

UNIVERZITET U BEOGRADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Zoran B. Perović

ELASTOPLASTIČNA ANALIZA
REŠETKASTIH NOSAČA SA
OŠTEĆENJEM PRI CIKLIČNOM
OPTEREĆENJU

doktorska disertacija

Beograd, 2016.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Zoran B. Perović

ELASTOPLASTIC DAMAGE ANALYSIS OF
TRUSSES SUBJECTED TO CYCLIC
LOADING

doctoral dissertation

Belgrade, 2016.

Mentor:

dr Dragoslav Šumarac, redovni profesor, Građevinski fakultet,
Univerzitet u Beogradu

Članovi komisije:

dr Dragoslav Šumarac, redovni profesor, Građevinski fakultet,
Univerzitet u Beogradu

dr Aleksandar Prokić, redovni profesor, Građevinski fakultet u
Subotici, Univerzitet u Novom Sadu

dr Ratko Salatić, vanredni profesor, Građevinski fakultet,
Univerzitet u Beogradu

dr Rastislav Mandić, vanredni profesor, Građevinski fakultet,
Univerzitet u Beogradu

dr Saša Stošić, docent, Građevinski fakultet,
Univerzitet u Beogradu

Zahvalnica:

Želim da izrazim zahvalnost svom mentoru, prof dr Dragoslavu Šumarcu, na dragocenim savetima i velikoj pomoći u izradi ove doktorske disertacije.

Svoju zahvalnost dugujem i drugim profesorima sa Katedre za tehničku mehaniku i teoriju konstrukcija koji su me podržavali i pomagali mi u ovom radu, a posebno kolegama sa predmeta Tehnička mehanika.

Zahvalan sam i svojoj porodici na uloženom trudu, pruženom razumevanju i ohrabrenju koje mi je dalo snage i istrajnosti u ovom radu, a posebno svojoj supruzi Marini koja mi je velika podrška u svakom aspektu života.

ELASTOPLASTIČNA ANALIZA REŠETKASTIH NOSAČA SA OŠTEĆENJEM PRI CIKLIČNOM OPTEREĆENJU

Rezime

U ovoj doktorskoj disertaciji je razmatrano ponašanje rešetkastih konstrukcija u plastičnoj oblasti sa ciljem da se optimizuje numerička analiza ovog problema i da se definiše osnova za proširivanje odgovarajućeg modela na gredne elemente linijskih nosača. Ovaj problem, pri cikličnom opterećenju, dobija novu dimenziju u pogledu tačnosti rezultata nakon određenog broja ciklusa, kao i u pogledu numeričke zahtevnosti odgovarajućeg modela. Model materijala zasnovan na Prajzakovom (Preisach) histerezisnom operatoru, određen kao analitički izraz za vezu napon-deformacija, omogućava numerički efektno modeliranje jednoaksijalnog ponašanja materijala. Koristeći ovaj model, u ovoj disertaciji su definisane jednačine u metodi konačnih elemenata za elastoplastičnu analizu rešetkastih nosača pri cikličnom opterećenju i na osnovu toga je definisan algoritam za proračun u programskom jeziku c++.

Za validaciju rezultata i analizu numeričkih karakteristika proračuna zasnovanog na modelu materijala koji je korišćen u disertaciji, u numeričkim primerima su poređeni rezultati dobijeni predmetnim modelom sa rezultatima dobijenim koristeći drugi histerezisni operator (Bouc-Wen) i rezultatima dobijenim koristeći jedan od klasičnih modela plastičnosti (model generalisane plastičnosti).

Geometrijska nelinearnost je uzeta u obzir poznatim metodama i definisana u delu numeričkih primera. Stanje napona u materijalu koji se analizira je jednoaksijalno, a u numeričkim primerima sa grednim elementima je usvojena hipoteza o ravnim preseccima.

Pored postojećeg (Prajzakovog) modela za elastoplastično ponašanje materijala, u ovoj disertaciji je definisan model oštećenja u materijalu preko dva pristupa. U prvom pristupu, definisani histerezisni operator za elastoplastično ponašanje materijala je modifikovan kako

bi mogao da modelira oštećenje u materijalu. U drugom pristupu, u definisani algoritam proračuna metode konačnih elemenata predmetnog modela elastoplastičnosti je uveden fenomen oštećenja korišćenjem osnovnih principa mehanike kontinuuma sa oštećenjem.

Pored toga, predstavljen je model za proračun histerezisnog gubitka energije u rešetkastim konstrukcijama, zasnovan na predmetnom modelu, kao i osnova za proširenje analize na gredne nosače koristeći numeričku integraciju napona u poprečnom preseku za jednostavne slučajeve savijanja.

Ključne reči: rešetka, ciklična plastičnost, histerezis, oštećenje, operator, nelinearna analiza, numerička efikasnost

Naučna oblast: Građevinarstvo

Uža naučna oblast: Tehnička mehanika i teorija konstrukcija

UDK: 624.04:531.2(043.3)

Datum odbrane:

ELASTOPLASTIC DAMAGE ANALYSIS OF TRUSSES SUBJECTED TO CYCLIC LOADING

Summary

In this doctoral dissertation, behavior of trusses in plastic domain is investigated in order to optimize numerical analysis of this problem and to define foundation for extending proposed model to the analysis of beam elements. New dimension in this problem arise in the case of the cyclic loading, relating to the accuracy of results after certain number of cycles and computational effort of corresponding model. Material model based on the Preisach hysteretic operator, determined as analytical expression for stress-strain relation, enables numerically effective modeling of uniaxial material behavior. By using this model, in this dissertation, finite element equations for elastoplastic analysis of trusses subjected to cyclic loading are determined, which lead to definition of algorithm for numerical analysis in c++ programming language.

In order to validate results and to analyze numerical performance of calculation based on the material model used in this dissertation, in numerical examples, results obtained by analyzed (Preisach) model are compared with results obtained by using other hysteretic operator (Bouc-Wen) and also with results obtained by using one of the classical model of plasticity (generalized plasticity model).

Geometric nonlinearity is taken into account by well established methods, and it was defined in several numerical examples. Stress state in analyzed material is uniaxial, and in numerical examples with beam elements, the assumption of engineering beam theory is adopted (cross section is perpendicular to a bending line).

Besides existing (Preisach) model for elastoplastic material behavior, in this dissertation damage model in material is defined through two approaches. In the first approach, proposed hysteretic operator for elastoplastic behavior is modified, so that it would have the

possibility to model the damage in material. In the second approach, in proposed finite element algorithm for elastoplastic analysis, phenomenon of damage is introduced by using the basic principles of continuum damage mechanics.

In addition, model for calculation of hysteretic energy loss in truss structures, based on the considered model, is presented, and finally, the foundation for extending the corresponding analysis on beam elements, by using numerical integration of normal stress in cross section, for simple cases of loading, is proposed.

Key words: truss, cyclic plasticity, hysteresis, damage, operator, nonlinear analysis, numerical efficiency

Scientific field: Civil engineering

Specific scientific field: Engineering mechanics and theory of structures

UDK: 624.04:531.2(043.3)

SADRŽAJ

1	POGLAVLJE.....	1
1.1	UVOD.....	1
1.2	CIKLIČNA PLASTIČNOST.....	2
1.3	KLASIČNA TEORIJA PLASTIČNOSTI.....	8
1.4	DRUGI JEDNOAKSIJALNI MODELI PLASTIČNOSTI.....	12
1.5	PREGLED PROCEDURA ZA ELASTOPLASTIČNU ANALIZU LINIJSKIH NOSAČA.....	17
2	HISTEREZISNI OPERATORI	19
2.1	OSNOVNI POJMOVI HISTEREZISNIH OPERATORA	20
2.2	PRAJZAKOV MODEL HISTEREZISA.....	24
2.3	BOUC-WEN-OV MODEL HISTEREZISA.....	35
3	MODELIRANJE ELASTOPLASTIČNOG PONAŠANJA MATERIJALA PRIMENOM PRAJZAKOVOG MODELA HISTEREZISA.....	39
3.1	REDNA VEZA JEDINIČNOG TROELEMENTNOG MODELA	41
3.2	PARALELNA VEZA JEDINIČNOG TROELEMENTNOG MODELA.....	44
3.3	DEFINISANJE JEDNAČINA ZA CIKLIČNO OPTEREĆENJE REŠETKASTIH NOSAČA U PLASTIČNOM DOMENU PRIMENOM METODE KONAČNIH ELEMENATA	48
3.4	ODREĐIVANJE PARAMETARA ZA PRAJZAKOV MODEL HISTEREZISA NA OSNOVU EKSPERIMENTALNIH REZULTATA.....	52
3.5	DEFINISANJE GEOMETRIJSKE NELINEARNOSTI	55

4	ELASTOPLASTIČNA ANALIZA REŠETKASTIH NOSAČA SA OŠTEĆENJEM PRI CIKLIČNOM OPTEREĆENJU	57
4.1	MODELIRANJE OŠTEĆENJA.....	57
4.2	KRITERIJUMI KONVERGENCIJE.....	67
4.3	PRIMERI EP ANALIZE MATERIJALA SA OŠTEĆENJEM	68
5	PRORAČUN HISTEREZISNIH GUBITAKA ENERGIJE PRIMENOM PRAJZAKOVOG MODELA HISTEREZISA	74
5.1	UVOD.....	74
6	OSOBINE ALGORITMA ZA ELASTOPLASTIČNU ANALIZU REŠETKASTIH NOSAČA PRI CIKLIČNOM OPTEREĆENJU	77
6.1	ALGORITAM ZA ELASTOPLASTIČNU ANALIZU	77
6.2	ALGORITAM ZA ELASTOPLASTIČNU ANALIZU SA OŠTEĆENJEM.....	80
7	ELASTOPLASTIČNA ANALIZA GREDNOG ELEMENTA PRIMENOM PRAJZAKOVOG MODELA HISTEREZISA	82
7.1	UVOD.....	82
7.2	ELASTOPLASTIČNA ANALIZA GREDNOG ELEMENTA PRI ČISTOM SAVIJANJU - PRIMER.....	86
8	NUMERIČKI PRIMERI	88
8.1	STATIČKA ELASTOPLASTIČNA ANALIZA REŠETKASTOG LINIJSKOG NOSAČA	88
8.2	DINAMIČKA ELASTOPLASTIČNA ANALIZA REŠETKASTOG LINIJSKOG NOSAČA.....	99
8.3	ELASTOPLASTIČNA ANALIZA REŠETKASTOG LINIJSKOG NOSAČA SA OŠTEĆENJEM	

8.4	PRORAČUN ENERGETSKIH KOMPONENTI REŠETKASTOG LINIJSKOG NOSAČA U ELASTOPLASTIČNOJ ANALIZI.....	109
8.5	ELASTOPLASTIČNA ANALIZA GREDENOG LINIJSKOG NOSAČA.....	110
9	ZAKLJUČAK.....	113
10	LITERATURA	116
	BIOGRAFIJA AUTORA.....	126

1 POGLAVLJE

1.1 UVOD

Rešetkaste konstrukcije imaju široku primenu kao nosači u građevinskim konstrukcijama, pa je na osnovu toga, njihova numerička analiza od značaja u građevinarstvu, naročito sa aspekta optimalne iskorišćenosti materijala i trajnosti, što zahteva precizniju analizu. Pod različitim tipovima opterećenja, pojedini elementi rešetkaste konstrukcije mogu pretrpeti značajne plastične deformacije, a usled zamora se mogu javiti trajna oštećenja u materijalu. Poznato je da je dozvoljavanjem pojave plastičnih deformacija u numeričkom proračunu nosivosti konstrukcije, odnosno uvođenjem napona iznad granice tečenja kada materijal ima osobinu ojačanja, moguće smanjiti utrošak materijala za izradu konstrukcije. Analize, koje te pojave uzimaju u obzir, mogu da dovedu do značajnog povećanja ekonomičnosti izgradnje, ili mogu da daju realniji uvid u ponašanje konstrukcije u slučaju pojave napona iznad granice elastičnosti u materijalu. Ponašanje materijala u plastičnom domenu predstavlja kompleksan problem u analizi konstrukcija, koji se u zavisnosti od vrste materijala u inženjerskom i naučnom aspektu analize može definisati sa više različitih pristupa modeliranja. U ovoj doktorskoj disertaciji je analiza ograničena na jednoaksijalno ponašanje materijala u plastičnom domenu uzimajući u obzir i oštećenja. Iako se u inženjerskim konstrukcijama često koristi meki čelik čija naponsko-deformacijska kriva pri monotonom jednoaksijalnom opterećenju ima horizontalni plato (slika 1.1(a)), pri cikličnom opterećenju se taj horizontalni plato gubi i naponsko-deformacijski odnos se formira u obliku zatvorene ili otvorene histerezisne petlje. Pored toga se u slučaju cikličnog jednoaksijalnog opterećenja legiranih čelika, u plastičnom domenu, dobija karakteristična histerezisna petlja (slika 1.1(b)), koja se u velikoj meri poklapa sa delom krive pri monotonom opterećenju. Zbog toga je od velikog značaja određivanje numeričkog modela koji može sa velikom tačnošću da predstavi ovakvo karakteristično ponašanje materijala pri cikličnom opterećenju.

Teorije plastičnosti se kao matematički aparati za definisanje ponašanja materijala mogu prema različitim pristupima i nivoima analize klasifikovati na veliki broj izvedenih teorija.

Na osnovu analiziranog prostornog nivoa u materijalu, moguće je grupisati sve pristupe u tri nivoa modeliranja: makromodeliranje, mezomodeliranje i mikromodeliranje. U analizi građevinskih konstrukcija, pristup makromodeliranja je najčešće dovoljan za opis fenomena koji su od značaja za modeliranja u takvom inženjerskom pristupu problema.

1.2 CIKLIČNA PLASTIČNOST

1.2.1 Klasifikacija teorija plastičnosti

Na osnovu dimenzije i nivoa u materijalu koji se modelira, može se reći da konvencionalne teorije plastičnosti, predstavljaju pristup makromodeliranja, koji tretira materijal kao kontinuum. Klasične teorije plastičnosti se odnose na većinu konvencionalnih teorija plastičnosti koje podrazumevaju postojanje uslova tečenja i površi tečenja, kao i pravila tečenja i ojačanja kod složenijih modela.

Klasične teorije plastičnosti, u kojima se definiše postojanje površi tečenja, zakona tečenja, pravila normalnosti, Drucker-ovog postulata i sličnih pojmova, mogu biti i zavisne i nezavisne od brzine promene deformacije. Prema uticaju brzine promene deformacije na odgovor materijala u plastičnom domenu, teorije plastičnosti se dele na rate-dependent (viskoplastičnost) i rate-independent teoriju plastičnosti. Viskoplastičnost se primenjuje da bi se modeliralo tečenje pri velikoj temperturi, kao i za modeliranje ponašanja materijala pri velikim brzinama promene deformacije (100 s^{-1} ili veće) što utiče na promenu uslova tečenja. Plastičnost koja ne uzima u obzir brzinu nanošenja deformacije (rate-independent plasticity) se koristi za modeliranje materijala pri temperaturama nižim od $\frac{1}{2}$ temperaturne granice topljenja i do umerenih brzina promene deformacija ($0.01-10 \text{ s}^{-1}$).

Značaj i potreba za korišćenjem površi tečenja u matematičkom modeliranju plastičnog ponašanja materijala je analizirana još od prvih modela plastičnosti. Postojanje površi tečenja u matematičkim modelima plastičnosti je posebno prisutno u modelima rate-independent plastičnosti. Pored klasičnih teorija plastičnosti, Valanis [1] je predložio teoriju plastičnosti bez površi tečenja koja može da opiše i rate-dependent ("Endochronic theory of viscoplasticity") i rate-independent ("Endochronic theory of plasticity") ponašanje materijala. To se postiže uvođenjem pojma unutrašnje mere vremena (intrinsic time

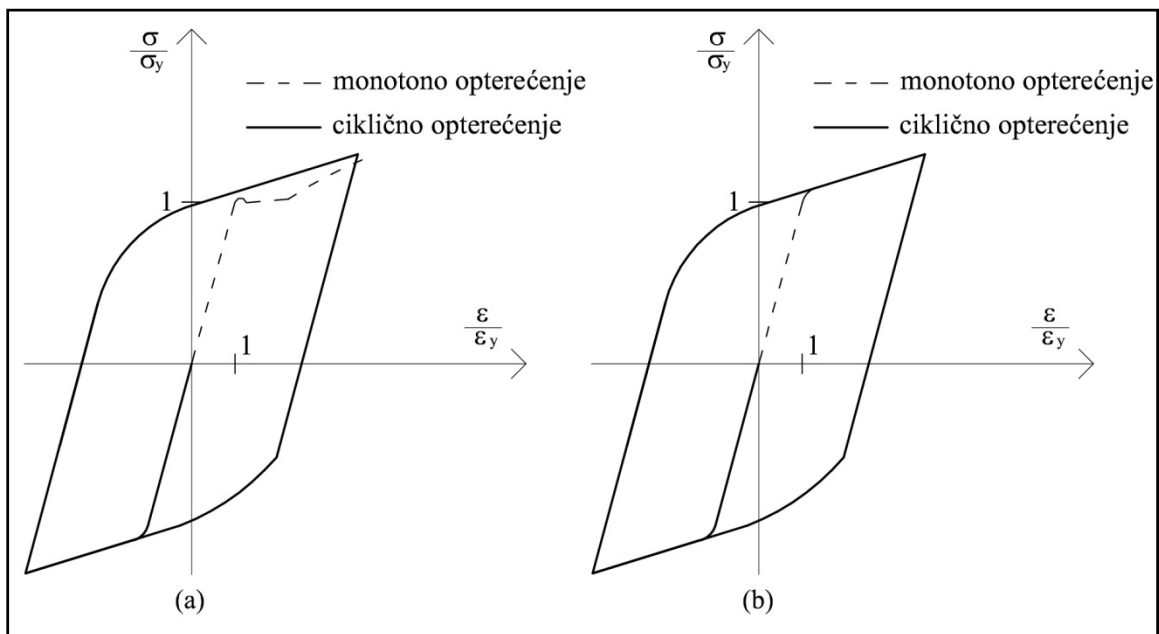
measure) koje ne zavisi od realnog vremena već od odgovarajuće mere deformacije [1] ili neke druge veličine. Za definisanje viskoplastičnog ponašanja materijala, konstitutivni modeli bez postojanja površi tečenja su razvijani i pristupom jedinstvene viskoplastičnosti (unified viscoplasticity) [2].

Slična podela se može definisati ukoliko se posmatra zavisnost trenutnog stanja materijala od trenutne vrednosti posmatranih promenljivih i uticaja celokupne prethodne istorije tih posmatranih promenljivih. U ovom kriterijumu podele, nepostojanje naslednih funkcija [1] definiše prvu grupu, koju između ostalih čine klasične teorije plastičnosti Prager-a, Armstrong-a [3]–[5] sa svojim originalnim radovima i modifikacijama koje su predložili Chaboche, Ohno i Wang [6][7][8] i drugi. Takođe ovoj grupi pripadaju i teorije sa unutrašnjim promenljivama od kojih je najpoznatija teorija generalisane plastičnosti Lubliner-a [9]. Drugoj grupi teorija plastičnosti pripadaju teorije koje stanje u materijalu određuju, ne samo na osnovu vrednosti trenutnih promenljivih koje su definisane odgovarajućim modelom, već i od prethodne istorije tih promenljivih. Prema [10], u drugu grupu, pored teorije predstavljene u [1], spadaju i grupe modela histerezisa tipa Bouc-Wen [11][12], koji će biti upoređivan sa Prajzakovim modelom histerezisa [13] korišćenim u ovoj disertaciji. S obzirom na karakteristike ovog (Prajzakovog) modela histerezisa, prikazanim u radovima Lubarde, Šumarca i Krajčinovića [14], [15], može se reći da pripada drugoj grupi teorija plastičnosti prema prethodno definisanoj podeli. Bouc-Wen-ov model histerezisa, jedan od najzastupljenijih modela koji se koristi u numeričkim problemima analize konstrukcija, je usavršavan i analiziran u odnosu na teoriju koju je predložio Valanis, kao što je prikazano u doktoratu Erlicher-a [16]. Sa druge strane, Prajzakov model histerezisa nije još uvek, sa teoretskih aspekata, u dovoljnoj meri u literaturi analiziran u odnosu na postojeće teorije plastičnosti, niti je formiran odgovarajući numerički model za elastoplastičnu analizu konstrukcija, a to je bio predmet istraživanja ove doktorske disertacije.

1.2.2 Fenomeni ciklične plastičnosti

Kao što je prikazano na slici 1.1, u opštem slučaju, mogu da se jave razlike kod naponsko-deformacijskih kriva konstrukcionog (ugljeničnog) čelika pri monotonom opterećenju, i

odgovarajućih kriva kod legiranih čelika gde se histerezisna petlja pri cikličnom opterećenju u velikoj meri poklapa sa naponsko-deformacijskom krivom pri monotonom opterećenju.

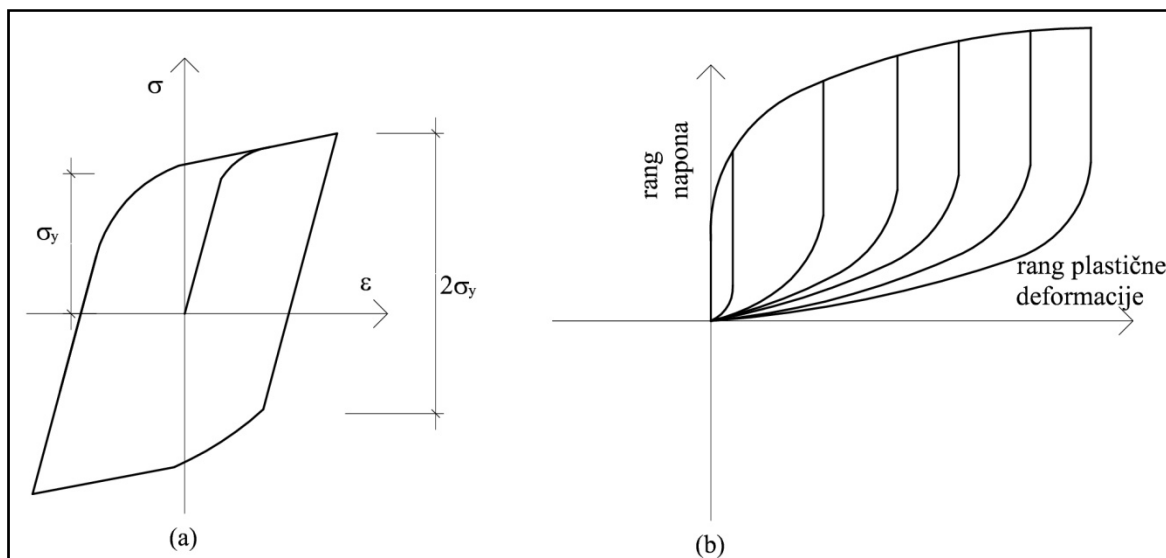


Slika 1.1(a) Dijagrami napon-deformacija za ugljenični čelik; (b) Dijagrami napon-deformacija za legirani čelik

Ciklična plastičnost analizira nelinearno ponašanje materijala (materijalna nelinearnost u obliku nelinearne veze napona i deformacija) pri cikličnom opterećenju. Ponašanje materijala koji se koriste u metalnim konstrukcijama je u tom slučaju rezultat složenih promena u mehanizmima kristalne rešetke, pojave, propagacije prslina koje vodi do konačnog loma materijala pa je usled kompleksnosti mehanizama na mikro-nivou još uvek teško opisati konvencionalnim teorijama plastičnosti tačno ponašanje materijala na makro-nivou [17], dok gradijentne teorije kristalne plastičnosti i teorije diskretnih dislokacija nisu numerički pogodne za analizu konstrukcija. Fenomeni koji su karakteristični za cikličnu plastičnost metala [18] i koji se mogu javiti kod drugih materijala koji se koriste u analizi konstrukcija (beton, tlo, stene) su predstavljeni na slikama: 1.1, 1.2, 1.3 i 1.4. Pošto je u ovoj disertaciji razmatrano samo jednoosijalno naponsko stanje, fenomeni koji nastaju torzionim i smičućim deformacijama, kao i višekasijalno naponsko stanje, nisu uzeti u

obzir. Najveći broj fenomena ciklične plastičnosti se može javiti kod jednoosijalnog naponskog stanja u metalima. "Pošto su veze između makroskopskih plastičnih deformacija i mikro-mehanizama kvalitativne po prirodi, može se reći da su teorije na makro-nivou još uvek fenomenološke po prirodi. Posledica toga je da je veoma teško tačno opisivanje histerezisnih eksperimentalnih krivih, čak i u slučaju homogenih, izotropnih materijala u jednoosijalnom naponskom stanju" [17]. Fenomene ciklične plastičnosti koji se mogu javiti u elementima konstrukcija je najlakše uočiti tokom eksperimenata kontrolisane deformacije ili kontrolisanog napona tokom jednog konstantog koraka opterećenja ili nekoliko koraka sa različitim amplitudama.

Baušingerov efekat (slika 1.2(a)) je fenomen karakterističan za cikličnu plastičnost i predstavlja pojavu da se granica tečenja povećava u smeru plastičnog tečenja, a opada u suprotnom smeru [18]. Ukoliko je granica tečenja σ_y , plastične deformacije se javljaju nakon prelaska ove granice za materijal koji je do odgovarajućeg trenutka bio samo u elastičnom domenu. Kada opterećenje promeni znak, material se ponovo ponaša elastično segmentom koji je dužine $2\sigma_y$. Kao posledica ojačanja, napon pri kojem se ponovo javljaju plastične deformacije u suprotnom smeru je manji od σ_y , ili veći od $-\sigma_y$ [17].



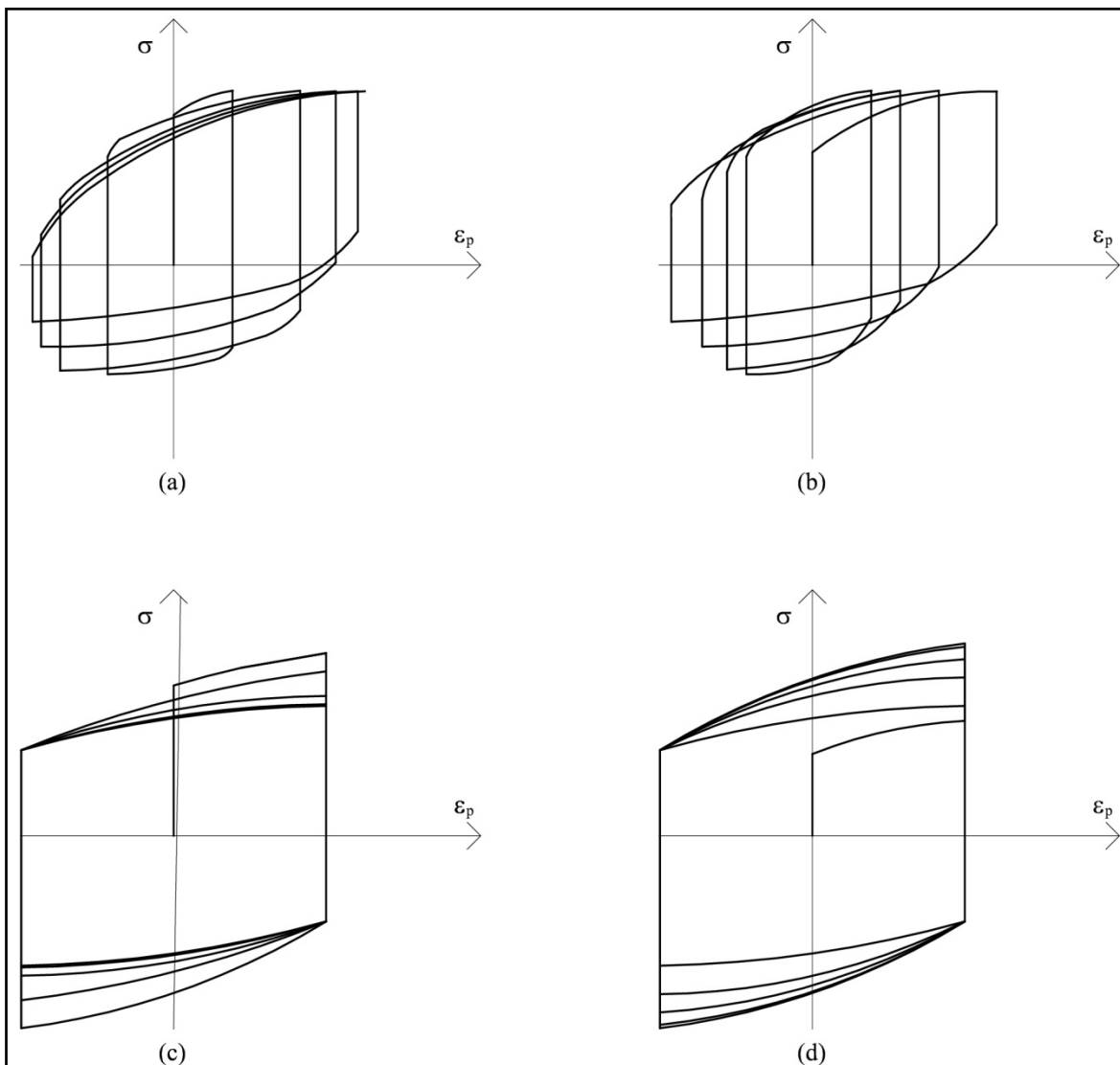
Slika 1.2 (a) Baušingerov efekat; (b) Masing-ov tip ponašanja

Ukoliko se prilikom različitih amplituda opterećenja (deformacije), nakon poklapanja donjih pikova grana histerezisnih dijagrama, javi i poklapanje gornjih grana, materijal pokazuje Masing-ov tip ponašanja. Slika 1.2(b) prikazuje rang napona, odnosno plastične deformacije. Rang napona se odnosi na ukupnu (zbirnu) meru pozitivne i negativne vrednosti napona, odnosno deformacije. Takvo (Masing) ponašanje materijala pokazuje stabilne mikrostrukture u procesu zamora [18]. Mnogi materijali pokazuju ovakav tip ponašanja pod određenim uslovima ali ipak većina metala nema tu osobinu, i kod takvih metala, takva osobina se naziva i efekat ranga deformacije (strain-range effect), odnosno ponašanje takvih materijala zavisi od amplitude opterećenja [17].

Ciklično ojačanje i omekšanje je rezultat promena u mikrostrukтури materijala i rezultira povećanjem ili smanjenjem otpornosti materijala prilikom deformisanja u plastičnom domenu [18]. Omekšanje materijala pri cikličnom opterećenju je rezultat oštećenja materijala, odnosno pojave prslina. Ciklično ojačanje i omekšanje (slika 1.3) u velikoj meri zavisi od prethodne istorije deformacije i amplitude cikličnog opterećenja kao što je prikazano u [17] i najčešće je izraženije u početnim fazama cikličnog opterećenja ciklusa sa konstantnom amplitudom.

U slučaju eksperimenata sa nesimetričnim kontrolisanim naponom u plastičnom domenu, materijali zavisno od svoje strukture i amplitude opterećenja prikazuju neki od "shakedown" efekata. U slučaju da se nakon prelaska granice plastičnosti, materijal podvrgne takvim ciklusima opterećenja da nema povećanja ni smanjenja plastičnih deformacija, odnosno ako se ponaša elastično, možemo da kažemo da se javlja „elastic shakedown” efekat. Ukoliko su ciklusi opterećenja nakon ulaska u plastični domen takvi da se javljaju promene plastičnih deformacija koje se poništavaju, odnosno formira se zatvorena histerezisna petlja, možemo da kažemo da se javlja (stabilizovani) "plastic shakedown" efekat. Ciklično tečenje (strain ratcheting) se javlja ukoliko dolazi do akumulacije plastičnih deformacija pri ciklusima opterećenja konstantne amplitude, bez pojave oštećenja. Ovo je jedan od najsloženijih fenomena ciklične plastičnosti, a proučavan kroz veliki broj eksperimenata [19], [6], [20], [21], kao i kroz pokušaje definisanja modela ciklične plastičnosti koje prikazuju ovaj fenomen [22], gde je pokazano da ovaj fenomen

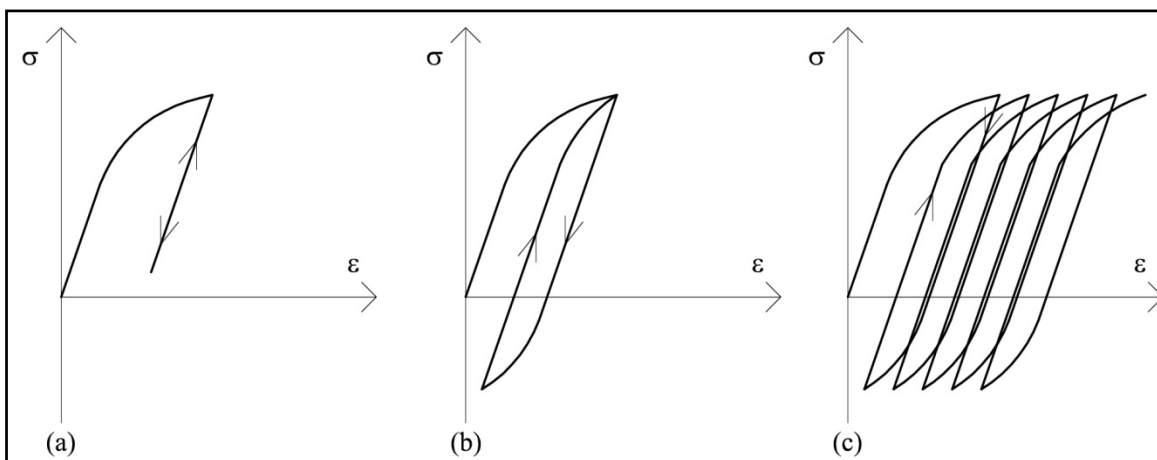
zavisi od istorije i amplitude opterećenja. Smanjenje brzine cikličnog tečenja (ratcheting rate decay) je čest slučaj koji prati ovaj fenomen, a različite istorije i amplituda opterećenja mogu da dovedu i do akumulacije plastične deformacije suprotnog znaka od znaka glavnog napona.



Slika 1.3 (a) Ciklično omekšanje – konstantan napon; (b) Ciklično ojačanje – konstantan napon; (c) Ciklično omekšanje – konstantna deformacija; (d) Ciklično ojačanje – konstantna deformacija

Ovaj fenomen se ne može direktno povezati sa izotropnim i klasičnim tipovima ojačanja, već zbog svoje specifičnosti sa ojačanjem cikličnog tečenja (ratcheting hardening) [17].

Pristup koji tretira shakedown ponašanje materijala je i pristup prikazan u radovima Melan-a i Koiter-a [23], [24], korišćenjem graničnih teorema.



Slika 1.4(a) Elastic shakedown ponašanje; (b) Plastic shakedown ponašanje; (c) Ciklično tečenje – "ratcheting".

Relaksacija glavnog napona je fenomen koji se javlja kod slučajeva nesimetričnog opterećenja u vidu kontrolisane deformacije i zavisi od magnitude plastičnih deformacija. Ovaj fenomen je sličan cikličnom omekšanju, ali nije isti a javlja se i kod ciklično stabilnih materijala. Ogleda se u pojavi da se povećanjem broja ciklusa, srednji napon sve više teži nuli.

1.3 KLASIČNA TEORIJA PLASTIČNOSTI

Počevši od idealizacije plastičnog ponašanja materijala, definisani su matematički modeli koji koriste, pored granice tečenja, i uslove tečenja (i ojačanja):

$$\sigma = \sigma(\varepsilon_p) \quad (1.1)$$

gde je σ napon u nekoj tački materijala, a ε_p plastična deformacija, ali u opštem slučaju može biti i neki drugi parameter deformacije ili napona. U opštem slučaju uslov tečenja se definiše kao matematička veza između komponenti tenzora napona u posmatranoj tački materijala, koja mora da bude zadovoljena da bi došlo do plastičnog tečenja materijala:

$$f^p(\sigma_{ij}, C_{ij}) = 0 \quad (1.2)$$

Gde je f^p funkcija tečenja a C_{ij} konstanta tečenja u odgovarajućem pravcu naponskog prostora. U naponskom trodimenzionalnom prostoru funkcija f^p predstavlja površ tečenja, koja ima oblik koji zavisi od uslova tečenja, kao i uslova ojačanja ako postoji:

$$\begin{aligned} f^p < 0 & \quad \text{elastično ponašanje} \\ f^p = 0 & \quad \text{plastično ponašanje} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Površ tečenja u klasičnoj plastičnosti najčešće predstavljaju matematičke površi u naponskom prostoru, a idealno plastičan materijal predstavlja granični slučaj za modeliranje materijala u naponskom prostoru. Pored naponskog prostora, moguće je definisati na sličan način pristup koji definiše plastično ponašanje materijala u deformacijskom prostoru, što je naročito značajno za definisanje osnovnih principa teorije oštećenja u kontinuumu. U radovima Ilyushin-a, Owen-a i Lubliner-a [25]–[27] su prikazani pojmovi i promenljive koje su analogne odgovarajućim pojmovima iz naponskog prostora.

Većina trodimenzionalnih teorija za analizu plastičnog ponašanja materijala mogu se tretirati kao generalizacija nekih idealizovanih dijagrama napon-deformacija pri jednoosijalnom opterećenju, odnosno generalizacija odgovarajućih mehaničkih modela.

Uslovi tečenja kao matematički modeli eksperimentalnog ponašanja materijala u plastičnom domenu su razvijani od Tresca-e [28], preko Von Mises-a [29], a koji predstavljaju uslove tečenja nezavisne od glavnog napona u materijalu, dok je generalizaciju Von Mises-ovog uslova tečenja za anizotropne materijale predstavio Hill [30]. Za opisivanje plastičnosti materijala kao što su tlo, stene, beton neophodan je kriterijum glavnog napona, pa se od teorija sa ovim kriterijumom istorijski najpoznatije Mohr-Coulomb-ova i Drucker-Prager-ova koje koriste kao kriterijum smičući i normalni napon.

Kod idealno plastičnog materijala, površ tečenja se ne menja u toku plastične deformacije, a materijal je elastičan dok se ne ispuni uslov tečenja. Ukoliko matematički model ima

mogućnost da definiše promene na površi tečenja, onda je moguće i zakonom o ojačanju materijala definisati elastoplastično-ponašanje materijala, za napone veće od napona na granici tečenja. Za različite uslove tečenja, kao što predstavljaju i prethodno pomenuti modeli plastičnosti, može biti definisano ojačanje. Dva osnovna tipa ojačanja su izotropno (kod kojeg dolazi do širenja površi tečenja), kinematičko ojačanje (kod kojeg dolazi do translacije površi tečenja) pomoću koga je moguće modelirati i mešovito ojačanje, kao i Baušingerov efekat. Kao posledica toga, kinematičko ojačanje ima i mogućnost da opiše ponašanje materijala u plastičnom domenu pri cikličnom opterećenju. Posmatrajući oblik naponsko-deformacijskog dijagrama, može se reći da ojačanje može biti linearno i nelinearno.

Prager [31] je predložio definisanje linearnog kinematičkog ojačanja (translaciju površi tečenja) preko razvoja (evolucije) "backstress"-a prema izrazu:

$$d\alpha_{ij} = c \cdot d\varepsilon_{ij,p} \quad (1.4)$$

gde je α_{ij} mera translacije površi tečenja odnosno koordinate centra površi tečenja, c konstanta, a $d\varepsilon_{ij,p}$, brzina promene efektivne plastične deformacije. Poboljšani model ojačanja koji omogućava nelinearnost naponsko-deformacijske krive su predložili Armstrong i Frederick [4]. Ovakav model omogućava i pojavu Baušingerovog efekta u multiaksijalnom naponskom stanju, a zasniva se na pretpostavci da na ponašanje materijala presudan uticaj ima vremenski najbliža (najskorija) istorija deformacije:

$$d\alpha_{ij} = \frac{2}{3} c_1 \cdot d\varepsilon_{ij,p} - c_2 \cdot \alpha_{ij} \cdot \dot{p} \quad (1.5)$$

gde su c_1 i c_2 konstante materijala a \dot{p} promena akumulirane plastične deformacije:

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij,p} \cdot d\varepsilon_{ij,p}} \quad (1.6)$$

Wang i Ohno [7] su predložili multilinearano kinematičko ojačanje koje se zasniva na modelu Armstrong i Frederick-a. Mroz-ovi [32] modeli koriste veliki broj promenljivih za

opisivanje cikličnog tečenja, a ojačanje je definisano sa nekoliko koncentričnih površi. Dafalias-Popov model [33] koristi samo dve površi, površ tečenja i graničnu površ, a nelinearno kinematičko ojačanje se definiše kontinualnim variranjem modula ojačanja, što dovodi do translacije površi tečenja. Chaboche [6] je uveo i novi član u dekompoziciji kinematičkog ojačanja, koji simulira konstantno linearno ojačanje do odgovarajuće granice nakon koje ojačanje ponovo postaje nelinearno.

Najčešće se na osnovu odgovarajućeg modela plastičnosti, konstitutivno ponašanje materijala definiše na nivou priraštaja napona i deformacija. Zbog toga se i odgovarajuće teorije zovu inkrementalne teorije plastičnosti. Generalizacijom pristupa se dolazi do konstitutivnih jednačina koje u slučaju idealno elastoplastičnog ponašanja materijala predstavljaju Prandtl-Reuss-ove, a u slučaju kruto-plastičnog ponašanja Levy-Mises-ove. Za materijale sa ojačanjem čiji su modeli navedeni u ovom poglavlju, modeliranje ponašanja u plastičnom domenu se najčešće definiše preko Drucker-ovog postulata odnosno pravila normalnosti. Analogni postulat u deformacijskom prostoru je Ilyushin-ov, odnosno pravilo normalnosti na deformacijsku površ. Na osnovu odgovarajućeg postulata i definisanja plastičnog potencijala, generalizacijom, mogu se dobiti opšte konstitutive jednačine neviskozne plastičnosti na osnovu kojih se definiše i osnovni model elastoplastičnog ponašanja materijala u metodi konačnih elemenata [34].

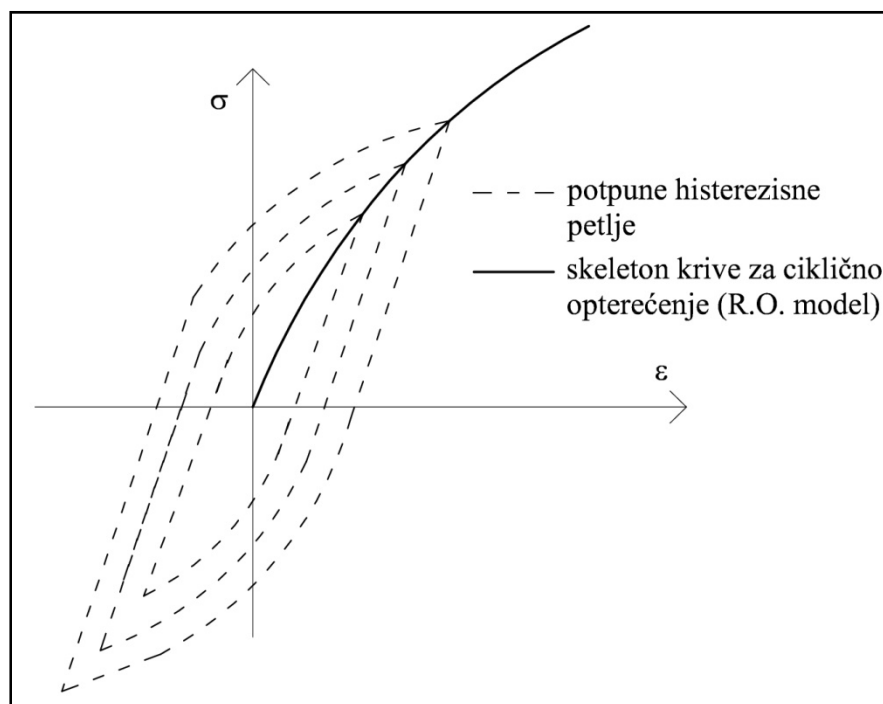
U radu Bažant-a [35] se analiziraju odnosi "endochronic" teorije i inkrementalne plastičnosti, ali bez detaljne termodinamičke analize, jer se termodinamički aspekti ovih teorija ogledaju u ograničenjima i restrikcijama ovih teorija. U "endochronic" teoriji plastičnosti, iako ne postoji elastični domen, moguća je podela deformacije na elastični i plastični deo. Pseudopotencijal je u ovoj teoriji kvadratna funkcija [35] unutrašnje promenljive (deformacije), a osobina rate-independence se postiže uvođenjem pojma "unutrašnje mere vremena", koje za najjednostavniji slučaj (jednoaksijalnog naponskog stanja) može da se predstavi kao:

$$db = |d\varepsilon| \geq 0 \tag{1.7}$$

Pa "unutrašnja mera vremena" postaje akumulirana ukupna deformacija, mada postoje i uopštenije definicije za ovu meru vremena. U radu Erlicher-a [16] je prikazano da glavni zakoni termodinamike važe i za ovu teoriju. Kao i u klasičnoj teoriji plastičnosti, i u "endochronic" teoriji se odabirom različitih unutrašnjih promenljivih i njihovom odnosu prema "unutrašnjoj meri vremena" mogu dobiti odgovarajući analogni modeli mehaničkog ponašanja materijala, pa i histerezisni model Bouc-Wen tipa.

