



PD 15986



003107442

COBISS

Univerzitet u Beogradu
Gradjevinski Fakultet

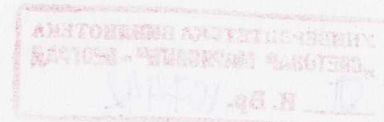
Radomir Kapor

MATEMATIČKI MODEL TEČENJA
VODE U PLITKIM OBLASTIMA
STRUJANJA SA OSNOVNIM
JEDNAČINAMA OSREDNJENIM PO
PROSTORU

- Doktorska disertacija -

Beograd, 1997.

PA 15986



Univerzitet u Beogradu
Gradjevinski Fakultet

Radomir S. Kapor

MATEMATIČKI MODEL TEČENJA
VODE U PLITKIM OBLASTIMA
STRUJANJA SA OSNOVNIM
JEDNAČINAMA OSREDNJENIM PO
PROSTORU

- Doktorska disertacija -

Beograd, 1997.

UNIVERZITETSKA BIBLIOTEKA
"SVEUČILJE SARAJEVO" - BEOGRAD
H. Br. 107442

19 11 1971

Univerzitet u Beogradu
Građevinski fakultet

Izdavač: S. Kapor

MATEMATIČKI MODEL TEČNIA
VODE U PLITKIM OBLASTIMA
STRUJANJA ZA OSNOVNE
LEKVAČINAMA OSREĐIVANJE I
PROSTORU



Beograd, 1971

Mentor: Prof. dr Čedo Maksimović
Gradjevinski fakultet u Beogradu

Članovi komisije:

Datum odbrane:

Datum promocije:

Doktorat nauka

MATEMATIČKI MODEL TEČENJA VODE U PLITKIM OBLASTIMA STRUJANJA SA OSNOVNIM JEDNAČINAMA OSREDNJENIM PO PROSTORU

Apstrakt

Matematički model tečenja vode u plitkim oblastima strujanja predstavljen je osnovnim jednačinama održanja, koje se zbog oblika oblasti strujanja i razvijene turbulencije osrednjavaju po dubini. Tako su osnovne jednačine postale ravanske, a zakoni održanja izražavaju se preko komponenti brzina u horizontalnoj ravni i nivoa vode. Osnovne jednačine su prostorno filtrirane, po horizontalnim pravcima. Polje brzina je podeljeno na velike i male vrtloge. Mali vrtlozi su manji od dimenzija prostornog filtra, odnosno dimenzija numeričke mreže. Glavni tok i veliki vrtlozi se izračunavaju, a vrtlozi koji su manji od dimenzija mreže se modelišu. Za modelisanje ovako dobijenih Reynoldsovih turbulentnih napona, koristi se turbulentna kinetička energija. Osnovnim jednačinama održanja, dodaje se jednačina održanja turbulentne kinetičke energije vrtloga manjih od dimenzija mreže.

Po celoj oblasti strujanja turbulentnim promenljivim se dodaju stohastičke komponente. Kao posledica ovih poremećaja u izračunatom strujnom polju stvaraju se vrtlozi.

Model koristi krivolinijsku numeričku mrežu, kojom se u fizičkom prostoru najbolje predstavlja nepravilan i složen oblik vodotoka. Osnovne jednačine se transformišu zadržavanjem istih zavisnih promenljivih i zamenom nezavisno promenljivih Dekartovih koordinata i njihovih parcijalnih izvoda. Jednačine su postale složenije, ali su zadržale istu strukturu i konzervativnu formu. Za numeričko rešavanje osnovnih jednačina korišćene su metode konačnih zapremina i razdvajanja operatora.

Matematički model je verifikovan poredjenjem rezultata proračuna sa merenjima. Slaganje merenja na hidrauličkom modelu izrazito zakrivljene rečne krivine sa rezultatima proračuna je dobro, u tolikoj meri da se matematički model može primeniti u hidrotehničkoj praksi. U drugom primeru za verifikaciju, poredjeni su rezultati proračuna tečenja na ušću Save u Dunav sa merenjima iz prirode. Dimenzije izračunatih vrtloga, koji su u proračunu izazvani dodavanjem stohastičkih komponenti turbulentnim promenljivim, slične su izmerenim.

Razvijeni matematički model može se koristiti za proračune tečenja u prirodnim i veštačkim vodotocima. Proračuni se mogu obaviti i na personalnim računarima skromnijih mogućnosti.

Ključne reči: plitke oblasti strujanja, prostorno filtriranje, vrtlozi manji od dimenzija mreže, krivolinijske koordinate, konačne zapremine, razdvajanje operatora.

MATHEMATICAL MODEL OF FLOW IN SHALLOW FLOW DOMAINS WITH SPACE AVERAGED BASIC EQUATIONS

Abstract

The mathematical model of flow in shallow flow domains is presented with basic conservation equations. They are depth-averaged because of the shape of the flow domain and due to developed turbulence. So, the basic equations became two-dimensional. Conservation laws are expressed in terms of velocity components in horizontal plane and water stage elevation. The basic equations are space filtered in horizontal directions. The velocity field is divided into large and small eddies. Small eddies, or subgrid scale eddies, are smaller than size of space filters (i.e. they are smaller than numerical grid). Main flow and large eddies are calculated directly, and the subgrid scale eddies are modeled. Turbulent kinetic energy is used for modelling of the Reynolds turbulent stresses defined in this way. Conservation equation of turbulent kinetic energy of subgrid scale eddies is added to the basic conservation equations.

Stochastic components are added to the turbulent variables in the entire flow domain. As a consequence of these disturbances unsteady eddies can be noticed in the calculated velocity field.

The model uses a numerical grid with curvilinear body-fitted coordinates, which fits irregular and complex form of water courses in physical space. Basic equations are transformed by retaining the same dependent variables, and by changing the independent Cartesian coordinates and their partial derivatives. The equations have become more complex, but they retained the same structure and conservative form. Finite volume and operator splitting methods are used for the numerical solution of basic equations.

The mathematical model is verified by comparison between results of calculations and measurements. The agreement between the measurement on the scale model and the calculated results is so good that the mathematical model can be applied in the hydraulic engineering practice. For the second example of verification, results of the calculation of the flow at the confluence point of Sava River into Danube are compared to the field measurements. The size of the calculated eddies, initiated by the addition of stochastic components to the turbulent variables, are similar to the measured ones.

The developed mathematical model can be used for calculation of flow in natural and artificial water courses. The calculations can be done on personal computers with the modest capabilities.

Keywords: shallow flow domains, space filtering, subgrid scale eddies, body-fitted coordinates, finite volume, operator splitting.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Osnovne jednačine u Dekartovim koordinatama	3
2.1	Osrednjavanje jednačina po dubini	4
2.1.1	Osnovni pojmovi	4
2.1.2	Jednačine održanja količine kretanja	5
2.1.3	Jednačina nepromenljivosti mase	9
2.1.4	Konačni oblik osnovnih jednačina osrednjenih po dubini	10
2.1.5	Jedinična količina kretanja, strujna funkcija i vrtložnost	10
2.2	Osrednjavanje jednačina po prostoru	11
2.2.1	Filtriranje jednačina osrednjenih po dubini	12
2.2.2	Model Smagorinskog	14
2.2.3	Modeli sa <i>SGS</i> turbulentnom kinetičkom energijom	15
2.2.4	Stohastičke komponente turbulentnih promenljivih	17
2.2.5	Razlike između <i>SGS</i> i $k - \epsilon$ modela	18
2.3	Hipoteze za pojednostavljenje jednačina	20
3	Osnovne jednačine u krivolinijskim koordinatama	22
3.1	Izbor numeričke mreže	22
3.2	Izbor komponenti brzina	23
3.3	Osnovni pojmovi	25
3.4	Transformacija osnovnih jednačina	27
3.5	Generisanje numeričke mreže	32
4	Numeričke metode	34
4.1	Prostorna diskretizacija	35
4.1.1	Prostorna diskretizacija u Dekartovim koordinatama	35
4.1.2	Prostorna diskretizacija u krivolinijskim koordinatama	36
4.1.3	Prostorna diskretizacija konvektivnih članova	38
4.2	Vremenska diskretizacija - metoda razdvajanja operatora	38
4.2.1	Konvekcija i difuzija	40
4.2.2	Jednačina nivoa vode	42

4.3	Početni i granični uslovi	51
4.3.1	Granični uslovi za turbulentnu kinetičku energiju \tilde{k}_g	52
4.3.2	Granični uslovi za jedinične količine kretanja i nivoa vode	52
4.4	Zaključci o numeričkim metodama	54
5	Verifikacija matematičkog modela	55
5.1	Verifikacija modela u Dekartovim koordinatama	56
5.1.1	Tečenje u pravom kanalu	56
5.1.2	Tečenje u pravom kanalu sa bočnim ispustom	59
5.2	Verifikacija modela u krivolinijskim koordinatama	61
5.2.1	Tečenje u vodotocima pravilne osnove	61
5.2.2	Tečenje u rečnoj krivini	63
5.2.3	Tečenje na ušću Save u Dunav	68
5.3	Zaključci o verifikaciji matematičkog modela	77
6	Zaključak	78
6.1	Postavljene hipoteze i njihova potvrda	78
6.2	Ostali zaključci	79
6.3	Oblasti praktične primene rada	80
6.4	Predlozi za dalja istraživanja	80
	Prilozi	82
	Literatura	127

Spisak slika

1.1	Poprečni presek korita reke Save PA 1, <i>km</i> 0 + 000.	1
2.1	Orijentacija koordinatnog sistema.	3
3.1	Primer stepenaste aproksimacije granice.	23
3.2	Komponente brzina: a) u pravcima krivolinijskih koordinata b) u pravcima Dekartovih koordinata	24
3.3	Fizički i računski prostor	25
4.1	Smaknuta mreža u: a) Dekartovom koordinatnom sistemu i b) krivolinijskom koordinatnom sistemu.	35
5.1	Fotografija vrtloga u turbulentnom toku.	57
5.2	Fotografija trajektorija plovaka na hidrauličkom modelu rečne krivine (autori: Miljan Djurić i Radomir Kapor).	65

Spisak priloga

1	Osnova pravog kanala, pravougaonog poprečnog preseka ($n = 0.016 s/m^{1/3}$), sa rasporedom brzina, za $t = 45000 s$, posle 1800 vremenskih koraka.	83
2	Promene brzina u_1 , u toku vremena, duž osovine pravog kanala: na uzvodnoj granici, sredini računске deonice i nizvodnoj granici.	83
3	Raspored vrtložnosti Ω , u pravom kanalu, pravougaonog poprečnog preseka ($n = 0.016 s/m^{1/3}$), za $t = 45000 s$, posle 1800 vremenskih koraka.	84
4	Raspored vrtložnosti Ω , u pravom kanalu, pravougaonog poprečnog preseka ($n = 0.012 s/m^{1/3}$), za $t = 37125 s$, posle 1485 vremenskih koraka.	84
5	Promene vrtložnosti Ω , u pravom kanalu pravougaonog poprečnog preseka ($n = 0.016 s/m^{1/3}$), kroz vreme.	85
6	Izračunate strujnice Ψ (strujna funkcija), u pravom kanalu sa bočnim ispustom, posle 1000 računskih koraka ($t = 5000 s$).	86
7	Promene brzina u_1 , u toku vremena, duž osovine kanala sa bočnim ispustom: na uzvodnoj granici, sredini računске deonice i nizvodnoj granici.	86
8	Promene vrtložnost Ω , u pravom kanalu sa bočnim ispustom, kroz vreme.	87
9	Promene vrtložnosti Ω , u pravom kanalu sa bočnim ispustom, u neposrednoj blizini ispusta, kroz vreme.	88
10	Rasporedi brzina u pravom kanalu, za različite položaje kanala u horizontalnoj ravni. I deo.	89
11	Rasporedi brzina u pravom kanalu, za različite položaje kanala u horizontalnoj ravni. II deo.	90
12	Promene kota nivoa, u toku vremena, duž osovine pravog kanala (postavljenom u pravcu x_1): na uzvodnoj granici, sredini računске deonice i nizvodnoj granici.	91
13	Promene brzina u_1 , u toku vremena, po širini pravog kanala (postavljenom u pravcu x_1): uz levu obalu, na sredini i uz desnu obalu.	91

14	Linije jednakih kota nivoa slobodne površine vode (100 % = <i>max.</i> i 0 % = <i>min.</i>), u polukružnom kanalu u osnovi, za različite položaje kanala u horizontalnoj ravni. I deo.	92
15	Linije jednakih kota nivoa slobodne površine vode (100 % = <i>max.</i> i 0 % = <i>min.</i>), u polukružnom kanalu u osnovi, za različite položaje kanala u horizontalnoj ravni. II deo.	93
16	Osnova rečne krivine na hidrauličkom modelu, predstavljena izobata- ma (100 % = 0.543 m i 0 % = 0 m).	95
17	Osnova numeričke mreže generisane na hidrauličkom modelu rečne krivine.	96
18	Izmereni rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na hidrauličkom mo- delu rečne krivine.	97
19	Izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na hidrauličkom modelu rečne krivine.	98
20	Rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na delu hidrauličkog modela rečne krivine: a) izmereni i b) izračunati.	99
21	Izračunate linije jednakih kota nivoa slobodne površine vode (100 % = 5.66 cm i 0 % = 3.90 cm mereno od repera na modelu), na hidrauličkom modelu rečne krivine.	100
22	Izračunate linije jednake <i>SGS</i> turbulentne kinetičke energije osred- njene po dubini k_g , (100 % = 0.00936 (m/s) ² i 0 % = 0 (m/s) ²), na hidrauličkom modelu rečne krivine.	101
23	Izračunate linije jednakih kota nivoa slobodne površine vode i ras- poredi brzina osrednjenih po dubini, na nizvodnom kraju hidrauličkog modela rečne krivine, za: a) horizontalne kote nivoa na najnižvodni- jem poprečnom profilu i b) različite kote nivoa na najnižvodnijem poprečnom profilu.	102
24	Aerofotogrametrijski snimak ušća Save u Dunav, u Beogradu (sni- mljeno 17.11.1971. god.).	103
25	Prva varijanta numeričke mreže za ušće Save u Dunav, sa položajem karakterističnih tačaka.	104
26	Druga varijanta numeričke mreže za ušće Save u Dunav sa položajem karakterističnih tačaka.	105
27	Karakteristični poprečni profili na ušću Save u Dunav.	106
28	Izohipse dna vodotoka na ušću Save u Dunav (100 % = 66.29 m nad morem, 0 % = 49.03 m n. m. i $\Delta 10$ % = 1.73 m).	107
29	Izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 20000$ s.	108
30	Deo aerofotogrametrijskog snimka ušća Save u Dunav, u Beogradu (snimljeno 17.11.1971. god.).	109

- 31 Izračunate linije jednake *SGS* turbulentne kinetičke energije osrednjene po dubini \tilde{k}_g , na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 20000$ s ($100\% = 0.0509 (m/s)^2$ i $0\% = 0 (m/s)^2$). 110
- 32 Izračunate linije jednake vrtložnosti Ω , na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 20000$ s ($\Delta\Omega = 3\% = 0.00105$ 1/s). 111
- 33 Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karakterističnim tačkama prve varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.00$ 111
- 34 Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karakterističnim tačkama prve varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.02$ 112
- 35 Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karakterističnim tačkama prve varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.01$ 112
- 36 Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karakterističnim tačkama prve varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.005$ 113
- 37 Izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.02$, za vreme $t = 20000$ s. . . . 114
- 38 Izračunate linije jednake vrtložnosti Ω , na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.02$, za vreme $t = 19810$ s ($\Delta\Omega = 3\% = 0.00104$ 1/s). 115
- 39 Izračunate linije jednake vrtložnosti Ω , na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.02$, za vreme $t = 20000$ s ($\Delta\Omega = 3\% = 0.00104$ 1/s). 116
- 40 Spektralna gustina: a) pseudo-slučajne promenljive; b) komponente brzine vode u_1 , u tački 987, sa $f = 0.02$ i c) komponente brzine vode u_1 , u tački 400, sa $f = 0.02$ 117
- 41 Izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 20000$ s, sa smanjenom produkcijom \tilde{k}_g usled nejednolikosti rasporeda brzina po dubini. 118

42	Izračunate linije jednake SGS turbulentne kinetičke energije osrednjene po dubini \tilde{k}_g , na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 20000$ s, sa smanjenom produkcijom \tilde{k}_g usled nejednolikosti rasporeda brzina po dubini (100 % = $0.0442 (m/s)^2$ i 0 % = $0 (m/s)^2$).	119
43	Izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na ušću Save u Dunav, sa drugom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 18000$ s.	120
44	Izračunate linije jednake SGS turbulentne kinetičke energije osrednjene po dubini \tilde{k}_g , na ušću Save u Dunav, sa drugom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 18000$ s (100 % = $0.0379 (m/s)^2$ i 0 % = $0 (m/s)^2$).	121
45	Izračunate linije jednake vrtložnosti Ω , na ušću Save u Dunav, sa drugom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 18000$ s ($\Delta\Omega = 3\% = 0.0021$ 1/s).	122
46	Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karakterističnim tačkama druge varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.00$	122
47	Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karakterističnim tačkama druge varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.02$	123
48	Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karakterističnim tačkama druge varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.01$	123
49	Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karakterističnim tačkama druge varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.005$	124
50	Izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na ušću Save u Dunav, sa drugom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.01$, za vreme $t = 18000$ s.	125
51	Izračunate linije jednake vrtložnosti Ω , na ušću Save u Dunav, sa drugom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.01$, za vreme $t = 17820$ s ($\Delta\Omega = 3\% = 0.00207$ 1/s).	126
52	Izračunate linije jednake vrtložnosti Ω , na ušću Save u Dunav, sa drugom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.01$, za vreme $t = 18000$ s ($\Delta\Omega = 3\% = 0.00207$ 1/s).	127

Spisak oznaka

Uz oznaku i objašnjenje stavljen je i broj jednačine ili strane gde se uvodi u razmatranje.

t	vreme	(2.1)
x_i	Dekartova koordinata u pravcu i	(2.1)
h	dubina vode	str. 1
z_b	kota dna	str. 1
u_i	brzina vode u pravcu i	(2.1)
p	pritisak	(2.1)
g	ubrzanje zemljine teže	(2.1)
ρ	gustina vode	(2.1)
τ_{ij}	napon u fluidu, za ravan sa normalom i , u pravcu j	(2.1)
Y	skalarna ili vektorska funkcija	(2.5)
D/Dt	materijalni izvod	(2.5)
${}^s u_i$	brzina na slobodnoj površini	(2.6)
${}^b u_i$	brzina na dnu	(2.6)
\tilde{u}_i	brzina osrednjena po dubini	(2.10)
λ	nezavisna promenljiva	(2.11)
${}^w \tau_j$	napon od vetra	(2.22)
${}^b \tau_j$	napon na dnu	(2.23)
$\tilde{\tau}_{ij}$	napon u fluidu, osrednjeni po dubini	(2.24)
ν	kinematska viskoznost vode	(2.24)
c_f	koeficijent trenja	(2.26)
n	Manningov koeficijent hidrauličke hrapavosti	(2.26)
w_d	pravac vetra	(2.27)
c_w	empirijski koeficijent	(2.27)
ρ_a	gustina vazduha	(2.27)
${}^w u_j$	brzina vetra u pravcu j	(2.27)
U_i	jedinična količina kretanje u pravcu i	(2.35)
Ψ	strujna funkcija	(2.36)
Q	proticaj	(2.37)
Ω	vrtložnost	(2.38)

F	funkcija sa svim vrtlozima	(2.39)
\overline{F}	funkcija sa vrtlozima većim od mreže	(2.39)
G	filter funkcija	(2.39)
x'	tekuća promenljiva duž x ose	(2.39)
Δ_i	širina prostornog filtra	(2.40)
Δ	širina prostornog filtra	(2.42)
Δx_i	širina numeričke mreže	str. 12
\overline{u}_i	prostorno filtrirana brzina (GS)	(2.44)
u'_i	brzina sa vrtlozima manjim od mreže (SGS)	(2.44)
$\overline{\overline{u}}_i$	prostorno filtrirana brzina, osrednjena po dubini	(2.45)
$w_{\overline{\tau}_j}$	prostorno filtriran napon od vetra	(2.45)
$b_{\overline{\tau}_j}$	prostorno filtriran napon na dnu	(2.45)
$\overline{\overline{\tau}}_{ij}$	prostorno filtriran napon u fluidu, osrednjeni po dubini	(2.45)
L_{ij}	Leonardovi članovi	(2.49)
R_{ij}	Reynoldsov turbulentni SGS napon	(2.50)
ν_t	SGS turbulentna viskoznost	(2.54)
δ_{ij}	Kroneckerov simbol	(2.54)
c	bezdimezionalna konstanta	(2.54)
k_g	SGS turbulentna kinetička energija	(2.56)
c_ν	bezdimezionalna konstanta	(2.58)
c_{kk}	bezdimezionalna konstanta	(2.59)
c_ϵ	bezdimezionalna konstanta	(2.59)
$\tilde{\nu}_t$	SGS turbulentna viskoznost, osrednjena po dubini	(2.61)
\tilde{k}_g	SGS turbulentna kinetička energija, osrednjena po dubini	(2.62)
Δ_g	širina prostornog filtra za osrednjene veličine	(2.63)
P_{kV}	proizvodnja \tilde{k}_g usled nejednolikosti u_i po dubini	(2.64)
u_*	brzina smičućeg toka	(2.64)
c_{ver}	empirijska konstanta	(2.66)
${}^r U_i$	jedinična količina kretanja sa stohastičkim karakterom	(2.67)
f	koeficijent intenziteta slučajne komponente	(2.67)
ϵ	pseudo-slučajna veličina	(2.67)
${}_t \overline{u}_i$	brzina osrednjena po vremenu	(2.68)
${}_t u'_i$	fluktuacija brzine	(2.68)
${}_t R_{ij}$	Reynoldsov turbulentni napon	(2.70)
${}_t \nu_t$	turbulentna viskoznost	(2.72)
k	turbulentna kinetička energija	(2.71)
${}_t c_\nu$	bezdimezionalna konstanta	(2.72)
L	dužinska razmera turbulentnog toka	(2.72)
ϵ	brzina disipacije turbulentne kinetičke energije	(2.73)
\tilde{k}	turbulentna kinetička energija, osrednjena po dubini	(2.75)
$\tilde{\epsilon}$	brzina disipacije \tilde{k}	(2.75)

${}_tP_{kV}$	proizvodnja \tilde{k} usled nejednolikosti u_i po dubini	(2.75)
${}_tP_{\varepsilon V}$	proizvodnja $\tilde{\varepsilon}$ usled nejednolikosti u_i po dubini	(2.76)
${}_t c_V$	empirijska konstanta	(2.74)
$c_{1\varepsilon}$	empirijska konstanta	(2.76)
$c_{2\varepsilon}$	empirijska konstanta	(2.76)
σ_k	empirijska konstanta	(2.75)
σ_ε	empirijska konstanta	(2.76)
ξ^i	krivolinijska koordinata u pravcu i	(3.1)
$\partial\xi^j/\partial x_i$	metrički koeficijent	(3.11)
dx_i	totalni diferencijal u računskom prostoru	(3.6)
$d\xi^i$	totalni diferencijal u fizičkom prostoru	(3.7)
J	matrica transformacije	(3.8)
J	determinanta matrice transformacije - Jakobijan	(3.9)
E^*	matrica kolona	(3.12)
F^*	matrica kolona	(3.12)
G^*	matrica kolona	(3.12)
F_A^*	matrica kolona	(3.12)
G_A^*	matrica kolona	(3.12)
H_A^*	matrica kolona	(3.12)
LS	leva strana matrične jednačine	(3.16)
u^j	kontravarijantna brzina	(3.26)
U^j	kontravarijantna jedinična količina kretanja	(3.27)
\bar{E}	matrica kolona	(3.29)
\bar{F}	matrica kolona	(3.29)
\bar{G}	matrica kolona	(3.29)
DS	desna strana matrične jednačine	(3.30)
τ_j^i	kontravarijantni napon	(3.31)
R_j^i	kontravarijantni Reynoldsov SGS turbulentni napon	(3.32)
S^i	difuzija \tilde{k}_g u kontravarijantnom pravcu i	(3.35)
\bar{F}_A	matrica kolona	(3.36)
\bar{G}_A	matrica kolona	(3.36)
\bar{H}_A	matrica kolona	(3.36)
V_k	zapremina kontrolne zapremine	(4.1)
A_k	površina kontrolne zapremine	(4.1)
Δt	vremenski korak	(4.2)
ν_Y	difuzioni koeficijent za Y	(4.3)
${}^n U_j$	jedinična količina kretanja u poznatom trenutku vremena	(4.5)
${}^* U_j$	pomoćna vrednost jedinične količine kretanja	(4.5)
${}^{n+1} U_j$	jedinična količina kretanja u nepoznatom trenutku vremena	(4.5)
${}^n f_j$	konvekcija i difuzija za U_j u poznatom trenutku vremena	(4.11)
${}^n f_k$	konvekcija i difuzija za \tilde{k}_g u poznatom trenutku vremena	(4.12)

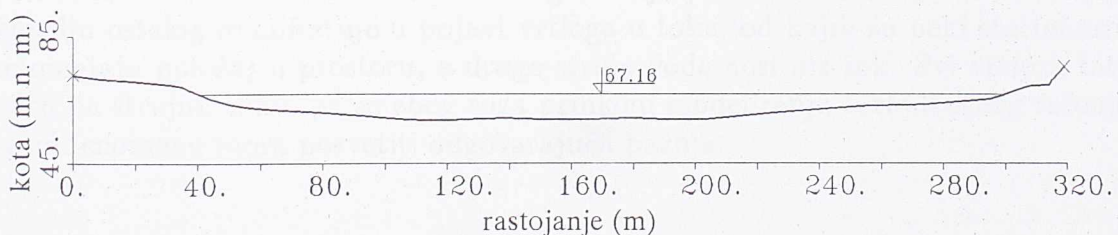
r^*U_i	pomoćna U_i , sa stohastičkim karakterom	(4.17)
Π	nivo slobodne površine vode	(4.25)
I	indeks računске tačke mreže	str. 43
$NMAX$	broj računskih tačka mreže	str. 44
θ	koeficijent ponderacije po vremenu	(4.35)
a	vrsta količine kretanja u pravcu ξ^1	(4.41)
d	vrsta količine kretanja u pravcu ξ^2	(4.42)
b	vrsta količine kretanja u pravcu ξ^1	(4.43)
e	vrsta količine kretanja u pravcu ξ^2	(4.44)
c	vrsta količine kretanja u pravcu ξ^1	(4.45)
f	vrsta količine kretanja u pravcu ξ^2	(4.46)
A	promena nivoa vode u jedinici vremena	(4.50)
$AA(I)$	koeficijenti algebarskih jednačina	(4.57)
$BB(I)$	koeficijenti algebarskih jednačina	(4.57)
$CC(I)$	koeficijenti algebarskih jednačina	(4.57)
$GG(I)$	koeficijenti algebarskih jednačina	(4.57)
$\tilde{\Pi}$	nivo vode u direktnom postupku eliminacije	(4.66)
ω	faktor nadrelaksacije	(4.66)
r	unapred zadata vrednost za Π	(4.74)
Cr	Courantov broj	str. 57
λ_a	rastojanje izmedju vrtloga	str. 58
η_i	širina inicijalnih vrtloga.	str. 58

Poglavlje 1

Uvod

U toku rešavanja mnogih hidrotehničkih problema potrebno je odrediti prostorne rasporede brzina strujanja i nivoa vode u vodotocima, prirodnim ili veštačkim. Slični problemi se rešavaju i u zaštiti voda, ali se proširuju i na određivanje prostornog rasporeda materija rastvorenih u vodi, ili neke fizičke karakteristike vode. Ranije, naročito u hidrotehničkoj praksi, za ove svrhe koristili su se fizički - hidraulički modeli. Nagli razvoj računarske hidraulike omogućio je da se pri određivanju rasporeda brzina i nivoa vode u vodotocima, ravnopravno sa starijim metodama, koriste i matematički modeli. Za rešavanje nekih problema, naročito u zaštiti voda, matematički modeli nemaju alternative.

Tečenje vode u vodotocima je gotovo uvek turbulentno i trodimenzionalno. Potpuna matematička simulacija ovakvog transportnog fenomena je moguća trodimenzionalnim eliptičkim modelom. Najveći broj značajnijih prirodnih ili veštačkih otvorenih tokova, spada u kategoriju „plitkih“ voda. Pod plitkom vodom, podrazumeva se oblast tečenja u kojoj je dubina vode mnogo manja od dimenzija oblasti tečenja u horizontalnoj ravni. Na slici 1.1 prikazan je poprečni profil korita reke Save, u



Slika 1.1: Poprečni presek korita reke Save PA 1, *km* 0 + 000.

Beogradu, kod Kalemegdana. U plitkim tokovima, vertikalno ubrzanje delića fluida se u odnosu na ubrzanje zemljine teže zanemaruje. Sa druge strane, kao posledica oblika korita i turbulencije (prouzrokovane uglavnom rapavošću na rečnom dnu)

trodimenzionalni efekti, izraženi preko nejednolikosti rasporeda brzina po vertikali, su mali. Problem rešavanja transporta mase i količine kretanja uz ove pretpostavke svodi se na određivanje karakteristika toka u horizontalnoj ravni, zbog čega se problem može smatrati dvodimenzionalnim. Ovakva pretpostavka značajno uprošćava matematički model koji se može primentiti.

Najtačniji i najjednostavniji pristup simulaciji turbulentnog toka je rešavanje osnovnih Navier-Stokesovih jednačina, bez ikakvih osrednjavanja ili aproksimacija, izuzev onih koje su neophodne za numeričku diskretizaciju. Ovaj pristup se zove direktna numerička simulacija (*Direct Numerical Simulation - DNS*)¹. Na žalost, savremeni računari, uključujući i najmoćnije, omogućavaju simuliranje tečenja samo u pravilnim oblastima, uz Reynoldsove brojeve do najviše 200. Troškovi ovakvih proračuna su veoma veliki, zbog čega direktna numerička simulacija nema značaja u rešavanju praktičnih problema. Sa druge strane, ogroman broj informacija koje se dobijaju kao rezultati simulacija mogu da pomognu u razumevanju složenih mehanizama transporta u turbulentnom toku. Vrlo često rezultati direktne numeričke simulacije koriste se za proveru pretpostavki i hipoteza, koje se postavljaju u jednostavnijim metodama.

Postoje dva pristupa u pojednostavljenju osnovnih jednačina turbulentnog toka. Dugo vremena, ozbiljno je ispitivan samo onaj u kome su jednačine osrednjavane po vremenu. Od sedme decenije ovoga veka sve je popularniji drugi pristup, u kome se osnovne jednačine osrednjavaju po prostoru. Ovaj metod je poznat pod imenom simulacije velikih vrtloga (*Large Eddy Simulation - LES*), zbog toga što se glavni tok i veliki vrtlozi izračunavaju direktno, a vrtlozi manji od dimenzija numeričke mreže (*subgrid scale - SGS*) se modelišu. Cilj ovoga rada je razvoj i verifikacija matematičkog modela za analizu turbulentnog tečenja, u otvorenom toku sa plitkom vodom, sa *SGS* modelom. Da bi model mogao da pomogne u rešavanju problema iz hidrotehničke prakse, mora biti toliko jednostavan da se potrebni proračuni mogu obaviti na računarima koji su u današnje vreme na raspolaganju potencijalnim korisnicima.

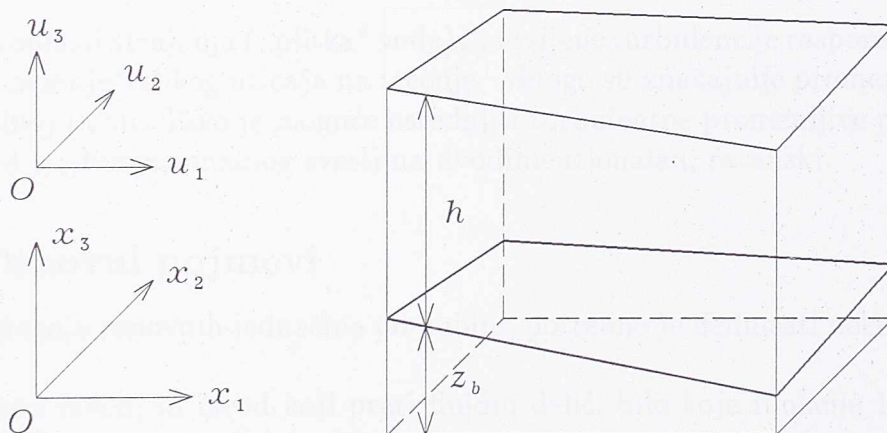
Jedna od karakteristika turbulentnog tečenja je složenost strujne slike, koja se između ostalog manifestuje u pojavi vrtloga u toku, od kojih su neki stacionarni i ne menjaju položaj u prostoru, a druge struja vode nosi niz tok. Svi vrtlozi, bitno utiču na strujnu sliku, pa se zbog toga prilikom modeliranja turbulentnog tečenja i ovom fenomenu mora posvetiti odgovarajuća pažnja.

¹U tekstu se *kurzivom*, daju engleski nazivi termina koji su uobičajeni u literaturi.

Poglavlje 2

Osnovne jednačine u Dekartovim koordinatama

Problem turbulentnog tečenja u oblasti tečenja sa plitkom vodom, može se opisati u Dekartovom koordinatnom sistemu. Orijentacija koordinatnog sistema data je na



Slika 2.1: Orijentacija koordinatnog sistema.

slici 2.1. Voda, za koju se pretpostavlja da je nestišljiva, homogena i viskozna, ograničena je odozdo krutom fiksnom površinom $x_3 = z_b$, a odozgo slobodnom površinom $x_3 = z_b + h$. Pretpostavlja se, da se obzirom na ubrzanje zemljine teže, vertikalno ubrzanje delića fluida može zanemariti, stoga raspodela pritiska po dubini postaje kvazi-hidrostatska. Opšte trodimenzionalne jednačine održanja količine kretanja, prema [20], su:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_1 u_3)}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} +$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial(u_2 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_2 u_3)}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right) \quad (2.1)$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g \quad (2.3)$$

gde je: u_i brzina u x_i pravcu, t vreme, p pritisak, g ubrzanje zemljine teže, ρ gustina fluida i τ_{ij} napon u fluidu, za ravan sa normalom u pravcu i , u pravcu j .

Sistem jednačina se kompletira jednačinom održanja ili nepromenljivosti mase:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (2.4)$$

2.1 Osrednjavanje jednačina po dubini

Zbog oblika oblasti strujanja („plitka“ voda) i razvijene turbulencije raspoređi brzina po vertikali nemaju velikog uticaja na tečenje. Mnogo su značajnije promene brzina u horizontalnoj ravni. Tako je moguće osrednjiti turbulentne promenljive po dubini i problem od trodimenzionalnog svesti na dvodimenzionalan, ravanski.

2.1.1 Osnovni pojmovi

Pre osrednjavanja osnovnih jednačina po dubini, potrebno je definisati neke osnovne pojmove.

Materijalni izvod, ili izvod koji prati fluidni delić, bilo koje funkcije Y , prema [22] je:

$$\frac{DY}{Dt} = \frac{\partial Y}{\partial t} + u_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

Za osrednjavanje po dubini, odnosno integrisanje jednačina od (2.1) do (2.4), potrebno je definisati odgovarajuće granične uslove. Na slobodnoj površini $x_3 = z_b + h$, primenjuju se kinematički i dinamički uslovi. Brzina na slobodnoj površini ${}^s u_3$ (oznaka s pokazuje da se veličine odnose na slobodnu površinu) definiše se kao:

$$\begin{aligned} {}^s u_3 &= \left. \frac{D(z_b + h)}{Dt} \right|_{\text{povrsina}} \\ &= \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(z_b)}{\partial t} + {}^s u_1 \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_1} + {}^s u_2 \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

zbog čega je kinematički uslov:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + {}^s u_1 \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_1} + {}^s u_2 \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_2} - {}^s u_3 = 0 \quad (2.7)$$

Dinamički uslov pretpostavlja jednakost izmedju vektora napona na slobodnoj površini fluida i vektora napona prouzrokovanih vetrom, plovilima i sl. Površinski naponi se zanemaruju.

Kao i na slobodnoj površini i na dnu $x_3 = z_b$ se definišu kinematički i dinamički uslovi. Brzina na dnu ${}^b u_3$ (oznaka b pokazuje da se veličine odnose na dno) definiše se kao:

$${}^b u_3 = \left. \frac{D(z_b)}{Dt} \right|_{dno} = \frac{\partial(z_b)}{\partial t} + {}^b u_1 \frac{\partial(z_b)}{\partial x_1} + {}^b u_2 \frac{\partial(z_b)}{\partial x_2} \quad (2.8)$$

Na dnu, kao kinematički uslov, može se koristiti pretpostavka da je brzina normalna na čvrstu granicu jednaka nuli:

$${}^b u_1 \frac{\partial(z_b)}{\partial x_1} + {}^b u_2 \frac{\partial(z_b)}{\partial x_2} - {}^b u_3 = 0 \quad (2.9)$$

Brzina osrednjena po dubini \tilde{u}_i , prema [33], definiše se kao:

$$\tilde{u}_i = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_b+h} u_i dx_3 \quad (2.10)$$

a za integrisanje parcijlnog izvoda $\partial u_i / \partial \lambda$ koristi se Leibnitzovo pravilo:

$$\int_{z_b}^{z_b+h} \frac{\partial u_i}{\partial \lambda} dx_3 = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{z_b}^{z_b+h} u_i dx_3 - {}^s u_i \frac{\partial(z_b + h)}{\partial \lambda} + {}^b u_i \frac{\partial(z_b)}{\partial \lambda} \quad (2.11)$$

gde je λ nezavisna promenljiva t ili x_i .

Izvodjenje jednačina za dvodimenzionalno tečenje, osrednjeno po dubini, svodi se na integraciju jednačina od (2.1) do (2.4), u granicama od dna do slobodne površine.

2.1.2 Jednačine održanja količine kretanja

Proizvod brzina osrednjenih po dubini $\widetilde{u}_i \widetilde{u}_j$, u jednačinama (2.1) i (2.2), biće definisan kao:

$$\begin{aligned} h \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j &= \int_{z_b}^{z_b+h} [\tilde{u}_i + (u_i - \tilde{u}_i)] [\tilde{u}_j + (u_j - \tilde{u}_j)] dx_3 \\ &= \int_{z_b}^{z_b+h} [\tilde{u}_i \tilde{u}_j + (u_i - \tilde{u}_i)(u_j - \tilde{u}_j) + \\ &\quad + \tilde{u}_i(u_j - \tilde{u}_j) + \tilde{u}_j(u_i - \tilde{u}_i)] dx_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \int_{z_b}^{z_b+h} (u_i - \tilde{u}_i)(u_j - \tilde{u}_j) dx_3 + \\
&\quad + \tilde{u}_i \int_{z_b}^{z_b+h} (u_j - \tilde{u}_j) dx_3 + \tilde{u}_j \int_{z_b}^{z_b+h} (u_i - \tilde{u}_i) dx_3 \\
&= h \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \int_{z_b}^{z_b+h} (u_i - \tilde{u}_i)(u_j - \tilde{u}_j) dx_3
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Integracija članova sa lokalnim ubrzanjem, u jednačinama održanja količine kretanja (2.1) i (2.2), daje:

$$\begin{aligned}
\int_{z_b}^{z_b+h} \frac{\partial u_i}{\partial t} dx_3 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_b+h} u_i dx_3 - {}^s u_i \frac{\partial(z_b + h)}{\partial t} + {}^b u_i \frac{\partial(z_b)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (h \tilde{u}_i) - {}^s u_i \frac{\partial h}{\partial t} \\
i &= 1, 2
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Integracija članova sa konvektivnim ubrzanjem, u jednačinama održanja količine kretanja, daje:

$$\begin{aligned}
\int_{z_b}^{z_b+h} \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} dx_3 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{z_b}^{z_b+h} u_i u_j dx_3 - \\
&\quad - {}^s u_i {}^s u_j \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_j} + {}^b u_i {}^b u_j \frac{\partial(z_b)}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} (h \tilde{u}_i \tilde{u}_j) - {}^s u_i {}^s u_j \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_j} + \\
&\quad + {}^b u_i {}^b u_j \frac{\partial(z_b)}{\partial x_j}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\int_{z_b}^{z_b+h} \frac{\partial(u_i u_3)}{\partial x_3} dx_3 &= \int_{z_b}^{z_b+h} \partial(u_i u_3) = u_i u_3 \Big|_{z_b}^{z_b+h} \\
&= {}^s u_i {}^s u_3 - {}^b u_i {}^b u_3 \\
i &= 1, 2 \quad j = 1, 2
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Posle integracije jednačine (2.3), pritisak je definisan sa:

$$p = -\rho g(x_3 - z_b - h) \tag{2.16}$$

Integracija članova sa pritiskom, u jednačinama količine kretanja daje:

$$\begin{aligned}
\int_{z_b}^{z_b+h} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_3 &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{z_b}^{z_b+h} p dx_3 - 0 \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_i} + \rho g h \frac{\partial(z_b)}{\partial x_i} \right) \\
&= \frac{\rho g}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{z_b}^{z_b+h} (-x_3 + z_b + h) dx_3 + h \frac{\partial(z_b)}{\partial x_i} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-\frac{x_3 x_3}{2} + x_3 (z_b + h) \right] \Big|_{z_b}^{z_b+h} + h \frac{\partial(z_b)}{\partial x_i} \right\} \\
&= g \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-\frac{(z_b + h)^2}{2} + (z_b + h)(z_b + h) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{z_b z_b}{2} - z_b(z_b + h) \right] + h \frac{\partial(z_b)}{\partial x_i} \right\} \\
&= g \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{(z_b + h)^2}{2} + \frac{z_b z_b}{2} - z_b z_b - z_b h \right] + h \frac{\partial(z_b)}{\partial x_i} \right\} \\
&= g \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{z_b z_b}{2} + z_b h + \frac{h h}{2} - \frac{z_b z_b}{2} - z_b h \right) + h \frac{\partial(z_b)}{\partial x_i} \right] \\
&= g \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{h h}{2} \right) + h \frac{\partial(z_b)}{\partial x_i} \right] \\
&= g \left[h \frac{\partial(h)}{\partial x_i} + h \frac{\partial(z_b)}{\partial x_i} \right] \\
&= g h \frac{\partial}{\partial x_i} (h + z_b) \tag{2.17} \\
&i = 1, 2
\end{aligned}$$

Integracija članova sa naponima, u jednačinama količine kretanja daje:

$$\begin{aligned}
\int_{z_b}^{z_b+h} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} dx_3 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{z_b}^{z_b+h} \tau_{ij} dx_3 - {}^s \tau_{ij} \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_i} + {}^s \tau_{ij} \frac{\partial(z_b)}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial(h \tilde{\tau}_{ij})}{\partial x_i} - {}^s \tau_{ij} \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_i} + {}^s \tau_{ij} \frac{\partial(z_b)}{\partial x_i} \tag{2.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{z_b}^{z_b+h} \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_i} dx_3 &= \int_{z_b}^{z_b+h} \partial \tau_{i3} = \tau_{i3} \Big|_{z_b}^{z_b+h} \\
&= {}^s \tau_{i3} - {}^s \tau_{i3} \tag{2.19} \\
&i = 1, 2 \quad j = 1, 2
\end{aligned}$$

Osrednjavanje po dubini jednačina količine kretanja (2.1) do (2.3) daje:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (h \tilde{u}_j) - {}^s u_j \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[h \tilde{u}_j \tilde{u}_i + \int_{z_b}^{z_b+h} (u_i - \tilde{u}_i)(u_j - \tilde{u}_j) dx_3 \right] - \\
- {}^s u_j {}^s u_j \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_i} + {}^b u_j {}^b u_j \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_i} + \\
+ {}^s u_j {}^s u_3 - {}^b u_j {}^b u_3 + g h \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_j} - \\
- \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(h \tilde{\tau}_{ij})}{\partial x_i} - {}^s \tau_{ij} \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_i} + {}^b \tau_{ij} \frac{\partial(z_b)}{\partial x_i} - {}^s \tau_{j3} + {}^b \tau_{j3} \right] = 0 \tag{2.20} \\
i = 1, 2 \quad j = 1, 2
\end{aligned}$$



Posle sredjivanja, jednačine održanja količine kretanja su:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (h \tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \tilde{u}_j \tilde{u}_i) + g h \frac{\partial}{\partial x_j} (z_b + h) - \\
& - {}^s u_j \left[\frac{\partial h}{\partial t} + {}^s u_i \frac{\partial (z_b + h)}{\partial x_i} - {}^s u_3 \right] + \\
& + {}^b u_j \left[{}^b u_i \frac{\partial (z_b + h)}{\partial x_i} - {}^b u_3 \right] - \\
& - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[h \tilde{\tau}_{ij} - \int_{z_b}^{z_b+h} (u_i - \tilde{u}_i) (u_j - \tilde{u}_j) dx_3 \right] + \\
& + \frac{1}{\rho} \left[{}^s \tau_{ij} \frac{\partial (z_b + h)}{\partial x_i} - {}^s \tau_{3j} \right] - \frac{1}{\rho} \left[{}^b \tau_{ij} \frac{\partial (z_b)}{\partial x_i} - {}^b \tau_{3j} \right] = 0 \quad (2.21)
\end{aligned}$$

$i = 1, 2 \quad j = 1, 2$

Članovi između prve dve uglaste zagrade, nestaju zbog dinamičkih uslova na slobodnoj površine i dnu, jednačine (2.7) i (2.9). Članovi između pretposlednje uglaste zagrade, mogu se razumeti kao tenzor napona u ravni slobodne površine, napon od vetra ${}^w \tau_j$, a članovi između poslednje uglaste zagrade kao naponi na dnu ${}^b \tau_j$:

$${}^w \tau_j = {}^s \tau_{ij} \frac{\partial (z_b + h)}{\partial x_i} - {}^s \tau_{3j} \quad (2.22)$$

$${}^b \tau_j = {}^b \tau_{ij} \frac{\partial (z_b)}{\partial x_i} - {}^b \tau_{3j} \quad (2.23)$$

$i = 1, 2 \quad j = 1, 2$

Naponi fluida osrednjeni po dubini $\tilde{\tau}_{ij}$, definisani su slično kao i odgovarajući naponi fluida τ_{ij} , prema [22], kao:

$$\frac{\tilde{\tau}_{ij}}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.24)$$

gde je ν kinematska viskoznost vode.

