38	-
$\omega = (A-B)/B$	-	0,28	-	0,17	-

Табела 11.4: Рачунски и мерени угиби греде C12 након 1 године

Греда C12 мерени инпут (1)	мерени (2)	Еврокод 2 (3)	$[(3)-(2)]/(2)$ % (4)	<i>DIANA</i> (5)	$[(5)-(2)]/(2)$ % (6)
угиб са скупљањем ( <i>A</i> ), <i>mm</i>	7,6	7,0	7,9	3,8	-50,0
угиб без скупљања ( <i>B</i> ), <i>mm</i>	-	5,5	-	-	-
удео скупљања ( <i>A-B</i> ), <i>mm</i>	-	1,5	-	-	-
$\omega = (A-B)/B$	-	0,27	-	-	-

Табела 11.5: Рачунски и мерени угиби греде C22 након 1 године

Греда C22 мерени инпут (1)	мерени (2)	Еврокод 2 (3)	$[(3)-(2)]/(2)$ % (4)	<i>DIANA</i> (5)	$[(5)-(2)]/(2)$ % (6)
угиб са скупљањем ( <i>A</i> ), <i>mm</i>	7,0	6,9	-1,4	3,8	-50,0
угиб без скупљања ( <i>B</i> ), <i>mm</i>	-	5,6	-	-	-
удео скупљања ( <i>A-B</i> ), <i>mm</i>	-	1,3	-	-	-
$\omega = (A-B)/B$	-	0,23	-	-	-

Табела 11.6: Рачунски и мерени угиби греде C13 након 1 године

Греда C13 мерени инпут (1)	мерени (2)	Еврокод 2 (3)	$[(3)-(2)]/(2)$ % (4)	DIANA (5)	$[(5)-(2)]/(2)$ % (6)
угиб са скупљањем ( $A$ ), $mm$	12,6	11,7	-7,1	13,3	5,6
угиб без скупљања ( $B$ ), $mm$	-	9,7	-	11,0	-
удео скупљања ( $A-B$ ), $mm$	-	2,0	-	2,3	-
$\omega = (A-B)/B$	-	0,21	-	0,21	-

Табела 11.7: Рачунски и мерени угиби греде C14 након 1 године

Греда C14 мерени инпут (1)	мерени (2)	Еврокод 2 (3)	$[(3)-(2)]/(2)$ % (4)	DIANA (5)	$[(5)-(2)]/(2)$ % (6)
угиб са скупљањем ( $A$ ), $mm$	17,3	15,8	-8,7	17,2	-0,6
угиб без скупљања ( $B$ ), $mm$	-	13,2	-	15,0	-
удео скупљања ( $A-B$ ), $mm$	-	2,0	-	2,2	-
$\omega = (A-B)/B$	-	0,15	-	0,15	-

Табела 11.8: Рачунски и мерени угиби греде C24 након 1 године

Греда C24 мерени инпут (1)	мерени (2)	Еврокод 2 (3)	$[(3)-(2)]/(2)$ % (4)	DIANA (5)	$[(5)-(2)]/(2)$ % (6)
угиб са скупљањем ( $A$ ), $mm$	16,7	16,4	-1,8	16,8	0,6
угиб без скупљања ( $B$ ), $mm$	-	13,6	-	14,5	-
удео скупљања ( $A-B$ ), $mm$	-	2,8	-	2,3	-
$\omega = (A-B)/B$	-	0,21	-	0,16	-

Табела 11.9: Рачунски и мерени угиби греде C15 након 1 године

Греда C15 мерени инпут (1)	мерени (2)	Еврокод 2 (3)	$[(3)-(2)]/(2)$ % (4)	DIANA (5)	$[(5)-(2)]/(2)$ % (6)
угиб са скупљањем ( $A$ ), $mm$	19,5	18,7	-4,1	19,7	1,0
угиб без скупљања ( $B$ ), $mm$	-	16,5	-	18,0	-
удео скупљања ( $A-B$ ), $mm$	-	2,2	-	1,7	-
$\omega = (A-B)/B$	-	0,13	-	0,09	-

У наставку, табелама 11.10 и 11.11 су дати резултати *DIANA* прорачуна и прорачуна према Еврокоду 2 свих носача који су добијени на основу просечних вредности материјалних параметара. При прорачуну су коришћене следеће средње вредности:

- модул еластичности бетона 29,0 *GPa*;
- чврстоћа на затезање савијањем при оптерећењу 2,80 *MPa*;
- коефицијент течења након једне године под оптерећењем  $\varphi = 2,0$ ;
- дилатација скупљања након једне године  $\varepsilon_{sk} = 0,30 \%$ .

Табела 11.10: Мерени и рачунски угиби **са скупљањем** греда C11 - C15 након 1 године са осредњеним материјалним параметрима

Греда (1)	мерени <i>mm</i> (2)	Еврокод 2 <i>mm</i> (3)	$[(3)-(2)]/(2)$ % (4)	<i>DIANA</i> <i>mm</i> (5)	$[(5)-(2)]/(2)$ % (6)	$[(5)-(3)]/(5)$ % (7)	$M_r/M_{max}$ (8)
C11	4,5	2,92	-35,1	2,59	-42,4	-12,7	1,48
C12, C22	7,3	(7,33)	0,4	(5,06)	-30,7	(-44,9)	0,99
C13	12,6	11,64	-7,6	13,46	6,8	13,5	0,74
C14, C24	17,0	15,56	-8,5	16,54	-2,7	5,9	0,59
C15	19,5	19,26	-1,2	20,24	3,8	4,8	0,49

Табела 11.11: Рачунски угиби **без скупљања** и удео скупљања код греда C11 - C15 након 1 године, са осредњеним мат. параметрима

Греда (1)	Еврокод 2			<i>DIANA</i>			(5)/(2) (8)	(6)/(3) (9)
	без скупљања <i>mm</i> (2)	удео скупљања <i>mm</i> (3)	$\omega$ $(3)/(2)$ - (4)	без скупљања <i>mm</i> (5)	удео скупљања <i>mm</i> (6)	$\omega$ $(6)/(5)$ - (7)		
C11	2,32	0,60	0,26	2,21	0,38	0,17	0,95	1,46
C12, C22	(5,89)	(1,44)	(0,24)	(3,45)	(1,61)	(0,47)	(0,59)	(1,12)
C13	9,68	1,96	0,20	11,01	2,45	0,22	1,14	1,25
C14, C24	13,31	2,25	0,17	14,74	1,80	0,12	1,11	0,80
C15	16,83	2,43	0,14	18,17	2,07	0,11	1,08	0,85

Резултате прорачуна угиба носача у овом експерименту карактерише мноштво специфичности. Предвиђање угиба, уколико се посматра на нивоу просечног одступања од измерене вредности, је у корист модела Еврокода 2 у односу на *DIANA* прорачуне. Приступ заснован на просечном одступању је суштински погрешан, јер су разлике рачунских и мерених вредности у неколико случајева одступања код оба модела условљене разликама мерених карактеристика пробних тела и стварног понашања модела. Модел Еврокода 2 је, кроз вредност коефицијента  $\beta = 0,5$ , делимично ублажио ова одступања.

Мерени угиб носача *C11*, као што је већ коментарисано у поглављу 10.3.4, не уклапа се ни у која теоријска предвиђања. Најједноставније објашњење јесте да је, независно од ниског нивоа оптерећења – максимални момент у распону износио је око  $\frac{3}{4}$  рачунског момента појаве прслина  $M_r$ , ипак дошло до настајања прслина које су повећале угиб. Слично томе, код носача *C12* и *C22* пројектовано оптерећење је непосредно изнад рачунске границе настанка прслина. Међутим, момент појаве прслина, израчунат из измерене (на пробним телима) вредности чврстоће на затезање при оптерећењу, већи је за 8 % (*C12*) односно 2 % (*C22*) од највећег момента на носачу, тако да до (рачунске) појаве прслина долази тек касније, услед додатног затезања изазваног скупљањем. У експерименту прслине су се формирале већ при оптерећењу, што одговара другачијој вредности чврстоће на затезање.

Прорачун угиба по Еврокоду 2 је овде дао много боље предвиђање дуготајног угиба јер се спроводи у једном кораку, а слика прслина формира према редукованој вредности чврстоће на затезање, чиме је већим делом анулиран прорачунски ефекат изазван почетном вредношћу ове чврстоће. Овде се ради о нумеричким ефектима – већим разликама у израчунатим угибима на прелазу из стања без прслина (I) у стање са прслинама (II). Оне се јављају и у оквиру исте методе, као и код стварних угиба који имају прираштаје при настанку прслина. *DIANA* прорачун носача *C12* и *C22* је доминантно у стању I (прслине се отварају тек при крају разматраног интервала), док је прорачун према Еврокоду 2 делом распона у стању II у читавом интервалу прорачуна. Због тога резултате *DIANA* прорачуна угиба и прорачуна по Еврокоду 2 за носаче *C12* и *C22* не треба поредити.

Поређењем резултата прорачуна преосталих носача (C13, C14, C24 и C15) види се да је квалитет предвиђања сличан, за оба поступка одличан – нешто бољи код *DIANA* прорачуна (средње одступање прорачуна по Еврокоду 2 износи 5,4 %, док је код *DIANA* прорачуна око 2 %). Имајући у виду концепт самог експеримента – поређење утицаја нивоа напрезања на величину угиба - у коме су носачи конструисани као једнаки, боље поређење поступака прорачуна може се урадити ако се они спроведу са истим материјалним параметрима за све носаче. Резултати оваквог прорачуна приказани су у табелама 11.10 и 11.11.

Основни предмет поређења у табелама 11.10 и 11.11 јесу резултати прорачуна угиба по Еврокоду 2 и *DIANA* прорачуна. Мерене вредности угиба дате су као помоћни подаци. ***Резултати за носаче C12 и C22 се, као што је напред објашњено, не разматрају.*** Резултати за носач C11 се такође разматрају, јер велико одступање од мерене вредности није условљено прорачуном.

Резултати приказани у табелама 11.10 и 11.11 указују на следеће:

1. За носаче са прслинама (стање II) прорачун дуготрајних угиба по Еврокоду 2 узимањем у обзир само течења бетона даје мање вредности у односу на нелинеарну анализу корак-по-корак поступком. Разлика се смањује са повећањем нивоа напрезања (смањењем  $M_r/M_{max}$ );
2. За носаче са прслинама допринос скупљања бетона дуготрајном угибу углавном је већи по моделу Еврокода 2 него у нелинеарној анализи корак-по-корак поступком;
3. Добар резултат при предвиђању угиба носача у стању II моделом Еврокода 2 постигнут је у суми утицаја од течења и скупљања бетона поништавањем одступања супротног знака;
4. За носаче без прслина (стање I) важе супротне констатације у погледу односа доприноса течења и скупљања дуготрајном угибу. Закључак наведен под 3 остаје и за ове носаче.