1.4 DRUGI JEDNOAKSIJALNI MODELI PLASTIČNOSTI

Za analizu konstrukcija u jednoaskijalnom naponskom stanju se pored modela klasične ciklične plastičnosti, u literaturi koriste i drugi pristupi. Jedan od najšire primenjenih



Slika 1.5 Ramberg-Osgood-ov model (prikazan punom linijom)

zbog svoje jednostavnosti je Ramberg-Osgood-ov model [36], koji je modifikovan od Mirambell-a [37] i drugih za napone iznad granice $\sigma_{0,2}$ (napon pri deformaciji od 0.2%).

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K \cdot \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n \quad \text{za monotono opterećenje}$$

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\Delta \sigma}{2E} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \sigma}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad \text{za ciklično opterećenje} \quad (1.8)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad \text{za simetrično ciklično opterećenje}$$

U izrazu **(1.8)**, K , K' , n i n' su konstante, a E modul elastičnosti. Ramberg-Osgood-ov model za ciklično opterećenje definiše granicu histerezisne krive u zatezanju (pritisku), a ne ponašanje tokom celokupnog ciklusa opterećenja i rasterećenja, odnosno σ i ε u izrazu **(1.8)** predstavljaju granice (pikove) naponsko-deformacijske krive.

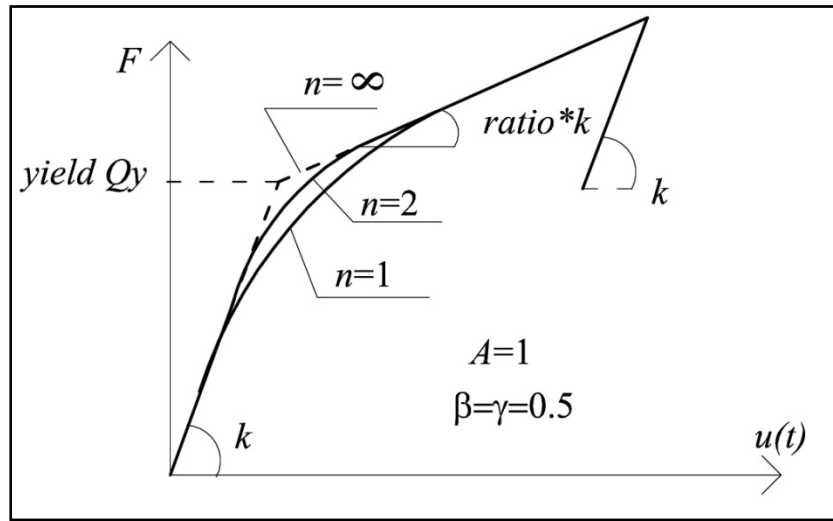
Veliku grupu jednodimenzionalnih modela ciklične plastičnosti predstavljaju jednodimenzionalni histerezisni modeli [38], od kojih se izdvajaju modeli koji omogućavaju glatki prelaz između elastičnog i plastičnog domena.

Od histerezisnih modela koji se zasnivaju na diferencijalnim jednačinama, posebno je koristan i prepoznatljiv Bouc-Wen-ov model koji se može opisati diferencijalnom jednačinom:

$$F(t) = \text{ratio} \cdot k \cdot u(t) + (1 - \text{ratio}) \cdot k \cdot z(t)$$

$$\dot{z}(t) = A \cdot \dot{u}(t) - \beta \cdot \text{sign}(z \cdot \dot{u}(t)) \cdot |z(t)|^n \cdot \dot{u}(t) - \gamma \cdot \dot{u}(t) \cdot |z(t)|^n \quad (1.9)$$

gde je $F(t)$ sila a $u(t)$ pomeranje sistema. ratio je odnos krutosti pre (elastična krutost k) i posle pojave plastičnog tečenja, a $z(t)$ je histerezisna promenljiva i ima dimenziju dužine. Parametri A , α , β , γ i n (slika 1.6) definišu nagib, amplitude i oblik histerezisne krive sila-



Slika 1.6 Bouc-Wen – ov model (modifikovan) za slučaj da su parametri $A=1$, $\beta=\gamma=0.5$.

pomeranje. Bouc-Wen-ov model je usavršavan i proširivan za probleme višeaksijalnog naponskog stanja, a različite analize ovog modela su pokazale da može da se svede na model "endochronic" plastičnosti [16].

Može se reći da je Masing [39] prvi predstavio koncept modela raspodeljenih elemenata (Distributed Element Model – DEM) iako je taj termin uveo Iwan [40]. Dakle, određivanje ekvivalentnih sistema za definisanje histerezisa je još jedan od modela kojima može da se definiše ciklična plastičnost pri jednoaksijalnom stanju. Georg Masing je sa modelom koji se sastoji od niza (10 elemenata) paralelnih elasto-idealno plastičnih elemenata koji imaju različitu granicu tečenja, bez opšteg, analitičkog izraza modelirao Baušingerov efekat, ali samo do određenog nivoa. U svom originalnom radu [39] Masing je predložio da se kriva sila – pomeranje pri inicijalnom opterećenju definiše opštom funkcijom

$$f(r,x)=0 \tag{1.10}$$

gde je r sila a x pomeranje sistema. Rasterećenje i ponovno opterećenje su geometrijski slični sa inicijalnim opterećenjem, uz produženje krive 2 puta na sledeći način:

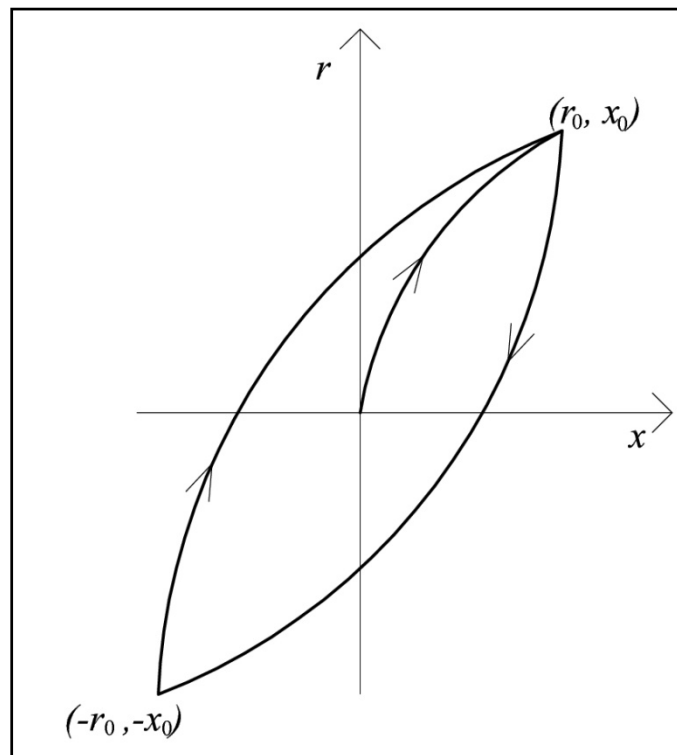
$$f\left(\frac{r-r_0}{2}, \frac{x-x_0}{2}\right)=0 \tag{1.11}$$

gde je (x_0, r_0) tačka rasterećenja na odgovarajućoj grani rasterećenja histerezisne krive, pa funkcija f mora da zadovolji:

$$f(-r, -x) = f(r, x) \quad (1.12)$$

odnosno histerezisna kriva simetrična u odnosu na početak.

Dakle, ukoliko funkcija u nekom trenutku dostigne deo krive koji je već opisan, funkcija f nastavlja dalje istom putanjom krive. Masing je sa ovim modelom i formom koju histerezis mora da zadovolji, definisao Masing-ovu hipotezu ili Masing-ov tip ponašanja.



Slika 1.7 Masing-ova histerezisna kriva pri cikličnom opterećenju

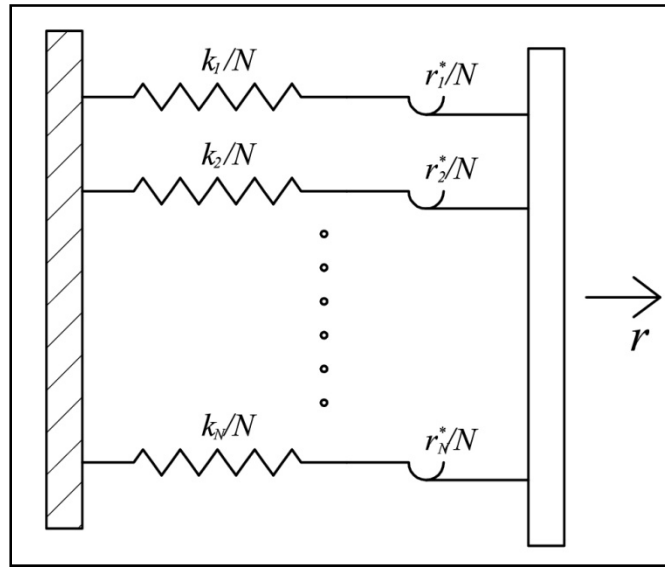
Originalna Masing hipoteza je pogodna za slučajeve "steady-state" odgovora, dok je za "transient" analizu, odnosno za opterećivanje između proizvoljnih granica, Jayakumar [41] predložio proširenje Masing-ove hipoteze sa dva histerezisna pravila [42].

Iwan (1966) je predstavio "Distributed Element Method" (DEM) koncept preko N elemenata, koji predstavljaju serijsku vezu opruge i kliznog elementa (Coulomb-ov

element) povezanih paralelno [43], a koji u specijalnom slučaju imaju istu krutost (k_i/N), a različite granice tečenja r_i^*/N :

$$r = \sum_{i=1}^n \frac{r_i^*}{N} + \sum_{i=n}^N \frac{k_i}{N} \cdot x \quad (1.13)$$

gde je r ukupna sila, x ukupno pomeranje sistema, a n broj elemenata u stanju plastičnosti. Za veliko N , i uvođenjem funkcije raspodele $\phi(r^*)$, gde $\phi(r^*)dr^*$ predstavlja deo ukupnog broja elemenata koji imaju granicu tečenja $r^* < r_i^* < r^* + dr^*$, ukupna sila r se dobija kao:



Slika 1.8 DEM model za jednoaksijalno histerezisno ponašanje

$$r = \int_0^{kx} r^* \cdot \Phi(r^*) dr^* + kx \int_{kx}^{\infty} \Phi(r^*) dr^* \quad (1.14)$$

$$\int_0^{\infty} \Phi(r^*) dr^* = 1$$

U radu [44] je prikazano da su Iwan-ovi modeli generalizacija Masing-ovih modela, odnosno da se svi Masing-ovi modeli mogu predstaviti kao paralelno-serijski Iwan-ov model sa odgovarajućom funkcijom raspodele.

U svom radu [45] Asaro je analizirao elastoplastično ponašanje materijala sa stanovišta mehanizama koji se događaju na mikro nivou metala koristeći klasičan pristup. Kinematičko ojačanje, koje može da ima više formi i nivoa analize, je predstavio sa memorijskim sekvencama i vrednostima koje imaju povratni (recovery) karakter.

Iako su sa stanovišta oblika histerezisne krive prisutni i poligonalni modeli (Clough-ov model [46], Takeda model [47], Park-ov troparametski model [48] i slični) sveobuhvatniju i tačniju analizu pružaju modeli sa glatkim prelazom između linearnog (elastičnog) i nelinearnog (plastičnog) ponašanja (pomenuti ranije) koji su predmet analize u poglavlju 2. i 3.

Za definisanje ciklične plastičnosti sa Prajzakovim modelom histerezisa se koriste slični principi kao kod Masing-ovog i Iwan-ovog modela, kao što je prikazano u poglavlju 3.1 i 3.2.

1.5 PREGLED PROCEDURA ZA ELASTOPLASTIČNU ANALIZU LINIJSKIH NOSAČA

Cilj plastične analize je da se iskoristi nosivost materijala i nakon granice elastičnosti i da se izvrši redistribucija unutrašnjih sila. Za analizu linijskih nosača se najčešće koriste modeli koncentrisane plastičnosti (plastičnih zglobova) zbog svoje prednosti, u pogledu jednostavnosti i numeričke efektivnosti, u odnosu na modele raspodeljene plastičnosti (plastičnih zona).

U metodi plastičnih zona (za koju se smatra da daje tačno rešenje) i sam linijski element, kao i odgovarajući poprečni preseki se dele na više manjih elemenata odnosno vlakna kako bi se postepena plastifikacija mogla modelirati. Iako postoje i dvodimenzionalne i trodimenzionalne metode plastičnih zona, one su nepraktične za analizu konstrukcija, jer je čak i kod jednodimenzionalne analize (gredni i rešetkasti elementi) proračun zahtevan sa numeričke tačke gledišta i ograničen na specifične analize.

Postoje i pristupi koji predstavljaju prelaz sa metode plastičnih zona na metodu plastičnih zglobova kao i proširena metoda plastičnih zglobova, koja nastaje povećanjem tačnosti

metode plastičnih zglobova, uvođenjem raspodeljene plastičnosti duž odgovarajućih poprečnih preseka u linijskom elementu.

Metoda plastičnih zglobova je jednostavna i efektivna metoda u elastoplastičnoj analizi linijskih nosača. Elementi su elastični osim na krajevima gde se mogu razviti plastični zglobovi. U ovoj metodi se znatno mogu razlikovati rezultati teorije prvog u odnosu na teoriju drugog reda. Za posebne slučajeve, kada ne postoji uticaj velike normalne sile u linijskom elementu (dominantno savijanje grednog elementa), ovaj metod pruža dobre rezultate u poređenju sa odgovarajućim rezultatima metode plastičnih zona.

Osnovna teorema plastične analize konstrukcija je teorema granične analize kod koje je takođe moguće formiranje plastičnog zgloba u odgovarajućim čvorovima nosača u kojima se dostiže granica plastičnosti u materijalu. Koncept granične teorije plastičnosti je inženjerski pristup kompleksnom problemu analize koji često ima inkrementalni i iterativni karakter. Koristeći više metoda, moguće je odrediti granično opterećenje, koje ne služi samo odrednica za projektovanje, već i kao ulazni podatak za kompleksniju analizu [49]. Granično opterećenje u osnovnim teoremama granične analize predstavlja opterećenje pri kome dolazi do formiranja mehanizma u idealizovanoj konstrukciji – modelu koji nema mogućnost da uzme u obzir i fenomene ciklične plastičnosti materijala, pa u zbog toga ova metoda nije pogodna za elastoplastičnu analizu linijskih nosača pri cikličnom opterećenju.

Modeli koji treba da opišu ponašanje materijala u plastičnom domenu pri cikličnom opterećenju mogu da budu veoma složeni kako bi uspeali da opišu fenomene ciklične plastičnosti čak i pri jednoosijalnom slučaju opterećenja.

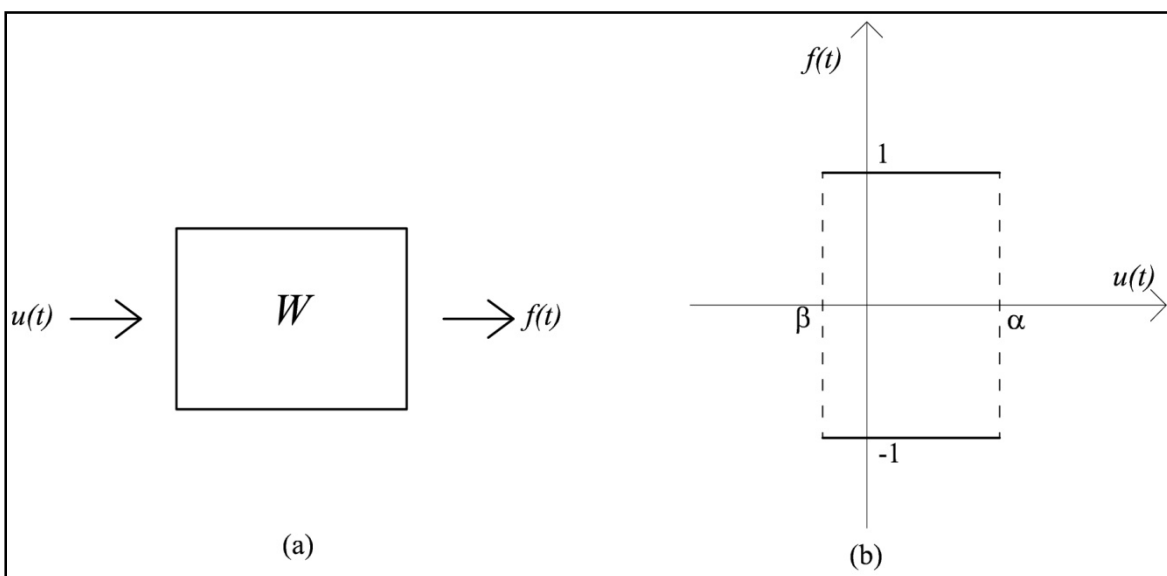
Za jednoosijalno naponsko stanje, odnosno za modeliranje plastičnog ponašanja materijala linijskih nosača (grednih i rešetkastih), koriste se najčešće algoritmi iz metode konačnih elemenata, definisani sa konstitutivnim jednačinama teorije plastičnosti, sa odgovarajućom grednom teorijom koja može da uzme u obzir uticaj (Timoshenko-va gredna teorija ili teorije višeg reda) smičućih deformacija na ponašanje materijala ili da ih zanemari (Euler-Bernoulli-jeva gredna teorija). U radovima [50]–[53] prikazani neki od modela za elastoplastičnu analizu linijskih nosača. Za elastoplastičnu analizu linijskih nosača pri cikličnom opterećenju se koriste i modeli klasične plastičnosti ([33], [32], [27] i drugi),

modeli bez površi tečenja (Bouc-Wen-ov model), modeli matematičkog programiranja (MP) u analizi konstrukcija ([54]), kao i mnogi drugi modeli.

2 HISTEREZISNI OPERATORI

Histerezijsni operatori, kao vrsta matematičkih operatora, daju izlaz (odgovor), na osnovu ulaza (pobude), nezavisno od vrste fizičkog procesa koji opisuju.

Naziv histerezis potiče od identične grčke reči, koja označava kašnjenje, odlaganje. Histerezis je fenomen koji se javlja u fizičkim procesima čija je analiza od značaja i za inženjere i za naučnike. To je pojava kada je za dati spoljašnji parameter ili dejstvo na sistem, moguć različit broj odgovora sistema, odnosno unutrašnjeg stanja, a jedinstven



Slika 2.1(a) „Black-box“ pristup u definisanju histerezijskih operatora; (b) Formiranje odgovora kod diskontinualnih "delayed-relay" elementarnih operatora

odgovor je određen uzimanjem u obzir i prethodne istorije dejstava na sistem. Fizički procesi u kojima se javlja histerezis su magnetizam, filtracija kroz porozne materijale, mehanička oštećenja, plastičnost, a javlja se čak i u ekonomiji.

Mnogi histerezisni operatori se zbog svog matematičkog koncepta mogu definisati kao kombinacija "black – box" pristupa i delimičnog poznavanja fizičkog značenja sistema kod kojeg se javlja histerezis [55].

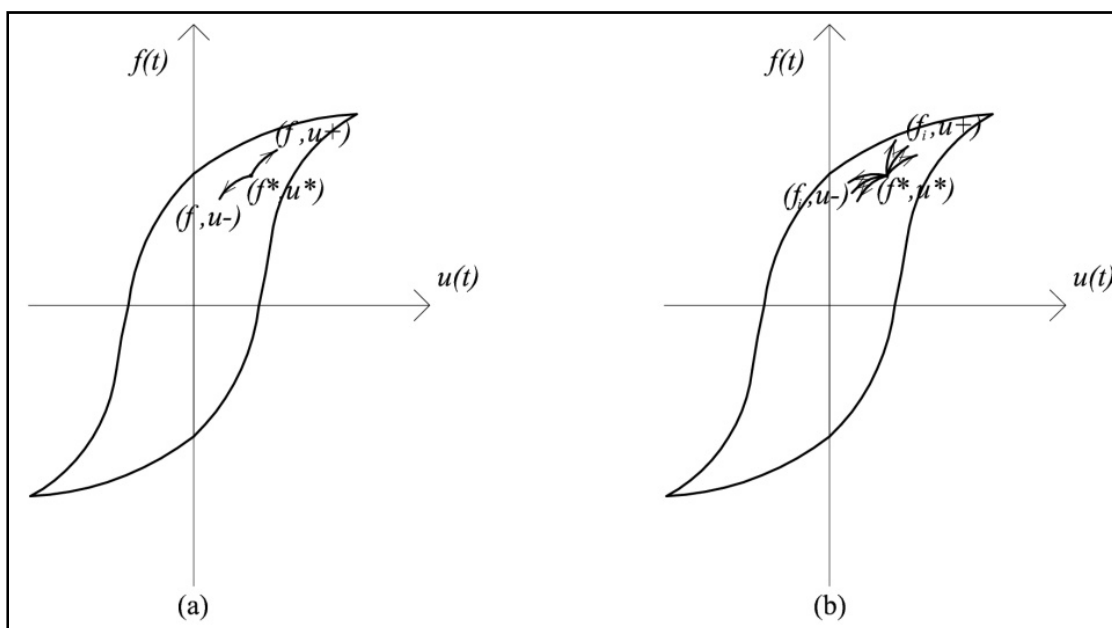
Histerezisni operatori mogu u opštem slučaju da zadovoljavaju različit broj osobina kao što su monotonost, uzročnost, osobine brisanja (wiping out property) i druge, ali da bi se smatrali za histerezisne operatore moraju da imaju memoriju i da nisu zavisni od brzine promene unosa (rate- independent ponašanje).

Za definisanje odgovarajućih modela, potrebna je matematička analiza histerezisa. Od matematičkih modela histerezisa modeli Prandtl-Ishlinskii, Preisach (Prajzak) i Duhem modeli su zbog svojih osobina posebno proučavani i primenjivani kako u elastoplastičnoj analizi, tako i za modeliranje drugih fizičkih procesa u kojima se javlja histerezis. U ovoj disertaciji su rezultati primene predmetnog histerezisnog operatora (Prajzakov model), u modeliranju plastičnosti materijala, poređeni sa odgovarajućim rezultatima Bouc-Wen-ovog modela histerezisa [11] koji pripada grupi Duhem histerezisnih operatora.

2.1 OSNOVNI POJMOVI HISTEREZISNIH OPERATORA

Sa matematičke tačke gledišta, histerezisni operatori se mogu klasifikovati prema kontinualnosti funkcije operatora, odnosno ulaza i izlaza, na diskontinualne i kontinualne. Kod diskontinualnih operatora (slika 2.1 (b)) se javlja diskontinuitet fizičkog parametra, ali i pored toga, kao što će biti prikazano kod (kontinualnog) Prajzakovog modela, on se definiše kao beskonačna grupacija diskontinualnih "delayed-relay" elementarnih operatora [56].

Druga klasifikacija se odnosi na takozvanu dimenziju memorije histerezisnog operatora i na osnovu toga se dele na histerezisne operatore sa lokalnom (Markovian) i nelokalnom memorijom (non-Markovian). Kod histerezisnih operatora sa lokalnom memorijom, stanje izlaza $f(t)$ je određeno trenutnim stanjem ulaza $u(t)$, a kao posledica toga, stanje bilo



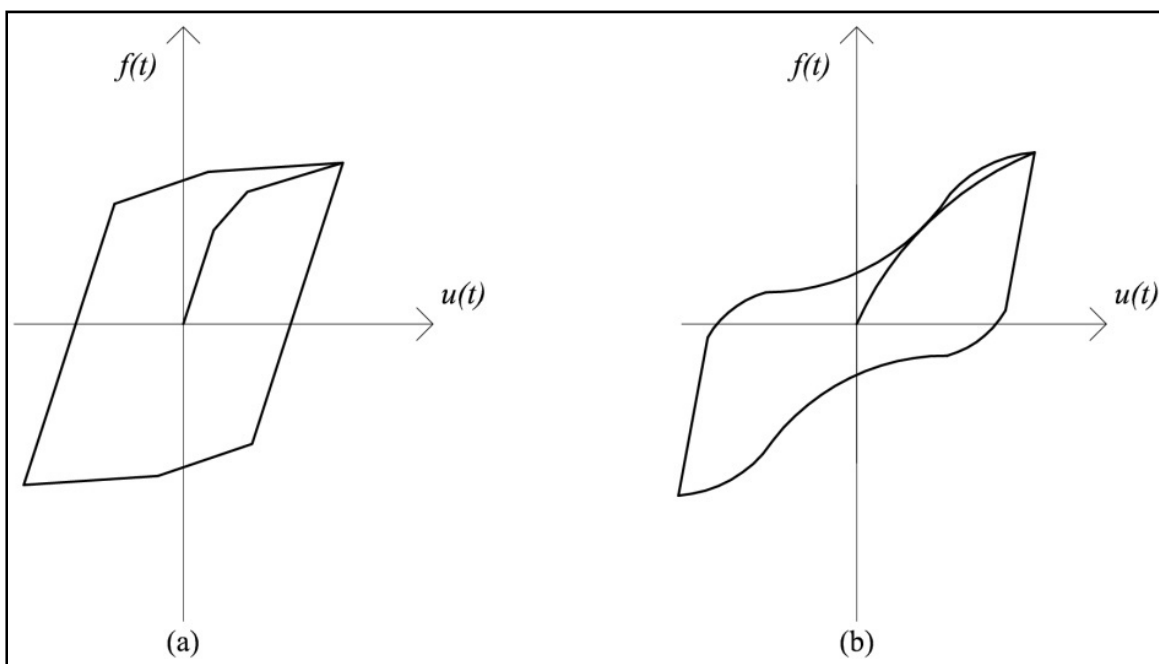
Slika 2.2 (a) Histerezisna kriva za operator sa nelokalnom memorijom; (b) Histerezisna kriva za operator sa lokalnom memorijom;

koje tačke na f - u dijagramu je jednoznačno određeno ulazom. U opštem slučaju, ako se stanje odgovora $f(t)$ može definisati sa konačnim brojem unutrašnjih promenljivih, to je slučaj histerezisnih operatora sa lokalnom memorijom [57]. Specijalno, ako je broj promenljivih koji određuju odgovor $f(t)$ jedan, takvi modeli se klasifikuju u modele sa skalarnom memorijom. Može se reći da su modeli klasične plastičnosti modeli sa lokalnom memorijom, a najjednostavniji od tih modela predstavljaju modele sa skalarnom memorijom.

Ako vrednost odgovora $f(t)$ histerezisnog operatora u opštem slučaju zavisi od beskonačno mnogo unutrašnjih promenljivih, odnosno zavisi od celokupne prethodne istorije pobude $u(t)$, takav operator ima nelokalnu memoriju [57]. Za Prajzakov i Prandtl-ov model, koji pripadaju ovoj grupi, zbog svojih osobina, se može koristiti ograničena istorija pobude, a pored toga se može reći da pojedini modeli sa konačnim brojem promenljivih pripadaju ovoj grupi [43].

Pored histerezisnih operatora definisanih sa složenim matematičkim modelima, postoje i inženjerski histerezisni operatori. Oni su nastali kao pokušaj da se, ne ulazeći dublje u

matematičku analizu operatora, na što tačniji način predstavi histerezisna petlja, odnosno poklapanje rezultata modela i empirijskih rezultata. To može da dovede do ograničene primene ovakvih operatora, odnosno korišćenja za primenu u specijalnim slučajevima kada ne daju veliko odstupanje od odgovarajućih eksperimentalnih rezultata. Posebno su korisni u slučajevima kada jednostavni algebarski izrazi mogu da modeliraju efekte degradacije krutosti, uštinuća (pinching effect) dijagrama ili nekih drugih specifičnih fenomena ciklične plastičnosti.



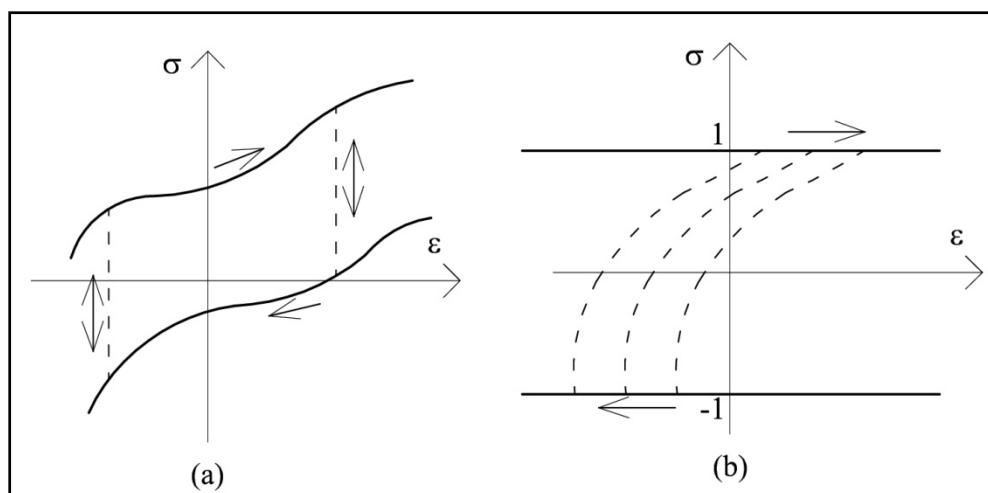
Slika 2.3 (a) Rezultantna petlja polilinijskog histerezisnog operatora; (b) Rezultantna petlja operatora koji ima mogućnost da modelira uštinuće (pinching effect).

Po obliku histerezisne petlje, mogu biti polilinijski (slika 2.3) i polikrivolinijski, a za Masing-ov model se može reći da pripada grupi polikrivolinijskih operatora [16].

U ovoj doktorskoj disertaciji su prikazane osnovne karakteristike Prajakovog modela histerezisa, njegova primena u modeliranju ponašanja materijala u plastičnom domenu [14], [15] bez i sa oštećenjem [58], kao i primena ovog operatora u elastoplastičnoj analizi linijskih nosača [59], koja počinje sa najjednostavnijim nosačima ove grupe – rešetkastim

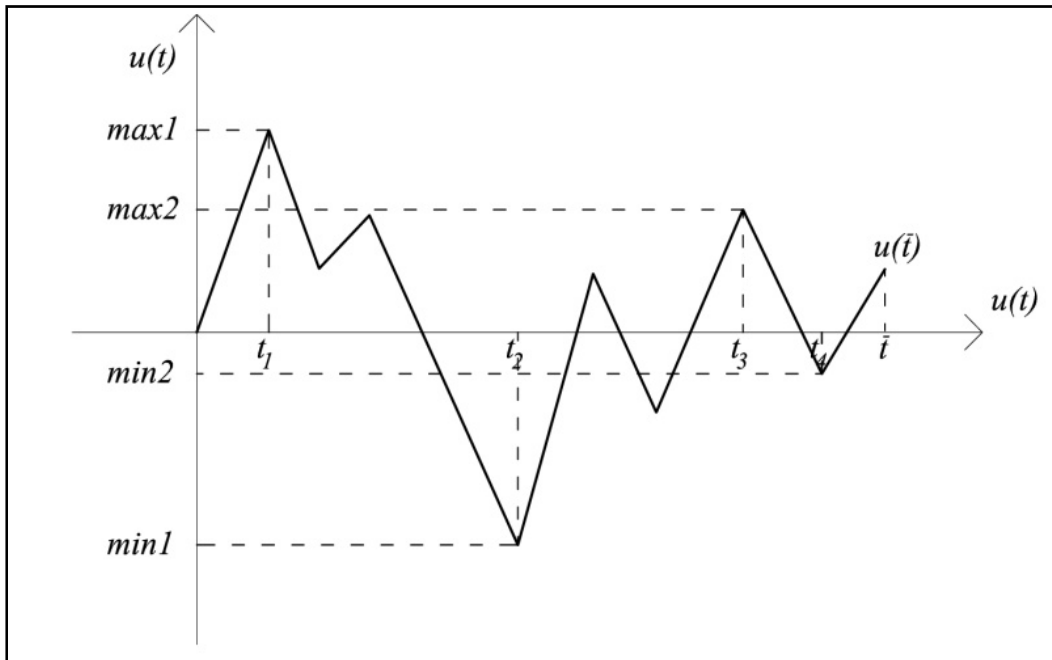
nosačima. Takođe su prikazane osnovne karakteristike Bouc-Wen-ovog modela histereziisa, kao modela histereziisa koji je široko primenjivan u elastoplastičnoj analizi konstrukcija.

Složeni histerezisni operatori se dobijaju grupisanjem jednostavnih elementarnih histerezisnih operatora, pa se Prandtl-Ishlinskii modeli dobijaju grupisanjem elementarnih takozvanih "play" ili "stop" operatora (slika 2.4). U radu [56] su predstavljeni linearni, nelinearni ili generalisani "play" i "stop" operatori.



Slika 2.4 (a) Nelinearni play model (paralelna veza elastične opruge i plastičnog slip elementa) za plastično ponašanje sa ojačanjem; (b) Nelinearni (Prandtl-ov) stop model (redna veza elastične opruge i plastičnog slip elementa) za elastoplastično ponašanje bez ojačanja.

Iako se definicija određenog broja najznačajnijih histerezisnih operatora zasniva na poznavanju celokupne prethodne istorije unosa (ulaza), takav kompletan skup lokalnih maksimuma i minimuma funkcije $f(t)$ ne postoji za sve operatore. Ali ako se posmatraju samo rastući i opadajući nizovi, onda se dobija takozvana redukovana sekvenca memorije koja je dovoljna za određivanje izlaza u vremenskom trenutku t [56]. U slučaju Bouc-ovog modela koji ima beskonačnu dimenziju memorije, kompletna memorija se može predstaviti sa operatorom koji ima skalarnu memoriju. Iako u integralnom izrazu kod Bouc-ovog modela, nasledna funkcija omogućava beskonačnu memoriju, ona se može degenerisati u skalarnu memoriju za specifične izbore tih funkcija [16].



Slika 2.5 Redukovana memorijska sekvenca ulaza $u(t)$, koja se sastoji od konačnog niza maksimuma ($max1, max2, \dots$) i minimuma ($min1, min2, \dots$)

2.2 PRAJZAKOV MODEL HISTEREZISA

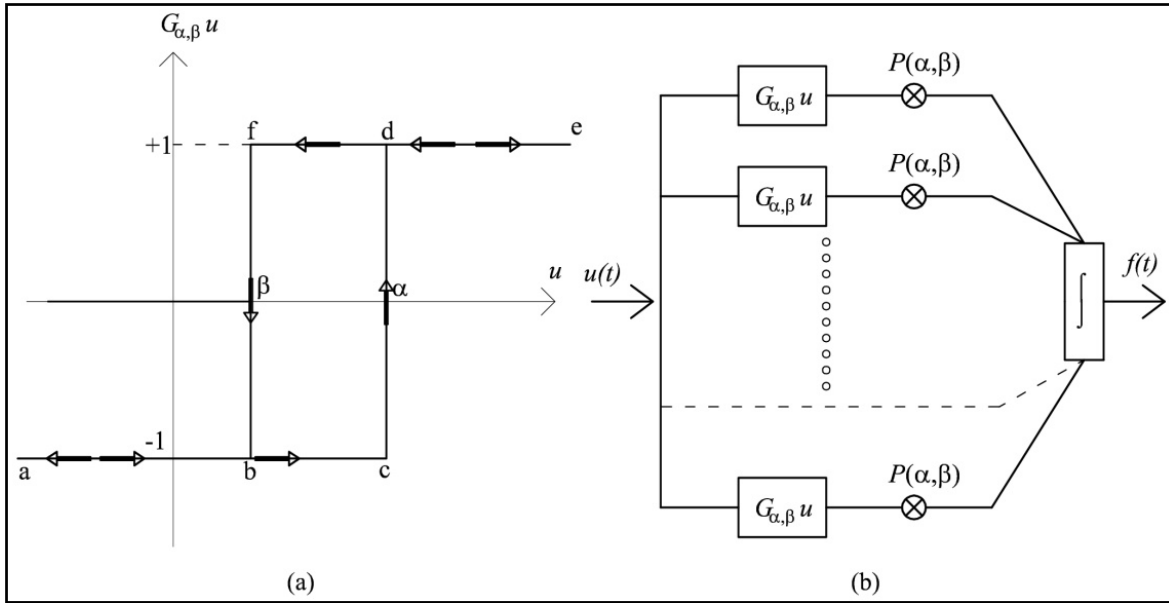
2.2.1 Uvod

Histerezisni operator zasnovan na Prajzakovom modelu pripada grupi kontinualnih operatora sa nelokalnom memorijom. Dobija se grupisanjem, odnosno superpozicijom elementarnih "delayed-relay" operatora $G_{\alpha, \beta}$ koji su prikazani na slici 2.6.

Operator $G_{\alpha, \beta}$ predstavlja preslikavanje

$$C^0([0, T]) \times \{1, -1\} \rightarrow BV(0, T) \cap C_r^0([0, T[) \quad (2.1)$$

gde je $BV(0, T)$ Banahov prostor funkcija $(0, T) \rightarrow R$, a $C_r^0([0, T[)$ linearni prostor funkcija koje su kontinualne na $[0, T[$ [56]. Neka je (α, β) bilo koji par iz R^2 , takav da je $\beta < \alpha$, tada se rezultati ovog operatora, $G_{\alpha, \beta}u(t)$, mogu predstaviti funkcijom z [56].



Slika 2.6 (a) Odgovor elementarnog "delayed-relay" operatora $G_{\alpha, \beta}$; (b) Superpozicija elementarnih releja, koja daje konačan odgovor $f(t)$.

Za svako u iz skupa $C^0([0, T])$ prostora funkcija na intervalu od 0 do T , funkcija z predstavlja:

$$z(0) = \begin{cases} -1, & u(0) \leq \beta \\ \xi, & \beta < u(0) < \alpha \\ 1, & u(0) \geq \alpha \end{cases} \quad (2.2)$$

Gde je $\xi = -1$ ili 1 . Za svako t iz skupa $[0, T[$:

$$X_t = \{\tau \in]0, t], u(\tau) = \beta \vee \alpha\}$$

$$z(t) = \begin{cases} -1, & X_t \neq 0, u(\max X_t) = \beta \\ z(0), & X_t = 0 \\ 1, & X_t \neq 0, u(\max X_t) = \alpha \end{cases} \quad (2.3)$$

Funkcija z je jedinstveno definisana na intervalu $[0, T]$. Ako je $u(0) < \beta$, onda je $z(0) = -1$ i $z(t) = -1$, i to važi i kad se $u(t)$ menja sve dok je $u(t) < \alpha$. U trenutku kada $u(t)$ dostigne α , tada

je funkcija $z(t)=1$, i to važi i kad se $u(t)$ menja sve dok je $u(t)>\beta$. Kao rezultat, funkcija $z(t)$ je kontinualna na $[0, T]$ i ukupan broj varijacija te funkcije je konačan za konačan broj unosa parametara α i β . Dakle, Prajzakov histerezisni operator $Pr u(t)$ se dobija superpozicijom $G_{\alpha,\beta}$ operatora, odnosno on je kontinualni sistem paralelno vezanih elementarnih operatora, kao što je prikazano na slici 2.6. Ako je $P(\alpha,\beta)$ težinska funkcija prema kojoj su raspoređeni elementarni operatori, a Γ skup vrednosti graničnih pragova (α i β) za promene (skokove) funkcije z , tada se Prajzakov histerezisni operator može definisati [60] kao

$$\Gamma = \{(\alpha, \beta) \in R^2, \beta < \alpha\}$$

$$f(t) = Pr u(t) = \iint_{\Gamma} G_{\alpha,\beta} u(t) dP(\alpha, \beta) \quad (2.4)$$

Zamenom, odgovarajućih granica i diferenciranjem funkcije $P(\alpha,\beta)$, dobija se:

$$f(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} G_{\alpha,\beta} u(t) P(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2.5)$$

Skup graničnih parametara α i β formira takozvanu Prajzakovu ravan (poluravan zbog $\beta \leq \alpha$), kao što je prikazano na slici 2.7.

Iako se prvi put ovaj operator spominje kod Weiss-a [61], Prajzak [13] je prvi put predložio geometrijsku interpretaciju memorijske strukture ovog modela. Ako se analiziraju skupovi vrednosti unosa (ulaza) α i β , takvi da važi:

$$A^-(t) = \{(\alpha, \beta) \in \Gamma, z(t) = -1\}, \quad A^+(t) = \{(\alpha, \beta) \in \Gamma, z(t) = 1\},$$

$$L(t) = \partial A^-(t) \cap \partial A^+(t) \quad (2.6)$$

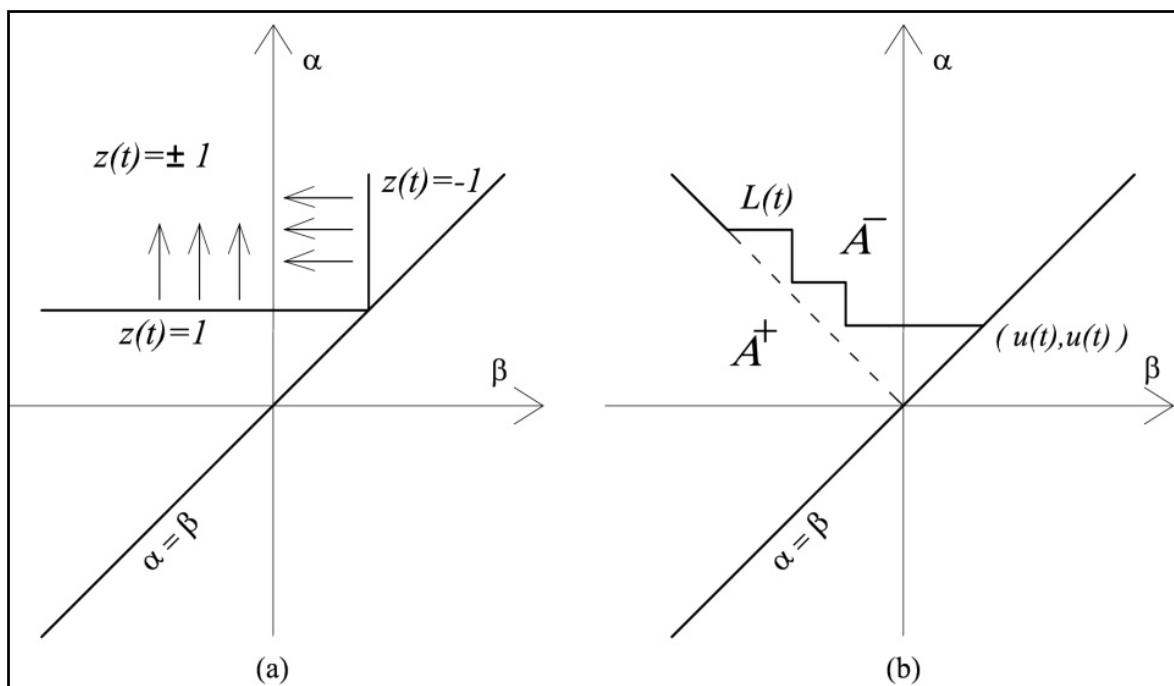
Onda $L(t)$ definiše promenu pozitivnih i negativnih skupova (setova) A^+ i A^- . Tada se na osnovu izraza (2.2) i (2.3), može reći da kada $u(t)$ povećava vrednost, $L(t)$ linija se pomera nagore u Prajzakovoj ravni, a kada $u(t)$ smanjuje vrednost, $L(t)$ linija se pomera nalevo u Prajzakovoj ravni. Granična linija za $L(t)$ je prava $\alpha=\beta$, a zbog definicije $L(t)$ iz (2.6), $L(t)$

predstavlja jedan element skupa maksimalnih antimonotonih grafova u domenu Γ [56]. Antimonotoni graf je graf koji ima mogućnost da i nakon brisanja temena, zadrži nepromenjene osobine. Skup grafova $L(t)$ predstavlja memorijsku mapu unosa [56]. Specifičan slučaj grafa $L_0(t)$ kada su ispunjeni sledeći uslovi:

$$z^0(t) = \begin{cases} -1, & \alpha + \beta < 0 \\ 1, & \alpha + \beta > 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

odgovara graničnom slučaju kada materijal nije bio izložen histerezisnim nelinearnostima, pa se na osnovu (2.7) definiše početno stanje u odgovarajućem ograničenom trouglu.