Smičući naponi na dnu ${}^b \tau_j$ izračunavaju se dovodjenjem u vezu sa brzinom osrednjenom po dubini:

$${}^b \tau_j = c_f \rho \tilde{u}_j \sqrt{\tilde{u}_1 \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \tilde{u}_2} \quad (2.25)$$

$$c_f = \frac{n n g}{\sqrt[3]{h}} \quad (2.26)$$

gde je n Manningov koeficijent hidrauličke hrapavosti, a c_f koeficijent trenja.

Smičući naponi od vetra ${}^w \tau_j$ izračunavaju se po formuli koju su predložili Iwasa i Inoue [26]:

$${}^w \tau_j = c_w \rho_a {}^w u_j |{}^w u_j| \cos(w_d, n_j) \quad (2.27)$$

gde su w_d i n_j pravac vetra i pravac j , c_w je empirijski koeficijent za smičući napon, ρ_a je gustina vazduha i ${}^w u_j$ je brzina vetra u pravcu j .

Na kraju, osrednjavanje po dubini jednačina održanja količine kretanja daje:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (h \tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \tilde{u}_j \tilde{u}_i) + g h \frac{\partial}{\partial x_j} (z_b + h) - \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[h \tilde{\tau}_{ij} - \int_{z_b}^{z_b+h} (u_i - \tilde{u}_i)(u_j - \tilde{u}_j) dx_3 \right] + \frac{1}{\rho} ({}^b \tau_j - {}^w \tau_j) = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

$i = 1, 2 \quad j = 1, 2$

2.1.3 Jednačina nepromenljivosti mase

Integracija članova u jednačini nepromenljivosti mase (2.4) daje:

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_b+h} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx_3 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{z_b}^{z_b+h} u_i dx_3 - {}^s u_i \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_i} + {}^b u_i \frac{\partial(z_b)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (h \tilde{u}_i) - {}^s u_i \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_i} + {}^b u_i \frac{\partial(z_b)}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$i = 1, 2$

$$\int_{z_b}^{z_b+h} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 = \int_{z_b}^{z_b+h} \partial u_3 = u_3 \Big|_{z_b}^{z_b+h} = {}^s u_3 - {}^b u_3 \quad (2.30)$$

Posle sredjivanja, jednačina nepromenljivosti mase je:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(h \tilde{u}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h \tilde{u}_2)}{\partial x_2} - \left[{}^s u_1 \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_1} + {}^s u_2 \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_2} - {}^s u_3 \right] + \\ & + \left[{}^b u_1 \frac{\partial(z_b)}{\partial x_1} + {}^b u_2 \frac{\partial(z_b)}{\partial x_2} - {}^b u_3 \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Članovi izmedju prve dve uglaste zagrade su jednaki $-(\partial h)/(\partial t)$, zbog dinamičkog uslova na slobodnoj površini, jednačine (2.7). Članovi izmedju poslednje dve uglaste zagrade, nestaju zbog dinamičkog uslova na dnu, jednačine (2.9). Sa ovim izmenama, jednačina nepromenljivosti mase osrednjena po dubini je:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \\ & i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.1.4 Konačni oblik osnovnih jednačina osrednjenih po dubini

Jednačine (2.28) i (2.32) su osnovne jednačine, osrednjene po dubini, za tečenje u plitkoj vodi. Po usvajanju aproksimacije „plitke“ vode, sprovedeni postupak osrednjavanja po dubini ostavlja jedini mogući izvor neizvesnosti u članovima u uglastoj zagradi, u jednačini (2.28). Drugi član, $\int_{z_b}^{z_b+h} (u_i - \tilde{u}_i)(u_j - \tilde{u}_j) dx_3$, je takozvani disperzioni član, koji je posledica nejednolikosti brzine tečenja u_i , po vertikali. U literaturi [33], [20] i [42], uobičajeno se zanemaruje, pa je tako urađeno i u ovom radu. Važno je naglasiti da zanemareni članovi nemaju nikakve veze sa turbulencijom, jer su oni jedino posledica osrednjavanja po dubini. Konačni oblik jednačina održanja količine kretanja i mase je:

$$\frac{\partial}{\partial t} (h \tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \tilde{u}_j \tilde{u}_i) + g h \frac{\partial}{\partial x_j} (z_b + h) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (h \tilde{\tau}_{ij}) + \frac{1}{\rho} ({}^b \tau_j - {}^w \tau_j) = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.34)$$

$$i = 1, 2 \quad j = 1, 2$$

Prilikom usvajanja početnih pretpostavki, na osnovu kojih su osnovne jednačine osrednjene po dubini, konstatovano je da turbulencija ujednačava raspored brzina po vertikali. Druge važne posledice turbulentnog karaktera promenljivih do sada nisu uzimane u obzir i to će biti predmet narednih razmatranja.

2.1.5 Jedinična količina kretanja, strujna funkcija i vrtložnost

Pri izvodjenju osnovnih jednačina definisane su zavisne promenljive: brzina, dubina i naponi. Da bi se bolje opisali neki fenomeni, ili skratilo pisanje jednačina, mogu se definisati i neke druge zavisne promenljive.

Jedinična količina kretanja U_i je definisana kao:

$$U_i = h \tilde{u}_i \quad (2.35)$$

$$i = 1, 2$$

Strujna funkcija Ψ , ili funkcija toka, definiše se kao:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \tilde{u}_2 \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \tilde{u}_1 \quad (2.36)$$

Linije u kojima je $\Psi = \text{const}$ određuju strujnice. Veza između strujne funkcije i proticaja Q je data sa:

$$dQ = h d\Psi = h (\tilde{u}_1 dx_2 - \tilde{u}_2 dx_1) \quad (2.37)$$

Pojava vrtloga u toku, koja je karakteristična za turbulentno tečenje, može se pratiti preko vrtložnosti Ω , određenom kao:

$$\Omega = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} \quad (2.38)$$

2.2 Osrednjavanje jednačina po prostoru

Trenutna vrednost promenljive koja ima turbulentni karakter, može se predstaviti kao zbir tri komponente:

$$\begin{array}{l} \text{trenutna} \\ \text{vrednosti u toku} \end{array} = \begin{array}{l} \text{glavni} \\ \text{tok} \end{array} + \begin{array}{l} \text{doprinos} \\ \text{velikih vrtloga} \end{array} + \begin{array}{l} \text{doprinos} \\ \text{malih vrtloga} \end{array}$$

Prve dve komponente dominiraju svakim turbulentnim tokom i daju kretanja velikih razmera (*large scale motions*). Geometrija oblasti tečenja i priroda toka određuju glavni tok i velike vrtloge (*large eddies*). Treća komponenta je doprinos malih vrtloga (*small eddies*), koji su mnogo više izotropni, i prema eksperimentima [24], skoro da su univerzalni (jednakih karakteristika).

Veći deo transporta: mase, količine kretanja, energije i pasivnih skalara, prouzrokovani su kretanjima velikih razmera. Mali vrtlozi (*Subgrid scale* ili *SGS*), disipiraju fluktuacije ovih veličina, ali ne utiču značajno na karakteristike glavnog toka. Glavni tok i veliki vrtlozi mogu biti sračunati direktno (*Large Eddy Simulation - LES*), a mali vrtlozi mogu biti modelisani (*SGS modelling*).

Simulacija velikih vrtloga (*Large Eddy Simulation*) ima mnoge prednosti nad metodama vremenskog osrednjavanja [25]. Najvažnija prednost je što se veći deo transporta izračunava eksplicitno, a delovi transporta koji se modelišu manji su od onih koji se modelišu u metodama vremenskog osrednjavanja. U tradicionalnim, vremenski osrednjenim jednačinama, sva odstupanja od glavnog toka se moraju modelisati. Rezultati simulacije velikih vrtloga su manje osetljivi na netačnosti modelisanja, od rezultata drugih pristupa (izuzev direktnih simulacija (*Direct Simulations*) turbulentnog toka).

Od velikog je značaja precizna podela polja brzina. Postoje dva pristupa za podelu turbulentnog toka: osrednjavanje po zapremini (u užem smislu reči) [11] i prostorno filtriranje [34]. U oba pristupa osrednjavanje se vrši po zapremini, ali se u prostornom filtriranju, preko filter funkcije, preciznije definiše način osrednjavanja. U ovom radu korišćen je pristup prostornog filtriranja.



2.2.1 Filtriranje jednačina osrednjenih po dubini

Ako je F funkcija koja sadrži sve razmere (sve dimenzije vrtloga), komponenta velikih razmera (razmera mreže (*grid scale GS*)) \bar{F} , može biti definisana konvolucijom od F , sa filter funkcijom $G(x - x')$, prema:

$$\bar{F}(x) = \int_V G(x - x')F(x')d(x') \quad (2.39)$$

gde je x' tekuća promenljiva duž x ose. U opštem slučaju integriše se po domenu tečenja V . Pošto su osnovne jednačine (2.33) i (2.34) već integrisane po dubini, prostorno filtriranje se odvija samo u horizontalnoj ravni, odnosno po pravcima x_1 i x_2 .

Kao filter se može koristiti nekoliko funkcija $G(x - x')$ [19]. Uglavnom se koriste: cilindrični (*top-hat* ili *box-car*), cilindrični filter u Fourierovom prostoru i Gaussov filter.

Cilindričan filter ima oblik šešira „cilindra“, ili kutije i definisan je kao:

$$G(x - x') = \begin{cases} \prod_{i=1}^3 1/\Delta_i & |x_i - x'_i| \leq \Delta_i/2 \\ 0 & |x_i - x'_i| \geq \Delta_i/2 \end{cases} \quad (2.40)$$

gde je Δ_i širina filtra. Isti oblik u Fourierovom prostoru ima i filter koji je u normalnom prostoru definisan kao:

$$G(x - x') = \frac{\sin[2\pi k_0(x - x')]}{2\pi(x - x')} \quad (2.41)$$

gde je $k_0 = 2\pi/\Delta$.

U slučaju da se Gaussov filter koristi, filter funkcija je:

$$G(x - x') = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{1}{\Delta} e^{-\gamma \frac{(x-x')^2}{\Delta^2}} \quad (2.42)$$

gde je γ drugi moment filter funkcije.

Za sve filter funkcije mora važiti:

$$\int_V G(x - x')d(x') \equiv 1 \quad (2.43)$$

Širina filtra Δ odgovara najmanjem vrtlogu koji se „rešava“, i može se izabrati procenom. Ona može biti veća od numeričke mreže Δx_i , ali ne može biti manja od nje. Svako smanjivanje, odnosno „progušćavanje“, numeričke mreže izaziva i smanjenje širine filtra Δ .

U toku procedure filtriranja, polje brzina u_i se deli na GS i SGS komponente kao:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (2.44)$$

gde \bar{u}_i označava GS , a u'_i SGS komponente. Sličnost ovih jednačina sa Reynoldsovim osrednjavanjem po vremenu je očigledna.

Posle prostornog filtriranja, primenom jednačine (2.39), osnovne jednačine osrednjene po dubini (2.33) i (2.34) dobijaju oblik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (h \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \bar{u}_j \bar{u}_i) + g h \frac{\partial}{\partial x_j} (z_b + h) - \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (h \bar{\tau}_{ij}) + \frac{1}{\rho} ({}^b \bar{\tau}_j - {}^w \bar{\tau}_j) = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h \bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \\ i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Svi članovi, izuzev nelinearnih konvektivnih članova u jednačinama (2.45), zadržali su isti oblik. Da bi se skratilo pisanja izostavlja se \sim , oznaka za osrednjavanje po dubini. Nelinearni članovi se mogu razložiti:

$$\frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_i} \quad (2.47)$$

Ako se levoj i desnoj strani jednačina (2.45) doda $\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j)/\partial x_i$ dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (h \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \bar{u}_j \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (h L_{ij}) + g h \frac{\partial}{\partial x_j} (z_b + h) - \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} [h (\bar{\tau}_{ij} + R_{ij})] + \frac{1}{\rho} ({}^b \bar{\tau}_j - {}^w \bar{\tau}_j) = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

uz uvodjenje dve nove veličine, Leonardovih članova:

$$L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (2.49)$$

i Reynoldsovih napona prouzrokovanih vrtlozima manjim od razmera mreže (*subgrid scale stress*):

$$R_{ij} = -(\overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{u'_i u'_j}) \quad (2.50)$$

O veličini uticaj Leonardovih članova u literaturi postoje različta mišljenja. U [34], u kome je Leonard i uveo ovu veličinu, tvrdi se da se preko ovih članova značajan deo energije odnosi iz glavnog strujanja. Ipak u mnogim radovima, [25],[27] i [3], ovi članovi se zanemaruju. Uobičajen je pristup, prema [36], da se aproksimira:

$$\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} \approx \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (2.51)$$

I u ovom radu uticaj Leonardovih članova je zanemaren.

Reynoldsovi *SGS* naponi su najvažnija posledica prostornog filtriranja osnovnih jednačina. Naziv je dat zbog sličnosti sa Reynoldsovim naponima koji se dobijaju pri osrednjavanju po vremenu. Kao i kod vremenskog osrednjavanja, prema [22] i [18], treba naglasiti da ti „naponi“ nisu pravi naponi u fizičkom smislu, već proticanje količine kretanja prouzrokovano vrtlozima manjim od širine filtra. Kako je to ranije pomenuto, širina filtra je uvek u nekoj vezi sa dimenzijama numeričke mreže, odakle potiče drugi deo imena *SGS* (*subgrid scale* - manji od dimenzija mreže).

Konačno, prostorno filtriranje osnovnih jednačina osrednjenih po dubini, prema [28], [29] i [31], daje:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (h \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \bar{u}_j \bar{u}_i) + g h \frac{\partial}{\partial x_j} (z_b + h) - \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} [h(\bar{\tau}_{ij} + R_{ij})] + \frac{1}{\rho} (b \bar{\tau}_j - w \bar{\tau}_j) = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h \bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \\ i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.53)$$

U jednačinama (2.52) i (2.53) pojavljuje se dodatna nepoznata R_{ij} , Reynoldsov *SGS* napon, zbog čega je broj nepoznatih veći od broja jednačina. Da bi se sistem „zatvorio“, nepoznata R_{ij} se modeliše.

2.2.2 Model Smagorinskog

Najpoznatiji model turbulentnih *SGS* napona predložio je još 1963 godine Smagorinsky, u radu [44]. U njemu se turbulentni Reynoldsovi *SGS* naponi modelišu preko turbulentne ili vrtložne viskoznosti. Slično kao što viskoznost kod laminarnog toka izaziva viskozne napone, R_{ij} je određen, prema [18], kao:

$$\frac{R_{ij}}{\rho} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} R_{kk} \quad (2.54)$$

gde je ν_t *SGS* turbulentna viskoznost, i δ_{ij} Kroneckerov simbol.

Smagorinsky [44] je dalje pretpostavio da je ν_t određeno sa:

$$\nu_t = c^2 \Delta^2 \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]^{1/2} \quad (2.55)$$

gde je c bezdimenzionalna konstanta, a Δ je širina filtra. Model se u mnogim situacijama pokazao kao veoma dobar. Međutim, u osnovi ovog modela je pretpostavka o lokalnoj jednakosti produkcije i disipacije *SGS* turbulentne kinetičke energije. U

stvarnosti, jednakost produkcije i disipacije turbulentne kinetičke energije ostvaruje se samo u posebnim situacijama u toku. Ova jednakost se ne ostvaruje u mlazovima, tragovima iza objekata u toku, u blizini zida i u graničnom sloju. Problemi u primeni modela, koji su nastajali u tokovima koji su pomenuti, uglavnom su rešavani promenom bezdimenzionalne konstante c . Tako se u različitim radovima njena vrednost kreće od 0.2 do 0.065, čime se značajno menja turbulentna viskoznost ν_t , a time i R_{ij} .

2.2.3 Modeli sa SGS turbulentnom kinetičkom energijom

Veličina k_g je turbulentna kinetička energija vrtloga koji su manji od širine filtra, i prema [24], definiše se kao:

$$k_g = \frac{\overline{u'_i u'_i}}{2} \quad (2.56)$$

To je istovremeno i turbulentna brzinska razmera turbulentnog toka.

Uz korišćenje SGS turbulentne kinetičke energije Reynoldsovi naponi R_{ij} određeni su, prema [24], kao:

$$\frac{R_{ij}}{\rho} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k_g \quad (2.57)$$

Sve vrednosti kojima se naponi R_{ij} modelišu osrednjene su po dubini i filtrirane po preostalom delu prostora.

Pravo usavršavanje modela Smagorinskog ostvareno je uvodjenjem pretpostavke o održanju SGS turbulentne kinetičke energije i postavljanjem jednačine održanja ove veličine. Takav model predložili su Yoshizawa i Horiuti [50], [24]. U njemu je turbulentna viskoznost ν_t data sa:

$$\nu_t = c_\nu \Delta \sqrt{k_g} \quad (2.58)$$

gde je c_ν bezdimenzionalna konstanta. Širina primenjenog prostornog filtra Δ predstavlja turbulentnu dužinsku razmeru turbulentnog toka. Tako su u model uključene obe razmere koje su bitne za turbulentno tečenje.

Jednačina održanja za k_g , prema [24], može biti napisana kao:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_g}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i k_g)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\nu + c_{kk} \Delta \sqrt{k_g}) \frac{\partial k_g}{\partial x_i} \right] + \\ &+ \nu_t \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 - c_\epsilon \frac{k_g \sqrt{k_g}}{\Delta} \end{aligned} \quad (2.59)$$

$i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3$

gde su c_{kk} i c_ϵ konstante. Prilikom prostornog filtriranja korišćen je cilindrični filter, čija je širina definisana kao:

$$\Delta = \sqrt[3]{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \quad (2.60)$$

Tri konstante c_ν , c_{kk} i c_ϵ , prema [50], su procenjene kao: 0.05, 0.1 i 1.0

Za jednačine, koje su prvo osrednjene po dubini, a po preostala dva koordinatna pravca prostorno filtrirane, turbulentna viskoznost osrednjena po dubini $\tilde{\nu}_t$, na osnovu (2.58), prema [28] i [29], može se izraziti kao:

$$\tilde{\nu}_t = c_\nu \Delta_g \sqrt{\tilde{k}_g} \quad (2.61)$$

Na sličan način i jednačina održanja za *SGS* turbulentnu kinetičku energiju osrednjenu po dubini \tilde{k}_g , data je sa:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{k}_g}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{u}_1 \tilde{k}_g)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\tilde{u}_2 \tilde{k}_g)}{\partial x_2} = \\ & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[(\nu + c_{kk} \Delta_g \sqrt{\tilde{k}_g}) \frac{\partial \tilde{k}_g}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[(\nu + c_{kk} \Delta_g \sqrt{\tilde{k}_g}) \frac{\partial \tilde{k}_g}{\partial x_2} \right] + \\ & + \tilde{\nu}_t \left[2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \\ & + P_{kV} - c_\epsilon \frac{\tilde{k}_g \sqrt{\tilde{k}_g}}{\Delta_g} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Treba primetiti da \tilde{k}_g i $\tilde{\nu}_t$ nisu veličine striktno osrednjene po dubini, ali se jednačine (2.61) i (2.62) mogu smatrati kao oblici trodimenzionalnih jednačina (2.58) i (2.59) osrednjeni po dubini.

U jednačinama (2.61) i (2.62) pojavljuje se i širina filtra Δ_g , koja je definisana kao:

$$\Delta_g = \sqrt{\Delta x_1 \Delta x_1 + \Delta x_2 \Delta x_2} \quad (2.63)$$

Izvesna razlika, u odnosu na jednačinu (2.60), uvedena je zbog toga što mnogi vrednost koja se izračunava sa ovim izrazom množe sa 2, pa je na ovaj način napravljen nekakav kompromis.

U jednačini (2.62) uveden je dodatni izvorski član P_{kV} . Pretpostavlja se, po analogiji sa [42], da se ovim članom proizvodi *SGS* turbulentna kinetička energija, koja je posledica nejednolikosti rasporeda brzina po dubini. Rastogi i Rodi [40], su u sličnoj situaciji sa k - ϵ modelom, povezali dodatni izvorski član sa brzinom smičućeg toka u_* :

$$P_{kV} = c_{ver} \frac{u_* u_* u_*}{h} \quad (2.64)$$

$$u_* = \sqrt{c_f (\tilde{u}_1 \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \tilde{u}_2)} \quad (2.65)$$

Empirijska konstanta c_{ver} , određena je za neporemećen tok u pravom kanalu, prema [40]:

$$c_{ver} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} \quad (2.66)$$

2.2.4 Stohastičke komponente turbulentnih promenljivih

Jedna od bitnih karakteristika turbulentnog toka je uzburkanost i odatle i naziv - turbulentus = nemiran, uzburkan. Posledica uzburkanosti su promene turbulentnih veličina kroz vreme i u prostoru. U postupku prostornog filtriranja uticaj malih vrtloga, koji su najzaslužniji za uzburkanost, „uknjižava“ se u glavno strujanje. Tako jednačina održanja količine kretanja za glavni tok i velike vrtloge, dobija važan deo. Sa druge strane, upravo mali vrtlozi imaju stohastički, slučajni karakter, koji filtriranjem po prostoru nestaje iz jednačina održanja.

Druga bitna karakteristika turbulentnog toka je pojava vrtloga, koji mogu da budu stacionirani na jednom mestu, ili da nošeni strujom putuju niz tok. Za stvaranje ovakvih vrtloga vrlo je važno postojanje malih vrtloga sa stohastičkim karakterom, jer oni pobudjuju stvaranje velikih vrtloga. Ako ova pobuda nedostaje neće se stvoriti ni veliki vrtlozi. Da bi se u izračunatom strujnom polju pobudilo stvaranje velikih vrtloga, turbulentnim veličinama se u svakom vremenskom koraku moraju dodavati stohastičke komponente. To se može postići različitim načinima, [35], [47] i [38], a prema [30] i [31], izračunate vrednosti U_i , u svakom vremenskom trenutku, mogu se izmeniti na sledeći način:

$${}^rU_i = U_i[1 + f(0.5 - \epsilon)] \quad (2.67)$$

$$i = 1, 2$$

gde je: rU_i jedinična količina kretanja sa stohastičkim karakterom, u pravcu i , f koeficijent intenziteta slučajne komponente, ϵ pseudo-slučajna¹ veličina. Koeficijent intenziteta se kreće u granicama $0 \leq f \leq 1$, i svakako mora imati malu vrednost. Pseudo-slučajna veličina ϵ ima karakter „belog šuma“ i kreće se u istim granicama $0 \leq \epsilon \leq 1$, uz srednju vrednost $\bar{\epsilon} = 0.5$. Ako se jednačina (2.67) primenjuje više puta, zbog pseudoslučajnog karaktera ϵ , ukupan uticaj će težiti ka 0.

Stohastičke komponente turbulentnih promenljivih mogu se dodavati samo u nekim tačkama oblasti obuhvaćene proračunom, uz poštovanje jasnih kriterijuma o izboru tačka. S obzirom da su intenziteti stohastičkih komponenti proporcionalni prethodno izračunatim vrednostima, ove komponente se mogu dodavati i u svim tačkama numeričke mreže. U toku verifikacije matematičkog modela, u poglavlju 5, oba pristupa su ispitana.

¹Termin „pseudo“ se koristi zbog toga što se kao izvor slučajnih veličina koristi FORTRAN-ski potprogram RANDOM, koji generiše pseudo-slučajne brojeve.

Drugi problem u vezi dodavanja stohastičkih komponenti je izbor dela numeričkog postupka u kome treba primeniti jednačinu (2.67). Odgovor na ovo pitanje dat je u poglavlju 4.

Svako dodavanje stohastičkog karaktera turbulentnim veličinama na opisani način, predstavlja narušavanje osnovnih jednačina održanja. Ipak, ograničeno narušavanje ovih osnovnih zakonitosti značajno utiče na poboljšanje karakteristika izračunatog strujnog polja. Moglo bi se zaključiti, da se nepotpunom primenom jednačina održanja dobijaju rezultati koji su sličniji prirodnom turbulentnom toku, nego ako se jednačine striktno primene.

Uvodjenjem jednačine (2.67) u matematički model dobijen je novi kvalitet u modelisanju turbulentnih veličina, ali istovremeno je pred numeričke metode, koje se koriste za rešavanje osnovnih jednačina, postavljen novi zahtev. Uz zadržavanje potrebne tačnosti i stabilnosti proračuna, numeričke metode moraju ostvariti što manju numeričku difuziju, kako bi stohastičke komponente malih intenziteta uspele da pobude stvaranje vrtloga u izračunatom turbulentnom toku.

2.2.5 Razlike između *SGS* i $k - \varepsilon$ modela

U toku prostornog filtriranja osnovnih jednačina, više puta je primećivana sličnost između primenjenog postupka i osrednjavanja po vremenu. Ipak, između dva pristupa postoje i značajne razlike. Da bi se one istakle, primenjeni metod će se uporediti sa odgovarajućim $k - \varepsilon$ modelom, koji je stekao nesumnjivu popularnost. Poredjenje se vrši sa varijantom koja takodje koristi osnovne jednačine osrednjene po dubini i proverena je više puta u [39], [12], [13], [14], [15] i [16].

Pre razmatranja razlika, ukazaće se na nekoliko sličnosti između pristupa osrednjavanja po prostoru i po vremenu. U pristupu vremenskog osrednjavanja trenutna vrednost turbulentne brzina u_i je:

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (2.68)$$

gde \bar{u}_i označava osrednjenu vrednost brzine po vremenu (oznaka $\bar{}$ označava da je osrednjavanje po vremenu), a u_i' je fluktuacija, odnosno odstupanje. Sličnost ove jednačine sa odgovarajućom jednačinom (2.44), u osrednjavanjem po prostoru, je očigledna.

Ako se postupak osrednjavanja po vremenu primeni na osnovne jednačine, nelinearni članovi se mogu razložiti:

$$\frac{\partial[\overline{(u_i u_j)}]}{\partial x_i} = \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_i} \quad (2.69)$$

Za razliku od jednačine (2.47) ova jednačina je nešto jednostavnija, ali kada se primeni aproksimacija (2.51) razlike se smanjuju.

Reynoldsovi naponi ${}_t R_{ij}$, nastali osrednjavanjem po vremenu, prema [18], određeni su kao:

$$\frac{{}_t R_{ij}}{\rho} = {}_t \nu_t \left(\frac{\partial {}_t \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial {}_t \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (2.70)$$

U jednačini se pojavljuju dve vrednosti nastale osrednjavanjem po vremenu, turbulentna ili vrtložna viskoznost ${}_t \nu_t$ i turbulentna kinetička energija k . Druga veličina, definiše se na sličan način kao i kod prostornog osrednjavanja:

$$k = \frac{\overline{{}_t u'_i {}_t u'_i}}{2} \quad (2.71)$$

Turbulentna kinetička energija je, kao i odgovarajuća veličina kod prostornog osrednjavanja, i turbulentna brzinska razmera turbulentnog toka.

Turbulentna viskoznost ${}_t \nu_t$ definiše se na sličan način kao u jednačini (2.58):

$${}_t \nu_t = {}_t c_\nu L \sqrt{k} \quad (2.72)$$

gde je ${}_t c_\nu$ bezdimenzionalna konstanta, a L dužina koja predstavlja dužinsku razmeru turbulentnog toka. Kao i kod prostornog osrednjavanja, koriste se obe razmere koje definišu turbulentni tok, ali je u ovom slučaju problem kako odrediti dužinu L .

U $k - \varepsilon$ modelu uvodi se nova promenljiva brzina disipacije turbulentne kinetičke energije ε , koja se definiše kao:

$$\varepsilon = \frac{k \sqrt{k}}{L} \quad (2.73)$$

Ako se dužina L izrazi preko k i ε , turbulentna viskoznost je:

$${}_t \nu_t = {}_t c_\nu \frac{k k}{\varepsilon} \quad (2.74)$$

I u ovom izrazu turbulentna viskoznost je definisana sa obe razmere, ali je uvedena i nova veličina ε .

Za obe veličine k i ε , izvode se jednačine održanja, ali ne tako rigorozno kao za količinu kretanja i masu. Ove jednačine se na isti način osrednjavaju i po dubini. Prema [42], jednačine održanja za vrednosti osrednjene po dubini turbulentne kinetičke energije \tilde{k} i brzine disipacije turbulentne kinetičke energije $\tilde{\varepsilon}$, mogu se napisati kao:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \frac{\partial ({}_t \bar{u}_1 \tilde{k})}{\partial x_1} + \frac{\partial ({}_t \bar{u}_2 \tilde{k})}{\partial x_2} = \\ & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{{}_t \tilde{\nu}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{{}_t \tilde{\nu}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_2} \right) + \\ & + {}_t \tilde{\nu}_t \left[2 \left(\frac{\partial {}_t \bar{u}_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial {}_t \bar{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial {}_t \bar{u}_1}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial {}_t \bar{u}_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \\ & + {}_t P_{kV} - \tilde{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_1 \tilde{\varepsilon})}{\partial x_1} + \frac{\partial (\bar{u}_2 \tilde{\varepsilon})}{\partial x_2} = \\
& \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_2} \right) + \\
& + c_{1\varepsilon} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \tilde{\nu}_t \left[2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \\
& + P_\varepsilon V - c_{2\varepsilon} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} \quad (2.76)
\end{aligned}$$

gde su $c_{1\varepsilon}$, $c_{2\varepsilon}$, σ_k i σ_ε konstante koje su određene empirijski.

Model sa *SGS* turbulentnom kinetičkom energijom i $k - \varepsilon$ model, u varijantama sa veličinama koje su osrednjene po dubini, imaju mnogo sličnosti. Pre svega, turbulentne, ili vrtložne viskoznosti, definišu se na sličan način (jednačine (2.58) i (2.72)). U oba pristupa koriste se turbulentna brzinska i dužinska razmera. Na tom mestu nastaju i razlike. U osrednjavanju po prostoru, širina prostornog filtra odvaja od kretanja velikih razmera male vrtloge i zato ima ulogu turbulentne dužinske razmere. U pristupu osrednjavanja po vremenu, turbulentna dužinska razmera se određuje preko dodatne promenljive. Zbog toga se u prvom modelu koristi jedna, a u drugom dve jednačine održanja. Sličnost jednačine održanja (2.62), za *SGS* turbulentnu kinetičku energiju osrednjenu po dubini, sa odgovarajućom jednačinom (2.75) nije mnogo bitna, jer je posledica jednakog osrednjavanja po dubini i sličnog pristupa pri izvodjenju jednačina.

Iz razlike u definisanju turbulentne dužinske razmere nastaje jedna važna razlika između *SGS* i $k - \varepsilon$ modela. Već je napomenuto, da je kod *SGS* modela dužinska razmera jednaka širini prostornog filtra, odnosno da zavisi od veličine razmaka tačaka numeričke mreže. To znači da se „progušćavanjem“ numeričke mreže smanjuju vrednosti *SGS* turbulentne kinetičke energije i turbulentne viskoznosti. Sa druge strane, „progušćavanjem“ numeričke mreže kod $k - \varepsilon$ modela ove vrednosti se ne menjaju. Zbog toga, kod dodavanja stohastičkih komponenti turbulentnim promenljivim, pristup osrednjavanja po prostoru ima veliku prednost.

2.3 Hipoteze za pojednostavljenje jednačina

U uvodnom poglavlju, kao cilj rada postavljen je razvoj matematičkog modela tečenja vode u plitkim oblastima strujanja, koji bi se mogao koristiti i na računarima skromnijih mogućnosti. Da bi se cilj ostvario, osnovne jednačine održanja moraju se pojednostaviti. U ovom radu postavljene su hipoteze, na osnovu kojih je pojednostavljenje sprovedeno, a koje će ukratko biti ponovljene.

Zbog oblika oblasti strujanja i razvijene turbulencije, osnovne jednačine su osrednjavane u dva koraka. Prvo osrednjavanje je izvršeno po dubini, čime je problem od

trodimenzionalnog postao dvodimenzionalni - ravanski. Zatim su osnovne jednačine osrednjene po preostala dva pravca prostornim filtriranjem. Kao posledica filtriranja pojavile su se dodatne nepoznate.

Za „zatvaranje“ sistema jednačina, odnosno definisanje dodatnih nepoznatih, koristi se jedno-jednačinski model, kojim se modelišu *SGS* turbulentna kinetička energija. Ovim modelom određene su obe turbulentne razmere, brzinska preko *SGS* turbulentne kinetičke energije, a dužinska preko širine prostornog filtra, odnosno dimenzija numeričke mreže.

Pretpostavljeno je da se stohastički karakter turbulentnih veličina može vratiti, čime se stvaraju uslovi da se u izračunatom strujnom polju pojavljuju vrtlozi koji putuju niz tok. Proces vraćanja stohastičkog karaktera odvija se dodavanjem stohastičkih komponenti turbulentnim promenljivim.

Za vraćanje stohastičkog karaktera turbulentnim veličinama, bitna je pretpostavka da je turbulentna dužinska razmera jednaka širini prostornog filtra. Tako je moguće da se „gušćom“ numeričkom mrežom olakšava stvaranje vrtloga koji putuju niz tok.

Neke od navedenih hipoteza su nove za rečnu i računarsku hidrauliku i mogu se prihvatiti tek pošto se matematički model verifikuje, što će biti predmet poglavlja 5.

Poglavlje 3

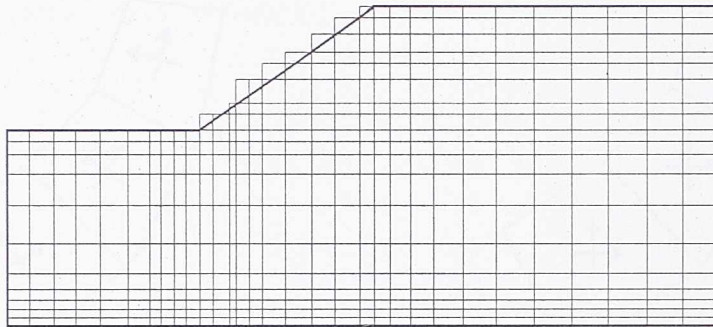
Osnovne jednačine u krivolinijskim koordinatama

Osnovne jednačine (2.52), (2.53) i (2.62) i jednačina (2.67) predstavljaju matematički model tečenja vode u „plitkim“ otvorenim tokovima. Sve veličine u jednačinama osrednjene su po dubini, u vertikalnom pravcu x_3 , tako da je problem od trodimenzionalnog sveden na ravanski - dvodimenzionalni. Numeričkim rešavanjem jednačina, uz zadovoljenje početnih i graničnih uslova, mogu se izračunati promene kroz vreme hidrauličkih veličina (brzina tečenja vode, proticaj, nivo slobodne površine i sl.), u oblasti na koju se proračun odnosi. Geometrija oblasti, unosi se u matematički model preko numeričke mreže, kao niz diskretnih vrednosti. Ako je oblast proračuna u osnovi pravilna, numerička mreža se lako određuje. Situacije u kojima su korita vodotoka, a naročito prirodnih vodotoka, pravilna ili se mogu šematizovati kao takva, su vrlo retke. Zbog toga su razvijene metode, koje omogućavaju razmatranje tečenja i u oblastima strujanja nepravilnog i složenog oblika, koje će biti predmet razmatranja ovog poglavlja.

3.1 Izbor numeričke mreže

Već je napomenuto, da je, ukoliko je geometrija oblasti proračuna pravilna (pravougaona ili kružna), izbor numeričke mreže jednostavan: numerička mreža prati koordinatne pravce, u Dekartovim, ili polarno-cilindričnim koordinatama. U slučaju da je geometrija oblasti nepravilna, sa kosim ili zakrivljenim granicama, može se zadržati pravilna numerička mreža, uz stepenastu aproksimaciju granica. Na slici 3.1 prikazan je primer takve aproksimacije. Ovakvo rešenje stvara dve vrste problema:

- Broj tačaka u redovima, ili kolonama, numeričke mreže postaje različit, za razliku od situacije sa „običnom“ pravilnom mrežom, u kojoj je broj tačaka uvek jednak. Ako se u proračunu koristi implicitna numerička šema, u programu



Slika 3.1: Primer stepenaste aproksimacije granice.

za proračun se moraju napraviti velike izmene, sa dobrim šansama da se za svaku narednu izmenu oblika granice, izmene moraju ponoviti.

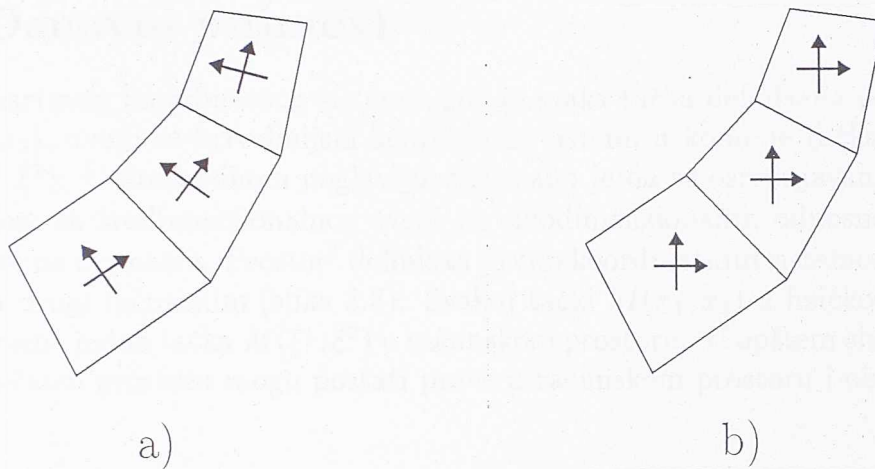
- Stepenasto aproksimiranje granica unosi greške, koje su veće ukoliko je numerička mreža „redja“. Sa „gušćom“ mrežom ovaj se problem delimično rešava, ali veći broj numeričkih tačaka produžava (poskupljuje) proračun i pripremu rezultata za prikazivanje.

Navedeni problemi, koji se pojavljuju pri korišćenju pravilne numeričke mreže, glavni su razlog što se za proračune tečenja u prirodnim otvorenim tokovima koriste krivolinijske numeričke mreže. Tačke ove mreže poklapaju se sa krivolinijskim koordinatama koje prate granice oblasti strujanja i glavne strujne linije u toku. Zbog toga što se prate granice oblasti tečenja, ove koordinate se često zovu i koordinate najbolje prilagodjene granicama ili telu (*boundary-fitted coordinates* ili *body-fitted coordinates*). Pored „praćenja“ granica i linija toka, krivolinijska numerička mreža se može progušćavati u delovima oblasti, gde su promene veličina koje se izračunavaju velike. Zbog svih prednosti koje donosi, u ovom radu je usvojeno korišćenje krivolinijske numeričke mreže.

3.2 Izbor komponenti brzina

U osnovnim jednačinama (2.52), (2.53) i (2.62), vektorske veličine su predstavljene preko komponenti u pravcima Dekartovog koordinatnog sistema. Uvodjenje krivolinijske numeričke mreže, i sa njom vezanog krivolinijskog koordinatnog sistema, otvara pitanje koji koordinatni sistem koristiti za vektorske promenljive: Dekartov ili krivolinijski? Na slici 3.2 prikazane su obe mogućnosti za definisanje vektorskih promenljivih¹.

¹Položaj vektorskih promenljivih na slici je dat samo šematski, a detaljno objašnjenje položaja promenljivih je u poglavlju 4.



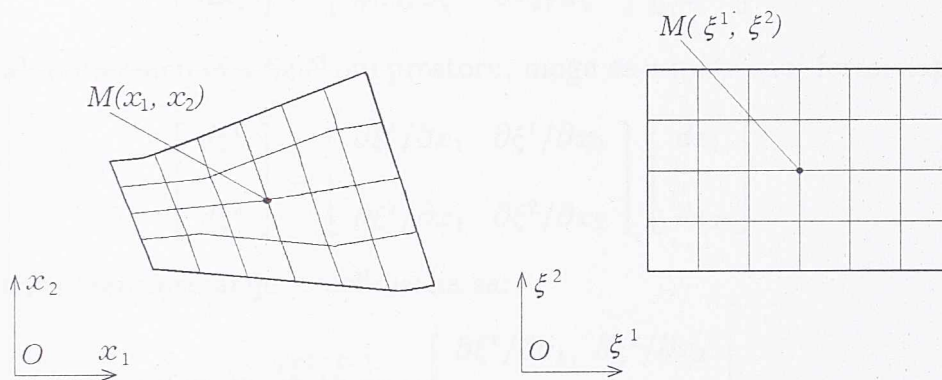
Slika 3.2: Komponente brzina: a) u pravcima krivolinijskih koordinata b) u pravcima Dekartovih koordinata

Osnovne jednačine održanja, napisane za krivolinijske pravce, sadrže u sebi mnoge dodatne članove, koji su često uzroci numeričkih grešaka. Ako se krivolinijske koordinate postave u pravcu strujnica toka, onda je uspostavljen prirodni koordinatni sistem, koji u ravni sačinjavaju pravci tangente i normale. U takvom koordinatnom sistemu osnovne jednačine su nešto jednostavnije, ali se i u njima pojavljuju članovi kojima je teško dati fizički smisao, vidi [43] i [49]. Dodatni problem stvara i generisanje krivolinijskih koordinata, uz poštovanje uslova ortogonalnosti. U te svrhe koriste se programi za generisanje numeričkih mreža, koji mogu da budu vrlo komplikovani. Po generisanju koordinata tačaka numeričke mreže u horizontalnoj ravni, potrebno je po nekoj proceduri odrediti i odgovarajuće dubine. S obzirom da se poprečni profili vodotoka, snimaju na relativno velikim rastojanjima, u odnosu na potrebe pri generisanju mreže, i programi za interpolaciju dubina mogu biti dosta komplikovani.

Ako se vektorske veličine u osnovnim jednačinama, predstavljaju preko komponenti u pravcima Dekartovog koordinatnog sistema, onda je potrebno u osnovnim jednačinama (2.52), (2.53) i (2.62), izvršiti samo zamenu koordinata. Dekartove koordinate se zamenjuju krivolinijskim, a izvodi po Dekartovim koordinatama zamenjuju se izvodima po krivolinijskim koordinatama. Ovakva transformacija osnovnih jednačina povećava broj članova u njima, ali jednačine zadržavaju svoju strukturu i formu. Programi za proračune, sa osnovnim jednačinama u Dekartovim koordinatama, mogu se relativno lako dopuniti za proračune sa krivolinijskim koordinatama. U ovom radu usvojeno je da se vektorske veličine u osnovnim jednačinama predstavljaju komponentama Dekartovog koordinatnog sistema.

3.3 Osnovni pojmovi

Pored Dekartovog koordinatnog sistema, gde je svaka tačka definisana parom vrednosti (x_1, x_2) , uvodi se krivolinijski koordinatni sistem, u kome je tačka definisane parom (ξ^1, ξ^2) . U prethodnom poglavlju, pokazano je da se osrednjavanjem po dubini problem sa trodimenzionalnog svodi na dvodimenzionalni, odnosno Dekartov pravac x_3 se ne razmatra. Prostor² definisan prvim koordinatnim sistemom se naziva fizičkim, a drugi računskim (slika 3.3). Svakoј tački $M(x_1, x_2)$ u fizičkom prostoru odgovara samo jedna tačka $M(\xi^1, \xi^2)$ u računskom prostoru. U opštem slučaju, krive linije u fizičkom prostoru mogu postati prave u računskom prostoru i obrnuto.



Slika 3.3: Fizički i računski prostor

Relacije koje definišu transformaciju koordinata su:

$$\xi^i = \xi^i(x_1, x_2) \quad (3.1)$$

ili

$$x_i = x_i(\xi^1, \xi^2) \quad (3.2)$$

gde indeks i može imati vrednosti 1 i 2.

Za određivanje parcijalnih izvoda bilo koje veličine Y , koristi se „lančano“ pravilo:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} \frac{\partial Y}{\partial \xi^j} \quad (3.3)$$

Da bi se ovo pravilo moglo primeniti, potrebno je prethodno odrediti metričke koeficijente $\partial \xi^j / \partial x_i$. U najvećem broju slučajeva koeficijenti se ne mogu odrediti analitički, već se moraju izračunati numerički. U ovakvom obliku metrički koeficijenti se teško direktno izračunavaju, jer su linije $\xi^j = \text{const}$ u fizičkom prostoru krive, zbog čega se metrički koeficijenti određuju posredno.

²Umesto termina „prostor“ koristi se i „domen“.