За сумарно тумачење ових резултата и резултата из поглавља 11.1.1 требало би имати у виду да примере разматране у и 11.1.1 карактерише двоструко веће скупљање и ниво напрезања ( $M_r/M_{max}$ ) сличан и већи од највећих у 11.1.2. Када се резултати из поглавља 11.1.1 упореде са претходним констатацијама 1-4, може се закључити да оне остају, с тим да у случају великог скупљања његов

прецењени ефекат више не врши само компензацију рачунског дуготрајног угиба услед течења, већ непотребно увеличава резултат.

## 11.2 Прорачуни експеримената на континуалним гредама

Обрадиће се два експериментална истраживања већ анализирана у поглављима 10.4.1 ([26]) и 10.4.2 ([42]).

### 11.2.1 *G. W. Washa* и *P. G. Fluck* (1956.) [26]

Од три експерименталне серије континуалних носача обрађене у поглављу 10.4.1 (X, Y и Z), за поређење нумеричких резултата одабрана је серија X. Ова серија је имала најслабије предвиђање угиба моделом Еврокода 2 међу свим разматраним статички неодређеним експерименталним носачима (поглавље 10.4). Опис експеримента и остали потребни подаци за прорачун приказани су у поглављу 10.4.1. Осим вредности дуготрајних угиба након 2½ године приказују се и односи рачунских и „мерених“ вредности момената савијања код средњег ослонца, који показују величину прерасподеле утицаја. „Мерени“ моменти су добијени на основу измерених реакција, као што је већ објашњено у поглављу 10.4.1. У заглављима табела приказани су нивои рачунских напрезања носача изражени кроз однос момената мојаве прслина и максималних момената услед оптерећења ( $M_r/M_{max}$ ) у пољу и над ослонцем. Ови подаци спадају међу најзначајније за тумачење резултата, с обзиром на веома висок ниво оптерећења.

Табела 11.12: Рачунски и мерени угиби греда X1, X4 након 2½ године

Греде X1, X4 ( $M_r/M_{max}$ ) <sub>поље</sub> = 0,33 ( $M_r/M_{max}$ ) <sub>ослонац</sub> = 0,21	мерени (2)	Еврокод 2 (3)	[(3)-(2)]/(2) % (4)	DIANA (5)	[(5)-(2)]/(2) % (6)	(5)/(3) (7)
угиб са скупљањем (A), mm	29,0	31,8	9,7	27,1	-6,6	0,85
угиб без скупљања (B), mm	-	26,2	-	20,0	-	0,76
удео скупљања (A-B), mm	-	5,6	-	7,1	-	1,27
$\omega = (A-B)/B$	-	0,21	-	0,36	-	1,71
$M_{осл}/M_{брutto}$ (са скупљањем)	1,22	1,14	-6,6	1,03	-15,6	-

Табела 11.13: Рачунски и мерени угиби греда X2, X5 након 2½ године

Греде X2, X5 ( $M_r/M_{max}$ ) <sub>поље</sub> = 0,32 ( $M_r/M_{max}$ ) <sub>ослонац</sub> = 0,21	мерени (2)	Еврокод 2 (3)	$[(3)-(2)]/(2)$ % (4)	DIANA (5)	$[(5)-(2)]/(2)$ % (6)	(5)/(3) (7)
угиб са скупљањем (A), mm	32,3	36,2	12,1	32,4	0,3	0,90
угиб без скупљања (B), mm	-	28,8	-	22,9	-	0,80
удео скупљања (A-B), mm	-	7,4	-	9,5	-	1,28
$\omega = (A-B)/B$	-	0,26	-	0,41	-	1,58
$M_{осл}/M_{брutto}$ (са скупљањем)	1,17	1,23	5,1	1,12	-4,3	-

Табела 11.14: Рачунски и мерени угиби греда X3, X6 након 2½ године

Греде X3, X6 ( $M_r/M_{max}$ ) <sub>поље</sub> = 0,31 ( $M_r/M_{max}$ ) <sub>ослонац</sub> = 0,21	мерени (2)	Еврокод 2 (3)	$[(3)-(2)]/(2)$ % (4)	DIANA (5)	$[(5)-(2)]/(2)$ % (6)	(5)/(3) (7)
угиб са скупљањем (A), mm	37,8	46,3	22,5	42,9	13,5	0,93
угиб без скупљања (B), mm	-	34,8	-	28,7	-	0,82
удео скупљања (A-B), mm	-	11,5	-	14,2	-	1,23
$\omega = (A-B)/B$	-	0,33	-	0,49	-	1,48
$M_{осл}/M_{брutto}$ (са скупљањем)	1,34	1,41	5,2	1,30	-3,0	-

У резултатима прорачуна према Еврокоду 2 овог експеримента у поглављу 10.4.1 констатовано је увећано предвиђање угиба, уз значајан удео угиба услед скупљања. Овде се, међутим, у поређењу са DIANA прорачунима, овим резултатима може приписати прецизније тумачење. Удео угиба услед скупљања у укупном угибу у DIANA прорачунима је још и већи, али је угиб услед оптерећења и течења бетона за петину мањи него код Еврокода 2 (колona (7) табела 11.12-14). Другим речима, увећано предвиђање је условљено прецењеним делом угиба услед течења бетона, а допринос услед скупљања је чак потцењен. Ово је управо супротно констатацијама у претходном поглављу 11.1.2. Оно што, за разлику од претходних, карактерише ове прорачуне јесте веома висок ниво напрезања бетона, са односима  $M_r/M_{max} = 0,2 \div 0,3$ , битно различит од претходних примера са  $M_r/M_{max} \geq 0,4$ . **На основу ових резултата могло би се претпоставити да основни модел крутости, садржан у релацији (3.7) односно (4.1) није**



**адекватан при високим нивоима напрезања.** Дobar резултат при предвиђању угиба према Еврокоду 2 у овом случају поново је постигнут услед супротних одступања удела услед оптерећења и течења бетона, који је прецењен, и удела услед скупљања бетона, који је сада потцењен.

#### 11.2.2 L. Bakoss, R. I. Gilbert, K. A. Faulkes и V. A. Pulmano (1982.) [42]

Опис експеримента и остали потребни подаци за прорачун приказани су у поглављу 10.4.2. За разлику од претходног експеримента, у овом је мерена вредност чврстоће на затезање савијањем, која је при оптерећењу износила око  $f_{ctm,fl}(t_0) = 5,3 \text{ MPa}$ . У поглављу 10.4.2 прорачун угиба је урађен са редукованом вредношћу чврстоће  $f_{ctm,fl,red}(t_0) = 3,65 \text{ MPa}$ , као што је објашњено у поглављу 3.3. Овде ће се прорачун спровести са обе вредности, ради поређења.

У експерименту је констатовано мало повећање (неколико процената) момента над средњим ослонцем (повећање реакције средњег ослонца) услед прерасподеле утицаја током времена. Сличан резултат констатован је при прорачуну према Еврокоду 2 у поглављу 10.4.2. DIANA прорачун, међутим, показао је супротан тренд – смањење ослоначког момента за неколико процената (до 5 %). Сви резултати у суштини одговарају стању без (веће) прерасподеле момената што је последица начина армирања носача, као што је већ објашњено у поглављу 10.4.2.

Табела 11.15: Рачунски и мерени угиби греда 2B2 након 400 дана

Греда 2B2 $f_{ctm,fl,red}(t_0) = 3,65 \text{ MPa}$ $(M_r / M_{max})_{\text{поље}} = 0,52$ $(M_r / M_{max})_{\text{ослонац}} = 0,43$	мерени	Еврокод 2	$[(3)-(2)]/(2)$	DIANA	$[(5)-(2)]/(2)$	$(5)/(3)$
	(2)	(3)	% (4)	(5)	% (6)	(7)
угиб са скупљањем (A), mm	15,0	13,6	-9,0	12,3	-18,0	0,90
угиб без скупљања (B), mm	-	8,7	-	8,7	-	1,00
удео скупљања (A-B), mm	-	4,9	-	3,6	-	0,73
$\omega = (A-B)/B$	-	0,56	-	0,41	-	0,73

Табела 11.16: Рачунски и мерени угиби греда 2B2 након 400 дана

Греда 2B2 $f_{ctm,fl,red}(t_0) = 5,3 \text{ MPa}$ $(M_r / M_{max})_{\text{поље}} = 0,75$ $(M_r / M_{max})_{\text{ослонац}} = 0,63$	мерени (2)	Еврокод 2 (3)	$[(3)-(2)]/(2)$ % (4)	DIANA (5)	$[(5)-(2)]/(2)$ % (6)	(5)/(3) (7)
угиб са скупљањем (A), mm	15,0	12,5	-16,7	11,2	-25,3	0,90
угиб без скупљања (B), mm	-	8,1	-	8,1	-	1,00
удео скупљања (A-B), mm	-	4,4	-	3,1	-	0,70
$\omega = (A-B)/B$	-	0,54	-	0,38	-	0,70

За разлику од примера анализираних у претходном поглављу 11.2.1, ове примере карактерише ниво напрезања који је упоредив са примерима статички одређених носача у поглављима 11.1.1 и 11.1.2. Уколико се има у виду да је притом скупљање у овим примерима двоструко веће, може се констатовати да резултати прорачуна у већини показују сличне тенденције у односу на примере из поглавља 11.1.

Једина упадљивија разлика, на први поглед, састоји се у томе да је предвиђање угиба без учешћа скупљања сада практично исто као и код DIANA прорачуна (у примерима у поглављу 11.1.2 вредности према Еврокоду 2 су биле мање, за носаче са прслинама). Међутим, код континуалних носача тачке инфлексције се налазе у распону. Крутост на том потезу око њих одговара стању I, а налази се у зони већег утицаја на израчунате угибе. Резултати за носач C11, у поглављу 11.1.2, указују да прорачун према Еврокоду 2 даје мању крутост у односу на DIANA прорачун за стање I. Тиме су, у ствари, поново компензована супротна одступања и укупни резултат прорачуна дуготрајног угиба према Еврокоду 2 је добио на сагласности са мереним вредностима.

### 11.3 Закључак поређења нелинеарних прорачуна

Резултати неколико анализираних примера показују да сложеније методе прорачуна (пре свега прорачуни корак-по-корак) стабилније предвиђају величине дуготрајних угиба у односу на ригорозни прорачун према Еврокоду 2. Констатација „стабилније“ се односи на чињеницу да су резултати оваквих прорачуна добри (приближни мереним вредностима) и при екстремнијим

вредностима параметара - виским нивоима оптерећења, великим скупљањима или течењима бетона. Резултати ових метода доста зависе од типа употребљених коначних елемената и избора модела за конститутивне материјале, пре свега бетон. У извршеним *DIANA* прорачунима коришћени су најједноставнији елементи и модели, који су показали добре резултате. С друге стране, прорачун према ригорозном поступку Еврокода 2, такође је дао веома добре резултате у погледу сагласности са мереним вредностима. Учињене анализе су указале да је то више резултат „срећног“ поништавања одступања у појединим сегментима прорачуна (прорачуна дуготрајних угиба услед течења и услед скупљања бетона).