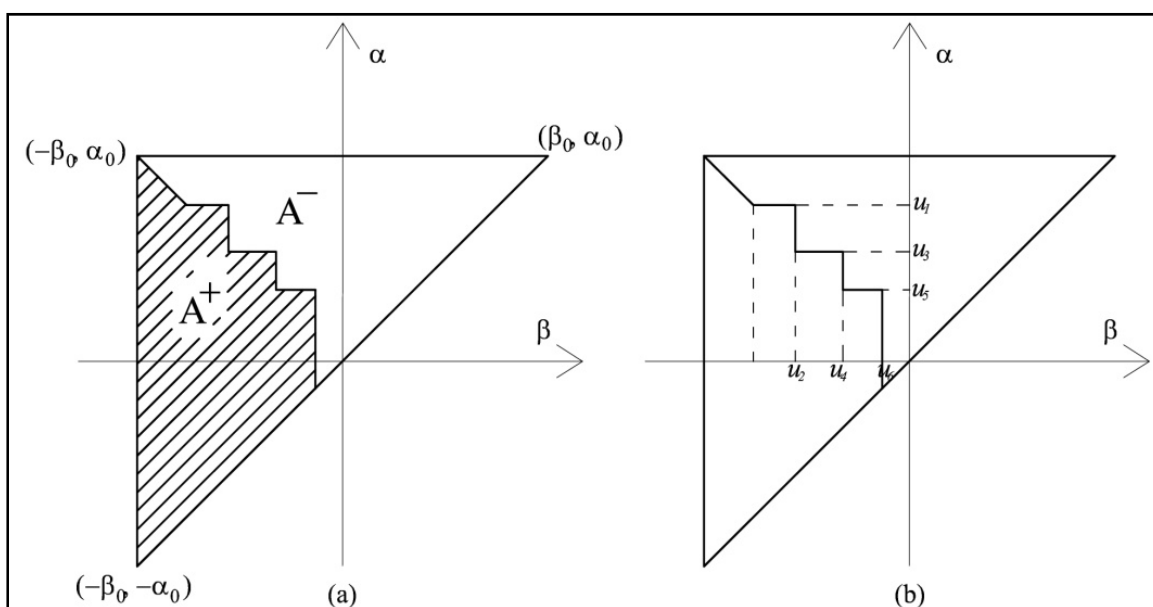
Nakon odgovarajućeg unosa, graf $L(t)$ deli region Γ na dva dela i ima stepenast oblik (Slika 2.7). Temena ovog stepenastog grafa $L(t)$ predstavljaju podatke o prethodnoj istoriji unosa. Svaka tačka u domenu Γ je jedinstveno definisana sa operatorom $G_{\alpha,\beta}$ čiji su odgovarajući pragovi za promenu vrednosti u stvari koordinate tačaka u toj poluravni. Ako se posmatra ograničen domen Γ , Prajzakova poluravan prelazi u Prajzakov trougao (slika 2.8).



Slika 2.7 (a) Grafički prikaz evolucije promenljive $z(t)$ u ravni α - β ; (b) Formiranje stepenaste linije $L(t)$

2.2.2 Geometrijska interpretacija i numeričko modeliranje Prajzakovog modela histereza

Ograničen (Prajzakov) trougao može da se predstavi sa temenima u tačkama čije su koordinate $\{(\beta_0, \alpha_0), (-\beta_0, -\alpha_0), (-\beta_0, \alpha_0)\}$ pri čemu je $\beta_0 = \alpha_0$, a ukoliko se posmatra slučaj kada je Prajzakova funkcija $(P(\alpha, \beta))$ definisana samo u ovom trouglu, analitički izraz iz (2.5) može dobiti svoju geometrijsku interpretaciju. To predstavlja slučaj zatvorenih histerezisnih petlji. Kao što je predstavljeno u prethodnom poglavlju, ukoliko ulaz $u(t)$ raste, kao posledica se javlja pomeranje linije $L(t)$ nagore u ograničenom trouglu, a suštinski u analognom modelu (slika 2.6) može da predstavlja promenu vrednosti u elementarnim (delayed-relay) operatorima. Svi operatori $G_{\alpha, \beta}$ koji su "uključeni na vrednost" -1 mogu da promene svoju vrednost u +1 prema (2.3) ako je vrednost ulaza $u(t)$ veća od odgovarajuće vrednosti α za svaki od elementarnih operatora.



Slika 2.8 (a) Ograničen Prajzakov trougao podeljen na dva dela stepenastom linijom $L(t)$; (b) Niz naizmeničnih unosa (ulaza) $u_1 - u_6$ koji formiraju $L(t)$ pod (a).

Ukoliko ulaz $u(t)$ opada, to kao rezultat ima pomeranje linije $L(t)$ nalevo u ograničenom trouglu, a suštinski, u analognom modelu, svi operatori $G_{\alpha, \beta}$ koji su "uključeni na vrednost" +1 mogu da promene svoju vrednost u -1 prema (2.3) ako je vrednost ulaza $u(t)$ manja od

odgovarajuće vrednosti β za svaki od elementarnih operatora. Stanje svakog operatora, odnosno memorija Prajzakovog operatora, je dakle predstavljena stepenastom linijom $L(t)$ čija temena prema definiciji (2.6) predstavljaju relativne minimume i maksimume ulaza $u(t)$. Zbog svega navedenog i prikazanog na slici 2.8, izraz (2.5) se može napisati kao:

$$f(t) = \iint_{A^+(t)} P(\alpha, \beta) G_{\alpha, \beta} u(t) d\alpha d\beta + \iint_{A^-(t)} P(\alpha, \beta) G_{\alpha, \beta} u(t) d\alpha d\beta \quad (2.8)$$

Pošto se površine A^+ i A^- odnose na sve one operatore uključene na vrednost +1, odnosno -1 respektivno, izraz (2.8) se može predstaviti kao:

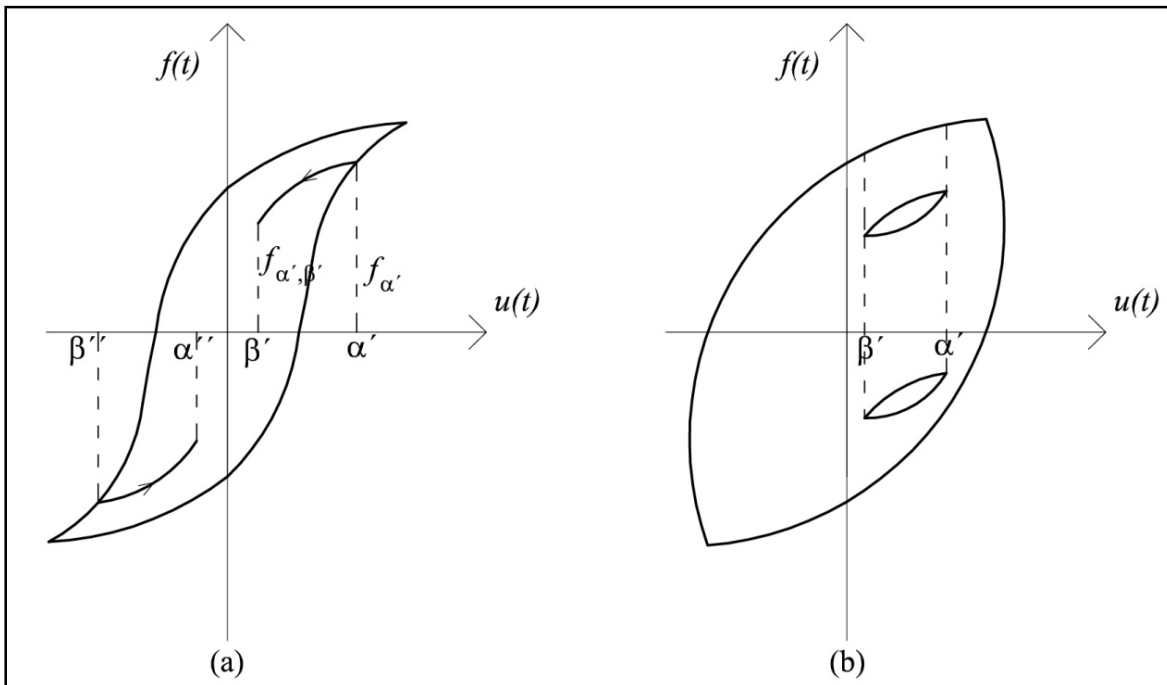
$$f(t) = \iint_{A^+(t)} P(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{A^-(t)} P(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2.9)$$

Evidentno je i iz geometrije Prajzakovog trougla da je uticaj prethodne istorije (memorije) ovog modela, na razliku odgovora $f_1(t)$ i $f_2(t)$ za neko $t > t'$, od presudnog značaja, čak iako je pobuda $u_1(t)$ ista kao $u_2(t)$, u slučaju da je do trenutka t' bio različita [57].

Prethodne navedene karakteristike su značajne, jer omogućavaju geometrijsku interpretaciju, a samim tim i potpuno ekvivalentu geometrijsku definiciju Prajzakovog modela histerezisa. To takođe omogućava i dalju generalizaciju ovog modela, a od posebnog značaja je numerička metoda. Numerička metoda omogućava da se, zbog geometrijske interpretacije, analitičko rešenje u zatvorenom obliku može upotrebiti za modeliranje histerezisnog ponašanja sistema pri proizvoljnom ulazu koristeći beskonačnu dimenziju ovog modela. Ta beskonačna dimenzija memorije ne mora da sadrži sve prethodne ekstremne vrednosti, i to zbog osobine brisanja ("wiping out") [14] kao što je prikazano na slikama 2.5 i 2.7. Ukoliko se nakon odgovarajućeg ulaza $u(t)$ formira višestepenasta linija $L(t)$, nakon jednog ulaza koji je ili kao rastući veći od odgovarajućeg ekstremuma, ili kao opadajući manji od odgovarajućeg ekstremuma, moguće je obrisati temena (ekstremume) prethodnog ulaza. Drugim rečima, samo se naizmenični dominantni maksimumi i minimumi zadržavaju u zapisu Prajzakovog trougla, dok ostali ekstremumi mogu biti izbrisani.

Još jedna važna osobina ovog modela je kongruentnost (Slika 2.9), odnosno osobina da su sve manje histerezisne petlje, koje odgovaraju identičnim intervalima ulaza, međusobno kongruentne [15]. Preciznije rečeno, oblik ovih petlji se poklapa ($\Delta f_1 = \Delta f_2$), ukoliko je odgovarajući ulaz Δu (između uzastopnih vrednosti ekstremuma) isti.

Za modeliranje fenomena u kojima se javlja histerezis, koristeći Prajzakov model, suština je u određivanju Prajzakovke funkcije $P(\alpha, \beta)$. U monografiji Mayergoyz-a [57] su definisane osnovne karakteristike ove funkcije i načini za njeno određivanje, dok se u radu Visintin-a [56] određuju karakteristike ovog modela sa stanovišta funkcionalne analize i metričkog prostora. Koristeći ovu funkciju u radovima Lubarde, Šumarca i Krajčinovića [14], [15] je definisano jednoaksijalno ponašanje materijala u cikličnoj plastičnosti koje je korišćeno u ovoj disertaciji kako bi se formirao model za proračun rešetkastih nosača u plastičnom domenu uzimajući u obzir i oštećenja. Odgovori $f(t)$ se u tom slučaju mogu definisati i kao napon i kao deformacija, dok se odgovarajući ulaz $u(t)$ definiše kao deformacija, odnosno napon respektivno.



Slika 2.9 (a) Tranziciona kriva prvog reda $f_{\alpha} - f_{\alpha'} \beta$; (b) Kongruentnost odgovora manjih petlji

Ukoliko su granice Prajzakovog trougla β_0 odnosno α_0 , tada stanje negativne saturacije histerezisne nelinearnosti odgovara slučaju kada je ulaz $u(t)$ spušten do donje granice $-\beta_0$, a stanje pozitivne saturacije kada je ulaz $u(t)$ dostigao gornju granicu α_0 . Tada se izraz iz (2.9) može transformisati, pa je lako pokazati da su odgovori f^+ , glavne rastuće i f^- , glavne opadajuće histerezisne petlje kod Prajzakovog modela iz izraza (2.10) jednaki kao da je i u tom slučaju njihov zbir jednak dvostrukoj površini Prajzakovog trougla.

$$f^- - f^+ = -2 \iint_A P(\alpha, \beta) \cdot d\alpha d\beta, \quad f^- = f^+ \quad (2.10)$$

Ukoliko u fizičkom procesu nije došlo do pojave histerezisnih nelinearnosti, to odgovara, prema izrazu (2.6) nultom stanju, odnosno slučaju kada prava $\alpha = -\beta$ deli granični trougao na dva jednaka dela (izraz (2.7)).

Tranzicione krive prvog reda su krive koje nastaju nakon trenutka u kojem unos $u(t)$ počne da raste iz stanja negativne saturacije do odgovarajuće vrednosti α' . Tada se odgovarajući odgovor označava sa $f_{\alpha'}$, a ova kriva se još zove granična rastuća kriva. Tranzicione krive prvog reda nastaju kada se u ovom slučaju promeni smer ulaza $u(t)$ do odgovarajuće vrednosti β' , a odgovarajući odgovor promeni do $f_{\alpha' \beta'}$.

Tada možemo definisati funkciju $F(\alpha', \beta')$ kao :

$$F(\alpha', \beta') = \frac{1}{2} (f_{\alpha'} - f_{\alpha' \beta'}) \quad (2.11)$$

Ako se izrazi za $f_{\alpha'}$, i $f_{\alpha' \beta'}$ predstave u Prajzakovom trouglu, onda je očigledno da:

$$f_{\alpha' \beta'} - f_{\alpha'} = -2 \iint_T P(\alpha, \beta) \cdot d\alpha d\beta \quad (2.12)$$

Gde je domen T promena površina u Prajzakovom trouglu nastala kao rezultat promene unosa od α' do β' . Sledi da je:

$$\begin{aligned}
F(\alpha', \beta') &= \iint_T P(\alpha, \beta) \cdot d\alpha d\beta \\
F(\alpha', \beta') &= \int_{\beta'}^{\alpha'} \left(\int_{\beta'}^{\alpha'} P(\alpha, \beta) d\alpha \right) d\beta \\
P(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\alpha' \beta'}}{\partial \alpha' \partial \beta'}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Pošto je β apscisa u α - β ravni, onda je prvi izvod tranzicione krive $f_{\alpha' \beta'}$ po promenljivoj β u stvari tangens ugla te krive u α - β ravni. A Prajzakova funkcija predstavlja u stvari prvi izvod po ordinati α tangensa tog ugla:

$$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \frac{\partial \tan \theta(\alpha', \beta')}{\partial \alpha'} \tag{2.14}$$

Zaključuje se da je Prajzakova funkcija pozitivna ako $\tan(\alpha', \beta')$ monotono raste kao funkcija α' za fiksno β' što je i uvek slučaj kod ovog modela i u skladu sa eksperimentalnim dokazima za histerezisne sisteme, pa se može reći i da je ova funkcija pozitivna po definiciji [57]. Funkcija $P(\alpha, \beta)$ može da se i predstavi i kao funkcija distribucije elementarnih releja sa nekom statističkom konotacijom, pa je to još jedan razlog više da bude pozitivna [57]. Slični izrazi mogu da se izvedu u slučaju da se kreće iz stanja pozitivne saturacije. U tom slučaju se lako izvodi osobina "mirror symmetry" kao rezultat kongruentnosti rastućih i opadajućih tranzicionih krivih prvog reda.

$$P(-\beta, -\alpha) = P(\alpha, \beta) \tag{2.15}$$

Iako analitičko rešenje u zatvorenoj formi prema izrazu (2.5), treba da omogući matematički tačnije i direktno izračunavanje rezultata, određivanje dvostrukog integrala na osnovu ovog izraza je teško definisati za proizvoljne slučajeve unosa. Kao što je prikazano u izrazu (2.9), određivanje integrala može da se geometrijskom interpretacijom svede na određivanje razlike površina pozitivnog i negativnog seta A^+ i A^- .

Da bi se odredio integral, odnosno razlika pozitivnog i negativnog seta, može se koristiti samo jedan od dva seta, dok se drugi računa na osnovu poznate veličine ukupne površine ograničenog Prajzakovog trougla.

$$f(t) = -\iint_A P(\alpha, \beta) d\alpha d\beta + 2 \iint_{A^+(t)} P(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

$$\iint_A P(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = F(\alpha_0, \beta_0) \quad (2.16)$$

Celokupan problem se time svodi na računanje površine jednog seta (A^+), koji se sastoji iz sume trapeza i trougla (kao specijalnog slučaja trapeza). U monografiji Mayergoyz-a [57] je prikazan pristup gde se površina svakog trapeza računa kao razlika površine dva trougla:

$$\iint_{TR_k(t)} P(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \iint_{T(M_k, m_k)} P(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{T(M_{k-1}, m_{k-1})} P(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

$$\iint_{T(M_k, m_k)} P(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = F(M_k, m_k)$$

$$\iint_{T(M_{k-1}, m_{k-1})} P(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = F(M_{k-1}, m_{k-1}) \quad (2.17)$$

Koristeći ove smene, odgovor nakon pobude koji se završava opadajućim delom funkcije $f(t)$ se sastoji od razlike početne površine trougla, sume trapeza do poslednjeg člana unosa, i člana koji je rezultat poslednjeg člana ulaza:

$$f(t) = -F(\alpha_0, \beta_0) + 2 \left[\sum_{k=1}^{n-1} F(M_k, m_k) - F(M_{k-1}, m_{k-1}) \right]$$

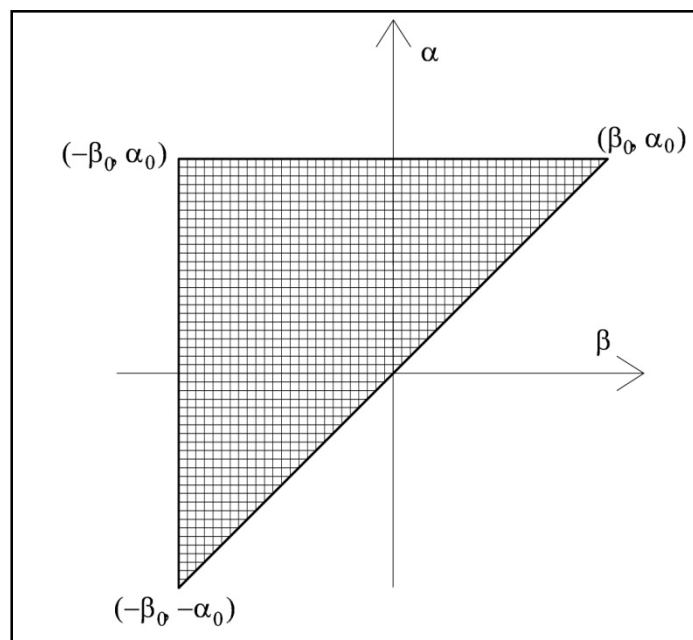
$$+ [F(M_n, m_n) - F(M_{n-1}, m_{n-1})] \quad (2.18)$$

Slični izrazi se dobijaju ako se ulaz završava sa rastućim delom funkcije $f(t)$, a sa ovako određenim izrazima, definiše se kompjuterski kod i algoritam proračuna koji se zasniva na kvadratnoj i trougaonoj mreži odgovarajućeg Prajzakovog trougla. S obzorom da se radi o mreži, neophodno je da se odredi pripadnost tačaka ekstremuma ulaza odgovarajućim poljima i njihova "mesh" vrednost koristeći funkcije interpolacije:

$$f_{\alpha\beta} = C_0 + C_1\alpha + C_2\beta + C_3\alpha\beta \text{ ili}$$

$$f_{\alpha\beta} = C_0 + C_1\alpha + C_2\beta \tag{2.19}$$

gde se koeficijenti C_i nalaze iz vrednosti u temenima kvadrata i trouglova. U monografiji Mayergoyz-a, se takođe navode izrazi za globalnu linearizaciju inkremenata izlaza (odgovora) koji mogu da budu korisni u slučajevima kada su funkcije ulaza periodične. U radovima Šumarca [62], [14] su definisani analitički izrazi za različite slučajeve cikličnog opterećenja materijala u plastičnom domenu pri jednoaksijalnom naponskom stanju. U predmetnom istraživanju je postupak određivanja analitičkog izraza (integrala (2.5)) tačan, odnosno određivanje odgovarajućih površina u Prajzakovom trouglu je definisano algoritmom koji uzima u obzir tačne koordinate tačaka odgovarajućih trapeza, bez korišćenja mreže.



Slika 2.10 Mesh organizacija Prajzakovog trougla

Kao što je prikazano u poglavlju 6, pored graničnog (Prajzakovog) trougla, da bi se modeliralo linearno ojačanje u plastičnom domenu, potrebno je uvesti dodatne granične trapeze. Ukoliko je to potrebno zbog numeričkih analiza, moguće je granice ovih trapeza povećati do konačno velike vrednosti, kako bi materijal imao (ne)ograničenu granicu loma.

Granice je potrebno definisati zbog definisanja ukupne (zatvorene) površine Prajzakovog graničnog trougla (izraz (2.16)), odnosno trougla i prizmi.

2.3 BOUC-WEN-OV MODEL HISTEREZISA

Bouc-Wen-ov model u osnovnom obliku predstavlja nelinearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda koja definiše vezu ulaz (pomeranje) – izlaz (sila) u histerezisnom obliku. U zavisnosti od podvrste modela, različit broj parametara je potreban da bi se veza sila-pomeranje na odgovarajući način predstavila, a određivanje tih parametara je bitno za bolju aproksimaciju realnog ponašanja materijala. Ceo koncept ovog modela može da se primeni i na vezu napon-deformacija.

Bouc-Wen-ov model histerezisa pripada klasi Duhem histerezisnih operatora. Bouc-Wen-ov model je razvijan koristeći polu-fizički pristup kao što je prikazano na slici 2.1. Bouc je 1971. predstavio [11] prvi originalni model ovog tipa počevši od analiziranja oscilovanja sistema sa jednim stepenom slobode.

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + F(t) = p(t) \tag{2.20}$$

$$F(t) = B[u](t)$$

Gde je $B[u](t)$ histerezisni operator a $F(t)$ izlaz (odgovor) ulaza $u(t)$ i predstavlja rezultujuću silu. $p(t)$ je sila pobude, m masa, a $F(t)$ je definisana koristeći “hereditary kernel” (naslednu funkciju) [16] koju je definisao Volterra [63]:

$$F(t) = \int_0^t \mu(t, t') du(t') = B[u](t) \tag{2.21}$$

gde je μ nasledna funkcija koje se definiše kao ograničena, pozitivna, opadajuća funkcija vremenske razlike:

$$\mu(t, t') = \mu(t - t') \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}\Delta_t &= t - t' \\ \Delta_u(t, t') &= u(t) - u(t')\end{aligned}\tag{2.23}$$

U ovom izrazu t je trenutno vreme, a t' je prethodno utvrđeno vreme. Δ_t i Δ_u su odgovarajuće razlike vremena i funkcije ulaza respektivno. Da bi se uspostavila nezavisnost od brzine promene unosa, Bouc je predložio zamenu realnog "Newtonian" vremena sa "unutrašnjim (intristic) vremenom", odnosno razlikom Δu koja je definisana istorijom ulaza $u(t)$ [16]. Rezultujuća sila može još uopštenije da se predstavi kao:

$$\begin{aligned}F(t) &= k \cdot u(t) + f(u(t)) + z(t) \\ z(t) &= \int_{t_0}^t \mu(\Delta_u(t, t')) d_u \Phi(u(t'))\end{aligned}\tag{2.24}$$

Gde je $k > 0$ konstanta, a f i Φ funkcije koje, pored toga što zadovoljavaju odgovarajuće uslove, se definišu tako da funkcija $f=f(u)$ predstavlja nelinearnu elastičnu silu, a $\Phi=\Phi(u)$ predstavlja filter istorije unosa koja je definisana sa $z(t)$ [16].

Ako se na osnovu razlike Δu definiše Δv prema (2.25), tada možemo v da nazovemo "unutrašnje (intristic) vreme" [10] ili "unutrašnju meru vremena".

$$\begin{aligned}\Delta_u(t, t') &= v(t) - v(t') = \int_{t'}^t dv(\tau) \\ z(v) &= \int_0^v \mu(v - v') \frac{d\Phi}{du} \frac{du}{dv'} dv'\end{aligned}\tag{2.25}$$

Usvajanjem različitih vrednosti za k, f , kao i odgovarajućim definisanjem nasledne funkcije $\mu(v)$, dobijaju se različiti histerezisni operatori Bouc-Wen tipa. Najjednostavniji se dobija kada sa smenama $k=0, f=0$, i $\Phi(u)=u$ kao i eksponencijalnom formom nasledne funkcije $\mu(v)$, eksplicitni integralni izraz degeneriše u eksplicitni diferencijalni izraz:

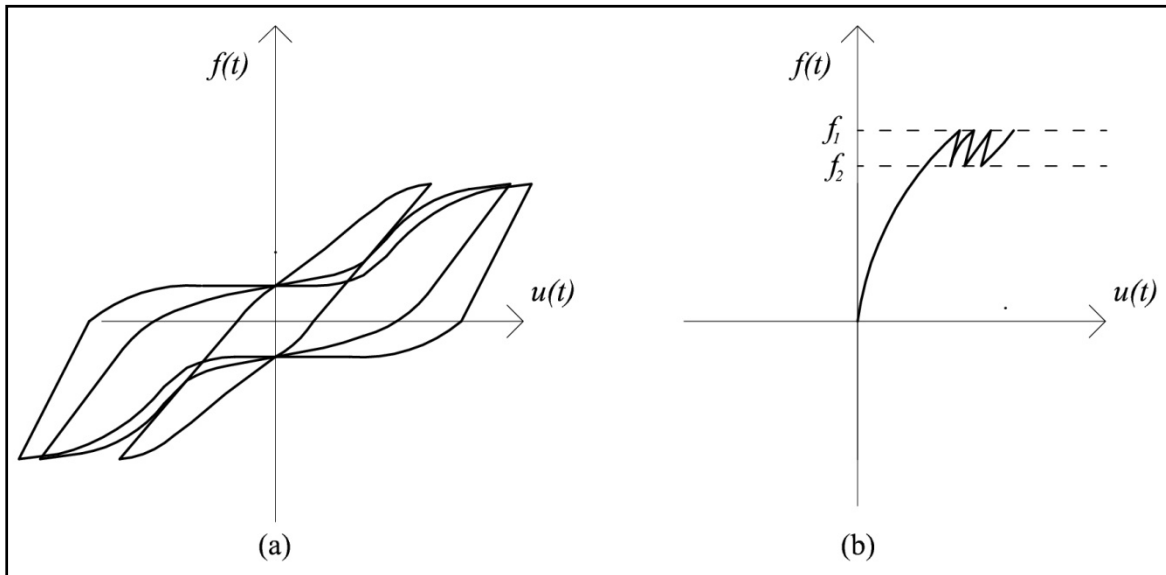
$$\mu(v) = Ae^{-bv}, \quad A, \beta > 0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + F = p \tag{2.26}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dz}{dt} = [A - \beta \cdot z \cdot \text{sign}(du)] \frac{du}{dt}$$

Mehanički sistem koji pokazuje histerezisno ponašanje se može modelirati osnovnim Bouc-Wen-ovim modelom histerezisa, tako što se A i β definišu kao konstante koje opisuju nasledni deo $z(t)$ rezultujuće funkcije $F(t)$. Slično se dobija i u slučaju da je u pitanju multieksponecijalna nasledna funkcija. Za izvođenje generalnih izraza, treba generalizovati funkciju $\Phi(u)$.

Drugi tip modela je Bouc predstavio uvođenjem dodatne konstante γ kojom bi se osigurala približna jednakost krivih elastičnog opterećenja i rasterećenja. Treći tip modela je definisan kako bi se u model uvela osobina uštinuća (pinching effect).



Slika 2.11 (a) Bouc-Wen-ov model koji može da predstavi "pinching" (uštinuće); (b) Bouc-ov model pokazuje osobine nestabilnog drifta.

Wen je predstavio [12] modifikaciju Bouc-ovog modela uvodeći nelinearni član $h(u')$ koji zavisi od brzine promene unosa (deformacije). Wen-ova modifikacija je bila značajna za

primenu u problemima analize konstrukcija. Parametar n (slika 1.6) je pozitivan i od njega zavisi oblik nelinearne veze sila-pomeranje. Ukoliko je n veliki broj, odnosno teži beskonačnosti, ponašanje ovog modela u stvari predstavlja elastično linearno plastično ponašanje materijala, a smanjivanjem vrednosti ovog parametra, dobija se veća nelinearnost ove zavisnosti (slika 1.6) u smislu početka nelinearnosti pri nižim vrednostima pomeranja. U Wen-ovom drugom modelu je definisan odnos krutosti pre i posle tečenja sa parametrom α .

Druge modifikacije osnovnog Bouc-Wen ovog modela su omogućile degradaciju krutosti i čvrstoće, modeliranje uštinuća (pinching effect) uvođenjem novih parametara i funkcija (Baber-Wen, Baber-Noori, Foliente itd.)

U radu [55] je prikazana matematička i fizička konzistentnost osnovne verzije Bouc-Wen-ovog modela, analizirana je histerezisna kriva i uticaj parametara na oblik te krive.

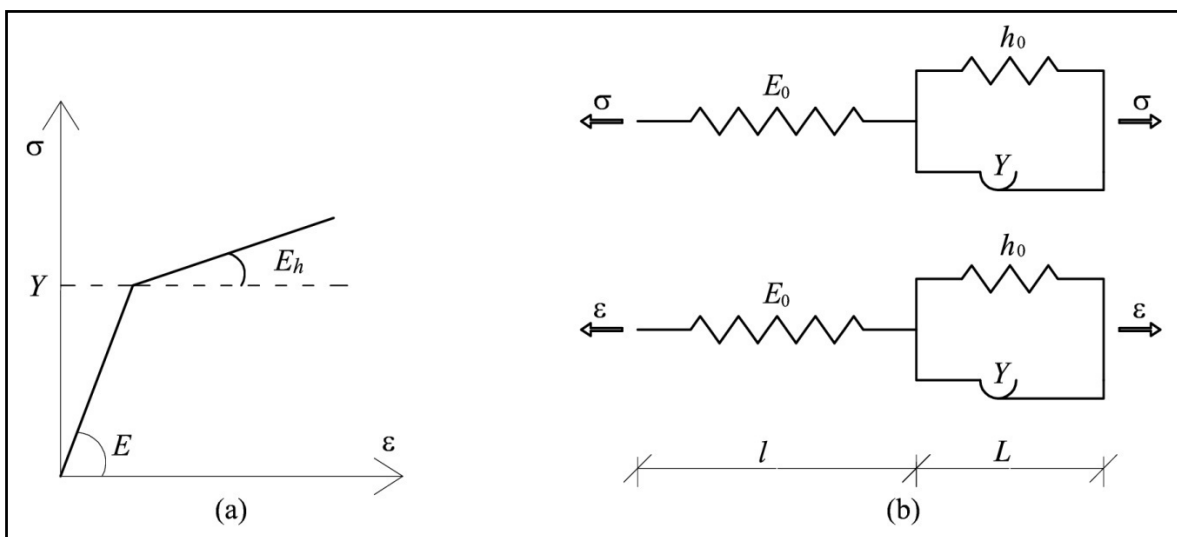
Originalni Bouc-ov model ne pokazuje osobinu zatvaranja manjih histerezisnih petlji, ali je moguće modifikovati ga kako bi se dobio novi Bouc model – Masing tipa. Štaviše, Bouc-ov model pokazuje osobine nestabilnog drift-a (slika 2.11), odnosno izraženog tečenja kod manjih petlji [42]. U radu [16] je pokazano da je zbog potrebe da se modelira degradacija krutosti, zadržana diferencijalna formulacija Bouc-ovog modela, za razliku od Masingove koja je algebarskog tipa. Kod Masing tipa su umesto konstanti A i β definisane promenljive koje se menjaju od petlje do sledeće histerezisne petlje, a zavise od prethodne istorije ($z-u$ vrednosti). Za potrebe formulisanja ovakvog modela potrebno je i uvesti vektore prethodnih dominantnih maksimuma i minimuma, kao i pravila za njihovo brisanje, pa ovaj model nije numerički efektan za modeliranje Masing tipa ponašanja materijala.

Identifikacija parametara ovog modela je moguća koristeći matematičke postupke koji se sastoje iz više koraka kao što su metoda najmanjih kvadrata, Kalman filter, Genetički algoritmi, Gauss-Newton iterativni postupci i drugi [55].

3 MODELIRANJE ELASTOPLASTIČNOG PONAŠANJA MATERIJALA PRIMENOM PRAJZAKOVOG MODELA HISTEREZISA

Jedan od principa za modeliranje elastoplastičnog ponašanja materijala histerezisnim operatorima zasniva se na definisanju jednog analognog mehaničkog modela koji je vezan paralelno i/ili redno sa drugim modelima svoje ili druge klase. Za svaki od modela se definiše mehaničko ponašanje koristeći odgovarajući set algebarskih i/ili diferencijalnih jednačina. Na osnovu ovakvog složenog mehaničkog modela dobija se odgovor po principu ulaz-operator-izlaz.

Da bi se što uopštenije modeliralo elastoplastično ponašanje materijala, potrebno je definisati prvo analogni model elastoplastičnom ponašanju sa linearnim ojačanjem kao što je prikazano na slici 3.1.



Slika 3.1 (a) Elastično – linearno plastično ponašanje materijala sa početnim modulom lastičnosti E , granicom tečenja Y i modulom ojačanja E_h ; (b) Jedinični troelementni model koji reprodukuje ponašanje pod (a).

Elastično – linearno plastično ponašanje koje je prikazano na slici 3.1(a) može da se predstavi troelementnim analognim modelima koji su prikazani na slici 3.1(b). Funkcija unosa može biti deformacija $\varepsilon(t)$ ili napon $\sigma(t)$. Elastični element, koji ima dužinu l i modul

elastičnosti E_0 , je redno vezan sa paralelnom vezom elastičnog (modul h_0) i plastičnog elementa (granica plastičnosti Y), dužine L . Konačne karakteristike ovog modela se dobijaju prema izrazima:

$$\begin{aligned} E &= E_0 (l+L) / l \\ E_h &= E h / (E+h), \\ h &= h_0 (l+L) / L. \end{aligned} \tag{3.1}$$

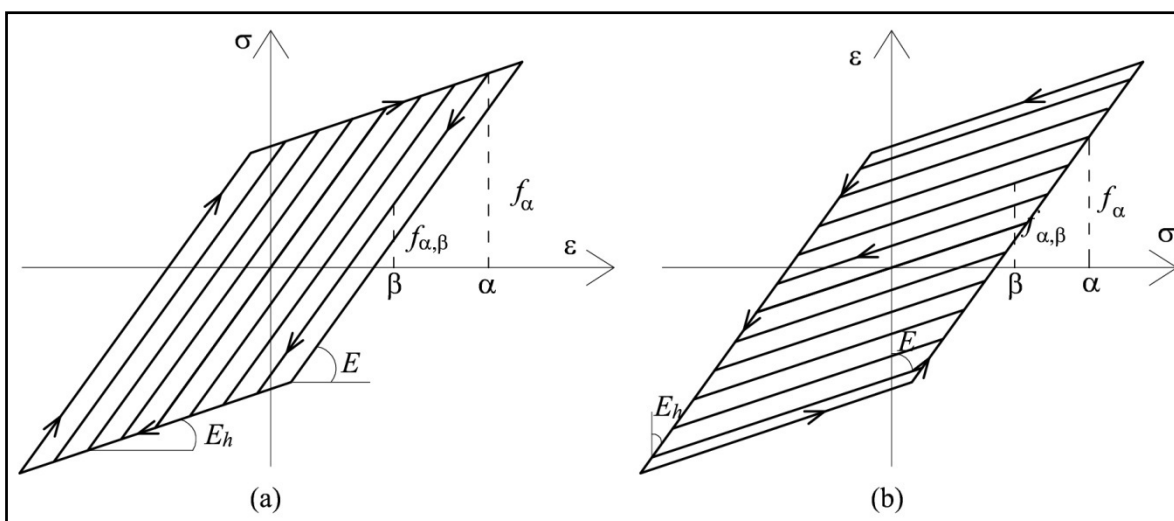
pa je za ovaj model modul elastičnosti E , a modul ojačanja E_h .

Kao što je prikazano u poglavlju 2.2, Prajzakov model zasniva na mapiranju ulaza (pobude) $u(t)$ u izlaz (odgovor) $f(t)$ u integralnoj formi prema (2.5), a na osnovu izraza (2.9) i analize u 2.2.2, definiše se geometrijska interpretacija ovog modela. Da bi se definisao odgovarajući model za mehaničko ponašanje materijala, potrebno je zameniti funkcije ulaza i izlaza $u(t)$ i $f(t)$ sa promenljivama koje definišu ponašanje materijala, ε i σ , kao što je prikazano u [51]. Iako je moguće definisati Prajzakov model histerezisa za različite analogne modele, za generalno elastoplastično ponašanje, najpogodnija polazna tačka je troelementni jedinični model kojije prikazan na slici 3.1. Pored izabranog analognog modela za mehaničko ponašanje materijala (slika 3.1), jednoaksijalno histerezisno ponašanje duktilnog materijala se može uspešno predstaviti Prajzakovim modelom i na druge načine, serijskom ili paralelnom vezom elastične opruge i plastičnog (slip) elementa [15]. Ovakav model daje rezultate koji imaju prednosti u odnosu na klasične modele Iwan-a [40] i Asara [45] zbog jednostavnosti i analitičke (strog) matematičke formulacije.

Za svaki analogni model koji se modelira Prajzakovim modelom histerezisa, najbitniji zadatak je određivanje Prajzakove funkcije. Prajzakova funkcija, koja treba da se odredi u odgovarajućem razmatranom slučaju, mora da ima osobine brisanja i kongruentnost manjih petlji, kao i druge osobine koje zadovoljava opšta Prajzakova funkcija razmatrana u poglavlju 2.2.

3.1 REDNA VEZA JEDINIČNOG TROELEMENTNOG MODELA

Za troelementni analogni model sa slike 3.1, gde funkcija ulaza predstavlja napon, Prajakova funkcija se može odrediti na osnovu histerezisne nelinearnosti prikazane na slici 3.2. Kod redne veze jediničnih modela se kao ulaz definiše napon, a izlaz (odgovor) je u tom slučaju deformacija. Kod paralelne veze jediničnih modela se kao ulaz definiše deformacija, a izlaz (odgovor) je napon.



Slika 3.2 Histerezisna petlja definisana materijalnim modelom sa slike 3.1(a) Funkcija ulaza – deformacija ; (b) Funkcija ulaza – napon.

Kao što je predstavljeno u poglavlju 2, određivanje tranzicione krive prvog reda može da bude prvi korak u definisanju Prajakove funkcije, pa se na osnovu slike 3.2(b) dobija:

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha,\beta} &= f_{\alpha} - (\alpha - \beta) / E & \alpha > \beta, \alpha - 2Y - \beta < 0 \\
 f_{\alpha,\beta} &= f_{\alpha} - 2Y / E - (\alpha - 2Y - \beta) / E_h & \alpha > \beta, \alpha - 2Y - \beta \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\alpha,\beta}}{\partial \beta} &= \frac{1}{E} H(\alpha - \beta) & \alpha > \beta, \alpha - 2Y - \beta < 0 \\
\frac{\partial f_{\alpha,\beta}}{\partial \beta} &= \frac{1}{E_h} H(\alpha - 2Y - \beta) & \alpha > \beta, \alpha - 2Y - \beta \geq 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial f_{\alpha,\beta}}{\partial \beta} &= \frac{1}{E} H(\alpha - \beta) + \frac{1}{E_h} H(\alpha - 2Y - \beta) - \frac{1}{E} H(\alpha - 2Y - \beta)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ovako određena (izraz **(3.2)**) tranziciona kriva prvog reda se diferencira dva puta po graničnim parametrima α i β kako bi se dobila Prajzakova funkcija (definisana prema izrazu **(2.13)**). Ta funkcija je u ovom slučaju definisana samo na pravama $\alpha - \beta = 0$ and $\alpha - \beta = 2Y$, odnosno data je sa izrazom **(3.5)**. Sa H je označena Heavyside-ova, a sa δ Dirac-ova delta funkcija.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_{\alpha,\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{1}{E} \delta(\alpha - \beta) + \frac{1}{E_h} \delta(\alpha - 2Y - \beta) - \frac{1}{E} \delta(\alpha - 2Y - \beta) \\
&= \frac{1}{E} \left(\delta(\alpha - \beta) + \frac{E - E_h}{E_h} \delta(\alpha - 2Y - \beta) \right)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\alpha,\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{2E} \left(\delta(\alpha - \beta) + \frac{E - E_h}{E_h} \delta(\alpha - 2Y - \beta) \right) \tag{3.5}$$

Izraz za deformaciju, kada je ulaz napon, je dat sa:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2E} \left[\int \delta(\alpha - \beta) \cdot G_{\alpha,\beta} \sigma(t) d\alpha d\beta + \frac{E - E_h}{E_h} \int \delta(\alpha - 2Y - \beta) \cdot G_{\alpha,\beta} \sigma(t) d\alpha d\beta \right] \tag{3.6}$$

Pošto je prvi integral u izrazu **(3.6)** definisan samo kada je $\beta = \alpha$, a drugi integral kada je $\beta = \alpha - 2Y$, parameter β se može eliminisati iz izraza **(3.6)**.

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2E} \left[\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} G_{\alpha,\alpha} \sigma(t) d\alpha + \frac{E-E_h}{E_h} \int_{2Y-\sigma_0}^{\sigma_0} G_{\alpha,\alpha-2Y} \sigma(t) d\alpha \right] \quad (3.7)$$

Prvi deo na desnoj strani izraza (3.7) predstavlja elastični, a drugi plastični deo deformacije. S obzirom da je funkcija ulaza napon, moguće je analizirati sistem od beskonačno mnogo jediničnih troelementnih modela, povezanih redno (Slika 3.3). Za sistem od beskonačno mnogo jediničnih troelementnih modela, povezanih redno, sa različitim raspodelom granice tečenja $Y_{min} \leq Y \leq Y_{max}$, ukupna deformacija je:

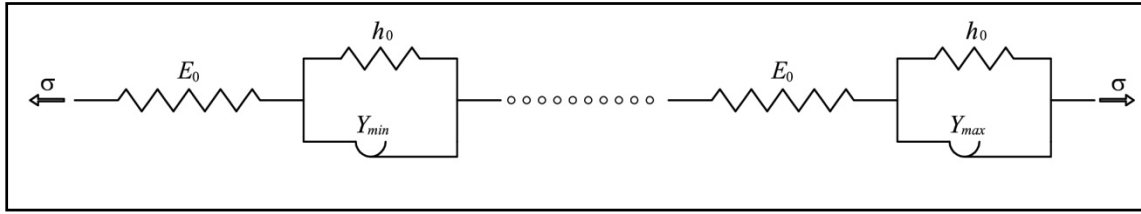
$$\varepsilon(t) = \int_{Y_{min}}^{Y_{max}} p(Y) \varepsilon(Y,t) dY \quad (3.8)$$

Može se usvojiti pretpostavka da svaki jedinični element ima različitu granicu tečenja a iste module elastičnosti i ojačanja, odnosno može da se shvati kao jedan kristal (“grain”) u prizvoljnom polikristalnom agregatu [62]. Onda skup ovih elemenata može da predstavlja realno ponašanje nekih metala. $\varepsilon(Y,t)$ je deformacija koja odgovara jediničnom elementu sa granicom tečenja Y a $p(Y)$ je funkcija raspodele granice tečenja. Ako je funkcija raspodele uniformna:

$$p(Y) = \frac{1}{Y_{max} - Y_{min}} = const \quad (3.9)$$

onda je ukupna deformacija kao rezultat ulaza (napona) dobijena kao:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2E} \frac{1}{Y_{max} - Y_{min}} \int_{Y_{min}}^{Y_{max}} \left[\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} G_{\alpha,\alpha} \sigma(t) d\alpha dY + \frac{E-E_h}{E_h} \int_{2Y-\sigma_0}^{\sigma_0} G_{\alpha,\alpha-2Y} \sigma(t) d\alpha dY \right] \quad (3.10)$$



Slika 3.3 Redna veza beskonačno mnogo jediničnih troelementnih modela sa različitim granicom tečenja.