Na osnovi definicije totalnog diferencijala, u računskom prostoru mogu se napisati izrazi:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi^2} d\xi^2 \quad (3.4)$$

$$dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi^2} d\xi^2 \quad (3.5)$$

ili u matricnoj formi:

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial \xi^1 & \partial x_1 / \partial \xi^2 \\ \partial x_2 / \partial \xi^1 & \partial x_2 / \partial \xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi^1 \\ d\xi^2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Totalni diferencijali u fizičkom prostoru, mogu se u matricnoj formi napisati kao:

$$\begin{bmatrix} d\xi^1 \\ d\xi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \xi^1 / \partial x_1 & \partial \xi^1 / \partial x_2 \\ \partial \xi^2 / \partial x_1 & \partial \xi^2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Matrica transformacije je definisana sa:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(\xi^1, \xi^2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{bmatrix} \partial \xi^1 / \partial x_1 & \partial \xi^1 / \partial x_2 \\ \partial \xi^2 / \partial x_1 & \partial \xi^2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

a njena determinanta, koja se uobičajeno naziva Jakobijan, je:

$$\det \mathbf{J} = J = \begin{vmatrix} \partial \xi^1 / \partial x_1 & \partial \xi^1 / \partial x_2 \\ \partial \xi^2 / \partial x_1 & \partial \xi^2 / \partial x_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\partial x_1 / \partial \xi^1 \partial x_2 / \partial \xi^2 - \partial x_1 / \partial \xi^2 \partial x_2 / \partial \xi^1} \quad (3.9)$$

Koristeći (3.6) i (3.7) dobija se:

$$\begin{bmatrix} \partial \xi^1 / \partial x_1 & \partial \xi^1 / \partial x_2 \\ \partial \xi^2 / \partial x_1 & \partial \xi^2 / \partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial \xi^1 & \partial x_1 / \partial \xi^2 \\ \partial x_2 / \partial \xi^1 & \partial x_2 / \partial \xi^2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.10)$$

odakle se numerički izračunavaju metrički koeficijenti kao:

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} = J \frac{\partial x_2}{\partial \xi^2} \quad \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} = -J \frac{\partial x_1}{\partial \xi^2} \quad \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} = -J \frac{\partial x_2}{\partial \xi^1} \quad \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} = J \frac{\partial x_1}{\partial \xi^1} \quad (3.11)$$

Svi potrebni koeficijenti i J izraženi su preko $\partial x_i / \partial \xi^j$ koji se u računskom prostoru lako izračunavaju, jer su linije $\xi^j = const$ u računskom prostoru prave.

3.4 Transformacija osnovnih jednačina

Osnovne jednačine (2.52) (2.53) i (2.62) mogu se transformisati iz fizičkog prostora u računski prostor. Primenom „lančanog“ pravila (3.3) treba zameniti sve parcijalne izvode po Dekartovim koordinatama u izvode po krivolinijskim koordinatama. Da bi izrazi bili kraći jednačine se, prema [23], daju u matricnoj formi:

$$\frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial x_2} = \frac{\partial \mathbf{F}_A^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{G}_A^*}{\partial x_2} + \mathbf{H}_A^* \quad (3.12)$$

gde su matrice kolona:

$$\mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} h \\ U_1 \\ U_2 \\ \tilde{k}_g \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} U_1 \\ \tilde{u}_1 U_1 \\ \tilde{u}_1 U_2 \\ \tilde{u}_1 \tilde{k}_g \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} U_2 \\ \tilde{u}_2 U_1 \\ \tilde{u}_2 U_2 \\ \tilde{u}_2 \tilde{k}_g \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{F}_A^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\rho [h(\tilde{\tau}_{11} + R_{11})] \\ 1/\rho [h(\tilde{\tau}_{12} + R_{12})] \\ (\nu + c_{kk} \Delta_g \sqrt{\tilde{k}_g}) \partial \tilde{k}_g / \partial x_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_A^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\rho [h(\tilde{\tau}_{21} + R_{21})] \\ 1/\rho [h(\tilde{\tau}_{22} + R_{22})] \\ (\nu + c_{kk} \Delta_g \sqrt{\tilde{k}_g}) \partial \tilde{k}_g / \partial x_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{H}_A^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \partial(z_b + h) / \partial x_1 - 1/\rho ({}^b \bar{\tau}_1 - {}^w \bar{\tau}_1) \\ -gh \partial(z_b + h) / \partial x_2 - 1/\rho ({}^b \bar{\tau}_2 - {}^w \bar{\tau}_2) \\ -\tilde{u}_t \left[2 \left(\partial \tilde{u}_1 / \partial x_1 \right)^2 + \left(\partial \tilde{u}_2 / \partial x_1 + \partial \tilde{u}_1 / \partial x_2 \right)^2 + 2 \left(\partial \tilde{u}_2 / \partial x_2 \right)^2 \right] - \\ -P_{kV} + c_\varepsilon \left(\tilde{k}_g \sqrt{\tilde{k}_g} \right) / \Delta_g \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Zbog simetričnosti matricne jednačine (3.12), prvo će se razmatrati samo leva strana (LS) jednačine, koja se sastoji od lokalnog i konvektivnog dela osnovnih jednačina.

Primenom „lančanog“ pravila (3.3) na levu stranu (LS) matrice jednačine (3.12), dobija se:

$$\frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \xi^2} = LS \quad (3.16)$$

Ako se jednačina (3.16) podeli sa J i pretpostavi da je $\partial J / \partial t = 0$, za prvi član u jednačini važi:

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E}^*}{J} \right) \quad (3.17)$$

Za drugi i treći član jednačine (3.16) dobija se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \xi^2} \right) = \\ & = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \xi^2} \right) + \left[\mathbf{F}^* \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{1}{J} \right) - \mathbf{F}^* \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{1}{J} \right) \right] + \\ & \quad + \left[\mathbf{F}^* \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{1}{J} \right) - \mathbf{F}^* \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{1}{J} \right) \right] = \\ & = \left[\frac{1}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \xi^1} + \mathbf{F}^* \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{1}{J} \right) \right] + \left[\frac{1}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \xi^2} + \mathbf{F}^* \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{1}{J} \right) \right] - \\ & \quad - \left[\mathbf{F}^* \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{1}{J} \right) + \mathbf{F}^* \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{1}{J} \right) \right] \quad (3.18) \end{aligned}$$

Izrazi u prvoj i drugoj uglastoj zagradi u (3.18) mogu se napisati kao:

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \xi^1} + \mathbf{F}^* \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{1}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\mathbf{F}^*}{J} \right) \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \xi^2} + \mathbf{F}^* \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{1}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\mathbf{F}^*}{J} \right) \quad (3.20)$$

Izraz u trećoj uglastoj zagradi u (3.18) je jednak 0, jer je:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{1}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left[\frac{1}{J} J \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi^2} \right) \right] = \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{1}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left[\frac{1}{J} J \left(-\frac{\partial x_2}{\partial \xi^1} \right) \right] = -\frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi^2 \partial \xi^1} \quad (3.22)$$

Zbog (3.19), (3.20), (3.21) i (3.22) drugi i treći član matrice jednačine (3.16) su:

$$\frac{1}{J} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \xi^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\mathbf{F}^*}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\mathbf{F}^*}{J} \right) \quad (3.23)$$

Na sličan način može se pokazati da su četvrti i peti član matrične jednačine (3.16):

$$\frac{1}{J} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \xi^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \frac{\mathbf{G}^*}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \frac{\mathbf{G}^*}{J} \right) \quad (3.24)$$

Na kraju matrična jednačina (3.16), podeljena sa J , dobija oblik:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E}^*}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left[\frac{1}{J} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \mathbf{F}^* + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \mathbf{G}^* \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left[\frac{1}{J} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \mathbf{F}^* + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \mathbf{G}^* \right) \right] = LS \quad (3.25)$$

Ako se, prema [2], uvedu kontravarijantne brzine u^j kao:

$$u^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} \bar{u}_i \quad (3.26)$$

i kontravarijantne jedinične količine kretanja U^j kao:

$$U^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} U_i \quad (3.27)$$

matrična jednačina (3.25) se može napisati u obliku:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \xi^2} = LS \quad (3.28)$$

gde su matrice:

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} h/J \\ U_1/J \\ U_2/J \\ \tilde{k}_g/J \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} U^1 \\ u^1 U_1 \\ u^1 U_2 \\ u^1 \tilde{k}_g \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{G}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} U^2 \\ u^2 U_1 \\ u^2 U_2 \\ u^2 \tilde{k}_g \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Prikazane transformacije i uvođenje kontravarijantnih brzina i jediničnih količina kretanja obezbedile su zadržavanje strukture i strogo konzervativne forme, koje su imali odgovarajući delovi početnih osnovnih jednačina.

Ista procedura koja je sprovedena za levu stranu (LS) matrične jednačine (3.12) može se sprovesti i za desnu stranu (DS). Tako se za desnu stranu dobija:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left[\frac{1}{J} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \mathbf{F}_A^* + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \mathbf{G}_A^* \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left[\frac{1}{J} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \mathbf{F}_A^* + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \mathbf{G}_A^* \right) \right] + \frac{1}{J} \mathbf{H}_A^* = DS \quad (3.30)$$

I za $\bar{\tau}_{ij}$ viskozne napone u fluidu i R_{ij} SGS turbulentne Rejnoldsove napone moguće je definisati kontravarijantne zamene kao:

$$\tau^i_j = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_l} \bar{\tau}_{lj} \quad (3.31)$$

$$R^i_j = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_l} R_{lj} \quad (3.32)$$

gde se pored indeksa i i j pojavljuje i treći indeks l koji takodje može imati vrednosti 1 i 2. Oba napona, $\bar{\tau}_{ij}$ i R_{ij} izražena su preko izvoda brzina u Dekartovom koordinatnom sistemu, zbog čega se ovi izvodi uz „lančano“ pravilo (3.3), zamenjuju odgovarajućim izvodima u računskom prostoru. Tako se iz jednačine (2.24) koja definiše viskozni napon, i „lančanog“ pravila (3.3) dobija:

$$\frac{\bar{\tau}_{ij}}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi^l} + \frac{\partial \xi^l}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \xi^l} \right) \quad (3.33)$$

a iz jednačine (2.57) i (3.3) dobija:

$$\frac{R_{ij}}{\rho} = \bar{\nu}_t \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi^l} + \frac{\partial \xi^l}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \xi^l} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \tilde{k}_g \quad (3.34)$$

Prema [4], i difuzija SGS turbulentne kinetičke energije u kontravarijantnom pravcu i može se definisati kao:

$$S^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi^n}{\partial x_l} \frac{\partial \tilde{k}_g}{\partial \xi^n} \quad (3.35)$$

gde se pojavljuje i četvrti indeks n koji može imati vrednosti 1 i 2.

I u svim elementima matrice kolona \mathbf{H}_A^* , moraju se primenom „lančanog“ pravila zameniti izvodi u Dekartovim koordinatama izvodima po krivolinijskim koordinatama. Za razliku od elemenata matrica kolona \mathbf{F}_A^* i \mathbf{G}_A^* ovi elementi se ne mogu grupisati na drugačiji način, nego svaki element ponaosob samo dobija složeniju strukturu.

Na kraju, osnovne jednačine (2.52), (2.53) i (2.62), napisane u matričnoj formi (3.12), posle transformacija iz fizičkog u računski prostor, dobijaju oblik:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_A}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}_A}{\partial \xi^2} + \bar{\mathbf{H}}_A \quad (3.36)$$

Matrice kolona na levoj strani već su definisane u (3.29), a na desnoj strani su:

$$\bar{\mathbf{F}}_A = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\rho [h(\tau_1^1 + R_1^1)] \\ 1/\rho [h(\tau_2^1 + R_2^1)] \\ \left(\nu + c_{kk} \Delta_g \sqrt{\tilde{k}_g} \right) S^1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{G}}_A = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\rho [h(\tau_1^2 + R_2^1)] \\ 1/\rho [h(\tau_2^2 + R_2^2)] \\ \left(\nu + c_{kk} \Delta_g \sqrt{\tilde{k}_g} \right) S^2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Poslednja matrica kolona $\bar{\mathbf{H}}_A$ se ne prikazuje, jer su elementi previše glomazni. Transformisane osnovne jednačine daće se u tenzorskom obliku. Tako je transformisana jednačina nepromenljivosti mase u krivolinijskim koordinatama:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{U^i}{J} \right) = 0 \quad (3.38)$$

$i = 1, 2$

osnovna jednačina održanja količine kretanja u krivolinijskim koordinatama:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_j}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{u^i U_j}{J} \right) + \frac{gh}{J} \left[\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \frac{\partial (z_b + h)}{\partial \xi^i} \right] - \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left[\frac{h(\tau_j^i + R_j^i)}{J} \right] + \frac{1}{\rho J} (b\bar{\tau}_j - w\bar{\tau}_j) = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

$i = 1, 2 \quad j = 1, 2$

i jednačina održanja SGS turbulentne kinetičke energije u krivolinijskim koordinatama:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tilde{k}_g}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{u^i \tilde{k}_g}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{\nu + c_{kk} \Delta_g \sqrt{\tilde{k}_g}}{J} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi^n}{\partial x_l} \frac{\partial \tilde{k}_g}{\partial \xi^n} \right) + \\ + \frac{\tilde{\nu}_t}{J} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi^l} + \frac{\partial \xi^l}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \xi^l} \right)^2 - c_\epsilon \frac{\tilde{k}_g \sqrt{\tilde{k}_g}}{\Delta_g J} + \frac{P_{kV}}{J} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad l = 1, 2 \quad n = 1, 2$

Transformisani sistem jednačina (3.38), (3.39) i (3.40) je sličan početnom sistemu po strukturi i formi. Jednačine nisu dobile nove članove i zadržana je strogo konzervativna forma. Ova forma, korišćena zajedno sa metodom konačnih zapremina, trebalo bi da obezbedjuje očuvanje osnovnih veličina u toku proračuna (vidi [18]). Zadržavanje iste forme i strukture značajno pomaže pri menjanju program za proračun, kako bi se umesto Dekartovih koordinata koristile krivolinijske.

U transformisanim jednačinama zadržane su iste zavisne promenljive: h , U_i i \tilde{k}_g . Sa druge strane, nezavisne promenljive x_i zamenjene su sa ξ^i . Parcijalni izvodi $\partial/\partial x_i$, prema „lančanom“ pravilu, zamenjeni su parcijalnim izvodima $\partial/\partial \xi^i$, uz korišćenje metričkih koeficijenta $\partial \xi^i/\partial x_j$, koji se izrazima (3.11) numerički izračunavaju.

Od numeričke mreže u fizičkom prostoru ne zahteva se da zadovoljava neke specijalne uslove, kao na primer uslov ortogonalnosti tj. da se linije $\xi^1 = const$ i linije $\xi^2 = const$ u fizičkom prostoru seku pod pravim uglom. To naravno ne znači da se pri generisanju numeričke mreže ne postavljaju nikakvi uslovi.

Iako transformisane osnovne jednačine ne izgledaju mnogo složenije od početnih, informacije o kompleksnosti geometrije sadržane su u metričkim koeficijentima. I dok je prostorna diskretizacija pravilne i jednolike mreže jednostavna i tačna, numerička izračunavanja Jakobijana i metričkih koeficijenata nisu jednostavna i mogu da unose značajne greške. Zato neki kritičari uvođenja krivolinijskih koordinata na ovaj način, kao u [18], kažu da su problemi koje ima ova metoda sakriveni u izračunavanju metričkih koeficijenta.

3.5 Generisanje numeričke mreže

O generisanje numeričkih mreža u oblastima strujanja složene geometrije postoji veliki broj radova. To je posledica značaja koji ovaj problem ima na proračune u dinamici fluida. Dobra literatura za ovu oblast je [45], a ovde će se dati neki detalji koji su karakteristični za problem koji se razmatra i uopšte za računarsku hidrauliku i rečnu hidrauliku.

Uticao složene geometrije oblasti strujanja u transformisanim osnovnim jednačinama, ostvaruje se preko Jakobijana i metričkih koeficijenata. Zbog toga je potrebno da se ove veličine po oblasti strujanja postepeno menjaju, bez skokova i drugih naglih promena. To nije uvek jednostavno ostvariti, jer nekada i malo pomeranje krivolinijskih koordinata u fizičkom prostoru izaziva velike promene u izračunatim Jakobijanima i metričkim koeficijentima.

Već je napomenuto da transformisane osnovne jednačine ne zahtevaju da mreža bude ortogonalna, ali uvek je bolje da, ukoliko je to moguće, linije mreže budu skoro ortogonalne. Tačnost izračunavanja konvektivnih članova povećava se, ako krivolinijske koordinate prate strujnice toka. Problem je što u toku generisanja numeričke mreže treba proceniti pravce strujanja tečenja, koje tek treba da bude izračunato.

Uobičajeno je da se numerička mreža progušćava u oblastima u kojima se promenljive intenzivnije menjaju. Pri tome se treba truditi da razlike u veličini elementarnih površina ne prelaze faktor 2.

Za generisanje numeričke mreže mogu se koristiti i mnogi komercijalni programi. U rečnoj hidraulici, gde se raspolaze sa relativno skromnim terenskim merenjima,

jednostavnije je „ručno“ generisati numeričku mrežu. Tako se izbegavaju problemi vezani za interpolaciju dubina. Najbolje je oblast strujanja podeliti na veće celine, a zatim i uz pomoć jednostavnog programa „progustiti“ numeričku mrežu na potrebnim mestima. Treba se unapred pomiriti da je postupak iterativni, dakle spor, ali da je bolje izgubiti više vremena na generisanje mreže, nego započeti proračune sa mrežom koja bitno smanjuje tačnost proračuna.

Numeričke metode

Osnovni su tri načina: 1) direktni, 2) iterativni i 3) metoda konačnih razlika. Metoda konačnih razlika (MCR) je najčešće korišćena metoda za rešavanje problema sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Metoda konačnih razlika (MCR) je najčešće korišćena metoda za rešavanje problema sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Metoda konačnih razlika (MCR) je najčešće korišćena metoda za rešavanje problema sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama.

- metoda konačnih razlika
- metoda konačnih elemenata
- metoda konačnih razlika

Metoda konačnih razlika (MCR) je najčešće korišćena metoda za rešavanje problema sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Metoda konačnih razlika (MCR) je najčešće korišćena metoda za rešavanje problema sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Metoda konačnih razlika (MCR) je najčešće korišćena metoda za rešavanje problema sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama.

Metoda konačnih razlika (MCR) je najčešće korišćena metoda za rešavanje problema sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Metoda konačnih razlika (MCR) je najčešće korišćena metoda za rešavanje problema sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Metoda konačnih razlika (MCR) je najčešće korišćena metoda za rešavanje problema sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Metoda konačnih razlika (MCR) je najčešće korišćena metoda za rešavanje problema sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama.

Metoda konačnih razlika (MCR) je najčešće korišćena metoda za rešavanje problema sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Metoda konačnih razlika (MCR) je najčešće korišćena metoda za rešavanje problema sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama.

Poglavlje 4

Numeričke metode

Osnovni zakoni mehanike fluida o održanju mase i količine kretanje, predstavljeni su preko matematičkog modela, odnosno osnovnih jednačina održanja (2.53), (2.52) i (2.62), u Dekartovim koordinatama, ili jednačina (3.38), (3.39) i (3.40), u krivolinijskim koordinatama i jednačine (2.67). Bez obzira koje se koordinate koriste, numeričkim metodama treba rešiti sistem parcijalnih, diferencijalnih jednačina. Prema načinu diskretizacije, odnosno načinu aproksimacije diferencijalnih jednačina sistemom algebarskih jednačina, razlikuju se tri glavne vrste numeričkih metoda:

- konačnih razlika;
- konačnih zapremina i
- konačnih elemenata.

U metodi konačnih razlika, oblast proračuna se pokriva numeričkom mrežom. U svakoj tački mreže parcijalni izvodi u diferencijalnim jednačinama aproksimiraju se konačnim razlikama. Tako se sistem diferencijalnih jednačina zamenjuje sistemom algebarskih jednačina. Metoda je jednostavna, ali ne obezbeđuje očuvanje (konzervaciju) veličina koje se izračunavaju.

I u metodi konačnih zapremina, preko oblasti proračuna postavlja se numerička mreža, ali se oblast deli na konačne zapremine u čijim težištima su računске tačke. Za svaku konačnu zapreminu, diferencijalne jednačine održanja se integrišu po konačnoj zapremini i kao rezultat umesto diferencijalne dobija se po jedna algebarska jednačina. Postoji i drugi pristup u kome se zakoni održanja odmah izražavaju u integralnoj formi. U oba pristupa, zapreminski integrali po konačnoj zapremini transformišu se u površinske integrale, preko Gaussove teoreme. Metoda obezbeđuje očuvanje (konzervaciju) veličina koje se izračunavaju, a jednostavna je za razumevanje i programiranje. Zbog toga je postigla veliku popularnost, posebno među inženjerima.

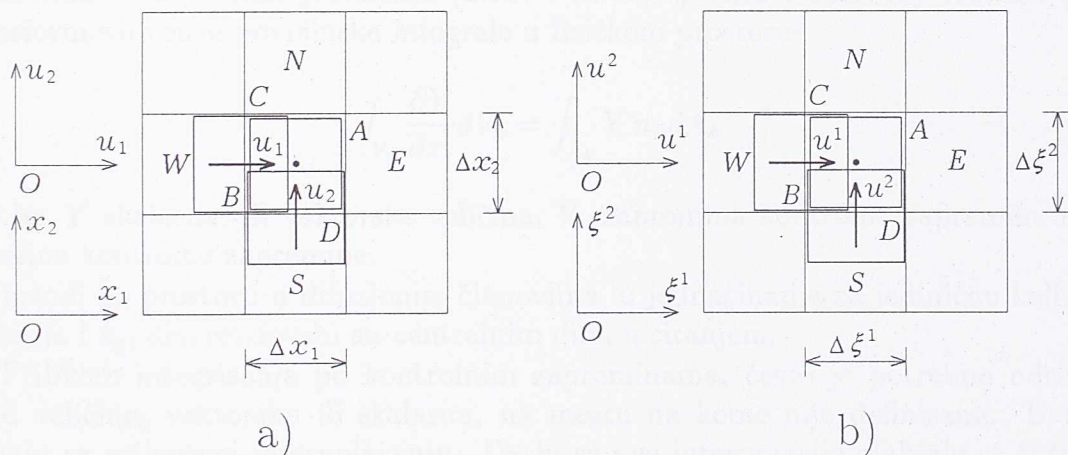
Metoda konačnih elemenata je slična metodi konačnih zapremina. Oblast proračuna se deli na konačne elemente, trougaonog i četvorougaoonog oblika u osnovi.

Za razliku od prethodne metode, pre integrisanja, osnovne jednačine se množe težinskom funkcijom. Važna prednost ove metode je lakoća predstavljanja oblasti proračuna nepravilne i složene geometrije. Sa druge strane, glavni nedostaci metode su problemi koji nastaju pri rešavanju sistema algebarskih jednačina.

U ovom radu uglavnom je korišćena metoda konačnih zapremina. Samo u jednom slučaju, pri rešavanju jednačine nivoa vode u Dekartovim koordinatama, korišćena je metoda konačnih razlika.

4.1 Prostorna diskretizacija

Bez obzira da li su osnovne jednačine u Dekartovim, ili krivolinijskim koordinatama, prostorna diskretizacija je ostvarena preko smaknutih (pomeranih) numeričkih mreža, koje su prikazane na slici 4.1. Na delu a) je numerička mreža Dekartovih koordinata u fizičkom prostoru, a na delu b) numerička mreža krivolinijskih koordinata u računskom prostoru.



Slika 4.1: Smaknuta mreža u: a) Dekartovom koordinatnom sistemu i b) krivolinijskom koordinatnom sistemu.

4.1.1 Prostorna diskretizacija u Dekartovim koordinatama

U svim slučajevima u kojima su korišćene osnovne jednačine (2.53), (2.52) i (2.62), u Dekartovim koordinatama, oblast tečenja je bila pravilna. Diskretizacija je izvršena ravnima koje su paralelne Dekartovim koordinatnim pravcima, u fizičkom prostoru. Konačne zapremine su pravilnog oblika, ali pošto se promenljive nalaze na različitim mestima, odgovarajuće kontrolne zapremine su smaknute, zbog čega se i mreža

naziva smaknutom (*staggerd grid*). U sredini konačne zapremine, na mestu gde se nalazi tačka numeričke mreže (obeleženo na slici sa \bullet), definisane su skalarne veličine: dubina vode h i *SGS* turbulentna kinetička energija osrednjena po dubini \tilde{k}_g . Brzine, kao i ostale vektorske veličine, rasporedjene su na stranama konačne zapremine (obeležene sa A , B , C i D), ali tako da se na jednoj strani nalazi samo komponenta vektorske veličine koja je normalna na tu stranu. Ovakav raspored skalarnih i vektorskih veličina olakšava održanje mase i količine kretanja.

Jednačina nivoa vode (koja će biti izvedena nešto kasnije) i jednačina za *SGS* turbulentnu kinetičku energiju osrednjenu po dubini \tilde{k}_g , diskretizovane su preko kontrolne zapremine, koja se poklapa sa konačnom zapreminom.

Za jednačine jedinične količine kretanja, kontrolne zapremine su pomerene za polovinu širine konačne zapremine, u pravcu odgovarajuće koordinatne ose: za U_1 u zapadnom pravcu i za U_2 u južnom pravcu. Položaji severne, južne, zapadne i istočne susedne numeričke tačke, obeleženi su na slici 4.1, sa N , S , W i E . Na sredini kontrolne zapremine nalazi se odgovarajuća komponenta brzine, odnosno jedinične količine kretanja.

Zapreminski integrali po kontrolnim zapreminama, u difuzionim i konvektivnim članovima, u osnovnim jednačina (2.52) i (2.62), prema Gaussovoj teoremi [22], transformisani su u površinske integrale u fizičkom prostoru:

$$\int_{V_k} \frac{\partial Y}{\partial x_i} dV_k = \int_{A_k} Y n_i dA_k \quad (4.1)$$

gde je: Y skalarna, ili vektorska veličina, V_k zapremina kontrolne zapremine i A_k površina kontrolne zapremine.

Izvodi po prostoru u difuzionim članovima, u jednačinama za jediničnu količinu kretanja i \tilde{k}_g , diskretizovani su centralnim diferenciranjem.

Prilikom integrisanja po kontrolnim zapreminama, često je potrebno odrediti neku veličinu, vektorsku ili skalarnu, na mestu na kome nije definisana. U tom slučaju se pribegava interpolovanju. Da bi se ove interpolacije olakšale, a tačnost interpolovanih veličina povećala, za neke skalarne veličine, kao što su h i \tilde{v}_t , izračunavaju se pomoćne vrednosti, koje se odnose na donji levi ugao konačne zapremine.

4.1.2 Prostorna diskretizacija u krivolinijskim koordinatama

U slučajevima kada je oblast proračuna imala nepravilan oblik, korišćene su osnovne jednačine (3.38), (3.39) i (3.40), u krivolinijskim koordinatama. Diskretizacija po prostoru je izvršena ravnima, koje su paralelene krivolinijskim koordinatnim pravcima, u računskom prostoru. Konačne zapremine su pravilnog oblika u računskom prostoru, a nepravilne u fizičkom.

Kao i kod mreže u Dekartovim koordinatama, odgovarajuće kontrolne zapremine su na isti način smaknute. Uopšte se može zaključiti, da su diskretizacije po prostoru u Dekartovim i krivolinijskim koordinatama, koje su prikazane na slici 4.1, u mnogo čemu slične. Konačne zapremine, imaju umesto dimenzija Δx_1 i Δx_2 dimenzije $\Delta \xi^1$ i $\Delta \xi^2$, a na stranicama konačnih zapremina umesto brzina u_1 i u_2 su kontravarijantne brzine u^1 i u^2 . Ipak postoje i razlike, od kojih je najvažnija vezana za broj Dekartovih komponenti vektorskih veličina, koje se izračunavaju na stranicama konačne zapremine. Naime, pri prostornoj diskretizaciji sa Dekartovim koordinatama, na svakoj strani konačne zapremine potrebna je samo jedna komponenta vektorske veličine, koja je normalna na stranu, na kojoj se nalazi. U slučaju kada se koriste krivolinijske koordinate, na stranama konačne zapremine u računskom prostoru, potrebno je definisati kontravarijantnu komponentu vektorske veličine, koja je normalna na stranu, na kojoj se nalazi. Kontravarijante komponente vektorskih veličina se izračunavaju prema jednačinama (3.26) i (3.27), zbog čega je potrebno da se na jednom mestu raspolaže sa obe Dekartove komponente vektorske veličine. Ako se jedna komponenta vektorske veličine izračunava, a druga interpoluje na osnovu susednih vrednosti, rezultati proračuna zavise od položaja oblasti proračuna u horizontalnoj ravni, odnosno proračun nije tačan. Zbog toga se može zaključiti, da se pri korišćenju krivolinijskih koordinata, na svakoj strani konačne zapremine, moraju izračunati obe Dekartove komponente vektorskih veličina.

Izračunavanje obe komponente vektorskih veličina, zbog eksplicitne metode koja se koristi, neznatno produžuje vreme trajanja proračuna, ali se zato za vektorske veličine koristi dvostruko više memorije računara, što je cena koja se mora platiti.

Zapreminski integrali po kontrolnim zapreminama, u difuzionim i konvektivnim članovima, transformišu se u površinske integrale, preko jednačine (4.1), isto kao i u Dekartovim koordinatama, sa razlikom da se integracija obavlja u računskom prostoru.

Kao i kod Dekartovih koordinata, izvodi u difuzionim članovima u jednačinama sa krivolinijskim koordinatama za jediničnu količinu kretanja i \tilde{k}_g , diskretizovani su centralnim diferenciranjem.

Prilikom prikazivanja rezultata proračuna, u krivolinijskim koordinatama, sve veličine se vezuju za tačku numeričke mreže, koja se nalazi u težištu konačne zapremine. Komponente vektorskih veličina u ovoj tački, izračunavaju se kao srednje vrednosti odgovarajućih komponenti, koje su definisane na stranama konačne zapremine. Skalarane vrednosti su i ranije bile definisane u težištu konačne zapremine.

Da bi se povećala tačnost proračuna sa krivolinijskim koordinatama, metrički koeficijenti $\partial \xi^i / \partial x_j$ i J , izračunati su prema jednačinama (3.11) i (3.9), za svaku tačku numeričke mreže i levi donji ugao konačne zapremine.

4.1.3 Prostorna diskretizacija konvektivnih članova

Zbog uticaja koji imaju na rešenja osnovnih jednačina i zahteva da se smanji numerička difuzija, konvektivnim članovima je posvećena posebna pažnja. Isti postupak je primenjen nad članovima u jednačinama u Dekartovim i krivolinijskim koordinatama.

Za konvektivne članove u jednačinama količine kretanja, korišćena je vrlo poznata interpolaciona šema *QUICK* (*quadratic upstream weighted interpolation scheme* - kvadratna, uzvodna, interpolaciona šema) [37]. Prednosti ove šeme su visoka tačnost i relativna jednostavnost.

Kod izračunavanja konvektivnih članova u jednačinama za *SGS* turbulentnu kinetičku energiju osrednjenu po dubini, *QUICK* šema je prouzrokovala numeričko „podrhtavanje“ i negativne vrednosti za \tilde{k}_g , što je prekidalo proračun. Problem je rešen korišćenjem šeme *QUICK-FRAM* (*Filtering Remedy and Methodology*) [9], [37]. Ova varijanta *QUICK* šeme, na mestima gde bi se moglo javiti numeričko podrhtavanje, koristi lokalno šemu *upstream*, prvog stepena tačnosti.

4.2 Vremenska diskretizacija - metoda razdvajanja operatora

U proračunima, u kojima su nepoznate veličine promenljive i po vremenu, jedan od najvećih problema je određivanje vremenskog koraka. Da bi proračun trajao što kraće, vremenski korak treba da bude što duži, ali je istovremeno neophodno očuvati i numeričku stabilnost proračuna. Zato se jednačine, koje se numerički rešavaju posebno analiziraju. Osnovne jednačine održanja (2.53), (2.52) i (2.62), u Dekartovim koordinatama, i jednačine (3.38), (3.39) i (3.40), u krivolinijskim koordinatama, su nelinearne i isuviše kompleksne, da bi se jednostavno analizirala njihova numerička stabilnost. Zbog toga se numerička stabilnost ispituje na jednostavnijim jednačinama, koje opisuju pojedine aspekte tečenja.

Konvektivni članovi u jednačinama su definisani hiperboličnim operatorom, koji u konzervativnoj formi, korišćenoj u ovom radu, imaju oblik:

$$\frac{\partial(u_j Y)}{\partial x_j}$$

gde je Y skalarna, ili vektorska veličina. Ako se konvektivni članovi rešavaju eksplisitnom šemom, mora biti zadovoljen Courant-Friedrich-Lewyev uslov stabilnosti:

$$\Delta t < \min \left(\frac{\Delta x_1}{|u_1|}, \frac{\Delta x_2}{|u_2|} \right) \quad (4.2)$$

Difuzioni članovi u jednačinama definisani su paraboličnim operatorom oblika:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_Y \frac{\partial Y}{\partial x_j} \right)$$

gde je ν_Y difuzioni koeficijent za Y . Ako se svi pravci posmatraju odvojeno, prema [41], da bi se ostvarila stabilnost proračuna, vremenski korak mora biti manji od:

$$\Delta t < \min \left(\frac{\Delta x_1 \Delta x_1}{2 \nu_Y}, \frac{\Delta x_2 \Delta x_2}{2 \nu_Y} \right) \quad (4.3)$$

Ograničenje vremenskog koraka zbog površinskih gravitacionih talasa je:

$$\Delta t < \min \left(\frac{\Delta x_1}{\sqrt{g h}}, \frac{\Delta x_2}{\sqrt{g h}} \right) \quad (4.4)$$

gde je $\sqrt{g h}$ brzina propagacije površinskih gravitacionih talasa.

Po pravilu poslednji uslov je najrestriktivniji, zbog čega se članovi koji se odnose na gravitacione talase rešavaju implicitnim metodama. Ostali uslovi stabilnosti nisu tako strogi i odgovarajući članovi jednačina mogu se rešavati eksplicitnim metodama.

Metoda primenjena u ovom radu spada u veliku klasu metoda sa razdvajanjem operatora (*operator splitting method*), ili metoda razlomljenih koraka (*fractional steps method*). U oblasti hidraulike, ove metode su koristili uglavnom francuski istraživači iz EDF-a [5]. Osnova za primenjenu metodu data je u referencama: [10], [21] i [25].

Ideja o razdvajanja operatora zasniva se na Helmholtzovoj dekompozicionoj teoremi [21]: "Svako vektorsko polje P može biti na jedinstven način dekomponovano na solenoidalni deo P_{sol} ($div P_{sol} = 0$) i irrotacionalni deo P_{irr} ($rot P_{irr} = 0$), ako je normalna komponenta od P_{sol} na granici jednaka 0."

Napredovanje po vremenu odvija se u dva dela vremenskog koraka, tako što se u svakom delu primenjuje najpogodnija numerička metoda. Lokalni izvod jedinične količine kretanja, u osnovnim jednačinama u Dekartovim koordinatama, na osnovu pretpostavljene linearnosti, deli se na dva dela:

$$\frac{\partial (h \bar{u}_j)}{\partial t} \approx \left(\frac{{}^{n+1}U_j - {}^*U_j}{\Delta t} \right)_{II deo} + \left(\frac{{}^*U_j - {}^nU_j}{\Delta t} \right)_{I deo} \quad (4.5)$$

$j = 1, 2$

gde oznaka n , napisana ispred promenljive, označava „poznati“, ${}^{n+1}$ „nepoznati“, susedni vremenski trenutak, a * označava pomoćne vrednosti. Lokalni izvod SGS turbulentne kinetičke energije, osrednjene po dubini, u jednačinama u Dekartovim koordinatama, napreduje po vremenu korakom od jednog dela:

$$\frac{\partial \tilde{k}_g}{\partial t} \approx \frac{{}^{n+1}\tilde{k}_g - {}^n\tilde{k}_g}{\Delta t} \quad (4.6)$$

U jednačinama sa krivolinijskim koordinatama, lokalni izvod jedinične količine kretanja je:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_j}{J} \right) \approx \left(\frac{{}^{n+1}U_j - {}^*U_j}{\Delta t J} \right)_{II\ deo} + \left(\frac{{}^*U_j - {}^nU_j}{\Delta t J} \right)_{I\ deo} \quad (4.7)$$

$$j = 1, 2$$

Kao i u Dekartovim koordinatama, lokalni izvod *SGS* turbulentne kinetičke energije, osrednjene po dubini, u krivolinijskim koordinatama napreduje po vremenu korakom od jednog dela:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tilde{k}_g}{J} \right) \approx \frac{{}^{n+1}\tilde{k}_g - {}^n\tilde{k}_g}{\Delta t J} \quad (4.8)$$

4.2.1 Konvekcija i difuzija

Konvekcija i difuzija u Dekartovim koordinatama

U prvom delu vremenskog koraka, za konvektivne i difuzione članove, koristi se jednostavna eksplicitna metoda Adams-Bashfortha [17]:

$$\frac{{}^*U_j - {}^nU_j}{\Delta t} = \frac{3}{2} {}^n f_j - \frac{1}{2} {}^{n-1} f_j \quad (4.9)$$

$$j = 1, 2$$

$$\frac{{}^{n+1}\tilde{k}_g - {}^n\tilde{k}_g}{\Delta t} = \frac{3}{2} {}^n f_k - \frac{1}{2} {}^{n-1} f_k \quad (4.10)$$

gde ${}^{n-1}$ označava „prethodni poznati“ vremenski trenutak, pre „poznatog“ trenutka n , a desne strane jednačina su definisane kao:

$${}^n f_j = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left({}^n \tilde{u}_i {}^n U_j \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[h \left({}^n \tilde{\tau}_{ij} + {}^n R_{ij} \right) \right] - \frac{1}{\rho} \left[{}^n ({}^b \tilde{\tau}_j) - {}^n ({}^w \tilde{\tau}_j) \right] \quad (4.11)$$

$${}^n f_k = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left({}^n \tilde{u}_i {}^n \tilde{k}_g \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + c_{kk} \Delta_g \sqrt{{}^n \tilde{k}_g} \right) \frac{\partial {}^n \tilde{k}_g}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{2} {}^n \tilde{\nu}_t \left(\frac{\partial {}^n \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial {}^n \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 - c_\epsilon \frac{{}^n \tilde{k}_g \sqrt{{}^n \tilde{k}_g}}{\Delta_g} + {}^n P_{kV} \quad (4.12)$$

$$i = 1, 2 \quad j = 1, 2$$

U jednačinama količine kretanja, uključuju se svi konvektivni i difuzioni članovi, kao i smičući naponi od vetra i otpora dna, a u jednačinama za \tilde{k}_g uključuju se svi članovi.

Konvekcija i difuzija u krivolinijskim koordinatama

U jednačinama sa krivolinijskim koordinatama, u prvom delu vremenskog koraka, takodje se koristi eksplicitna metoda Adams-Bashfortha:

$$\frac{{}^*U_j - {}^nU_j}{\Delta t J} = \frac{3}{2} {}^nf_j - \frac{1}{2} {}^{n-1}f_j \quad (4.13)$$

$$j = 1, 2$$

$$\frac{{}^{n+1}\tilde{k}_g - {}^n\tilde{k}_g}{\Delta t J} = \frac{3}{2} {}^nf_k - \frac{1}{2} {}^{n-1}f_k \quad (4.14)$$

sa istim oznakama vremenskih trenutaka, a desne strane jednačina su definisane kao:

$${}^nf_j = -\frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{{}^nu^i {}^nU_j}{J} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left[\frac{h({}^n\tau_j^i + {}^nR_j^i)}{J} \right] -$$

$$-\frac{1}{\rho J} [{}^n({}^b\bar{\tau}_j) - {}^n({}^w\bar{\tau}_j)] \quad (4.15)$$

$${}^nf_k = -\frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{{}^nu^i {}^n\tilde{k}_g}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{\nu + c_{kk} \Delta_g \sqrt{{}^n\tilde{k}_g}}{J} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi^n}{\partial x_l} \frac{\partial {}^n\tilde{k}_g}{\partial \xi^n} \right) +$$

$$+\frac{1}{2} {}^n\tilde{\nu}_t \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x_j} \frac{\partial {}^n\tilde{u}_i}{\partial \xi^l} + \frac{\partial \xi^l}{\partial x_i} \frac{\partial {}^n\tilde{u}_j}{\partial \xi^l} \right)^2 - c_\epsilon \frac{{}^n\tilde{k}_g \sqrt{{}^n\tilde{k}_g}}{\Delta_g J} + \frac{{}^nP_{kV}}{J} \quad (4.16)$$

$$i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad l = 1, 2 \quad n = 1, 2$$

Sa f_j i f_k obuhvaćeni su isti članovi kao i kod jednačina u Dekartovim koordinatama.

Dodavanje stohastičkih komponenti jediničnim količinama kretanja

U delu 2.2.4 objašnjeno je kako se turbulentnim promenljivim mogu dodati stohastičke komponente, kako bi se karakter izračunatih turbulentnih veličina približio merenjima iz prirode. Za dodavanje stohastičkih komponenti jediničnim količinama kretanja predložena je jednačina (2.67), ali nije određeno kada je treba primeniti. Podela unutar jednog vremenskog koraka, koja postoji u metodi razdvajanja operatora, vrlo je pogodna za dodavanje stohastičkih komponenti. Po završetku prvog dela vremenskog koraka, u kome se eksplicitnom metodom izračunavaju *U_i , treba korigovati dobijene vrednosti primenom sledeće jednačine:

$${}^r{}^*U_i = {}^*U_i[1 + f(0.5 - \epsilon)] \quad (4.17)$$

$$i = 1, 2$$

gde je: ${}^r{}^*U_i$ pomoćna vrednost jedinične količine kretanja izračunata u prvom delu vremenskog koraka, sa stohastičkim karakterom, u pravcu i , a ostale veličine su iste kao u jednačini (2.67). Jednačina (4.17) je važan deo matematičkog modela, jer se dodavanjem stohastičkih komponenti turbulentnim promenljivim pobudjuje stvaranje vrtloga u izračunatom polju brzina.

4.2.2 Jednačina nivoa vode

Jednačina nivoa vode u Dekartovim koordinatama

U drugom delu vremenskog koraka kombinuju se preostali članovi jednačina količine kretanja i jednačine nepromenljivosti mase (2.53) :

$$\frac{{}^{n+1}U_j - {}^*U_j}{\Delta t} = -g h \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_j} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (4.19)$$

$$j = 1, 2$$

Jednačina nepromenljivosti mase (4.19) diskretizuje se sa centralnim diferenciranjem u vremenu, po metodi Crank-Nicolsona [8]:

$$\frac{{}^{n+1}h - {}^nh}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^{n+1}U_j}{\partial x_j} + \frac{\partial {}^nU_j}{\partial x_j} \right) \quad (4.20)$$

Jednačina (4.18), parcijalno diferencirana po x_j , daje:

$$\frac{\partial {}^{n+1}U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial {}^*U_j}{\partial x_j} - g h \Delta t \frac{\partial^2(z_b + h)}{\partial x_j \partial x_j} - g \frac{\partial h}{\partial x_j} \Delta t \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_j} \quad (4.21)$$

Kombinovanjem jednačina (4.20) i (4.21) dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{{}^{n+1}h - {}^nh}{\Delta t} = & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^*U_j}{\partial x_j} - g h \Delta t \frac{\partial^2(z_b + h)}{\partial x_j \partial x_j} - \right. \\ & \left. - g \frac{\partial h}{\partial x_j} \Delta t \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_j} + \frac{\partial {}^nU_j}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

što posle preuredjenja postaje:

$$\begin{aligned} \frac{{}^{n+1}h - {}^nh}{\Delta t} - \frac{1}{2} g \Delta t \left(h \frac{\partial^2(z_b + h)}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_j} \right) = \\ = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^*U_j}{\partial x_j} + \frac{\partial {}^nU_j}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$j = 1, 2$$

Ista jednačina napisana bez tenzorskog obeležavanja je:

$$\begin{aligned} \frac{{}^{n+1}h - {}^nh}{\Delta t} - \frac{1}{2} g \Delta t \left[h \left(\frac{\partial^2(z_b + h)}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2(z_b + h)}{\partial x_2 \partial x_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x_2} \right] = \\ = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^*U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial {}^*U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial {}^nU_1}{\partial x_1} + \frac{\partial {}^nU_2}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Da bi se jednačine pojednostavile uvodi se nivo slobodne površine vode Π , definisan kao:

$$\Pi = z_b + h \quad (4.25)$$

Jednačina (4.24), uz uvođenje Π , može se napisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\Pi - \frac{g \Delta t \Delta t}{2} \left[h \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2 \partial x_2} \right) + \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \right] = - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial {}^*U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial {}^*U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial {}^*U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial {}^*U_2}{\partial x_2} \right) + {}^n\Pi \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dobijena je jednačina nivoa vode u Dekartovim koordinatama. To je nelinearna, parcijalna, eliptična, diferencijalna jednačina, Poissonovog tipa. Kako je to bilo napomenuto ranije, zbog postojanja gravitacionih talasa i ograničenja vremenskog koraka (4.4), za rešavanje jednačine nivoa vode, treba koristiti implicitne numeričke metode.

Samo za jednačinu nivoa vode u Dekartovim koordinatama (4.26), u ovom radu je primenjena metoda konačnih razlika. Ako se izvodi po x_i , zavisnih promenljivih Π i h , odredjuju na osnovu vremenskog trenutka ${}^{n+1}$, iz jednačine (4.26) dobija se:

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\Pi - \frac{g \Delta t \Delta t}{2} \left[{}^{n+1}h \left(\frac{\partial^2 {}^{n+1}\Pi}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 {}^{n+1}\Pi}{\partial x_2 \partial x_2} \right) + \frac{\partial {}^{n+1}h}{\partial x_1} \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + \frac{\partial {}^{n+1}h}{\partial x_2} \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial x_2} \right] = - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial {}^*U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial {}^*U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial {}^nU_1}{\partial x_1} + \frac{\partial {}^nU_2}{\partial x_2} \right) + {}^n\Pi \end{aligned} \quad (4.27)$$

Parcijalni izvodi od Y , prema [8], mogu se zameniti konačnim razlikama kao:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_1} \approx \frac{Y(I)_E - Y(I)_W}{2 \Delta x_1} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x_2} \approx \frac{Y(I)_N - Y(I)_S}{2 \Delta x_2} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1 \partial x_1} \approx \frac{Y(I)_E - 2Y(I) + Y(I)_W}{\Delta x_1 \Delta x_1} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2 \partial x_2} \approx \frac{Y(I)_N - 2Y(I) + Y(I)_S}{\Delta x_2 \Delta x_2} \quad (4.31)$$

gde je: Y visina vode Π , ili dubina h , I indeks tačke računске mreže, a oznake E, W, N i S , prema slici 4.1, označavaju računске tačke u pravcu istoka, zapada, severa i juga.