Уколико би се нелинеарни *DIANA* прорачуни усвојили за референтне, резултати разматраних примера, у погледу три постављена циља наведена на почетку овог поглавља, указују на следеће:

1. Прорачун дуготрајних угиба ригорозним поступком Еврокода 2 даје сасвим добре коначне резултате, у односу на захтевност потребних прорачуна (први циљ);
2. Већа одступања срачунатих вредности (предвиђања) од понашања реалних конструкција (у овом случају експерименталних носача) добијена прорачуном према Еврокоду 2 могу се очекивати у специфичним комбинацијама, као што су, на пример: велико скупљање + висок ниво оптерећења, или, велико скупљање + мало течење. Слабије предвиђање у тим случајевима је, у ствари, резултат мање успешног „поништавања“ одступања у прорачунима дуготрајног угиба услед скупљања и течења (други циљ);
3. Екстраполирани метод прорачуна дела кривине (а тиме и угиба) услед скупљања - види поглавља 4.1 (једначина (4.3)) и 5.3 - очигледно показује слабости, јер утицај скупљања може бити и доста прецењен и доста потцењен, у зависности од свеукупне комбинације преосталих параметара који условљавају величину дуготрајног угиба. Притом је и сам модел крутости – једначина (4.1) – показао одступања при вишим нивоима оптерећења (трећи циљ).

#### 11.4 Калибрација модела

Разноврсност разлика у резултатима *DIANA* прорачуна дуготрајних угиба и прорачуна по Еврокоду 2, које су се исказале у свега неколико разматраних експерименталних – нумеричких примера, потврђује већ исказан став аутора тезе на почетку овог поглавља да проблем калибрације модела Еврокода 2 захтева свестрану мултипараметарску анализу већег обима. Претходна анализа, иако ограниченог обима, пружа могућност за формулисање следећих закључака:

1. Модел даје задовољавајуће резултате за инжењерску употребу, и са тог аспекта калибрација није неопходна;
2. Калибрација би, ипак, побољшала перформансе модела и учинила га поузданијим за шири опсег комбинација улазних параметара.

Уколико би се пошло од најједноставнијих могућности (без већих захвата у структури модела), калибрација би се могла односити на редефинисање два нумеричка параметра у интерполационом коефицијенту  $\zeta$  (једначина (4.1a)):

$$\zeta = 1 - \beta \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (4.1a)$$

Коефицијент  $\beta$ , чија је вредност сада одређена као 0,5, може да добије другачију константну (или на неки начин променљиву) вредност. Сама његова измена вероватно не би могла да буде довољна за констатовани дијапазон одступања појединих нумеричких вредности, тако да би измена квадратног експонента односа напона допринела флексибилности целокупне калибрације. У [45] је, на пример, показано да се калибрацијом степена  $a$ , индиректно и изменом коефицијента  $\beta$  може постићи боље предвиђање почетног стања. Обе ове измене, ипак, регулисале би део проблема који се односи на дефиницију крутости која укључује ефекте оптерећења и течења бетона. Одступања везана за удео скупљања у укупном угибу захтевала би проширен облик овог или засебан коефицијент  $\zeta$  за утицаје скупљања.

У погледу ефеката овакве калибрације на применљивост унапређеног поступка прорачуна угиба према Еврокоду 2 изведен у овој тези, може се рећи следеће:

1. Измена вредности коефицијента  $\beta$  нема последица по применљивост унапређења – поступак омогућава употребу жељеног нивоа редукције чврстоће на затезање савијањем, независно од предефинисане вредности коефицијента  $\beta$ . То је у целини подржано другом варијантом према објашњењу датом у поглављу 5.4, за коју су урађене алгебарске апроксимације приказане у поглављу 8;
2. Измена експонента односа напона (сада 2) има последице на вредности нумеричких коефицијената у релацијама приказаним у поглављу 8. Иако је потребно је њихово поновно израчунавање, важно је нагласити да структура међусобних зависности не би требало да се мења, што у многоме олакшава посао (није потребно изналажење нових функционалних зависности);
3. Нови приступ увођења доприноса скупљања захтевао би највероватније и другачију аналитичку форму за нумеричку апроксимацију од оне коју даје израз (6.11) – он је заснован на актуелној дефиницији (4.1a) коефицијента  $\zeta$ . За разлику од претходне две ставке, ово може бити веома сложен посао.

## 12. ЗАКЉУЧАК

### 12.1 Шта је урађено у оквиру тезе

У тези је формулисан унапређени метод контроле угиба армиранобетонских носача у скаду са захтевима Еврокода 2 (EN 1992-1-1:2004). Применљивост метода је доказана за линијске носаче и плоче које преносе оптерећење у једном правцу.

Еврокод 2 предвиђа два метода за контролу угиба. Први, поједностављени метод дефинише граничне односе распон/статичка висина и користи се за индиректну контролу угиба поступком при коме се угиб не срачунава. Ограничење се добија једноставним израчунавањем неколико алгебарских израза. Ограничење је изведено на основу неколико репрезентативних вредности релевантних параметара у форми анvelope, која би требало да буде на страни сигурности. Овај метод има неколико мањкавости и није добро припремљен за практичну употребу. Други, ригорозни метод заснива се на израчунавању угиба нумеричким интегралњем кривина. Кривине услед дуготрајних дејстава израчунавају се методом ефективног модула. Овај метод дат је у облику општих инструкција и није у оквиру стандарда разрађен за практичну примену. Може се рећи да његова примена у појединим елементима превазилази основни фонд знања грађевинских инжењера који се баве стандардним проблемима пројектовања, на пример, у зградарству. То се пре свега односи на третирање прерасподеле статичких утицаја у статички неодређеним системима услед промене крутости изазване настанком прелина и течењем и скупљањем бетона.

Унапређени метод развијен у тези омогућава израчунавање угиба за произвољно изабране вредности свих релевантних параметара (кофицијент течења, дилатација скупљања, чврстоћа на затезање и модул еластичности бетона, површина и распоред затегнуте и притиснуте арматуре, распон носача и величина оптерећења) у оквиру реалног опсега њихових вредности и за основне статичке системе (просто и континуално ослањање плоча и греда). Израчунати резултат је нумерички еквивалент другог, ригорозног метода Еврокода 2 и укључује све потребне прерасподеле статичких утицаја (дијаграма момента савијања). Унапређење се, осим већ споменутог слободног избора вредности релевантних

параметара и укључености потребне прерасподеле, састоји пре свега у томе што се резултат добија израчунавањем алгебарских израза, приказаних у тези, који дају резултат адекватан нумеричком интегралне кривине. За ово израчунавање нису неопходна додатна знања, рачунска техника или софтвери, због аналитичке једноставности.

Изведени алгебарски изрази представљају аналитичке апроксимације израчунатих функција угиба које зависе од свих напред побројаних параметара који се могу слободно бирати. Претварање ових, у суштини веома сложених функција у алгебарске изразе постигнуто је увођењем пет нових оригиналних бездимензионих параметара који представљају саставни део метода развијеног у тези. Употребом ових параметара постигнуто је ефикасно сагледавање корелација појединих основних параметара величине угиба и омогућено аналитичко описивање резултата добијених нумеричким интегралне кривине.

Као аналитички описи функција угиба у тези су понуђени алгебарски изрази, као најједноставнија аналитичка форма прикладна за свакодневне прорачуне. Услед тога учињене су одређене апроксимације, тако да израчунати угиб одступа од резултата добијеног нумеричким интегралне кривине. Одступање је, међутим, у већини случајева доста мање од 10 %, што је сасвим прихватљиво имајући у виду опште могућности у погледу предвиђања величине угиба.

*Овим је постигнут циљ истраживања у тези: сачињен је алат за пројектовање чија је примена у погледу количине рада и знања подједнако једноставна као и код поступака индиректне контроле угиба, али се, притом, добија резултат који одговара много захтевнијем и обухватнијем поступку.* Овај алат, за разлику од већине поједностављених приступа, омогућава да се коректно сагледа деформабилност конструкције и при специфичним условима. То су услови који одступају од просечних, као што су, на пример, рано оптерећивање праћено малом чврстоћом на затезање и повећаним течењем бетона или случајеви са очекиваним веома великим скупљањем бетона. Од посебног је значаја и експлицитно дефинисан утицај притиснуте арматуре на смањивање угиба.

У оквиру тезе разматрана је, као потпуно засебан проблем, и сагласност модела за израчунавање угиба Еврокода 2 са експериментално мереним угибима и са резултатима прорачуна комплекснијим нелинеарним анализама. На основу

овога сагледана укупна прецизност предвиђања угиба је, за инжењерске потребе, задовољавајућа. У појединим ситуацијама, као, на пример, са израженим скупљањем бетона, предвиђање је било систематски мање прецизно. То отвара могућност за калибрацију модела Еврокода 2 за израчунавање кривине носача на потезима са прслинама, чак и у оквиру исте аналитичке форме. Калибрација није даље детаљније разматрана.

Метод за прорачун угиба развијен у тези подржава неке могућности калибрације у оквиру приказаног решења. У том погледу посебно је интересантна могућност увођења у прорачун жељене вредности редукције чврстоће на затезање савијањем, уместо фиксне редукције коефицијентом  $\beta$ . У последњој деценији објављен је већи број радова који се односе на проблем адекватног избора ефективне прорачунске вредности чврстоће на затезање. Циљ је да се напони затезања настали услед скупљања бетона и спречених деформација прецизније уведу у прорачун. *ACI* препоруке су, на пример, недавно имале измену иницирану управо овим проблемом. У тези је, при обради експерименталних резултата, коришћена чврстоћа на аксијално затезање уместо чврстоће на затезање савијањем, као једна од најједноставнијих могућности паушалне додатне редукције за увођење раних ефеката скупљања. Угиби срачунати овим приступом били су у веома доброј сагласности са измереним вредностима.

Успостављени систем нових бездимензионих параметара подржава више различитих опција калибрације модела. То значи да се истим принципом, који је већ примењен у тези, може извршити компактирање аналитичке форме функције угиба. За компактну форму тада би требало установити нову аналитичку апроксимацију.

## 12.2 Могућности даљег рада на проблемима разматраним у оквиру тезе

Већ је констатовано да поступак развијен у тези подржава неке могућности калибрације практично без измена. Нове аналитичке апроксимације могле би се сачинити и за постојећи модел кривине, али би се тешко могла постићи већа сагласност са резултатом нумеричког интегралења: садашње апроксимације већ не одступају више од неколико процената. Овај рад би имао смисла уколико би се постигла једноставнија алебарска форма од оне приказане у тези. У случају



измена у моделу Еврокода 2 за израчунавање кривине, потребно би било срачунати нове аналитичке апроксимације за функције угиба.