Pošto prvi integral u izrazu (3.10) ne mora da zavisi od Y , a na osnovu drugog integrala je $\alpha + \beta = 2Y$, moguće ponovo uvesti u izraz parameter β , sa smenom $d\beta/2 = dY$:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2E} \left[\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} G_{\alpha,\alpha} \sigma(t) d\alpha + \frac{E - E_h}{2E_h} \frac{1}{Y_{max} - Y_{min}} \iint_A G_{\alpha,\beta} \sigma(t) d\alpha d\beta \right] \quad (3.11)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2E} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} G_{\alpha,\alpha} \sigma(t) d\alpha + \frac{E - E_h}{4EE_h} \frac{1}{Y_{max} - Y_{min}} \iint_A G_{\alpha,\beta} \sigma(t) d\alpha d\beta$$

gde domen integracije A predstavlja površinu trake između dve prave $\alpha - \beta = 2Y_{min}$ i $\alpha - \beta = 2Y_{max}$ u graničnom trouglu jer je samo tu definisana Prajzakova funkcija. Prvi deo izraza je i dalje elastična deformacija.

$$\frac{1}{2E} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} G_{\alpha,\alpha} \sigma(t) d\alpha = \frac{\sigma - (-\sigma)}{2E} = \frac{\sigma}{E} \quad (3.12)$$

3.2 PARALELNA VEZA JEDINIČNOG TROELEMENTNOG MODELA

Kao što je predstavljeno u poglavlju 2.2, određivanje tranzicione krive prvog reda može da bude prvi korak u definisanju Prajzakove funkcije:

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\beta} &= f_{\alpha} - (\alpha - \beta) \cdot E & \alpha > \beta, \alpha - 2Y/E - \beta < 0 \\ f_{\alpha,\beta} &= f_{\alpha} - 2Y - (\alpha - 2Y/E - \beta) \cdot E_h & \alpha > \beta, \alpha - 2Y/E - \beta \geq 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\alpha,\beta}}{\partial \beta} &= E \cdot H(\alpha - \beta) & \alpha > \beta, \alpha - 2Y/E - \beta < 0 \\
\frac{\partial f_{\alpha,\beta}}{\partial \beta} &= E_h \cdot H(\alpha - 2Y/E - \beta) & \alpha > \beta, \alpha - 2Y/E - \beta \geq 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial f_{\alpha,\beta}}{\partial \beta} &= E \cdot H(\alpha - \beta) + E_h \cdot H(\alpha - 2Y/E - \beta) - E \cdot H(\alpha - 2Y/E - \beta)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Ovako određena tranziciona kriva prvog reda (izraz **(3.13)**) se diferencira dva puta po graničnim parametrima α i β kako bi se dobila Prajzakova funkcija. Ta funkcija je definisana samo na pravama $\alpha - \beta = 0$ and $\alpha - \beta = 2Y/E$, odnosno data je sa:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_{\alpha,\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} &= E \delta(\alpha - \beta) + E_h \delta(\alpha - 2Y - \beta) - E \delta(\alpha - 2Y - \beta) \\
&= E(\delta(\alpha - \beta) + (E_h - E)\delta(\alpha - 2Y - \beta))
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\alpha,\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{E}{2} (\delta(\alpha - \beta) + (E - E_h)\delta(\alpha - 2Y - \beta)) \tag{3.16}$$

Izraz za napon kao odgovor na deformaciju kao ulaz se definiše prema:

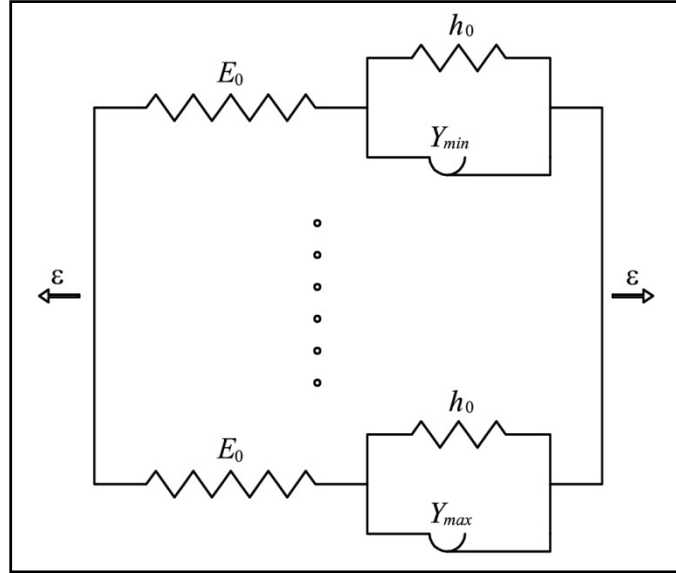
$$\sigma(t) = \frac{E}{2} \left[\int \delta(\alpha - \beta) \cdot G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta + (E - E_h) \int \delta(\alpha - 2Y - \beta) \cdot G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \right] \tag{3.17}$$

Pošto je prvi integral u izrazu **(3.17)** definisan samo kada je $\beta = \alpha$, a drugi integral kada je $\beta = \alpha - 2Y/E$, parameter β se može eliminisati iz izraza **(3.17)**.

$$\sigma(t) = \frac{E}{2} \left[\int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha + (E - E_h) \int_{2Y/E - \sigma_0}^{\sigma_0} G_{\alpha,\alpha - 2Y/E} \varepsilon(t) d\alpha \right] \tag{3.18}$$

Prvi deo na desnoj strani izraza **(3.18)** predstavlja elastični deo napona, a drugi plastični deo napona. Za sistem od beskonačno mnogo jediničnih troelementnih modela, povezanih paralelno, sa različitom raspodelom granice tečenja $Y_{min} \leq Y \leq Y_{max}$, ukupni napon je:

$$\sigma(t) = \int_{Y_{min}}^{Y_{max}} p(Y) \sigma(Y, t) dY \quad (3.19)$$



Slika 3.4 Paralelna veza beskonačno mnogo jediničnih troelementnih modela sa različitom granicom tečenja.

Može se usvojiti pretpostavka da svaki jedinični element ima različitu granicu tečenja a iste module elastičnosti i ojačanja, što može da predstavlja realno ponašanje materijala [62]. $\sigma(Y, t)$ je napon koji odgovara jediničnom elementu sa granicom tečenja Y a $p(Y)$ je funkcija raspodele granice tečenja. Ako je funkcija raspodele uniformna (kao u poglavlju 3.1), onda je ukupni napon kao rezultat unosa (deformacije) dobijen prema:

$$\sigma(t) = \frac{E}{2} \frac{1}{Y_{max} - Y_{min}} \int_{Y_{min}}^{Y_{max}} \left[\int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} G_{\alpha, \alpha} \epsilon(t) d\alpha dY + (E - E_h) \int_{2Y - \sigma_0}^{\sigma_0} G_{\alpha, \alpha - 2Y} \epsilon(t) d\alpha dY \right] \quad (3.20)$$

Elastoplastično ponašanje materijala, koje može biti predstavljeno izrazom (3.21), prikazano je na slici 3.5(a), a stanje u Prajzakovom trouglu definisanom ovakvim modelom, u proizvoljnom trenutku je prikazano na slici 3.5(b),

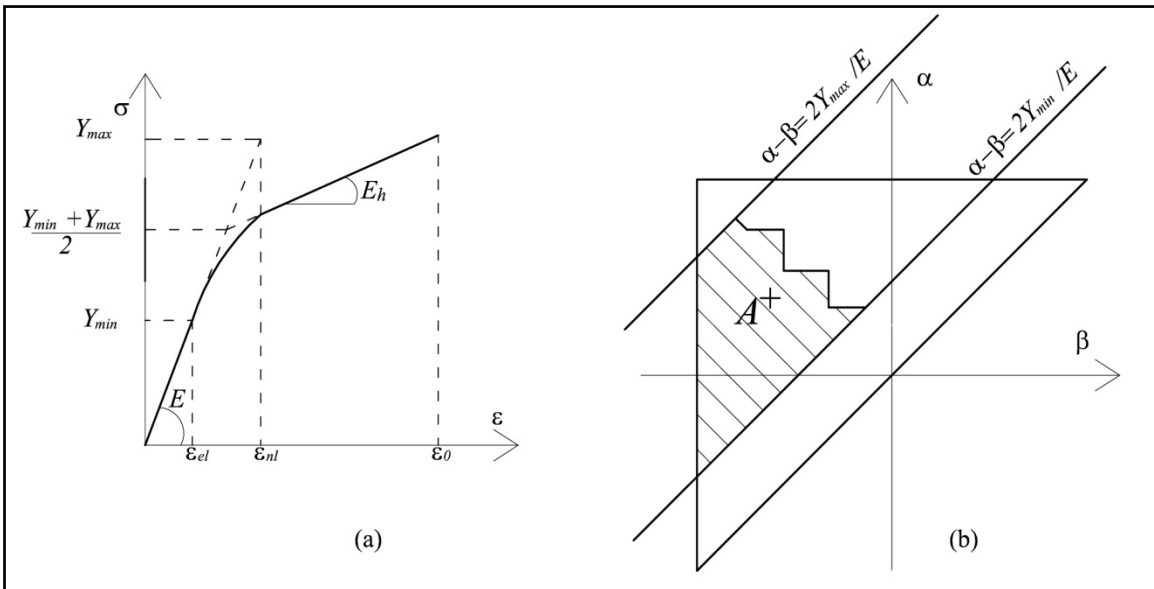
Pošto prvi integral u izrazu (3.20) ne mora da zavisi od Y , a na osnovu drugog integrala je $\alpha + \beta = 2Y/E$, moguće je ponovo uvesti u izraz parameter β , sa smenom $d\beta/2 = dY/E$:

$$\sigma(t) = \frac{E}{2} \left[\int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{(E - E_h)}{2} \frac{1}{Y_{max} - Y_{min}} \iint_A G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \right] \quad (3.21)$$

$$\sigma(t) = \frac{E}{2} \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} G_{\alpha,\alpha} \sigma(t) d\alpha + \frac{E(E - E_h)}{4} \frac{1}{Y_{max} - Y_{min}} \iint_A G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta$$

gde domen integracije A u ovom slučaju predstavlja površinu trake između dve prave $\alpha - \beta = 2Y_{min}/E$ i $\alpha - \beta = 2Y_{max}/E$ u graničnom trouglu jer je samo tu definisana Prajzakova funkcija. Prvi deo izraza je i dalje elastična deformacija.

$$\frac{E}{2} \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha = E \frac{\varepsilon - (-\varepsilon)}{2} = E\varepsilon \quad (3.22)$$



Slika 3.5 (a) Naponsko-deformacijski odnos u materijalu za model definisan sa (3.21); (b) Proizvoljno stanje stepenaste linije $L(t)$ u Prajzakovom trouglu, koji određuje model materijala definisan sa (3.21)

3.3 DEFINISANJE JEDNAČINA ZA CIKLIČNO OPTEREĆENJE REŠETKASTIH NOSAČA U PLASTIČNOM DOMENU PRIMENOM METODE KONAČNIH ELEMENATA

Pošto je u ovoj disertaciji korišćen koncept matrice krutosti u metodi konačnih elemenata, gde su glavne nepoznate pomeranja, odnosno deformacije, konstitutivni model ponašanja materijala (veza napon-deformacija), koji je pogodniji je model sa beskonačno mnogo jediničnih troelementnih modela povezanih paralelno, gde je kao izlaz (odgovor) određen napon na osnovu odgovarajuće deformacije (ulaza). Konstitutivni model materijala sa rednom vezom jediničnih troelementnih modela sa obrnutim rasporedom ulaza i izlaza (deformacija kao rezultat unosa napona) je pogodniji za analizu konceptom matrice fleksibilnosti.

Da bi se definisao numerički algoritam za analizu rešetkastih nosača pri cikličnom opterećenju u plastičnom domenu, koji bi kasnije služio kao osnova za odgovarajuću analizu linijskih nosača, ponašanje materijala definisano Prajakovim modelom histerezisa je implementirano u jednačine metode konačnih elemenata [59], kao što je prikazano u ovom poglavlju.

Koristeći princip virtualnih pomeranja, moguće je definisati jednačine konačnih elemenata. Ako se samo analiziraju rešetkasti (truss) elementi, odnosno ako se zanemare zapreminske i površinske sile, moguća su samo spoljna opterećenja u čvorovima sistema. U metodi konačnih elemenata, konstrukcija (u ovom slučaju rešetka) se aproksimira kao skup diskretnih konačnih elemenata povezanih u čvorovima na svojim granicama. Početni izraz za princip virtualnih pomeranja glasi:

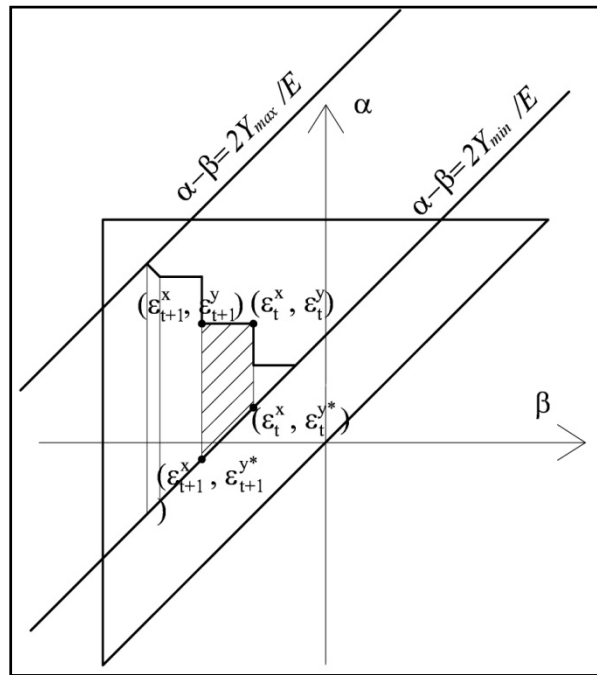
$$\sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{\varepsilon}^{(m)T} \sigma^{(m)} dV^{(m)} = \sum_i \bar{u}^{iT} R_C^i \quad (3.23)$$

Gde je σ napon u stanju ravnoteže sa opterećenjem, a R_C^i predstavljaju koncentrisane sile, na čvoru i , usled zadatog opterećenja, \bar{u}^i predstavljaju virtualna pomeranja, $\bar{\varepsilon}^i$ odgovarajuće virtualne deformacije, a $m = 1, 2, \dots, k$, gde je k broj elemenata (štapova)

sistema. Ako se samo jedan element konstrukcije analizira, zamenom jednačine (3.21) u (3.23), dobija se:

$$\int_V \bar{\varepsilon}^T \frac{E}{2} \left[\int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha \right] dV - \int_V \bar{\varepsilon}^T \left[\frac{E(E - E_h)}{4} \frac{1}{Y_{max} - Y_{min}} \iint_A G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \right] dV = \bar{u}^T R_C \quad (3.24)$$

Pokazano je u [14] i [62] da za odgovarajuće određene granice $\varepsilon_{el} = Y_{min}/E$ i $\varepsilon_{nl} = Y_{max}/E$, formirani Prajzakov trougao u proizvoljnom trenutku i odgovarajući konstitutivni model mogu biti predstavljeni kao na slici 3.5.



Slika 3.6 Podela stepenaste linije $L(t)$ u Prajzakovom trouglu (definisano za model materijala određenog sa (3.21)) u proizvoljnom stanju.

Pokazano je takođe u [14], [15] da se prvi deo izraza odnosi na elastični deo aksijalno napregnutog elementa. Drugi deo izraza određuje plastični deo napona, kada deformacija u materijalu prekorači elastičnu granicu ($\varepsilon > \varepsilon_{el}$), a geometrijskom interpretacijom prikazanoj u poglavlju 2.2.2, je pokazano da to u stvari predstavlja razliku integrala na pozitivnom $A^+(t)$ i negativnom setu $A^-(t)$ Prajzakovog trougla. Očigledno je da se set $A^+(t)$ sastoji od sume N trapeza (slika 3.6) čija su temena koordinate ekstremnih vrednosti prethodne

istorije unosa, odnosno predstavlja funkciju predominantnih maksimalnih i minimalnih vrednosti unosa – deformacije $(\varepsilon_t^x, \varepsilon_t^y)$

$$A^+(t) = \sum_{t=1}^N \left[(\varepsilon_t^x - \varepsilon_{t+1}^x) (\varepsilon_{t+1}^y - \varepsilon_{t+1}^{y*} + \varepsilon_t^y - \varepsilon_t^{y*}) / 2 \right] \quad (3.25)$$

S obzirom da se koristi metoda konačnih elemenata čije su glavne nepoznate pomeranja, da bi se definisala ista, potrebno je uspostaviti vezu između odgovarajućih veličina pomeranja i deformacija. Ukoliko se zanemari uticaj velikih pomeranja i velikih deformacija na analizu, drugi (plastični) deo izraza za napon postaje:

$$\iint_A G_{\alpha,\beta} \times \varepsilon(t) \times d\alpha d\beta = \iint_A G_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} \times \Delta u(t) \times d\bar{\alpha} d\bar{\beta} = A^+(t) - A^-(t) = \frac{1}{L} \times u_{pl} = \varepsilon_{pl} \quad (3.26)$$

Gde ε_{pl} i u_{pl} predstavljaju razlike pozitivnih i negativnih setova u Prajzakovom trouglu gde su funkcije unosa aksijalna deformacija i promena dužine štapa respektivno. Zamenjujući izraz (3.26) u (3.24), dobija se:

$$\begin{aligned} & \bar{u}^{(m)T} \left[\int_{V^{(m)}} B^{(m)T} E B^{(m)} dV^{(m)} \right] \bar{u}^{(m)} \\ & - \bar{u}^{(m)T} \left[\int_{V^{(m)}} B^{(m)T} \frac{E(E - E_h)}{4(Y_{max} - Y_{min})} \frac{1}{(L^{(m)})^2} dV^{(m)} \right] \cdot u_{pl}^{(m)} = \bar{u}^{(m)T} R_C^i \end{aligned} \quad (3.27)$$

gde matrica B predstavlja vezu između deformacija i pomeranja za aksijalno napregnut štاپ. Izrazi u zagradama u prvom i drugom delu izraza (3.27) predstavljaju elastičnu i plastičnu matricu krutosti respektivno.

$$K_{el}^{(m)} \bar{u}^{(m)} - K_{pl}^{(m)} \cdot u_{pl}^{(m)} = R_C^i \quad (3.28)$$

Za skup konačnih elemenata, izraz iz (3.28) postaje

$$K_{el} U - K_{pl} \cdot U_{pl} = R \quad (3.29)$$

Važno je naglasiti da su elementi vektora U pomeranja čvora u globalnom sistemu, dok su elementi vektora U_{pl} razlike pozitivnih i negativnih setova u odgovarajućem Prajzakovom trouglu transformisane u globalnom sistemu. Za rešavanje problema nelinearne statičke analize, može biti primenjena iterativna procedura koristeći (Newton-Raphson) metodu sa početnim naponom.

$$K_{el}\Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (3.30)$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \quad (3.31)$$

$${}^{t+\Delta t}F^{(i)} = K_{el} {}^{t+\Delta t}U^{(i)} + K_{pl} {}^{t+\Delta t}U_{pl}^{(i)} \quad (3.32)$$

Procedura za iteraciju i u jednačinama (3.30),(3.31),(3.32) se ponavlja sve dok odgovarajući kriterijum konvergencije ne bude ispunjen. Prema definisanim procedurama za numeričku analizu u jednačinama, algoritam za elastoplastičnu analizu rešetkastih nosača pri cikličnom opterećenju je određen u c++ programskom jeziku (poglavlje 6). Tokom svakog koraka i iteracije, u svakom štapu rešetkastog nosača, određen je plastični deo iz jedančine (3.26), na osnovu trenutnog stanja odgovarajućeg štapa i onda izvršena njegova transformacija u globalnu matricu iz jednačine (3.29). Slično se i definišu jednačine u slučaju dinamičke analize, gde se koristio Newmark-ov postupak direktne integracije sa konstantnim ubrzanjem. U numeričkim primerima se zanemario efekat prigušenja, pa je odgovarajući algoritam dobijen i prikazan u izrazima (3.33),(3.34),(3.35),(3.36):

$$M\ddot{U} + K_{el}U - K_{pl} \cdot U_{pl} = R \quad (3.33)$$

$$\hat{K}_{el}\Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} - M\left(\frac{4}{\Delta t^2}({}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} - {}^tU) - \frac{4}{\Delta t}{}^t\dot{U} - {}^t\ddot{U}\right) \quad (3.34)$$

$$\hat{K}_{el} = K_{el} + \frac{4}{\Delta t^2}M \quad (3.35)$$

$${}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} = K_{el} {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + K_{pl} {}^{t+\Delta t}U_{pl}^{(i-1)} \quad (3.36)$$

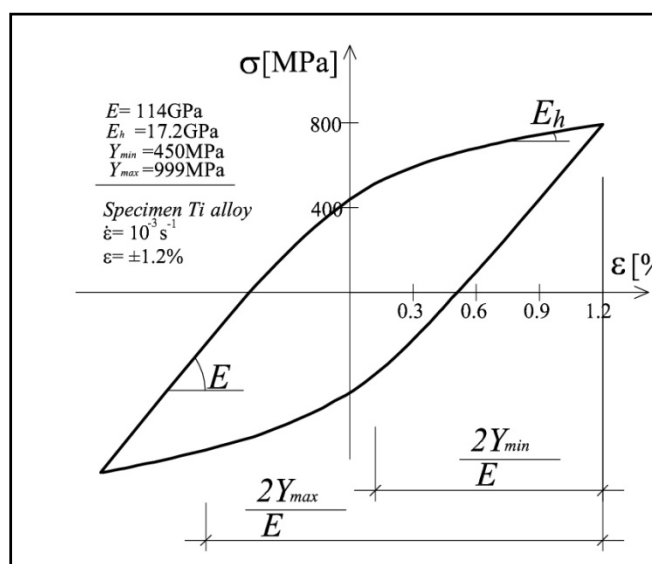
Za zadate karakteristike materijala, odgovarajuća naponsko-deformacijska kriva definisana Prajzakovim modelom histerezisa (3.21) je predstavljena na slici 3.5, gde je ε_{el} elastična, a ε_{nl} plastična granica deformacije materijala, odnosno početak linearnog ojačanja materijala. Potpuno ekvivalentno se mogu definisati odgovarajuće granice napona prema slici 3.5 koje se i najčešće koriste kao parametri plastičnog ponašanja materijala, ali je zbog primenjenog histerezisnog operatora bolje koristiti deformacione granice. ε_0 je maksimalna deformacija materijala i ona i ne mora da bude definisana sa stanovišta formulacije modela ponašanja materijala, ali je neophodna da bi se praktično definisale granice Prajzakovog trougla zbog računanja odgovarajućih površina, odnosno razlike tih površina.

3.4 ODREĐIVANJE PARAMETARA ZA PRAJZAKOV MODEL HISTEREZISA NA OSNOVU EKSPERIMENTALNIH REZULTATA

Sa inženjerske tačke gledišta, najpraktičnija su ona rešenja problema koja imaju optimalan odnos tačnosti rezultata i kompleksnosti, odnosno zahtevnosti postupka. Određivanje parametara predmetnog modela je relativno jednostavno, a rezultati koji se dobijaju, kao što će biti prikazano u ovom poglavlju i u numeričkim primerima, imaju zadovoljavajuću tačnost. Da bi se modeliralo ponašanje materijala u plastičnom domenu, potrebno je definisati sve parametre koje odgovarajući model poseduje. Klasični modeli ciklične plastičnosti koji se koriste za modeliranje ciklične plastičnosti imaju broj parametara koji je određen sa složenošću fenomena koji odgovarajući model aproksimira. U poglavlju 1.3 su pomenuti najpoznatiji modeli ciklične plastičnosti, od jednostavnijih modela kao što su Armstrong-Frederick-ov model, do složenijih modela kao što su Mroz-ov, Chaboche-ov, koji imaju veći broj parametara jer su namenjeni za modeliranje fenomena cikličnog opterećenja materijala pri višeaksijalnom naponskom stanju. U poglavlju 2.3 su navedeni neki od postupaka za određivanje parametara modela histerezisnog operatora Bouc-Wen tipa.

Određivanje parametara za analizirani Prajzakov model histerezisa je jednostavno, jer zahteva određivanje samo četiri parametra koji imaju i fizičko značenje, među kojima su i modul elastičnosti E i modul ojačanja E_h [59].

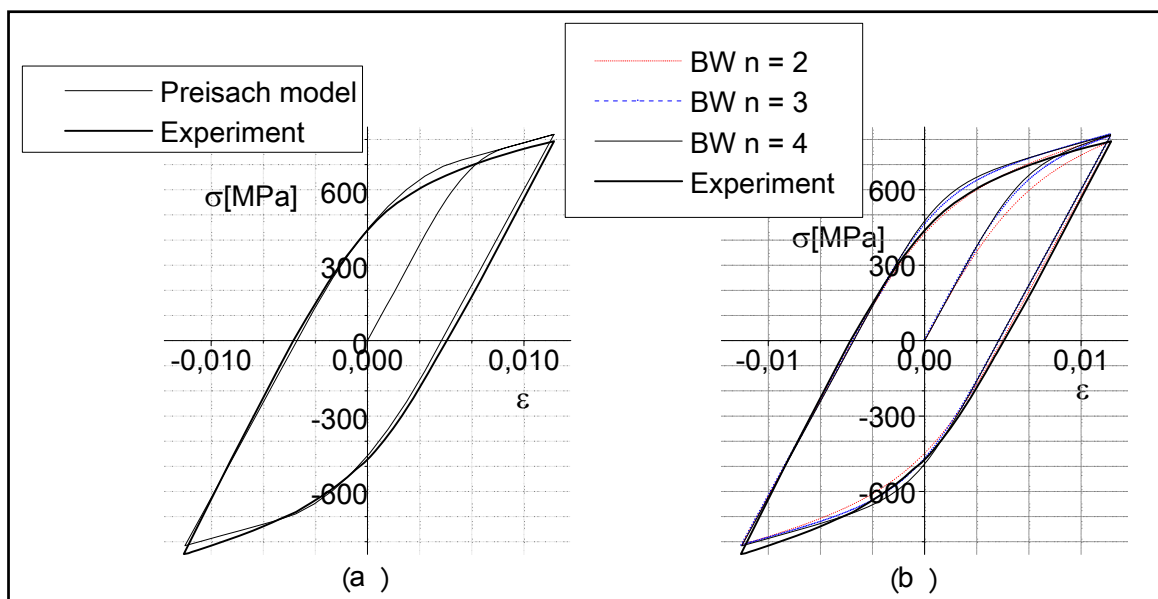
Naponsko-deformacijski odnos materijala u plastičnom domenu koji predstavlja ovaj model se sastoji od dva dela: linearnog i nelinearnog. Nelinearni deo je određen usvajanjem odgovarajućih vrednosti za Y_{min} i Y_{max} , pored određivanja modula elastičnosti E i modula ojačanja E_h , koji definiše linearni deo ojačanja materijala. Analizirajući eksperimentalne histerezisne petlje, ovi parametri mogu lako da se odrede.



Slika 3.7 Rezultati eksperimenta cikličnog opterećenja (iz rada Kujawskog [64]) – stabilna histerezisna petlja.

S obzirom da Prajzakov model histerezisa modelira simetričnu histerezisnu petlju (Masing tip) dovoljno je posmatrati i samo jednu polovinu petlje, ili čak rezultate monotonog testa. U radu Kujawskog [64] su prikazani rezultati testa cikličnog opterećenja legure Titanijuma. Aksijalni test kontrolisane deformacije od $\epsilon = \pm 1.2\%$ je sproveden brzinom od 10^{-3} s^{-1} . Ustaljena histerezisna petlja je prikazana na slici 3.7, a analiziranjem geometrije krive, određeni su i prikazani odgovarajući parametri za Prajzakov model histerezisa. Nagib krive u elastičnom delu definiše modul elastičnosti od $E = 114 \text{ GPa}$, a linearni deo (nagib) ojačanja određuje modul ojačanja $E_h = 17.2 \text{ GPa}$. Ako se posmatra Prajzakov trougao (slika

3.5), može se zaključiti da elastični deo rasterećenja na histerezisnoj petlji određuje vrednost konstantne deformacije $2Y_{min}/E$, dok oba dela, i elastični i plastični deo rasterećenja na histerezisnoj petlji, određuju vrednost konstantne deformacije $2Y_{max}/E$. Na osnovu toga su određeni granični parametri napona $Y_{min}=450\text{MPa}$ i $Y_{max}=999\text{MPa}$. Ovako definisana histerezisna petlja ima odlično slaganje sa eksperimentalnim rezultatom sa kojim je određena (Slika 3.8).



Slika 3.8 Rezultati eksperimenta cikličnog opterećenja iz [64] (a) Poređenje rezultata dobijenog Prajzakovim modelom i eksperimentalnih rezultata; (b) Poređenje rezultata dobijenog Bouc-Wen-ovim modelom (BW) i eksperimentalnih rezultata;

U radu [59] su određeni i parametri modifikovanog Bouc-Wen-ovog modela koji je implementiran u komercijalni program za analizu konstrukcija SAP2000 [65], kao i parametri za odgovarajući model generalisane plastičnosti [66]. Za ovakav Bouc-Wen-ov model (koji nema mogućnost modeliranja degradacije krutosti, kao i efekta uštinuća) su svi parametri određeni sa iste eksperimentalne krive, ali je eksponent za prelaz iz elastične u plastičnu oblast variran ($n=2,3,4$) kako bi se dobila što bolja aproksimacija eksperimenta. Nakon određivanja parametara za Prajzakov i Bouc-Wen-ov model, izvršeno je poređenje aproksimacija eksperimentalne krive sa ovim modelima (slika 3.8).

3.5 DEFINISANJE GEOMETRIJSKE NELINEARNOSTI

Efekti geometrijske nelinearnosti mogu biti značajni u elastoplastičnoj analizi jer se u takvoj analizi podrazumeva da se u materijalu javljaju značajne deformacije. I u elastičnoj analizi, kao i u plastičnoj, uzimanje u obzir deformisane konfiguracije konstrukcije može značajno da utiče na rezultate odgovarajuće analize, ali se kriterijumi koji određuju primenu takve analize mogu razlikovati [67]. Različite mere deformacije (Green-ova, logaritamska, inženjerska) određuju različita rešenja geometrijski nelinearne analize. S obzirom na pristup korišćen u ovoj disertaciji, definisana je formulacija geometrijske nelinearnosti koristeći rotirajuću inženjersku deformaciju **(3.37)** koja se odnosi na pravac rotirajućeg elementa – štapa. Pokazano je u radu Crisfield-a [68] da je konačan izraz za tangentnu matricu krutosti (zbir linearne i nelinearne) isti i u slučaju korotacione formulacije efekata geometrijske nelinearnosti.

$$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (3.37)$$

U izrazu **(3.37)**, l_0 i l su početna i deformisana dužina elementa – štapa konstrukcije. Tangentna matrica krutosti jednog štapa K_T može da se predstavi kao zbir linearne matrice krutosti K_{LIN} , definisane u elastičnoj analizi i matrice krutosti koja uvodi efekte geometrijske nelinearnosti K_{NLIN} :

$$K_T = K_{LIN} + K_{NLIN} \quad (3.38)$$

Matrice K_{LIN} i K_{NLIN} predstavljaju globalne matrice krutosti štapa u odgovarajućoj deformisanoj konfiguraciji konstrukcije. Promena tih matrica u zavisnosti od konfiguracije konstrukcije se postiže promenom odgovarajućih matrica transformacije T u toku pomeranja konstrukcije:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \\ \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

gde su x, y, z ose lokalnog sistema štapa koji menja položaj, a X, Y, Z ose globalnog sistema. Globalne linearne i nelinearne matrice krutosti se mogu dobiti na osnovu lokalnih K_{LOK} i K_S prema sledećim izrazima:

$$K_{LIN} = T \cdot K_{LOK} \cdot T^T \quad (3.40)$$

$$K_{NLIN} = K_S - T \cdot K_S \cdot T^T \quad (3.41)$$

gde je K_{LOK} elastična lokalna matrica krutosti jednog elementa (izraz **3.28**) a K_S matrica geometrijske nelinearnosti jednog elementa:

$$K_S = \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

gde je P aksijalna sila u elementu u elastičnoj analizi. Odgovarajući elementi matrice u izrazu **(3.42)** se odnose na stepene slobode štapa rešetke u prostoru. U slučaju elastoplastične analize, na sličan način kao što je dobijena globalna matrica krutosti K_{LIN} iz izraza **(3.40)** za elastičnu analizu, definiše se i globalna matrica krutosti za elastoplastičnu analizu na osnovu **(3.28)**. Tada i za izraz **(3.42)** važi da je sila P aksijalna sila u elementu u elastoplastičnoj analizi.

4 ELASTOPLASTIČNA ANALIZA REŠETKASTIH NOSAČA SA OŠTEĆENJEM PRI CIKLIČNOM OPTEREĆENJU

4.1 MODELIRANJE OŠTEĆENJA

Oštećenje u materijalu može da se javi u više oblika kao što su prsline, šupljine, hemijska oštećenja ili neka slična pojava. S obzirom na mehanizme koji su od značaja za mehaniku oštećenja, analiza se može sprovesti od mikro-nivoa (gde se koriste i principi mehanike loma), pa do makro-nivoa. Mehanizmi koji dovode do oštećenja za odgovarajuće vrste materijala su različiti, pa su i pristupi različiti. Za analizu linijskih elemenata, samim tim i predmetnu analizu je najpogodniji makro-pristup (inženjerska mehanika oštećenja) sa osnovama termodinamike i principima mehanike kontinuuma sa oštećenjem (continuum damage mechanics – CDM).

Osnovni principi mehanike kontinuuma sa oštećenjem su predstavljeni u radovima Lemaitre-a [69],[70] (gde se koristi termin inženjerska mehanika oštećenja) gde je jedna od glavnih karakteristika takozvana varijabla (promenljiva veličina) oštećenja, koju je definisao Kachanov [71], i koja se može biti skalarna ili tenzorska veličina. Oštećenja se odnose na nepovratne procese u mikrostrukturi materijala, pa se analiza može podići na viši nivo posmatranjem akumulirane plastične deformacije za koju se može reći da vodi do loma [72]. Nasuprot konceptu eksperimentalnog određivanja evolucije varijable oštećenja korišćenog u radovima [73], [74], u radovima Krajčinovića i Šumarca [75], [76] su prikazani samo-konzistentni modeli za definisanje oštećenja u materijalu. Na osnovu fizičke i matematičke veze plastičnih deformacija i oštećenja, de Borst je u radovima [73], [77] prikazao modele gradijentne plastičnosti i oštećenja sa definisanim algoritmima za proračun. Takav univerzalan koncept može da bude primenjen i za višeaksijalno i za manje složeno, jednoaksijalno naponsko stanje.

U poglavlju 4.1.1 je određen prvi pristup u modeliranju oštećenja pri jednoaksijalnom naponskom stanju na taj način što je definisan jedinični analogni element, sličan elementu sa slike 3.1, sa osobinom loma – trajne eliminacije tog elementa [58]. Onda je primenjen sličan pristup kao u poglavlju 3.2 za definisanje ponašanja materijala koristeći Prajzakov model histerezisa. U poglavlju 4.1.2 je korišćen princip prikazan u radu [73] za povezivanje

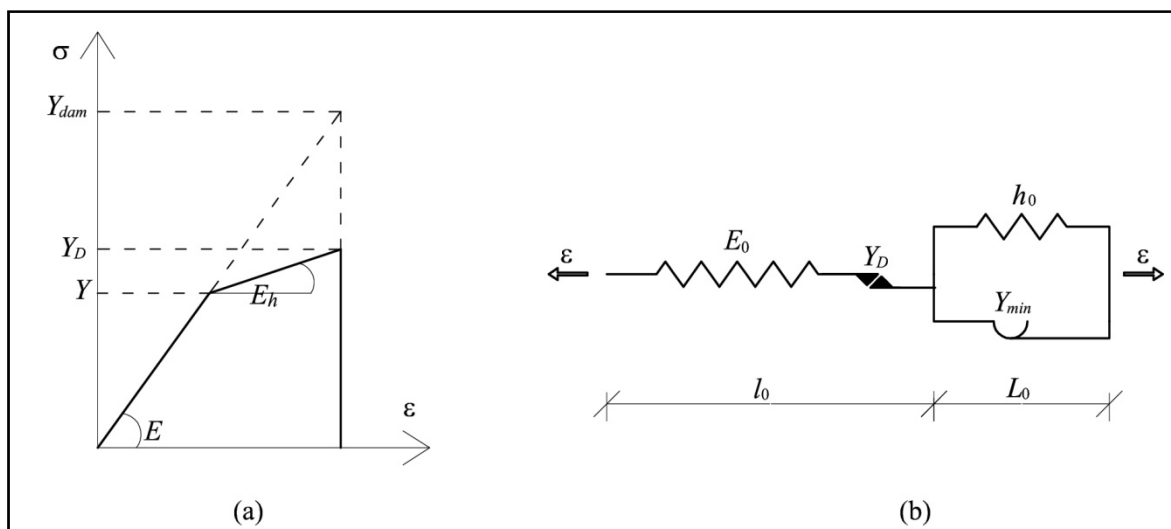
teorija plastičnosti i oštećenja, na takav način što se elastoplastično ponašanje definisalo sa modelom iz poglavlja 3.2 a oštećenje se uvelo koristeći osnovne principe mehanike kontinuuma sa oštećenjem (CDM).

4.1.1 Primena Prajzakovog histerezisnog operatora u modeliranju oštećenja

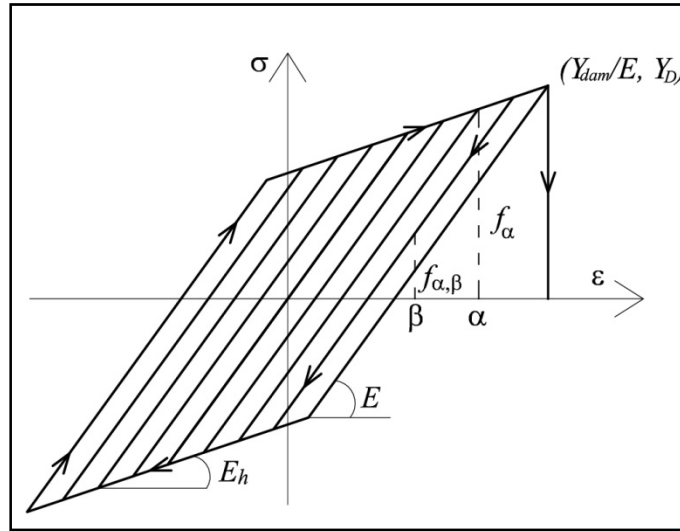
U prvom pristupu je oštećenje u materijalu definisano preko elementa sa slike 4.1, a koristeći principe iz poglavlja 3, što rezultira analitičkim rešenjem u zatvorenom obliku za ponašanje materijala koje uključuje i elastoplastično ponašanje i oštećenje pri jednoaksijalnom naponskom stanju.

Oštećenje može da se implementira u analogni jedinični troelementni model [14], [15] koristeći novi element koji simulira oštećenje pri zatezanju sa naponskom granicom oštećenja Y_D , kao što je prikazano na slici 4.1. Istim konceptom se može definisati sličan element koji modelira samo elastično ponašanje sa oštećenjem koristeći Prajzakov model histerezisa.

Na slici 4.1.(a) je prikazano odgovarajuće elastoplastično ponašanje sa lomom, gde napon zatezanja Y_D , podrazumeva potpuni lom elementa.



Slika 4.1 (a) Elastično – linearno plastično ponašanje materijala sa oštećenjem gde potpuni lom nastaje pri deformaciji Y_{dam}/E ; (b) Jedinični model koji reprodukuje ponašanje pod (a).



Slika 4.2 Histerezisna petlja definisana materijalnim modelom sa slike 4.1 gde je funkcija ulaza – deformacija.

Kao što je predstavljeno u poglavlju 3, određivanje tranzicione krive prvog reda je prvi korak u definisanju Prajzakove funkcije koja se koristi za opisivanje mehaničkog ponašanja materijala. Za jedinični analogni model sa slike 4.1, gde funkcija unosa predstavlja deformaciju, Prajzakova funkcija se može odrediti [58] na osnovu histerezisne nelinearnosti prikazane na slici 4.2.

$$f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha} - E(\alpha - \beta) \quad za \quad \alpha - 2\frac{Y}{E} - \beta < 0 \quad (4.1)$$

$$f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha} - 2Y - E_h(\alpha - \beta - 2\frac{Y}{E}) \quad za \quad \alpha - 2\frac{Y}{E} - \beta \geq 0 \quad (4.2)$$

$$f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha} - Y_D = 0 \quad za \quad \alpha - 2\frac{Y}{E} - \beta > 0, \alpha \geq Y_{dam}/E. \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial f_{\alpha,\beta}}{\partial \beta} = E \cdot H(\alpha - \beta) - (E - E_h) \cdot H(\alpha - \beta - 2\frac{Y}{E}) - E_h \cdot H(\alpha - \beta - 2\frac{Y}{E}) \cdot H(\alpha - Y_{dam}/E) + Y_D \cdot \delta(\alpha - Y_{dam}/E). \quad (4.4)$$

Ovako određena tranziciona kriva prvog reda ((4.1),(4.2),(4.3)) se diferencira dva puta po graničnim parametrima α i β kako bi se dobila Prajakova funkcija (poglavlje 2.2). Ta funkcija je definisana samo na pravama $\alpha-\beta=0$, $\alpha-\beta=2Y/E$ i $\alpha=Y_{dam}/E$ odnosno data je sa izrazom (4.5). Sa H je označena Heavyside-ova, a sa δ Dirac-ova delta funkcija.

$$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\alpha, \beta}}{\partial \beta \partial \alpha} = [E \cdot \delta(\alpha - \beta) - (E - E_h) \cdot \delta(\alpha - \beta - 2\frac{Y}{E}) - Y_D \cdot \delta(Y_{dam} / E - \alpha) - E_h \cdot \delta(\alpha - \beta - 2\frac{Y}{E}) \cdot H(\alpha - Y_{dam} / E) - E_h \cdot H(\alpha - \beta - 2\frac{Y}{E}) \cdot \delta(\alpha - Y_{dam} / E)] / 2. \quad (4.5)$$

Izraz za napon kao rezultat operatora kojem je funkcija unosa deformacija je:

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \iint_{\alpha \geq \beta} P(\alpha, \beta) G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta = \frac{E}{2} \int_{-u^0}^{u^0} \int_{-u^0}^{\alpha} \delta(\alpha - \beta) \cdot G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \\ & \frac{E - E_h}{2} \int_{-u^0}^{u^0} \int_{-u^0}^{\alpha} \delta(\alpha - \beta - 2\frac{Y}{E}) \cdot G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \\ & \frac{E_h}{2} \int_{-u^0}^{u^0} \int_{-u^0}^{\alpha} \delta(\alpha - \beta - 2\frac{Y}{E}) \cdot H(\alpha - Y_{dam} / E) \cdot G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \\ & \frac{E_h}{2} \int_{-u^0}^{u^0} \int_{-u^0}^{\alpha} H(\alpha - \beta - 2\frac{Y}{E}) \cdot \delta(\alpha - Y_{dam} / E) \cdot G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \\ & \frac{1}{2} \int_{-u^0}^{u^0} \int_{-u^0}^{\alpha} Y_D \cdot \delta(\alpha - Y_{dam} / E) \cdot G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dirac-ova funkcija u zadatim intervalima integrala određuje gde odgovarajući podintegralni izraz postoji. Smenom parametra β i uvođenjem sistema od beskonačno mnogo jediničnih elemenata, dobija se izraz (4.7). Kao i u poglavlju 3, može se usvojiti pretpostavka da svaki jedinični element ima različitu granicu tečenja (Y_{min} do Y_{max}) i loma (Y_{DI} do Y_{DN}), a iste module elastičnosti i ojačanja. Ukoliko se usvoji se da je raspodela granica tečenja $Y_{min} < Y < Y_{max}$ i granica loma $Y_{DI} < Y < Y_{DN}$ uniformna (slika 4.3) kao u poglavlju 3, dobija se sledeći izraz za napon:

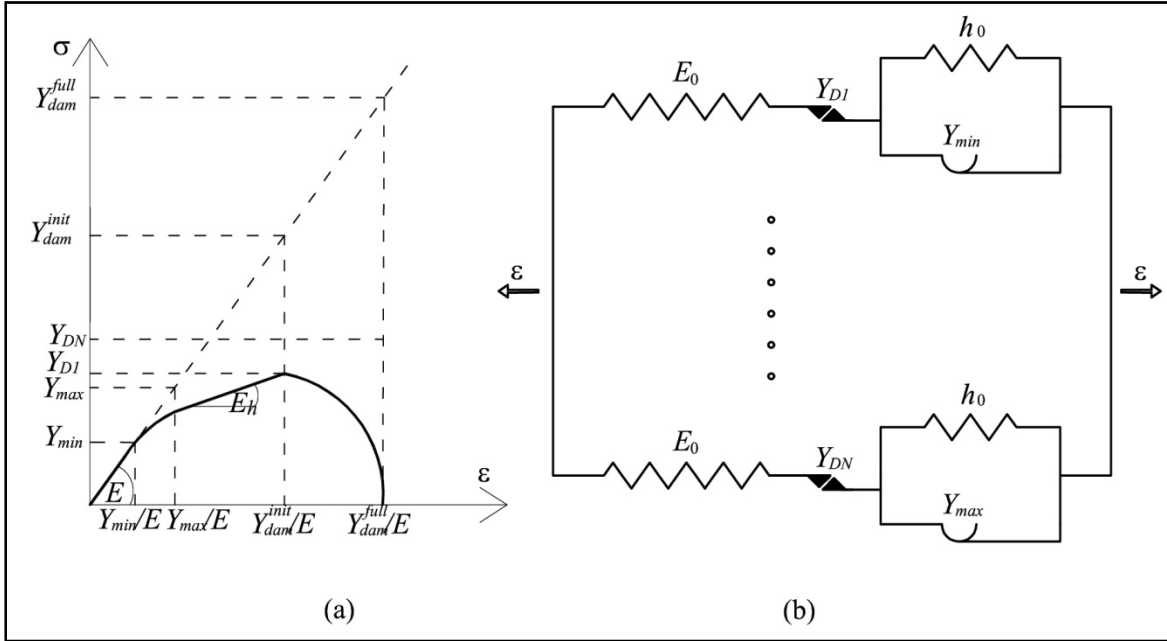
$$\begin{aligned}
\sigma(t) = & \frac{E}{2} \int_{-u_0}^{u_0} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha - \frac{E - E_h}{2(Y_{max} - Y_{min})} \int_{Y_{min}}^{Y_{max}} \left[\int_{\frac{2Y}{E} - u_0}^{\alpha} G_{\alpha,\alpha - \frac{2Y}{E}} \varepsilon(t) d\beta \right] dY - \\
& \frac{E_h}{2(Y_{DN} - Y_{D1})} \int_{Y_{D1}}^{Y_{DN}} \left[\int_{\frac{2Y}{E} - u_0}^{\alpha} G_{\alpha,\alpha - \frac{2Y}{E}} \varepsilon(t) d\beta \cdot H(\alpha - Y_{dam} / E) \right] dY_D - \\
& \frac{E_h}{2(Y_{DN} - Y_{D1})} \int_{Y_{D1}}^{Y_{DN}} \left[\int_{-u_0}^{\alpha} G_{Y_{dam}/E,\beta} \varepsilon(t) d\beta \cdot H(\alpha - \beta - 2\frac{Y}{E}) \right] dY_D - \\
& \frac{1}{2(Y_{DN} - Y_{D1})} \int_{Y_{D1}}^{Y_{DN}} Y_D \left[\int_{-u_0}^{\alpha} G_{Y_{dam}/E,\beta} \varepsilon(t) d\beta \right] dY_D .
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Prvi deo na desnoj strani izraza (4.7) predstavlja elastični deo napona, a ostali delovi utiču na plastični deo deformacije, kao i na oštećenje. Pošto prvi integral u izrazu (4.7) ne zavisi od Y , a na osnovu odgovarajućih veza β i $2Y/E$, kao i β i Y_{dam}/E , moguće je ponovo uvesti u izraz parameter β :

$$\begin{aligned}
\sigma(t) = & \frac{E}{2} \iint_{A1} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \\
& \frac{E \cdot (E - E_h)}{4(Y_{max} - Y_{min})} \iint_{A2} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \frac{E_h^2}{2(Y_{DN} - Y_{D1})} \iint_{A3} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \\
& \frac{E_h}{2(Y_{dam}^{full} / E - Y_{dam}^{init} / E)} \iint_{A4} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \frac{Y_{D1}}{2(Y_{dam}^{full} / E - Y_{dam}^{init} / E)} \iint_{A5} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta .
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Prvi deo izraza se i dalje može shvatiti kao napon pri elastičnoj analizi:

$$\frac{E}{2} \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} G_{\alpha,\alpha} \sigma(t) d\alpha = E \frac{\varepsilon - (-\varepsilon)}{2} = E \cdot \varepsilon \tag{4.9}$$



Slika 4.3 (a) Naponsko-deformacijski odnos u materijalu za model definisan sa (4.8); (b) Paralelna veza beskonačno mnogo jediničnih modela (sa četiri elementa) sa različitom granicom tečenja i loma.