Laplaceov operator primenjen na Y , definisan je kao:

$$\begin{aligned} \nabla^2 Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2 \partial x_2} \approx -Y(I) \left(\frac{2}{\Delta x_1 \Delta x_1} + \frac{2}{\Delta x_2 \Delta x_2} \right) + \\ + \frac{Y(I)_E}{\Delta x_1 \Delta x_1} + \frac{Y(I)_W}{\Delta x_1 \Delta x_1} + \frac{Y(I)_N}{\Delta x_2 \Delta x_2} + \frac{Y(I)_S}{\Delta x_2 \Delta x_2} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Posle zamene parcijalnih izvoda konačnim razlikama, i prebacivanja svih članova iz vremenskog trenutka $^{n+1}$ na levu stranu, jednačina nivoa vode (4.27) daje:

$$\begin{aligned} & ^{n+1}\Pi(I)_E \left(\frac{g \Delta t \ ^{n+1}h(I)}{\Delta x_1 \Delta x_1} + \frac{\partial \ ^{n+1}h}{\partial x_1} \frac{g \Delta t}{2 \Delta x_1} \right) + \\ & + \ ^{n+1}\Pi(I)_W \left(\frac{g \Delta t \ ^{n+1}h(I)}{\Delta x_1 \Delta x_1} - \frac{\partial \ ^{n+1}h}{\partial x_1} \frac{g \Delta t}{2 \Delta x_1} \right) + \\ & + \ ^{n+1}\Pi(I)_N \left(\frac{g \Delta t \ ^{n+1}h(I)}{\Delta x_2 \Delta x_2} + \frac{\partial \ ^{n+1}h}{\partial x_2} \frac{g \Delta t}{2 \Delta x_2} \right) + \\ & + \ ^{n+1}\Pi(I)_S \left(\frac{g \Delta t \ ^{n+1}h(I)}{\Delta x_2 \Delta x_2} - \frac{\partial \ ^{n+1}h}{\partial x_2} \frac{g \Delta t}{2 \Delta x_2} \right) + \\ & + 2 \ ^{n+1}\Pi(I) \left(-\frac{1}{\Delta t} - \frac{g \Delta t \ ^{n+1}h(I)}{\Delta x_1 \Delta x_1} - \frac{g \Delta t \ ^{n+1}h(I)}{\Delta x_2 \Delta x_2} \right) = \\ & = \left(\frac{\partial \ ^n U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \ ^n U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \ ^n U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \ ^n U_2}{\partial x_2} \right) - \frac{2 \ ^n \Pi(I)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$I = 1, NMAX$

gde je $NMAX$ broj računskih tačaka na koji je podeljena oblast obuhvaćena proračunom. Jednačina (4.33) je nelinearna, algebarska jednačina, jer se nepoznate $^{n+1}\Pi(I)$ nalaze i u promenljivim $^{n+1}h(I)$.

Jednačina nivoa vode u krivolinijskim koordinatama

Ako se jednačina (4.25) diferencira po vremenu, uz pretpostavku da je korito vodotoka nepokretno, lokalni izvod nivoa slobodne površine je:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.34)$$

Jednačina nepromenljivosti mase u krivolinijskim koordinatama (3.38), uz zamenu lokalnih izvoda dubine vode h sa lokalnim izvodima nivoa vode Π prema (4.34), diskretizuje se centralnim diferenciranjem u vremenu, slično kao i u jednačinama u

Dekartovim koordinatama, prema [8], kao:

$$\frac{1}{\Delta t} \frac{{}^{n+1}\Pi - {}^n\Pi}{J} = -\theta \left[\frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{{}^{n+1}U^i}{J} \right) \right] - (1-\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{{}^nU^i}{J} \right) \right] \quad (4.35)$$

$i = 1, 2$

gde je θ koeficijent ponderacije po vremenu (po metodi Crank-Nicolsona $\theta = 1/2$).

Preostali deo, jednačine održanja količine kretanja u krivolinijskim koordinatama (3.39), uz pretpostavku da su h i izvodi od Π iz ${}^{n+1}$ trenutka vremena, daje:

$$\frac{{}^{n+1}U_j - {}^*U_j}{\Delta t J} = -\frac{1}{J} g^{n+1} h \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^i} \right) \quad (4.36)$$

$i = 1, 2 \quad j = 1, 2$

Iz jednačina (4.36) i definicije kontravarijantne, jedinične količine kretanje (3.27), mogu se napisati komponente kontravarijantnih, jediničnih količina kretanja, normalizovanih sa J , kao:

$$\begin{aligned} \frac{{}^{n+1}U^1}{J} &= \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{{}^*U_1}{J} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \frac{{}^*U_2}{J} - \frac{g^{n+1} h \Delta t}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^2} \right) - \frac{g^{n+1} h \Delta t}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^2} \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{{}^{n+1}U^2}{J} &= \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{{}^*U_1}{J} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \frac{{}^*U_2}{J} - \frac{g^{n+1} h \Delta t}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^2} \right) - \frac{g^{n+1} h \Delta t}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^2} \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Drugačijim grupisanjem članova u jednačinama (4.37) i (4.38) komponente normalizovanih, kontravarijantnih, jediničnih količina kretanja, mogu se napisati kao:

$$\begin{aligned} \frac{{}^{n+1}U^1}{J} &= \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{{}^*U_1}{J} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \frac{{}^*U_2}{J} + \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^1} \left[-\frac{g^{n+1} h \Delta t}{J} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^2} \left[-\frac{g^{n+1} h \Delta t}{J} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{{}^{n+1}U^2}{J} &= \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{{}^*U_1}{J} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \frac{{}^*U_2}{J} + \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^1} \left[-\frac{g^{n+1} h \Delta t}{J} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^2} \left[-\frac{g^{n+1} h \Delta t}{J} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

Za članove jednačina (4.39) i (4.40), u kojima se pojavljuju jedinične količine kretanja *U_i , mogu se uvesti smene:

$${}^{n+1}a = \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{{}^*U_1}{J} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \frac{{}^*U_2}{J} \quad (4.41)$$

$${}^{n+1}d = \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{*U_1}{J} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \frac{*U_2}{J} \quad (4.42)$$

Veličine a i d predstavljaju normalizovane, kontravarijantne, jedinične količine kretanja, koje protiču kroz strane konačne zapremine, a posledica su brzina izračunatih u prvom delu vremenskog koraka. U svakom vremenskom trenutku ove veličine se moraju ponovo izračunavati.

I ostali članovi jednačina (4.39) i (4.40), mogu se zameniti prema:

$$b = -\frac{g \Delta t}{J} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \right) \quad (4.43)$$

$$e = -\frac{g \Delta t}{J} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \right) \quad (4.44)$$

$$c = -\frac{g \Delta t}{J} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \right) \quad (4.45)$$

$$f = -\frac{g \Delta t}{J} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} \right) \quad (4.46)$$

Veličine b , e , c i f predstavljaju uticaj zakrivljenosti numeričke mreže u fizičkom prostoru, na drugi deo normalizovanih, kontravarijantnih, jediničnih količina kretanja, koje su posledica razlika nivoa slobodne površine vode. Pošto zavise od metričkih koeficijenta $\partial \xi^i / \partial x_j$, ove veličine se izračunavaju samo jednom, na početku proračuna.

Sa uvedenim smenama od (4.41) do (4.46), komponente normalizovanih, kontravarijantnih, jediničnih količina kretanja se mogu napisati u jednostavnijem obliku:

$$\frac{{}^{n+1}U^1}{J} = {}^{n+1}a + b {}^{n+1}h \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^1} + c {}^{n+1}h \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^2} \quad (4.47)$$

$$\frac{{}^{n+1}U^2}{J} = {}^{n+1}d + e {}^{n+1}h \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^1} + f {}^{n+1}h \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^2} \quad (4.48)$$

Ako se u jednačini nepromenljivosti mase (4.35) komponente normalizovanih, kontravarijantnih, jediničnih, količina kretanja izraze preko (4.47) i (4.48), dobija se jednačina nivoa vode u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{{}^{n+1}\Pi - {}^n\Pi}{\Delta t J} = & -\theta \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left({}^{n+1}a + b {}^{n+1}h \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^1} + c {}^{n+1}h \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left({}^{n+1}d + e {}^{n+1}h \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^1} + f {}^{n+1}h \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^2} \right) \right] - \\ & - (1 - \theta) \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left({}^na + b {}^nh \frac{\partial {}^n\Pi}{\partial \xi^1} + c {}^nh \frac{\partial {}^n\Pi}{\partial \xi^2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \xi^2} \left({}^n d + e {}^n h \frac{\partial {}^n \Pi}{\partial \xi^1} + f {}^n h \frac{\partial {}^n \Pi}{\partial \xi^2} \right) \Big] \quad (4.49)$$

Članovi jednačine (4.49) u poslednjoj uglastoj zagradi, predstavljaju promenu nivoa vode u jedinici vremena, podeljenu sa J , u vremenskom trenutku n i mogu se posebno izdvojiti kao:

$$\begin{aligned} {}^n \mathcal{A} = & \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left({}^n a + b {}^n h \frac{\partial {}^n \Pi}{\partial \xi^1} + c {}^n h \frac{\partial {}^n \Pi}{\partial \xi^2} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left({}^n d + e {}^n h \frac{\partial {}^n \Pi}{\partial \xi^1} + f {}^n h \frac{\partial {}^n \Pi}{\partial \xi^2} \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Uz novu veličinu \mathcal{A} , jednačina nivoa vode postaje:

$$\frac{{}^{n+1} \Pi - {}^n \Pi}{\Delta t J} = -\theta {}^{n+1} \mathcal{A} - (1 - \theta) {}^n \mathcal{A} \quad (4.51)$$

odakle se lako izračunava ${}^{n+1} \mathcal{A}$ kao:

$${}^{n+1} \mathcal{A} = \frac{{}^n \Pi - {}^{n+1} \Pi}{\Delta t J \theta} - \frac{1 - \theta}{\theta} {}^n \mathcal{A} \quad (4.52)$$

Ako se pretpostavi, da u početnom vremenskom trenutku voda miruje sa horizontalnim nivoima slobodne površine, onda se, prema jednačini (4.50), za promenu nivoa vode u početnom trenutku vremena mora dobiti:

$${}^n \mathcal{A}_{t=0} = 0 \quad (4.53)$$

Po završenom vremenskom koraku ${}^{n+1}$, pošto se izračunaju ${}^{n+1} \Pi$, jednačinom (4.52), u svakoj tački numeričke mreže određuju se ${}^{n+1} \mathcal{A}$, koje u narednom vremenskom trenutku postaje ${}^n \mathcal{A}$.

Na kraju, konačni oblik jednačine nivoa vode u krivolinijskim koordinatama je:

$$\begin{aligned} \frac{{}^{n+1} \Pi - {}^n \Pi}{\Delta t J} = & -\theta \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left({}^{n+1} a + b {}^{n+1} h \frac{\partial {}^{n+1} \Pi}{\partial \xi^1} + c {}^{n+1} h \frac{\partial {}^{n+1} \Pi}{\partial \xi^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left({}^{n+1} d + e {}^{n+1} h \frac{\partial {}^{n+1} \Pi}{\partial \xi^1} + f {}^{n+1} h \frac{\partial {}^{n+1} \Pi}{\partial \xi^2} \right) \right] - (1 - \theta) {}^n \mathcal{A} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Kao i jednačina nivoa vode u Dekartovim koordinatama (4.26), i ovo je nelinearna, parcijalna, eliptična, diferencijalna jednačina, Poissonovog tipa. U njoj se, pored parcijalnih izvoda drugog reda po jednoj koordinati, pojavljuju i mešoviti parcijalni izvodi drugog reda u obliku $\partial^2 / \partial \xi^1 \partial \xi^2$. Zbog postojanja gravitacionih talasa i ograničenja vremenskog koraka (4.4), i za rešavanje ove jednačine, treba koristiti implicitne numeričke metode.

Za numeričko rešavanje jednačine nivoa vode u krivolinijskim koordinatama (4.54), korišćena je metoda konačnih zapremina. Članovi jednačine u kojima se pojavljuju parcijalni izvodi po računskom prostoru, integrisani su po konačnoj zapremini, u računskom prostoru. Tako su prema Gaussovoj teoremi (4.1), zapreminski integrali transformisani u površinske. Konačni oblik jednačine nivoa vode, u obliku algebarske jednačine, dat je kao:

$$\begin{aligned}
\frac{{}^{n+1}\Pi - {}^n\Pi}{\Delta t J} = & -\theta \left[\frac{1}{\Delta \xi^1} \left({}^{n+1}a_A + b_A {}^{n+1}h_A \frac{{}^{n+1}\Pi(I)_E - {}^{n+1}\Pi(I)}{\Delta \xi^1} + \right. \right. \\
& + c_A {}^{n+1}h_A \frac{{}^{n+1}\Pi(I)_N + {}^{n+1}\Pi(I)_{EN} - {}^{n+1}\Pi(I)_S - {}^{n+1}\Pi(I)_{ES}}{4 \Delta \xi^2} - \\
& \quad \left. - {}^{n+1}a_B - b_B {}^{n+1}h_B \frac{{}^{n+1}\Pi(I) - {}^{n+1}\Pi(I)_W}{\Delta \xi^1} - \right. \\
& \left. - c_B {}^{n+1}h_B \frac{{}^{n+1}\Pi(I)_{WN} + {}^{n+1}\Pi(I)_N - {}^{n+1}\Pi(I)_{WS} - {}^{n+1}\Pi(I)_S}{4 \Delta \xi^2} \right) + \\
& \quad + \frac{1}{\Delta \xi^2} \left({}^{n+1}d_C + f_C {}^{n+1}h_C \frac{{}^{n+1}\Pi(I)_N - {}^{n+1}\Pi(I)}{\Delta \xi^2} + \right. \\
& + e_C {}^{n+1}h_C \frac{{}^{n+1}\Pi(I)_{EN} + {}^{n+1}\Pi(I)_E - {}^{n+1}\Pi(I)_{WN} - {}^{n+1}\Pi(I)_W}{4 \Delta \xi^1} - \\
& \quad \left. - {}^{n+1}d_D - f_D {}^{n+1}h_D \frac{{}^{n+1}\Pi(I) - {}^{n+1}\Pi(I)_S}{\Delta \xi^2} - \right. \\
& \left. - e_D {}^{n+1}h_D \frac{{}^{n+1}\Pi(I)_E + {}^{n+1}\Pi(I)_{ES} - {}^{n+1}\Pi(I)_W - {}^{n+1}\Pi(I)_{WS}}{4 \Delta \xi^1} \right) \right] - \\
& \quad - (1 - \theta) \mathcal{A} \quad (4.55) \\
& \quad I = 1, NMAX
\end{aligned}$$

Broj jednačina u sistemu jednak je broju konačnih zapremina $NMAX$. Kao i u slučaju jednačine nivoa vode u Dekartovim koordinatama, i ove algebarske jednačine su nelinearne.

Rešavanje sistema nelinearnih jednačina

Parcijalne, diferencijalne jednačine nivoa vode, u Dekartovim i krivolinijskim koordinatama, na kraju se svode na medjusobno slične sisteme nelinearnih, algebarskih jednačina (4.33) i (4.55). Za rešavanje ovakvih sistema mogu se koristiti različite numeričke metode. Neke od njih su direktne, a druge su aproksimativne. U ovom radu korišćena je metoda sukcesivne nadrelaksacije po jednom pravcu (*SLOR successive line overrelaxation*) [17], koja koristi oba pristupa. Izabrano je da se pravac ($E - W$) (x_1 pravac u fizičkom prostoru, ili ξ^1 pravac u računskom prostoru) tretira

direktno. Iskustva stečena na proračunima za verifikaciju matematičkog modela, pokazala su da izbor pravca koji se tretira direktno nije bitan.

Ako se pravac x_1 ($E - W$) tretira implicitno, sistem algebarskih jednačina (4.33) postaje:

$$\begin{aligned}
& {}^{n+1}\Pi(I)_W \left(\frac{g \Delta t {}^{n+1}h(I)}{\Delta x_1 \Delta x_1} - \frac{\partial {}^{n+1}h}{\partial x_1} \frac{g \Delta t}{2 \Delta x_1} \right) + \\
& + 2 {}^{n+1}\Pi(I) \left(-\frac{1}{\Delta t} - \frac{g \Delta t {}^{n+1}h(I)}{\Delta x_1 \Delta x_1} - \frac{g \Delta t {}^{n+1}h(I)}{\Delta x_2 \Delta x_2} \right) + \\
& + {}^{n+1}\Pi(I)_E \left(\frac{g \Delta t {}^{n+1}h(I)}{\Delta x_1 \Delta x_1} + \frac{\partial {}^{n+1}h}{\partial x_1} \frac{g \Delta t}{2 \Delta x_1} \right) = \\
& = - {}^{n+1}\hat{\Pi}(I)_N \left(\frac{g \Delta t {}^{n+1}h(I)}{\Delta x_2 \Delta x_2} + \frac{\partial {}^{n+1}h}{\partial x_2} \frac{g \Delta t}{2 \Delta x_2} \right) - \\
& - {}^{n+1}\hat{\Pi}(I)_S \left(\frac{g \Delta t {}^{n+1}h(I)}{\Delta x_2 \Delta x_2} - \frac{\partial {}^{n+1}h}{\partial x_2} \frac{g \Delta t}{2 \Delta x_2} \right) + \\
& + \left(\frac{\partial {}^*U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial {}^*U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial {}^nU_1}{\partial x_1} + \frac{\partial {}^nU_2}{\partial x_2} \right) - \frac{2 {}^n\Pi(I)}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$I = 1, NMAX$

gde $\hat{\Pi}$ označava zavisno promenljive iz susednih redova N i S , koji nisu u direktnom postupku. U jednačinama (4.56) svi članovi sa nepoznatama se nalaze na levoj strani. Kvazi-linearna forma istog sistema jednačina, prema [28] i [29], definiše se kao:

$$\begin{aligned}
AA(I) {}^{n+1}\Pi(I)_W + BB(I) {}^{n+1}\Pi(I) + CC(I) {}^{n+1}\Pi(I)_E = GG(I)
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$I = 1, NMAX$

gde su koeficijenti:

$$AA(I) = \left(\frac{g \Delta t {}^{n+1}h(I)}{\Delta x_1 \Delta x_1} - \frac{\partial {}^{n+1}h}{\partial x_1} \frac{g \Delta t}{2 \Delta x_1} \right) \tag{4.58}$$

$$BB(I) = 2 \left(-\frac{1}{\Delta t} - \frac{g \Delta t {}^{n+1}h(I)}{\Delta x_1 \Delta x_1} - \frac{g \Delta t {}^{n+1}h(I)}{\Delta x_2 \Delta x_2} \right) \tag{4.59}$$

$$CC(I) = \left(\frac{g \Delta t {}^{n+1}h(I)}{\Delta x_1 \Delta x_1} + \frac{\partial {}^{n+1}h}{\partial x_1} \frac{g \Delta t}{2 \Delta x_1} \right) \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
GG(I) = & - {}^{n+1}\hat{\Pi}(I)_N \left(\frac{g \Delta t {}^{n+1}h(I)}{\Delta x_2 \Delta x_2} + \frac{\partial {}^{n+1}h}{\partial x_2} \frac{g \Delta t}{2 \Delta x_2} \right) - \\
& - {}^{n+1}\hat{\Pi}(I)_S \left(\frac{g \Delta t {}^{n+1}h(I)}{\Delta x_2 \Delta x_2} - \frac{\partial {}^{n+1}h}{\partial x_2} \frac{g \Delta t}{2 \Delta x_2} \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\partial {}^*U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial {}^*U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial {}^nU_1}{\partial x_1} + \frac{\partial {}^nU_2}{\partial x_2} \right) - \frac{2 {}^{n+1}\Pi(I)}{\Delta t} \quad (4.61)$$

Isti postupak može se primeniti i na sistem algebarskih jednačina (4.55), koji predstavlja jednačine nivoa vode u krivolinijskim kordinatama. Posle sličnih transformacija sistem se svodi na istu kvazi-linearnu formu sistema jednačina (4.57), ali sa drugačijim koeficijentima, koji imaju sledeći oblik:

$$AA(I) = \frac{\theta}{\Delta \xi^1} \left(\frac{{}^{n+1}h_D e_D - {}^{n+1}h_C e_C}{4 \Delta \xi^2} + \frac{{}^{n+1}h_B b_B}{\Delta \xi^1} \right) \quad (4.62)$$

$$BB(I) = \theta \left(\frac{-{}^{n+1}h_A b_A - {}^{n+1}h_B b_B}{\Delta \xi^1 \Delta \xi^1} + \frac{-{}^{n+1}h_C f_C - {}^{n+1}h_D f_D}{\Delta \xi^2 \Delta \xi^2} \right) + \frac{1}{\Delta t J} \quad (4.63)$$

$$CC(I) = \frac{\theta}{\Delta \xi^1} \left(\frac{{}^{n+1}h_C e_C - {}^{n+1}h_D e_D}{4 \Delta \xi^2} + \frac{{}^{n+1}h_A b_A}{\Delta \xi^1} \right) \quad (4.64)$$

$$GG(I) = -\theta \left\{ \frac{{}^{n+1}a_A - {}^{n+1}a_B}{\Delta \xi^1} + \frac{{}^{n+1}d_C - {}^{n+1}d_D}{\Delta \xi^2} + \frac{1}{\Delta \xi^2 \Delta \xi^2} \left({}^{n+1}h_C f_C {}^{n+1}\Pi(I)_N + {}^{n+1}h_D f_D {}^{n+1}\Pi(I)_S \right) + \frac{1}{4 \Delta \xi^1 \Delta \xi^2} \left[{}^{n+1}h_C e_C \left({}^{n+1}\Pi(I)_{EN} - {}^{n+1}\Pi(I)_{WN} \right) - {}^{n+1}h_D e_D \left({}^{n+1}\Pi(I)_{ES} - {}^{n+1}\Pi(I)_{WS} \right) + {}^{n+1}h_A c_A \left({}^{n+1}\Pi(I)_N + {}^{n+1}\Pi(I)_{EN} - {}^{n+1}\Pi(I)_S - {}^{n+1}\Pi(I)_{ES} \right) - {}^{n+1}h_B c_B \left({}^{n+1}\Pi(I)_{WN} + {}^{n+1}\Pi(I)_N - {}^{n+1}\Pi(I)_{WS} - {}^{n+1}\Pi(I)_S \right) \right] \right\} - (1 - \theta) {}^nA + \frac{{}^n\Pi(I)}{\Delta t J} \quad (4.65)$$

$$I = 1, NMAX$$

Broj kvazi-linearnih jednačina (4.57) jednak je broju računskih tačaka $NMAX$, odnosno broju konačnih zapremina. Jednačine duž jednog $E-W$ pravca, sačinjavaju po jedan sistem kvazi-linearnih jednačina, koji se rešava direktnom metodom Gaussove eliminacije. Istovremeno u $N-S$ pravcu svi sistemi kvazilinearnih jednačina rešavaju se iterativno. Da bi se ubrzala konvergencija, iterativno rešavanje je poboljšano nadrelaksacijom:

$${}_{i+1}^{n+1}\Pi = \omega {}_{i+1}^{n+1}\tilde{\Pi} + (1 - \omega) {}_i^{n+1}\Pi \quad (4.66)$$

gde indeks i predstavlja redni broj iteracije, oznaka $\tilde{\Pi}$ rezultat direktnog postupka eliminacije, a faktor nadrelaksacije ω treba da bude:

$$1 < \omega < 2 \quad (4.67)$$

Najpovoljniji faktor nadrelaksacije ω , koji dovodi do rešenja sa najmanjim brojem iteracija, teško je odrediti analitički, već se do njega dolazi probanjem. Pre početka glavnog proračuna uradi se nekoliko kratkih proračuna, sa različitim vrednostima ω . Obično je prva vrednost za ω , pri kojoj se pojavljuju oscilacije rezultata, dovoljno tačna procena. Broj iteracija zavisi od dužine vremenskog koraka, uslova tečenja i kriterijuma konvergencije. U ovom radu kriterijum konvergencije je bila najveća razlika nivoa vode u jednoj tački, između dve sukcesivne iteracije. Iterativni postupak je prekidan kada bi najveća razlika nivoa vode, u oblasti obuhvaćenoj proračunom, bila manja od unapred zadate tačnosti.

Izračunavanje jediničnih količina kretanja

Posle izračunavanja nivoa vode u vremenskom trenutku $n+1$, jedinične količine kretanja ${}^{n+1}U_j$, u jednačinama sa Dekartovim koordinatama, izračunavaju se iz jednačina (4.18), koje su napisane kao:

$$\begin{aligned} {}^{n+1}U_j &= {}^*U_j - g {}^{n+1}h \Delta t \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial x_j} \\ j &= 1, 2 \end{aligned} \quad (4.68)$$

Ako se koriste jednačine sa krivolinijskim koordinatama, po završenom drugom delu vremenskog koraka i izračunatim nivoima vode, jedinične količine kretanja se izračunavaju prema jednačinama (4.36), promenjenim na sledeći način:

$$\begin{aligned} {}^{n+1}U_j &= {}^*U_j - g \Delta t {}^{n+1}h \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \frac{\partial {}^{n+1}\Pi}{\partial \xi^i} \right) \\ i &= 1, 2 \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Na kraju drugog dela vremenskog koraka, polje brzina \bar{u}_i , izračunava se iz jednačina (2.35). Za svaki naredni vremenski korak, potrebno je ponoviti celu prethodnu proceduru.

4.3 Početni i granični uslovi

Kao početni uslov, pri numeričkom rešavanju izvedenih jednačina, usvojena je pretpostavka da voda u oblasti obuhvaćenoj proračunom miruje i da je slobodna površina vode horizontalna. Iako je ovako definisan početni uslov vrlo različit od tečenja koje treba da se ustali, zbog preciznosti i jednostavnostavnog zadavanja, zadržan je u svim proračunima u ovom radu.

Osnovne jednačine održanja predstavljaju sistem jednačina u kome postoje uticaji između promenljivih, koje se izračunavaju. Zbog karaktera jednačina, uticaj

SGS turbulentne kinetičke energije osrednjene po dubini na jedinične količine kretanja i nivoa vode, nešto je slabiji, od međusobnog uticaja ovih promenljivih. Zato se granični uslovi za \tilde{k}_g , mogu razmatrati izdvojeno, od graničnih uslova za jedinične količine kretanja i nivoa vode.

4.3.1 Granični uslovi za turbulentnu kinetičku energiju \tilde{k}_g

Osnovne jednačine održanja *SGS* turbulentne kinetičke energije osrednjene po dubini, jednačine (2.62) i (3.40), su parabolne, parabolne, diferencijalne jednačine. Parabolni karakter jednačina, dozvoljava da se u svakoj tački u oblasti proračuna, može postaviti samo jedna jednačina karakteristika, što znači da se uticaji mogu rasprostirati samo u nizvodnom pravcu. Na najuzvodnijem računskom poprečnom profilu, granični uslovi za \tilde{k}_g se moraju definisati, dok na nizvodnoj granici nije potrebno posebno definisati ove uslove. U ovom radu pretpostavljeno je da nema razlike u vrednostima \tilde{k}_g u tačkama na uzvodnoj granici i susednim nizvodnim tačkama.

Turbulentna kinetička energija \tilde{k}_g uz obale vodotoka nije posebno definisana, već su i u tim računskim tačkama korišćene jednačine (2.62) i (3.40). Naravno, prilikom integrisanja po konačnoj zapremini, vodjeno je računa o tome da je površina prema čvrstoj granici nepropusna.

4.3.2 Granični uslovi za jedinične količine kretanja i nivoa vode

U toku proračuna, promene jediničnih količina kretanja i nivoa vode, koje se zadaju graničnim uslovima izazivaju neustaljeno tečenje u oblasti proračuna. Da bi proračun bio što kraći, potrebno je neustaljenost tečenja što više smanjiti. Intenzitet neustaljenosti tečenja najviše zavisi od veličine promena graničnih uslova i vremena za koje se izvrše, ali važan je i način na koji se obave promene.

Ako je $Y(t)$ skalarna ili vektorska veličina, zavisna od vremena t , a $Y(t_1)$ početna vrednost i $Y(t_2)$ krajnja vrednost, onda je najjednostavnije da se promena Y u vremenu odvija po linearnom zakonu, na sledeći način:

$$Y(t) = Y(t_1) + \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) [Y(t_2) - Y(t_1)] \quad (4.70)$$

Jednačina (4.70) ima neugodnu osobinu da prvi izvod po vremenu $Y'(t)$ ima dva skoka, za t_1 i t_2 , koji izazivaju dodatnu neustaljenost u proračunu. Problem naglih skokova u $Y'(t)$ može se rešiti, prema [7], sledećom jednačinom:

$$Y(t) = Y(t_1) + \left[-2 \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right)^3 + 3 \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right)^2 \right] [Y(t_2) - Y(t_1)] \quad (4.71)$$

Kubna parabola, koja se koristi u jednačini (4.71), ima horizontalne tangente za t_1 i t_2 , a prvi izvod ima najveću vrednost za $t = (t_1 + t_2)/2$. Zbog toga, granični uslovi koji se menjaju prema jednačini (4.71), izazivaju najmanju neustaljenost u oblasti obuhvaćenoj proračinom.

Granični uslovi za brzine tečenja vode uz obalu, zadati su uz pretpostavku da voda uz čvrstu granicu ne teče. Na strani konačne zapremine uz obalu, usvojeno je da su obe Dekartove komponente brzine jednake 0.

U velikim prirodnim vodotocima tečenje je uvek hidraulički mirno, jer su Froude-ovi brojevi mnogo manji od 1. Iz teorije neustaljenog tečenja vode u otvorenim tokovima, poznato je da se u hidraulički mirnom režimu na granicama može zadati samo jedna promenljiva veličina: proticaj, nivo vode, ili kombinacija proticaja i nivoa vode. Kao kombinacija proticaja i nivoa vode može se koristiti kriva proticaja i jedinična količina kretanja.

Za izračunavanje nivoa vode Π , rešava se sistem algebarskih jednačina (4.57), uz odgovarajuće granične uslove. U slučaju čvrstih granica, bočnih zidova bez isticanja ili uticanja vode ($u_i = 0$), granični uslovi su:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = 0 \quad (4.72)$$

gde je n pravac normale na ravan granice. U slučaju zadate jedinične količine kretanja U_i , granični uslovi su:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = r \quad (4.73)$$

Jednačine (4.72) i (4.73) su Neumannovi granični uslovi [8]. U slučaju zadatog nivoa vode, granični uslovi su:

$$\Pi = r \quad (4.74)$$

gde je r unapred zadato. Ovako definisan granični uslov je Dirichletov.

Keficijenti AA , BB , CC i GG , sistema algebarskih jednačina (4.57), dati u jednačinama od (4.58) do (4.65), izvedeni su uz pretpostavku da je računski tačka, odnosno konačna zapremina, u polju i da nijedna stana konačne zapremine nije uz granicu. Ako to nije slučaj, već treba primeniti granične uslove: (4.72), (4.73) ili (4.74), koeficijenti se menjaju. Tako se računski tačke u oblasti obuhvaćenoj proračinom, prema jednakim oblicima koeficijenta dela na grupe. U zavisnosti od različitosti graničnih uslova i složenosti oblasti proračuna, menja se i broj grupa koeficijenta. Ako je oblast proračuna u računskom prostoru pravougaonik, na uzvodnoj granici zadate jedinične količine kretanja, a na nizvodnoj granici zadate kote nivoa vode, računski tačke se prema koeficijentima dele na 9 grupa. Za iste granične uslove, a za oblast proračuna koja se sastoji od dva pravougaonika, koji se međusobno dodiruju, broj grupa računskih tačaka raste na 16. Složeni oblici oblasti proračuna i različiti granični uslovi, ne stvaraju nikakve principijelne probleme, u numeričkom rešavanju osnovnih jednačina. Medjutim, za realizaciju ovakvih

proračuna, neophodno je ulaganje značajanog rada u modifikovanje dela programa, koji izračunava koeficijente algebarskih jednačina.

Sa gledišta rešavanja jednačina održanja jediničnih količina kretanja i jednačina nivoa vode, svi tipovi graničnih uslova imaju jednaku vrednost, jer svaki od njih ispunjava svoju funkciju. Ipak, svi granični uslovi ne utiču na isti način na neke druge veličine, koje se mogu izračunati na osnovu rezultata proračuna. Takav je slučaj sa vrtložnošću Ω , koju nizvodni granični uslov, definisan preko kote nivoa vode ne remeti. Sa druge strane, ako je nizvodni granični uslov zadan preko jedinične količine kretanja, unapred odredjeni pravac vektora brzina remeti vrtložnost u blizini nizvodne granice. O ovome se mora voditi računa, prilikom izbora tipa graničnih uslova.

4.4 Zaključci o numeričkim metodama

Izborom numeričkih metoda konačnih zapremina i razdvajanja operatora, razvijen je numeričkim postupak, za rešavanje osnovnih jednačina održanja, koga karakterišu visoka tačnost i mala numerička difuzija. To su posledice strogo konzervativne forme osnovnih jednačina i upotrebe odgovarajućih numeričkih postupaka, u delovima jednog vremenskog koraka. U prvom delu vremenskog koraka, koristi se jednostavna eksplicitna metoda, a u drugom delu implicitna numerička metoda, koja i sa relativno velikim vremenskim korakom obezbeđuje numeričku stabilnost rezultata. Numerička difuzija je smanjena i pri izračunavanju konvektivnih članova, upotrebom dobro poznate šeme *QUICK*, za jednačine održanja jedinične količine kretanja i njene varijante *QUICK-FRAM*, za jednačine održanja *SGS* turbulentne kinetičke energije.

Dobre osobine numeričkih metoda po pitanju numeričke difuzije, važne su zbog pobudjivanja stvaranja vrtloga u izračunatom turbulentnom toku, gde je svaka viskoznost, bilo da je prava, turbulentna, ili numerička, nepoželjna.

Poglavlje 5

Verifikacija matematičkog modela

Pre korišćenja matematičkih modela mora se dokazati njihova valjanost, kako bi se izbegle štete koje mogu nastati ako su modeli zasnovani na pogrešnim hipotezama, ili ako imaju neku drugu vrstu grešaka. U procesu dokazivanja valjanosti matematičkih modela, bitni koraci su kalibracija i verifikacija.

Pod kalibracijom se podrazumeva postupak u kome se određuju vrednosti nekih konstanti i koeficijenta, koji se koriste u modelu. Obično se višestrukim ponavljanjem proračuna i poredjenjem rezultata sa merenjima posredno određuju potrebne vrednosti. U izvedenim osnovnim jednačinama održanja, pojavljuju se samo tri konstante: c_ν , c_{kk} i c_ε , koje su određene proračunima matematičkim modelom koji je imao veću tačnost od modela koji se razvija. Zbog toga su vrednosti konstanti usvojene bez kalibracije.

U toku verifikacije, rezultati proračuna porede se sa nekim podacima koji su unapred poznati. Najsigurnija verifikacija je poredjenje rezultata proračuna sa merenjima. U računarskoj hidraulici, za verifikaciju se mogu koristiti merenja u prirodi i merenja na hidrauličkim modelima. Merenja u prirodi, ili terenska merenja, imaju najveću „težinu“, ali istovremeno su najkomplikovanija i najskuplja. Merenja u laboratorijskim uslovima na hidrauličkim - fizičkim modelima, mnogo su jednostavnija i jeftinija. Pre svega, pojava koja se izučava može se ponoviti potreban broj puta, a može se koristiti i komplikovanija merna oprema, koja olakšava rad i povećava kvalitet i kvantitet izmerenih podataka. Problemi u radu na hidrauličkim - fizičkim modelima vezani su za modelsku sličnost, odnosno tumačenje veze model - priroda. Na kraju treba pomenuti i još jedan problem, koji može biti najveći: za izgradnju hidrauličkih modela potrebno je utrošiti velika materijalna sredstva.

Matematički modeli se mogu verifikovati i sa analitičkim rešenjima. U računarskoj hidraulici, a posebno u delu koji se odnosi na „plitke“ otvorene tokove, ovakvih rešenja nema. Ipak, na sličan način mogu se iskoristiti znanja iz klasične hidraulike, kojim se procenjuju izračunati rezultati za neke jednostavne situacije kao što su: tečenje u pravom kanalu pravougaonog poprečnog preseka, tečenje u kanalu

sa bočnim ispustom i sl.

U ovom radu, za verifikaciju matematičkog modela korišćeni su podaci koji su dobijeni na više načina. Na početku, za verifikaciju su korišćeni primeri tečenja u šematizovanim vodotocima, pravilnog oblika u osnovi, sa pravougaonim poprečnim presecima i horizontalnim dnom. Verifikacija je nastavljena primerima tečenja u prirodnim vodotocima, za koje su obavljena raznovrsna merenja na hidrauličkom - fizičkom modelu i u prirodi.

Razvoj matematičkog modela je započeo rešavanjem osnovnih jednačina u Dekartovim koordinatama, da bi se nastavio rešavanjem osnovnih jednačina u krivolinijskim koordinatama. Tako je tekla i verifikacija matematičkih modela.

5.1 Verifikacija modela u Dekartovim koordinatama

U toku verifikacije matematičkog modela u Dekartovim koordinatama, proverene su neke od osnovnih pretpostavki u vezi sa osnovnim jednačinama i numeričkim metodama, a otklonjene su i neke greške u programu za proračun. Odabrana je najjednostavnija geometrija vodotoka: prav kanal u osnovi, sa pravougaonim poprečnim presecima, horizontalnim dnom i jednolikom hidrauličkom hrapavošću. S obzirom da su vodotoci u primerima za verifikaciju bili pravilnog oblika, korišćenjem znanja klasične hidraulike otkrivane su greške i otklanjani uzroci.

5.1.1 Tečenje u pravom kanalu

Prvi primer za verifikaciju matematičkog modela, objavljen u [31], je proračun tečenja u pravom otvorenom kanalu, pravougaonog poprečnog preseka, čija je osnova prikazana na prilogu 1. Na desnoj polovini najuzvodnijeg poprečnog profila, brzine tečenja vode su mnogo veće nego na levoj polovini. Primer predstavlja spajanje dva toka koji imaju iste, ili slične pravce tečenja, a različite brzine. S obzirom da je oblast proračuna pravougaona, za proračun su mogle da se koriste osnovne jednačine u Dekartovim koordinatama.

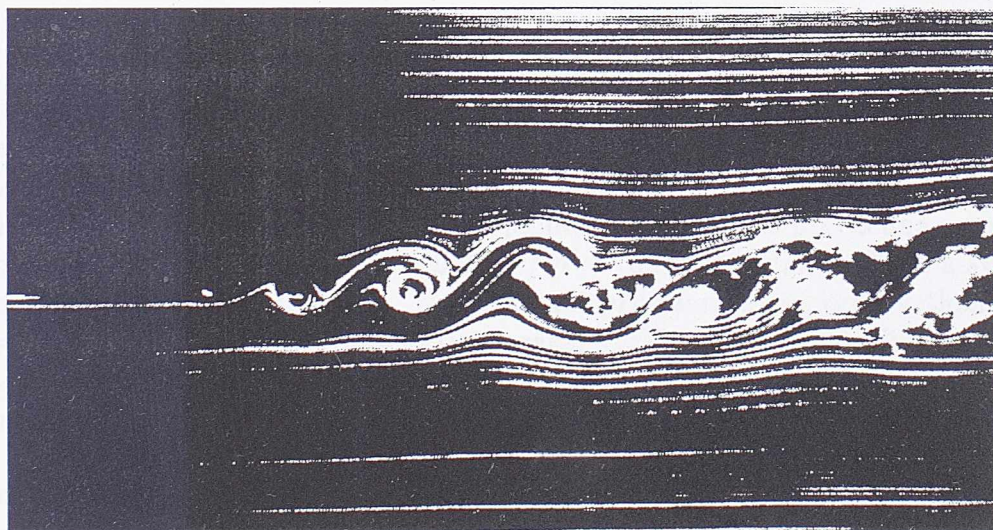
Širina kanala je 1975 m, a dužina deonice obuhvaćene proračunom je 3800 m. Pretpostavljena je jednolika hidraulička hrapavost $n = 0.016 \text{ s/m}^{1/3}$, što je za početnu dubinu od 12 m, dalo koeficijent trenja $c_f = 0.0011$. Pravilna numerička mreža, od 1600 tačaka (20×80), dala je prostornu diskretizaciju $\Delta x_1 = 200 \text{ m}$ i $\Delta x_2 = 25 \text{ m}$, uz širinu filtra $\Delta_g = 201.6 \text{ m}$. Da bi se ostvarili veliki gradijenti brzina na uzvodnoj granici, određena je velika razlika između Δx_1 i Δx_2 .

Kao i u svim proračunima u ovom radu, pretpostavljeno je da se u početnom trenutku vremena, voda u kanalu nije kretala. Usvojen je vremenski korak $\Delta t = 25 \text{ s}$,

što je za početnu dubinu dalo Courantov broj¹ $Cr = 10.8$. Za vreme od 10000 s (400 vremenskih koraka), granični uslovi su, po linearnom zakonu, promenjeni do svojih konačnih vrednosti. Duž uzvodne granice (prilog 1), jedinična količina kretanja u x_1 pravcu, na desnoj polovini kanala dobila je vrednost $U_1 = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ (odgovara brzini $u_1 \approx 0.8 \text{ m/s}$), a na levoj $U_1 = 2.5 \text{ m}^2/\text{s}$ ($u_1 \approx 0.2 \text{ m/s}$). Duž nizvodne granice, nivoi vode su spuštjeni za oko 0.02 m . Da bi raspored brzina na nizvodnoj granici bio što sličniji rasporedu na uzvodnoj granici, za svaku računsku tačku na nizvodnoj granici, određen je poseban iznos spuštanja nivoa.

Opisane promene graničnih uslova izazivaju neustaljeno tečenje vode u kanalu. Na prilogu 2 prikazane su promene brzina u_1 u toku vremena, u tri karakteristične računске tačke. Sve do 32000 s u kanalu je izrazito neustaljeno tečenje, da bi se kasnije promene amortizovale. Pri $t = 45000 \text{ s}$ (1800 vremenskih koraka) brzina u sredini kanala se menja za oko $\Delta u_1 = \pm 0.01 \text{ m/s}$ ($\pm 1.2 \%$), pa se može smatrati da se tečenje ustalilo. Rasporedi brzina po kanalu, pri ovakvom tečenju, prikazani su na prilogu 1. Neposredno po spajanju dva turbulentna toka na uzvodnoj granici, stvara se uska traka smičućeg tečenja, koja se postepeno širi čime se gradijenti brzina smanjuju.

Na prilogu 3 prikazan je raspored vrtložnosti Ω , u oblasti strujanja. U toku nema vrtloga, osim u uskoj traci, koja se pod malim uglom proteže duž kanala. To znači da prema proračunu, turbulentni slojevi ustaljeno „klize“ jedan preko drugog, bez formiranja bilo kakvih struktura koje bi remetile ovako savršeno strujanje.



Slika 5.1: Fotografija vrtloga u turbulentnom toku.

Na slici 5.1, prema [48], prikazana je fotografija strujanja sa slično definisanim

¹Courantov broj je definisan u odnosu na ograničenje vremenskog koraka zbog površinskih gravitacionih talasa kao $Cr = (\Delta t \sqrt{gh}) / \Delta x$

graničnim uslovima. Fluid koji struji je vazduh, a za vizuelizaciju strujnica je korišćen dim. Vazduh struji sa leve na desnu stranu i na fotografiji se jasno vide vrtlozi koji se kreću niz turbulentni tok. Oni sigurno sačinjavaju kretanje velikih razmera, mada su posledica turbulentnih karakteristika strujanja, dakle malih vrtloga. Kao što prelazak iz laminarnog u turbulentno tečenje, zavisi i od slučajnih poremećaja u toku, tako i formiranje vrtloga na spoju dva turbulentna toka, zavisi od iste pobude. To znači da turbulentnim veličinama u proračunu treba dodati stohastičke komponente.

Da bi se vernije modelisale turbulentne karakteristike toka, u nastavku proračuna, od vremenskog trenutka 45000 s, primenjena je jednačina (4.17). Izabrano je 36 tačaka, na mestima gde su gradijenti brzina najveći, u kojima je pri izračunavanju jediničnih količina kretanja dodavana stohastička komponenta. Uradjena je serija proračuna, sa različitim koeficijentima intenziteta slučajne komponente f . Na prilogu 5 prikazani su rezultati proračuna za $f = 0.1$, preko rasporeda vrtložnosti Ω . Kako se vidi na prilogu 2, pseudo-slučajne promene ϵ postepeno iniciraju stvaranje vrtloga u toku. Promene brzina i drugih turbulentnih promenljivih, su periodične, jer su posledica kretanja vrtloga, a pošto su izazvane pseudo-slučajnim promenama jediničnih količina kretanja, imaju i karakter slučajnih promenljivih. Na prilogu 5 može se pratiti stvaranje i kretanje vrtloga, koji su obeleženi sa „A“, „B“ i „C“. Rastojanje između vrtloga „B“ i „C“, odnosno talasna dužina iznosi $\lambda_a \approx 1000 m$. Prema [47], važi empirijska zavisnost $\lambda_a = 7 \eta_i$, gde je η_i širina inicijalnih vrtloga. Ako se kao η_i uzme širina vrtloga „A“ od oko 140 m, onda se može zaključiti, da vrtlozi imaju dimenzije koje su u skladu sa empirijskim zavisnostima.