Форма изведеног резултата за угиб (релација (6.6)) омогућава и формулисање критеријума за индиректну контролу угиба дефинисањем граничног односа распон/статичка висина. То је једноставан посао који спроводи предефинисањем вредности неких директних параметара (као што је то случај са свим поступцима овог типа) и израчунавањем (поједностављивањем) алгебарских израза из поглавља 8, остављајући активним само преостале параметре. Ова форма може да буде корисна при усвајању димензија елемената у раној фази пројектовања. У тези ово није приказано, да би се избегло расплињавање.

Основни суштински проблем који би требало решавати јесте проширивање поступка на плоче које преносе оптерећење у два правца. Овај проблем се, генерално, може решавати на два начина.

Први, једноставнији начин састоји се у модификацији изведеног метода за линијске носаче помоћу репрезентативних експерименталних резултата за плоче које носе у оба правца. Овај начин је, готово извесно, резултативан, а квалитет решења зависи од обима и квалитета фонда (експериментално) мерених угиба. Постигнуто решење било би нешто грубље, али то не мора да буде ограничавајући моменат за примену: плоче које носе у два правца имају мање угибе од плоча које носе у једном правцу, и није им неопходан подједнако рафиниран метод.

Други, знатно сложенији метод укључио би аналитички приступ адекватан оном који је примењен у тези за линијске носаче, односно плоче које носе у једном правцу. Једини, али управо најсложенији проблем који би требало поново решавати јесте проблем прерасподеле утицаја услед настанка прелина и услед временских деформација бетона. Решавање овог проблема у тези омогућило је превођење модела у бездимензиони облик, у коме је он коришћењем нових бездимензионих параметара у потпуности квантификован. Уколико се не би изнашао сличан модел и за плоче које носе у два правца, као могућност преостаје димензиона мултипараметарска анализа. То значајно увећава обим посла, али уз стални напредак у развоју софтвера и рачунарске технике постаје извесно доступно.

## 13 ПРИЛОЗИ

### 13.1 Прилог 1: Однос потребних рачунских површина арматура у пољу и над ослоном континуалних носача правоугаоних пресека

Негативни моменти континуалних система, генерално, већи су у одређеном односу од момената у пољу. На пример, за једнако подељено оптерећење ослоначки момент обострано укљештеног носача двапут је већи од одговарајућег момента у пољу, док у случају носача укљештеног само с једне стране овај однос (момент над ослоном : максимални момент у пољу =  $(1/8) : (9/128)$ ) износи  $16/9$ .

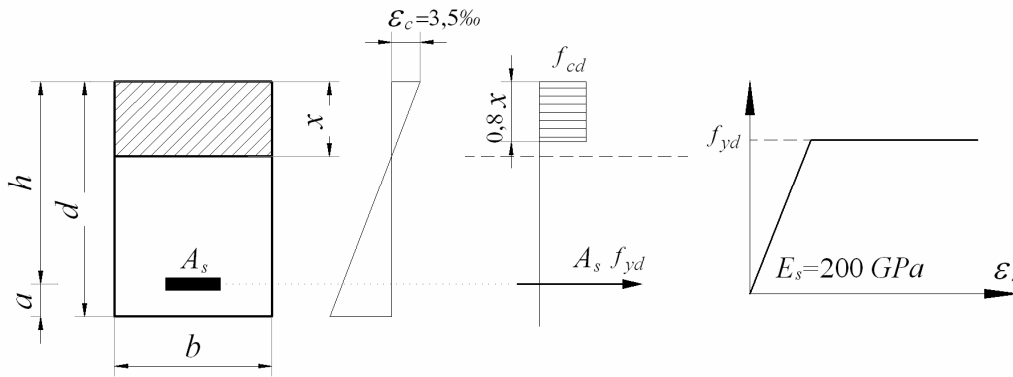
У случају малих процената армирања нема веће разлике у величини крака унутрашњих сила и рачунске површине арматуре стоје у приближно истом односу као и величине одговарајућих момената. Међутим, при већим напрезањима (већим процентима армирања) арматуре на ослонцима брже расту, у релативном смислу, у односу на одговарајуће моменте, због смањења крака унутрашњих сила. Овај пораст се у теоријским разматрањима често занемарује. Овде ће се приказати релативно једноставан поступак, коришћен у тези, да се и ово повећање уведе у разматрање.

Уколико се користи блок дијаграм напона притиска на висини од 0,8 притиснуте зоне са (максималном) величином прорачунског напона у бетону  $f_{cd}$  (у граничном стању, слика 13.1) механички коефицијент  $\bar{\mu}$  површине затегнуте арматуре правоугаоног пресека напрегнутог на савијање дат је изразом:

$$\bar{\mu}(m) = 1 - \sqrt{1 - 2m} \quad (13.1)$$

где су:

- $\bar{\mu} = \frac{A_s f_{yd}}{bh f_{cd}}$  – механички коефицијент армирања;
- $A_s$  – потребна рачунска арматура за гранични момент савијања  $M$ ;
- $f_{yd}$  – максимална ордината билинеарног рачунског дијаграма за арматуру;
- $b, h$  – ширина, статичка висина правоугаоног пресека;
- $m = \frac{M}{bh^2 f_{cd}}$  – бездимензиона вредност момента савијања.



Слика 13.1 Одређивање положаја неутралне линије у граничном стању

Потребно је установити релацију између  $\bar{\mu}$  ( $m_{polje}$ ) и  $\bar{\mu}$  ( $m_{oslonac} = \delta \times m_{polje}$ ). Ова релација се може успоставити и потпуно рачунски егзактно, али то за даља разматрања нема велики значај. Наиме, за анализе у тези, у граничном стању употребљивости, не користи се овај, већ геометријски коефицијент армирања. С обзиром да, уколико се не изаберу конкретни параметри материјала, није могуће једнозначно превођење механичког у геометријски коефицијент армирања, егзактно решење у овом кораку не гарантује бољи коначни резултат од других, приближних, решења. Избор конкретних вредности параметара материјала сузио би квалитет бездимензионих анализа које се спроводе у тези.

Потребна релација се тражи у облику:

$$\mu(\delta \times m) = \delta \times \mu(m) \times [1 + K(\delta) \times \mu(m)] \quad (13.2)$$

где је  $K(\delta)$  коефицијент који се одређује тако да апроксимативно решење одступа што мање од егзактног.

Табела 13.1 Еврокод 2: Граничне вредности механичког коефицијента армирања

	$f_{ck} \leq 50$	$f_{ck} > 50$
$max m$	0,295	0,252
$max \mu$	0,363	0,298

Потребно је дефинисати и интервал вредности  $\mu$  за који се тражи апроксимација. Еврокод 2 ограничава максималну затегнуту арматуру гредни носача на 4 % бетонског пресека. Међутим, ограничење положаја неутралне

линије у граничном стању носивости, дато у члану 5.5 Еврокода 2 дефинише максималне вредности за  $m$  и  $\mu$ , за једнострано армиране пресеке, приказане у табели 13.1.

Размотриће се граничне вредности које покривају све класе чврстоће и разлучите конструкцијске системе. Пошто је базни параметар анализа у тези **арматура у пољу** допустиће се њена величина која омогућава да ослоначки момент (то јест, арматура) досегне максималну вредност за  $f_{ck} \leq 50$  (меродаван је једнострано укљештен носач). Максимални момент у пољу је

$$m_{polje} = 0,295 / (16/9) = 0,166$$

коме одговара вредност  $\bar{\mu}_{polje} = 0,183$ . ПБАБ 87 [22] дозвољава и веће притиснуте зоне (дилатација у затегнутој арматури, у граничном стању, од 3,0 ‰), за коју је одговарајућа вредност  $\bar{\mu}_{polje} = 0,214$ . При МБ 30 и РА 400/500 то одговара површини затегнуте арматуре од око 2 ‰ бруто пресека над ослонцем.

Површина арматуре у пресеку може бити и већа од оне која одговара наведеним механичким коефицијентима армирања. У тим случајевима ради се о неискоришћеној арматури и/или обостраном армирању. Односи површина ослоначких арматура и арматура у пољу, у тим случајевима, нису једнозначни и не могу се претходно предвидети. Анализе у домену граничног стања употребљивости у тези спроведене су и у том подручју, с тим да су задржани односи затегнутих арматура који су моделирани у овом прилогу. Евентуално присуство притиснуте арматуре је засебно (независно) моделирано.

Коефицијент  $K(\delta)$ , одређен из услова најмањег просечног релативног одступања  $\Delta$

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{abs(\mu_{tacno} - \mu_{aproximativno})}{\mu_{tacno}} = \frac{1}{n} \sum_1^n \Delta_i, \quad (13.3)$$

заједно са одговарајућом величином  $\Delta$  и максималним појединачним одступањем  $m_{max} \Delta_i$  приказан је у табели 13.2, за неколико вредности  $\delta$  и за два опсега вредности механичког коефицијента армирања:  $\bar{\mu}_{polje} = 0 \div 0,22$  и  $\bar{\mu}_{polje} = 0 \div 0,15$ .

Табела 13.2 Вредности коефицијента  $K(\delta)$  за примену у једначини (13.2)

	$\overline{\mu}_{polje} = 0,22$				$\overline{\mu}_{polje} = 0,15$			
$\delta$	1,5	1,6	16/9	2	1,5	1,6	16/9	2
$K(\delta)$	0,342	0,415	0,558	0,675	0,314	0,372	0,501	0,652
$\Delta$ (%)	0,4	0,6	1,0	1,9	0,4	0,6	1,0	1,9
$max\Delta_i$ (%)	1,7	2,5	4,3	9,9	0,3	0,6	0,9	1,7

Из резултата приказаних у табели 13.2 може се видети да апроксимација изражена релацијом (13.2) постиже веома добар квалитет. Највећа појединачна одступања  $max\Delta_i$  добијају се при највећим коефицијентима армирања. Уколико се разматрани опсег механичког коефицијента армирања у пољу смањи на  $0 \div 0,15$ , што боље репрезентује реалне армиранобетонске плоче (колоне на десној страни табеле), квалитет апроксимације постаје одличан у целом опсегу ( $max\Delta_i = 1,7\%$ ).