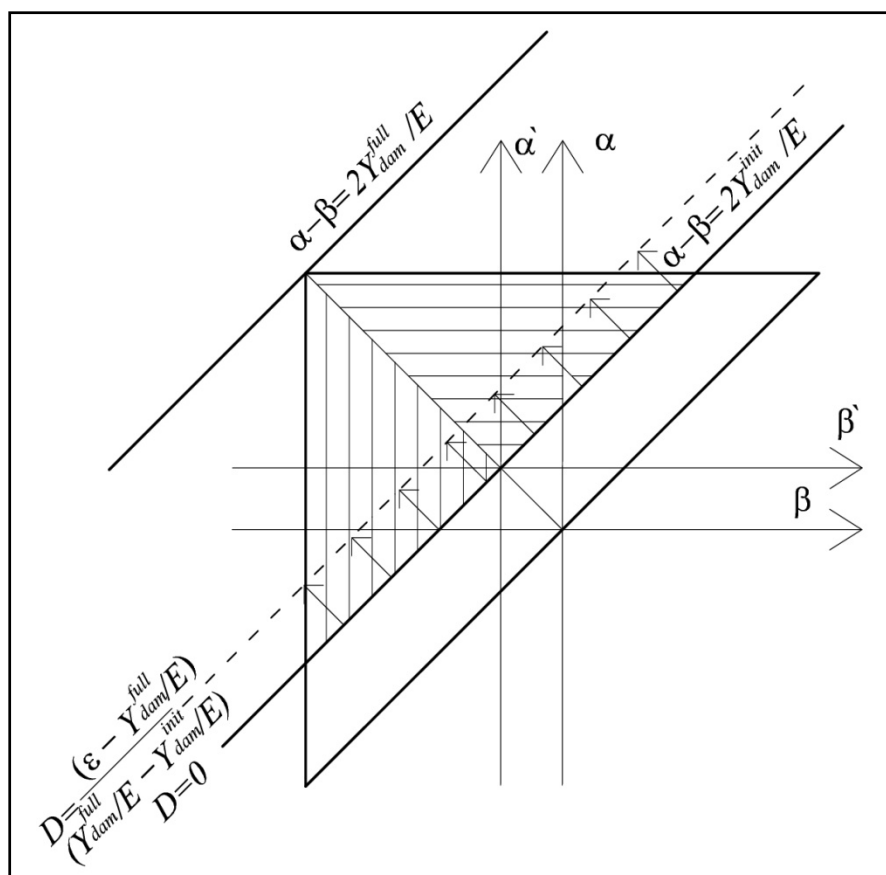
Domeni integracije A_2 , A_3 predstavljaju, na osnovu geometrijske interpretacije, odgovarajuće površine u Prajzakovim trouglovima ili trakama (slika 3.5 i slika 4.4), dok su A_1, A_4 i A_5 samo granice za integraciju.

$$A_1: \alpha \geq \beta; \quad A_4: \alpha \geq \beta, \alpha - \beta \geq 2Y_{dam} / E, \alpha \geq Y_{dam} / E; \quad A_5: \alpha \geq \beta, \alpha \geq Y_{dam} / E \quad (4.10)$$

Prajzakov trougao za domen integracije A_2 određuje elastoplastično ponašanje materijala, kao što je pokazano na slici 3.5 u poglavlju 3. Prajzakov trougao za domen integracije A_3 određuje elastoplastično ponašanje materijala sa oštećenjem, a geometrijskom interpretacijom se zaključuje da su integrali, koji se odnose na domene integracije A_2 i A_3 , jednaki razlici odgovarajućih pozitivnih i negativnih setova. Oštećenje se manifestuje kroz degradaciju modula elastičnosti i ojačanja E i E_h .

Za Prajzakov trougao sa domenom integracije A_3 je specifično to što se menja (smanjuje) aktivna površina integracije dok oštećenje raste. Deformaciona granica inicijacije oštećenja je Y_{dam}^{init}/E ($D=0$), ali se ova granica povećava sa sledećim većim vrednostima deformacija,

što rezultira translacijom donje granične linije (slika 4.4). Može se reći da je D skalarna varijabla oštećenja [71] koja predstavlja odnos broja eliminisanih (usled loma) jediničnih elemenata n i ukupnog broja elemenata N u materijalu koji je određen sa elementima predstavljenim na slici 4.3. Pošto se u ovako definisanom konceptu, oštećenje javlja samo usled napona zatezanja, vertikalna linija u Prajzakovom trouglu sa domenom $A3$, prilikom opadajućih segmenata funkcije unosa, nema uticaj na bilo kakvu promenu u tom domenu.



Slika 4.4 Prajzakov trougao za domen integracije $A3$ sa promenljivom (kliznom) donjom graničnom pravom

Ovako definisan izraz za napon (izraz 4.9) se koristi kako bi se dobila globalni vektor čvornih sila R_d koja se odnosi samo na oštećenja, i koja mora biti definisana u izrazu (3.29) za rešavanje sistema jednačina u globalnom sistemu u slučaju analize sa oštećenjem:

$$K_{el}U - K_{pl} \cdot U_{pl} - R_d = R \quad (4.11)$$

Ukoliko se preciznije analizira ovako definisan model oštećenja, na osnovu svih članova izraza (4.8), moguće je definisati odgovarajuće članove izraza (4.11).

4.1.2 Primena CDM pristupa u modeliranju oštećenja

U drugom pristupu [58], ponašanje materijala je definisano kombinacijom elastoplastične analize formulisane sa Prajakovim modelom histerezisa i izotropne teorije oštećenja formulisane u deformacijskom prostoru [73]. U ovom slučaju se koriste osnovni principi mehanike kontinuuma sa oštećenjem, pa se rešenje dobija u inkrementalno-iterativnom postupku.

Teorija oštećenja se implementira sa konceptom efektivnog napona uvodeći skalarnu varijablu oštećenja ω [70], [73], koja se menja od 0 (neoštećen materijal) do 1 (potpuno oštećen materijal):

$$\sigma = (1 - \omega) \hat{\sigma} \quad (4.12)$$

gde $\hat{\sigma}$ predstavlja efektivni napon u telu materijala bez oštećenja (u slučaju elastične ili elastoplastične analize), a σ predstavlja stvarni napon prouzrokovan oštećenjem. Efektivna deformacija neoštećenog tela materijala $\hat{\epsilon}$ se smatra jednakom efektivnoj deformaciji oštećenog tela materijala ϵ [77], [73]. Pošto se u ovoj disertaciji analiza ograničava na jednoaksijalno naponsko stanje sa homogenim ponašanjem svakog elementa (štapa) konstrukcije (rešetke), definicija lokalnog oštećenja je dovoljna i pogodna za implementaciju jer se smatra da je napon konstantan u svakom elementu konstrukcije. Usvojen je koncept, kao u prethodnom poglavlju, da se povećanje oštećenja javlja samo usled napona zatezanja. Na sličan način se mogu definisati oštećenja usled napona pritiska.

Dakle u ovom pristupu, formulacija plastičnosti ostaje zasnovana na primeni histerezisnog operatora [14]. Algoritam za elastoplastičnu analizu koja uključuje i oštećenje može da se

definiše kao što je prikazano u [73], gde je sličan algoritam korišćen za gradijentne teorije i za kompleksnija naponska stanja:

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= D^{ep} d\hat{\varepsilon} \\
 d\sigma &= (1-\omega) D^{ep} d\hat{\varepsilon} - d\omega \hat{\sigma} \\
 \sigma^{(i+1)} &= \sigma^{(i)} + (1-\omega^{(i)}) D^{ep(i+1)} d\varepsilon - d\omega \hat{\sigma}^{(i)} \\
 D^{ep(i+1)} d\varepsilon &= \hat{\sigma}^{(i+1)} - \hat{\sigma}^{(i)}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

U izrazu **(4.13)** D^{ep} predstavlja elastoplastičnu matricu materijala u višeaskijalnom naponskom stanju ili tangentni modul u predmetnoj jednoaksijalnoj analizi. Zbog toga $D^{ep} d\varepsilon$ predstavlja elastoplastični inkrement napona. Analizirajući vrednosti $\hat{\sigma}^{(i+1)}$, $\hat{\sigma}^{(i)}$, može se reći da one predstavljaju efektivne napone neoštećenog tela u elastoplastičnoj analizi u vremenskim inkrementima $i+1$ i i respektivno i oni mogu da se odrede pristupom iz poglavlja 3.2. Varijabla oštećenja ω može da se definiše kao funkcija parametra istorije oštećenja κ^d , i na osnovu odgovarajuće zavisnosti, ω raste od 0 do 1 kada parameter κ^d raste od inicijalne vrednosti (praga) κ^o do konačne vrednosti (loma) κ^u [74], [73]. Tačan razvoj (evolucija) oštećenja se definiše, slično kao u klasičnoj teoriji plastičnosti, preko funkcije koja ograničava elastoplastično ponašanje u naponskom ili deformacijskom prostoru i određuje inicijaciju oštećenja [74], [73], [78]:

$$f^d = \bar{\varepsilon} - \kappa^d . \tag{4.14}$$

gde je $\bar{\varepsilon}$ ekvivalentna mera deformacije. Ona se može usvojiti kao funkcija elastične deformacije, ali je realnije da i plastična deformacija ima svoj uticaj na oštećenja [79], što dovodi do kombinacija teorija koje uključuju oštećenje i plastičnost (Slika 4.5). Na sličan način, kao u izrazu **(4.11)**, definiše se globalni vektor čvornih sila koja je rezultat oštećenja na osnovu izraza **(4.13)**.

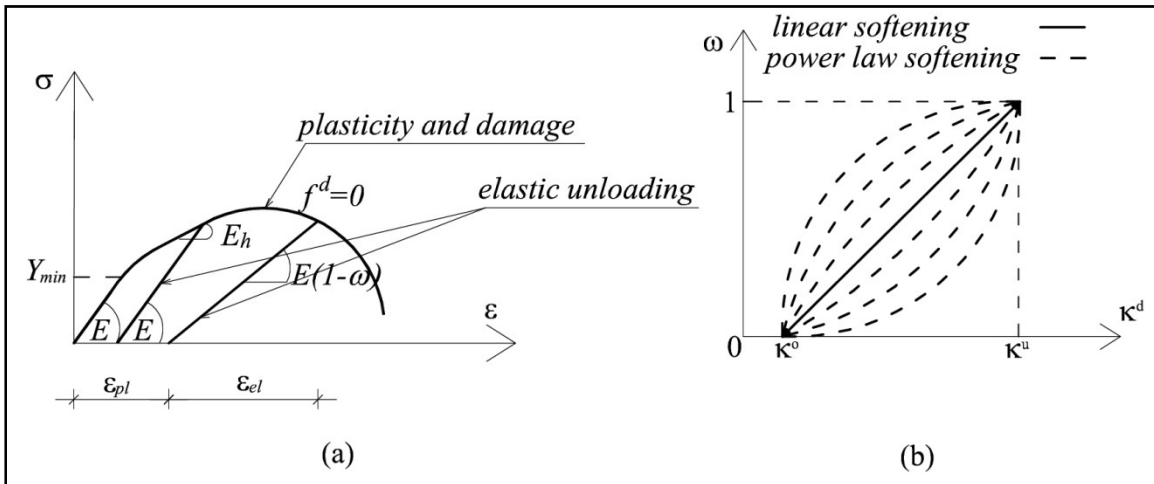
Važno je naglasiti da je algoritam **(4.13)** inkrementalna procedura, za razliku od postupka korišćenog u prvom pristupu, u poglavlju 4.1.1, gde je rešenje za implementaciju oštećenja

u cikličnu plastičnosti dobijeno u analitičkoj formi u zatvorenom obliku. Funkcija razvoja oštećenja određuje razvoj varijable oštećenja ω , i može biti određena eksperimentalno [74] kao linearna, eksponencijalna ili funkcija nekog drugog oblika (Slika 4.5).

$$\omega(\kappa^d) = \frac{\kappa^d - \kappa^o}{\kappa^u - \kappa^o}$$

$$\omega(\kappa^d) = 1 - \left(\frac{\kappa^o}{\kappa^d}\right)^\alpha \left(\frac{\kappa^u - \kappa^d}{\kappa^u - \kappa^o}\right)^\gamma \quad (4.15)$$

U izrazu (4.15), γ i α predstavljaju parametre materijala, kao uostalom i κ^u i κ^o . Variranjem ovih parametara, različit broj modova loma može biti definisan (slika 4.5), kao što će biti prikazano u numeričkim primerima.



Slika 4.5 (a) Jednoaksijalno elastoplastično ponašanje u kombinaciji sa oštećenjem; (b) Zakon razvoja oštećenja određen sa varijablom oštećenja ω .

Razlika između dva modela sa oštećenjem se ogleda i u načinu računanja skalarne veličine oštećenja. U prvom slučaju, skalarna veličina oštećenja D se računa na početku svakog koraka i konstantna je tokom tog koraka, a razvoj oštećenja se definiše preko drugih članova izraza (4.8). U slučaju modela oštećenja sa CDM pristupom, veličina oštećenja ω

se računa u svakom inkreментu koraka, ali je mogućnost opisivanja različitih vrsta loma veća, kao što će biti prikazano u primerima elastoplastične analize sa oštećenjem.

4.2 KRITERIJUMI KONVERGENCIJE

Da bi rešenje sistema jednačina (3.29) konvergiralo, potrebno je da budu zadovoljeni uslovi konvergencije po rezidualnoj sili (poglavljje 3.3) definisani u izrazima (3.30),(3.31),(3.32).

U statičkoj analizi, ako materijal ima zanemarljiv modul ojačanja ($E_h \approx 0$), da bi se stekla indikacija ravnotežnog stanja, u slučaju kada su i pomeranja i sile bliske odgovarajućim ravnotežnim vrednostima, preporuka je [80] da se kriterijum konvergencije zasniva na zadovoljenju energetskog uslova tolerancije. U svakoj iteraciji, inkrement unutrašnje energije se poredi sa početnim inkreментом unutrašnje energije:

$$\Delta U^{(i)T} \left({}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \right) \leq \epsilon_E \left(\Delta U^{(1)T} \left({}^{t+\Delta t} R - {}^t F \right) \right) \quad (4.16)$$

Pošto se u ovoj disertaciji, u dinamičkoj analizi, koristio Newmark-ov postupak sa koeficijentima $\delta=0.5$ i $\alpha=0.25$ za postupak direktne integracije, kriterijum konvergencije treba da bude zadovoljen i sa aspekta uslova energetske tolerancije i uslova tolerancije po silama. U primerima dinamičke analize su zanemareni efekti prigušenja i kao što je napomenuto u uvodnim poglavljima, analizirana je plastičnost bez uticaja brzine promene deformacije (rate-independent ponašanje) koristeći i Bouc-Wen-ov model i Prajzakov model histerezisa.

U slučaju da se pored elastoplastičnog ponašanja materijala, u model implementira i oštećenje, kriterijumi konvergencije mogu da budu isti (kao u proračunu bez oštećenja) sve do pojave negativne krutosti (tačke nulte krutosti) usled degradacije modula ojačanja. Za konvergenciju takvog modela, pristupi u definisanju odgovarajućih uslova konvergencije treba da budu zasnovani na metodama koje numerički efikasno vrše proračun u slučajevima omekšanja materijala. Metode koje mogu da se okarakterišu kao pogodne u ovakvim slučajevima su metoda dekompozicije matrice krutosti ili iterativno usmerenje ka “pivot” tačkama (tačke u kojima je krutost materijala 0), smanjujući veličine inkrementa [81] kao što je definisano u ovoj disertaciji.

Sličan pristup podrazumeva da je bolje primeniti metode koje definišu deo inkrementa opterećenja kao promenljivu, među kojima je najpoznatija “arc-length” metoda koja može biti poboljšana “line search” metodom. I pored toga se numerički problemi javljaju kada se istovremeno u više preseka ili elemenata javlja stanje negativne krutosti, odnosno kritična tačka koja prethodi tome, a to je prelaz sa pozitivne na negativnu krutost u materijalu.

U slučajevima da se u naponsko-deformacijskom dijagramu materijala ne javlja izražen horizontalni plato (region gde je krutost materijala bliska 0), može se smatrati da je se prelaz sa pozitivne na negativnu vrednost krutosti materijala trenutno, odnosno, dešava se u jednoj tački ili malom regionu. Tada prema [81], energetski kriterijum (4.16) nije zadovoljavajući, pa je predložen dvostruki kriterijum po silama i po pomeranjima, iako se kriterijum po pomeranjima pokazao kao efektivniji.

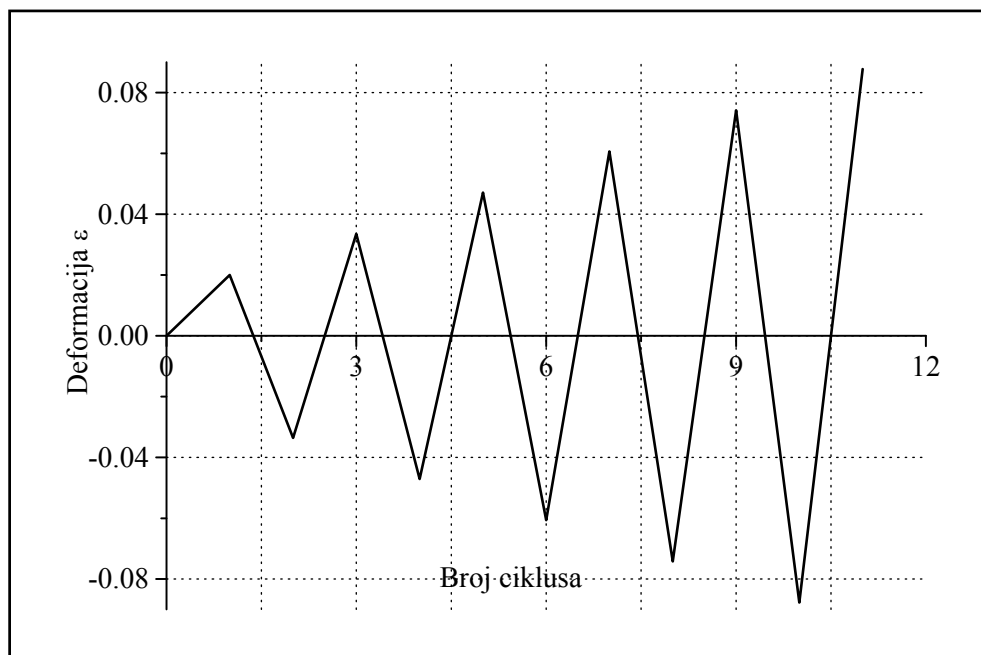
$$\|\Delta U^{(i)}\| \leq \epsilon_D \|{}^{t+\Delta t}U\| \quad (4.17)$$

$$\|{}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i)}\| \leq \epsilon_F \|{}^{t+\Delta t}R - {}^tF\| \quad (4.18)$$

4.3 PRIMERI EP ANALIZE MATERIJALA SA OŠTEĆENJEM

Važno je naglasiti da je u odnosu na određivanje parametara modela jednoaksijalne plastičnosti, dosta teže eksperimentalno određivanje kriterijuma inicijacije oštećenja u materijalu i samih parametara modela oštećenja. Neophodni parametri modela oštećenja su u ovom poglavlju definisani proizvoljno, na osnovu rezultata eksperimenta [64] kojim su definisani parametri za plastičnu analizu u poglavlju 3.4., odnosno eksperimenta koji je odredio analitički izraz za napon (odgovor) u funkciji od deformacije (pobude). Parametri oštećenja za model iz poglavlja 4.1.1 su usvojeni tako da je deformacija pri inicijaciji oštećenja $Y_{dam}^{init}/E = 0.02=2\%$ ($D=0$), a deformacija pri potpunom lomu $Y_{dam}^{full}/E = 0.087=8.7\%$ ($D=1$). Za drugi model oštećenja, iz poglavlja 4.1.2, parametri κ_o , κ_w , α , γ su usvojeni tako da se rezultati poklapaju sa modelom iz poglavlja 4.1.1. Usvojeno je da je ekvivalentna mera deformacije jednaka totalnoj deformaciji (zbiru elastične i plastične).

Materijal je u prvom primeru (primer 4.3.A) [58] bio izlagan kontrolisanoj aksijalnoj deformaciji koja je zadata u vidu funkcije koja je prikazana na slici 4.6.



Slika 4.6 Funkcija opterećenja pri jednoaksijalnom numeričkom testu u primeru 4.3.A

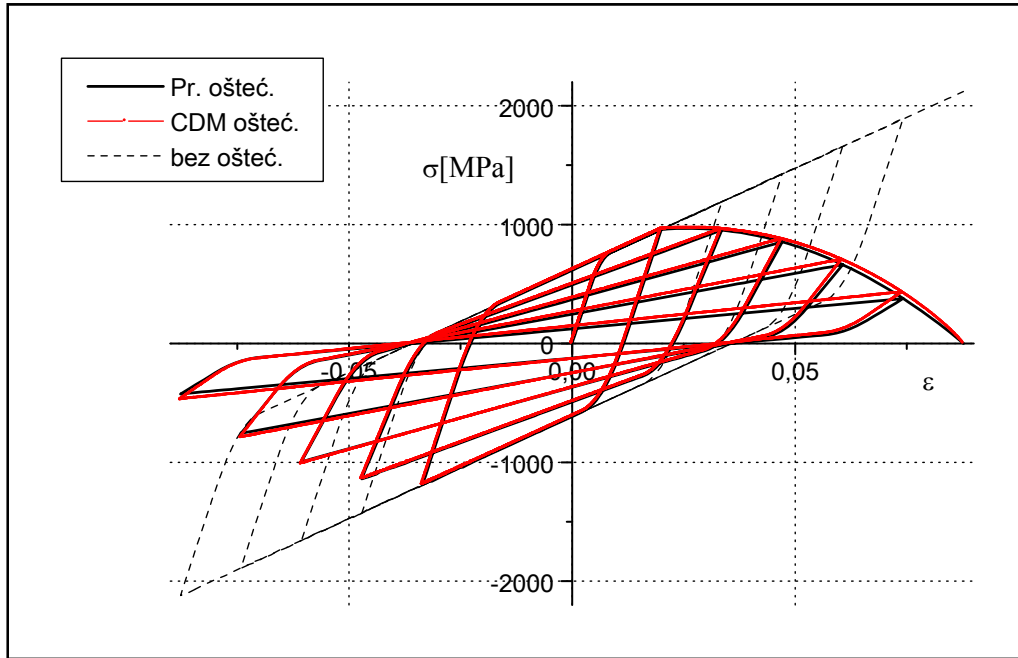
Da bi se odgovarajući modeli oštećenja poklapali, parametri modela iz poglavlja 4.1.2 su usvojeni kao $\kappa_o = 0.02$, $\kappa_u = 0.087$, $\alpha = 0.035$, $\gamma = 0.9$.

S obzirom da je opterećenje u obliku testa kontrolisane deformacije, moguće je dostići granicu potpunog loma ($D=1$ ili $\omega=1$), odnosno potpunu degradaciju modula elastičnosti E i modula ojačanja E_h . U slučaju kada je Prajzakov model histerezisa korišćen za definisanje oštećenja u materijalu, tačni rezultati na kraju svakog koraka mogu biti dobijeni samo sa jednim inkrementom, zbog analitičkog oblika rešenja. To nije slučaj sa modelom kod kojeg je oštećenje definisano sa osnovnim principima CDM-a, gde je potreban veći broj inkremenata da bi se dobilo konvergentno rešenje za ovaj model (Tabela 8.6 – poglavlje 8.3.5).

Da bi se ilustrovao analitički proračun pri elastoplastičnoj analizi sa oštećenjem, prikazan je drugi primer (primer 4.3.B) opterećenja materijala do granice potpunog loma (Slika 4.8(a)),

na osnovu koga se dobija rezultujuća naponsko-deformacijska kriva, koja je prikazana na slici 4.8(b) [58]. Na slici 4.8(a) su prikazane i mehaničke karakteristike materijala, na osnovu kojih je dobijena granica napona, pri početnom oštećenju, od $Y_{D1} = 1.75Y$, a pri deformaciji od $4Y/E$. U prvom koraku, materijal je opterećen do deformacione granice od $6Y/E$, što prema (4.8), rezultira naponom:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \frac{E}{2}(\varepsilon_1 - (-\varepsilon_1)) \\ &- \frac{E \cdot (E - E_h)}{4(Y_{max} - Y_{min})} \left((Y_{max} / E - Y_{min} / E)^2 \cdot 2 + (\varepsilon_1 - Y_{max} / E) \cdot (2Y_{max} / E - 2Y_{min} / E) \right) \\ &- \frac{E_h^2}{2(Y_{DN} - Y_{D1})} (\varepsilon_1 - Y_{dam}^{init} / E)^2 \cdot 2 - \frac{E_h}{2(Y_{dam}^{full} / E - Y_{dam}^{init} / E)} \cdot 0 \\ &- \frac{Y_{D1}}{2(Y_{dam}^{full} / E - Y_{dam}^{init} / E)} (\varepsilon_1 - Y_{dam}^{init} / E) \cdot 2 = 0.975Y . \end{aligned} \quad (4.19)$$



Slika 4.7 Rezultati numeričke analize materijala izloženog kontrolisanoj deformaciji u vidu funkcije sa slike 4.6 – model sa oštećenjem (4.1.1), model sa oštećenjem (4.1.2) i model bez oštećenja.

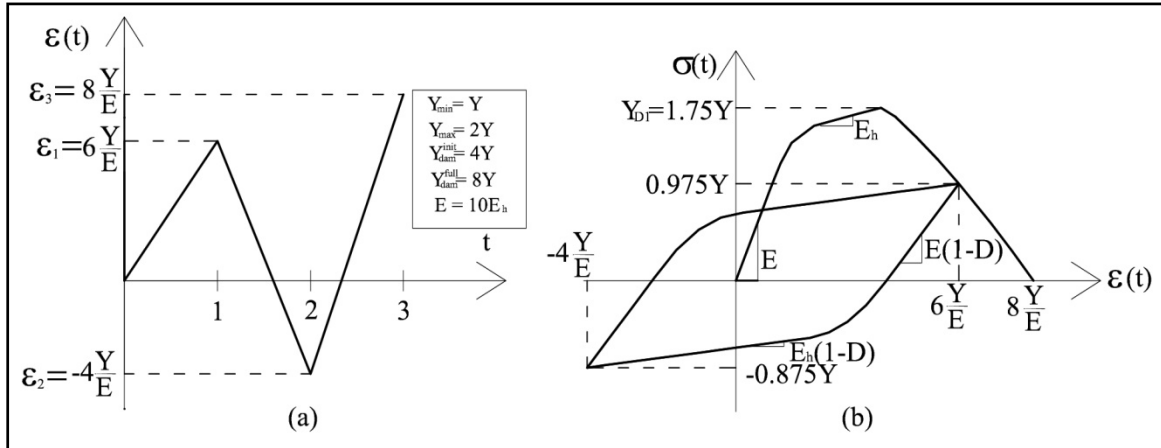
Nivo deformacije u ovom slučaju ukazuje na oštećenje od 50% u materijalu ($D=0.5$). U drugom koraku je materijal opterećen u suprotnom smeru do deformacije $-4Y/E$. Na dijagramu napona se može videti degradacija modula elastičnosti i modula ojačanja. Odgovarajući nagibi, odnosno moduli elastičnosti su manji za 50% u odnosu na neoštećen materijal. Napon na kraju ovog koraka, dobijen analitičkim putem prema izrazu (4.8), je:

$$\begin{aligned}
\sigma(t) = & \frac{E}{2}(\varepsilon_2 - (-\varepsilon_2)) + D \cdot E(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\
& - \frac{E \cdot (E - E_h)}{4(Y_{max} - Y_{min})} \left((Y_{max} / E - Y_{min} / E)^2 \cdot 2 + (\varepsilon_1 - Y_{max} / E) \cdot (2Y_{max} / E - 2Y_{min} / E) \right) - \\
(1-D) & \frac{E \cdot (E - E_h)}{4(Y_{max} - Y_{min})} \left((\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot (2Y_{max} / E - 2Y_{min} / E) \cdot 2 + (2Y_{max} / E - 2Y_{min} / E)^2 \cdot 2 \right) - \\
& \frac{E_h^2}{2(Y_{DN} - Y_{D1})} (\varepsilon_1 - Y_{dam}^{init} / E)^2 \cdot 2 - \frac{E_h}{2(Y_{dam}^{full} / E - Y_{dam}^{init} / E)} \cdot 0 \\
& - \frac{Y_{D1}}{2(Y_{dam}^{full} / E - Y_{dam}^{init} / E)} (\varepsilon_1 - Y_{dam}^{init} / E) \cdot 2 = -0.875Y.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

U trećem koraku, materijal je ponovo izložen pozitivnoj deformaciji, ali sada do potpunog oštećenja ($D=1$), odnosno do granice loma $8Y/E$. Napon na kraju ovog koraka je:

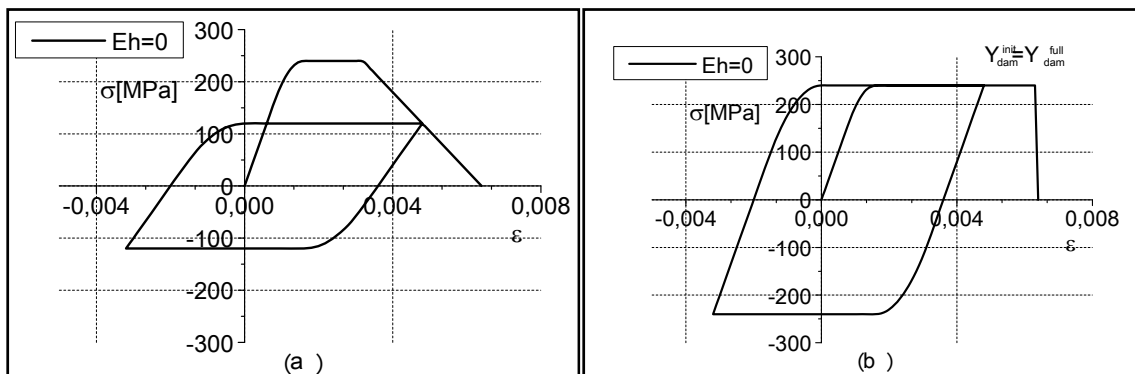
$$\begin{aligned}
\sigma(t) = & \frac{E}{2}(\varepsilon_3 - (-\varepsilon_3)) + D \cdot E(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - \\
& \frac{E \cdot (E - E_h)}{4(Y_{max} - Y_{min})} \left((Y_{max} / E - Y_{min} / E)^2 \cdot 2 + (\varepsilon_1 - Y_{max} / E) \cdot (2Y_{max} / E - 2Y_{min} / E) \right) - \\
(1-D) & \frac{E \cdot (E - E_h)}{4(Y_{max} - Y_{min})} \left((\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \cdot (2Y_{max} / E - 2Y_{min} / E) \cdot 2 \right) - \\
& \frac{E_h^2}{2(Y_{DN} - Y_{D1})} (\varepsilon_1 - Y_{dam}^{init} / E)^2 \cdot 2 - \frac{E_h^2}{2(Y_{DN} - Y_{D1})} \varepsilon_3 (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \cdot 2 -
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\frac{E_h \cdot Y_{dam}^{init} / E \cdot (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}{(Y_{dam}^{full} / E - \varepsilon_1)} - \frac{Y_{D1}}{2(Y_{dam}^{full} / E - Y_{dam}^{init} / E)} (\varepsilon_3 - Y_{dam}^{init} / E) \cdot 2 = 0 .$$



Slika 4.8 (a) Funkcija opterećenja pri jednoaksijalnom numeričkom testu u primeru 4.3.B; (b) Rezultati numeričke analize materijala izloženog kontrolisanoj deformaciji u vidu funkcije sa slike (a) za model sa oštećenjem (4.1.1)

Može se videti da ne postoji glatki prelaz sa zatvorene histerezisne petlje na opadajući deo u trećem koraku, što je zbog prirode analitičkog rešenja koje prouzrokuje zatvorenu petlju. Na slici 4.9 su prikazani slučajevi koji se odnose na primer sa slike 4.8, u kojima je modul ojačanja E_h jednak 0.

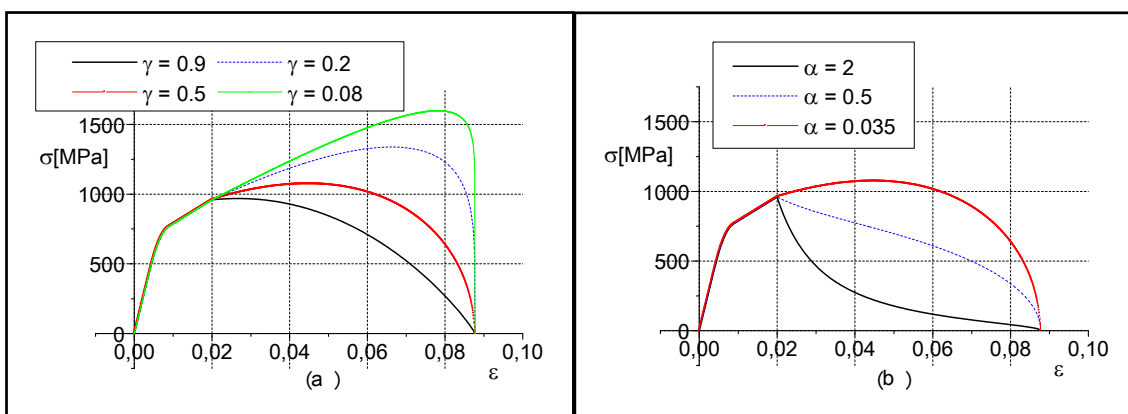


Slika 4.9 (a) Dijagram napon-deformacija za primer sa slike 4.8 u slučaju $E_h=0$; (b) Dijagram napon-deformacija za primer sa slike 4.8 u slučaju $E_h=0$ i trenutnog (krtog) loma usled $Y_{dam}^{init} = Y_{dam}^{full}$.

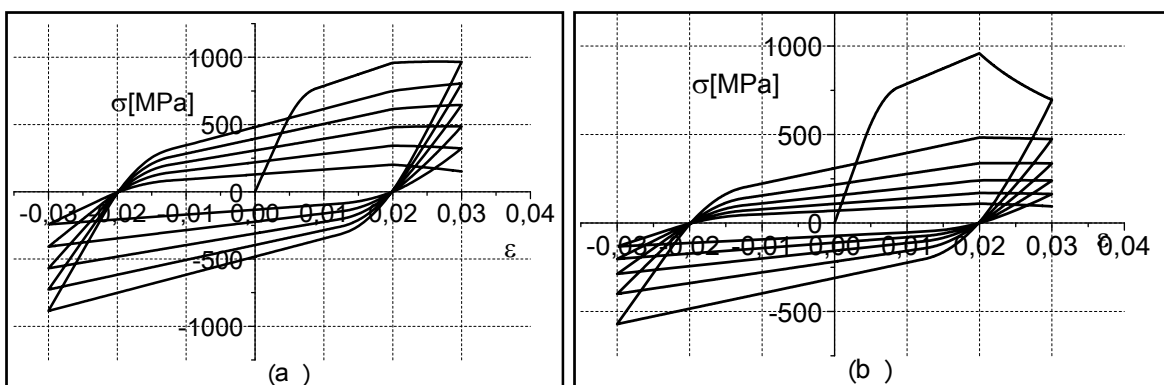
U primeru (4.3.C) prikazuje se mogućnost modeliranja različitih tipova loma sa modelom CDM oštećenja variranjem koeficijenata oštećenja i same funkcije koja definiše oštećenje.

Na slici 4.10 su prikazani numerički testovi monotonog opterećenja, pri kontrolisanoj deformaciji, do potpunog loma. Koeficijenti koji definišu eksponencijalnu funkciju razvoja oštećenja (γ i α iz izraza (4.15)) su varirani kako bi se dobili različiti tipovi loma koji mogu odgovarati različitim tipovima materijala.

Promenom vrste funkcije, koja definiše oštećenja ($f(\varepsilon)$ iz izraza (4.14)), može se takođe uticati na definisanje različitih oblika loma. U slučaju da se parametar istorije oštećenja κ^d povećava u svakom ciklusu u kojem deformacija prekorači odgovarajuću granicu (κ^0), odgovarajućom funkcijom f_k se može definisati i kumulativni rast oštećenja, pa je moguće opisati fenomen cikličnog omekšavanja. U primeru na slici 4.11, materijal je izložen konstantnim cikličnim opterećenjem u vidu kontrolisane aksijalne deformacije ± 0.03 . Zbog definicije funkcije f_k (stalnog povećavanja parametra κ^d), materijal omekšava u svakom ciklusu prema zakonu razvoja oštećenja iz (4.15). Pored ove definicije parametra istorije oštećenja κ^d , moguće su i druge (empirijske) koje bi omogućile modeliranje i drugih fenomena ciklične plastičnosti i oštećenja, ali to bi zahtevalo posebnu analizu i eksperimentalno istraživanje, što nije bilo predmet ove disertacije.



Slika 4.10 Prikaz različitih vrsta loma u zavisnosti od parametara γ i α , za model materijala definisan u primeru 4.3.(A) $\alpha = 0.0035$; (b) $\gamma = 0.5$



Slika 4.11 Prikaz različitih vrsta loma za definisano oštećenje sa kumulativnom funkcijom $f_k(\epsilon)$ u zavisnosti od parametara γ i α , za model materijala definisan u primeru 4.3.(A). (a) $\alpha = 0.0035, \gamma = 0.9$; (b) $\alpha = 1, \gamma = 0.5$

5 PRORAČUN HISTEREZISNIH GUBITAKA ENERGIJE PRIMENOM PRAJZAKOVOG MODELA HISTEREZISA

5.1 UVOD

Disipacija energije u materijalu se često javlja za proizvoljne (ne uvek periodične) funkcije opterećenja. Problem određivanja histerezisnih gubitaka energije za proizvoljne varijacije funkcije unosa je teško odrediti, a rešenje ovog problema ima i teoretske i praktični značaj [57]. Analiza disipacije energije u plastičnom domenu, koristeći Prajzakov model histerezisa, je predstavljena u radu Lubarde i Šumarca [15], gde je pokazano da tokom cikličnog opterećenja u plastičnom domenu ukupna količina plastičnog rada ne disipira u potpunosti u toplotu.

$$W_{pl} = Q_{hys} + E_{lock} \quad (5.1)$$

U izrazu (5.1), Q_{hys} je histerezisni gubitak energije koji disipira u toplotu, a E_{lock} je energija zadržana (zaključana) u materijalu. Treba napomenuti da sve komponente energije iz (5.1) u stvari predstavljaju gustinu energije kroz odgovarajuće elemente konstrukcije i za određivanje ukupne količine energije u odgovarajućim štapovima rešetkastog nosača je potrebno integraliti ove veličine po zapremini elementa. Ukoliko su elementi konstantnog

poprečnog preseka, vrednosti energetskih komponenti će takođe biti konstantne kroz svaki element konstrukcije. Energija koja je zadržana (zaključana) u materijalu je od direktnog značaja za objašnjenje naponsko - deformacijskog veze u materijalu nakon ciklusa koji uključuje opterećenje, rasterećenje i ponovno opterećenje [15]. Ukupan plastični rad može biti određen iz naponsko-deformacijske krive, odnosno numeričkom evaluacijom izraza (5.2), a očigledno je da se priraštaj ovog rada javlja samo u slučajevima da je materijal izložen rastu plastičnih defomacija:

$$\Delta W_{pl}^{(i+1)} = \int_{\varepsilon_{pl}^{(i)}}^{\varepsilon_{pl}^{(i+1)}} \sigma^{(i+1)} \cdot d\varepsilon_{pl}^{(i+1)} \quad (5.2)$$

$$W_{pl}^{(i+1)} = W_{pl}^{(i)} + \Delta W_{pl}^{(i+1)}$$

gde $\Delta W_{pl}^{(i+1)}$ predstavlja inkrement plastičnog rada određen tokom promene plastične deformacije od $\varepsilon_{pl}^{(i)}$ do $\varepsilon_{pl}^{(i+1)}$ a $W_{pl}^{(i+1)}$ predstavlja ukupan plastični rad izvršen počevši od stanja pojave prve plastične deformacije do trenutka $i+1$.

S obzirom da je kod elementarnog "delayed-relay" operatora $G_{\alpha,\beta}$ (čijom se superpozicijom formira Prajzakov model) histerezisna nelinearnost predstavljena preko pravougaone histerezisne krive, za cikličnu varijaciju ulaza (unosa) se histerezisni gubitak energije dobija kao pravougaona površina koju obuhvata petlja, i ona je jednaka $2(\alpha-\beta)$ kao što je prikazano na slici 2.6. Pretpostavljajući da su procesi nelinearnosti koji se javljaju prilikom pozitivnog i negativnog unosa (opterećenja i rasterećenja) iste prirode, disipacija energije prilikom jedne promene monotonosti funkcije unosa je jednaka polovini pravougaonika, odnosno $(\alpha-\beta)$, što je očigledno sa elementarne pravougaone histeterezisne petlje. Kao posledica toga, moguće je izračunati ukupan histerezisni gubitak energije kao sumu gubitaka koje su rezultat svake promene monotonosti funkcije unosa. Pošto se Prajzakov model formira superpozicijom $G_{\alpha,\beta}$ operatora, odnosno pošto je u pitanju kontinualni sistem paralelno vezanih elementarnih operatora, sumu elementarnih gubitaka energije treba integraliti [57]. Ukoliko je Ω deo regiona graničnog (Prajzakovog) trougla, za koji su

elementarni histerezisni operatori promenjeni tokom neke varijacije ulaza, odgovarajuća varijacija energije je:

$$Q_{hys} = \iint_{\Omega} P(\alpha, \beta) \cdot (\alpha - \beta) d\alpha d\beta \quad (5.3)$$

Koristeći izraz za Prajzakovu funkciju $P(\alpha, \beta)$ datu u (3.21) i uzimajući u obzir izraz (5.3), histerezisni gubitak energije se dobija prema:

$$\Delta Q_{hys}^{(i+1)} = \frac{E(E - E_h)}{4(Y_{max} - Y_{min})} \iint_{\Delta\Omega^{(i+1)}} (\alpha - \beta) d\alpha d\beta \quad (5.4)$$

$$Q_{hys}^{(i+1)} = Q_{hys}^{(i)} + \Delta Q_{hys}^{(i+1)}$$

gde je $\Delta Q_{hys}^{(i+1)}$ inkrement histerezisnog gubitka energije tokom jedne ciklične promene parametara α i β , od vremenskog trenutka i do trenutka $i+1$ koji se javlja samo ako dođe do promene stepenaste linije $L(t)$, odnosno ukoliko dođe do promene površina setova u Prajzakovom trouglu. $Q_{hys}^{(i+1)}$ predstavlja ukupan histerezisni gubitak energije počevši od pojave prve plastične deformacije do trenutka $i+1$. Dvostruki integral iz (5.4) u stvari predstavlja zapreminu u prostoru ograničenom sa regionom $\Delta\Omega$ u $\alpha-\beta$ ravni, i ravni $z = (\alpha-\beta)$, gde je z koordinata treće ose upravne na ravan $\alpha-\beta$. Ovaj dvostruki integral treba zbog toga numerički odrediti i izračunati u odgovarajućem trenutku vremena, s obzirom da ima osnovu u obliku sume trapeze (slika 2.6) što je i urađeno u ovoj disertaciji proširivanjem algoritma proračuna iz poglavlja 3.3. Pošto se histerezisni gubitak energije može numerički odrediti na osnovu analitičke definicije, kao i plastični rad, može se reći da su procedure (5.2) i (5.4) odgovarajuće za primenu u analizi konstrukcija (rešetkastih nosača).