Pri drugačijim hidrauličkim uslovima, kada su sile trenja i viskoznosti male u odnosu na inercijalne sile i sile težine, vrtlozi se u proračunu mogu pojaviti bez posebnog uvođenja pseudo-slučajnih promena ϵ . Naime, trenje delimično utiče na produkciju *SGS* turbulentne kinetičke energije \tilde{k}_g , preko jednačine (2.64), a time i na turbulentnu viskoznost $\tilde{\nu}_t$. U jednom od primera proračuna, smanjena je samo hidraulička hrapavost na $n = 0.012 s/m^{1/3}$ (odgovara $c_f = 0.006$), a svi drugi parametri proračuna ostali su isti. Na prilogu 4 prikazan je raspored vrtložnosti Ω , za $t = 37125 s$, posle 1485 vremenskih koraka. Vrtlozi imaju iste dimenzije kao i vrtlozi iz prethodnog primera proračuna, mada su vrednosti vrtložnosti Ω različite. U ovom proračunu vrtlozi su pobudjeni „skrivenim“ izvorima slučajnih promena. Izvori slučajnih promena se verovatno nalaze u primenjenom numeričkom postupku za rešavanje sistema kvazi-linearnih jednačina, a pre svega u činjenici da računar radi sa konačnim brojem sigurnih cifara.

Može se zaključiti, da u nekim hidrauličkim uslovima, kada je ukupna viskoznost $\nu + \tilde{\nu}_t$ mala, numerički modeli mogu bolje modelisati prirodu, nego matematički modeli od kojih su nastali.

Treba na kraju primetiti, da je hidraulička hrapavost $n = 0.012 s/m^{1/3}$ izuzetno mala (odgovara dobro obradjenoj površini betona) i da se ne može javiti kod prirod-

nih vodotoka. To istovremeno znači da se, ukoliko se želi da izračunate turbulentne veličine imaju i stohastičke komponente, u nekoj fazi proračuna ove komponente uvek moraju „veštački“ dodavati.

5.1.2 Tečenje u pravom kanalu sa bočnim ispustom

Drugi primer, na kome je verifikovan matematički model u Dekartovim koordinatama, je proračun tečenja u pravom otvorenom kanalu, pravougaonog poprečnog preseka, sa bočnim ispustom na desnoj obali. Rezultati proračuna su objavljeni u radovima [29], [30] i [32]. Pošto je u sva tri rada konfiguracija glavnog toka i bočnog ispusta slična, prikazaće se radovi [30] i [32], u kojima je postupak verifikacije kompletniji.

Na prilogu 6, prikazana je osnova pravog kanala sa bočnim ispustom na desnoj strani, koja je razmatrana u radu [30]. Širina kanala je 195 m, širina bočnog ispusta 30 m, a dužina deonice obahvaćene proračunom 690 m. Pretpostavljena je jednolika hidraulička hrapavost $n = 0.016 \text{ s/m}^{1/3}$, što je za početnu dubinu od 2 m dalo $c_f = 0.0020$. Numerička mreža od 2800 (40×70) tačaka, dala je prostornu diskretizaciju $\Delta x_1 = 10 \text{ m}$ i $\Delta x_2 = 5 \text{ m}$ i širinu filtra $\Delta_g = 11.2 \text{ m}$. Bočni ispust je između tačaka numeričke mreže 11 i 13.

Kao i u prethodnim proračunima, u početnom trenutku vremena, voda u kanalu se nije kretala, a nivoi vode su horizontalni. Vremenski korak je $\Delta t = 5 \text{ s}$, što za usvojenu početnu dubinu dalo Courantov broj $Cr = 4.4$. Za vreme od 750 s (150 vremenskih koraka), granični uslovi su po linearnom zakonu promenjeni do svojih konačnih veličina. Promene brzina u_1 , u toku vremena, duž osovine kanala, prikazane su na prilogu 7. Na uzvodnoj granici, jedinična količina kretanja u x_1 pravcu, je dobila vrednost $U_1 = 0.8 \text{ m}^2/\text{s}$ (odgovara brzini $u_1 \approx 0.4 \text{ m/s}$). Na mestu ispusta, jedinična količina kretanja u x_2 pravcu, je dobila vrednost $U_2 = 1.0 \text{ m}^2/\text{s}$ (odgovara brzini $u_2 \approx 0.5 \text{ m/s}$). Na nizvodnoj granici, nivoi vode su spuštjeni za oko $\Delta h = -0.02 \text{ m}$. Ovakve promene graničnih uslova izazivaju neustaljeno tečenje vode u kanalu. Pošto su nivoi vode na najnižvodnijem profilu unapred zadati, talas koji se formira na najuzvodnijem profilu, po stizanju na nizvodnu granicu odbija se od nje i nazad vraća. Perioda talasa je u zavisnosti od dubine vode i dužine deonice, koja je obuhvaćena proračunom. Zbog nešto većih sila trenja, nego u prethodnom primeru za verifikaciju, posle oko 3000 s (600 vremenskih koraka) neustaljenost je slabo izražena, a posle oko 5000 s (1000 vremenskih koraka), postiže se potpuna ustaljenost tečenja. Odgovarajuće strujnice, odnosno strujna funkcija Ψ , prikazane su na prilogu 6.

Nizvodno od bočnog ispusta formirala se recirkulaciona zona. Dužina i širina izračunate recirkulacione zone su u skladu sa empirijskim podacima, datim u [42]. U isto vreme brzine, dubine i vrtložnosti su potpuno ustaljene (ne menjaju se u vremenu), zbog čega strujna slika deluje kao „zaledjena“. U nastavku proračuna, u

svim vremenskim koracima, pri izračunavanju jediničnih količina kretanja u izabranim tačkama, primenjena je jednačina (4.17). Stohastičke komponente turbulentnih veličina dodate su u dvadeset tačaka, raspoređenih na glavnoj matrici bočnog toka. Uradjena je serija proračuna, sa različitim koeficijentima intenziteta slučajne komponente. Na prilogu 8, prikazani su rezultati proračuna za $f = 0.1$ za vremenske trenutke: 6500, 6600, 6700 i 6800 s. Na dijagramima su dati rasporedi vrtložnosti Ω , preko odgovarajućih izolinija. Pseudo-slučajne promene ϵ iniciraju stvaranje vrtloga u toku. Posle oko 60 računskih koraka formiraju se vrtlozi, relativno stabilnih karakteristika. Kao i ranije, dominantnu ulogu (najveću vrtložnost) ima vrtlog nizvodno od ispusta, koji je obeležen sa „A“. Njegov položaj se u toku vremena ne menja (stacionaran je), ali se zato stvaraju i vrtlozi koji se kreću niz tok (vrtlog „B“). Dodavanjem stohastičkih komponenti turbulentnim promenljivim, promenjen je karakter strujne slike.

I u drugom primeru za verifikaciju, datom u radu [32], zadržana je ista konfiguracija: prav kanala pravougaonog poprečnog preseka, sa bočnim ispustom na desnoj strani i horizontalno dno. Da bi se više približilo uslovima tečenja na ušću prirodnih vodotoka, promenjene su dimenzije kanala i ispusta, kao i hidraulički uslovi. Širina kanala i bočnog ispusta je povećana na 250 m. Proračunom je obuhvaćena deonica dužine 1200 m, a prekrivena je sa 12291 (51×241) numeričkih tačaka, što je dalo prostornu diskretizaciju $\Delta x_1 = 5$ m i $\Delta x_2 = 5$ m i širinu filtra $\Delta_g = 7.1$ m. Hidraulička hrapavost je povećana na $n = 0.020$ s/m^{1/3} (vrednost koja odgovara prirodnim vodotocima), što je za početnu dubinu od 8 m dalo $c_f = 0.0020$.

Početni i granični uslovi zadani su na sličan način kao u prethodnom primeru. U početnom trenutku vremena voda miruje, a nivoi vode su horizontalni. Usvojen je korak po vremenu $\Delta t = 2$ s, koji je dao Courantov broj $Cr = 3.5$. Za 1500 računskih koraka, jedinične količine kretanja na najuzvodnijem profilu i na bočnom ispustu, uz poštovanje linearnog zakona, dostigle su svoju maksimalnu vrednost. Na najuzvodnijem profilu to je bilo 2.5 m²/s ($u \approx 0.30$ m/s), a na ispustu 1.5 m²/s ($u \approx 0.20$ m/s). Kada se tečenje ustalilo, dodate su stohastičke komponente turbulentnim jediničnim količinama kretanja. Jednačina (4.17) uz $f = 0.1$, je primenjena u svim konačnim zapreminama u kojima vrtložnost Ω menja znak, odnosno jednaka je 0. Na prilogu 9 prikazani su rasporedi vrtložnosti Ω u neposrednoj blizini ispusta za dva vremenska trenutka. Kao i u prethodnim primerima, u oblasti strujanja se mogu uočiti vrtlozi koji su stacionarni, ili koji se nošeni strujom kreću niz tok. Zbog promene hidrauličkih uslova i „gušće“ prostorne diskretizacije, vrtlozi imaju manje dimenzije i bolje izraženu strukturu, nego u prethodnim primerima.

U sva tri primera verifikacije modela sa Dekartovim koordinatama, stohastičke komponente turbulentnih veličina dodavane su samo u izabranim tačkama, u oblasti proračuna. Zbog toga su, da bi primenjeni postupak imao efekta, vrednosti koeficijentata intenziteta slučajne komponente morale biti velike ($f = 0.1$). To znači, da je održanje količine kretanja u nekim konačnim zapreminama dosta grubo narušeno.

Naime, u Dekartovom koordinatnom sistemu, u svakoj konačnoj zapremini u kojoj se zakoni održanja narušavaju, stohastičke komponente se dodaju od jedan do najviše četiri puta. Tako je šansa, da se narušavanje zakona održanja u okviru jedne konačne zapremine međusobno potire, vrlo smanjena.

Ako se usvoji, da se stohastičke komponente turbulentnih veličina dodaju samo u izabranim tačkama oblasti strujanja, mora se voditi računa o tome da posle dodavanja komponenti, strujno polje postaje neustaljeno. Zbog toga bi bilo potrebno da se u toku proračuna stalno proverava izbor tačaka i uskladjuje sa trenutnom situacijom u toku. Ovakav zahtev bi previše komplikovao numerički postupak i zato nije ispunjen.

Verifikacija modela u Dekartovim koordinatama je pokazala da korišćenje osnovnih jednačina i hipoteza, koje su pri njihovom izvodjenju postavljane, daje matematički model čiji su rezultati u skladu sa zakonima klasične hidraulike i nekim empirijskim podacima. Posebno je primena hipoteze o dodavanju stohastičkih komponenti turbulentnim promenljivim, značajno uticala na njihov karakter. Ipak se može zaključiti, da ideja da se stohastičke komponente turbulentnih veličina dodaju samo u izabranim tačkama oblasti strujanja, nije najbolja i da treba razmotriti i drugačija rešenja.

5.2 Verifikacija modela u krivolinijskim koordinatama

U poglavlju 3, transformacijama osnovnih jednačina u Dekartovim koordinatama izvedene su osnovne jednačine u krivolinijskim koordinatama. Ove jednačine su zadržale formu i strukturu početnih, ali su članovi u njima postali znatno složeniji. Zbog toga je verifikacija jednačina u krivolinijskim koordinatama izvedena u dva dela. U prvom delu model je verifikovan proračunima tečenja u vodotocima pravilne osnove. Po otklanjanju različitih problema i grešaka u programu za proračun, prešlo se na drugi deo verifikacije. U ovom delu model je verifikovan poredjenjem proračuna sa merenjima na hidrauličkom modelu i u prirodi.

Uporedo sa verifikacijom modela sa krivolinijskim koordinatama, verifikovan je i program za izračunavanje metričkih koeficijenata. Ovi koeficijenti su izračunavani u toku priprema za proračune, a kasnije su korišćeni u proračunima strujanja kao ulazni podaci.

5.2.1 Tečenje u vodotocima pravilne osnove

Verifikacija modela sa krivolinijskim koordinatama, započela je proračunima u oblastima strujanja koje su u osnovi (horizontalnoj ravni) pravilne. Izabrane su dve konfiguracije vodotoka: prav i polukružni kanal u osnovi.

Prav kanal u osnovi

Najjednostavnija konfiguracija vodotoka je prav kanal, pravougaonog poprečnog preseka, sa horizontalnim dnom i jednolikom hidrauličkom hrapavošću. Takva konfiguracija usvojena je za početak verifikacije modela sa krivolinijskim koordinatama. Dužina kanala obuhvaćena proračunom bila je 4000 m, širina 2000 m, a hidraulička hrapavost $n = 0.016 \text{ s/m}^{1/3}$. Numerička mreža je imala svega 200 (10×20) tačaka, što je dalo međusobno rastojanje tačaka od 200 m i širinu filtra $\Delta_g = 283 \text{ m}$. Ovako mali broj tačaka je usvojen da bi se skratilo vreme proračuna i obrade rezultata, kao i da bi se lakše ustanovile greške u programu za proračun. Sa druge strane, nije se očekivala veća tačnost dobijenih rezultata, jer je rezultate proračuna trebalo porediti medju sobom. Odabrana su četiri položaja kanala u horizontalnoj ravni (vidi priloge 10 i 11), sa istim početnim uslovima i istim načinom promene graničnih uslova.

Kao i u prethodnim primerima, pretpostavljeno je da u početnom trenutku vremena voda miruje i ima jednaku dubinu od 12 m. Usvojen je korak po vremenu $\Delta t = 25 \text{ s}$. Jedinичne količine kretanja na najuzvodnijem profilu, dostigle su svoju krajnju - maksimalnu vrednost od $6 \text{ m}^2/\text{s}$ ($u \approx 0.50 \text{ m/s}$) za 400 računskih koraka (10000 s). Istovremeno, na najnižvodnijem profilu kote nivoa su jednako spuštene za 0.01 m. Posle 900 računskih koraka (22500 s) tečenje je postalo potpuno ustaljeno. Za promenu graničnih uslova umesto linearnog povećanja, kod koga su gradijenti konstantni, a menjaju se diskontinualno, korišćen je kubni zakon, sa postepeno promenljivim gradijentima. Na priložima 12 i 13 prikazane su promene kota nivoa i brzina, u toku vremena, za neke karakteristične tačke u oblasti strujanja. Ako se ove promene uporede sa promenama u prethodnim primerima, datim na priložima 2 i 7, može se zaključiti da je usvajanjem kubnog zakona promena graničnih uslova, bitno smanjena neustaljenost tečenja. Treba primetiti, da je do smanjenja neustaljenosti manjim delom došlo i zbog velike ukupne viskoznosti ($\nu + \tilde{\nu}_t$).

U toku verifikacije otklonjene su mnoge greške u programima za proračun i rešeni neki principijelni problemi, od kojih je najvažniji problem vezan za definisanje Dekartovih komponenti, na površinama konačne zapremine u računskom prostoru. Ovaj problem razmotren je u poglavlju 4, a ovde će se samo podsetiti na krajnji zaključak da je na svakoj površini konačne zapremine u računskom prostoru, neophodno definisati obe Dekartove komponente. Bez ovog uslova, izračunate veličine (brzine, nivoi vode, SGS turbulentna kinetička energija i dr.) zavise od položaja kanala u horizontalnoj ravni, odnosno proračuni nisu tačni.

Rezultati proračuna prikazani su preko rasporeda brzina, za četiri položaja kanala u horizontalnoj ravni. Dva položaja su data na prilogu 10, a druga dva na prilogu 11. Na osnovu prikazanih rasporeda brzina može se zaključiti da rezultati proračuna ne zavise od položaja kanala u horizontalnoj ravni.

Polukružni kanal u osnovi

Verifikacija modela sa krivolinijskim koordinatama nastavljena je na kanalu čija je osnova deo kružnog prstena. Poprečni presek kanala je pravougaonik, a dno kanala je horizontalno. Poluprečnik spoljašnje krivine je 8250 m, a unutrašnje 6250 m, što kanalu daje širinu od 2000 m. Svi poprečni profili su pravi i seku se u centru krivina. Najuzvodniji i najnižvodniji poprečni profili seku se pod centralnim uglom od $\pi/6$. Numerička mreža je, kao i u prethodnom primeru, imala 200 (10×20) tačaka. Rastojanja u radijalnom pravcu su bila po 200 m, a po kružnici promenjiva u zavisnosti od poluprečnika. Za razliku od prethodnog primera, u kome su za jedan položaj kanala u horizontalnoj ravni metrički koeficijenti $\partial x_i / \partial \xi^j$ i Jakobijani J jednaki za sve tačke numeričke mreže, za polukružnu mrežu $\partial x_i / \partial \xi^j$ i J se menjaju u zavisnosti od položaja mreže i položaja tačke u mreži. Odabrano je šest položaja kanala u horizontalnoj ravni, koji su prikazani na priložima 14 i 15.

Da bi se ostvarila sličnost sa prethodnim primerom, zadržana je početna dubina od 12 m, hidraulička hrapavost $n = 0.016 \text{ s/m}^{1/3}$ i vremenski korak $\Delta t = 25 \text{ s}$. Zadržani su i početni i granični uslovi, zbog čega su i rezultati slični. Na priložima 14 i 15 prikazane su linije jednakih kota nivoa slobodne površine vode, za različite položaje kanala u horizontalnoj ravni (oznaka 100 % predstavlja najvišu kotu, a 0 % najnižu). Bez obzira kakav je položaj osnove kanala u horizontalnoj ravni, kote nivoa slobodne površine vode su jednake.

U toku verifikacije modela sa krivolinijskim koordinatama, sa proračunima tečenja u vodotocima pravilne osnove, otkrivene su i otklonjene neke greške u programu za proračun i rešen je važan problem u vezi broja Dekartovih komponenti, na površinama konačnih zapremina. Potvrđeno je i da rezultati proračuna ne zavise od položaja vodotoka u horizontalnoj ravni.

5.2.2 Tečenje u rečnoj krivini

Prilikom rešavanja hidrotehničkih problema, vezanih za prosecanje rečne krivine na Tisi, u blizini naselja Adorjan, u hidrauličkoj laboratoriji Zavoda za hidrauliku Instituta za vodoprivredu „Jaroslav Černi“, izgradjen je hidraulički model. Na njemu su proverena projektovana rešenja i odabrana varijanta koja je realizovana. Po završetku modelskih ispitivanja, zbog kojih je model izgradjen, na modelu su obavljena i dopunska merenja, u toku kojih su prikupljeni podaci koji su korišćeni za verifikaciju različitih matematičkih modela ([12], [16] i [32]).

Hidraulički model

Na hidrauličkom modelu predstavljen je deo toka reke Tise, koji je obuhvatio izrazito zakrivljenu rečnu krivinu u dužini od preko 3 km. Model je izgradjen u distordovanoj razmeri 1:50/150. Dužina modela je bila 22 m, a srednja dubina oko 25 cm. Na

prilogu 16 prikazana je rečna krivina preko izobata (linija jednakih dubina). U temenu krivine dubina vode na modelu je bila oko 50 cm, jer su dubine Tise na tom mestu bile preko 20 m (to je naime bio jedan od glavnih razloga zbog kojih su započeti regulacioni radovi). Pre dopunskih merenja sa modela je uklonjena sva dodatna hrapavost, koja je postavljena da bi se predstavio uticaj bujne vegetacije na tečenje. Tako je dobijena jednolika hidraulička hrapavost, koju su sačinjavala zrna šljunka $d \approx 2.5$ cm, zalepljena cementnim malterom za površinu modela.

Numerička mreža je generisana direktnim obeležavanjem na hidrauličkom modelu. Osnova numeričke mreže prikazana je na prilogu 17. Usvojen je princip da poprečni profili budu prave linije, približno upravne na pravac strujnica. Mreža je bila gušća u oblastima gde su promene u toku bile intenzivnije. Ukupan broj tačaka je bio 468, 52 u pravcu toka i 9 tačaka poprečno na tok. Po obeležavanju tačaka na modelu, mreža je nacrtana na cemetnoj košuljici, kojom je model bio prekriven. Tačke su snimljene merenjem dužina čeličnom pantljkicom, na osnovu čega su izračunate koordinate u Dekartovom koordinatnom sistemu. Visinske kote tačaka numeričke mreže izmerene su nivelirrom, standardnim geodetskim postupkom.

Da bi se izbegli problemi vezani za modelsku sličnost, posebno zbog distordovane razmere koja je korišćena u toku prethodnih hidrauličkih ispitivanja, usvojeno je da se model smatra prirodom. To znači, da veličine izmerene na modelu nisu preko modelske sličnosti preračunavane za prirodu, već su korišćene direktno.

Proticaj i kote nivoa na najnižvodnijem profilu, određeni su direktno na hidrauličkom modelu, uz poštovanje dva uslova. Prvo, tečenje je moralo biti turbulentno (kontrolisani su Re brojevi), a zatim tok nije smeo izlaziti izvan glavnog rečnog korita.

Za registrovanje strujne slike na modelu, korišćena je fototehnika. Fotografiskim aparatom su snimane trajektorije plovaka², sa perajima postavljenim na različitim dubinama. Na slici 5.2 prikazana je fotografija trajektorija plovaka na hidrauličkom modelu. Pri snimanju je korišćena duga ekspozicija, zbog vremena potrebnog da plovci prodju preko oblasti koja je obuhvaćena snimkom. Kraćim ekspozicijama snimane su površinske strujnice. Glavna svrha fotografskih snimanja bila je utvrđivanje postojanja helikoidalnog - trodimenzionalnog strujanja vode u rečnoj krivini. Na osnovu razlike površinskih strujnica i dubinskih i površinskih trajektorija, zaključeno je da helikoidalno kretanje postoji, ali da nije značajno.

Pored fotografskog snimanja strujnica, na modelu su obavljena i hidrometrijska merenja. Korišćeno je laboratorijsko hidrometrijsko krilo, čija je elisa imala prečnik od oko 3.5 cm. Na modelu je ocenjeno da treba meriti u 40 karakterističnih poprečnih profila numeričke mreže. U svakoj tački mreže, brzine su merene na raznim dubinama, kako bi se dobili rasporedi brzina po vertikali. Zbog odnosa između prečnika elise krila i dubine vode, po vertikali je mereno najviše u četiri tačke. Pre merenja brzine u jednoj tački, krilo je postavljano u pravcu strujnica, uz pomoć kratkog

²Na svakom plovku nalazila se mala sveća, čiji je plamen „isertavao“ putanju plovka.



Slika 5.2: Fotografija trajektorija plovaka na hidrauličkom modelu rečne krivine (autori: Miljan Djurić i Radomir Kapor).

komada vunenog konca. Smer tečenja kontrolisan je vizuelno. Izmerene brzine su osrednjene po dubini, pri čemu je delimično vodjeno računa i o pravcu, a ne samo o intenzitetu.

Treba napomenuti, da je pri merenju sa hidrometrijskim krilom, brzina izmerena na jednom mestu u stvari već osrednjena po prostoru i vremenu. Zbog dimenzija elise, izmerene vrednosti se ne odnose na tačku, nego na prostor koji je nešto veći od zapremine cilindra koji nastaje obrtanjem elise. Pošto se brzina meri brojanjem obrtaja elise u vremenskom intervalu, na taj način se vrši osrednjavanje po vremenu. Pri merenjima u prirodi svi ovi uticaji se mogu zanemariti, jer su dimenzije hidrometrijskog krila u odnosu na vodotok zanemarljive. U merenjima na hidrauličkom modelu ove uticaje ne treba sasvim zaboraviti.

Na prilogu 18 prikazan je izmereni raspored brzina, osrednjenih po dubini. Strujanje uglavnom prati konture vodotoka, ali na dva mesta u toku, brzine vode se smanjuju i javlja se povratano tečenje, odnosno formira se recirkulaciona zona. Prva zona, u kojoj se voda vrlo slabo kreće, javlja se uz desnu obalu, između 11 i 15 poprečnog profila. Uz levu obalu, između 16 i 23 poprečnog profila, javlja se recirkulaciona zona. Brzine u njoj su promenljive u vremenu i nije ih jednostavno osrednjiti, ali je sigurno da tečenje u njoj ima smer suprotan matici. Tako matica, na delu krivine gde je rečno dno izrazito produbljeno, protiče između dve zone u

kojima je kretanje vrlo slabo. Postojanje obe zone potvrđeno je i fotografskim snimcima.

U toku eksperimentalnog rada na hidrauličkom modelu izmerene su:

- Dekartove koordinate tačaka numeričke mreže;
- visinske kote dna;
- brzine osrednjene po dubini i
- kote nivoa vode na najnižvodnijem mernom profilu.

Ovi podaci su osnov za verifikaciju različitih matematičkih modela.

Rezultati proračuna

U proračunima je oblast tečenja pokrivena numeričkom mrežom od 364 tačke, 52 u pravcu toka i 7 tačaka poprečno na tok. Prilikom generisanja numeričke mreže na hidrauličkom modelu, granične tačke na obali, bile su na mestima preseka ravni nivoa slobodne površine vode i površi terena. U tim tačkama brzine nisu mogle biti merene, i pretpostavljano je da su jednake 0. Pri definisanju graničnih uslova uz čvrstu konturu, za matematički model je usvojeno da su brzine na površini uz čvrstu konturu jednake 0. Zbog toga su, pri generisanju numeričke mreže za proračun, iz mreže generisane na hidrauličkom modelu, izostavljene po dve krajnje tačke na poprečnim profilima.

Granični uslovi na uzvodnoj granici određeni su merenjem rasporeda brzina i kota nivoa na hidrauličkom modelu, a u matematičkom modelu sa krivolinijskim koordinatama, zadani su preko rasporeda jediničnih količina kretanja. Nizvodni granični uslovi, određeni su merenjem kote nivoa vode na najnižvodnijem mernom profilu hidrauličkog modela.

Kao i u prethodnim primerima verifikacije modela, u početnom trenutku pretpostavljeno je da se voda u vodotoku ne kreće i da je slobodna površina vode horizontalana. Računski korak je iznosio 0.1 s, a promene graničnih uslova, na uzvodnoj i nizvodnoj granici, trajale su 1000 računskih koraka. Granični uslovi su menjani po kubnom zakonu. Na prilogu 19 prikazan je izračunati raspored brzina, osrednjenih po dubini. Da bi se lakše uporedile izmerene i izračunate vrednosti, na prilogu 20 su uporedo prikazani odgovarajući rasporedi osrednjenih brzina. Prilogom je obuhvaćen najinteresantniji deo hidrauličkog modela, u kome su zakrivljenost i dubine najveće. U prvoj krivini, računajući od najuzvodnijeg profila, matica toka u proračunu nije prišla spoljnoj levoj obali, u istoj meri kako je to izmereno na modelu. Verovatno je zbog toga, u sledećoj krivini izračunati položaj matice drugačiji od izmerenog. Kako je već ranije napomenuto, u delu krivine gde su zakrivljenost i dubine najveće, na modelu je izmereno da matica prolazi između dve recirkulacione

zone. Posebno je interesantno, da su najveće brzine izmerene neposredno uz levu recirkulacionu zonu. Ovako neobičan raspored brzina matematički model nije dao, već su najveće izračunate brzine u sredini matice. Izračunati položaj desne recirkulacione (stagnirajuće) zone je dobar, mada je širina zone nešto manja. Dimenzije leve recirkulacione zone su dobro izračunate, ali nema povratnog tečenja, već je to prema proračunu zona stagnirajuće vode. Na nizvodnom delu modela, izmereni i izračunati rasporedi brzina, uglavnom se međusobno slažu.

U proračunu su izračunate i kote nivoa slobodne površine vode, koje su prikazane na prilogu 21. U toku rada na hidrauličkom modelu ove veličine nisu merene, jer su promene kota nivoa male. Prema proračunu, razlika najviših i najnižih kota nivoa vode je 1.76 cm, što je na dužini rečnog toka od 22 m dalo pad $i = 0.08 \%$. Na prilogu 22 prikazan je raspored *SGS* turbulentne kinetičke energije osrednjene po dubini \tilde{k}_g , preko izolinija.

Na kraju se može zaključiti, da se razvijenim matematičkim modelom sa krivolinijskim koordinatama mogu izračunati rasporedi brzina u izrazito zakrivljenom rečnom toku, koji se dobro slažu sa merenjima. Slaganje izmerenih i izračunatih veličina nije potpuno, ali je dostignuti stepen tačnosti dovoljan za primenu u hidrotehničkoj praksi.

Osetljivost proračuna na promene nizvodnog graničnog uslova

Nizvodni granični uslov je zadat u proračunu preko izmerene kote nivoa vode na najnižvodnijem mernom profilu, na hidrauličkom modelu. Nivo je meren mernom iglom na jednom mestu, na sredini poprečnog profila. Zbog toga je prvo pretpostavljeno, da je nivo horizontalan. Medjutim, sa ovakvom pretpostavkom izračunati su rasporedi brzina koji su se mnogo razlikovali od merenja. Na prilogu 23, na delu a), prikazan je izračunati prvobitni raspored brzina i odgovarajuće linije nivoa slobodne površine vode. Da bi se uskladili izračunati rasporedi brzina sa izmerenim, nivoi vode na nizvodnom graničnom profilu su promenjeni, a proračun nastavljen. Uz levu obalu, nivoi vode su „podignuti“ za 1.5 mm, a uz desnu obalu za 0.5 mm. Na istom prilogu, na delu b), prikazan je novi, izračunati raspored brzina, sa odgovarajućim linijama nivoa slobodne površine. Iako su promene kota nivoa vode bile zaista male, rasporedi izračunatih brzina su skoro potpuno usaglašeni sa izmerenim.

Ako na nizvodnom kraju deonice, koja je obuhvaćena proračunom, nema povratnog tečenja, strpljivim „podešavanjem“ nivoa vode na najnižvodnijem graničnom profilu, u proračunu se može dobiti bilo kakav zadani raspored brzina. Nije slučajno, da se i na hidrauličkom, fizičkom modelu, problem nizvodnog graničnog uslova rešava na sličan način. Rasporedi brzina se menjaju dodavanjem prepreka (gredica), na nizvodnom kraju modela. Kao i u radu na matematičkom modelu, to može potrajati satima.

5.2.3 Tečenje na ušću Save u Dunav

Poslednji primer na kome je, u ovom radu, verifikovan matematički model sa krivolinijskim koordinatama, je proračun tečenja na ušću Save u Dunav, kod Beograda. Zbog nepovoljnog međusobnog položaja reka, ulivanje toka Save u Dunav je u hidrauličkom smislu dosta složeno. Kao posledica ovakvog tečenja na ušću se formiralo Veloko ratno ostrvo i druga manja ostrva i rukavci. U toku šezdesetih godina, ušće Save u Dunav je bilo predmet hidrauličkih proučavanja, na osnovu kojih su data hidrotehnička rešenja. Neka od njih su realizovana, a druga su zbog obima radova ostavljena narednim generacijama.

Podloge za proračun

Na prilogu 24 prikazan je aerofotogrametrijski snimak dela ušća Save u Dunav, napravljen 17. novembra 1971. godine. Na snimku se, pored Save, rukavca Dunava i Dunava, vide i Donji grad Kalemegdana na desnoj obali, Malo i Veliko ratno ostrvo, kao i peščani sprud pored Velikog ratnog ostrva. Boje vode Save i Dunava su u vreme snimanja bile različite, zbog čega se po ulivanju jasno razlikuju. Tako se na osnovu fotografskog snimka, može dobiti predstava o rasporedu brzina u vodotocima.

Aerofotogrametrijski snimak je poslužio i kao osnov za generisanje numeričkih mreža za proračune. Prvo je izabran oblik mreže u računskom prostoru. Usvojeno je da se oblast proračuna, u računskom prostoru, pokriva sa dva pravougaonika, koji se međusobno dodiruju. U fizičkom prostoru, sa aerofotografskim snimkom kao osnovom, ručno (na računaru) je iscrtana vrlo retka, početna numerička mreža. Pri tome je vodjeno računa o položaju kontrolnih poprečnih profila na terenu i zahtevima koje mora ispuniti generisana mreža, prema poglavlju 3. Progušćavanje mreže je obavljeno numeričkim postupkom, čime je dobijena prva varijanta numeričke mreže, prikazana na prilogu 25. Mreža je sastavljena od dva pravougaonika (17×53 i 13×9 tačaka) i ukupno je imala 1009 tačaka. U toku prve serije proračuna, uočeni su neki nedostaci numeričke mreže. Zbog toga je, pre generisanja gušće mreže, korigovana početna mreža. Kao i za prvu varijantu, progušćavanje tačaka je spovedeno numeričkim postupkom. Druga varijanta numeričke mreže je imala ukupno 3958 tačaka (33×107 i 24×19), a prikazana je na prilogu 26. U ovoj varijanti, koja je dvostruko gušća od prethodne (ima skoro četiri puta više tačaka), linije $\xi^i = const$ bolje prate strujnice, a smanjene su i razlike u veličini konačnih zapremina. Posebno je vodjeno računa, da se metrički koeficijenti $\partial \xi^i / \partial x_j$, prema preporukama iz poglavlja 3, postepeno menjaju po oblasti proračuna.

Za definisanje geometrije korita vodotoka na raspolaganju su bili skromni podaci. Naime, ušće Save u Dunav je granica nadležnosti dve ustanove, koje sistematski snimaju rečna korita. Tako se raspolagalo sa odgovarajućim poprečnim profilima, koji su na granicama oblasti proračuna, ali ne i sa poprečnim profilima unutar oblasti. Na prilogu 27, prikazana su tri karakteristična poprečna profila: na Savi „PA 1“

km 0 + 000, na rukavcu Dunava „101“ i na Dunavu, između Velikog ratnog ostrva i Kalemegdanske obale, „EP-271-1“. Profili su snimljeni oko 1976. godine, a kontrolom ostalih raspoloživih snimanja ustanovljeno je da je cela deonica stabilna kroz vreme. Zbog toga su, za određivanje geometrijskih karakteristika vodotoka između ova tri profila, iskorišćeni podaci na osnovu kojih je, 1956. godine, gradjen hidraulički model beogradskog hidročvora. Prema osnovi hidrauličkog modela, datoj u [6], određeno je 10 dodatnih poprečnih profila. Sa ukupno 13 poprečnih profila, numeričkim postupkom su određene kote nivoa dna vodotoka, za sve tačke numeričkih mreža. Na prilogu 28 prikazane su izohipse dna korita vodotoka, za drugu varijantu numeričke mreže za ušće Save u Dunav.

Na osnovu podataka iz Hidrološkog godišnjaka za 1971. godinu, na dan 17. novembra, kota nivoa vode na ušću bila je 67.16 m nad morem. Prema istom izvoru, proticaj Save kod Beograda je bio 500 m³/s, a Dunava kod Zemuna 1860 m³/s. Iz ovih podataka se vidi, da je aerofotogrametrijski snimak napravljen u periodu malih voda, pre punjenja Djerdapske akumulacije. Podela proticaja Dunava, na deo koji protiče rukavcem i deo koji teče glavnim koritom, zavisi od mnogo parametara. Usvojena je procena, iz zaključaka o hidrometrijskim merenjima na beogradskom hidročvoru [46], da su brzine tečenja u rukavcu Dunava približno jednake brzinama tečenja u Savi. Na taj način, određen je proticaj rukavcem Dunava od 324 m³/s. Prema iskustvima u Zavodu za regulaciju rečnih tokova, Instituta za vodoprivredu „Jaroslav Černi“, za sektor ušća Save u Dunav može se usvojiti hidraulička hrapavost $n = 0.025 \text{ s/m}^{1/3}$.

Rezultati proračuna sa prvom varijantom numeričke mreže

Prvi proračni tečenja na ušću Save u Dunav, sa modelom sa krivolinijskim koordinatama, obavljani su sa prvom varijantom numeričke mreže.

Na najuzvodnijim profilima, na Savi i na rukavcu Dunava, zadati su rasporedi jediničnih količina kretanja. Pretpostavljeno je da su ove vektorske veličine normalne na poprečni profil. Intenziteti jediničnih količina kretanja su izračunati na osnovu rasporeda brzina osrednjenih po dubini, koji su procenjeni na osnovu hidrometrijskih merenja na Savi. Na najnižvodnijem poprečnom profilu usvojena je izmerena kota dna od 67.16 m n. m., ali na sedam tačaka uz desnu obalu kote nivoa su spuštene za najviše 2.2 mm, čime se uticalo na raspored brzina na najnižvodnijem profilu. O nizvodnom graničnom uslovu biće više reči kasnije, kada se budu analizirali rezultati proračuna.

Kao i u svim prethodnim proračunima, pretpostavljeno je da u početnom trenutku vremena voda miruju, sa horizontalnim nivoima slobodne površine. Sa računskim korakom od $\Delta t = 5 \text{ s}$, započele su promene na graničnim poprečnim profilima. Vrednosti su rasle prema kubnom zakonu i svoju konačnu veličinu su postigle posle 400 vremenskih koraka (2000 s). Neustaljeno tečenje u vodotocima se umiruje posle

2400 koraka (12000 s), a proračun je završen posle 4000 koraka (20000 s).

Izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, prikazani su na prilogu 29. Da bi crtež bio pregledniji, u pravcu ξ^1 , nacrtana je svaka druga izračunata brzina. Neposredno uzvodno od ušća rukavca Dunava u Savu, uz levu obalu Save, brzine tečenja vode su veoma male. Ista pojava se može primetiti i na povećanom delu aerofotogrametrijskog snimka na prilogu 30. Zbog malih brzina na ovom mestu dolazi do istaložavanja nanosa, zbog čega se obala širi u pravcu sredine Save. U današnje vreme, obala se još više proširila ka sredini reke, nego što se to vidi na snimku. Na suprotnoj strani ušća rukavca u Savu, nema problema sa istaložavanjem nanosa. Izračunate brzine pokazuju da ni erozija obala nije problem, jer na spoju vodotoka nema izrazitijeg povećanja brzina. Zato je ova obala stabilna i u proteklom periodu nije menjala položaj.

Na nizvodnom kraju ušća, na delu vodotoka koji se može nazvati i Savom i Dunavom, izračunata je velika recirkulaciona zona, a glavni tok je pomeren ka levoj obali. Do pomeranja matice, dolazi zbog tendencije vode da se kreće pravolinijski i zbog znatno većih dubina vode uz levu, nego uz desnu obalu. I na aerofotogrametrijskim snimcima, na priložima 24 i 30, glavna matica se nalazi više ka levoj obali, ali je to manje izraženo nego u izračunatim rasporedima. U prvim proračunima, pretpostavljeno je da su nivoi vode na nizvodnom graničnom profilu horizontalni. Sa takvim nizvodnim graničnim uslovom izračunata je još veća recirkulaciona zona, a matica je bila sasvim uz levu obalu. Rezultati su bili u skladu sa zadanim graničnim uslovima, ali su se mnogo razlikovali od situacije u prirodi. U pokušaju da se proračuni usklade sa situacijom u prirodi, menjan je nizvodni granični uslov. Kote nivoa vode uz desnu obalu su spuštane, da bi se matica pomerila ka njoj. I u proračunima tečenja u rečnoj krivini, na hidrauličkom modelu, pokazalo se da je model osetljiv na promene nizvodnog graničnog uslova, ali u ovim proračunima osetljivost je bila još veća. Uzrok ovakve osetljivosti je postojanje recirkulacione zone, koja je obuhvatala i deo nizvodnog graničnog uslova. Zbog toga je najveće sniženja kota nivoa uz desnu obalu, u proračunu koji je uspešno završen, iznosilo svega 2.2 mm. Sa takvim graničnim uslovima izračunati su prikazani rezultati. Recirkulaciona zona na nizvodnom delu, uz desnu obalu, nije sasvim uklonjena, ali su joj dimenzije smanjene.

U slučaju ovog proračuna, problem nizvodnog graničnog uslova bi se mogao rešiti na dva načina. Prvo, za ovako definisan nizvodni granični uslov, najnižvodniji profil treba postaviti na mestu na kome su nivoi vode po profilu skoro horizontalni. To znači, da bi najnižvodniji profil trebalo pomeriti nizvodno u glavno korito Dunava. Drugi način rešavanja problema, bio bi da se na nizvodnoj granici usvoji isti tip graničnog uslova, kao na uzvodnoj. Dakle, u svakoj tački nizvodne granice trebalo bi zadati jediničnu količinu kretanja.

Na prilogu 31, prikazani su izračunati rasporedi *SGS* turbulentne kinetičke energije osrednjene po dubini k_g , preko linija jednakih vrednosti. Oznaci 100 % odgovara

\tilde{k}_g od $0.0509 (m/s)^2$, a 0 % odgovara od $0 (m/s)^2$. Najveće vrednosti turbulentna kinetička energija je imala na spoju rukavca Dunava i Save. Veće vrednosti javljale su se u oblastima gde su gradijenti brzina veliki, a to su pre svega delovi vodotoka uz obale.

Rezultati proračuna predstavljaju se i preko izračunate vrtložnosti Ω . Na prilogu 32, vrtložnost je prikazana preko linija jednakih vrednosti, sa $\Delta\Omega = 3 \% = 0.00105 1/s$. Linije jednakih vrtložnosti pokazuju položaje vrtloga u toku. Prema proračunu, najveći vrtlozi se formiraju u blizini ušća rukavca Dunava u Savu. Po glavnoj matici toka, linije jednake vrtložnosti su paralelene strujnicama, što znači da se vrtložnost duž toka ne menja. Medjutim, na delu aerofotogrametrijskog snimka, na prilogu 30, pri mešanju voda Save i rukavca Dunava, koje imaju različitu boju, jasno se razlikuju vrtlozi, koji zoni mešanja daju nepravilno periodičan oblik. Brzina kretanja ovih vrtloga je jednaka brzini kretanja vode koja ih „nosi“. Da bi izračunate vrtložnosti, imale slične rasporede u prostoru i promene u vremenu, kao one u prirodi, u proračunu je potrebno turbulentnim veličinama dodati stohastičke komponente.

Kao i u prethodnim primerima za verifikaciju, od vremenskog trenutka $t = 12500 s$ (2500 računskih koraka), u svim računskim koracima, pri računanju jediničnih količina kretanja korišćena je i jednačina (4.17). U ovom primeru, prvi put su u ovom radu, stohastičke komponente dodavane turbulentnim veličinama, po celoj oblasti obuhvaćenoj proračunom.

Da bi se ispitaio uticaj koeficijenta intenziteta slučajne komponente f na rezultate, uradjena su tri dodatna proračuna, u kojima je f imao vrednost od: 0.02, 0.01 i 0.005. Na numeričkoj mreži odabrane su četiri karakteristične tačke (vidi prilog 25). Tačke 427 i 987 se nalaze blizu uzvodnih granica, na Savi, odnosno na rukavcu Dunava, a tačke 400 i 630, su nizvodno od ušća. Na prilogima: 33, 34, 35 i 36 prikazane su promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karakterističnim tačkama prve varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente f od: 0.00, 0.02, 0.01 i 0.005. Prema prilogu 33, može se zaključiti da je u proračunu, u kome turbulentnim veličinama nisu dodavane stohastičke komponente, postignuto potpuno ustaljeno tečenje. Po dodavanju stohastičkih komponenti turbulentnim veličinama, u ostala tri proračuna, dolazi do pojave neustaljenog tečenja koja se jasno vidi na prilogima: 34, 35 i 36. Veće vrednosti koeficijenta f pobudjuju i veće promene brzina. O karakteru ovih promena biće reči kasnije, a sada će se objasniti pojava, koja na prvi pogled može izgledati neobična. Naime, ako se uporede promene brzina u jednoj karakterističnoj tački, za tri različite vrednosti koeficijenta f , uočiće se sličnost promena brzina u vremenu, koje se medjusobno razlikuju samo po intenzitetu. Uzrok ove sličnosti promena, koje bi trebalo da imaju stohastički karakter, nalazi se u generatoru slučajnih promenljivih i maloj vrednosti koeficijenta f . U poglavlju 2, već je napomenuto da veličina ϵ , koja se koristi u jednačini (4.17), ima pseudo-slučajni karakter. Pri svakom pr-

vom pozivanju potprograma, koji generiše ovu veličinu u proračunu, započinje se od iste vrednosti, koja dakle nema slučajni karakter. S obzirom da se jednačina (4.17) koristi u delu numeričkog postupka koji je direktan (bez iteracija), generisane pseudo-slučajne komponente, u istoj tački numeričke mreže i u istom vremenskom trenutku, u više proračuna sa različitim f , moraju biti iste. Potprogram za generisanje slučajnih vrednosti može se koristiti i tako da prva vrednost u generisanom nizu zavisi od neke zaista slučajne vrednosti. U ovom radu takva mogućnost nije korišćena, da bi se lakše kontrolisali dobijeni rezultati.

Dodavanje stohastičkih komponenti turbulentnim promenljivim menja i rasporede brzina po oblasti proračuna, u jednom trenutku vremena. Na prilogu 37, prikazan je raspored brzina osrednjenih po dubini, sa prvom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.02$. Na prvi pogled bi se moglo zaključiti da između ovog rasporeda i rasporeda sa priloga 29, u kome je $f = 0$, nema velikih razlika. Recirkulaciona zona, na nizvodnom delu uz desnu obalu, ima povratne brzine nešto većeg intenziteta, a rasporede brzina po poprečnim presecima nisu više sasvim pravilni. Ipak, najvažnija razlika je u tome što je strujna slika neustaljena, zbog pojave vrtloga, koji su pobudjeni dodavanjem stohastičkih komponenti turbulentnim promenljivim.