Коначно, за прелазак на бездимензиони параметар површине арматуре

$$\rho = \frac{n A_a}{bh} = \frac{(E_a / E_b) A_a}{bh} \quad (13.4)$$

потребно је дефинисати фактор  $F$  тако да је  $\mu = F \times \rho$ .  $F$  има вредност

$$F = \frac{f_{yd}}{n f_{cd}} = (\text{Еврокод 2}) \frac{f_{yk} / 1,15}{(200 / E_c) f_{ck} / 1,50} = (\text{ПБАБ 87}) \frac{\sigma_v}{(200 / E_b) f_b}. \quad (13.5)$$

Преглед вредности  $F$  према Еврокоду 2 и ПБАБ 87 [22] за неке класе материјала дат је у табелама 13.3 и 13.4. За модул еластичности арматуре усвојена је вредност од  $200 \text{ GPa}$ .

Табела 13.3 Вредности фактора  $F$  за материјале према Еврокоду 2

класа (Еврокод 2)	$f_{ck}$ (MPa)	$E_c$ (GPa)	$F(f_{yk}=500 \text{ MPa})$
C25/30	25	31	4,04
C35/45	35	34	3,17
C45/55	45	36	2,61

Табела 13.4 Вредности фактора  $F$  за материјале према ПБАБ 87

марка (ПБАБ 87)	$f_b$ (MPa)	$E_b$ (GPa)	$F(\sigma_v=400 \text{ MPa})$	$F(\sigma_v=500 \text{ MPa})$
МБ 30	20,5	31,5	3,07	3,84
МБ 45	27,75	33	2,38	2,98
МБ 55	31,5	37	2,35	2,94

Из табела 13.3 и 13.4 се види да, због променљиве вредности коефицијента  $F$ , није могуће успоставити једнозначну везу између вредности бездимензионог коефицијента армирања  $\rho$  (пондерисани коефицијент армирања, према релацији (7.1) у поглављу 7) у пољу и над ослонцем, када се површине арматура одређују према граничном стању носивости. С обзиром да је ова релација потребна за спровођење анализа у тези, извршиће се апроксимација која има најмање укупно одступање при различитим комбинацијама параметара чврстоће (изабраће се средња вредност). У приказаним комбинацијама  $F$  варира од око 2,4 до око 4,0 (уколико се уврсте и још мање и веће чврстоће бетона интервал се проширује, на обе стране). Бира се средина

$$F = \frac{2,4 + 4,0}{2} = 3,2$$

што даје коначну релацију за једнострано укљештен носач ( $sys = G$ ):

$$\begin{aligned} \rho_{oslonac} &= (16/9) \times \rho_{polje} \times (1 + 0,501 \times 3,2 \times \rho_{polje}) \\ &\approx (16/9) \times \rho_{polje} \times (1 + 1,5 \times \rho_{polje}). \end{aligned} \quad (13.6)$$

Слично, за обострано укљештен носач ( $sys = K$ ):

$$\begin{aligned} \rho_{oslonac} &= 2 \times \rho_{polje} \times (1 + 0,652 \times 3,2 \times \rho_{polje}) \\ &\approx 2 \times \rho_{polje} \times (1 + 2,0 \times \rho_{polje}). \end{aligned} \quad (13.7)$$

Фактори  $(1 + 1,5 \times \rho_{polje})$  и  $(1 + 2,0 \times \rho_{polje})$  изражавају повећање арматуре услед ефекта смањења крака унутрашњих сила. Мултипликатор уз  $\rho_{polje}$  има вредност око  $2(\delta - 1)$ , тако да арматура над ослонцем износи:

$$\rho_{oslonac} = \delta \times \rho_{polje} \times (1 + 2(\delta - 1) \times \rho_{polje}) \quad (13.8)$$

где је  $\delta$  однос величина момената над ослонцем и у пољу. Вредности у релацијама (13.6) и (13.7) одговарају изразу (13.8), уз заокруживање.

Због апроксимације величине  $F$  постоји одступање стварних рачунских ослоначких арматура од овако одређених, али оно није велико. За претходно објашњену максималну рачунску арматуру у пољу једнострано укљештеног

носача у износу од  $\overline{\mu}_{polje} = 0,183$  и за C25/30 и  $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ , вредности параметара према Еврокоду 2 износе:

$$n = 200/31 = 6,45$$

$$\rho = 6,45 \times 0,183 \times \frac{25/1,5}{500/1,15} = 0,0452$$

Стварни однос потребних рачунских арматура над ослонцем и у пољу (одређен уз помоћ релације (13.1)), за једнострано укљештени носач, износи:

$$(\rho_{oslonac} / \rho_{polje})_{stvarno} = 2,30.$$

Апроксимативна вредност је, према изразу (13.6)

$$(\rho_{oslonac} / \rho_{polje})_{aproks.} = 2 \times (1 + 1,5 \times 0,0452) = 2,14$$

што представља разлику од око 7 %. Ово једно од највећих практичних одступања ( $\rho$  има вредност на граници обостраног армирања, за ослонац, а  $F$  доста одступа од примењене осредњене вредности), за стандардне вредности параметара материјала. Стога се апроксимација (13.8) се може означити као веома успешна, јер варијације при усвајању конкретне арматуре (пречник, број комада) дају слична одступања.

### 13.2 Прилог 2: Поређење резултата прорачуна добијених применом *AAEM* метода и *EM* метода

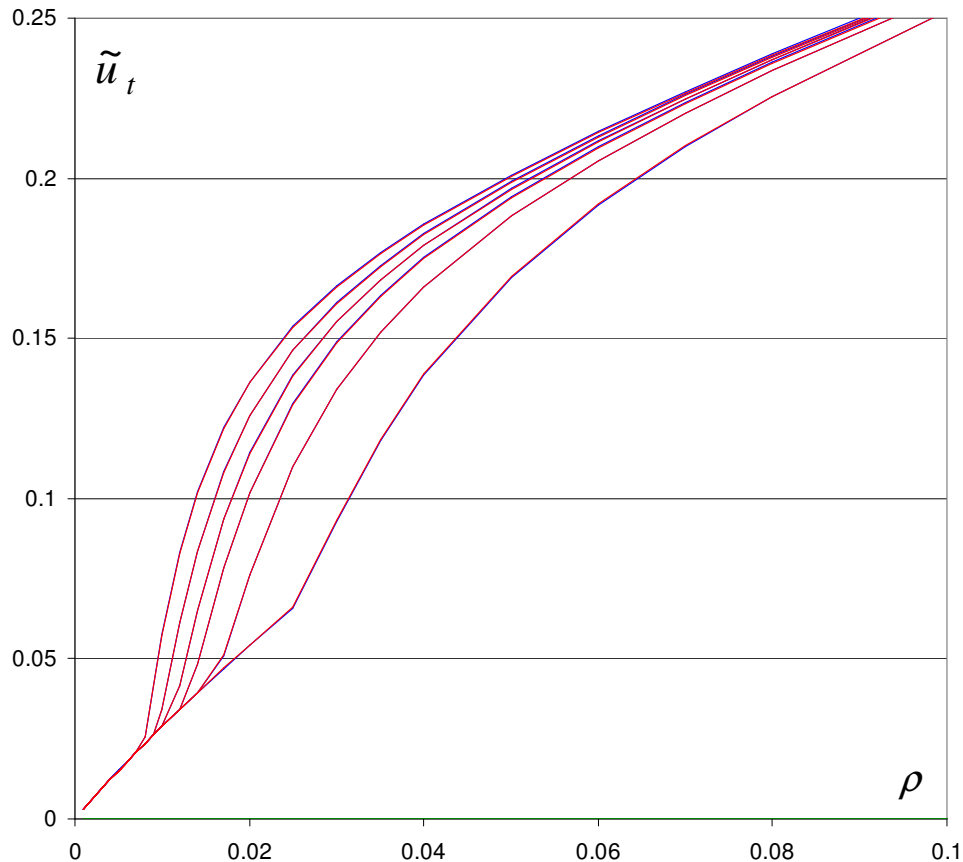
Примена метода ефективног модула (*EMM*) уместо метода коригованог ефективног модула (*AAEMM*) представља једно од могућих поједностављења прорачуна, као што је објашњено у поглављу 5. У оквиру усвојених претпоставки, приказаних у поглављима 2, 3 и 5, *AAEM* метод представља прецизнији приступ. Међутим, као што ће у наставку бити приказано, при решавању проблема разматраних у тези нема већих нумеричких разлика уколико се, сходно инструкцијама Еврокода 2 приказаним у поглављу 4.1, користи *EM* метод. Разлика у резултатима настала применом основне једначине (5.9) *AAEM* метода уместо једначине (5.13) *EM* метода (која је коришћена за извођење резултата у тези) илустрована је са два примера.

У првом примеру разматрани су носачи статичког система просте греде. Носачи су једноструко армирани (без притиснуте арматуре), а арматура је постављена тако да статичка висина износи 0,9 укупне висине ( $\alpha = 0,1$ ; једначина (7.2)). Коэффициент течења је  $\varphi = 2,5$ . На слици 13.2 приказане су вредности бездимензионог коэффицијента угиба  $\tilde{y}_t$  (једначина (7.61)) у функцији коэффицијента армирања  $\rho$  (једначина (7.1)) за шест вредности параметра  $C$  (једначина (7.39)):  $C = 0,05, 0,06, 0,07, 0,08, 0,10$  и  $0,15$ . Приказани су резултати прорачуна *AAEM* и *EM* методом, по шест  $C$  – линија за сваку методу. Резултати су добијени нумеричким интеграљењем кривине поделом распона на 50 делова.

Прорачун *EM* методом дао је нешто мање вредности  $\tilde{y}_t$  у односу на *AAEM* метод, што је резултат у складу са објашњењем уз једначину (5.13): унутрашња прерасподела напона смањује првобитне напоне у бетону у пресецима; прорачун ефеката течења код *EM* метода се врши са коначним напоном у бетону (на крају временског интервала), који је мањи од почетног. Промена напона настала унутрашњом прерасподелом, међутим, није велика, па нису велике ни разлике у резултатима – вредностима  $\tilde{y}_t$ . Приказане вредности  $\tilde{y}_t$  на слици 13.2 које одговарају *EM* методу су помножене са 1,005 (увећане за 0,5 %), док вредности за *AAEM* метод нису кориговане. На тај начин дошло је до приближавања



(преклапања)  $C$  – линија за оба поступка, тако да је на слици практично видљиво само шест уместо  $2 \times 6$  линија (линије одговарају набројаним  $C$  вредностима, почев од највише ка најнижој). Другим речима, резултати прорачуна  $EM$  методом мањи су у разматраним примерима (дијаграми су конструисани на основу 240 појединачних прорачуна) у односу на резултате добијене  $AAEM$  методом свега око 0,5 %.