Pored toga se i energija zadržana u materijalu može izračunati kao njihova razlika. Pokazano je u [57] da je Prajzakov model histerezisa pogodan za proračun u termodinamičkoj analizi nepovratnih procesa u histerezisnim nelinearnostima, ali se ipak

izraz (5.4) ne može koristiti za bilo koju histerezisnu nelinearnost, jer ona ima ista ograničenja kao i sam Prajzakov model.

Detaljnija analiza energije zadržane u materijalu je data u [14], [15]. Termodinamička razmatranja i fizički značaj zadržane (zaključane) energije je prikazana u [82], [83].

6 OSOBINE ALGORITMA ZA ELASTOPLASTIČNU ANALIZU REŠETKASTIH NOSAČA PRI CIKLIČNOM OPTEREĆENJU

Računarski programi za analizu konstrukcija se razvijaju najčešće koristeći proceduralni ili objektni pristup u programiranju računara [84]. U predmetnom istraživanju je korišćen objektni pristup u programskom jeziku c++, gde osnovu i najkompleksniji deo numeričkog proračuna predstavlja određivanje nelinearnosti u vidu modeliranja plastičnog ponašanja materijala (materijalna nelinearnost), deformisane konfiguracije nosača (geometrijska nelinearnost) i oštećenja.

Numerička analiza se sastoji iz iterativnog postupka kojim se postiže odgovarajuća redistribucija sila kako bi bile zadovoljene jednačine ravnoteže. Ako je rešenje izraza za napon u funkciji od deformacije (ulaza) dato u analitičkom obliku, inkrementalni postupak nije potreban da bi se dobilo tačno rešenje, odnosno dovoljan je jedan inkrement po koraku. U opštem slučaju postupak u algoritmu za proračun u elastoplastičnoj analizi sa oštećenjem u jednom koraku je prikazan na slici 6.1.

Za model oštećenja definisan izrazom (4.13), algoritam proračuna istaje isti, samo što je u tom slučaju konvergencija sistema jednačina ka tačnom rešenju zavisna od broja koraka zbog inkrementalno-iterativnog algoritma iz tog izraza.

6.1 ALGORITAM ZA ELASTOPLASTIČNU ANALIZU

Suština definisanja materijalne nelinearnosti kao što je prikazano u poglavlju 3 je analiza stanja površina u Prajzakovom trouglu. Za razliku od osnovne definicije Prajzakove granične površine, koja je u obliku trougla, u slučaju da postoji linearno ojačanje, kao što je

objašnjeno u [14], [59], i prikazano na slikama (slika 3.6 i 3.5), javljaju se dodatne površine u granicama u kojima je definisana Prajzakova funkcija $P(\alpha, \beta)$.

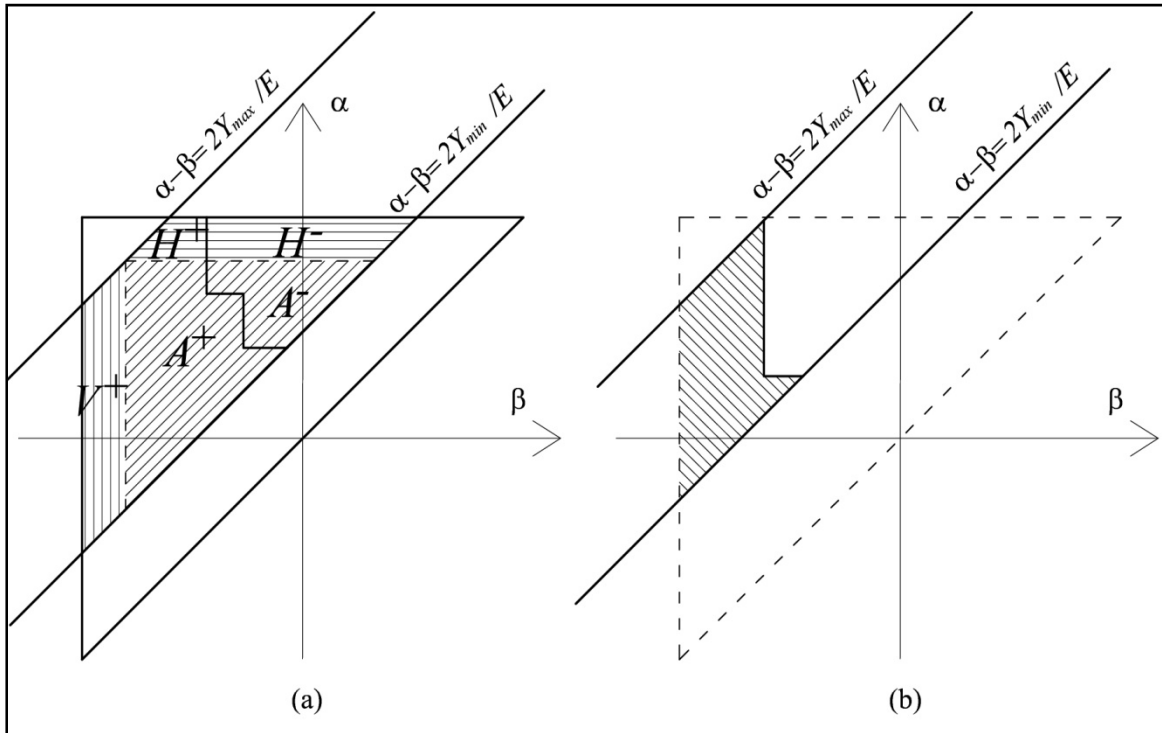
Za određivanje površina setova u odgovarajućem trouglu (graničnoj površini), definisan je algoritam koji se zasniva na podeli ukupne granične površine na trougao i dva trapeza (slika

1. Definisane odgovarajućih veličina promenljivih za naredni korak.
2. Definisane opterećenja u narednom koraku.
3. Rešavanje linearno-elastične jednačine $K_{el} U = R$ gde je K_{el} definisano kao u **(3.29)**
4. Određivanje rezidualne plastične sile $R_{pl} = K_{pl} U_{pl}$ na osnovu izraza u **(3.29)**
5. Određivanje dela globalnog vektora čvornih sila R_d koji se odnosi oštećenja na osnovu izraza za napon **(4.8)** ili **(4.13)**.
6. Definisane matrice krutosti K_T iz izraza **(3.38)** (ukoliko je definisana geometrijski nelinearna analiza - NLG)
7. Provera odgovarajućeg uslova konvergencije jednačine **(4.11)** i povratak na korak 3 ukoliko je potrebno
8. Povratak na korak 1 ukoliko je potrebno

Slika 6.1 (a) Opšti algoritam za proračun nelinearne analize u jednom koraku (ciklusu opterećenja) korišćen u predmetnoj disertaciji

6.2). Za određivanje površina pozitivnog i negativnog seta u svakom od tri dela na koji je podeljena granična površina je primenjen je tačan postupak sa algoritmom za dodavanje i brisanje tačaka (koordinata) u Prajzakovoj ravni, programom koji ima mogućnost dinamičkog stvaranja i brisanja objekata [85] bez unapred određenog broja elemenata objekta. Niz koordinata tačaka u Prajzakovoj graničnoj površini može da se dinamički menja na ovaj način, pa je samim tim pogodno definisati algoritam čija je suština manipulacija nizom brojeva (koordinata), odnosno njihovo brisanje i dodavanje drugih

tačkaka (koordinata) u niz koji se čuva za odgovarajući element. Kao što je prikazano u poglavlju 3.3, u svakom elementu se definiše trenutno stanje sa dodavanjem i oduzimanjem površina koristeći pravilo brisanja (wiping out).



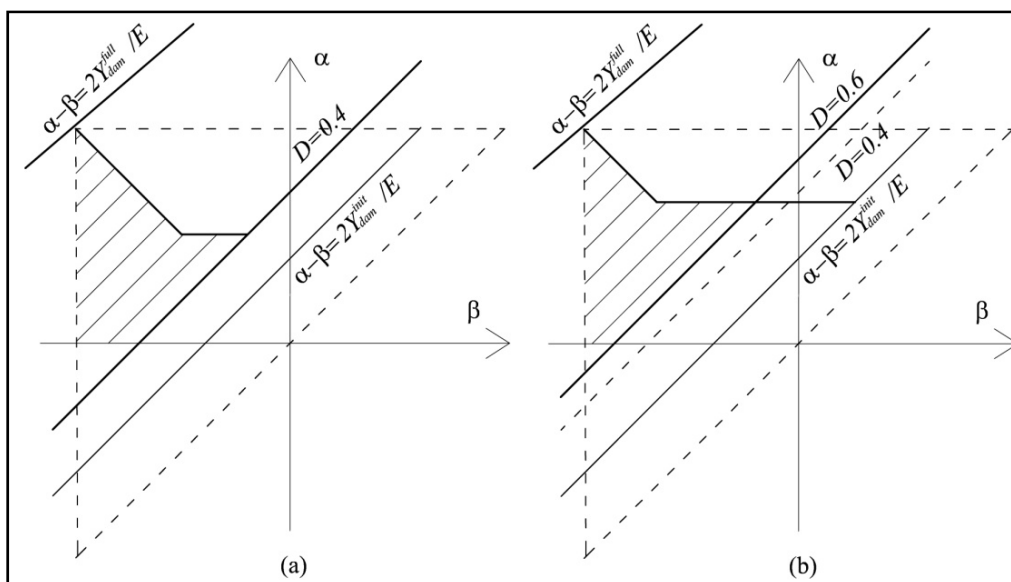
Slika 6.2 (a) Podela granične površine (trake) na trougao i dva trapeza u proizvoljnom slučaju; (b) Stanje u Prajkakovom trouglu u štapu 3, u primeru iz poglavlja 8.2 (dinamičko opterećenje – El Centro), nakon prvih 10s.

U opštem slučaju, stanje materijala, koje se ogleda u broju i koordinatama tačkaka u Prajkakovoj graničnoj površini, nakon konačnog broja naizmjeničnih ciklusa opterećenje-rasterećenje, može da bude veliki, ali samo u slučaju amplitude naizmjeničnih ciklusa koja opada. Taj broj je najčešće mali, kao što se vidi na slici 6.2 gde je dat prikaz stanja u Prajkakovoj graničnoj površini. Vidi se da je broj tačkaka (temena trapeza i trouglova iz kojih se sastoji pozitivan set A^+) mali iako je element bio izložen značajnim plastičnim deformacijama (istoriji deformacije) u toku 10s trajanja opterećenja u vidu ubrzanja tla (poglavlje 8.2). Čak i takav mali niz tačkaka ima, na osnovu svog rasporeda i koordinata, u sebi sadržan uticaj celokupe prethodne istorije deformacija u tom elementu. Na slici 6.2(b)

je granična površina data isprekidanom linijom (granicom ε_0), ali ona može biti veća kako bi se mogao modelirati unos većih deformacija u ovaj histerezisni operator.

6.2 ALGORITAM ZA ELASTOPLASTIČNU ANALIZU SA OŠTEĆENJEM

Kada se u analizu uvede u oštećenje, to prouzrokuje definisanje još jednog Prajzakovog trougla u slučaju prvog pristupa za modeliranje oštećenja (poglavlje 4.1.1). Za razliku od prethodnog (prikazanog na slici 6.2(a)), u ovom slučaju je neophodno menjati aktivnu površinu tog trougla, u zavisnosti od nivoa oštećenja, kao što je to prikazano u poglavlju 4, u primeru 4.3.A i na slici 6.3. Evidentno je da se između dva koraka (slika 6.3(a) i (b)) efektivna površina menja, odnosno smanjuje.



Slika 6.3 Stanje granične površine trougla iz primera 4.3.A iz poglavlja 4.3; (a) Na kraju petog koraka u kojem je oštećenje 40% ($D=0.4$); (b) Na kraju sedmog koraka u kojem je oštećenje 60% ($D=0.6$);

U slučaju pojave negativne krutosti u nekom od elemenata, potrebno je podeliti korak u kome je došlo do takve pojave na deo kojim se dobija nulta krutost u odgovarajućem elementu i na ostatak koraka. To se mora odrediti, jer se tada može promeniti i smer opterećenja u susednim elementima usled gubitka krutosti u nekom od elemenata. To se

postiže ako se u postupku algoritma prikazanom na slici 6.1 definišu odgovarajući dodatni koraci prema slici 6.4 .

Treba napomenuti da se u ovoj disertaciji nije posvetila pažnja i analizirala struktura programa sa stanovišta optimizacije u programiranju, već je samo definisan neophodan algoritam. Zbog toga je očekivano da se prikazane karakteristika proračuna (u poglavlju 8) u budućnosti još više mogu poboljšati.

1. Definisane odgovarajućih veličina promenljivih za naredni korak.
2. Definisane opterećenja u narednom koraku.
 - 2.1. Definisane odgovarajućeg inkrementa opterećenja na osnovu koraka 7.1.
3. Rešavanje linearno-elastične jednačine $K_{el} U = R$ gde je K_{el} definisano kao u (3.29)
4. Određivanje rezidualne plastične sile $R_{pl} = K_{pl} U_{pl}$ na osnovu izraza u (3.29)
5. Određivanje dela globalnog vektora čvornih sila R_d koji se odnosi oštećenja na osnovu izraza za napon (4.8) ili (4.13).
6. Definisane matrice krutosti K_T iz izraza (3.38) (ukoliko je NLG analiza)
7. Provera odgovarajućeg uslova konvergencije jednačine (4.11) i povratak na korak 3 ukoliko je potrebno
 - 7.1. Provera stanja negativne krutosti u elementima i određivanje inkrementa koraka koji bi mogao da dovede do stanja nulte krutost. Povratak na korak 2 ukoliko je potrebno
8. Povratak na korak 1 ukoliko je potrebno

Slika 6.4 Opšti algoritam za proračun nelinearne analize sa oštećenjem u jednom koraku (ciklusu opterećenja) korišćen u predmetnoj disertaciji

7 ELASTOPLASTIČNA ANALIZA GREDNOG ELEMENTA PRIMENOM PRAJZAKOVOG MODELA HISTEREZISA

7.1 UVOD

Principi koji se koriste u definisanju elastoplastične analize rešetkastih konstrukcija sa Prajzakovim modelom histerezisa mogu se proširiti na gredne linijske nosače, s obzirom da je i u tom slučaju stanje napona jednoaksijalno. Postojanje promenljivog stanja deformacije po različitim tačkama poprečnog preseka linijskog elementa podrazumeva da je potrebno poznavanje stanja napona u svakom vlaknu poprečnog preseka kako bi se definisala odgovarajuća sila u preseku. S obzirom da je kod aksijalnog napregnutog štapa, za definisanje elastoplastičnog ponašanja prema predmetnom modelu bilo neophodno definisati Prajzakov trougao, u slučaju različitog napona u svakom vlaknu, neophodno je poznavati stanje Prajzakovog trougla u svakom vlaknu. Pri tome je usvojena Euler-Bernoulli-jeva hipoteza o ravnim presecima, odnosno zanemaren je uticaj smičućih deformacija na poprečni presek.

Proširenje primene Prajzakovog modela histerezisa u elastoplastičnoj analizi linijskih nosača je predstavljeno u radovima Šumarca [62], [86], gde su se razmatrali slučajevi čistog savijanja grede pravougaonog poprečnog preseka, I preseka i sandučastog poprečnog preseka. Pokazano je da se polazeći od izraza za napon (3.21) kao funkciju deformacije, može doći do izraza za moment savijanja u preseku integracijom po visini poprečnog preseka.

$$\sigma(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) P(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (7.1)$$

Ukoliko se razmatra slučaj čistog savijanja oko z ose poprečnog preseka (koordinatni sistem y - z), deformacija se po visini poprečnog preseka može izraziti kao funkcija krivine:

$$\varepsilon(y, t) = \kappa(t) \cdot y \quad (7.2)$$

$$\sigma(y,t) = \iint_{\alpha \geq \beta} G_{\alpha,\beta} [\kappa(t) \cdot y] \cdot P(\alpha,\beta) d\alpha d\beta \quad (7.3)$$

Na osnovu izraza za napon, moment savijanja se definiše :

$$M(t) = \int_a^b y \cdot \sigma(y,t) \cdot b(y) \cdot dy$$

$$M(t) = \int_a^b y \cdot b(y) \iint_{\alpha \geq \beta} G_{\alpha,\beta} [\kappa(t) \cdot y] \cdot P(\alpha,\beta) d\alpha d\beta \cdot dy \quad (7.4)$$

U ovoj disertaciji je razmatran najjednostavniji primer poprečnog preseka (pravougaonik dimenzija $b \times h$) pri savijanju oko jedne ose, kako bi se izbegla kompleksna analiza optimizacije numeričke integracije napona po površini poprečnog preseka. Moment savijanja je dobijen za odgovarajuću Prajzakovu funkciju $P(\alpha,\beta)$, a u ovoj disertaciji je korišćena funkcija definisana u izrazu (3.16) i primenjena u izrazu za napon (3.21).

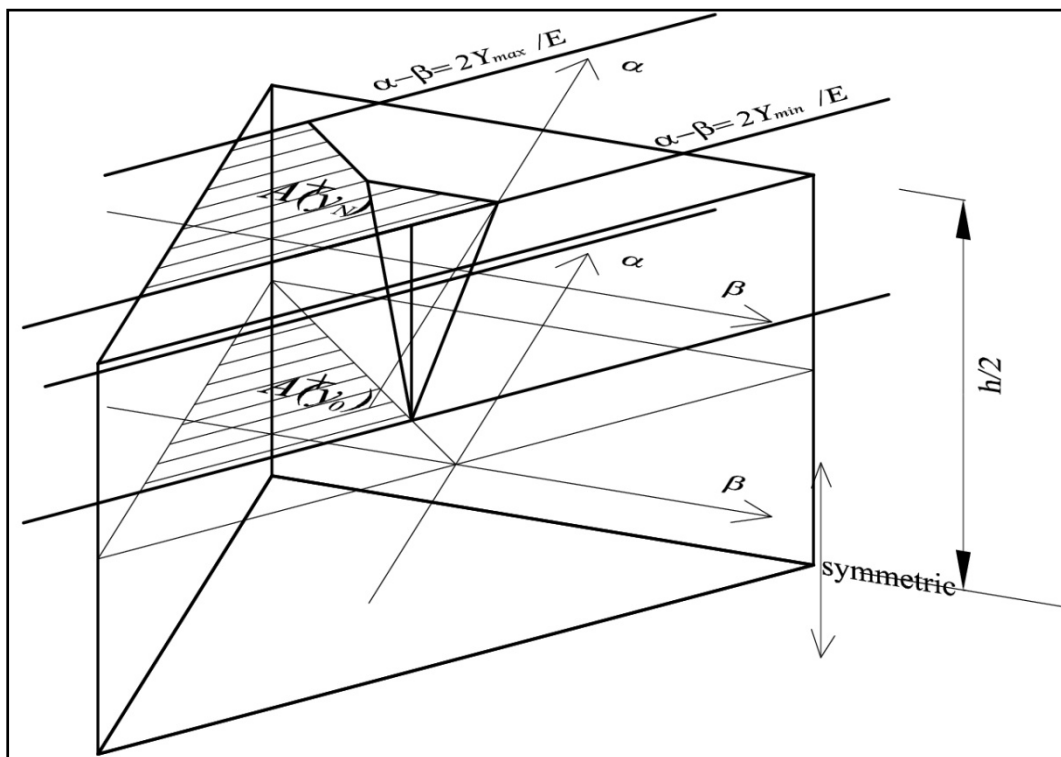
$$M(t) = \int_{-h/2}^{-h/2} y \cdot b(y) \cdot \frac{E}{2} \left[\int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{(E-E_h)}{2} \frac{1}{Y_{max} - Y_{min}} \iint_A G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \right] dy \quad (7.5)$$

Posle sređivanja izraza, slično kao kod izraza za napon, dobijena su dva člana u izrazu, od kojih prvi predstavlja moment u slučaju elastične analize, a drugi uvodi uticaj plastičnih deformacija na napon po površini poprečnog preseka, odnosno rezultujući moment:

$$M(t) = E \int_{-h/2}^{-h/2} y \cdot b(y) \cdot \kappa(t) \cdot y \cdot dy -$$

$$\frac{E(E-E_h)}{4} \frac{1}{Y_{max} - Y_{min}} \int_{-h/2}^{-h/2} y \cdot b(y) \cdot \left[\iint_A G_{\alpha,\beta} \kappa(t) \cdot y \cdot d\alpha d\beta \right] \cdot dy \quad (7.6)$$

Da bi se definisao Prajzakov trougao za geometrijsku interpretaciju stanja napona za svako vlakno po površini poprečnog preseka, potrebno je za ceo presek definisati graničnu prizmu u kojoj bi bili sadržani svi trouglovi po visini poprečnog preseka.

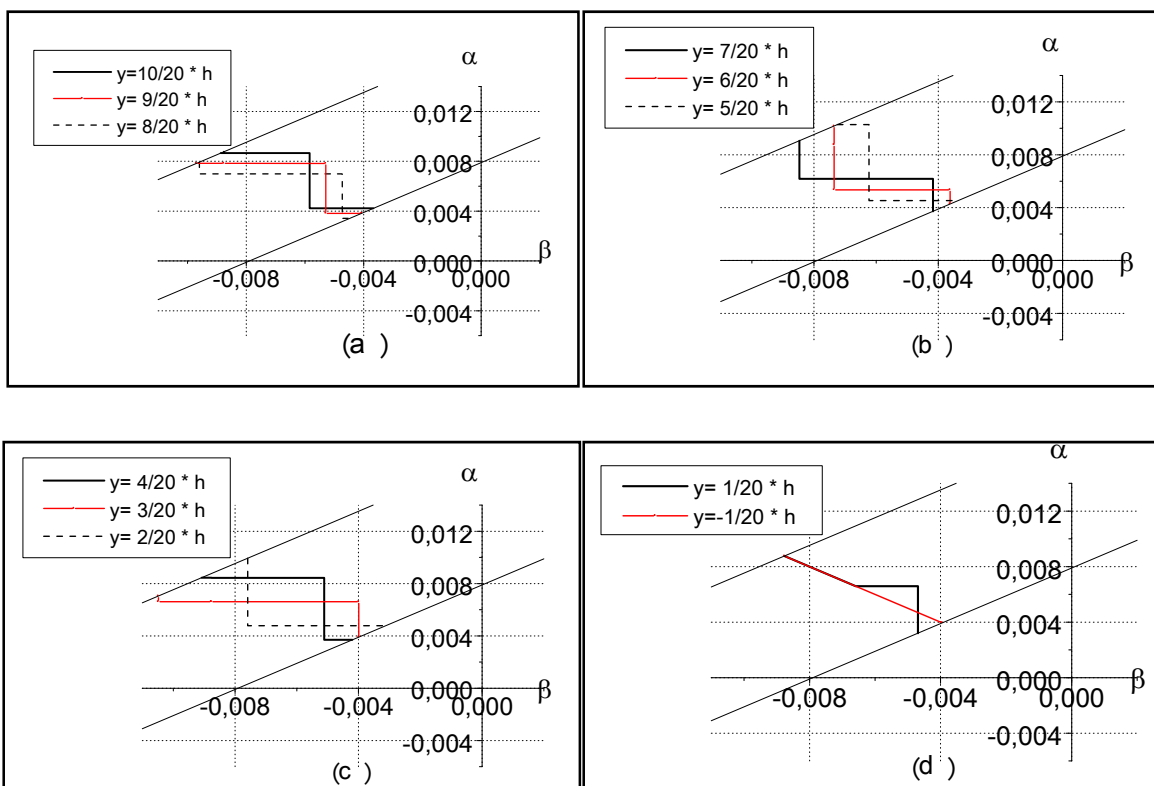


Slika 7.1 Primer granične prizme u prvom koraku opterećivanja u plastičnom domenu pri čistom savijanju

U slučaju čistog savijanja, moment u poprečnom preseku se može odrediti na osnovu izraza (7.6) i u zavisnosti od oblika poprečnog preseka definisati u analitičkoj formi u zatvorenom obliku. Geometrijska interpretacija se u ovom slučaju svodi na razmatranje razlike zapremina u graničnoj prizmi poprečnog preseka (Slika 7.1). U slučaju proizvoljnog opterećenja, nije optimalno definisati analitičko rešenje za svaki slučaj i vrstu opterećenja kojim je materijal izložen, a geometrijska interpretacija takođe zahteva posebno razmatranje različitih slučajeva. S obzirom da je za jedno vlakno moguće definisati i analitičko rešenje i numerički efektanu geometrijsku interpretaciju, integracija napona po

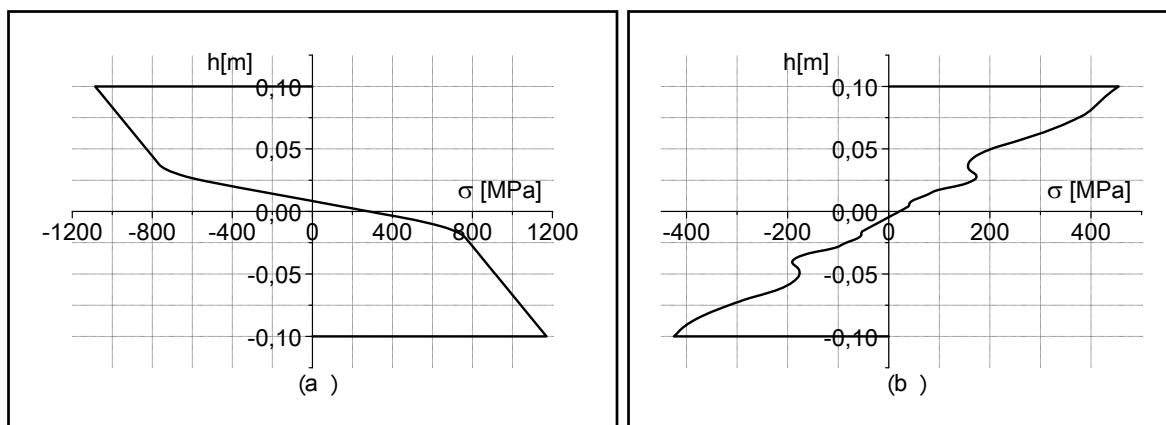
visini poprečnog preseka može da posluži kao dobar pristup u definisanju momenta savijanja u preseku, za proizvoljne slučajeve opterećenja.

Na slici 7.1 je prikazan primer stanja u graničnoj prizmi u trenutku nakon prvog koraka koji je doveo do plastične deformacije. Ukupan plastični deo iz izraza (7.6) se računa kao razlika zapremina pozitivnog i negativnog seta granične prizme. Pozitivni set čine svi granični trouglovi od gornje ivice (y_N) pa do nivoa do kojeg se javlja plastična deformacija (y_0). S obzirom da je razmatrano čisto savijanje, može se posmatrati samo jedna polovina preseka po visini ($h/2$). U ovom slučaju je lakše naći analitički izraz za moment, kao što je prikazano u [62]. Za razliku od stanja na slici 7.1, na slici 7.2 je prikazano stanje u graničnoj prizmi u jednom preseku grednog elementa nakon proizvoljnog slučaja opterećenja u primeru 5-2 (poglavlje 8.5).



Slika 7.2 Raspored graničnih trouglova po visini poprečnog preseka (granične prizme) od težišta ($y=0$) u pozitivnom smeru y koordinate u primeru 5-2 (poglavlje 8.5).

U slučaju proizvoljnog opterećenja, kao što je prikazano u primeru 5-2 (poglavlje 8.5), promena graničnih trouglova nije linearna kao na slici 7.1, pa je samim tim teže odrediti analitički izraz za moment. Na slici 7.2 je prikazano stanje u graničnoj prizmi u preseku A u primeru 5-2 nakon poslednjeg ciklusa opterećenja. U ovom slučaju je primenjena numerička integracija po visini poprečnog preseka sa 20 tačaka integracije i greška u odnosu na tačno rešenje je iznosila manje od 0.1%. Pod tačnim rešenjem se podrazumeva rešenje dobijeno na osnovu analitičkog izraza (izraz (7.6)) ili numeričkom integracijom sa odgovarajućim brojem tačaka po visini poprečnog preseka. Ovako veliki broj tačaka za numeričku integraciju je bio potreban po celoj visini poprečnog preseka jer je skoro ceo presek (slika 7.3(b)) bio izložen plastičnim deformacijama tokom opterećenja.

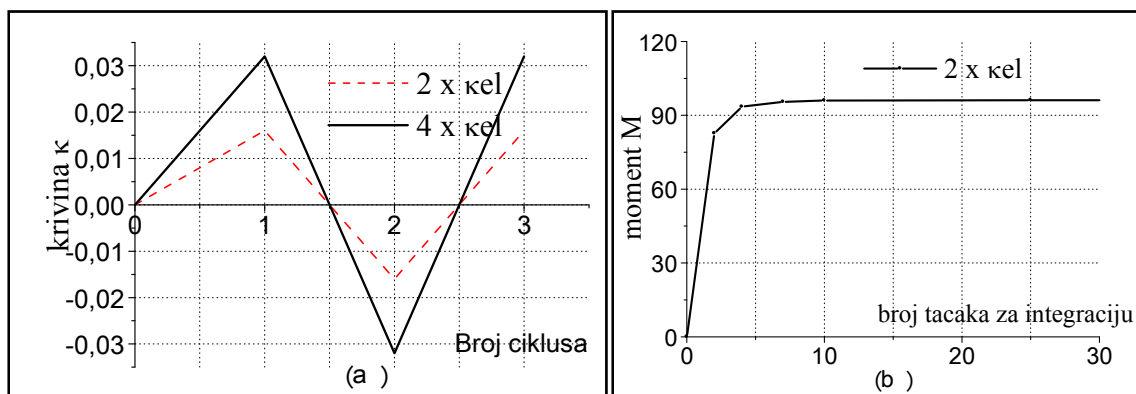


Slika 7.3 Normalni napon po visini poprečnog preseka u primeru 5-2 u preseku A : (a) Na kraju prvog ciklusa opterećenja; (b) Na kraju svih ciklusa opterećenja

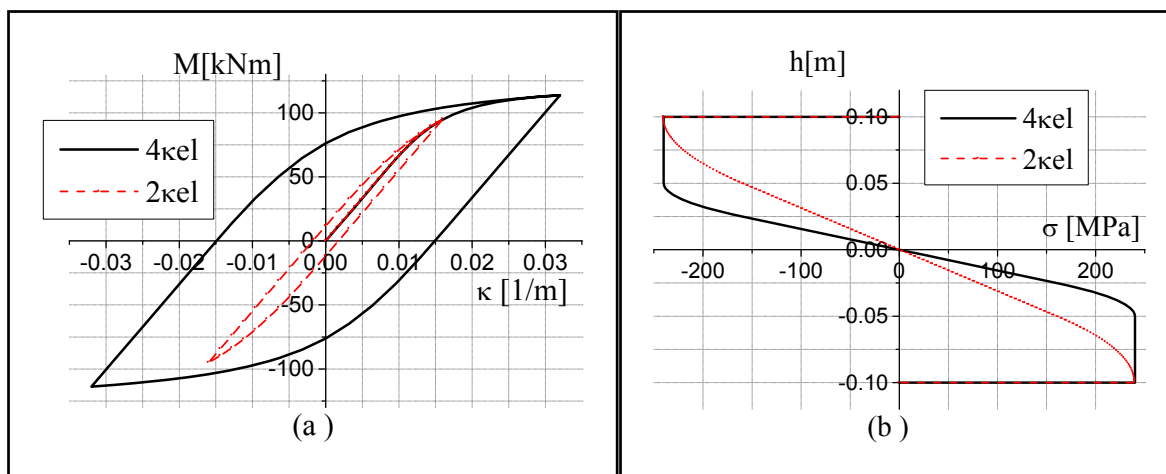
7.2 ELASTOPLASTIČNA ANALIZA GREDNOG ELEMENTA PRI ČISTOM SAVIJANJU - PRIMER

U ovom poglavlju će biti prikazani (primer 7.2.A) rezultati dobijeni analitičkim izrazom (ili geometrijskom interpretacijom) iz poglavlja 7.1, odnosno rezultati dobijeni numeričkom integracijom (trapeznim pravilom) odgovarajućeg broja tačaka (vlakana) po površini poprečnog preseka. Numerička analiza ramovskog linijskog nosača, pri savijanju, usled proizvoljnog opterećenja biće prikazana u poglavlju numeričkih primera (poglavlje 8). U primeru 7.2.A, analizirana je veza moment savijanja – krivina (M - κ) poprečnog preseka

dimenzija 0.05 x 0.2 m, od materijala čije su karakteristike $E=200\text{GPa}$, $E_h=0$. $Y_{min}=160\text{MPa}$ i $Y_{max}=320\text{MPa}$, opterećenog kontrolisanom deformacijom u vidu cikličnih promena krivine. U prvom slučaju opterećenja, maksimalna krivina poprečnog preseka je $2\kappa_{el}$, a u drugom $4\kappa_{el}$ (slika 7.4).



Slika 7.4 (a) Funkcije krivine za numerički primer 7.2.A; (b) Potreban broj tačaka, po visini poprečnog preseka, za konvergenciju ka tačnom rešenju (izraz (7.6)) u primeru 7.2.A



Slika 7.5 (a) Odnos M - κ uz primeru 7.2.A; (b) Normalni napon po visini poprečnog preseka u primeru 7.2.A

U primeru 7.2.A je, za slučaj opterećenja do granice od $2\kappa_{el}$, dobijeno rešenje zadovoljavajuće tačnosti sa manje od 10 tačaka po visini poprečnog preseka (slika 7.4(b)), a sličan je rezultat i za slučaj opterećenja do granice od $4\kappa_{el}$.

Koristeći "tačno rešenje", dobijeni su odgovarajući dijagrami $M-\kappa$, kao i dijagrami napona po visini poprečnog preseka, a prikazani su na slici 7.5. Maksimalan napon u materijalu je, zbog modula ojačanja koji je 0, prema definiciji napona iz izraza (3.21) i na osnovu slike 3.5, jednak $(Y_{min} + Y_{max})/2 = 240\text{MPa}$.

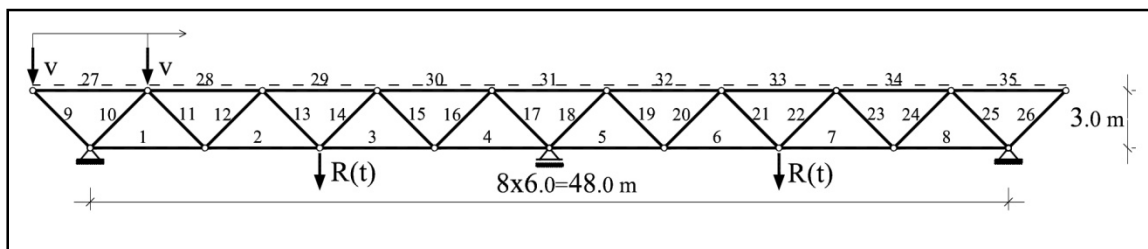
8 NUMERIČKI PRIMERI

8.1 STATIČKA ELASTOPLASTIČNA ANALIZA REŠETKASTOG LINIJSKOG NOSAČA

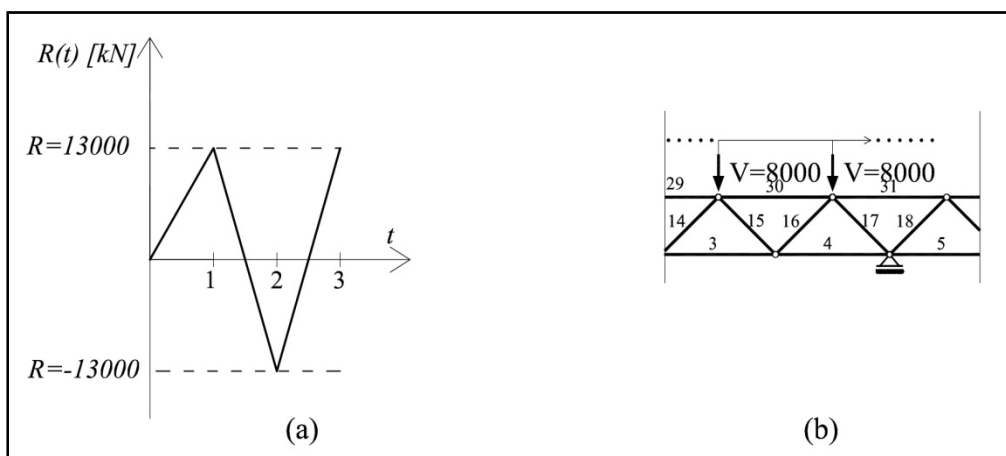
U primeru 1, analizirani su rezultati elasto-plastične analize rešetkastog nosača pri kvazi-statičkom opterećenju [59]. Modeli materijala koji su upoređivani su: model zasnovan na Prajzakovom modelu histerezisa [13], [14], [59], model zasnovan na Bouc-Wen-ovom modelu histerezisa [11], [12], [65] i model generalisane plastičnosti prikazan u radovima [87], [88]. Model materijala zasnovan na modifikovanom Bouc-Wen-ovom modelu histerezisa je (Slika 1.6) implementiran u komercijalni program za analizu konstrukcija SAP2000 [69].

Definisanje materijalnog ponašanja elemenata rešetke je zasnovano na rezultatima eksperimenta iz [64], odnosno na parametrima određenim na osnovu tog eksperimenta koji su prikazani u poglavlju 3.4.

Rešetkasti nosač, prikazan na slici 8.1 se sastoji od dve vrste štapova: pojasnih, površine poprečnog preseka $A_{hor} = 0.02\text{m}^2$, i dijagonala, površine poprečnog preseka $A_{dia} = 0.015\text{m}^2$.



Slika 8.1 Rešetkasti nosač sa opterećenjem korišćen u primerima 1-1 i 1-2.

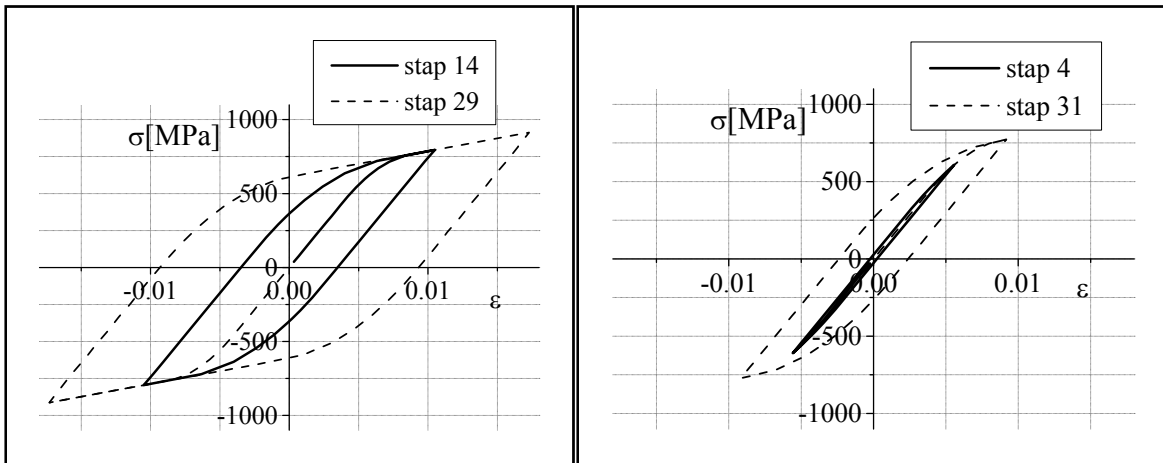


Slika 8.2 (a) Funkcija opterećenja korišćena u primeru 1-1; (b) Šema opterećenja korišćena u primeru 1-2.

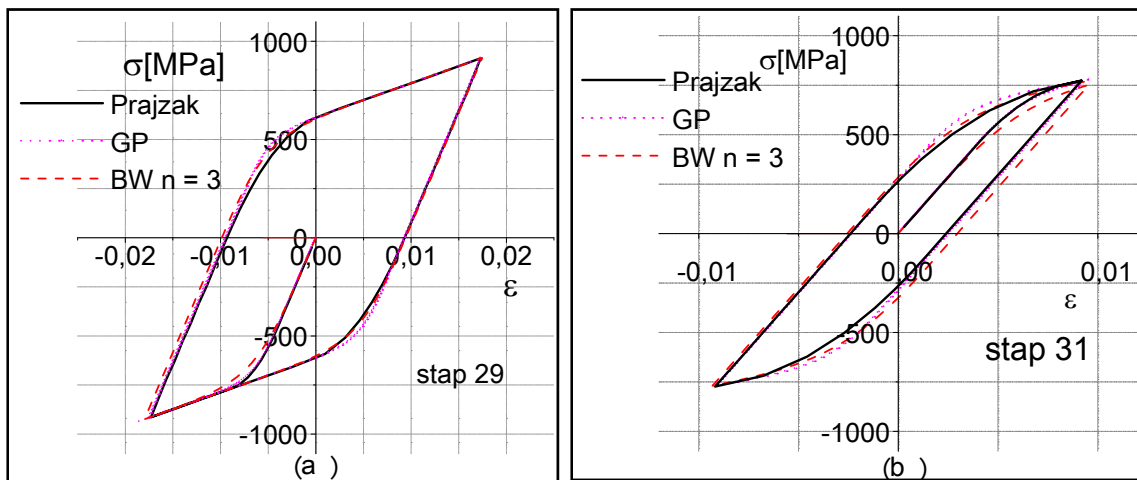
8.1.1 Primer 1-1.

U prvom delu primera 1 (primer 1-1), opterećenje je zadato u vidu funkcije (3 koraka) dve koncentrisane sile prikazane na slici 8.2(a), dok su u drugom delu primera 1 (primer 1-2) analizirani rezultati usled pokretnog opterećenja dve koncentrisane sile od $V=8000kN$. U ovom slučaju, posmatrani su rezultati usled 6 uzastopnih ciklusa opterećivanja celog gornjeg pojasa nosača pokretnim sistemom sila $2xV$ (Slika 8.2(b)). U prvom delu primera 1 (opterećenje $R(t)$), dijagrami $\sigma-\varepsilon$ za neke karakteristične štapove su prikazani na slikama 8.3 i 8.4.

Iz prikazanih slika se vidi veoma dobro poklapanje rezultata zasnovanih na različitim modelima, što je i očekivano jer su sami modeli definisani na osnovu istih eksperimentalnih rezultata, a broj ciklusa opterećenja nije veliki. Iako su histerezisne petlje naponsko-deformacijskih dijagrama dobijene veoma slične, postoji mala (zanemarljiva) razlika između gornjih i donjih vrednosti pikova histerezisnih petlji kod Bouc-Wen-ovog modela i kod GP modela.