Postojanje vrtloga u toku, se najlakše utvrđuje preko rasporeda vrtložnosti. Na priložima 38 i 39 prikazana je izračunata vrtložnost Ω , sa prvom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.02$, za vremena 19810s i 20000s ($\Delta\Omega = 3\% = 0.001041/s$). Razlike u rasporedu vrtložnosti na ovim priložima i prilogu 32, na kome je $f = 0$, vrlo su velike. Prvo, pored glavnih vrtloga koji su stacionirani kog ušća rukavca Dunava u Savu, formirali su se i mnogi drugi vrtlozi (obeleženi sa „A“, „B“ i „C“), čije su dimenzije nešto veće od vrtloga koji se vide na aerofotogrametrijskom snimku, na prilogu 30. Drugo, prema priložima 38 i 39, novoformirani vrtlozi kreću se brzinom toka vode i tako turbulentnim promenljivim daju drugačiji karakter.

Uz uzvodne granice oblasti obuhvaćene proračunom, pokretni vrtlozi se ne javljaju, jer je potrebno izvesno rastojanje da se akumuliraju poremećaji, koji započinju stvaranje vrtloga. Tako, ako se analiziraju promene komponenti brzina u_1 na prilogu 34 ($f = 0.02$), može se zaključiti da postoji razlika u karakteru promena po vremenu, u zavisnosti od položaja tačke u vodotocima. Situacija postaje jasnija kada se Furijeovom transformacijom iz vremenskog domena predje u frekventni. Na taj način su transformisane promene komponenti brzina u_1 , u karakterističnim tačkama 987 (nalazi se u blizini uzvodne granice na rukavcu Dunava) i 400 (nalazi se nizvodno od ušća rukavca Dunava u Savu). Isti postupak primenjen je i na seriji pseudo-slučajnih vrednosti, koja je generisana potprogramom korišćenim u glavnom programu za proračun krivolinijskim koordinatama. Sve tri serije imale su po 1280 podataka, a u postupku „brze“ Furijeove transformacije istovremeno je obradjivano po 256 podataka.

Na prilogu 40 prikazane su spektralne gustine (gustina spektra snage) za: a) pseudo-slučajne promenljive, b) promene komponente brzine u_1 u tački 987 i c) promene komponente brzine u_1 u tački 400. Spektralna gustina pseudo-slučajne promenljive pokazuje da pobuda ima karakteristike "belog šuma" odnosno da su u njoj podjednako zastupljene periodične promene svih frekvenci. Kada bi se povećao broj podataka, spektralna gustina bi težila svom teorijskom obliku - horizontalnoj pravoj. Spektralna gustina komponente brzine u tački 987, pokazuje da su stohastičke komponente koje su dodavane turbulentnim promenljivim pobudile stvaranje raznih periodičnih promena, od kojih najviše energije ima promena sa frekvencom od 0.00312 Hz (odgovara perioda od 320 s), ali i periodične promene sa višim frekvencama, sve do 0.0175 Hz , još uvek imaju značajan deo energije. U blizini uzvodnih granica započinje stvaranje vrtloga, koji duž toka postaju sve stabilniji i dominantniji. Tako se na spektralnoj gustini komponente brzine u tački 400, primećuje da je udeo periodičnih promena sa višim frekvencama bitno smanjen i da najveći deo energije imaju periodične promene sa frekvencom od 0.00156 Hz (640 s) do 0.00312 Hz (320 s). Duž toka rastu i intenziteti periodičnih promena, pa su tako potpuno različite razmere za ordinate na dijagramima b) i c) na prilogu 40.

Na kraju se može zaključiti, da se u pseudo-slučajnim promenljivim sadrže periodične promene svih perioda, a da formiranje vrtloga u toku najveći deo energije prenosi u periodične promene koje odgovaraju dimenzijama najvažnijih vrtloga. Inače, frekvencija periodičnih promena kroz vreme, u računskim tačkama u toku, zavisi od veličine vrtloga koji ih izazivaju i brzine kretanja vode.

Prilikom izvođenja jednačine održanja *SGS* turbulentne kinetičke energije osrednjene po dubini \tilde{k}_g , u poglavlju 2 jednačina (2.62), postavljena je hipoteza da se deo produkcije \tilde{k}_g , koji je posledica nejednolikosti rasporeda brzina po dubini, može izračunati jednačinom (2.64). Ovom jednačinom izvorski član P_{kV} se definiše preko brzina tečenja vode, dubine vode i empirijske konstante c_{ver} . Da bi se proverio značaj postavljene hipoteze urađjen je proračun u kome je deo produkcije \tilde{k}_g , koji je posledica nejednolikosti rasporeda brzina po dubini, iznosi $P_{kV}/2$, odnosno dvostruko je manji od veličine definisane jednačinom (2.64). Rezultati proračuna, koji je u svim drugim elementima bio jednak prethodnom, prikazani su na prilogima 41 i 42. Poredjenjem priloga 29 i 41, može se zaključiti da smanjenje produkcije \tilde{k}_g , koja je posledica nejednolikosti rasporeda brzina po dubini, zanemarljivo utiče na rasporede brzina po oblasti tečenja. Nešto je drugačija situacija, ako se uporede prilozima 31 i 42, na kojima su dati odgovarajući rasporede \tilde{k}_g po oblasti tečenja. U delovima vodotoka, gde nema velikih gradijenata brzina, smanjenje P_{kV} izaziva i smanjenje \tilde{k}_g , ali tamo gde je produkcija \tilde{k}_g uglavnom posledica velikih razlika brzina promene su male. Tako se maksimalne vrednosti \tilde{k}_g smanjuju samo za 13 %. Ovakve promene \tilde{k}_g ne mogu izazvati značajnije promene u izračunatim rasporedima brzinama, što znači da uticaj ovog dela produkcije \tilde{k}_g , u proračunima tečenja u otvorenim tokovima sa sličnim hidrauličkim karakteristikama, nije veliki.

Rezultati proračuna sa drugom varijantom numeričke mreže

Da bi se odredio uticaj „gušće“ numeričke mreže na rezultate proračuna, obavljani su proračuni sa drugom varijantom numeričke mreže (prilog 26). Granični i početni uslovi, zadani su na isti način kao u prethodnoj seriji proračuna. Pošto je druga varijanta numeričke mreže dvostruko „gušća“ od prve, usvojen je vremenski korak $\Delta t = 2.5 \text{ s}$, da bi se zadržao isti Courantov broj. Vreme za koje granični uslovi, po kubnom zakonu dostižu svoju konačnu vrednost, produženo je na 1200 vremenskih koraka (3000 s). Svi problemi, koji su se u prethodnoj seriji proračuna javljali u vezi osetljivosti proračuna na promene nizvodnog graničnog uslova, ponovo su se pojavili, ali u izraženijoj formi. Problemi su rešeni posle velikog broja proračuna, u kojima su probanjem određene promene kota nivoa vode, na najnižvodnijem profilu. Kote nivoa uz levu obalu, podignute su za oko 2 mm, a uz desnu obalu spuštene za 0.5 mm.

Na prilogu 43, prikazani su izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, sa drugom varijantom numeričke mreže, uz prikazivanje svake druge brzine u pravcu ξ^2 i svake četvrte brzine u pravcu ξ^1 . Ako se rezultati uporede sa odgovarajućim iz prethodne serije proračuna, datim na prilogu 43, može se zaključiti, da je jedina razlika u nešto manjim dimenzijama recirkulacione zone uz desnu obalu, na nizvodnom kraju modela. S obzirom, da je prostorna diskretizacija preciznija i da je veliki trud uložan u podešavanje nizvodnog graničnog uslova, ovakve razlike su očekivane.

Ako se uporede izračunati rasporedi *SGS* turbulentne kinetičke energije osrednjene po dubini \tilde{k}_g , za dve varijante numeričke mreže, dati na prilogima 31 i 44, odmah se uočava da se maksimalne vrednosti \tilde{k}_g razlikuju. Tako je za prvu varijantu mreže $_{max}\tilde{k}_g = 0.0509 \text{ (m/s)}^2$, a za drugu $_{max}\tilde{k}_g = 0.0379 \text{ (m/s)}^2$, što daje razliku od -13 %. U delovima vodotoka gde su vrednosti \tilde{k}_g manje, razlike iznose oko -40 %. Prostorni raspored \tilde{k}_g sa drugom varijantom numeričke mreže, je sličan rasporedu sa prvom varijantom mreže, ali su sve vrednosti smanjene. Pošto su manje vrednosti \tilde{k}_g više smanjene, prostorni raspored je izrazitiji.

Pored toga, što promena numeričke mreže utiče na \tilde{k}_g , menja se i turbulentna viskoznost osrednjana po dubini $\tilde{\nu}_t$, koja je definisana jednačinom (2.61). Ovo je posledica hipoteze da se strujno polje deli na kretanje velikih razmera, koje se izračunava i doprinos malih vrtloga, čiji se uticaj modeliše. Smanjenjem širine prostornog filtra Δ_g smanjuje se i doprinos malih vrtloga koji se modelišu.

Na osnovu izračunatih rasporeda brzina i kota nivoa vode, sa drugom varijantom numeričke mreže, određene su promene vrtložnosti, prikazane preko linija jednakih vrtložnosti na prilogu 45. Ako se prostorni rasporedi vrtložnosti, uporede sa odgovarajućim rasporedima za prvu varijantu, prikazanim na prilogu 32, može se zaključiti da nema bitnih razlika. Zahvaljujući preciznijoj prostornoj diskretizaciji linije jednakih vrtložnosti su nešto „gladje“, ali se time još više povećava razlika u odnosu na nepravilno periodičnu zonu mešanja rukavca Dunava i Save, date na

aerofotogrametrijskom snimku, na prilogu 30.

I proračuni sa drugom varijantom numeričke mreže, urađeni su uz dodavanje stohastičke komponente turbulentnim promenljivim, prema jednačini (4.17). Postupak je primenjen u svim tačkama numeričke mreže, počevši od $t = 14000$ s, sa tri različita f od: 0.02, 0.01 i 0.005. Odabrane su četiri karakteristične tačke (vidi prilog 26), koje su imale sličan položaj kao u proračunima sa prvom varijantom mreže. Tačke 1716 i 3883 se nalaze blizu uzvodnih granica, na Savi, odnosno na rukavcu Dunava, a tačke 1554 i 2447, su nizvodno od ušća. Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karakterističnim tačkama, sa različitim koeficijentom f , prikazani su na priložima: 46, 47, 48 i 49. U proračunu u kome je koeficijent $f = 0.00$ (prilog 46), što znači da turbulentnim veličinama nisu dodavane stohastičke komponente, ustaljeno tečenje je teško postignuto, delimično zbog opisanih problema sa nizvodnim graničnim uslovom. Glavni problem je bio u tome, što je proračun je postao nestabilniji, zbog smanjene turbulentne viskoznosti. Po dodavanju stohastičkih komponenti turbulentnim veličinama, kao i u prethodnim proračunima, u toku su se formirali vrtlozi, koji su uticali na promene brzina u karakterističnim tačkama, što je prikazano na ostalim priložima sa promenama brzina u vremenu. Zbog smanjene turbulentne viskoznosti, pseudo-slučajne promenljive su pobudile veće neustaljenosti brzina, nego što je to bio slučaj u proračunima sa prvom varijantom numeričke mreže (vidi priloge 34, 35 i 36). U proračunu u kome je koeficijent $f = 0.02$ (prilog 47), u toku su se formirali snažni vrtlozi, koji su na nizvodnoj granici uz obale toliko poremetili tok da se proračun pre predviđenog vremena raspao. Može se dakle zaključiti, da se sa gušćom numeričkom mrežom i sa manjim intenzitetom stohastičkih komponenti, može izazvati pojava vrtloga u toku.

Sa promenom numeričke mreže, promenile su se i frekventne karakteristike promena brzina u karakterističnim tačkama. Poredjenjem odgovarajućih promena u tačkama 630 (prilog 35) i 1554 (prilog 43) zaključuje se, da promene brzina na drugoj varijanti numeričke mreže, imaju višu frekvencu nego na prvoj varijanti mreže. S obzirom da je brzina tečenja vode u oba proračuna ista, do povećanja frekvence je došlo zbog smanjenja dimenzija vrtloga. Ostali zaključci, koji su ranije izneti o frekventnim karakteristikama promena brzina u tački, u zavisnosti od položaja tačke u vodotocima, važe i u slučaju proračuna sa drugom varijantom numeričke mreže.

Na prilogu 50, dat je raspored brzina osrednjenih po dubini, sa drugom varijantom mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.01$. Razlike u rasporedu brzina, u odnosu na proračun u kome nisu dodavane stohastičke komponente (prilog 43), se mogu lako uočiti. U recirkulacionoj zoni, na nizvodnom delu uz desnu obalu, formirao se vrtlog obeležen sa „A“. Kao i na prilogu 37 (proračun sa prvom varijantom mreže), rasporedi brzina su nepravilni. Sve ovo su posledice vrtloga, koji se jasno mogu videti na priložima 51 i 52, na kojima su prikazane izračunata vrtložnost Ω , sa drugom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.01$, za vremena 17820 s i 18000 s

($\Delta\Omega = 3\% = 0.002071/s$). Kao i na odgovarajućim priložima za proračun sa prvom varijantom numeričke mreže (prilozi 38 i 39), u toku se mogu uočiti mnogi vrtlozi, od kojih su neki stacionarni, a drugi se kreću („A“, „B“ i „C“). Dimenzije vrtloga su nešto manje i slične su dimenzijama glavnih vrtloga sa aerofotogrametrijskog snimaka sa priloga 30. Sve ovo doprinosi utisku sličnosti između toka snimljenog na fotografiji i izračunatog matematičkim modelom.

Iako se pri verifikaciji matematičkog modela sa krivolinijskim koordinatama, na primeru tečenja na ušću Save u Dunav, raspolagalo sa manje izmerenih podataka, nego što je to bilo u primeru tečenja u rečnoj krivini, proverene su značajne hipoteze, o čemu se mogu doneti i zaključci.

Smanjenjem rastojanje između tačaka numeričke mreže, rezultati proračuna postaju precizniji, a istovremeno, zbog smanjenja dimenzija prostornog filtra Δ_g , smanjuje se i deo malih vrtloga, čiji se uticaj modeliše. Tako se smanjuje i turbulentna viskoznost $\tilde{\nu}_t$, a izračunate brzine postaju nestabilnije - osetljivije. Ova osobina je direktna posledica hipoteza, koje su postavljene pri osrednjavanju osnovnih jednačina po prostoru. Efekti dodavanja stohastičkih komponenti turbulentnim promenljivim su veći, ako je izračunato strujno polje osetljivije, pa se može zaključiti da osrednjavanje turbulentnih veličina po prostoru, ima prednosti u odnosu na osrednjavanje u vremenu.

Ako se potvrdilo, da smanjenje rastojanja tačaka u numeričkoj mreži utiče na osetljivost polja brzina, može se postaviti pitanje: koliko treba da je rastojanje između tačaka numeričke mreže? Odgovor na pitanje je istovremeno i jednostavan i složen. Rastojanje između tačaka numeričke mreže treba da je nekoliko puta manje od najmanjeg vrtloga, koji se može izračunati u proračunu, a koji je važan u problemu koji se rešava. Tako se može reći, da je druga varijanta numeričke mreže odgovarajuća, za najveći deo vrtloga koji se javljaju u zoni mešanja na ušću Save u Dunav (prilog 30). Ako bi se, na primer, razmatrali problemi kanalizacionog ispusta manjih dimenzija, koji se nalazi uzvodno od Malog ratnog ostrva, onda bi za istu oblast proračuna numerička mreža morala biti gušća, u skladu sa interesom o manjim vrtlozima.

U toku proračuna sa matematičkim modelom sa krivolinijskim koordinatama, stohastičke komponente turbulentnih veličina su dodavane po celoj oblasti obuhvaćenoj proračunom. Proračuni su pokazali da je uz odgovarajuću gustinu numeričke mreže, dovoljno da koeficijent intenziteta slučajne promenljive f ima vrednost oko 0.01. Ovako mali intenziteti ne narušavaju previše zakone održanja. Sa druge strane, u matematičkom modelu sa krivolinijskim koordinatama na stranama konačnih zapremine u računskom prostoru, moraju se definisati obe Dekartove koordinate brzina. To znači da se zakoni održanja, u svakoj konačnoj zapremini, narušavaju osam puta. Tako su dosta velike šanse da se i u okviru jedne konačne zapremine ova narušavanja međusobno potiru. Može se zaključiti, da je bolje stohastičke komponente turbulentnih veličina dodavati po celoj oblasti proračuna, nego u pojedinim

tačkama, izabranim po nekom kriterijumu.

Dodavanjem stohastičkih komponenti turbulentnim veličinama u izračunatom polju brzina pobudjuju se vrtlozi, koji menjaju karakter strujanja. Izračunati vrtlozi su sličnih dimenzija kao vrtlozi koji su registrovani na aerofotogrametrijskom snimku (prilog 30). Frekventne karakteristike promena brzina u tačkama, u skladu su sa osnovnim znanjima o karakteristikama turbulentnog tečenja. Za sigurnije zaključke, matematički model bi trebalo verifikovati poredjenjem rezultata proračuna sa detaljnijim merenjima brzina u vodotocima.

5.3 Zaključci o verifikaciji matematičkog modela

U toku verifikacije matematičkog modela, sa Dekartovim i krivolinijskim koordinatama, rezultati proračuna su poredjeni: medjusobno, sa empirijskim formulama, merenjima na hidrauličkom modelu i merenjima u prirodi. Rezultati proračuna tečenja u oblastima jednostavne geometrije u skladu su sa znanjima klasične hidraulike i empirijskim zavisnostima. Proračuni tečenja zakrivljenih oblasti, pokazali su da rezultati ne zavise od položaja vodotoka u horizontalnoj ravni, a da se sa merenjima na hidrauličkom modelu slažu u tolikoj meri da se mogu primeniti u hidrotehničkoj praksi. Dodavanje stohastičkih komponenti turbulentnim promenljivim, po celoj oblasti obuhvaćenoj proračunom, pobudilo je u izračunatom polju brzina vrtloge, čije su dimenzije u skladu sa osmotrenim u prirodi. Da bi se potvrdile karakteristike ovako dobijenih vrtloga, trebalo bi rezultate proračuna uporediti sa odgovarajućim detaljnim merenjima brzina u vodotocima. U svakom slučaju, dodavanjem stohastičkih komponenti turbulentnim veličinama karakter izračunatog polja brzina približio se stanju u prirodi.

Treba napomenuti da se verifikacija matematičkog modela nastavlja sa svakim novim proračunom, kojim se mogu potvrditi dobre osobine modela, ili otkriti slabosti i ograničenja, koje svaki matematički model ima.

Poglavlje 6

Zaključak

6.1 Postavljene hipoteze i njihova potvrda

Da bi se osnovne jednačine održanja, koje predstavljaju matematički model tečenja vode u plitkim oblastima strujanja, mogle pojednostaviti postavljene su sledeće hipoteze:

- Zbog oblika oblasti strujanja i razvijene turbulencije, osnovne jednačine se mogu osrednjiti po dubini i tako problem od trodimenzionalnog svesti na ravnanski.
- Osnovne jednačine se prostorno filtriraju, po preostala dva pravca, čime se strujanje deli na: glavni tok i velike vrtloge i vrtloge koji su manji od dimenzija prostornog filtra.
- Glavna posledica prostornog filtriranja, Reynoldsovi *SGS* naponi modelišu se preko jedno-jednačinskog modela *SGS* turbulentne kinetičke energije. Uticaj malih vrtloga na strujanje, unosi se u osnovne jednačine održanja, ali turbulentne promenljive gube stohastički karakter.
- Dodavanjem stohastičkih komponenti turbulentnim promenljivim u izračunatom polju brzina stvaraju se vrtlozi.
- Transformisanjem osnovnih jednačina u Dekartovim koordinatama, u osnovne jednačine u krivolinijskim koordinatama, matematičkim modelom se mogu razmatrati i strujanja vode u vodotocima nepravilne i složene osnove.

Na početku verifikacije matematičkog modela primeri proračuna su bili jednostavni, što je dozvoljavalo proveru rezultata proračuna znanjima klasične hidraulike i empirijskim zavisnostima. Zatim su, za složenije primere, poredjena merenje na hidrauličkom modelu i u prirodi, sa rezultatima proračuna. Slaganje merenja na

hidrauličkom modelu izrazito zakrivljene rečne krivine, sa rezultatima proračuna je dobro u tolikoj meri, da se matematički model može primeniti u hidrotehničkoj praksi.

Poredjenje, relativno skromnih merenja sa ušća Save u Dunav, sa rezultatima proračuna, pokazalo je dobro međusobno slaganje. Dimenzije izračunatih vrtloga, koji su pobudjeni dodavanjem stohastičkih komponenti turbulentnim veličinama, slične su dimenzijama vrtloga na aerofotogrametrijskom snimku. Istovremeno, turbulentne promenljive su promenile karakter. Pored dodatog stohastičkog karaktera, razvio se i periodični karakter, kao posledica postojanja i kretanja pobudjenih vrtloga. Tako se karakter izračunatog polja brzina približio situaciji u prirodi.

Na kraju, može se zaključiti da je poredjenjem merenja sa rezultatima proračuna matematički model verifikovan, čime su potvrđene postavljene hipoteze.

6.2 Ostali zaključci

U toku verifikacije matematičkog modela, potvrdilo se da je izborom širine prostornog filtra za turbulentnu dužinsku razmeru, pristup osrednjavanja osnovnih jednačina po prostoru stekao osobinu, koja olakšava pobudjivanje i razvoj vrtloga u izračunatom turbulentnom toku. Za razliku od pristupa osrednjavanja osnovnih jednačina po vremenu, izborom gušće numeričke mreže, odnosno manjom širinom prostornog filtra, smanjuje se turbulentna viskoznost, jer se smanjuje i broj vrtloga koji se modelišu, a povećava broj koji se izračunava. Zbog toga je moguće da se i sa manjim intenzitetima stohastičkih komponenti turbulentnih promenljivih pobudi stvaranje vrtloga u turbulentnom toku. Ova osobina je značajna prednost pristupa osrednjavanja osnovnih jednačina po prostoru, nad pristupom osrednjavanja po vremenu.

Korišćenjem osnovnih jednačina održanja u krivolinijskim koordinatama, oblast primene matematičkog modela je proširena na prirodne vodotoke i vodotoke sa složenom osnovom. Osnovne jednačine održanja u krivolinijskim koordinatama, dobijene su transformisanjem osnovnih jednačina u Dekartovim koordinatama, zamenom koordinata i izvoda po prostoru, uz zadržavanje istih zavisnih promenljivih. Oba sistema jednačina imaju strogo konzervativnu formu i sličnu strukturu, jer je zadržan isti broj članova jednačina. Tako su izmene u programu za proračun smanjene na najmanju meru.

Strogo konzervativna forma osnovnih jednačina i metode konačnih zapremina i razdvajanja operatora, dale su numerički postupak sa malom numeričkom difuzijom. Ovo je posebno važno zbog pobudjivanja i razvoja vrtloga u izračunatom turbulentnom toku, gde je svaka viskoznost, bilo da je prava, turbulentna, ili numerička, nepoželjna.

6.3 Oblasti praktične primene rada

Razvijeni matematički model može se koristiti za proračune tečenja u prirodnim i veštačkim vodotocima. Odredjivanje rasporeda brzina i nivoa vode često je ključni problem, čijim se rešenjem rešavaju mnogi problemi rečne hidraulike. Proračuni se mogu obaviti i na računarima skromnijih mogućnosti, kao što su personalni računari, koji se koriste za obradu tekstova i druge slične poslove. Tako je otvoren put lakšeg korišćenja modela u hidrotehničkoj praksi.

U proračunima se koristi svega nekoliko konstanti, koje se ne moraju odrediti kroz postupak tariranja i kalibracije. To nikako ne znači da je svaki rezultat proračuna dobar i da zbog korišćenja matematičkog modela nema potrebe za terenskim merenjima i ispitivanjima na hidrauličkim modelima. U toku tumačenja rezultata proračuna, merenja mogu mnogo da pomognu, bilo da se radi o donošenju odluke o prostornoj diskretizaciji, ili o razjašnjavanju na prvi pogled nelogičnih rezultata. Matematički model treba shvatiti samo kao jedan od „alata“, koji pomaže da se reše hidrotehnički problemi u rečnoj hidraulici. Samo istovremenim korišćenjem svih raspoloživih pristupa, može se doći da najboljih hidrotehničkih rešenja.

Inače, kao što su merenja iz prirode dragocena pomoć u radu sa matematičkim modelom i proračuni uradjeni pre terenskih merenja mogu da pomognu u odredjivanju najboljih lokacija za merenja. Isti je slučaj i sa ispitivanjima na hidrauličkim modelima, gde prethodni proračuni mogu da pomognu u izboru razmera i dimenzija modela. I na kraju, postoji i mogućnost istovremenog rada na oba modela, gde se obično na matematičkom modelu ispituje veća oblast, a na hidrauličkom modelu detalji vezani za objekte.

6.4 Predlozi za dalja istraživanja

Da bi se preciznije odgovorilo na pitanje, da li su karakteristike izračunatih vrtloga, dobijenih dodavanjem stohastičkih komponenti turbulentnim promenljivim, slične vrtlozima koji se javljaju u vodotocima, bilo bi potrebno da se detaljnim merenjima prikupi više podataka. Tako bi se rezultati proračuna mogli verifikovati i nastaviti sa istraživanjem ove interesantne mogućnosti matematičkog modela. Jedan od razloga manjeg i kasnijeg interesovanja za pristup osrednjavanja turbulentnih veličina po prostoru, od osrednjavanja po vremenu, je i nedostatak odgovarajućih merenja. U skladu sa načinom osrednjavanja, za ovaj tip merenja treba meriti na što većem broju mernih mesta, u jednom vremenskom trenutku. Merenja sa ovakvim zahtevima je mnogo teže ostvariti, nego klasična merenja, u kojima se na nekoliko mernih mesta mere promene kroz vreme. Zbog toga, pouzdanija verifikacija matematičkih modela zasnovanih na osrednjavanju turbulentnih promenljivih po prostoru, mora sačekati razvoj odgovarajućih postupaka merenja.

Uvodjenjem dodatnih jednačina održanja neke pasivne hemijske materije, ili kretanja rečnog nanosa, mogu se proširiti mogućnosti modela. Model proširen na ovakav način, koristio bi se u rešavanju problema kvaliteta voda, ili deformacija rečnog korita. Može se reći da bi tek u rešavanju ovih problema, dobre osobine razvijenog matematičkog modela, došle do izražaja. Poznavanje tačnog rasporeda brzina, uključujući i pojavu vrtloga u toku, od velikog je značaja za rasprostiranje zagađene materije, ili deformaciju rečnog korita. Ove pojave su posledica rasporeda brzina i zbog toga su vrlo osetljive na promene rasporeda brzina. U modelu se već koristi jednačina održanja *SGS* turbulentne kinetičke energije, koju bi za pretvaranje u jednačinu održanja pasivne hemijske materije, ili kretanja rečnog nanosa, trebalo samo neznatno izmeniti. Glavni problem istraživanja u ovom pravcu je obezbeđivanje merenja, kojima bi se ovako prošireni model verifikovao.

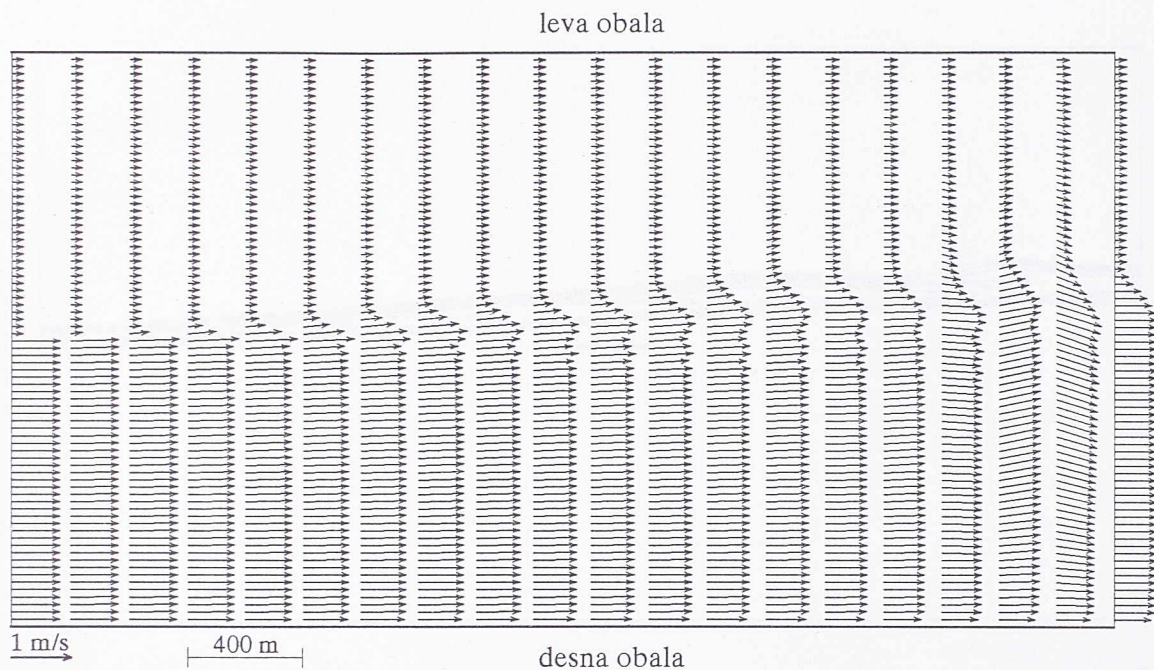
U narednom periodu treba očekivati dalje povećanje mogućnosti računara, koji su lako dostupni hidrotehničkim inženjerima. Zbog toga bi trebalo razviti trodimenzionalni matematički model za tečenje vode u plitkim oblastima strujanja. I u njemu bi trebalo zadržati različit pristup promenama veličina po vertikali i u horizontalnoj ravni.

Prilozi

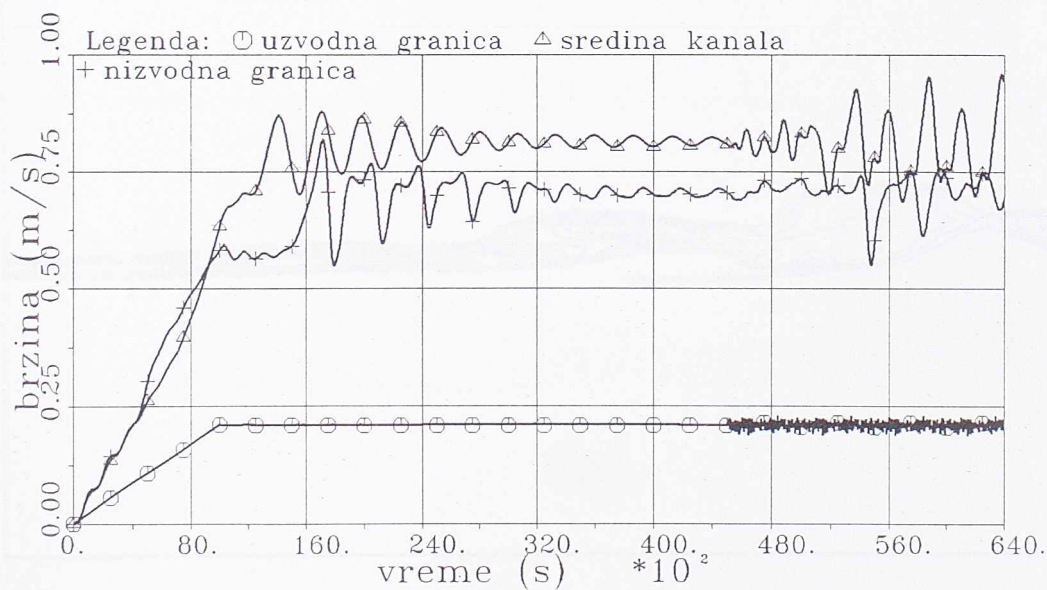
Prilog 1. Osnovni podaci iz analize, prikazani na papirnoj mreži (u skali $0,010 \text{ s/m}^2$), iz raspršenog brzina, na $t = 30000 \text{ s}$ (od $t = 3000$ vremena iz početka).



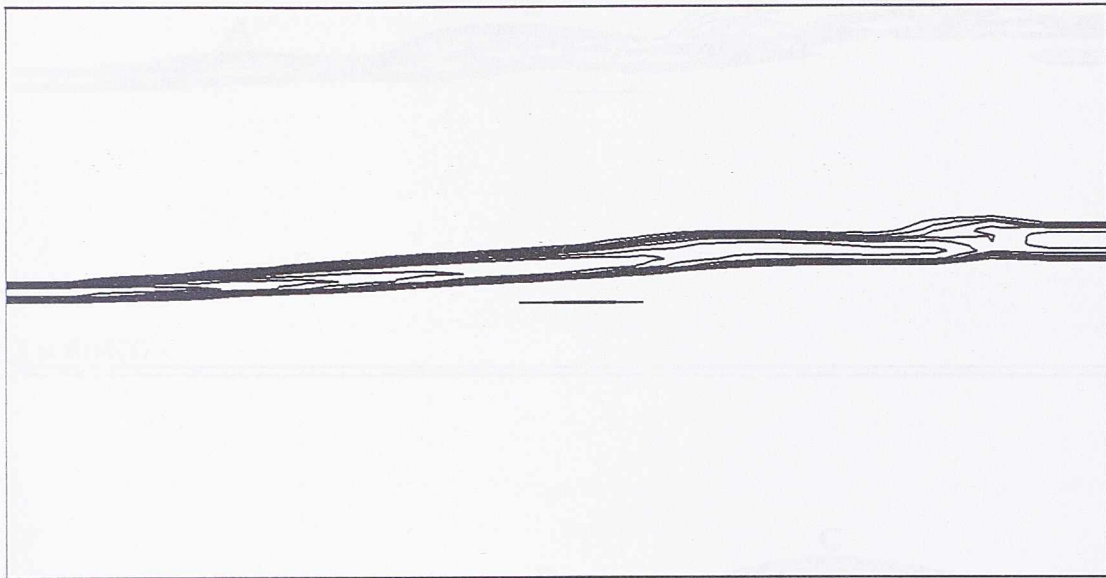
Prilog 2. Promena brzina v_x u toku vremena, duž pravine pravog kanala, na nekoj udaljenoj sredini rebraste deonice (unutrašnja granica).



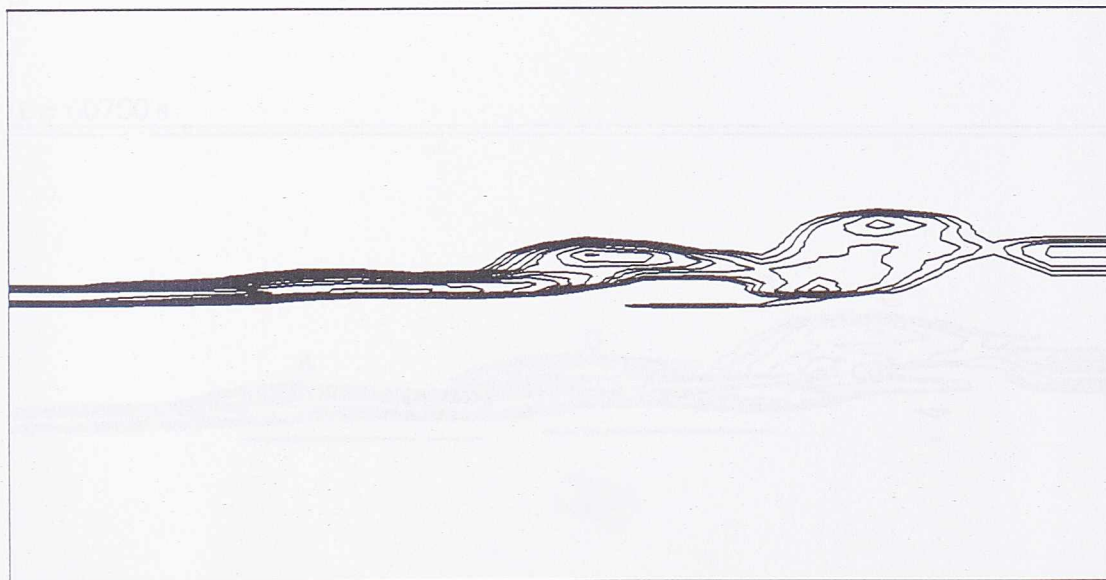
Prilog 1: Osnova pravog kanala, pravougaonog poprečnog preseka ($n = 0.016 \text{ s/m}^{1/3}$), sa rasporedom brzina, za $t = 45000 \text{ s}$, posle 1800 vremenskih koraka.



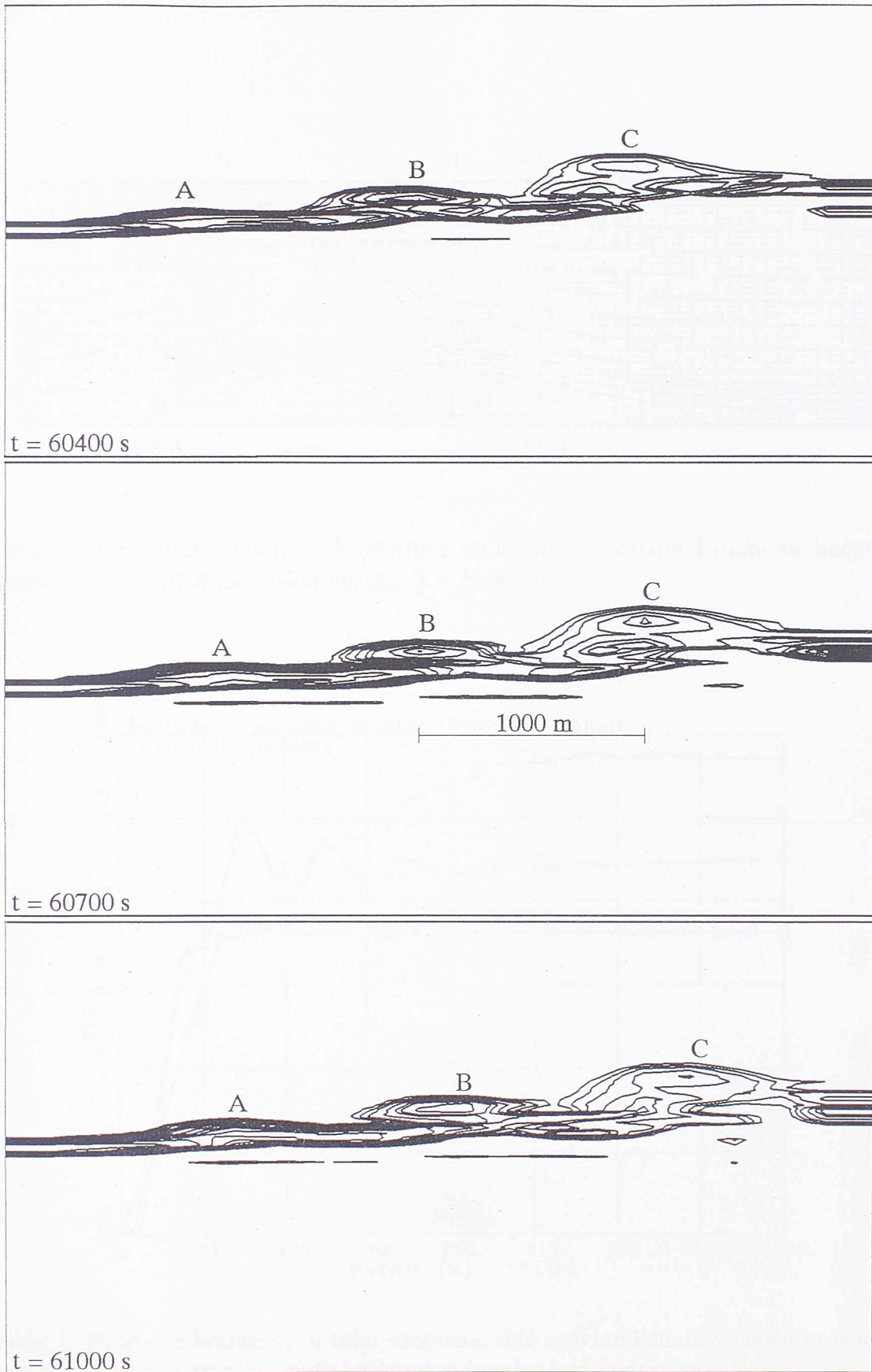
Prilog 2: Promene brzina u_1 , u toku vremena, duž osovine pravog kanala: na uzvodnoj granici, sredini računске deonice i nizvodnoj granici.



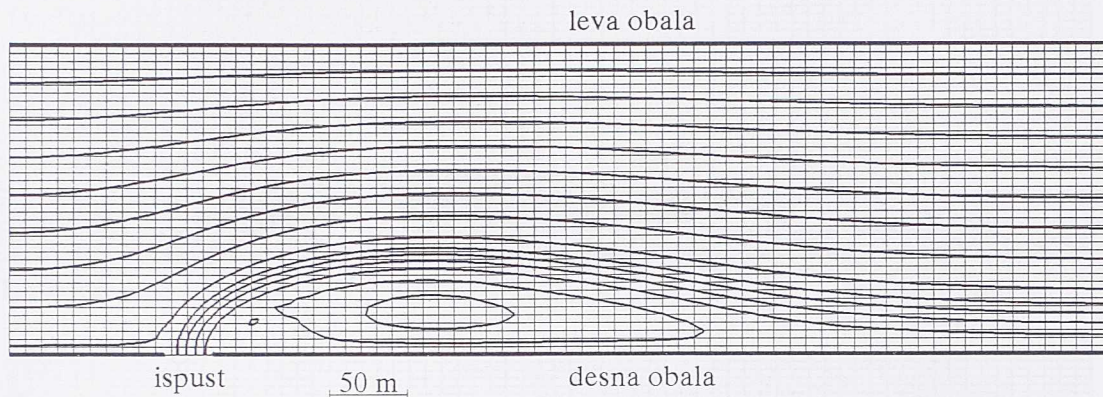
Prilog 3: Raspored vrtložnosti Ω , u pravom kanalu, pravougaonog poprečnog preseka ($n = 0.016 \text{ s/m}^{1/3}$), za $t = 45000 \text{ s}$, posle 1800 vremenskih koraka.



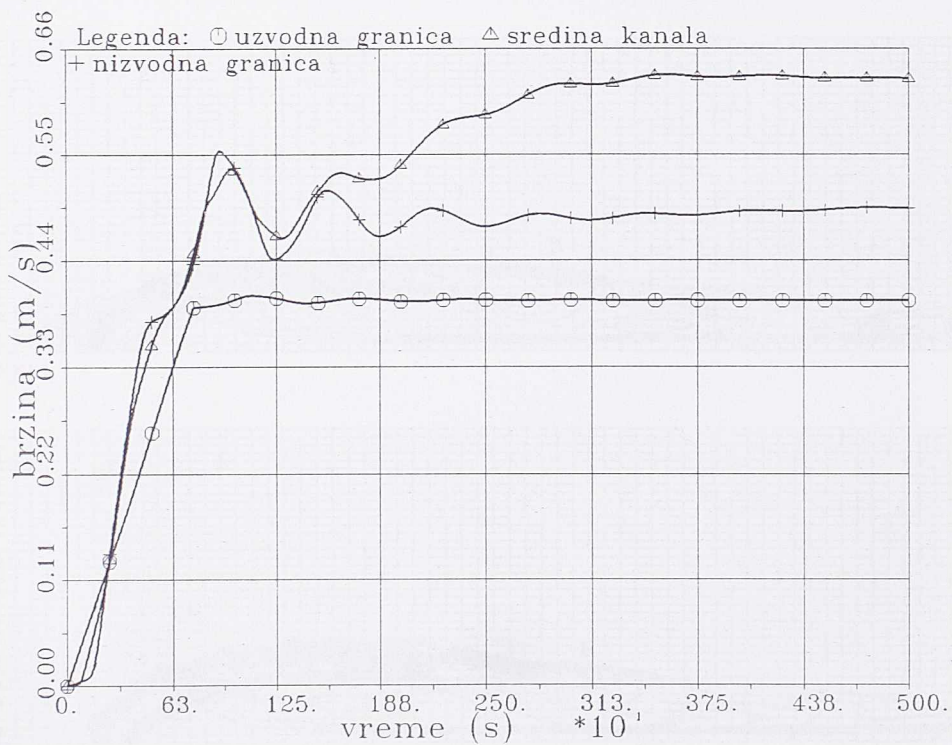
Prilog 4: Raspored vrtložnosti Ω , u pravom kanalu, pravougaonog poprečnog preseka ($n = 0.012 \text{ s/m}^{1/3}$), za $t = 37125 \text{ s}$, posle 1485 vremenskih koraka.



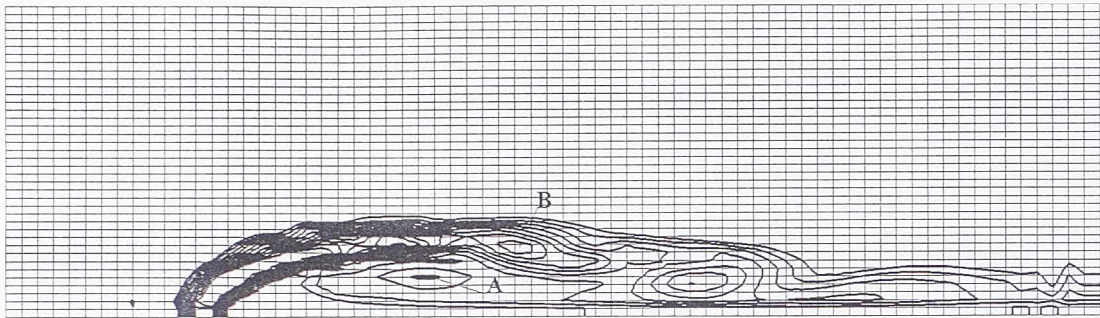
Prilog 5: Promene vrtložnosti Ω , u pravom kanalu pravougaonog poprečnog preseka ($n = 0.016 \text{ s/m}^{1/3}$), kroz vreme.