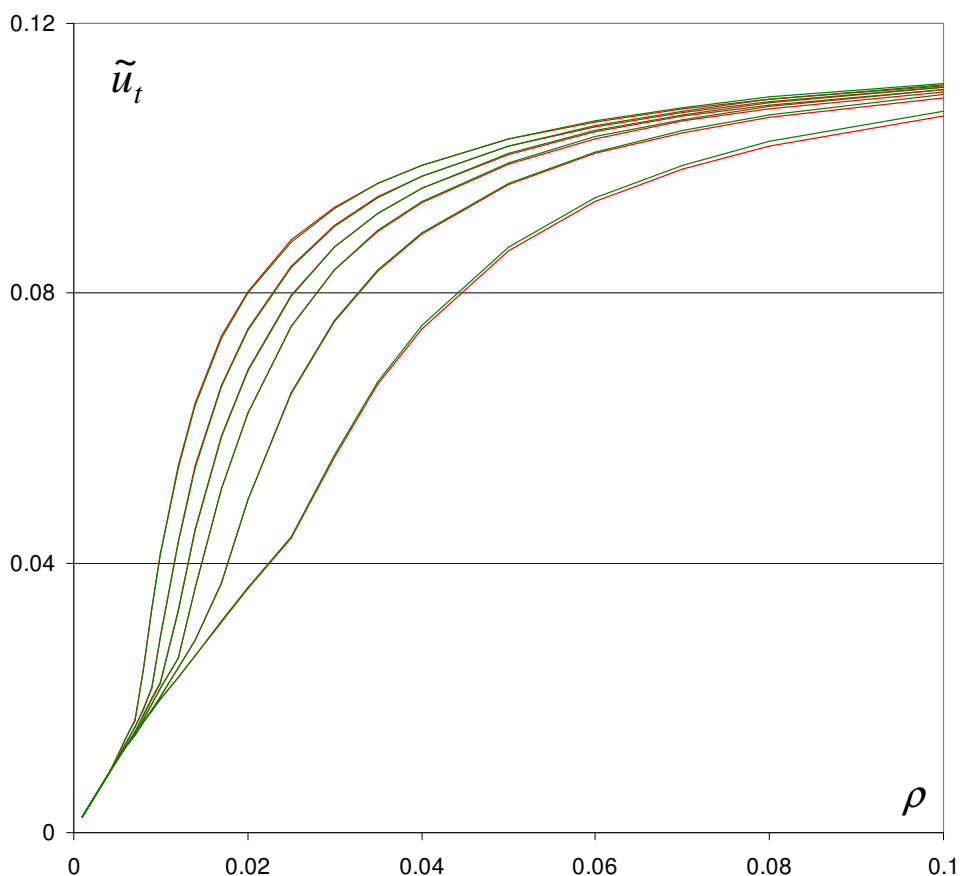


Слика 13.2 Просте греде: преклопљене  $C$  – линије  $AAEM$  и  $EM$  метода

За другу серију примера изабрани су једнострано укљештени носачи ( $sys = G$ ). За разлику од претходних примера, код ових носача се током времена, осим прерасподеле напона на нивоу пресека, врши и прерасподела момента савијања. Због тога се могу очекивати и нешто веће разлике у примени два метода. Да би се разлика још више увећала, разматрани су носачи са симетричним армирањем, чиме су повећани ефекти прерасподеле и на нивоу пресека. Сви остали параметри

( $\alpha$ ,  $C$  – вредности и коефицијент течења) задржани су као у примерима за просте греде. Резултати прорачуна *AAEM* и *EM* методом приказани су на слици 13.3.

Вредности  $\tilde{u}_t$  за *EM* метод су на слици 13.3 приказане увећане, овај пут помножене са 1,015 (увећане за 1,5 %), чиме су  $C$  – линије за два метода поново доведене до преклапања.



Слика 13.3 Конт. носачи: преклопљене  $C$  – линије *AAEM* и *EM* метода

Поново је практично видљива само једна серија од 6 линија. Изузетак је само најнижа линија (за  $C = 0,15$ ), којој је за потпуно преклапање било потребно увећање резултата *EM* метода за око 2 %.

Група примера, приказана на слици 13.3, добро репрезентује очекиване максималне разлике резултата добијених *AAEM* и *EM* методом. Може се закључити да је разлика од највише пар процената доста испод могућег одступања резултата унутар сваке методе изазваног варијацијама осталих параметара прорачуна, односно да примена *EM* метода не слаби знатније квалитет резултата.

### 13.3 Прилог 3: Одређивање вредности коефицијента $\omega$

Одређивање вредности коефицијента  $\omega$ , који служи за срачунавање временских ефеката момената прерасподеле у статички неодређеним системима, као што је објашњено у поглављима 3.11 и 7, може се урадити полазећи од везе дилатације  $\varepsilon(t, t_0)$  и напона  $\sigma(t_0)$  Модел кода МС 1990 [3], која се примењује и у Еврокоду 2

$$\varepsilon(t, t_0) = \sigma(t_0) \left[ \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{cm}} \right] = \sigma(t_0) J(t, t_0) \quad (13.9)$$

где су

- $E_c(t_0)$  – модул еластичности бетона при оптерећењу;
- $\varphi_{28}(t, t_0)$  – коефицијент течења, детаљније објашњен у погл. 5.1;
- $E_{cm}$  – модул еластичности бетона при номиналној старости од 28 дана;
- $J(t, t_0)$  – функција течења.

Укупна дилатација  $\varepsilon(t)$  у тренутку времена  $t$  услед промене напона  $\sigma(t)$  која настаје у интервалу времена  $(t, t_0)$  описана је конститутивном једначином у облику (није укључен део који не потиче од напона)

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0) J(t, t_0) + \int_{t_0}^t J(t, \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau = \varepsilon(t, t_0) + \Delta\varepsilon(t, t_0) \quad (13.10)$$

Уколико се прираштај дилатације  $\Delta\varepsilon(t, t_0)$  изрази преко прираштаја напона  $\Delta\sigma(t, t_0) = \sigma(t) - \sigma(t_0)$  и коефицијента течења  $\varphi_{28}(t, t_0)$  у формалном облику према релацији (13.9) добија се дефиниција коефицијента  $\omega$

$$\Delta\varepsilon(t, t_0) = \Delta\sigma(t, t_0) \left[ \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\omega \times \varphi_{28}(t, t_0)}{E_{cm}} \right] = \frac{\Delta\sigma(t, t_0)}{E_c(t_0)} [1 + \omega \times \varphi(t, t_0)] \quad (13.11)$$

где је  $\varphi(t, t_0)$  коефицијент течења који одговара еластичној дилатацији при оптерећењу (објашњено у поглављу 5.1).

Као што је већ објашњено у поглављу 3.11, коефицијент  $\omega$  пондерише вредност коефицијента течења  $\varphi(t, t_0)$ , која одговара старости бетона при наношењу квази-сталног оптерећења, у вредност  $\omega \times \varphi(t, t_0)$ . Помоћу овако кориговане вредности

коэффициента течења може се укупна (континуална) промена напрезања, услед прерасподеле момената савијања, у временском интервалу  $(t, t_0)$  третирати као константна, са почетком деловања у  $t_0$  у пуном износу  $\Delta\sigma(t, t_0)$ .

Вредност коефицијента  $\omega$  се одређује из дефиниције, према релацијама (13.10) и (13.11):

$$\omega = \frac{E_c(t_0)}{\Delta\sigma(t, t_0)} \times \left[ \int_{t_0}^t J(t, \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau - 1 \right] \times \frac{1}{\varphi(t, t_0)} \quad (13.12)$$

За израчунавање израза (13.12) потребно је неколико функционалних зависности. Зависност коефицијента течења  $\varphi(t, \tau)$  од времена и старости при оптерећивању, као и модула еластичности  $E_c(\tau)$  у изразу у интегралу може се одредити на основу релација Еврокода 2 приказаних у поглављима 3.9 и 3.2. Закон промене напона није познат и мора се претпоставити. Функција  $\sigma(t)$  изражава промену напона услед промене (прерасподеле) пресечних сила изазване временским деформацијама бетона. Стога  $\sigma(t_0) = 0$  (почетак прерасподеле), а  $\sigma(t \rightarrow \infty)$  треба да тежи асимптотски некој коначној вредности. У ове сврхе могу послужити најразличитије функције. Ипак, с обзиром да је основни узрок прерасподеле некомпатибилност додатних кривина насталих услед течења и скупљања бетона са спреченим померањима на местима „сувишних“ ослонаца (ослонаца статичке неодређености), разумно је да се усвоји да напон  $\sigma(t)$  настаје пропорционално развоју кривина, односно дилатација течења од оптерећења нанетог у  $t_0$ . Овај закон дефинисан је у Еврокоду 2 релацијом (3.16) приказаном у поглављу 3.9, тако да се може претпоставити:

$$\sigma(t) = \left[ \frac{(t-t_0)}{\beta_H + (t-t_0)} \right]^{0,3} \cdot \quad (13.14)$$

Интеграл на десној страни израза (13.12) се може израчунати нумеричким поступцима. За израчунавање израза (13.12) потребно је претпоставити (усвојити) читав низ параметара: чврстоћу бетона, старост при оптерећењу, релативну влажност, номиналну величину елемента и класу цемента, као што је приказано у поглављима 3.2 и 3.9, у изразима који дефинишу побројане параметре. Илустрације ради, за плочу дебљине 20 *cm*, од бетона класе C30 са цементом

класе  $N$ , за оптерећење при старости од 14 дана и релативну влажност од 70 %, коефицијент  $\omega = 0,68$ . При истим параметрима, али за оптерећење 28. дана,  $\omega$  има вредност око 0,73.

У складу са изабраном комбинацијом параметара, добијене вредности за  $\omega$  крећу се, генерално, од 0,65 до 0,75. Треба напоменути да се избором другачије функције (13.14) интервал вредности проширује. Уколико се усвоји функција са одређеним „кашњењем“ развоја напона интервал се проширује на страну мањих вредности. Средња вредност  $\omega = 0,7$  задовољава потребе практичних прорачуна. Сама вредност коефицијента  $\omega$  (када се он мења око своје просечне вредности) нема великог утицаја на коначни резултат прорачуна дуготрајног угиба. Разлика постоји у величини потребног момента временске прерасподеле, јер је његов „учинак“ по јединици величине на произвођењу кривине различит зависно од вредности коефицијента  $\omega$ . Потребне додатне кривине за испуњење услова статичке неодређености зависе од величине померања (која треба да буду спречена) услед дуготрајних кривина од почетних момената од квази-сталног оптерећења. Ове додатне кривине се могу одредити и из чисто геометријских (кинематичких) услова, уколико се претходно усвоји закон промене дуж распона. Њихово везивање за моменте прерасподеле даје им физички смисао и дефинише промену дуж распона у складу са статичким системом.

#### 13.4 Прилог 4: Поређење модела за разграничење стања I и II

У поглављу 5 објашњена су два модела за разграничење зона носача без прслина од зона са прслинама, према релацији (5.15), названи „прва варијанта“ и „друга варијанта“. У наставку ће бити приказано поређење резултата прорачуна бездимензионог коефицијента дуготрајног угиба у складу са ове две варијанте.