Slika 8.3 Rezultati dobijeni u primeru 1-1, koristeći model materijala zasnovan na Prajzakovom modelu histereza



Slika 8.4 Uporedna analiza rezultata dobijenih u primeru 1-1 za štapove 29 i 31, koristeći materijalno ponašanje zasnovano na različitim modelima

Ta razlika, koja pokazuje da te petlje nisu zatvorene, ukazuje na materijalno ponašanje koje ne prati Masing zakon. U ovom primeru, ova pojava je beznačajna jer je konstrukcija, odnosno materijal bio izložen malom broju simetričnih ciklusa. U slučaju većeg broja ciklusa, ova razlika može da bude značajno veća. Ovo nije slučaj sa rezultatima dobijenih na osnovu Prajzakovog modela histereza, gde su dobijene stabilne histerezisne petlje. Štaviše, ako se analizira maksimalno pomeranje (na mestu koncentrisane sile R), vidi se

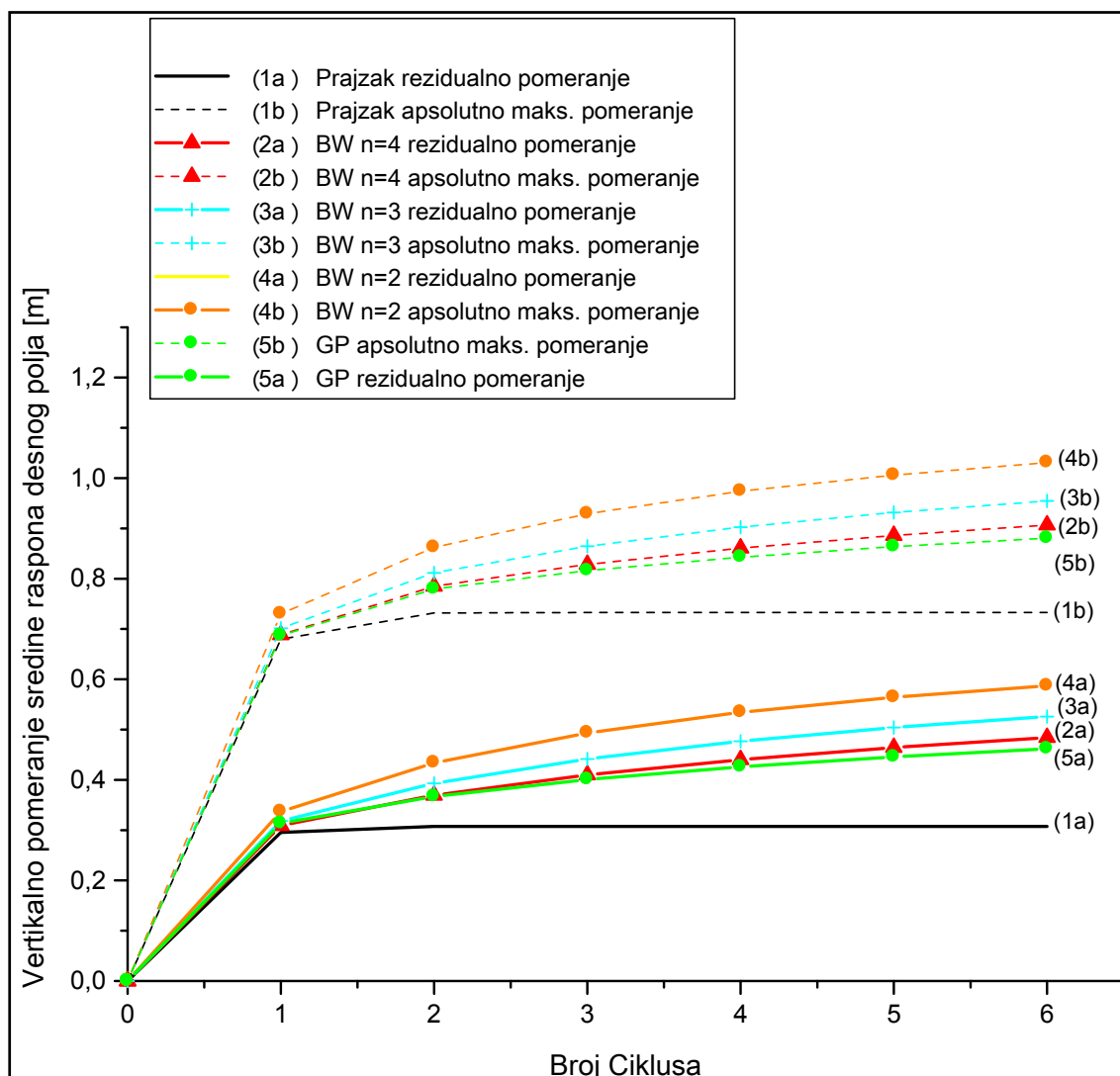
uticaj broja simetričnih ciklusa sile $R(t)$ na rezultate Bouc-Wen-ovog modela, kao što je prikazano u tabeli 8.1.

Tabela 8.1 Uporedna analiza rezultata dobijenih u primeru 1-1, koristeći materijalno ponašanje zasnovano na različitim modelima

Primer 1-1 - maksimalno vertikalno pomeranje [cm] tokom 9 koraka funkcije $R(t)$										
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R(t)	0	13000	-13000	13000	-13000	13000	-13000	13000	-13000	13000
Pr. model	0	44.15	-44.15	44.15	-44.15	44.15	-44.15	44.15	-44.15	44.15
BW n=2	0	48.97	-45.01	46.55	-45.48	46.41	-45.57	46.32	-45.64	46.26
BW n=3	0	46.36	-44.39	45.02	-44.51	44.98	-44.54	44.95	-44.57	44.93
BW n=4	0	45.23	-44.17	44.504	-44.22	44.48	-44.24	44.465	-44.25	44.455

8.1.2 Primer 1-2.

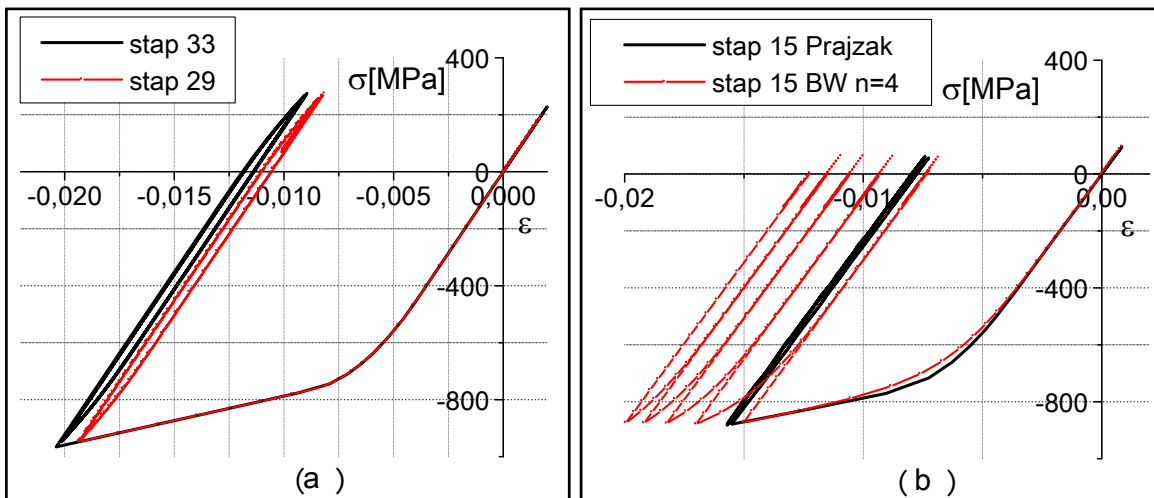
U drugom delu primera 1, gde se opterećenje definiše u vidu sistema od dve pokretne sile po gornjem pojasu, se takođe vidi razlika u rezultatima koji su dobijeni koristeći modele otvorenih histerezisnih petlji (BW i GP) i Masing ponašanja Prajzakovog modela. Iako u ovom delu primera koncentrisane sile nemaju cikličnu promenu znaka, elementi rešetke će biti izloženi promeni znaka opterećenja, s obzirom da se ovaj sistem sila kreće duž dva polja gornjeg pojasa rešetke.



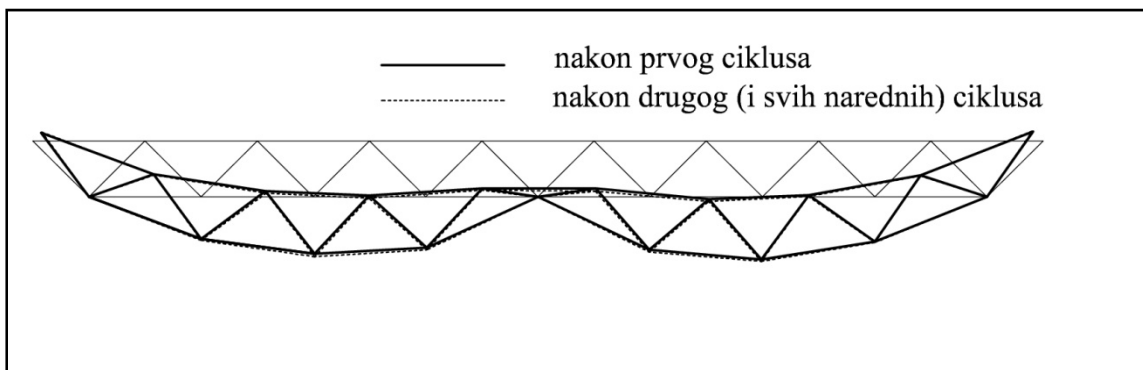
Slika 8.5 Maksimalno vertikalno pomeranje tokom svakog ciklusa i maksimalno rezidualno vertikalno pomeranje nakon svakog ciklusa, sredine raspona desnog polja rešetkastog nosača, u primeru 1-2.

Iako je konstrukcija sa slike 8.1 izložena 6 uzastopnih identičnih ciklusa pokretnog opterećenja, vrednosti napona i deformacija nisu bili simetrični u odnosu na srednji oslonac, kao što je to slučaj sa elastičnom analizom. Elementi rešetke postepeno povećavaju plastične deformacije u slučaju elastoplastične analize, pa u tom slučaju vrednosti napona i deformacija ne mogu biti u istim instancama vremena simetrični u

odnosu na srednji oslonac, odnosno odgovarajući simetrični elementi imaju različitu istoriju deformacije (Slika 8.6(a))



Slika 8.6 (a) σ - ϵ dijagrami u primeru 1-2 dobijeni koristeći model materijala zasnovan na Prajzakovom modelu histerezisa; (b) Uporedna analiza rezultata dobijenih u primeru 1-2 za štap 15, koristeći materijalno ponašanje zasnovano na različitim modelima



Slika 8.7 (a) Deformisana konfiguracija (faktor uvećanja 40) rešetkastog nosača u primeru 1-2 dobijena koristeći model materijala zasnovan na Prajzakovom modelu histerezisa

Rezultati dobijeni koristeći različite materijalne modele su predstavljeni na slici 8.5, gde su prikazana apsolutna maksimalna vertikalna pomeranja tokom svakog ciklusa, kao i zaostala vertikalna pomeranja na kraju svakog ciklusa. Kada se analiziraju vrednosti dobijene kada je materijalni model bio zasnovan na Prajzakovom modelu histerezisa, očigledno je da

nema značajnijeg porasta deformacije nakon prvog ciklusa. Kod BW modela je u manjoj meri izražena pojava fenomena nestabilnog drifta (poglavlje 2.3).

8.1.3 Analiza rezultata

Kada se u primeru 1-2 uporede rezultujuće histerezisne petlje (σ - ϵ) i rezultati maksimalnih pomeranja može se uočiti slična razlika između odgovarajućih modela histerezisnih operatora kao u primeru 1-1. Dok je model materijala definisan Prajzakovim histerezisnim operatorom pokazivao "shakedown" fenomene (elastični ili plastični), to nije slučaj sa modelima BW i GP. Kada se rezultati predmetnog modela analiziraju i uporede sa ova dva modela iz primera 1-1 i 1-2, može se reći da se stabilizacija plastičnih deformacija javlja pri mnogo većem broju identičnih ciklusa. Može se reći da Prajzakov model histerezisa predviđa pojavu stabilnih ciklusa dosta ranije u poređenju sa drugim modelima korišćenim u ovoj analizi.

Da bi analize sprovedene koristeći različite modele (Prajzak i BW) u primeru 1 bile uporedive, isti tip iterativne procedure (metoda početnog napona) je korišćen za rešavanje sistema nelinearnih jednačina. Takođe je u ova dva modela korišćen identični kriterijum konvergencije zasnovan na zadovoljenju uslova tolerancije po silama. Iterativna procedura korišćena za GP model, definisan u [66], je modifikovana Newton-Raphson metoda (definiše se tangenta matrica krutosti), a odgovarajući kriterijum konvergencije je zasnovan na zadovoljenju energetskog uslova tolerancije.

Broj iteracija i vreme potrebno za opisivanje histerezisne petlje koristeći Prajzakov model histerezisa, prikazan u tabeli 8.2 je dobijen korišćenjem 10 inkremenata po koraku. Za konvergenciju rešenja u ovom slučaju je dovoljan i jedan inkrement po koraku što rezultira manjim brojem iteracija (117) i konačno manjim vremenom (1.1s). U tabelama narednih primera su prikazani rezultati analize (broj iteracija i CPU vreme) koji su potrebni za konvergenciju rešenja. Kod Prajzakovog modela sa analitičkim rešenjem je uvek 1 inkrement po koraku dovoljan za konvergenciju rešenja, osim u slučajevima sa oštećenjem gde se javlja negativna krutost (poglavlje 4.2)

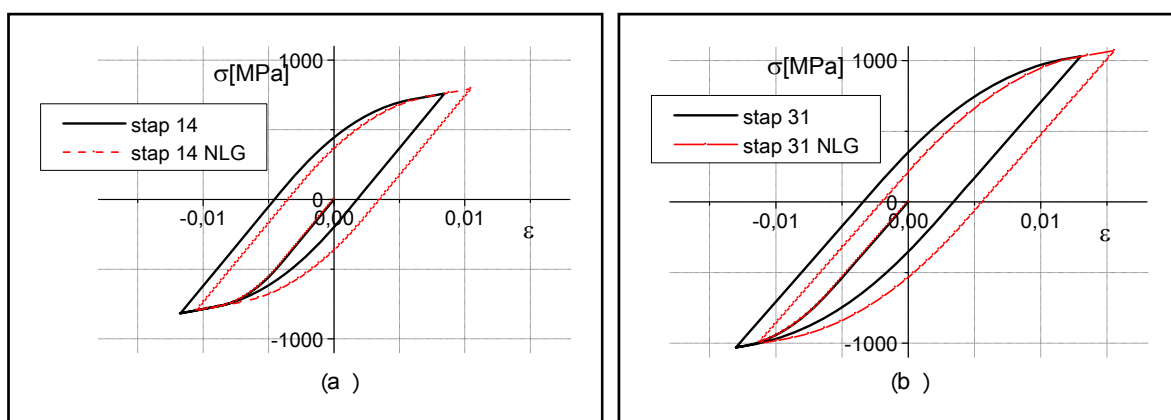
Tabela 8.2 Uporedna analiza karakteristika proračuna sprovedenog u primeru 1-1, koristeći materijalno ponašanje zasnovano na različitim modelima

Model materijala	Primer 1-1	
	Broj iteracija [-]	CPU vreme [s]
Preisach	477	3
BW($\alpha = 2$)	1016	8
BW($\alpha = 3$)	1001	8
BW($\alpha = 4$)	1019	8
GP	78	2

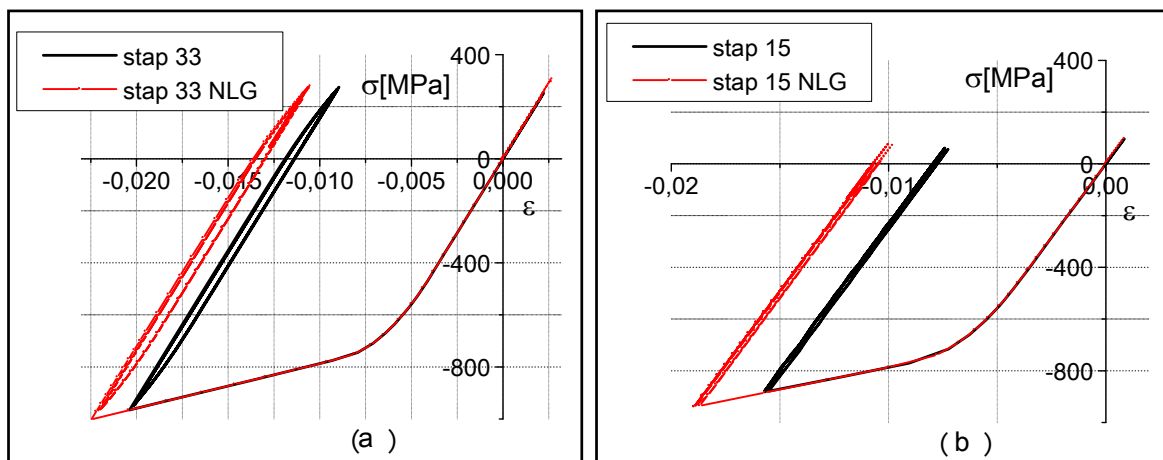
Upoređujući metode koje koriste metodu početnog napona, može se zaključiti da je manji broj iteracija potreban za konvergenciju rešenja Prajzakovog modela u odnosu na BW modele, a samim tim je vreme za izvršenje proračuna manje. Za analizu zasnovanu na GP modelu se može videti da je manji broj iteracija potreban za rešavanje nelinearnog sistema jednačina, ali pri tome je neophodno formiranje tangentne matrice krutosti što može da prouzrokuje povećanjem neophodnog vremena za ukupnu numeričku analizu kao što je to slučaj u Primeru 2.

Razlika u broju iteracija je prouzrokovana formom rešenja odgovarajućih modela. Dok je kod BW modela, fundamentalna jednačina za rešavanje - diferencijalna jednačina, to nije slučaj sa modelom razmatranim u ovoj disertaciji, gde je rešenje definisano u analitičkom obliku. Takvo rešenje je numerički efektivnije u poređenju sa rešavanjem diferencijalne jednačine, a ovakva poređenja analiza su moguća i objektivna ukoliko su i parametri, kao što su postupak za rešavanje nelinearnih jednačina i kriterijum konvergencije, vezani za različite modele, približno isti. Prikazani rezultati i komentari za primere 1-1 i 1-2 na slikama i tabelama su rezultat analize u kojoj je zanemarena geometrijska nelinearnost.

Ukoliko se definiše geometrijska nelinearnost prema odgovarajućim izrazima u poglavlju 3.5, javljaju se određene razlike u odgovarajućim vrednostima napona i deformacija elemenata, kao i pomeranja same konstrukcije. Sa numeričke tačke gledišta, u ovom slučaju, za analizu zasnovanu na Prajzakovom modelu histereziisa, potrebno je i više iteracija kako bi rešenje konvergiralo. Sa druge strane se takođe usložnjava proračun zasnovan na BW modelu, a i broj inkremenata i iteracija potreban za konvergenciju rešenja takođe raste. U tabeli 8.3 je prikazana uporedna analiza rezultata iz primera 1-1 i 1-2, bez i sa efektima geometrijske nelinearnosti.



Slika 8.8 (a) Rezultati dobijeni u primeru 1-1, koristeći model materijala zasnovan na Prajzakovom modelu histereziisa sa i bez efekata geometrijske nelinearnosti.



Slika 8.9 (a) Rezultati dobijeni u primeru 1-2, koristeći model materijala zasnovan na Prajzakovom modelu histereziisa sa i bez efekata geometrijske nelinearnosti.

Na slici 8.10 su prikazani rezultati analize koji su analogni rezultatima sa slike 8.5, gde geometrijska nelinearnost nije uzeta u obzir u proračunu. I u ovom slučaju je dobijena stabilizacija maksimalnih pomeranja nakon drugog ciklusa opterećenja.

Tabela 8.3 Poređenje rezultata proračuna u primeru 1-1 i primeru 1-2, koristeći materijalno ponašanje zasnovano na različitim modelima, sa i bez efekata geometrijske nelinearnosti

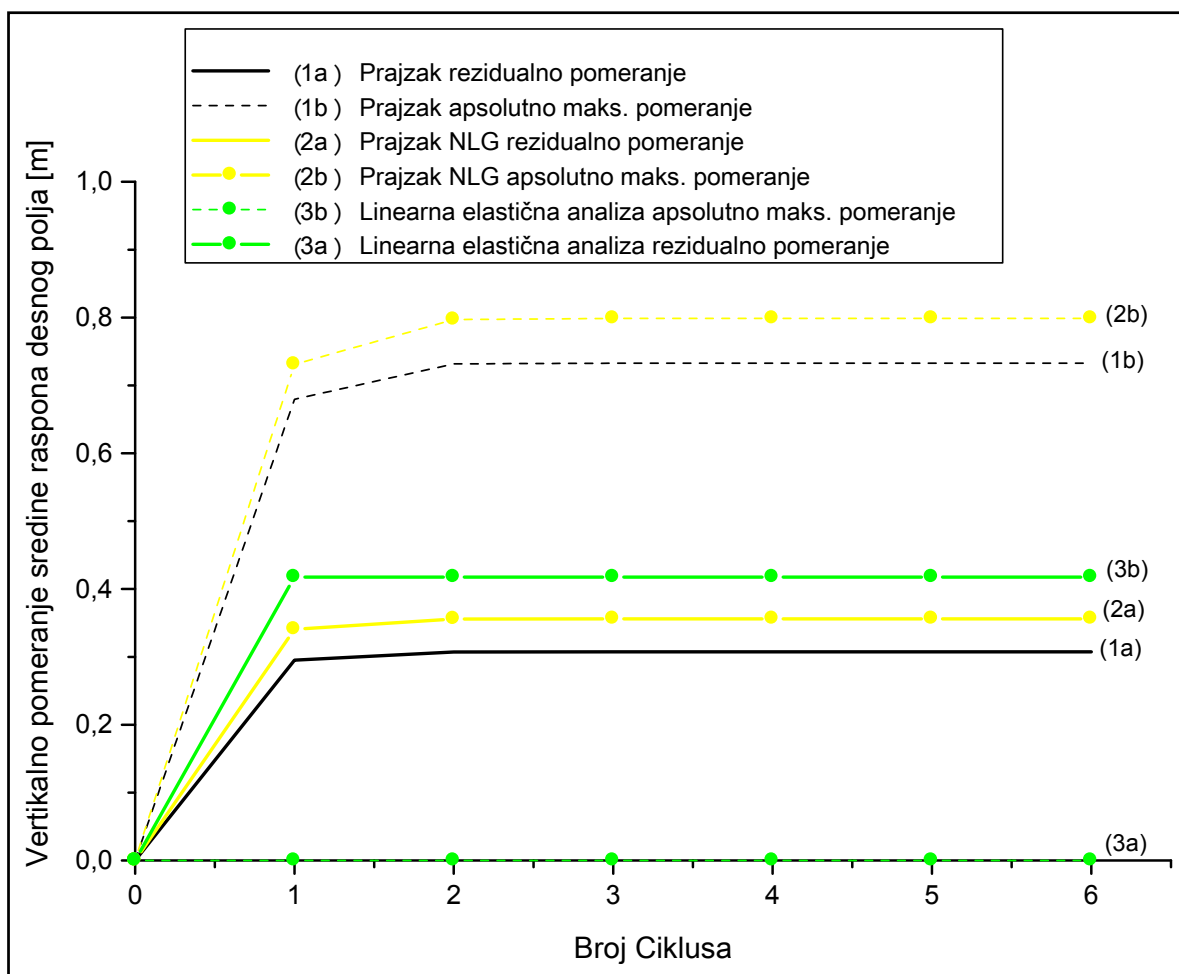
Primer 1-1 i 1-2 - Poređenje efekata nelinearne geometrije									
Primer	Vrednost	Preisach	Preisach NLG	BW (n=2)	BW (n=2) NLG	BW (n=3)	BW (n=3) NLG	BW (n=4)	BW (n=4) NLG
1-1	v_{max} [cm]	44,15	47,2	48,97	51.8	46,36	49,28	45,23	48.23
1-1	σ_{max} [MPa]	913	908	933	930	924	925	919	921
1-2	v_{max} [cm]	73.2	79.8	103	101	95.4	96.2	90.6	92
1-2	σ_{max} [MPa]	956	972	986	1012	976	1002	964	982

Tabela 8.4 Uporedna analiza rezultata dobijenih u primeru 1-1, varirajući broj polja donjeg pojasa rešetke bez srednjeg oslonca

Model materijala	broj polja n=4		broj polja n=6		broj polja n=8	
	Broj iter. [-]	CPU vr. [s]	Broj iter. [-]	CPU vr. [s]	Broj iter. [-]	CPU vr. [s]
Preisach	25	0.18	15	0.2	10	0.2
BW($\alpha =3$) NR	237	2	168	2	56	2
BW($\alpha =3$) mod NR	26	8	200	17	62	17
Preisach nlgeom.	57	2	45	3	55	4.3
BW($\alpha =3$) mod NR nlgeom.	88	13	276	28	126	33

Pored modela rešetke sa slike 8.1, urađena je komparativna analiza sličnih konstrukcija kod kojih je uklonjen srednji oslonac i variran broj polja donjeg pojasa u slučaju opterećenja silom (na sredini raspona svakog polja) koja dovodi do maksimalne plastične deformacije u

konstrukciji od 0.1%. U tim slučajevima, je poređena numerička efektivnost proračuna (Tabela 8.4) zasnovanog na Prajzakovom i BW modelu, uzimajući u obzir i geometrijsku nelinearnost. Pri tome je u proračunu koji je bio zasnovan na modelu BW modelu histerezisa korišćena i (Newton-Raphson-ova) metoda početnog napona i modifikovana Newton-Raphson-ova metoda (definiše se tangenta matrica krutosti) za rešavanje sistema nelinearnih jednačina.

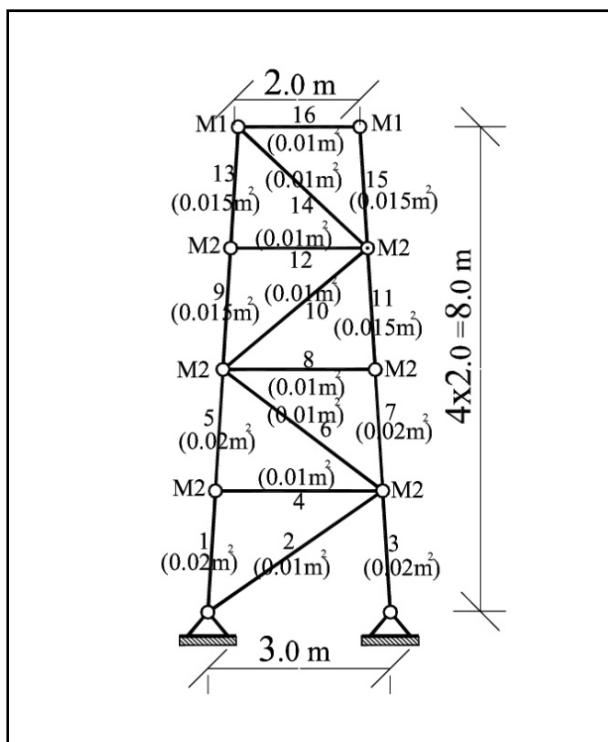


Slika 8.10 Maksimalno vertikalno pomeranje tokom svakog ciklusa i maksimalno rezidualno vertikalno pomeranje nakon svakog ciklusa, sredine raspona desnog polja rešetkastog nosača, u primeru 1-2 sa i bez efekata geometrijske nelinearnosti.

8.2 DINAMIČKA ELASTOPLASTIČNA ANALIZA REŠETKASTOG LINIJSKOG NOSAČA

8.2.1 Primer 2

U primeru 2, dinamička analiza elasto-plastičnog ponašanja materijala definisanog sa 3 različita modela materijala (kao u primeru 1), je sprovedena bez uticaja prigušenja. Rešetkasta konstrukcija, prikazana na slici 8.11 je analizirana [59] pod opterećenjem u vidu ubrzanja tla u formi zapisa zemljotresa El Centro. Radi pojednostavljenja analize, posmatrano je samo prvih 10 sekundi registrovanog zapisa skaliranog sa faktorom uvećanja 1.5. Koncentrisane mase u čvorovima su zadate prema slici 8.11, gde je $M_1 = 600 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}$ i $M_2 = 150 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}$. Rešetkasta konstrukcija se sastoji od tri vrste štapova: pojasnih, horizontalnih i dijagonala.

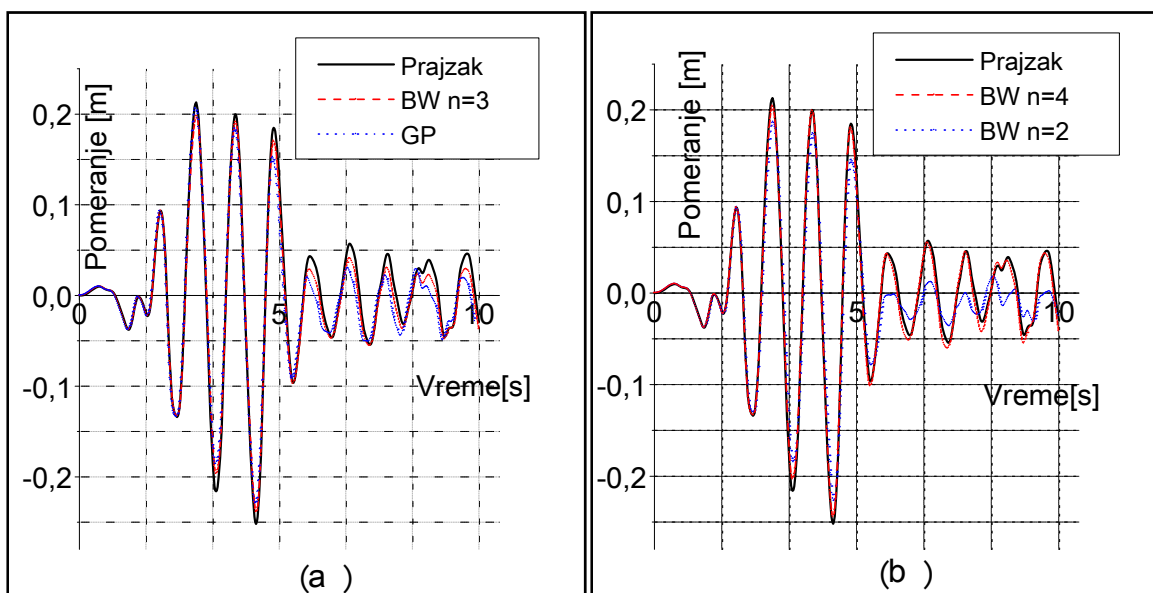


Slika 8.11 Rešetkasti nosač sa opterećenjem korišćen u primeru 2.

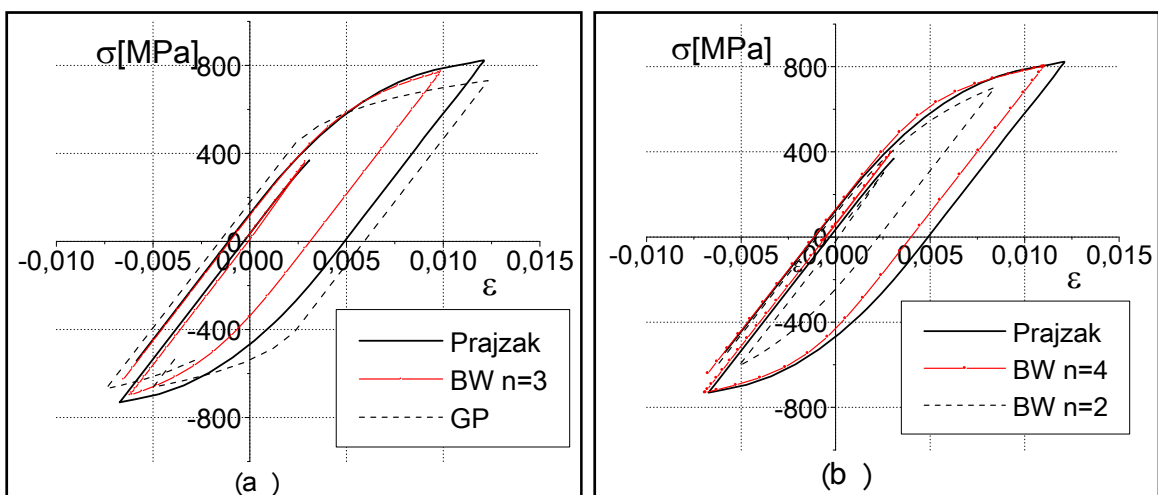
Da bi analize sprovedene koristeći različite modele (Prajzak i BW) u primeru 2 bile uporedive, identična Newmark-ova metoda za direktnu integraciju jednačina pomeranja je

korišćena. Takođe, u dinamičkoj analizi je korišćen identični kriterijum konvergencije zasnovan na zadovoljenju uslova tolerancije po silama i energiji (za Prajzakov i BW model), kao što je preporučeno u [80].

U ovom slučaju, najbolje poklapanje rezultata sa rezultatima EP analize zasnovane na Prajzakovom modelu je dao BW model sa parametrom $n=4$. Da bi se lakše sprovelo poređenje rezultata različitih modela, usled velikog broja ciklusa, samo su granične histerezisne krive prikazane na slici 8.13. Posmatranjem horizontalnog pomeranja vrha konstrukcije, može se doći do zaključka da su analizirani modeli dali slične rezultate, iako je broj ciklusa kojem je bila izlagana rešetkasta konstrukcija veliki. Jedino je model BW sa parametrom $n=2$, dao značajnija odstupanja vrednosti pomeranja vrha (Slika 8.12).



Slika 8.12 Horizontalno pomeranje vrha konstrukcije prema različitim modelima u primeru 2.



Slika 8.13 σ - ε dijagrami (granične krive) u primeru 2 za štap 3 - uporedna analiza rezultata dobijenih koristeći materijalno ponašanje zasnovano na različitim modelima

U dinamičkoj analizi, za sve materijalne modele se koristio Newmark-ov postupak sa koeficijentima $\delta=0.5$ i $\alpha=0.25$ za postupak direktne integracije, i odgovarajuće poređenje karakteristika proračuna je dato u tabeli 8.4 U ovom slučaju je računarsko vreme potrebno za analizu pokazalo prednost korišćenja Prajzakovog modela histerezisa, iako je broj iteracija veći nego u slučaju GP modela.

Tabela 8.5 Uporedna analiza karakteristika proračuna sprovedene u primeru 2, koristeći materijalno ponašanje zasnovano na različitim modelima

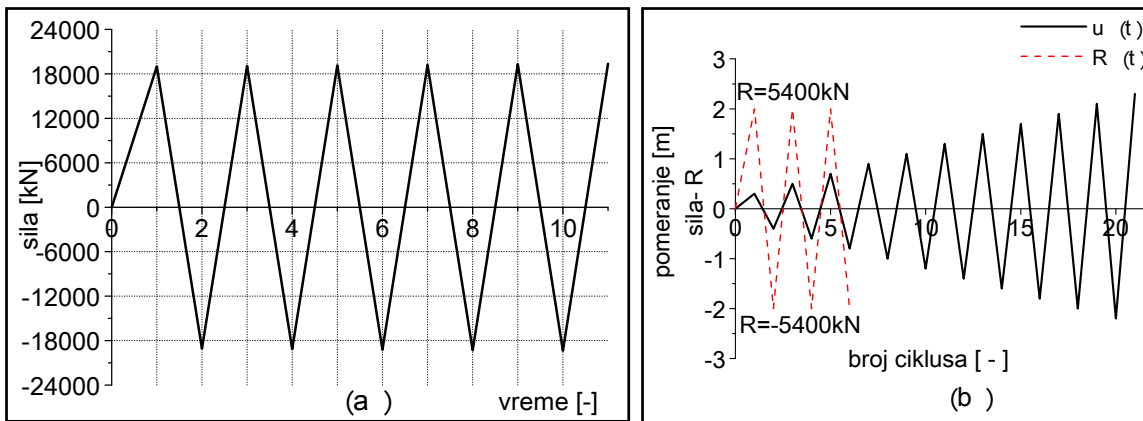
Model materijala	Primer 2	
	Broj iteracija [-]	CPU vreme [s]
Preisach	1469	4
BW($\alpha=2$)	7477	12
BW($\alpha=3$)	5204	12
BW($\alpha=4$)	4281	11
GP	680	11

Za poređenje karakteristika proračuna zasnovanog na Prajzakovom i BW modelu se može reći da je objektivno, zbog istih parametara analiza (koje su slične), a i u ovom slučaju (primer 2) je bio potreban veći broj iteracija i CPU vreme u slučaju BW modela histerezisa. Sličan odnos numeričke efektivnosti ova dva modela je dobijen i u drugim primerima. U slučaju modela GP, u ovoj doktorskoj disertaciji nije obrađen dovoljan broj primera i poređenja da bi se izvukli isključivi zaključci, ali se na osnovu prikazanih i urađenih analiza može pretpostaviti da se sličan odnos može javiti i u drugim odgovarajućim modelima.

8.3 ELASTOPLASTIČNA ANALIZA REŠETKASTOG LINIJSKOG NOSAČA SA OŠTEĆENJEM

U primeru 3, analiziraju se rezultati elastoplastične analize jednog štapa (Primer 3-1) i rešetkastog nosača (Primer 3-2) sa oštećenjem pri kvazi-statičkom opterećenju [58]. U primeru 3-4 analizirani su rezultati usled dinamičkog opterećenja, a u primeru 3-5 različite vrste loma. Modeli materijala koji su upoređivani su: model zasnovan na Prajzakovom modelu histerezisa [13], [14], [59] bez oštećenja, isti model (za elastoplastičnu analizu) sa oštećenjem definisanim korišćenjem Prajzakovog histerezisnog operatora (poglavlje 4.1.1) i model kod kojeg je oštećenje definisano osnovnim principima mehanike oštećenja u kontinuumu (poglavlje 4.1.2).

Definisanje elastoplastičnog materijalnog ponašanja elemenata rešetke je zasnovano na rezultatima eksperimenta iz [64], odnosno na parametrima određenim na osnovu tog eksperimenta koji su prikazani u poglavlju 3.4. Parametri za definisanje modela oštećenja su definisani u numeričkom primeru u poglavlju 4.3.

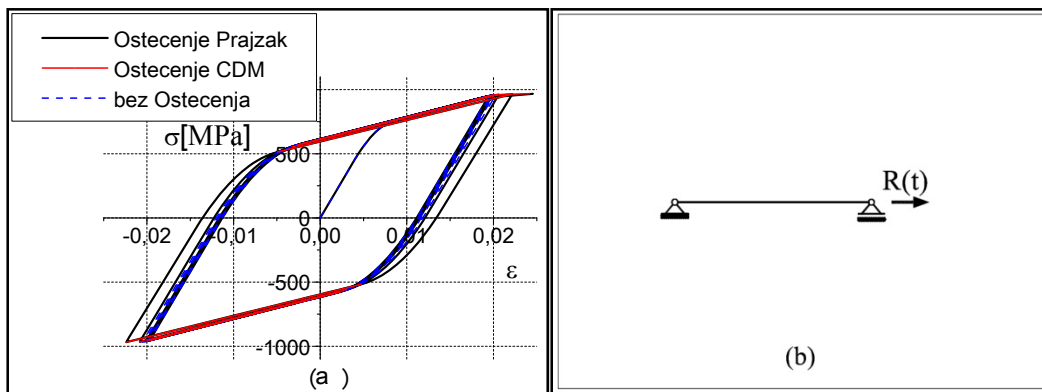


Slika 8.14 (a) Funkcija opterećenja $R(t)$ korišćena u primeru 3-1. (b) Funkcija opterećenja $u(t)$ i $R(t)$ korišćena u primeru 3-2.

8.3.1 Primer 3-1

U primeru 3-1 gde je opterećenje u vidu ciklično promenljive (Slika 8.14 (a)) aksijalne sile $R(t)$ na jedan štap (slika 8.15(b)) poprečnog preseka 0.02m^2 , analiza je moguća samo do tačke nulte krutosti, odnosno nije moguće definisati omekšanje u tom slučaju.

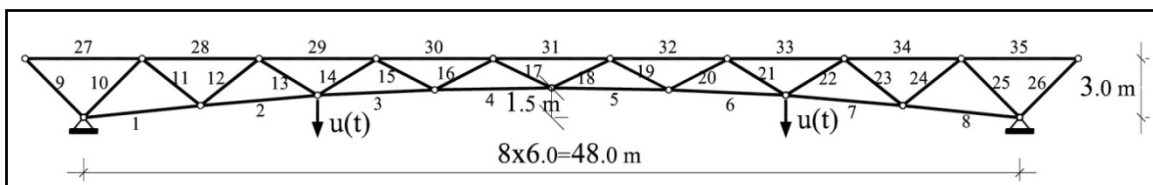
Rezultujuće histerezijsne petlje pokazuju dobro poklapanje modela sa oštećenjem (slika 8.15(a)), što je i očekivano s obzorom na relativno mali nivo oštećenja ($D=\omega=0.045$).



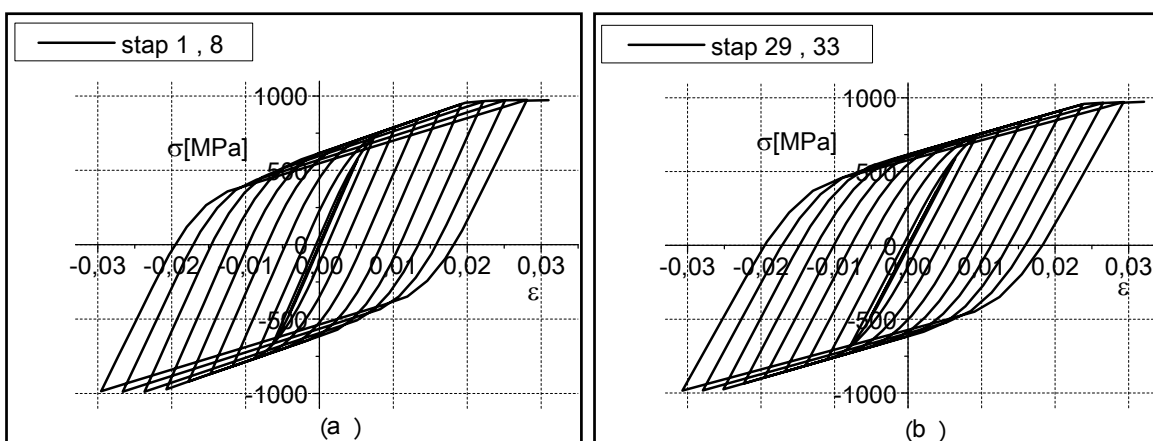
Slika 8.15 (a) Uporedna analiza rezultata dobijenih u primeru 3-1 koristeći različite modele za definisanje oštećenja; (b) Element izložen opterećenjem $R(t)$ u primeru 3-1

8.3.2 Primer 3-2

U primeru 3-2 gde je opterećenje u vidu funkcije (Slika 8.14 (b)) pomeranja $u(t)$ i sile $R(t)$ zadatih u dve tačke na rešetkastoj konstrukciji (Slika 8.16), svaki štap ima poprečni presek 0.02m^2 . Rezultujuće histerezijske petlje za dva para simetrično opterećenih štapova su prikazane na slici 8.17.



Slika 8.16 Rešetkasti nosač sa opterećenjem korišćen u primeru 3-2.

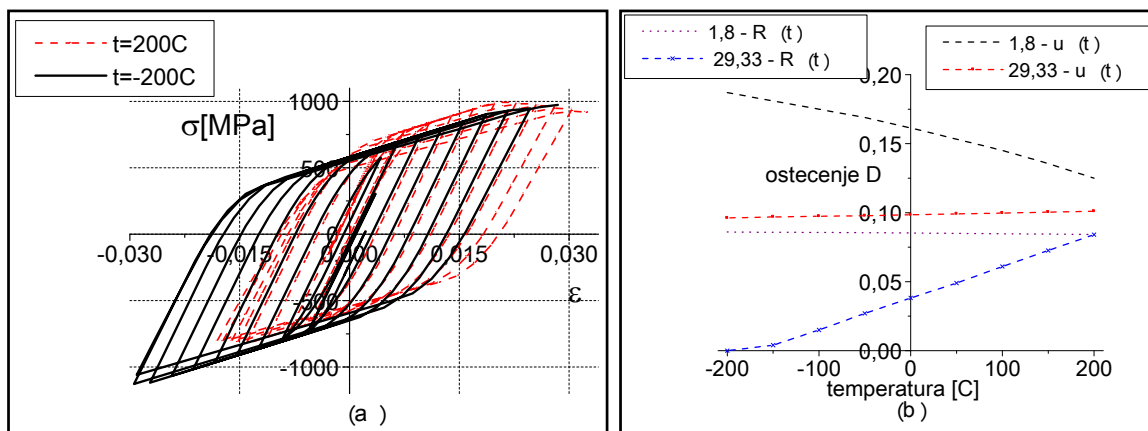


Slika 8.17 Rezultati dobijeni u primeru 3-2 (opterećenje $u(t)$) koristeći model oštećenja definisan korišćenjem Prajzakovog histerezijskog operatora (poglavlje 4.1.1)

8.3.3 Primer 3-3

U primeru 3-3, analizirao se uticaj temperature u osi svih štapova na odgovor konstrukcije iz primera 3-2 [89]. Kako bi se stekao uvid u način promene oštećenja i zavisnost od temperature, opseg za razmatranje je bio čisto teorijski (-200C do 200C) bez uzimanja u obzir realne promene strukture u materijalu koja bi nastupila pri takvim temperaturama.

Rezultujuća histerezisna petlja za par simetrično opterećenih štapova i zavisnost skalarne veličine oštećenja D od temperature je prikazana na slici 8.18.