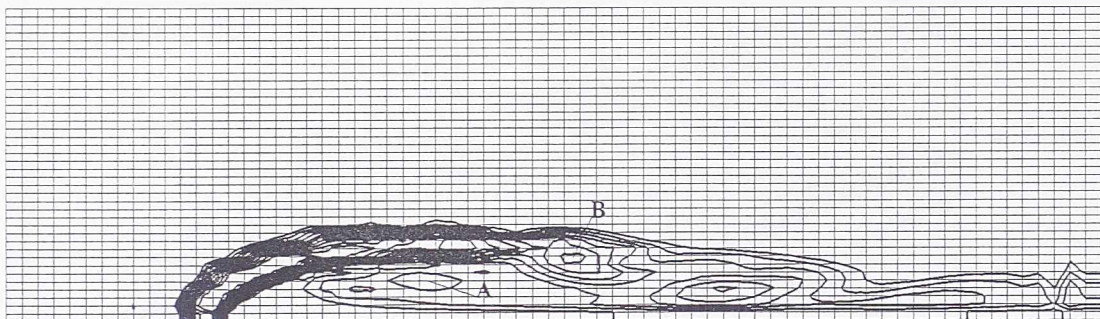
Prilog 6: Izračunate strujnice Ψ (strujna funkcija), u pravom kanalu sa bočnim ispustom, posle 1000 računskih koraka ($t = 5000$ s).



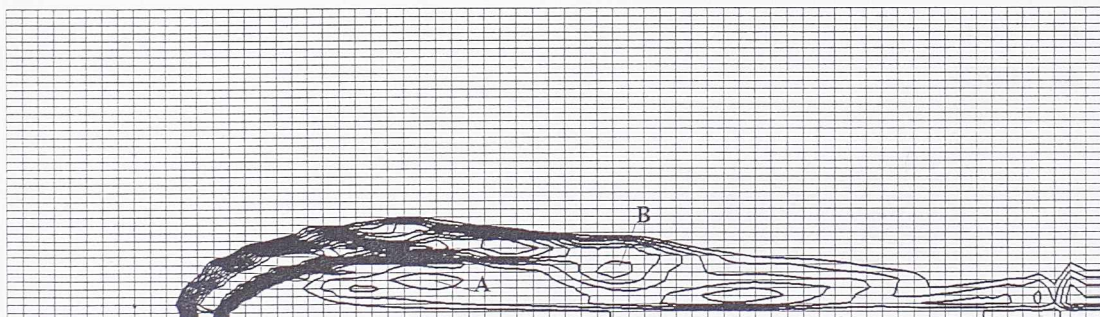
Prilog 7: Promene brzina u_1 , u toku vremena, duž osovine kanala sa bočnim ispustom: na uzvodnoj granici, sredini računске deonice i nizvodnoj granici.



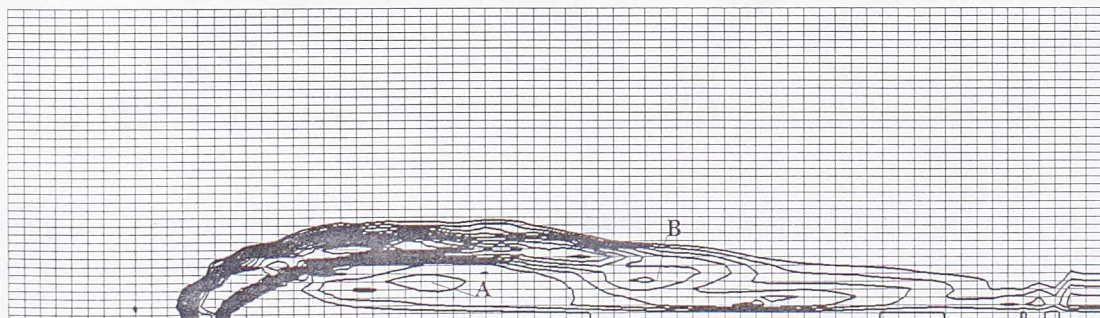
$T = 6500$ s



$T = 6600$ s

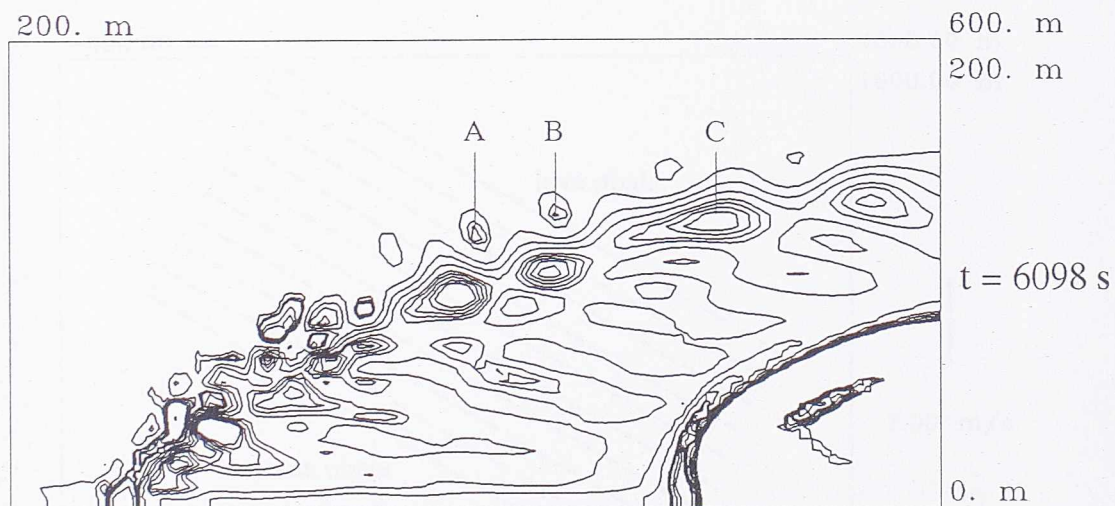
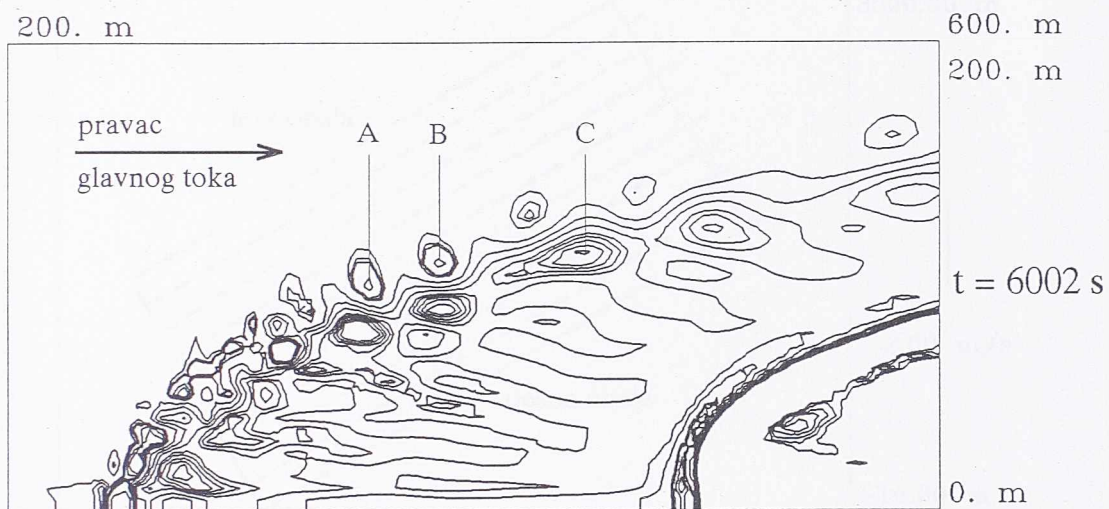


$T = 6700$ s

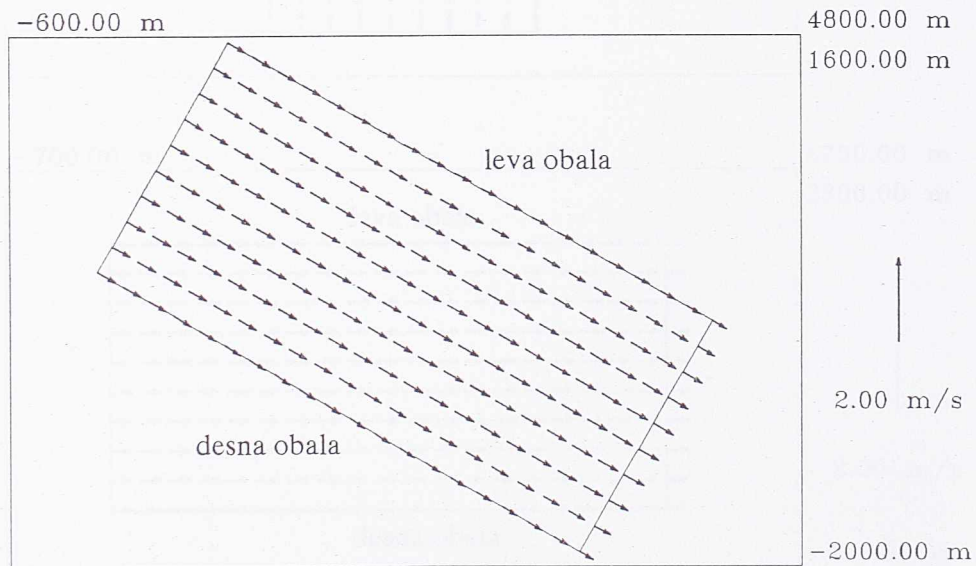
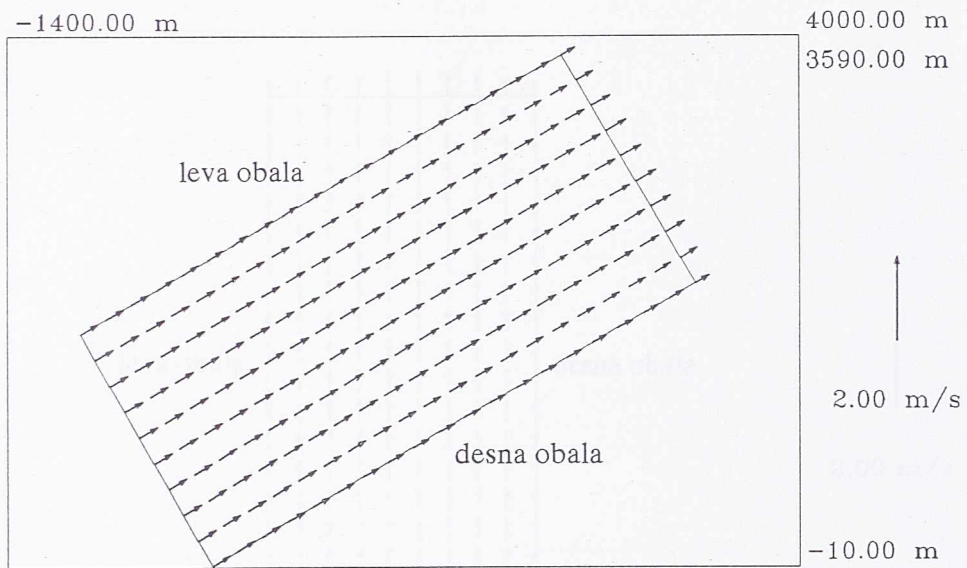


$T = 6800$ s

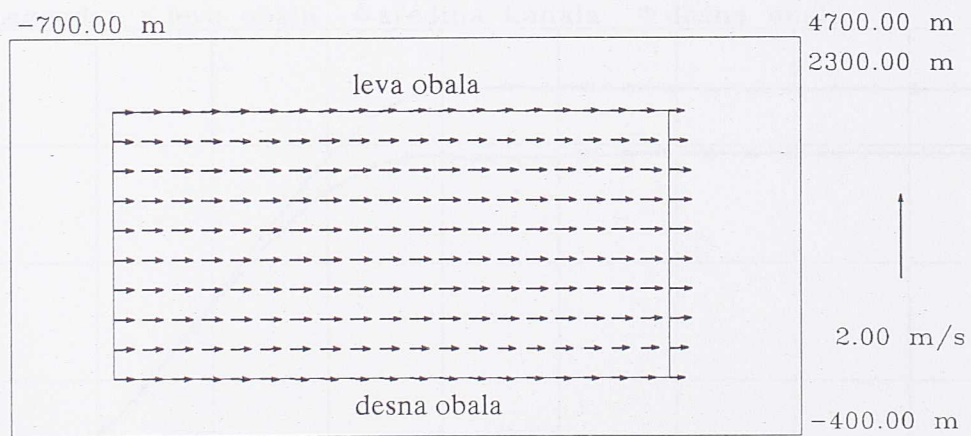
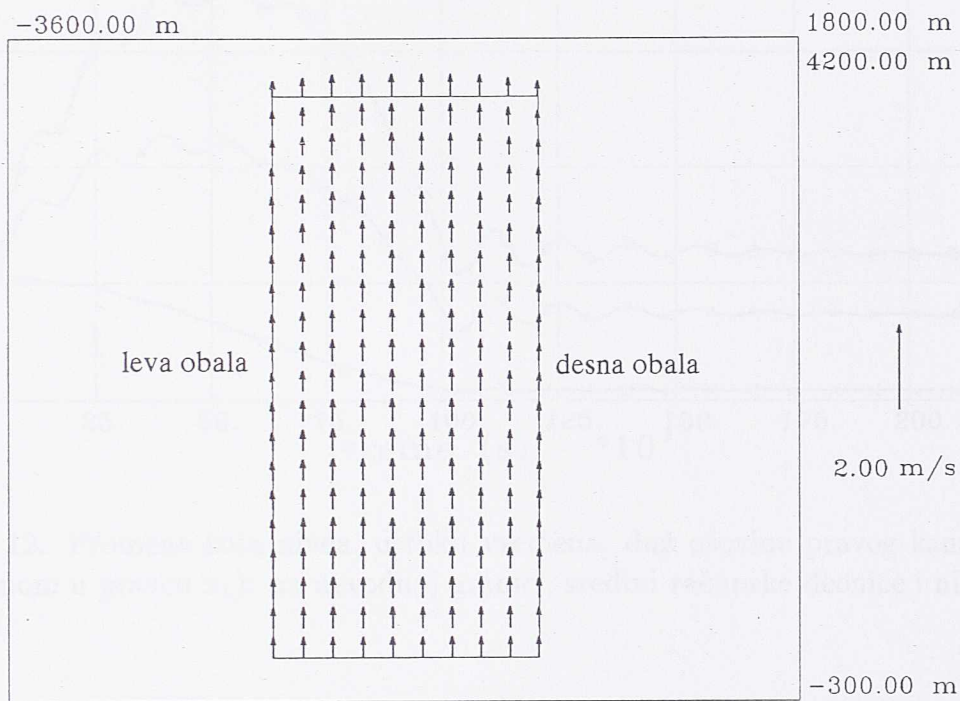
Prilog 8: Promene vrtložnost Ω , u pravom kanalu sa bočnim ispustom, kroz vreme.



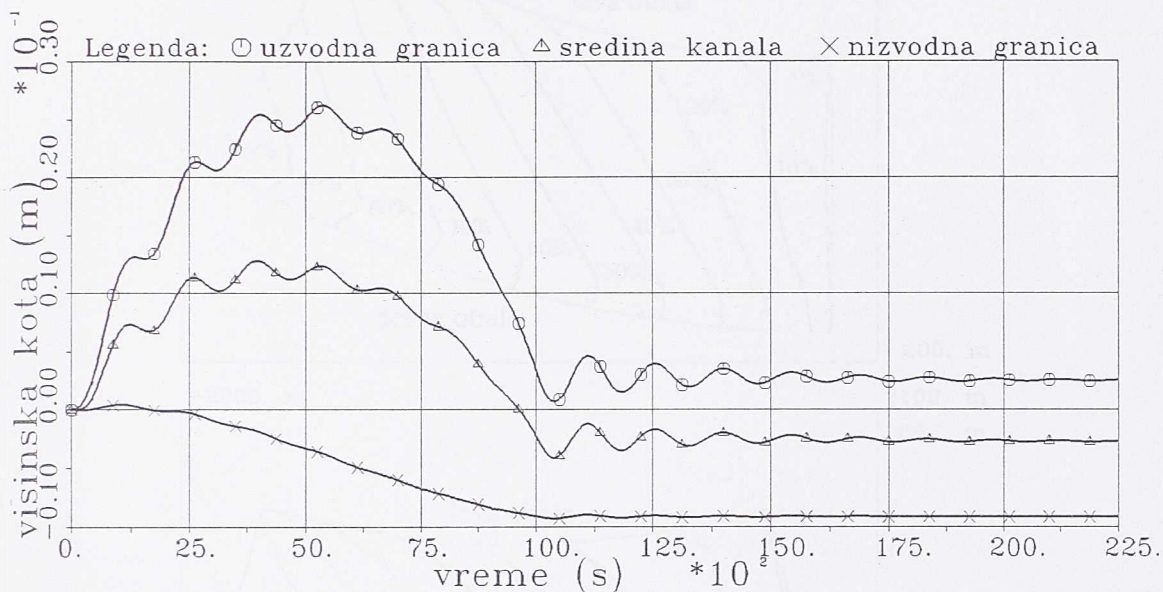
Prilog 9: Promene vrtložnosti Ω , u pravom kanalu sa bočnim ispustom, u neposrednoj blizini ispusta, kroz vreme.



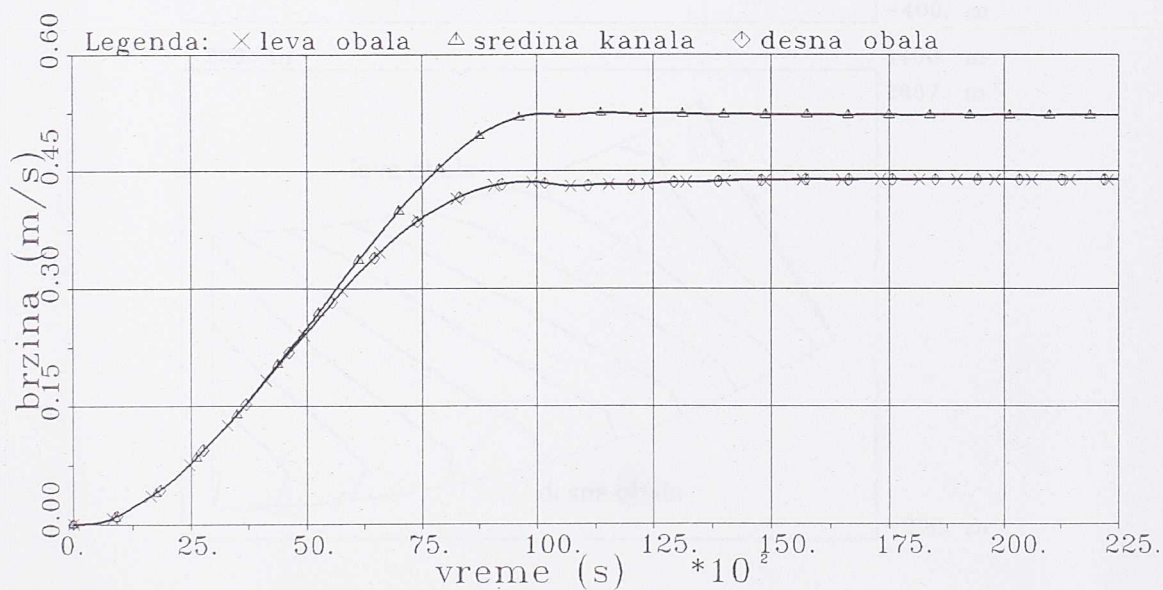
Prilog 10: Rasporedi brzina u pravom kanalu, za različite položaje kanala u horizontalnoj ravni. I deo.



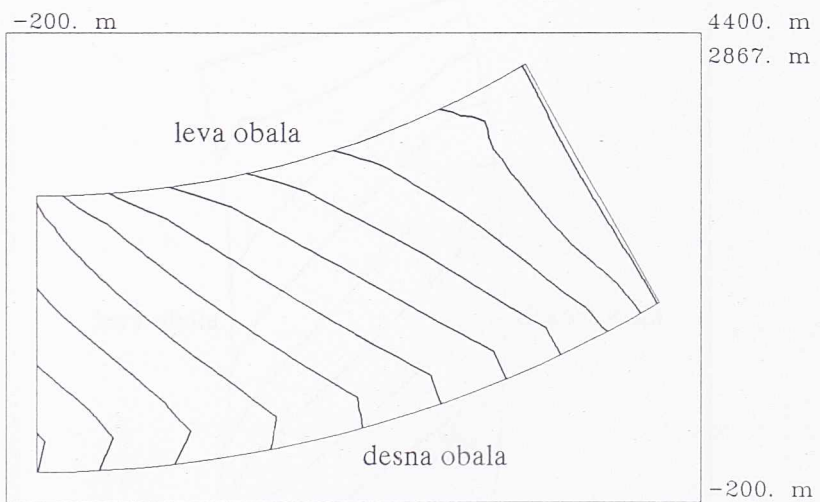
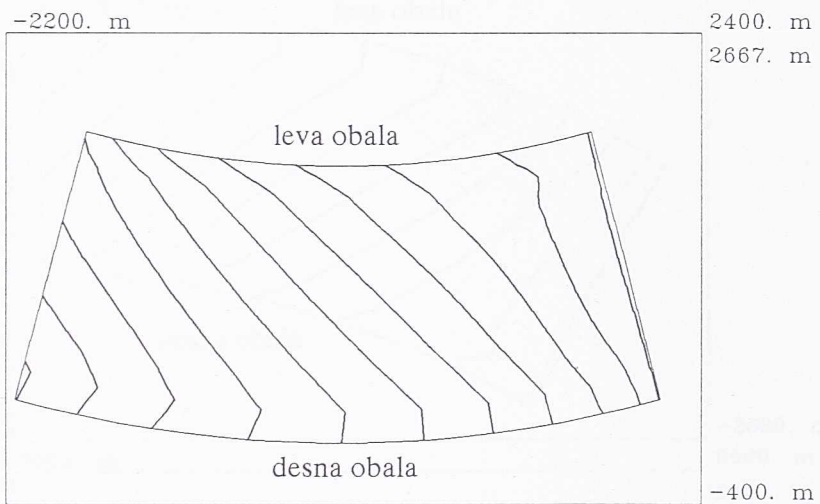
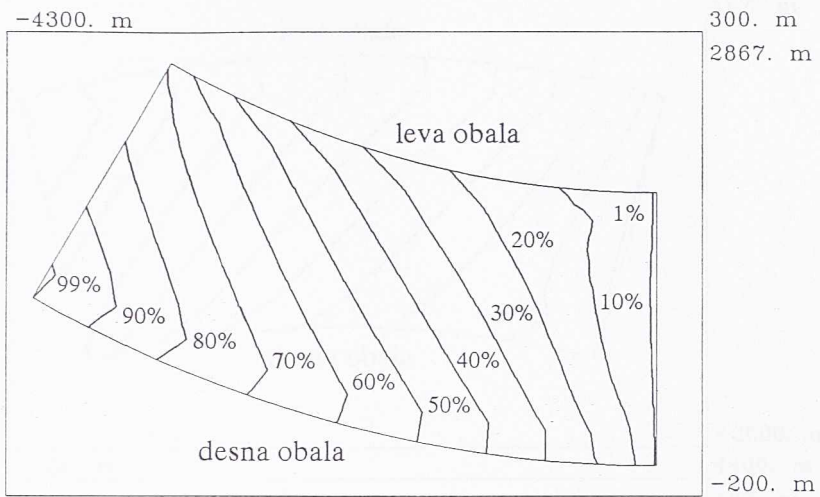
Prilog 11: Rasporedi brzina u pravom kanalu, za različite položaje kanala u horizontalnoj ravni. II deo.



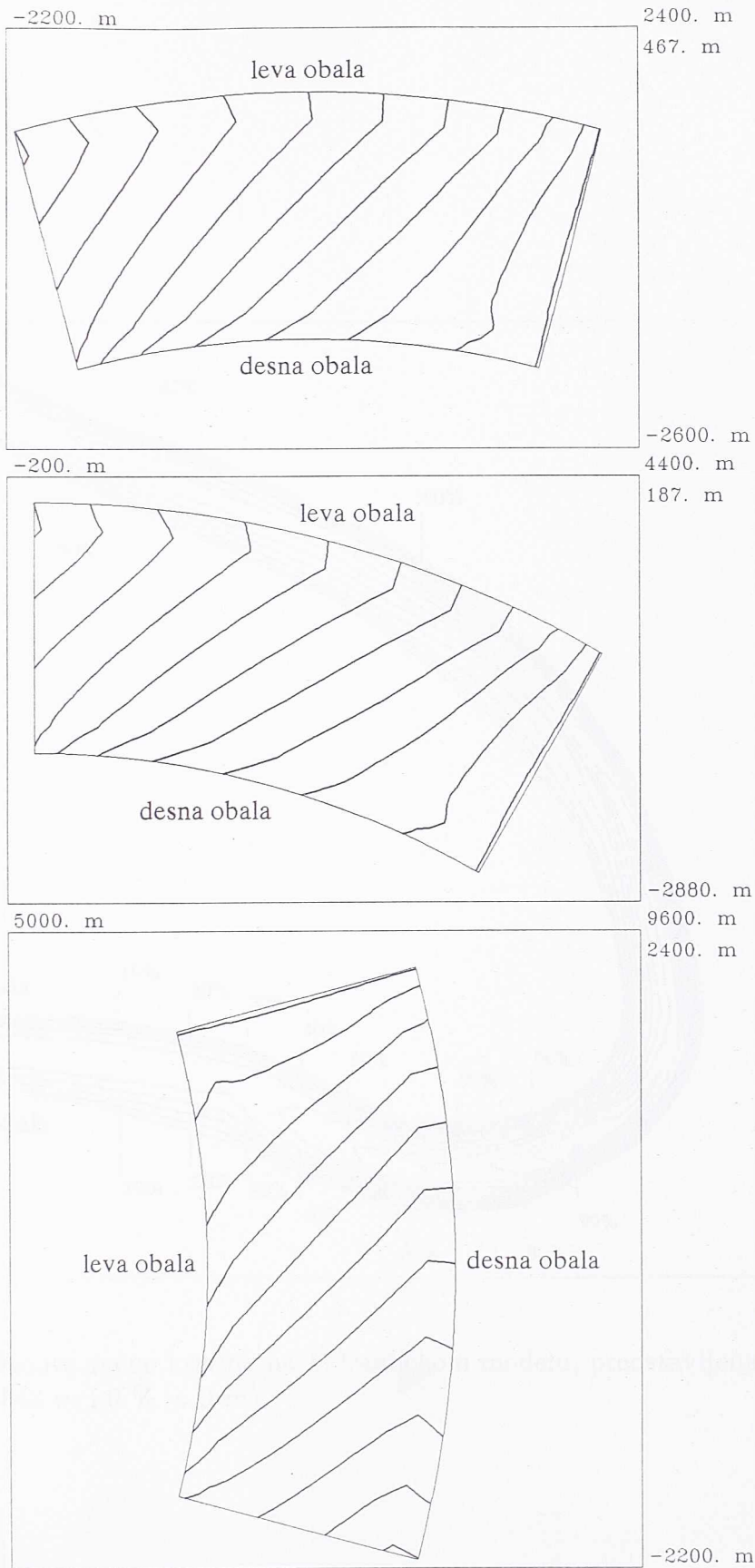
Prilog 12: Promene kota nivoa, u toku vremena, duž osovine pravog kanala (postavljenom u pravcu x_1): na uzvodnoj granici, sredini računске deonice i nizvodnoj granici.



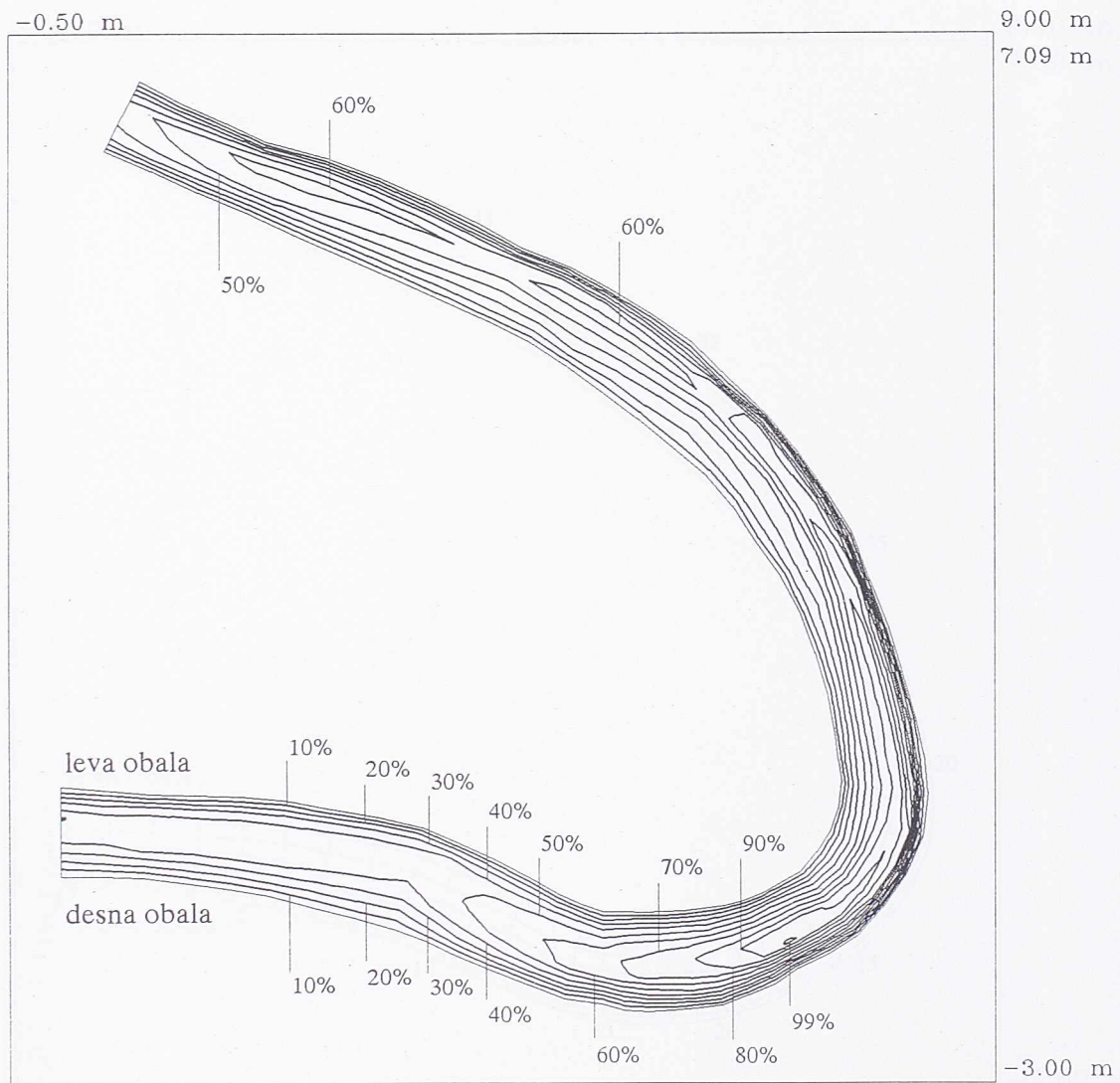
Prilog 13: Promene brzina u_1 , u toku vremena, po širini pravog kanala (postavljenom u pravcu x_1): uz levu obalu, na sredini i uz desnu obalu.



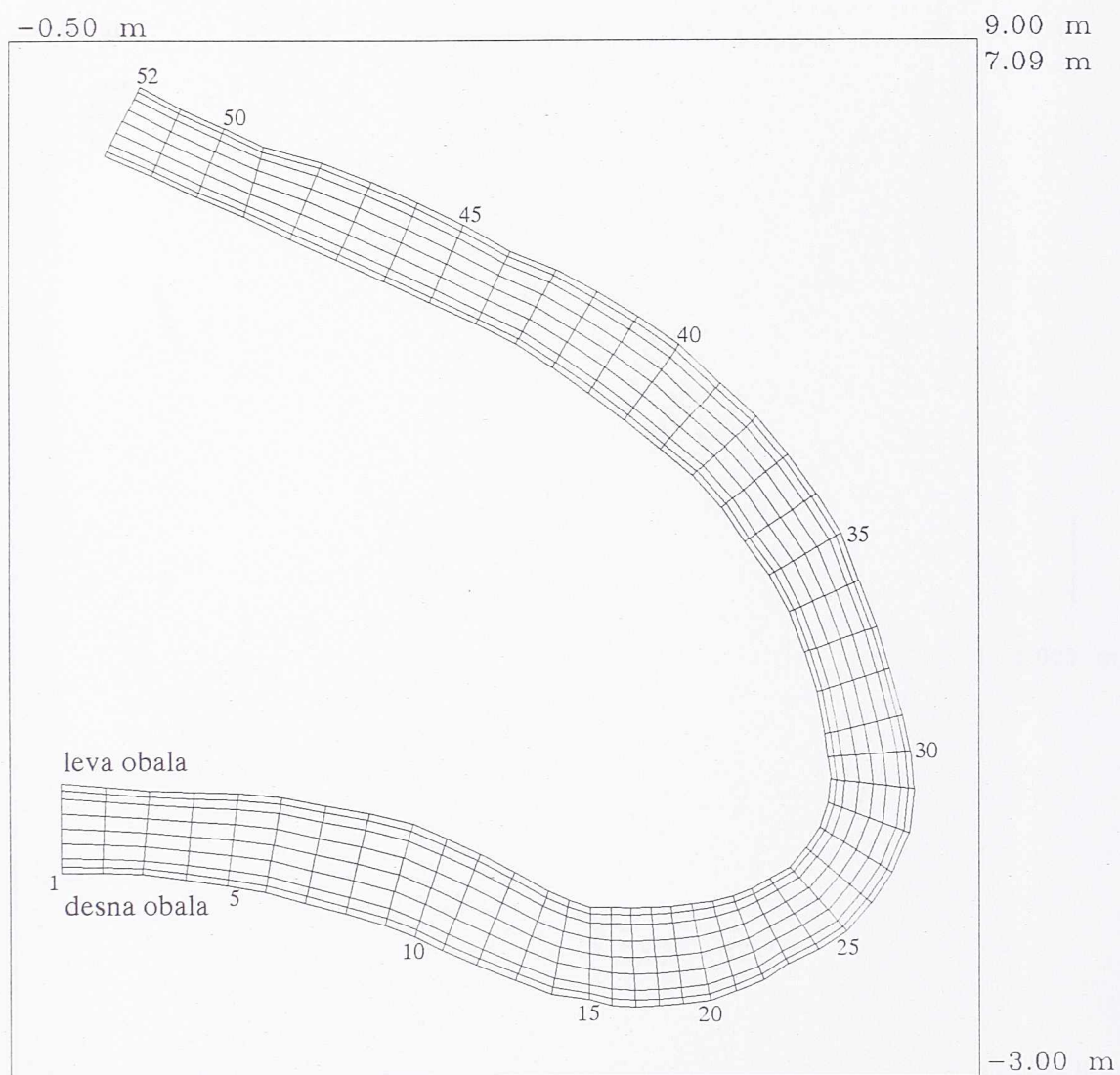
Prilog 14: Linije jednakih kota nivoa slobodne površine vode (100 % = *max.* i 0 % = *min.*), u polukružnom kanalu u osnovi, za različite položaje kanala u horizontalnoj ravni. I deo.



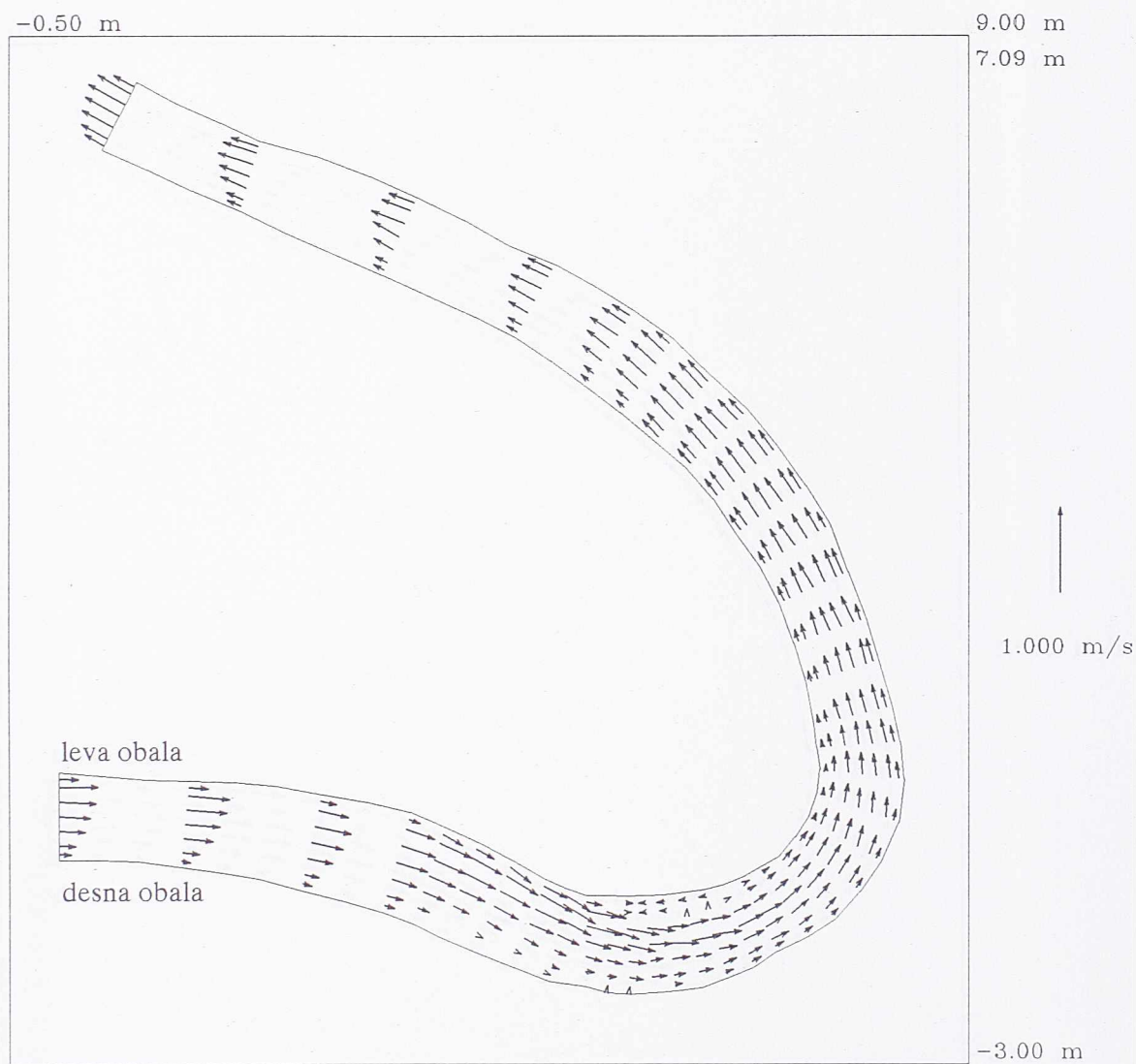
Prilog 15: Linije jednakih kota nivoa slobodne površine vode (100 % = *max.* i 0 % = *min.*), u polukružnom kanalu u osnovi, za različite položaje kanala u horizontalnoj ravni. II deo.



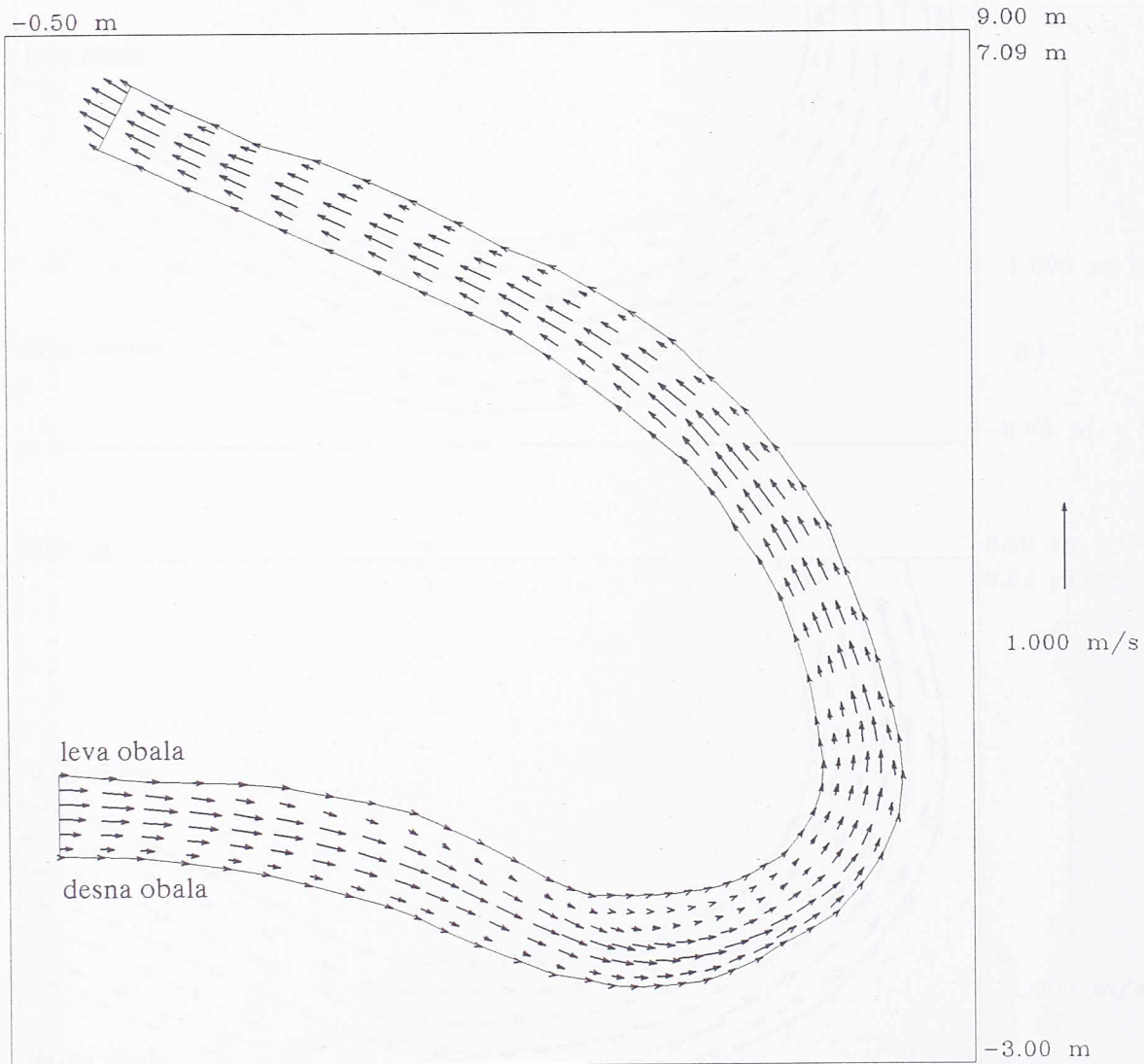
Prilog 16: Osnova rečne krivine na hidrauličkom modelu, predstavljena izobatama (100 % = 0.543 m i 0 % = 0 m).