Детаљнији опис обе варијанте дат је у петом поглављу и овде се не понавља. Поређење је урађено на два примера (две серије носача, једна статичког система просте греде, а друга на једнострано укљештеним носачима), као и у Прилогу 2 (поглавље 13.2).

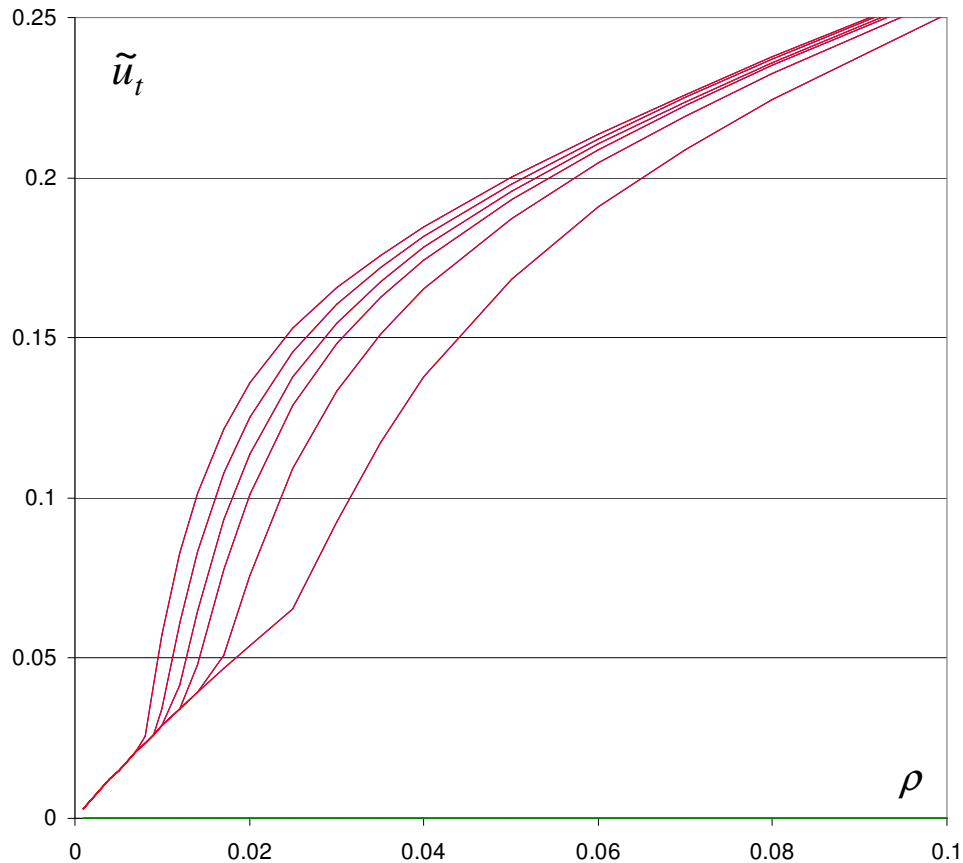
У првом примеру разматрани су једнострано армирани носачи статичког система просте греде. Арматура је постављена тако да статичка висина износи 0,9 укупне висине ( $\alpha = 0,1$ ; једначина (7.2)). Коефицијент течења је  $\varphi = 2,5$ . На слици 13.4 приказане су вредности бездимензионог коефицијента угиба  $\tilde{y}_t$  (једначина (7.61)) у функцији коефицијента армирања  $\rho$  (једначина (7.1)) за шест вредности параметра  $C$  (једначина (7.39)):  $C = 0,05, 0,06, 0,07, 0,08, 0,10$  и  $0,15$ . Приказани су резултати прорачуна према првој и према другој варијанти, по шест  $C$  – линија за сваку варијанту. Резултати су добијени нумеричким интеграљењем кривине са поделом распона на 50 делова.

У складу са описом у поглављу 5, у другој варијанти прорачун је спроведен са вредношћу коефицијента  $\beta = 1,0$  (у основном, општем моделу) и редукованом вредношћу чврстоће на затезање  $f_{ctm,fl,red} = \sqrt{0,5} \times f_{ctm,fl}$ , како би се постигао исти инпут овог параметра као у првој варијанти, у којој је  $\beta = 0,5$ . Одговарајуће вредности параметра  $C$  (једначина (7.39)) су  $\sqrt{0,5} \times$  вредности за прву варијанту и износе  $C = 0,0354, 0,0424, 0,0495, 0,0566, 0,0707$  и  $0,106$ .

У поглављу 3.11 објашњен је, а у Прилогу 3 (поглавље 13.3)) квантификован коефицијент  $\omega$  који врши пондерисање вредности коефицијента течења  $\varphi(t, t_0)$  за прорачун временских деформација услед момената прерасподеле у основном моделу. С обзиром да основни модел у ствари представља прву варијанту, примери за прву варијанту урађени су са  $\omega = 0,7$ . Другој варијанти, у

складу са описом у поглављу 5, одговара вредност  $\omega = 1,0$ , јер се друго (након почетног) разграничење зона стања I и II врши на крају посматраног интервала.

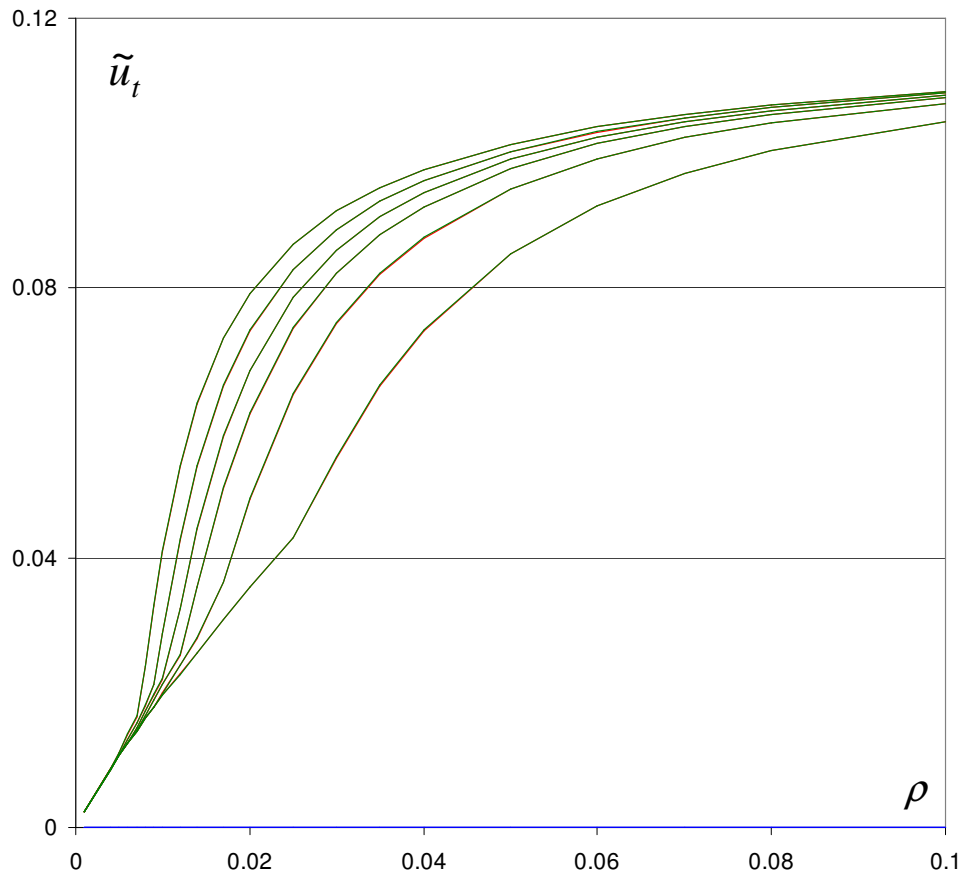
Прорачун за обе варијанте урађен је истом (EM) методом.



Слика 13.4 Просте греде: преклопљене  $C$  – линије прве и друге варијанте

Резултати прорачуна прве групе примера приказани су на слици 13.4.  $C$  – линије за обе варијанте су потпуно преклопљене, тако да је на слици практично видљиво само шест уместо  $2 \times 6$  линија. Резултат је потпуно очекиван, с обзиром да разлика у методологији разграничења стања I и II даје исти резултат, уколико нема промене дијаграма момента током времена услед прерасподеле, што је случај код статички одређених носача. Приказане вредности  $\tilde{u}_t$  на слици 13.4 одговарају набројаним  $C$  вредностима, почев од највише ка најнижој. Дијаграми су конструисани на основу 240 појединачних прорачуна простих греда.

За другу серију примера поново су, као и у Прилогу, 2 избрани једнострано укљештени носачи ( $sys = G$ ). За разлику од претходних примера, код ових носача се током времена, осим прерасподеле напона на нивоу пресека, врши и прерасподела момента савијања. Због тога се могу очекивати разлике у примени две варијанте. Да би се разлика још више увећала, разматрани су носачи са симетричним армирањем, чиме су повећани ефекти прерасподеле и на нивоу пресека. Сви остали параметри ( $\alpha$ ,  $C$  – вредности и коефицијент течења) задржани су као у примерима за просте греде. Резултати прорачуна према првој и другој варијанти приказани су на слици 13.5.



Слика 13.5 Конт. носачи: преклопљене  $C$  – линије прве и друге варијанте

Поново је практично видљива само једна серија од 6 линија. Разлике појединачних резултата су мање од пола процента. Као што је већ објашњено у Прилогу 3 у поглављу 13.3, при различитим претпоставкама, разлике постоје у величини израчунатих момената прерасподеле, док су сами резултати за величину



угиба стабилни. Употреба вредности коефицијента  $\omega = 1,0$  у другој варијанти додатно је приближила израчунате величине  $\tilde{y}_t$ .

При изради апроксимативних функција, приказаних у поглављу 8, коришћена је друга варијанта. Основни разлог јесте, као што је објашњено у поглављу 5.3, њена предност да омогућава жељену вредност редукције чврстоће на затезање савијањем, уместо претходно дефинисане (вредношћу коефицијента  $\beta = 0,5$ ), што је случај у првој варијанти. Израчунате вредности момената временске прерасподеле у другој варијанти су приближне, али оне и не представљају резултат прорачуна угиба. Сам угиб одређен другом варијантом, има вредност веома добро сагласну основном моделу (који је, у ствари, представљен првом варијантом).