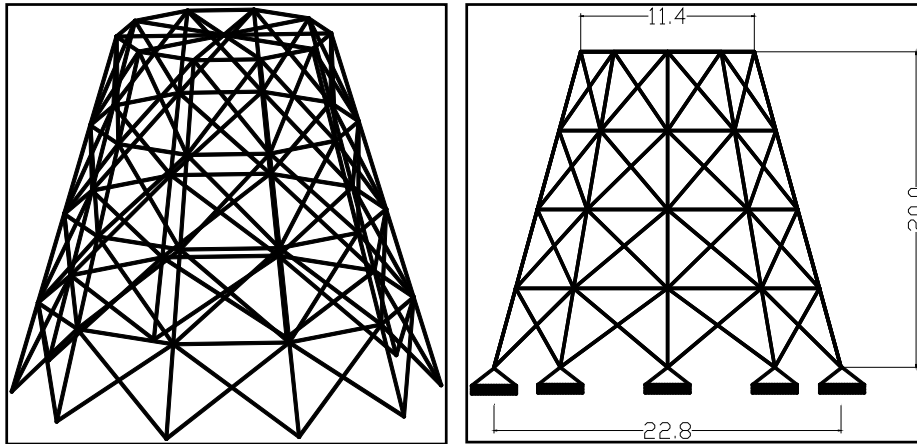


Slika 8.18 Rezultati dobijeni u primeru 3-2 koristeći model oštećenja definisan Prajzakovim modelom - varijacija temperature u osi svih štapova između -200C i +200C:
(a) Štap 1 i 8 ; (b) Zavisnost skalarne veličine oštećenja D od temperature

8.3.4 Primer 3-4

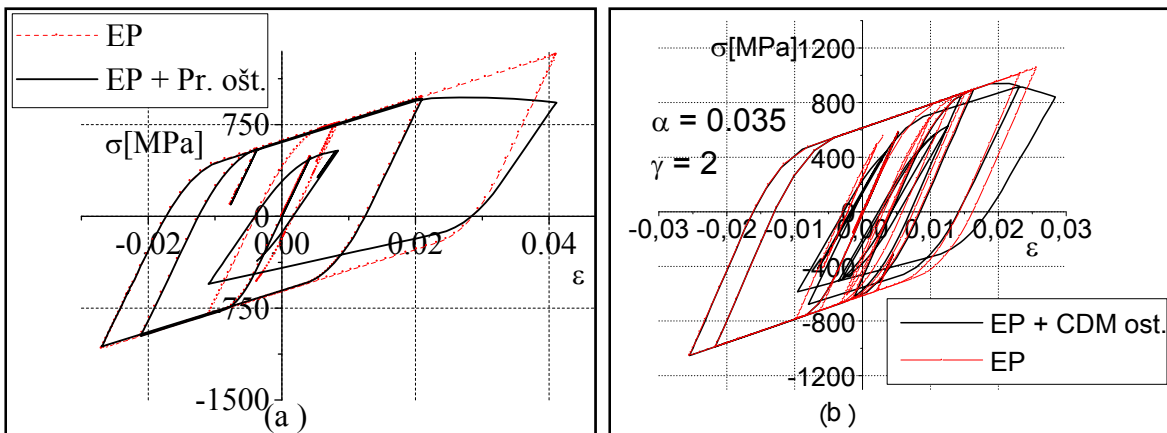
Primer 3-4 se odnosi na dinamičku analizu rešetkastih nosača sa oštećenjem. U prvom delu posmatrana je trodimenzionalna rešetkasta konstrukcija u obliku vodotornja, dok se drugi deo odnosio na konstrukciju iz primera 2. Modeli materijala koji se koriste su definisani u primeru 3-1 i 3-2.

Rešetkasta konstrukcija, prikazana na slici 8.19, je analizirana pod opterećenjem u vidu ubrzanja tla u formi zapisa zemljotresa El Centro. Radi pojednostavljenja analize, posmatrano je samo prvih 10 sekundi registrovanog zapisa skaliranog sa faktorom uvećanja 1.5. Masa je definisana u čvorovima poslednjeg nivoa vodotornja u ukupnom iznosu od $1000kN \cdot s^2/m$. Rešetkasta konstrukcija se sastoji od štapova površine $0.01m^2$. Nivoi konstrukcije se sastoje od radialno raspoređenih deset polja identičnih dimenzija, koje se smanjuju ka vrhu.



Slika 8.19 Rešetkasti nosač korišćen u primeru 3-4.

Na slici 8.20(a) je prikazan rezultat koji se odnosi na najopterećeniji štap na najnižem nivou konstrukcije u prvom delu primera. Na slici 8.20(b) je prikazana uporedna analiza rezultata dobijenog iz primera 2, gde je ubrzanje tla (zemljotresa El Centro) skalirano sa faktorom uvećanja 4. Model materijala sa oštećenjem je u ovom slučaju definisan sa pristupom prikazanim u poglavlju 4.1.2.



Slika 8.20(a) Uporedna analiza rezultata dobijenih u primeru 3-4 za najopterećeniji štap na najnižem nivou konstrukcije koristeći model materijala sa i bez oštećenja; (b) Uporedna analiza rezultata dobijenih za štap 3 u primeru 2 koristeći model materijala sa i bez oštećenja.

8.3.5 Analiza rezultata

Analiza numeričke efektivnosti primene odgovarajućih modela je prikazana u tabelama 8.6 i 8.7. U slučaju numeričkog primera kontrolisane deformacije jednog štapa iz poglavlja 4.3 (primer 4.3.A), za model oštećenja definisan sa Prajzakovim modelom histerezisa je dovoljan jedan inkrement i jedna iteracija po koraku nezavisno od nivoa oštećenja. U primeru 3-1 (opterećenje u vidu kontrolisane sile), potrebno je više iteracija kako bi rešenje konvergiralo, dok je u slučaju modela oštećenja definisanog sa osnovnim principima CDM (poglavlje 4.1.2) i broj inkremenata morao da bude veći, jer je rešenje dato u inkrementalnoj formi (izraz (4.13)).

Tabela 8.6 Uporedna analiza karakteristika analize sprovedene u poglavlju 4.3 i u primeru 3-1, koristeći materijalno ponašanje zasnovano na različitim modelima

Analiza	Opterećenje $u(t)$ – primer 4.3.A - poglavlje 4.3			Opterećenje $R(t)$ - primer 3-1		
	broj iteracija	broj inkremenata	CPU vreme [s]	broj iteracija	broj inkremenata	maks. pom. [m]
EP An. bez ošteć.	1	1·11	0.4	1074	1·11	0.020498
EP sa Pr. ošteć.	1	1·11	0.5	3932	1·11	0.024588
EP An. sa CDM.ošteć.	1	1579	7.47	10738	33	0.024458

U primeru 3-2, model oštećenja (poglavlje 4.1.1) zahteva iterativni postupak kako bi se izvršila redistribucija sila, dok kod drugog modela oštećenja (CDM - poglavlje 4.1.2), i broj inkremenata i iteracija mora da bude veći da bi rešenje konvergiralo.

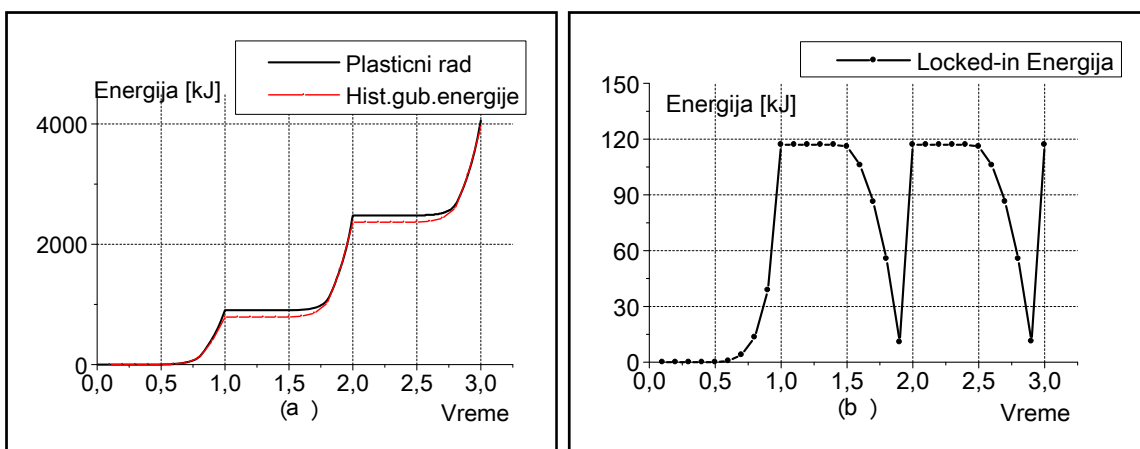
Tabela 8.7 Uporedna analiza karakteristika analize sprovedene u primeru 3-2, koristeći materijalno ponašanje zasnovano na različitim modelima

Analiza	broj iteracija	broj inkremenata	CPU vreme [s]	maks.ošteć [%] štapovi 1, 8	maks.ošteć [%] štapovi 29,33
Primer 3-2 ($u(t)$) - EP An. bez ošteć.	397	21	2.8	-	-
Primer 3-2 ($u(t)$) - EP An. sa Pr. ošteć.	1930	24	23.58	16.14	9.85
Primer 3-2 ($u(t)$) - EP An.sa CDM. ošteć	9000	4200	1700	16.05	9.92
Primer 3-2 ($R(t)$) - EP An. bez ošteć.	122	6	3.8	-	-
Primer 3-2 ($R(t)$) - EP An. sa Pr. ošteć.	191	6	6.9	8.53	3.82
Primer 3-2 ($R(t)$) - EP An. sa CDM.ošteć	62161	1500	757	8.51	3.86

8.4 PRORAČUN ENERGETSKIH KOMPONENTI REŠETKASTOG LINIJSKOG NOSAČA U ELASTOPLASTIČNOJ ANALIZI

U ovom poglavlju biće prikazani rezultati proračuna energetskih komponenti u primerima elastoplastične analize (primeri 1-1, 1-2, 2). U poglavlju 5 je pokazano da prilikom pojave plastičnih deformacija, ukupan plastični rad ne disipira u potpunosti u toplotu (histerezisni gubitak energije), već jedan deo ostaje u materijalu, pa se taj deo lako dobije kao razlika izračunatih veličina plastičnog rada i histerezisnog gubitka energije.

Za razliku od veličina napona i deformacije, u EP analizi, energetske komponente (plastični rad i histerezisni gubitak energije) se povećavaju tokom svake promene plastične deformacije, dok ostaju konstantni tokom segmenata elastičnog opterećenja i rasterećenja.



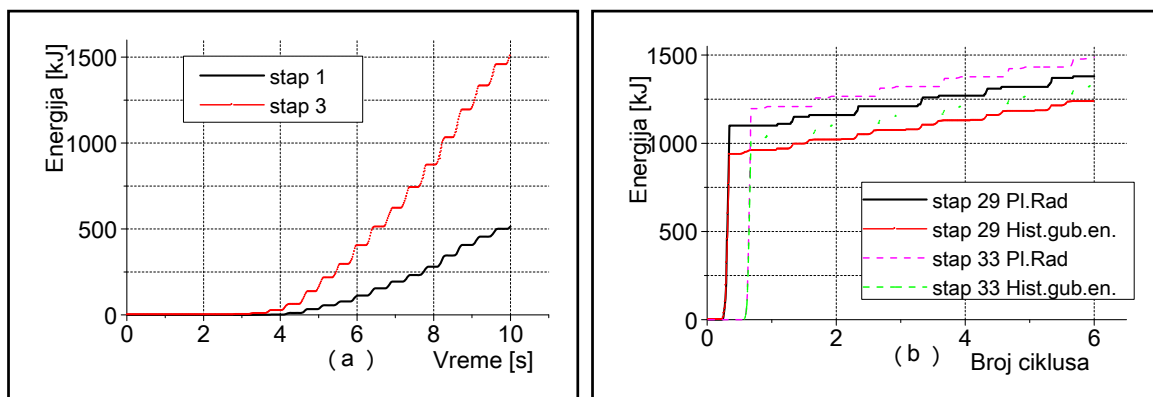
Slika 8.21 Energetske komponente za štap 29 u primeru 1-1 (a) Plastični rad i histerezisni gubitak energije; (b) Energija zadržana u materijalu

Sa slike 8.21 se vidi da je dijagram zadržane energije u materijalu konstantan usled simetričnih ciklusa, a uvek mora biti pozitivan jer je plastični rad uvek veći ili jednak (u stanju materijala koji nije trpeo plastične deformacije) histerezisnom gubitku energije u vidu oslobađanja toplote.

U primeru 1-2, analizirani su rezultati štapova koji su simetrični u odnosu na srednji oslonac (29 i 33), a odgovarajući dijagrami energije su prikazani na slici 8.22(b). Sa te slike

se vidi da su odgovarajući dijagrami energije slični, a da se štap 33 kasnije deformiše plastično u odnosu na štap 29. Takođe, ova sličnost odgovarajućih dijagrama plastičnog rada i histerezisnog gubitka energije istih štapova ukazuje da je energija zadržana u materijalu, kao njihova razlika, skoro konstantna nakon plastičnih deformacija, što se moglo i zaključiti na osnovu σ - ε dijagrama u primeru 1-2. To je posledica nepostojanja opterećenja u suprotnom smeru koje bi dovelo do simetričnog σ - ε dijagrama u ovim štapovima, pa nema drastičnog smanjenja ove (zadržane) energije kao na slici 8.21.(b).

U primeru 2, analizirani su rezultati dva štapa rešetkastog stuba koji su pretrpeli najveće plastične deformacije, štapa 1 i 3. Očigledno je da se energetske komponente (iz poglavlja 5) javljaju tek posle 2.4 s, što je i dijagram pomeranja (Slika 8.12) potvrdio, kao i da je štap 3 izložen većim plastičnim deformacijama i samim tim i većem gubitku energije (Slika 8.22(a)).

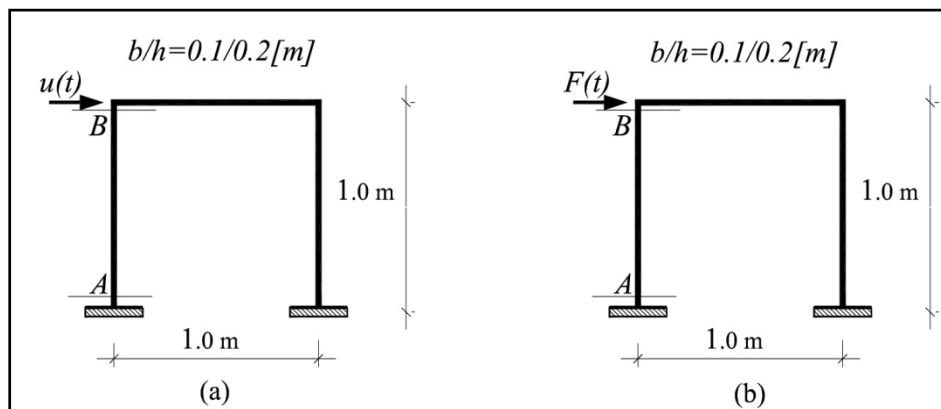


Slika 8.22 (a) Histerezisni gubitak energije u primeru 2; (b) Plastični rad i histerezisni gubitak energije u primeru 1-2

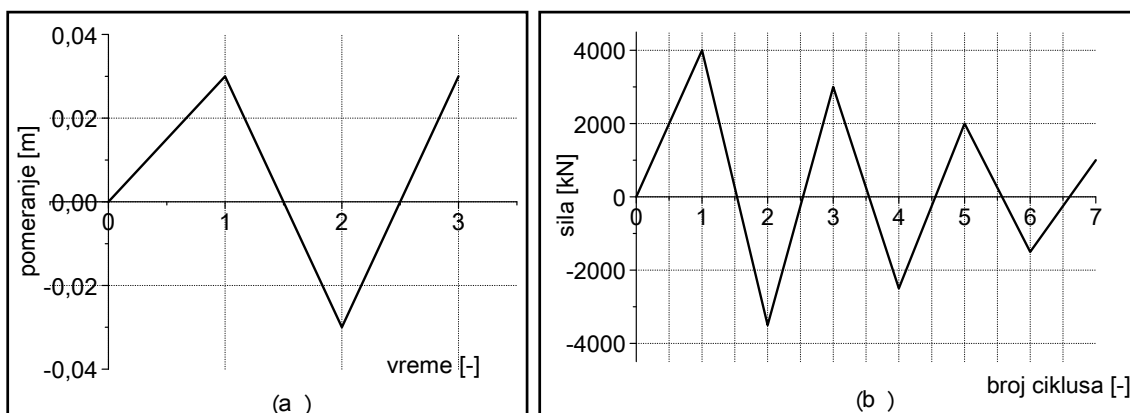
8.5 ELASTOPLASTIČNA ANALIZA GREDNOG LINIJSKOG NOSAČA

U primeru 5 su razmatrani i prikazani uticaji elastoplastičnog ponašanja materijala na savijanje linijskog nosača pri cikličnom opterećenju. Analizirana je ramovska konstrukcija prikazana na slici 8.23. Model materijala koji je definisan u ovim primerima je isti kao u primerima 1 i 2 (elastoplastični model materijala bez oštećenja i bez uticaja geometrijske nelinearnosti). Prikazani su rezultati dobijeni tačnim rešenjem izraza za moment savijanja.

Pod tačnim rešenjem se podrazumeva rešenje dobijeno u slučaju korišćenja izraza (7.6), koje je analogno rešenju dobijenom primenom izraza (3.21), odnosno analitičkom rešenju za određivanje sila u preseku.



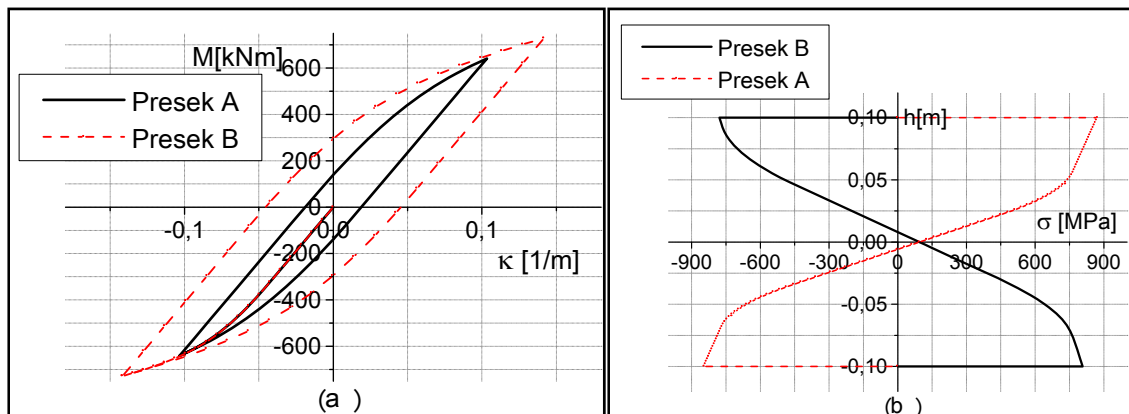
Slika 8.23 (a) Primer 5-1 – ramovska konstrukcija za funkciju opterećenja $u(t)$; (b) Primer 5-2 – ramovska konstrukcija za funkciju opterećenja $F(t)$



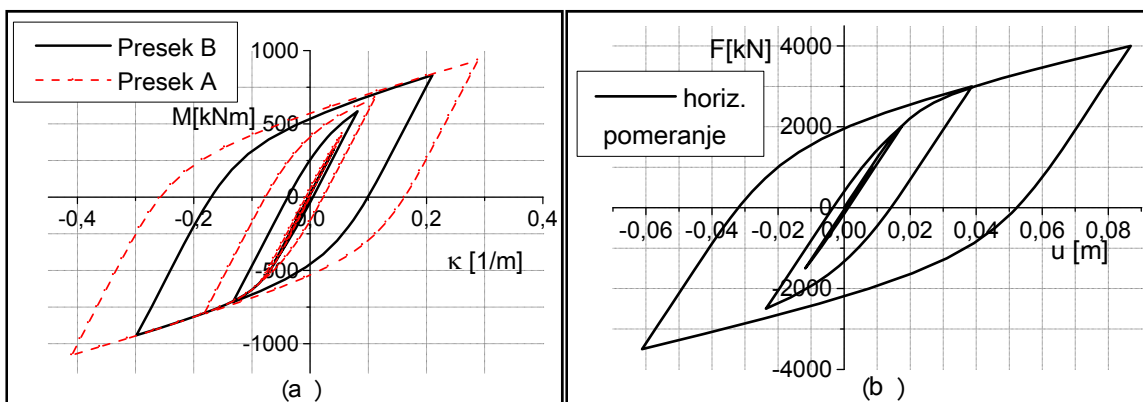
Slika 8.24 (a) Primer 5-1 - funkcija opterećenja $u(t)$; (b) Primer 5-2 - funkcija opterećenja $F(t)$

U primeru 5-2 je analiziran odgovor ramovske konstrukcije na dejstvo ciklično promenljive horizontalne sile $F(t)$, a u primeru 5-1 na dejstvo ciklično promenljivog pomeranja $u(t)$, što je prikazano na slici 8.23, gde su prikazane i dimenzije konstrukcije i poprečnog preseka. Na slici 8.26 je prikazana veza moment-krivina u presecima A i B za primer 5-2, ali se i odnos zadate sile i odgovarajućeg horizontalnog pomeranja javlja u formi histerezisa. Za

primer 5-1 su takođe prikazane veze moment-krivina u presecima *A* i *B*, kao i naponi po visini odgovarajućih poprečnih preseka (Slika 8.25) na kraju opterećenja.



Slika 8.25(a) Odnos M - κ u preseku *A* i *B* u primeru 5-1; (b) Normalni napon po visini poprečnog preseka u preseku *A* i *B* u primeru 5-1.



Slika 8.26 (a) Odnos M - κ u preseku *A* i *B* u primeru 5-2; (b) Veza sila - horizontalno pomeranje u tački preseka B u primeru 5-2

Na slikama 8.25 i 8.26 se vidi da su i u ovim primerima dobijene zatvorene histerezisne petlje. Iz prikazanih dijagrama, kao i na osnovu primera iz poglavlja 7, se može zaključiti da pristup modeliranja ponašanja grednih nosača u cikličnoj plastičnosti sa Prajzakovim histerezisnim operatorom može da bude adekvatan u slučaju da je odgovarajući materijal moguće modelirati sa istim operatorom.

9 ZAKLJUČAK

Prajzakov model histereza pruža velike mogućnosti za modeliranje fizičkih procesa u kojima se histereza javlja. Na osnovu tog modela za elastoplastično ponašanje materijala, prikazanog u radovima [14], [15] u ovoj doktorskoj disertaciji je definisan proračun rešetkastih nosača pri cikličnom opterećenju zasnovan na ovom modelu. Pored toga, sam model materijala zasnovan na Prajzakovom modelu histereza je proširen da bi uzimao u obzir i pojavu oštećenja u materijalu. U radovima [62], [86] je sa predmetnim modelom materijala definisano ponašanje grednog elementa pri čistom savijanju u plastičnom domenu, pri cikličnom opterećenju, a u ovoj disertaciji je predstavljen ekvivalentan koncept, zasnovan na integraciji napona u poprečnom preseku, koji omogućava analizu pri proizvoljnom opterećenju. S obzirom da ovaj model materijala omogućava proračun histerezisnog gubitka energije u materijalu pri cikličnom opterećenju, u definisani proračun rešetkastih nosača je implementiran i proračun ove energije.

Ograničenja i prednosti proračuna definisanog u ovoj disertaciji se ogledaju u karakteristikama samog modela materijala. Nedostaci u prirodi rešenja Prajzakovog modela materijala (Masing tip – zatvorena histerezisna petlja) i nemogućnosti da modelira horizontalni plato (kao i mnogi modeli koji definišu cikličnu plastičnost) pri monotonom opterećenju, koji se javlja kod određenog broja konstrukcionih materijala, ukazuju da je za modeliranje pojedinih materijala potrebna modifikacija predmetnog modela. Kada materijal nema izražen fenomen cikličnog tečenja, a pogotovo u slučaju malog broja ciklusa, može se reći da Prajzakov model histereza može da predstavi realno ponašanje odgovarajućeg materijala. Iz prikazanih izraza i numeričkih primera je očigledno da ovakav model može da opiše određen broj fenomena ciklične plastičnosti u konstrukcijama, pri jednoosijalnom naponskom stanju.

Kao što je predstavljeno u ovoj doktorskoj disertaciji, koristeći predmetni model, definisan je softver u c++ programskom jeziku, koji je omogućio poređenje odgovarajućih modela koji se mogu koristiti u ovakvoj analizi. Poređene su numeričke karakteristike proračuna kao i sami rezultati. Iako drugi modeli, sa kojima je poređen predmetni model, imaju

mogućnost da modeliraju ponašanje koje ne prati Masing zakon (otvorene histerezisne petlje), za tačno modeliranje cikličnog tečenja je potrebna posebna analiza i model, tako da je opisivanje fenomena cikličnog tečenja u tim slučajevima sa upitnom tačnošću.

Model klasične plastičnosti korišćen za poređenje je model generalisane plastičnosti, u čijem matematičkom modelu postoje dve površi, a takav koncept može da ima odgovarajuće numeričke pogodnosti u pojedinim slučajevima. Formiranje tangentne matrice krutosti u proračunu dovodi do potrebe za rešavanjem sistema nelinearnih jednačina sa manjim brojem iteracija, ali takva analiza može da rezultira većim vremenom potrebnim za analizu na odgovarajućem računaru.

Model histerezisnog operatora korišćen za poređenje sa predmetnim modelom je Bouc-Wen-ov (BW) model histerezisa. Razlike u samoj matematičkoj prirodi rešenja za histerezisni operator ukazivale su i na kvalitativne razlike koje bi se mogle dobiti u rezultatima i numeričkoj zahtevnosti, što je pokazano kroz numeričke primere. BW model je usavršavan od velikog broja istraživača i ima mogućnost opisivanja velikog broja fenomena, ali kroz značajno povećanje kompleksnosti i broja parametara.

Kroz numeričke primere je naglašeno da je za proračune zasnovane na BW-ovom i Prajzakovom modelu moguće ustanoviti odnos numeričke efektivnosti, dok je kod modela klasične plastičnosti to teško utvrditi jer su korišćene drugačije metode rešavanja nelinearnih jednačina, pa je shodno tome moguće dati samo pretpostavku na osnovu ograničenog broja primera.

Oštećenje u materijalu se uvodi kako bi se definisao efekat degradacije krutosti, a modelira se na dva načina. Prvi pristup omogućava analitičko rešenje u zatvorenom obliku i odgovarajuću geometrijsku interpretaciju koja je pogodna za definisanje računski efikasne analize. Drugi model oštećenja pruža mogućnost opisivanja različitih tipova loma sa variranjem odgovarajućih koeficijenata, ali se gubi analitička forma rešenja, pa i njene numeričke prednosti. Pored razlika u numeričkoj efektivnosti, naglašene su i kvalitativne razlike ova dva pristupa.

Sa predmetnim modelom je moguće i definisati ekvivalentne modele koncentrisane plastičnosti u elastoplastičnoj analizi grednih nosača, s tim što je za složene preseke u tom slučaju potrebno definisati pravila numeričke integracije za proizvoljne slučajeve kako bi se optimizovao proračun. U ovoj disertaciji, najjednostavniji model (pravougaoni) poprečnog preseka je, koristeći Prajzakov model, analiziran pri ravnom savijanju, kako bi se izbegla analiza optimizacije numeričke integracije. Pri tome je analitičko (tačno) rešenje za izraz momenta u funkciji od krivine (deformacije) dobijeno sa numeričkom integracijom napona po visini poprečnog preseka, jer je geometrijska interpretacija (analitičkog rešenja) u ovom slučaju kompleksna, a posebno za slučajeve složenog savijanja i proizvoljnog opterećenja. Za takve slučajeve je neophodno dalje proširiti istraživanje i usavršiti model za koji se može očekivati slična numerička prednost u odnosu na modele koji se koriste i inženjerskoj praksi.

Prikazan je proračun histerezisnog gubitka energije u elementima rešetkaste konstrukcije, kao dela ukupnog plastičnog rada od kog se razlikuje, pa se ta razlika smatra za energiju zadržanu u materijalu. Suština postojanja ove energije je u promeni strukture materijala, što se ogleda prilikom pojave sukcesivnih plastičnih deformacija.

Na osnovu predstavljenog istraživanja se može zaključiti da u elastoplastičnoj analizi rešetkastih nosača pri cikličnom opterećenju, zbog prirode rešenja, predmetni model omogućava bržu i tačniju analizu za odgovarajuće modele materijala. Korišćenje analitičkog rešenja u zatvorenom obliku za jedan čvor, u analizi sa ili bez oštećenja, rezultira računski efektim proračunom, što bi moglo da bude posebno izraženo kod rešetkastih sistema sa velikim brojem nelinearnosti (plastičnih deformacija, geometrijske nelinearnosti ili oštećenja) u čvorovima.

10 LITERATURA

- [1] Valanis, K.C., “ A theory of viscoplasticity without a yield surface,” *Arch. Mech. Stossowanej*, vol. 23 , no. 4, pp. 517–551, 1971.

- [2] S. R. Bodner, “ Review of Unified Elastic-Viscoplastic Theory,” in *Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity*, K. Miller, Ed. Elsevier, 1986, pp. 273–301.

- [3] W. Prager, “A New Method of Analyzing Stresses and Strains in Work Hardening Plastic Solids,” *J. Appl. Mech.*, vol. 23, pp. 493–496, 1956.

- [4] P. . Armstrong and C. O. Frederick, “A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauscinger Effect,” 1966.

- [5] J. . Chaboche, “Time-Independent Constitutive Theories For Cyclic Plasticity,” *Int. J. Plast.*, vol. 2, p. 149–188, 1986.

- [6] J. L. Chaboche, “On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratcheting effects,” *Int. J. Plast.*, vol. 7, pp. 661–678, 1991.

- [7] N. Ohno and J.-D. Wang, “Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery,” *Int. J. Plast.*, vol. 9, pp. 375–390, 1993.

- [8] J. L. Chaboche, “On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects,” *International Journal of Plasticity*. 1991.

- [9] J. Lubliner, "A simple model of generalized plasticity," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 28, no. 6, pp. 769–778, 1991.
- [10] S. Erlicher and N. Point, "Endochronic theory, non-linear kinematic hardening rule and generalized plasticity: a new interpretation based on generalized normality assumption," *Int. J. Solids Struct.*, 2006.
- [11] R. Bouc, "Modèle Mathématique d'Hystérésis," *Acustica*, vol. 24, pp. 16–25, 1971.
- [12] Y. K. Wen, "Method for Random Vibration of Hysteretic Systems," *J. Eng. Mech. Div.*, vol. Proc. ASCE, pp. 249–263, 1976.
- [13] F. Preisach, "Über die magnetische Nachwirkung," *Z. Phys*, vol. 94, pp. 277–302, 1935.
- [14] A. V. Lubarda, D. Sumarac, and D. Krajcinovic, "Preisach Model and Hysteretic Behavior of Ductile Materials," *Eur. J. Mech., A/Solids*, vol. 12, no. 4, pp. 445–470, 1993.
- [15] A. V. Lubarda, D. Sumarac, and D. Krajcinovic, "Hysteretic Response of Ductile Materials Subjected to Cyclic Loads," *Recent Adv. Damage Mech. Plast.*, vol. 123, pp. 145–157, 1992.
- [16] S. Erlicher, "Dottorato di ricerca in Modellazione, Conservazione e Controllo dei Materiali e delle Strutture," 2003.
- [17] Y. Jiang and J. Zhang, "Benchmark experiments and characteristic cyclic plasticity deformation," *Int. J. Plast.*, 2008.

- [18] R. Halama, J. Sedlák, and M. Šofer, “Phenomenological Modelling of Cyclic Plasticity.”
- [19] K. S. Hassan T, “Ratcheting in cyclic plasticity, part I: Uniaxial behavior,” *Int. J. Plast. - INT J Plast.*, vol. 8, no. 1, pp. 91–116, 1992.
- [20] Jiang, Y., Sehitoglu, H., “Cyclic ratcheting of 1070 steel under multiaxial stress states,” *Int. J. Plast.*, vol. 10, pp. 579–608, 1994.
- [21] P. Sarathi De, A. Sarkar, J. Kumar Mahato, A. Kundu, P. Chandra Chakraborti, and M. Shome, “Effect of Prior Ratcheting on Tensile Properties of Titanium Stabilised Interstitial Free Steel,” *Procedia Mater. Sci.*, vol. 5, pp. 1349–1357, 2014.
- [22] Y. Jiang, “Cyclic Plasticity with an Emphasis on Ratchetting,” University of Illinois, 1993.
- [23] E. Melan, “Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal plastischem Baustof,” *Sitzber. Akad. Wiss. Wien Ila*, vol. 145, pp. 195–218, 1936.
- [24] W. T. Koiter, *General problems for elastic solids*. 1960.
- [25] A. . Ilyushin, “On the Postulate of Plasticity,” *PMM*, vol. 25, no. 503, 1961.
- [26] D. . Owen, “Thermodynamics of Materials with Elastic Range,” *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. 31, pp. 91–112, 1968.

- [27] J. Lubliner, "A Simple Theory of Plasticity," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 10, pp. 313–319, 1974.
- [28] H. Tresca, "Sur l'e coulement des corps solids soumis a de fortes pression," *Comptes Redus Hebd. Seances l'Academies des Sci.*, vol. 59, pp. 754–758, 1864.
- [29] R. von Mises, "Mechanik der Festen Korper im plastisch deformablen Zustand," *Göttin. Nachr. Math. Phys.*, vol. 1, pp. 582–592, 1913.
- [30] R. Hill, *The Mathematical theory of plasticity*. Oxford : the Clarendon press, 1950.
- [31] W. Prager, "A New Method of Analyzing Stresses and Strains in Work-Hardening Plastic Solids," *J. Appl. Mech.*, vol. 23, pp. 493–496, 1956.
- [32] Z. Mroz, "On the description of anisotropic workhardening," *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 15, pp. 163–175, 1967.
- [33] Y. F. Dafalias and Popov E.P., "Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity," *ASME J. Appl. Mech.*, vol. 98, pp. 645–651, 1976.
- [34] D. R. J. Owen and E. Hinton, *Finite Elements in Plasticity*. Swansea, UK: Pineridge Press, 1980.
- [35] Z. Bazant, "Endochronic Inelasticity and Incremental Plasticity," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 14, no. 9, pp. 691–714, 1978.
- [36] Ramberg, W. and W. R. Osgood, "Description of Stress–Strain Curves by Three

Parameters,” *Tech. Note No. 902, Natl. Advis. Comm. Aeronaut. Washingt. DC*, vol. 1, 1943.

- [37] E. Mirambell and E. Real, “On the calculation of deflections in structural stainless beams: an experimental and numerical investigation,” *J. Constr. Steel Res.*, vol. 54, no. 1, pp. 109–133, 2000.

- [38] R. P. Skelton, H. J. Maier, and H.-J. Christ, “The Bauschinger effect, Masing model and the Ramberg–Osgood relation for cyclic deformation in metals,” *Materials Science and Engineering: A*. 1997.

- [39] G. Masing, “Self Stretching and Hardening for Bras,” in *2nd International Conference for Applied Mechanics*, 1926, pp. 332–335.

- [40] W. . Iwan, “A Distributed Element Model for Hysteresis and Its Steady-State Dynamic Response,” *J. Appl. Mech.*, vol. 33, no. 4, pp. 893–900, 1966.

- [41] P. Jayakumar, “Modeling and Identification in Structural Dynamics,” Pasadena, 1987.

- [42] D.-Y. Chiang, “Parsimonious modeling of inelastic structures,” 1992.

- [43] W. . Iwan, “On a class of models for the yielding behaviour of continuous and composite systems,” *J. Appl. Mech.*, vol. 34, pp. 612–617, 1967.

- [44] D. J. Segalman and M. J. Starr, “Inversion of Masing models via continuous Iwan systems,” *Int. J. Non. Linear. Mech.*, 2008.

- [45] R. J. Asaro, "Elastic-Plastic Memory and Kinematic Type Hardening," *Acta Metall.*, vol. 23, pp. 1255–1265, 1975.
- [46] R. Clough and S. Johnston, "Effect of Stiffness degradation on Earthquake Ductility Requirements," in *Trans. Japan Earthq. Engng. Symp.*, 1966, pp. 195–198.
- [47] T. Takeda, M. . Sozen, and N. . Nielsen, "R/C response to simulated earthquake ," *J. Struct. Div., ASCE*, vol. 96, pp. 2557–2573, 1970.
- [48] Y. J. Park, A. . Reinhorn, and Kunnath S.T, "Inelastic Damage Analysis of Reinforced Concrete Frame-Shear -Wall Structures," Buffalo, 1987.
- [49] W. F. Chen and D. J. Han, *Plasticity for Structural Engineers*. New York: Springer, 2011.
- [50] R. Clough, K. Benuska, and E. Wilson, "Inelastic Earthquake Response of Tall Buildings.," in *Third World Conference on Earthquake Engineering*, 1965, pp. 68–69.
- [51] M. Giberson, "The Response of Nonlinear Multistory Structures Subjected to Earthquake Excitation," California Institute of Technology, 1967.
- [52] T. Takeda, M. Sozen, and N. Nielsen, "Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes," *J. Struct. Div.*, vol. 12, pp. 2557–2573, 1970.
- [53] S. Kostic, "Model Generalisane Plastičnosti kod Nelinearne Analize Prostornih Okvirnih Konstrukcija," Univerzitet u Beogradu, Građevinski Fakultet, 2013.

- [54] G. Maier, “Mathematical programming methods in structural analysis,” in *International Symposium on Variational Methods in Engineering*, 1973.
- [55] M. Ismail, F. Ikhouane, and J. Rodellar, “The Hysteresis Bouc-Wen Model, a Survey,” *Arch Comput Methods Eng*, vol. 16, pp. 161–188, 2009.
- [56] A. Visintin, *Differential Models of Hysteresis*. Springer, 2000.
- [57] Mayergoyz. Isaak, *Mathematical Models of Hysteresis and their Applications*. Elsevier, 1991.
- [58] D. Sumarac and Z. Perovic, “Elastoplastic and Damage Analysis of Trusses Subjected to Cyclic Loading,” *Appl. Mech. Mater.* , vol. 784, pp. 68–79, 2015.
- [59] D. Šumarac and Z. Perović, “Cyclic plasticity of trusses,” *Arch. Appl. Mech.*, vol. 85, pp. 1513–1526, 2015.
- [60] A. Visintin, “Mathematical models of hysteresis,” in *The Science of Hysteresis*, 2006.
- [61] P. Weiss and J. de Freudenreich, “Arch.Sci.Phys. ,” *Nat.*, vol. 42, p. 449, 1916.
- [62] D. Sumarac and S. Stosic, “The Preisach Model for the Cyclic Bending of Elastoplastic Beams,” *Eur. J. Mech., A/Solids* , vol. 15, no. 1, pp. 155–172, 1996.
- [63] V. Volterra, “Variazioni e fluttuazioni del numero d’individui in specie animali conviventi.,” *Mem. Della R. Accad. Naz. Dei Lincei*, vol. 2, pp. 5–112, 1926.

- [64] D. Kujawski and E. Krempl, "The Rate (Time)-Dependent Behaviour of Ti-7Al-2Cb-1Ta Titanium Alloy at Room Temperature Under Quasi Static Monotonic and Cyclic Loading," *J. Appl. Mech.*, vol. 48, pp. 55–63, 1981.
- [65] ETABS, SAFE, and CSiBridge, "CSI Analysis Reference Manual for SAP2000." Computers and Structures Inc, 2009.
- [66] S. M. Kostic, "Model Generalisane Plastičnosti kod Nelinearne Analize Prostornih Okvirnih Konstrukcija," Univerzitet U Beogradu, 2013.
- [67] "Eurocode 3: Design of steel structures -Part 1-1: General rules and rules for buildings," 2005.
- [68] M. . Crisfield, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- [69] J. Lemaitre, "A continuous damage mechanics model for ductile fracture," *J. Eng. Mater. Technol.*, vol. 107, no. 1, p. 7, 1985.
- [70] J. Lemaitre and R. Desmorat, "Engineering Damage Mechanics Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures."
- [71] L. . Kachanov, "On time to rupture in creep conditions (in russian)," *Izvestia Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekhnicheskikh Nauk*, vol. 8, pp. 26–31, 1958.
- [72] A. Pirondi, N. Bonora, D. Steglich, W. Brocks, and D. Hellmann, "Simulation of failure under cyclic plastic loading by damage models," 2006.

- [73] R. De Borst, J. Pamin, and M. G. D. Geers, “On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis,” *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 18, pp. 939–962, 1999.
- [74] M. W. Panis, “Experimental identification of a damage evolution law for steel,” 2004.
- [75] D. Sumarac and D. Krajcinovic, “A Mesomechanical Model for Brittle Deformation Processes,” *J. Appl. Mech.*, vol. 56, pp. 57–62, 1989.
- [76] D. Sumarac and D. Krajcinovic, “A Self-consistent Model for Microcrack-weakened Solids,” *Mech. Mater.*, vol. 6, pp. 39–52, 1987.
- [77] R. H. . Peerlings, R. deBorst, Brekelmans W.A.M., J. H. P. de Vree, and I. Spee, “Some Observation on Localisation in Non--local and Gradient Damage Models,” *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 15, no. 6, pp. 937–953, 1996.
- [78] R. Desmorat, “DAMAGE AND FATIGUE Continuum Damage Mechanics modeling for fatigue of materials and structures,” *ALERT Sch. Rev. Eur. Génie Civ.*, vol. 10, no. 7, pp. 849–877, 2006.
- [79] D. Kondo, H. Welemane, and F. Cormery, “Basic concepts and models in continuum damage mechanics,” *Rev. Eur. genie civil*, vol. 11, no. 7–8, pp. 927–943, 2007.
- [80] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [81] Z. Chen and H. L. Schreyer, “A numerical solution scheme for softening problems

involving total strain control,” 1990.

- [82] M. B. Bever, D. L. Holt, and A. L. Titchener, *The Stored Energy of Cold Work*. New York: Pergamon Press, 1973.

- [83] P. Rosakis, A. J. Rosakis, G. Ravichandran, and J. Hodowany, “A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals.”

- [84] S. Stošić, “Objektni pristup modeliranju oštećenja i viskoznih deformacija linijskog nosača,” Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, 2007.

- [85] B. Eckel, *Thinking in C++*, 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2000.

- [86] D. Šumarac and Z. Petraškovic, “Hysteretic behavior of rectangular tube (box) sections based on Preisach model,” *Arch Appl Mech*, vol. 82, no. 10, pp. 1663–1673, 2012.

- [87] J. Lubliner, R. Taylor, and Auricchio F, “A new model of generalized plasticity and its numerical implementation,” *Int. J. Solids Structures* , vol. 30, no. 22, pp. 3171–3184, 1993.

- [88] S. Kostic, F. Filippou, and C. . Lee, “An efficient beam-column element for inelastic 3D frame analysis,” *Comput. Methods Appl. Sci.*, vol. 30, pp. 49–67, 2013.

- [89] Perovic Z and Sumarac D, “Damage of Trusses due to Cyclic Plasticity,” in *The 5th International Congress of Serbian Society of Mechanics*, 2015, pp. 1–8.

BIOGRAFIJA AUTORA

Zoran Perović je rođen je 13.10.1984. godine u Valjevu, gde je završio osnovnu školu i gimnaziju prirodno-matematičkog smera. Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu upisao je školske 2003/04. godine, a diplomirao je 2009. godine na konstruktivnom smeru, sa prosečnom ocenom 8,67, i sa odbranjenim diplomskim radom pod nazivom “Glavni projekat nadogradnje i ojačanja stambene zgrade “. Za izuzetne rezultate na predmetima Katedre za tehničku mehaniku i teoriju konstrukcija, 2009. godine je dobio Nagradu Građevinskog fakulteta u Beogradu, iz Fonda profesora Dušana Krajčinovića.

Po završetku osnovnih studija upisao se na doktorske studije na Građevinskom fakultetu u Beogradu. Na doktorskim studijama položio je sve ispite sa prosečnom ocenom 10. U zvanje asistenta – studenta doktorskih studija na katedri za Tehničku mehaniku i teoriju konstrukcija izabran je u maju 2010. godine, gde je angažovan na predmetima Tehnička mehanika 1 i 2, Mehanika u geodeziji i Energetska efikasnost i sertifikacija zgrada.

Pored nastavne aktivnosti, učestvovao je i u realizaciji dva naučna projekta pod pokroviteljstvom Ministarstva za nauku republike Srbije.

Koautor je jednog rada objavljenog u međunarodnom časopisu sa SCI liste, jednog rada objavljenog u domaćem naučnom časopsu, kao i dvanaest radova objavljenih u zbornicima međunarodnih naučnih skupova.

Govori i piše engleski jezik. Oženjen je i otac je jednog deteta.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Зоран Перовић

број индекса 901/09

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

**ЕЛАСТОПЛАСТИЧНА АНАЛИЗА РЕШЕТКАСТИХ НОСАЧА СА ОШТЕЋЕЊЕМ
ПРИ ЦИКЛИЧНОМ ОПТЕРЕЋЕЊУ**

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 22.2.2016.

Зоран Перовић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије
докторског рада

Име и презиме аутора Зоран Перовић

Број индекса 901/09

Студијски програм Грађевинарство

Наслов рада ЕЛАСТОПЛАСТИЧНА АНАЛИЗА РЕШЕТКАСТИХ НОСАЧА СА
ОШТЕЋЕЊЕМ ПРИ ЦИКЛИЧНОМ ОПТЕРЕЋЕЊУ

Ментор проф др Драгослав Шумарац, дипл.грађ.инж.

Потписани/а Зоран Перовић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 22.2.2016.

Зоран Перовић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ЕЛАСТОПЛАСТИЧНА АНАЛИЗА РЕШЕТКАСТИХ НОСАЧА СА ОШТЕЋЕЊЕМ ПРИ ЦИКЛИЧНОМ ОПТЕРЕЋЕЊУ

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 22.2.2016.

Зоран Петровић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.