1. CEN (2004.) *Eurocode 2: EN 1992-1-1:2004*. Brussels: CEN.
2. Jacobs, J.P. (editor) (2008.) *Eurocode 2 Commentary*. Brussels: European Concrete Platform ASBL.
3. Comité Euro-International du Béton. (1993.) *CEB-FIP Model Code 1990*. London: Thomas Telford.
4. fib. (2010.) *Model code 2010 – First complete draft, volume 1 and 2*. fib Bulletins 55, 56. Lausanne: fib.
5. CEB (Favre, R. et al.). (1985.) *CEB Design Manual on cracking and deformations*. Lausanne: École Polytechnique fédérale de Lausanne.
6. ISO. (1977.) *ISO 4356:1977: Bases for the design of structures - Deformations of buildings at the serviceability limit states*. Geneva: ISO.
7. CEB. (1997.) *Serviceability Models – Behaviour and modeling in serviceability limit states including repeated and sustained loads*. CEB Bulletin 235. Lausanne: CEB.
8. Госстрой России. (2003.) *СНиП 52-01-2003: Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры*. Москва: Госстрой России.
9. ACI Committiee 318. (2000.) *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-99) and Commentary (ACI 318R-99)*. American Concrete Institute.
10. Scanlon, A. and Murray, D. W. (1982.) *Practical Calculation of Two-Way Slab Deflections*. Concrete International Vol. 4(11), 43-50, American Concrete Institute.
11. Scanlon, A. and Bischoff, P. H. (2008.) *Shrinkage Restraint and Loading History Effects on Deflections of Flexural Members*. ACI Structural Journal Vol. 105(4), 498-506, American Concrete Institute.

12. Gribniak, V., Kaklauskas, G. and Bacinskas, D. (2008.) *Shrinkage in reinforced concrete structures: A computational aspect*. Journal of civil engineering and management (Statyba), Vol.14(1), 49-60, Taylor & Francis.
13. Ghali, A. (1989.) *Deflection Prediction in Two-Way Floors*. ACI Structural Journal Vol. 86(5), 551-562, American Concrete Institute.
14. Ghali, A. (1993.) *Deflection of Reinforced Concrete Members: A Critical Review*. ACI Structural Journal Vol. 90(4), 364-373, American Concrete Institute.
15. Gilbert, R. I. (1999.) *Deflection Calculation for Reinforced Concrete Structures – Why We Sometimes Get It Wrong*. ACI Structural Journal Vol. 96(6), 1027-1032, American Concrete Institute.
16. Gilbert, R. I. (2001.) *Shrinkage, Cracking and Deflection – the Serviceability of Concrete Structures*. Electronic Journal of Structural Engineering Vol.1(1), 2-14, EJSE International.
17. Branson, D. E. (1963.) *Instantaneous and Time-Dependent Deflections of Simple and Continuous Reinforced Concrete Beams*. Alabama: HPR Publication 7, Part 1, 1-78, Alabama Highway Department, Bureau of Public Roads.
18. Pecić, N. and Marinković, S. (2011.) *Design aspects of Eurocode 2 methods for deflection control*. Proceedings of fib Symposium Prague 2011. Praha: Czech Concrete Society.
19. CEN. (2004.) *Eurocode 0: EN 1990:2002*. Brussels: CEN.
20. CEB. (1981.) *Fissuration et deformations*. Bulletin d'information N° 143. Paris : Comite Euro-international du beton.
21. CEN. (2004.) *Еврокод 2 : Прорачун бетонских конструкција, део 1-1 : Општа правила и правила за зграде*. EN 1992-1-1:2004, превод на српски језик Београд: Грађевински факултет Универзитета у Београду.
22. Група аутора. (1995): *Бетон и армирани бетон према БАБ 87*. 1995. Том 1 Приручник и Том 2 Прилози, треће издање, Београд: Грађевински факултет Универзитета у Београду.

23. fib. (1999.) *Structural Concrete – Textbook on Behaviour, Design and Performance*. fib Bulletins 1, 2, 3. Lausanne: fib.
24. ACI Committiee 435. (1995.) *Control of Deflection in Concrete Structures (ACI 435R)*. American Concrete Institute.
25. Washa, G. W. and Fluck, P.G. (1952.) *Effect of Compressive Reinforcement on the Plastic Flow of Reinforced Concrete Beams*. Journal of the American Concrete Institute, ACI Proceedings Vol. 49(2), 89-108, American Concrete Institute.
26. Washa, G. W. and Fluck, P.G. (1956.) *Plastic Flow of Reinforced Concrete Continuous Beams*. Journal of the American Concrete Institute, ACI Proceedings Vol. 52(5), 549-561, American Concrete Institute.
27. Yu, W., W. and Winter, G. (1960.) *Instantaneous and Long-Time Deflections of Reinforced Concrete Beams under Working Loads*. Journal of the American Concrete Institute, ACI Proceedings Vol. 57(1), 29-50, American Concrete Institute.
28. Branson, D. E. (1977.) *Deformation of Concrete Structures*. New York: McGraw-Hill.
29. Bischoff, P. H. and Scanlon, A. (2009.) *Span-Depth Ratios for One-Way Members Based on ACI 318 Deflection Limits*. ACI Structural Journal Vol. 106(5), 617-626, American Concrete Institute.
30. Gilbert, R. I. (2007.) *Tension Stiffening in Lightly Reinforced Concrete Slabs*. Journal of Structural Engineering Vol. 133(6), 899-903, ASCE.
31. Paulson, K. A., Nilson, A. H. and Hover, K. C. (1991.) *Long-Term Deflection of High-Strength Concrete Beams*. ACI Materials Journal Vol. 88(2), 197-206, American Concrete Institute.
32. ACI Committiee 435. (2003.) *Control of Deflection in Concrete Structures - Appendix B (ACI 435R-95, Appendix B [2003])*. American Concrete Institute.
33. Bazant, Z. P. (1972.) *Predictions of concrete effects using age adjusted effective modulus method*. ACI Journal Vol. 69, 212-217, American Concrete Institute.

34. BSI. (1997.) *BS 8110 Structural use of concrete Part 1. Code of practice for design and construction*. London: BSI.
35. BSI. (1989.) *BS 8110 Structural use of concrete Part 2. Code of practice for special circumstances*. London: BSI.
36. Ghali, A. and Favre R. (1994.) *Concrete structures: stresses and deformations. 2nd ed.* London: Chapman and Hall.
37. CCIP. (2007.) *How to design concrete structures using Eurocode 2*. London: The Concrete Centre.
38. Espion, B. and Halleux, P. (1990.) *Long-Term Deflections of Reinforced Concrete Beams: Reconsideration of Their Variability*. ACI Structural Journal Vol. 87(2), 232-236, American Concrete Institute.
39. Espion, B. (1988.) *Long-Term Sustained Loading Tests on Reinforced Concrete Beams: A Selected Data Base*. Bulletin du Service Génie Civil N°88-1. Bruxelles: Université Libre de Bruxelles.
40. Jaccoud, J-P. and Favre, R. (1982.) *Flèche des structures en béton armé – Vérification expérimentale d'une méthode de calcul*. Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics N°406, serie beton 208, 20-68.
41. Corley, W. G. and Sozen, M. A. (1966.) *Time-Dependant Deflections of Reinforced Concrete Beams*. Journal of the American Concrete Institute, ACI Proceedings Vol. 63(3), 373-386, American Concrete Institute.
42. Bakoss, S. L., Gilbert, R. I., Faulkes, K. A. and Pulmano, V. A. (1982.) *Long-term tests on reinforced concrete beams*. UNICIV Report No. R-204. Kensington, NSW: The University of New South Wales.
43. Torres Llinàs, L. (2001.) *Modelo numérico y verificación experimental del comportamiento en servicio de estructuras de hormigón*. Ph.D. Tesis, Universitat politècnica de Catalunya.
44. TNO DIANA. (2008.) *DIANA 9.3 User's Manual*. Delft: TNO Diana bv.
45. Cosenza, E. and Greco, C. (1990.) *Comparison and optimization of different methods of evaluation of displacements in cracked reinforced concrete beams*. Materials and Structures/Matériaux et Constructions, Vol. 23(3), 196-203.

Мр Ненад Печић, дипл. инж. грађ.

Биографски подаци

Рођен 20. априла 1963. у Београду. Завршио са одличним успехом Математичку гимназију у Београду (дипломе „Вук Карацић“, „Михајло Петровић – Алас“, прве награде на републичким и савезним такмичењима из математике).

Грађевински факултет Универзитета у Београду уписао 1981. године, студирао од 1982. до 1987. године. Редовне студије завршио на Одсеку за конструкције са средњом оценом 9,81. Дипломирао 1987. године са оценом 10 радом из области бетонских конструкција. Рад је награђен наградом Привредне коморе града Београда за 1987. годину.

Последипломске студије из области бетонских конструкција уписао на Грађевинском факултету у Београду 1988. године и положио испите са просечном оценом 10,0. Магистарски рад (ментор проф. др Милорад Ивковић) под насловом „Прорачун ефективне крутости линијских армиранобетонских носача савијених силама“ одбранио 1991. године. Магистарски рад је награђен наградом Привредне коморе града Београда за 1991. годину.

На Грађевинском факултету у Београду запослен од јануара 1988. године. У оквиру Катедре за бетонске конструкције радио у настави на редовним и последипломским студијама. У периоду од запослења учествовао и у већем броју истраживачких и стручних пројеката чији је носилац био Грађевински факултет Универзитета у Београду. Као истраживач учествовао у реализацији 5 пројеката Министарства за науку и технологију Републике Србије. На скуповима и у публикацијама у земљи и иностранству објавио 30 радова из проблематике армиранобетонских и претходно напрегнутих конструкција. Поседује активно знање енглеског језика, а служи се француским и руским језиком.

Основне области научног интересовања су гранична стања и проблеми пројектовања армиранобетонских и претходно напрегнутих конструкција.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани мр Ненад П. Пецић, дипл. инж. грађ.

број индекса /

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

„УНАПРЕЂЕЊЕ МЕТОДОЛОГИЈЕ КОНТРОЛЕ УГИБА

АРМИРАНОБЕТОНСКИХ КОНСТРУКЦИЈА“

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 15. новембра 2012.



мр Ненад П. Пецић, дипл. инж. грађ.

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора      мр Ненад П. Пецић, дипл. инж. грађ.

Број индекса \_\_\_\_\_

Студијски програм \_\_\_\_\_

Наслов рада „УНАПРЕЂЕЊЕ МЕТОДОЛОГИЈЕ КОНТРОЛЕ УГИБА  
АРМИРАНОБЕТОНСКИХ КОНСТРУКЦИЈА“

Ментор      проф. др Снежана Маринковић, дипл. инж. грађ.

Потписани мр Ненад П. Пецић, дипл. инж. грађ.

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 15. новембра 2012.



мр Ненад П. Пецић, дипл. инж. грађ.



Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

„УНАПРЕЂЕЊЕ МЕТОДОЛОГИЈЕ КОНТРОЛЕ УГИБА  
АРМИРАНОБЕТОНСКИХ КОНСТРУКЦИЈА“

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 15. новембра 2012.



мр Ненад П. Пецић, дипл. инж. грађ.