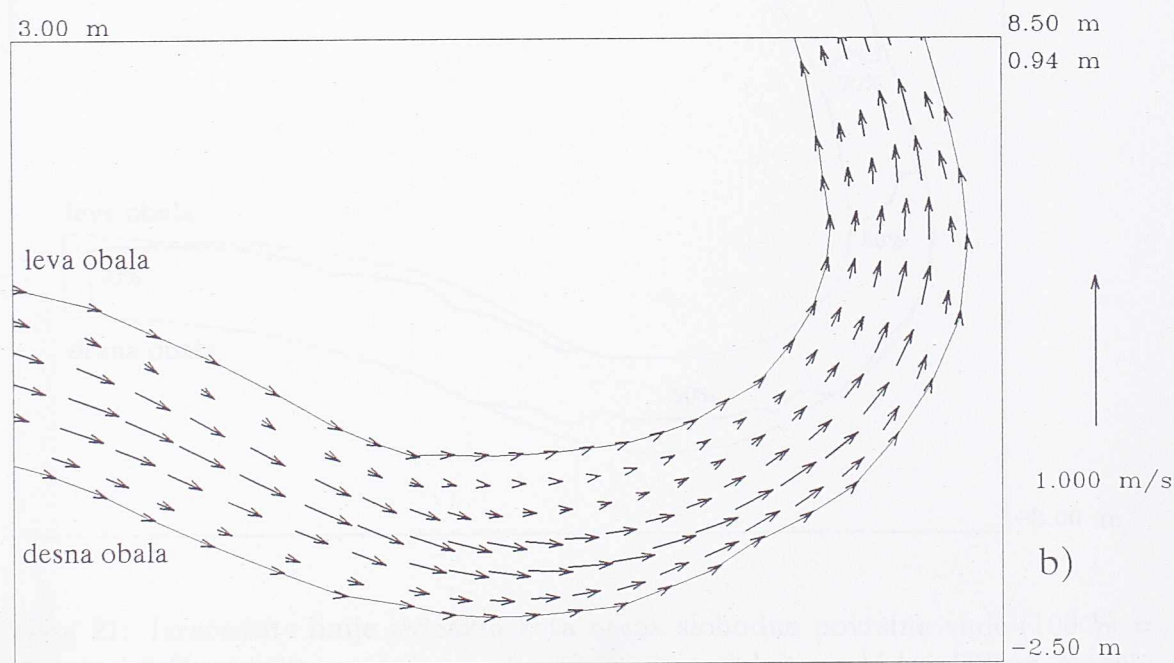
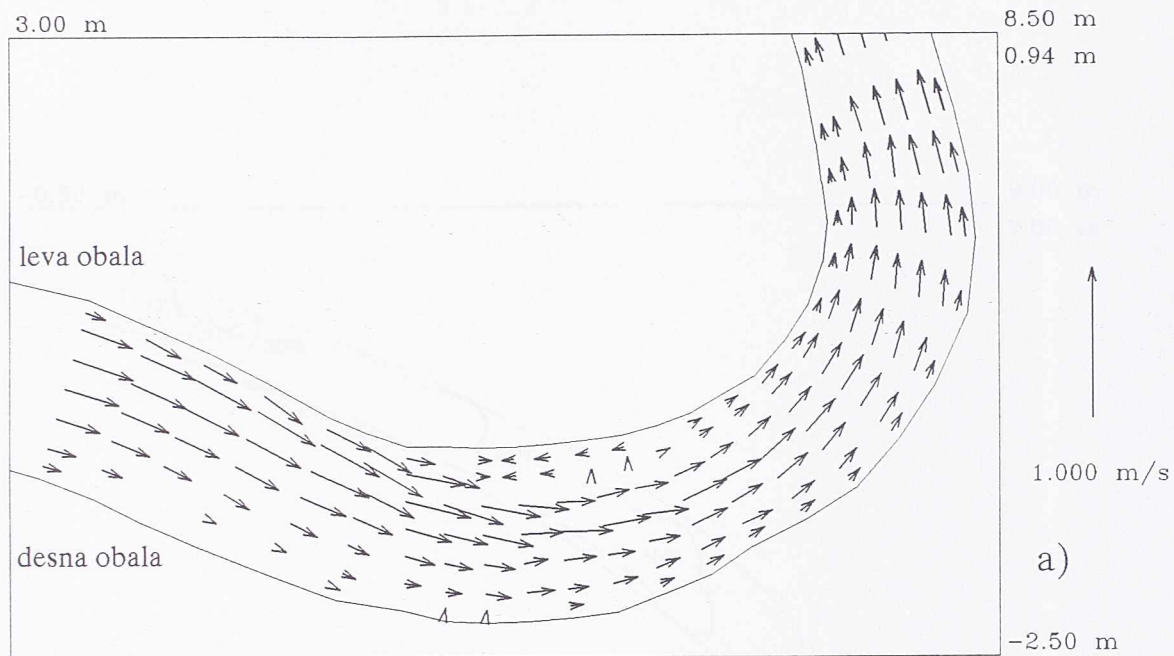
Prilog 17: Osnova numeričke mreže generisane na hidrauličkom modelu rečne krivine.



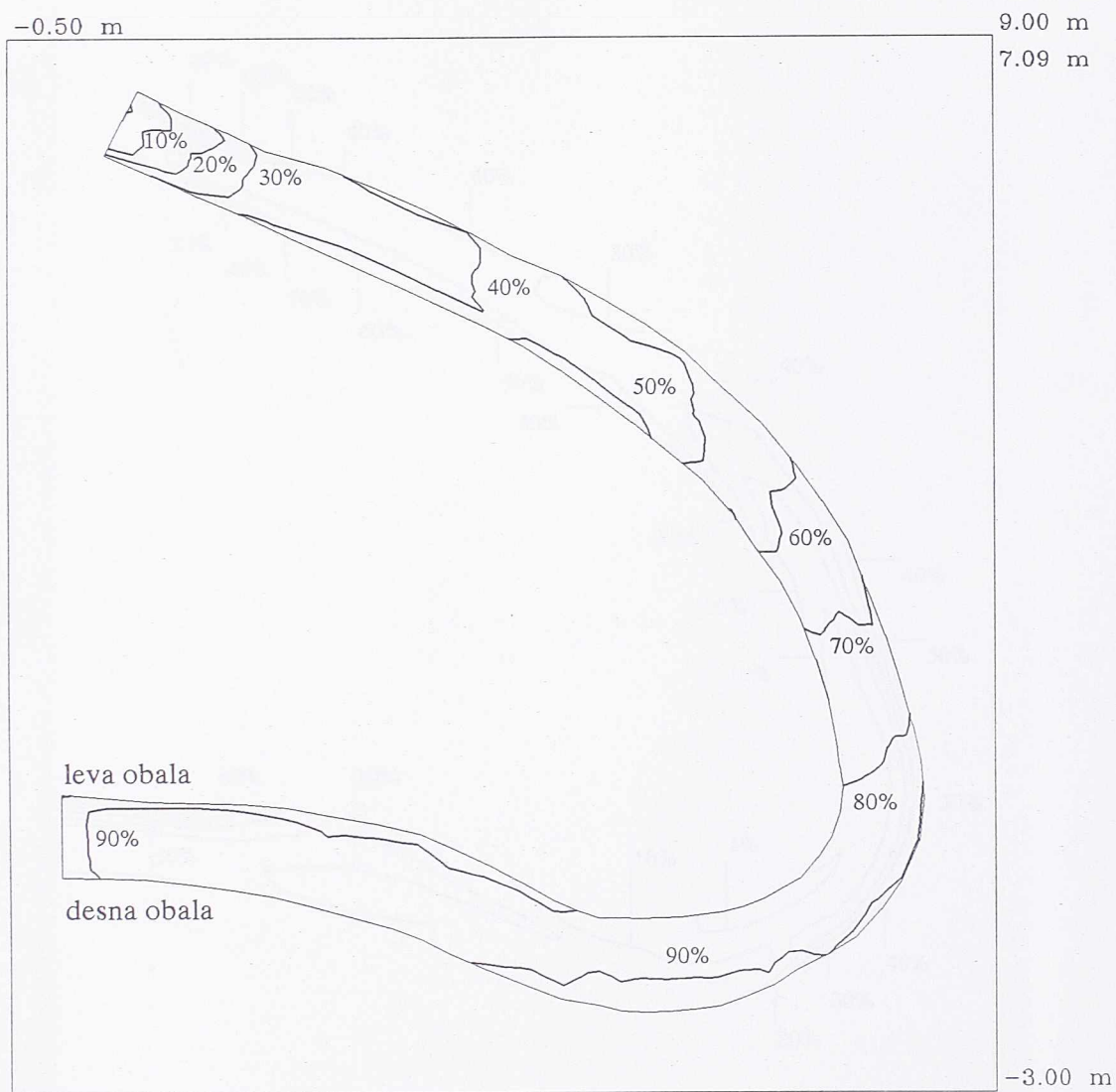
Prilog 18: Izmereni rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na hidrauličkom modelu rečne krivine.



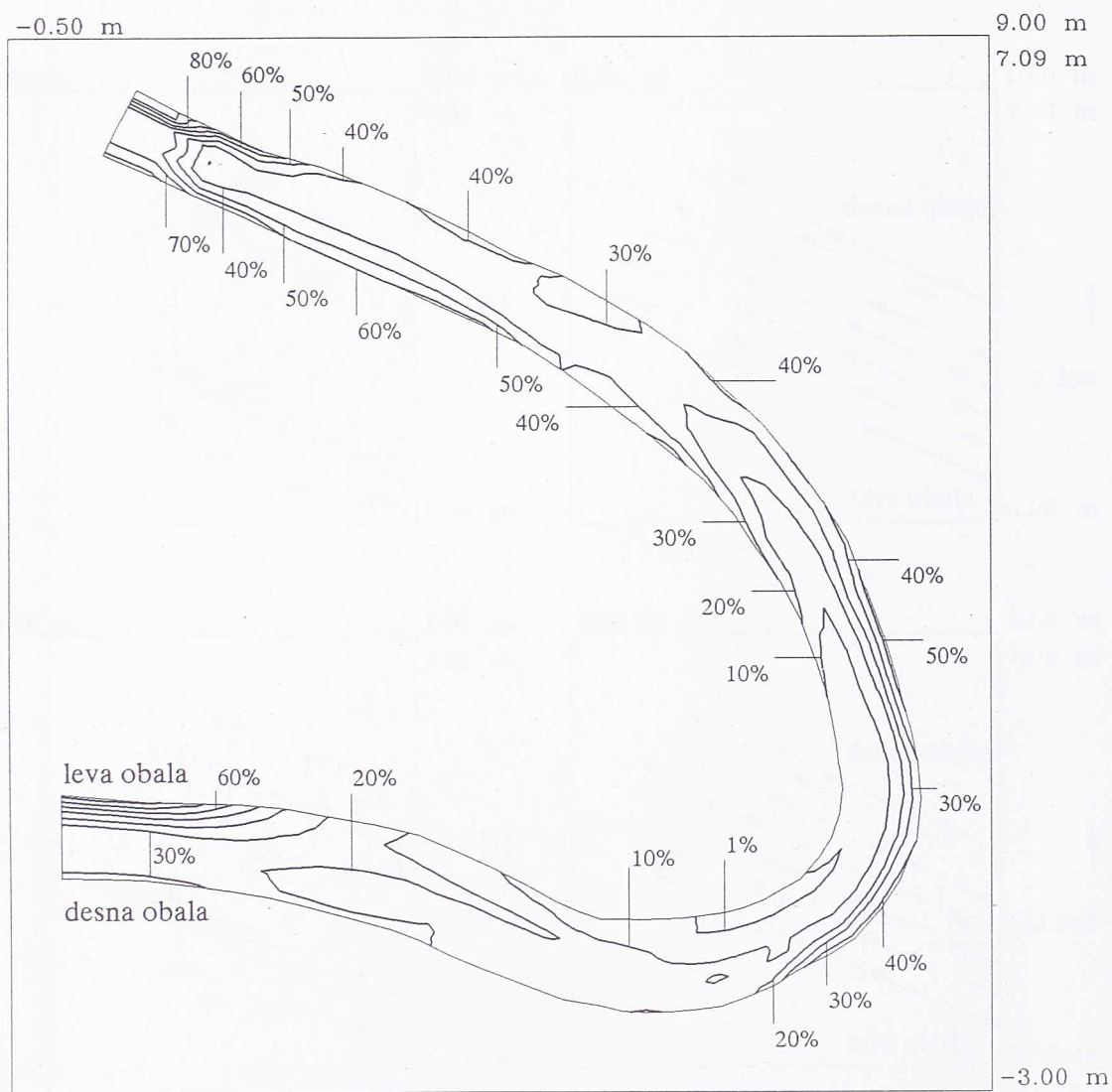
Prilog 19: Izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na hidrauličkom modelu rečne krivine.



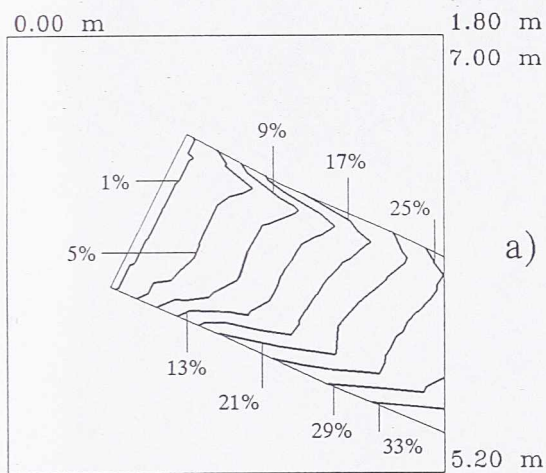
Prilog 20: Rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na delu hidrauličkog modela rečne krivine: a) izmereni i b) izračunati.



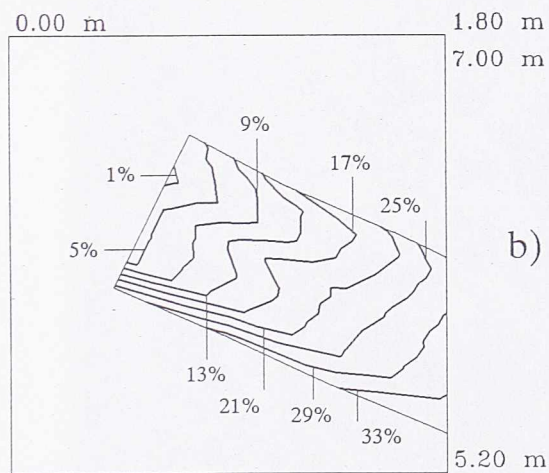
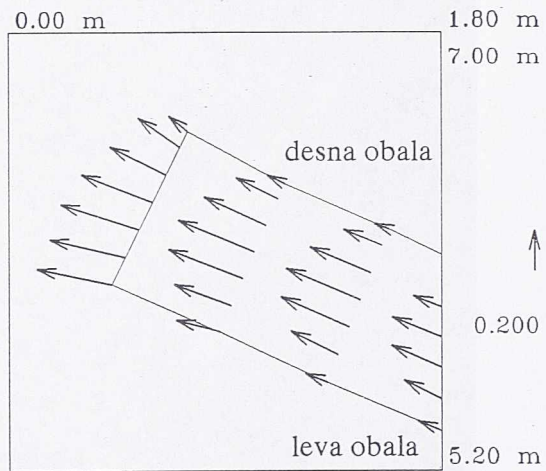
Prilog 21: Izračunate linije jednakih kota nivoa slobodne površine vode (100 % = 5.66 cm i 0 % = 3.90 cm mereno od repera na modelu), na hidrauličkom modelu rečne krivine.



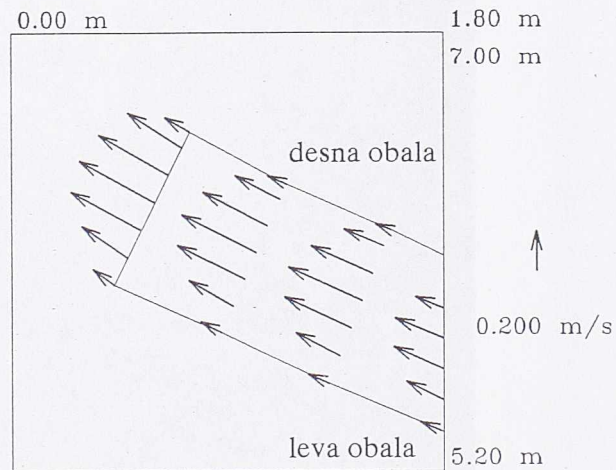
Prilog 22: Izračunate linije jednake SGS turbulentne kinetičke energije osrednjene po dubini \tilde{k}_g , ($100\% = 0.00936 (m/s)^2$ i $0\% = 0 (m/s)^2$), na hidrauličkom modelu rečne krivine.



a)



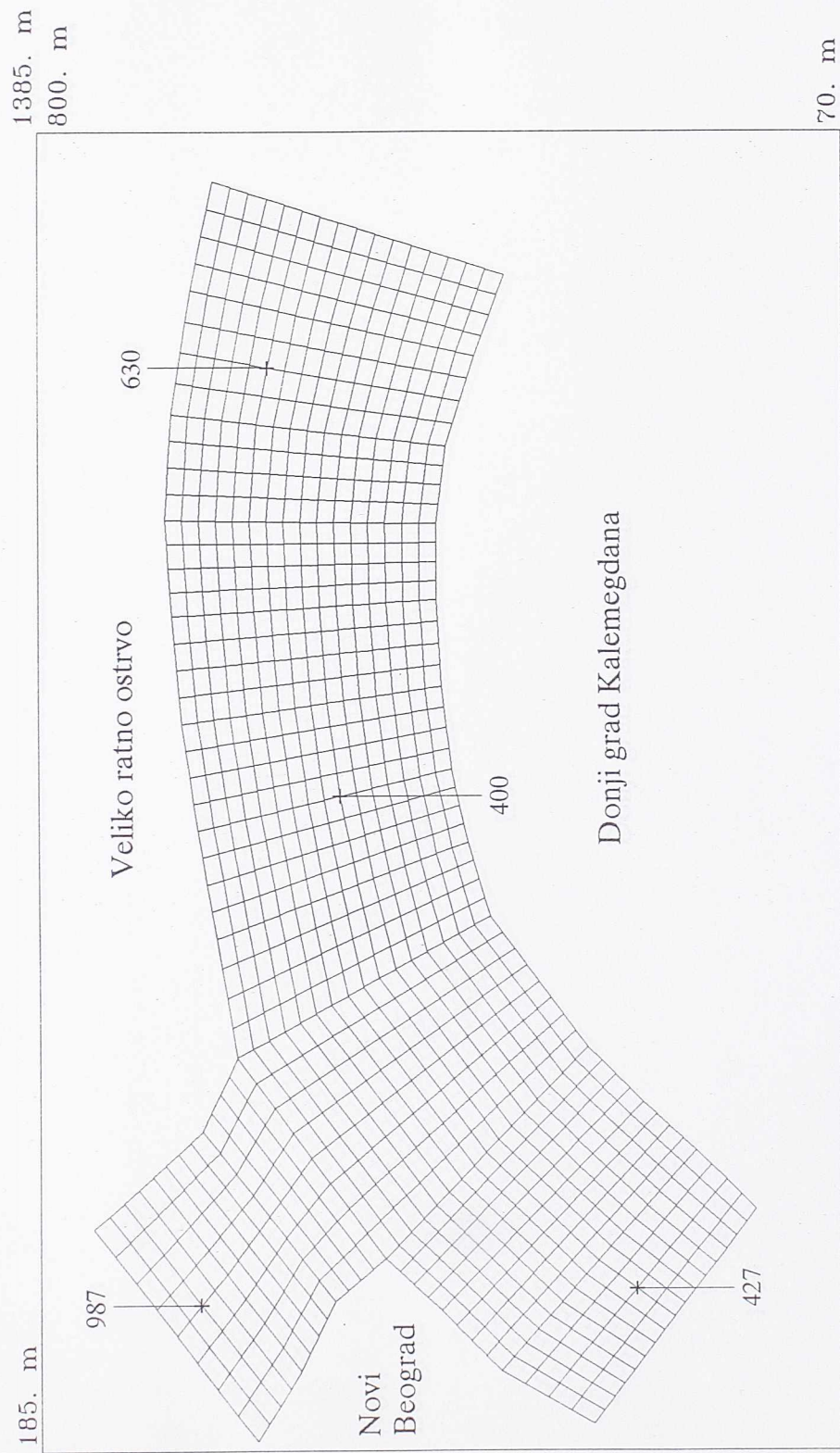
b)



Prilog 23: Izračunate linije jednakih kota nivoa slobodne površine vode i rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na nizvodnom kraju hidrauličkog modela rečne krivine, za: a) horizontalne kote nivoa na najnižvodnijem poprečnom profilu i b) različite kote nivoa na najnižvodnijem poprečnom profilu.



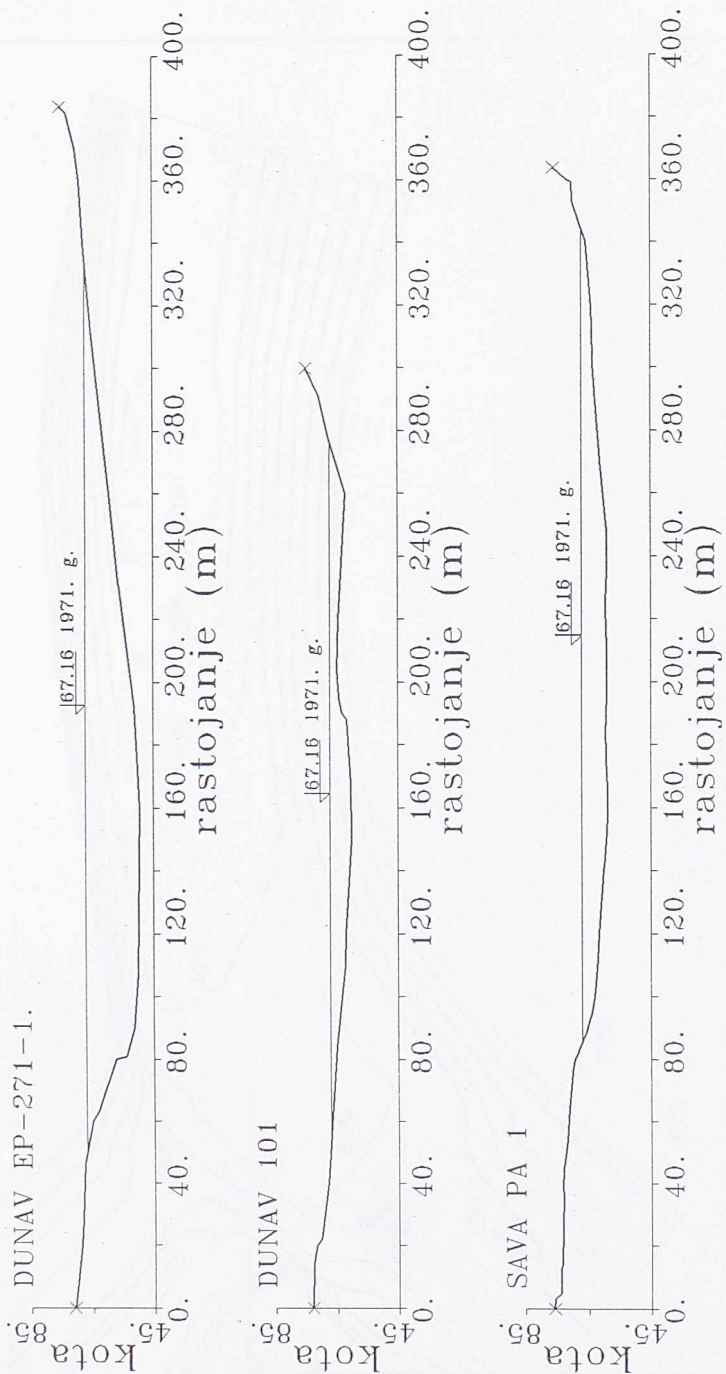
Prilog 24: Aerofotogrametrijski snimak ušća Save u Dunav, u Beogradu (snimljeno 17.11.1971. god.).



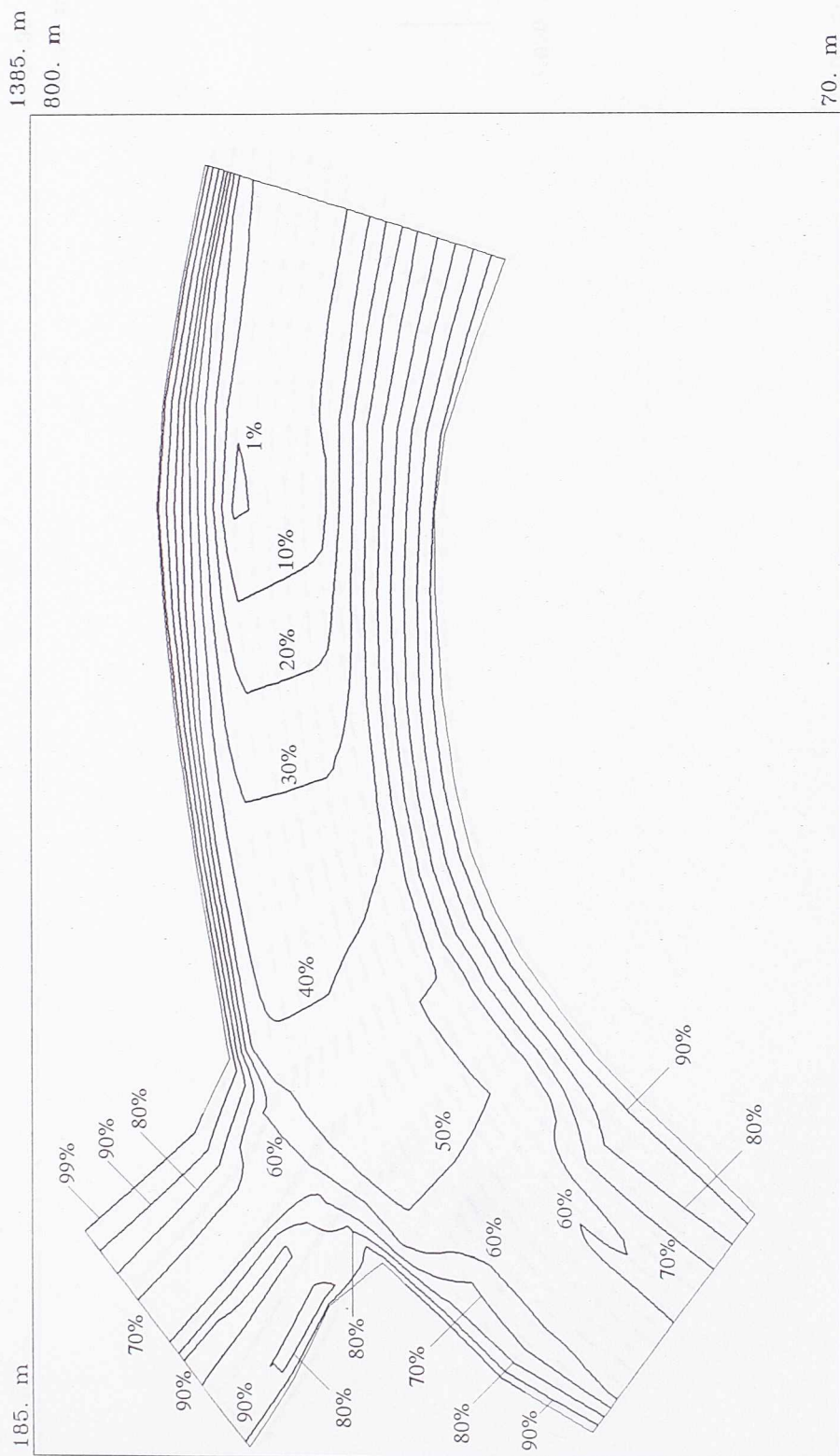
Prilog 25: Prva varijanta numeričke mreže za ušće Save u Dunav, sa položajem karakterističnih tačaka.



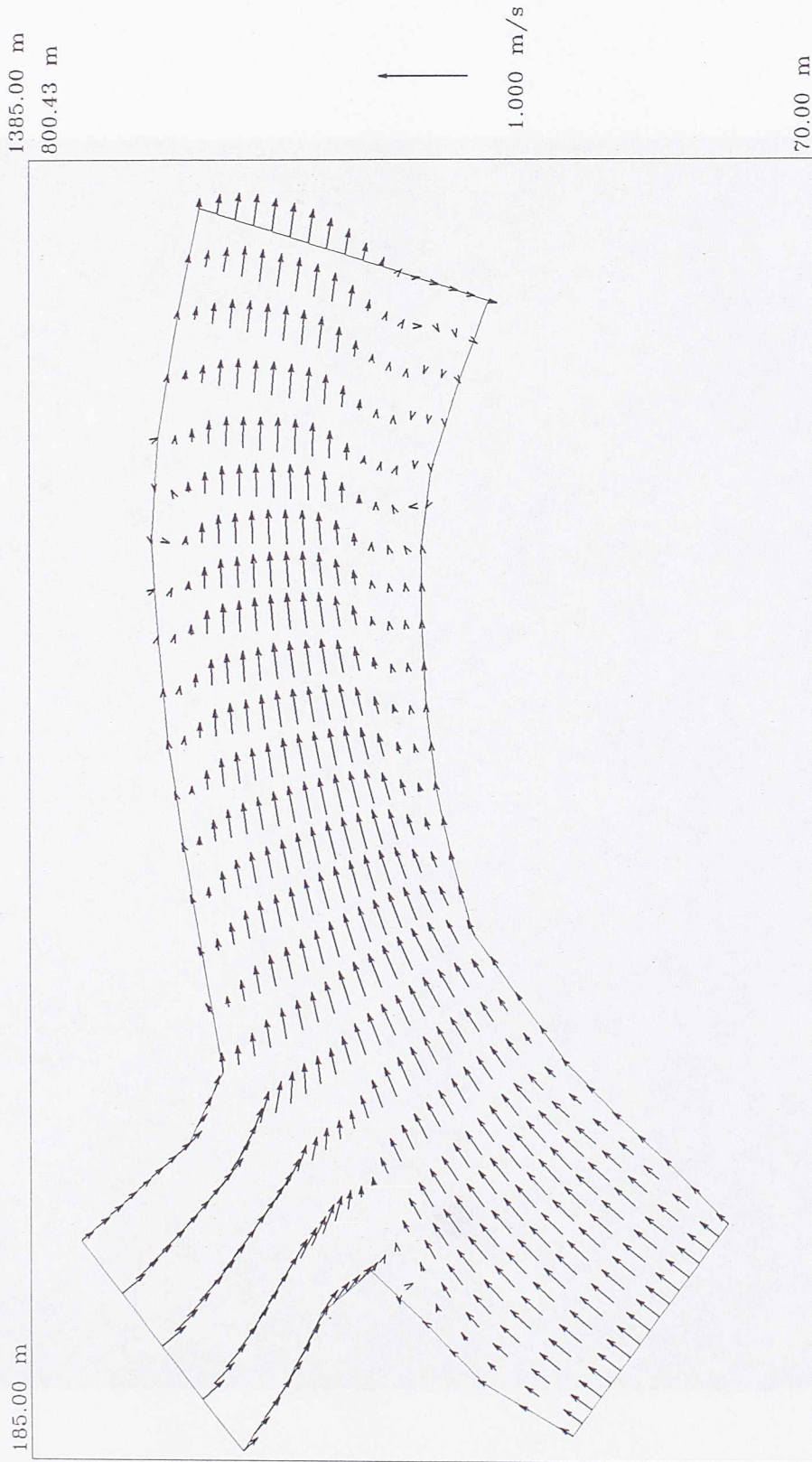
Prilog 26: Druga varijanta numeričke mreže za ušće Save u Dunav sa položajem karakterističnih tačaka.



Prilog 27: Karakteristični poprečni profili na ušću Save u Dunav.



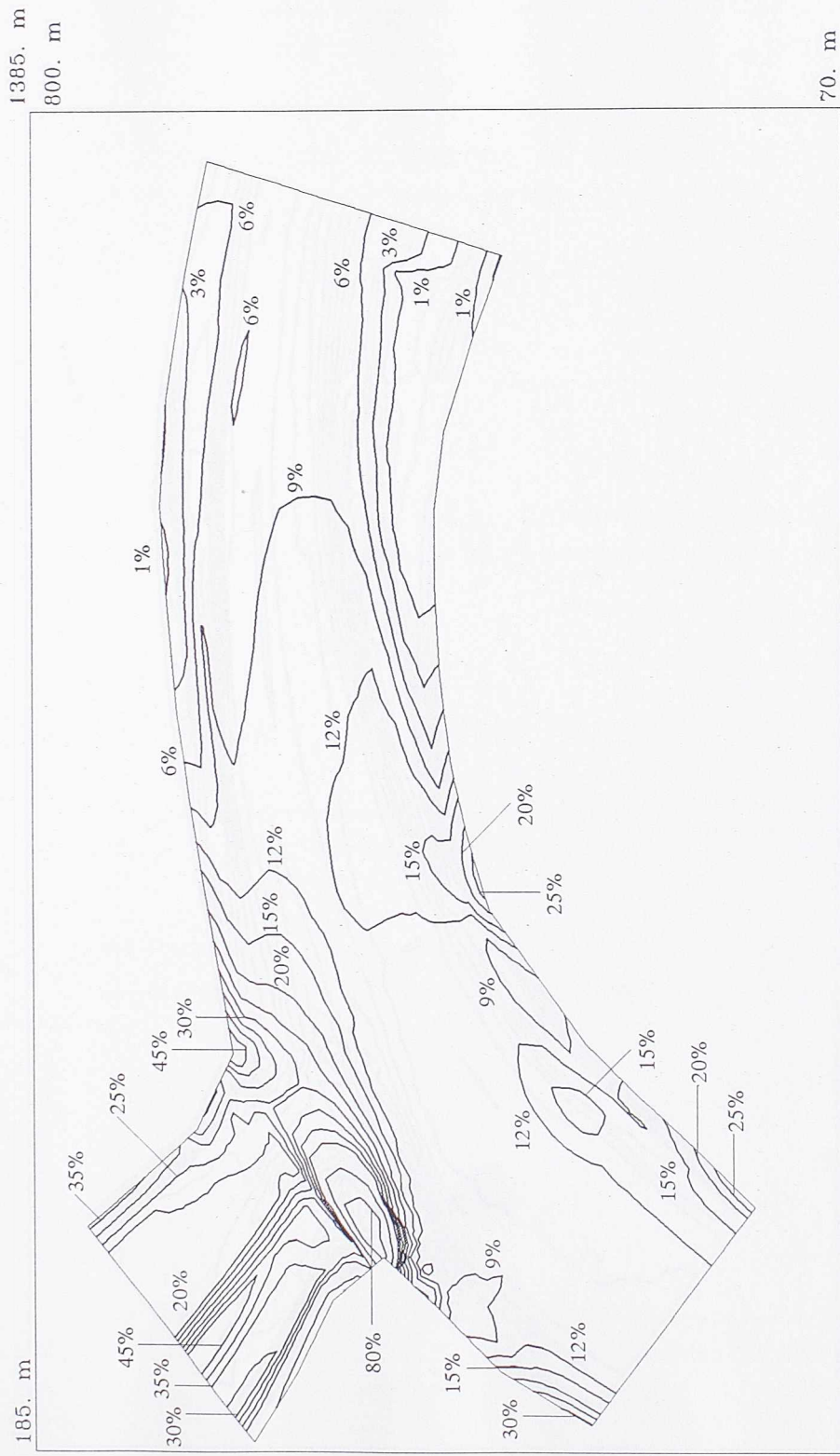
Prilog 28: Izohipse dna vodotoka na ušću Save u Dunav (100 % = 66.29 m nad morem, 0 % = 49.03 m n. m. i $\Delta 10 \% = 1.73 m$).



Prilog 29: Izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 20000$ s.



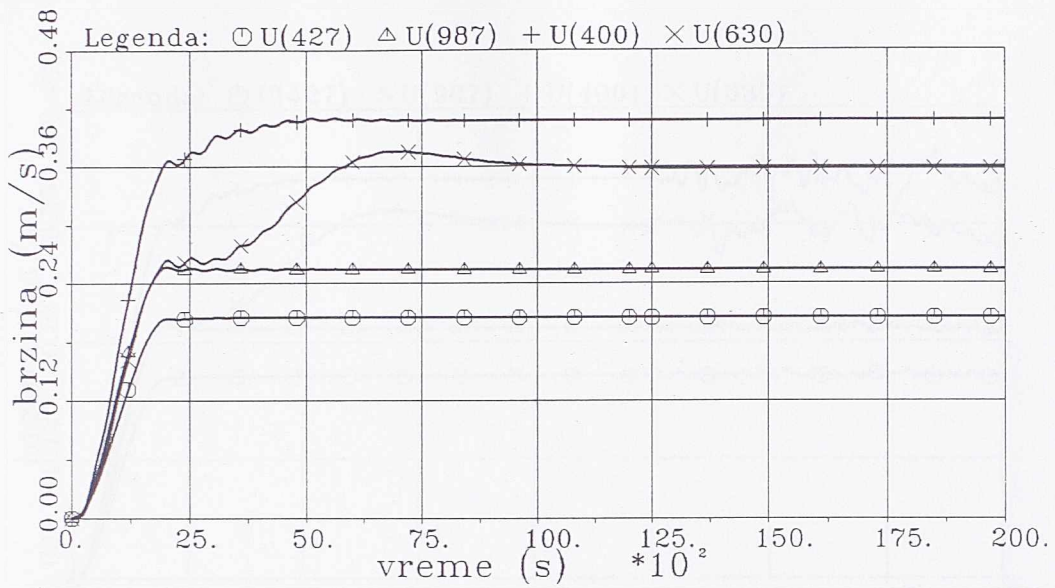
Prilog 30: Deo aerofotogrametrijskog snimka ušća Save u Dunav, u Beogradu (snimljeno 17.11.1971. god.).



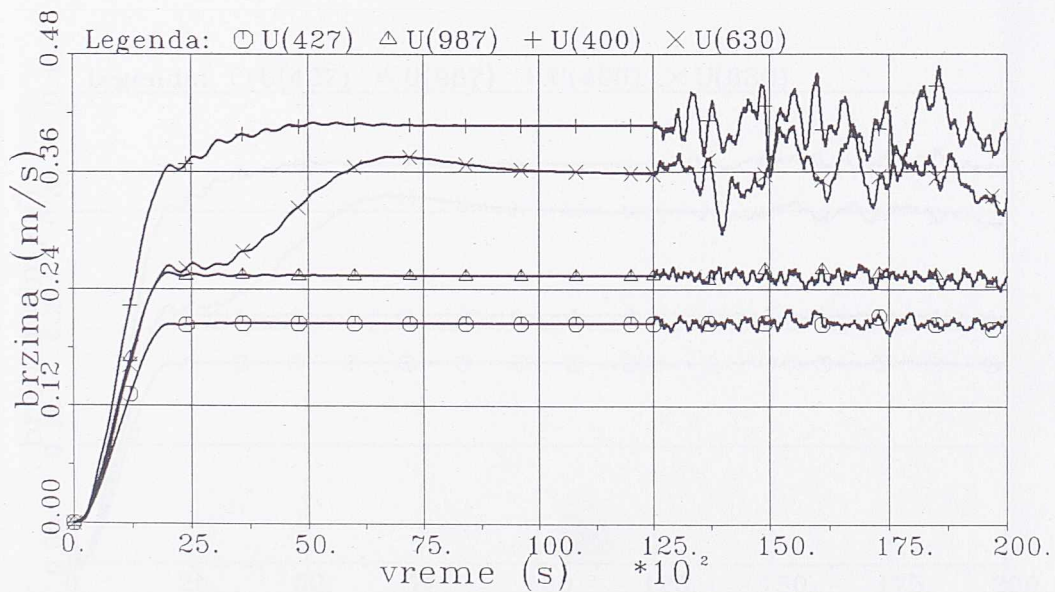
Prilog 31: Izračunate linije jednake *SGS* turbulentne kinetičke energije osrednjene po dubini \tilde{k}_g , na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 20000$ s ($100\% = 0.0509 (m/s)^2$ i $0\% = 0 (m/s)^2$).



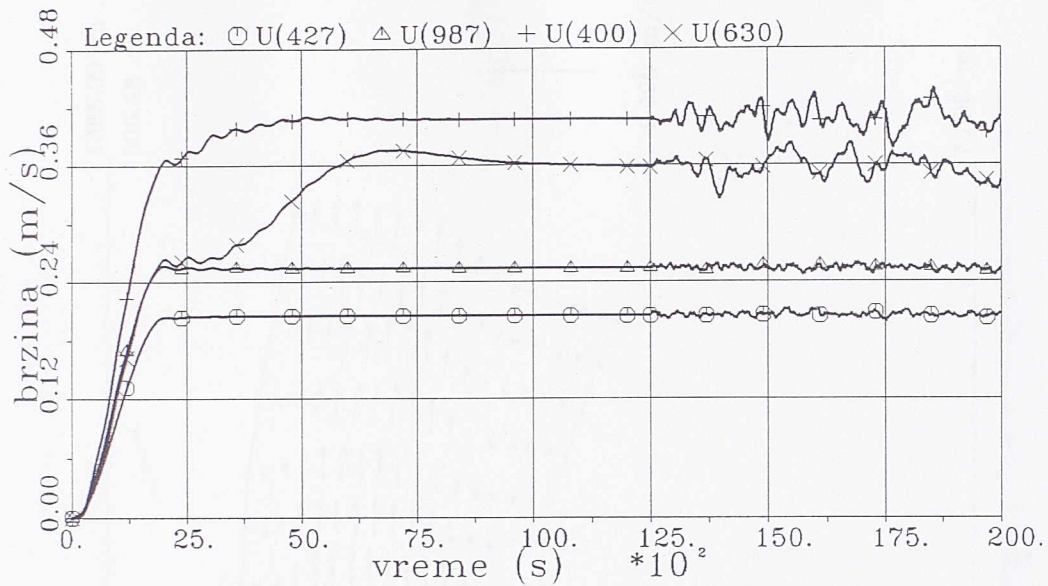
Prilog 32: Izračunate linije jednake vrtložnosti Ω , na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 20000 \text{ s}$ ($\Delta\Omega = 3\% = 0.00105 \text{ 1/s}$).



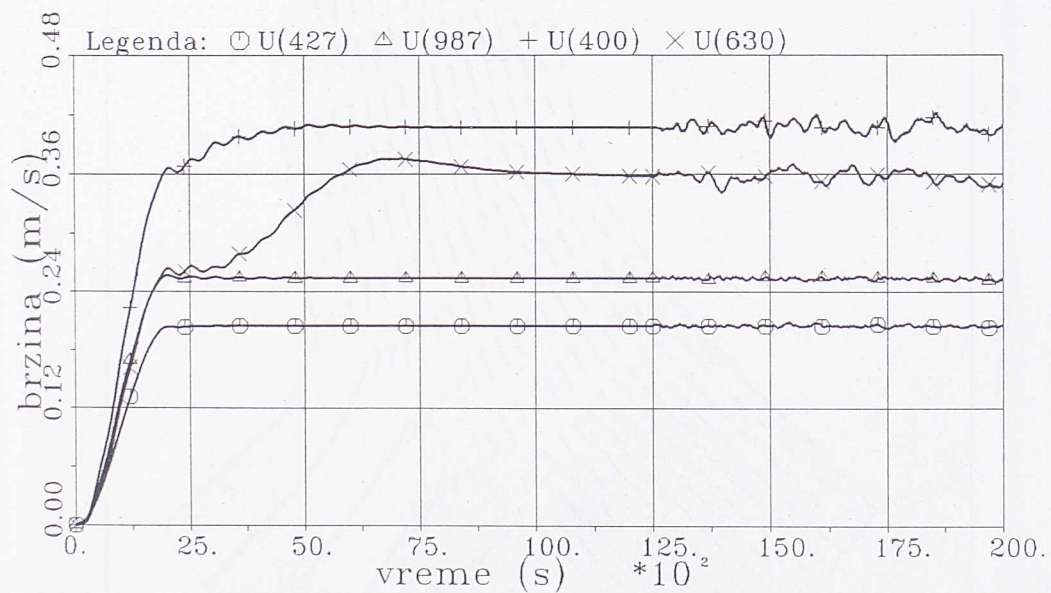
Prilog 33: Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karaterističnim tačkama prve varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.00$.



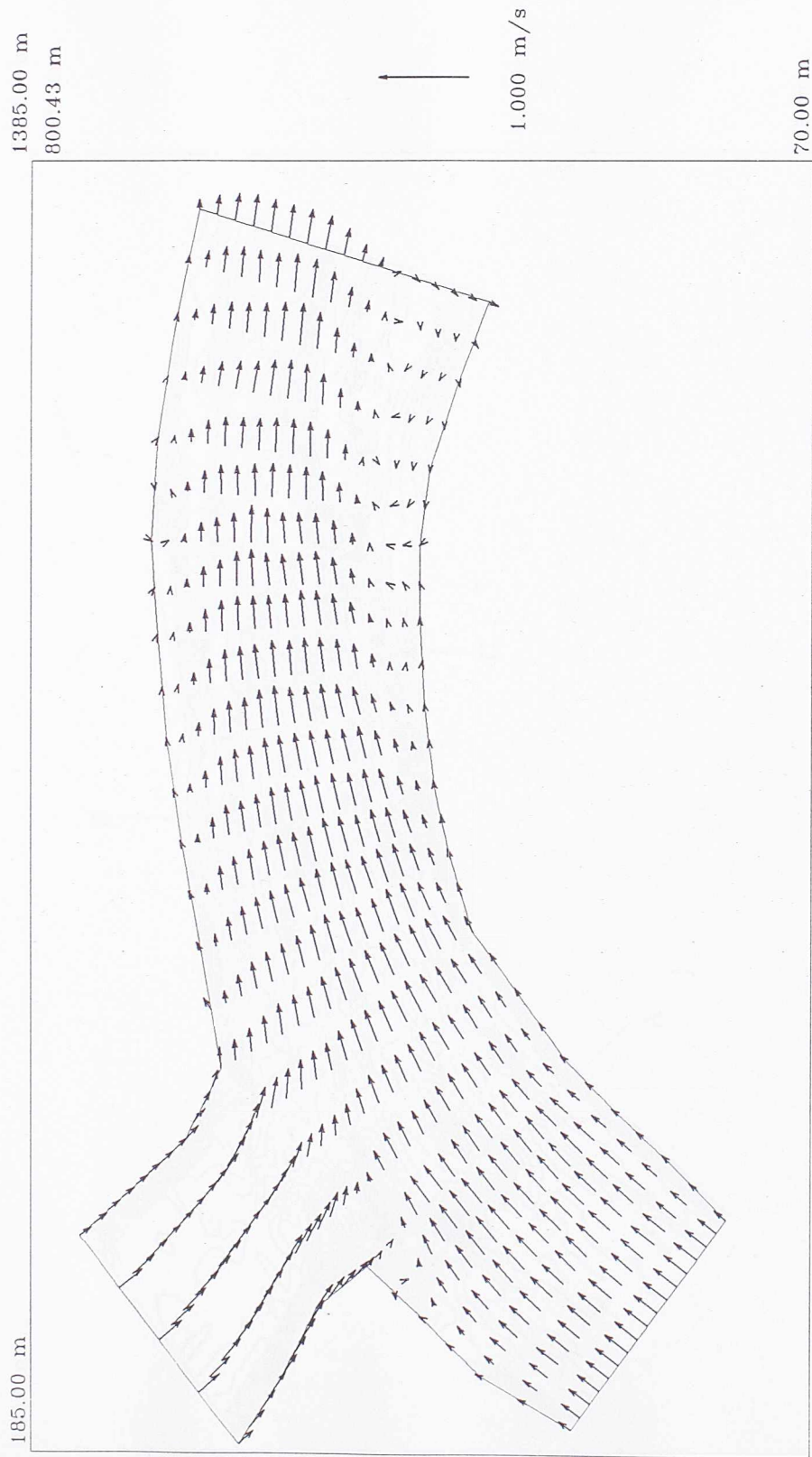
Prilog 34: Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karaterističnim tačkama prve varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.02$.



Prilog 35: Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karaterističnim tačkama prve varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.01$.



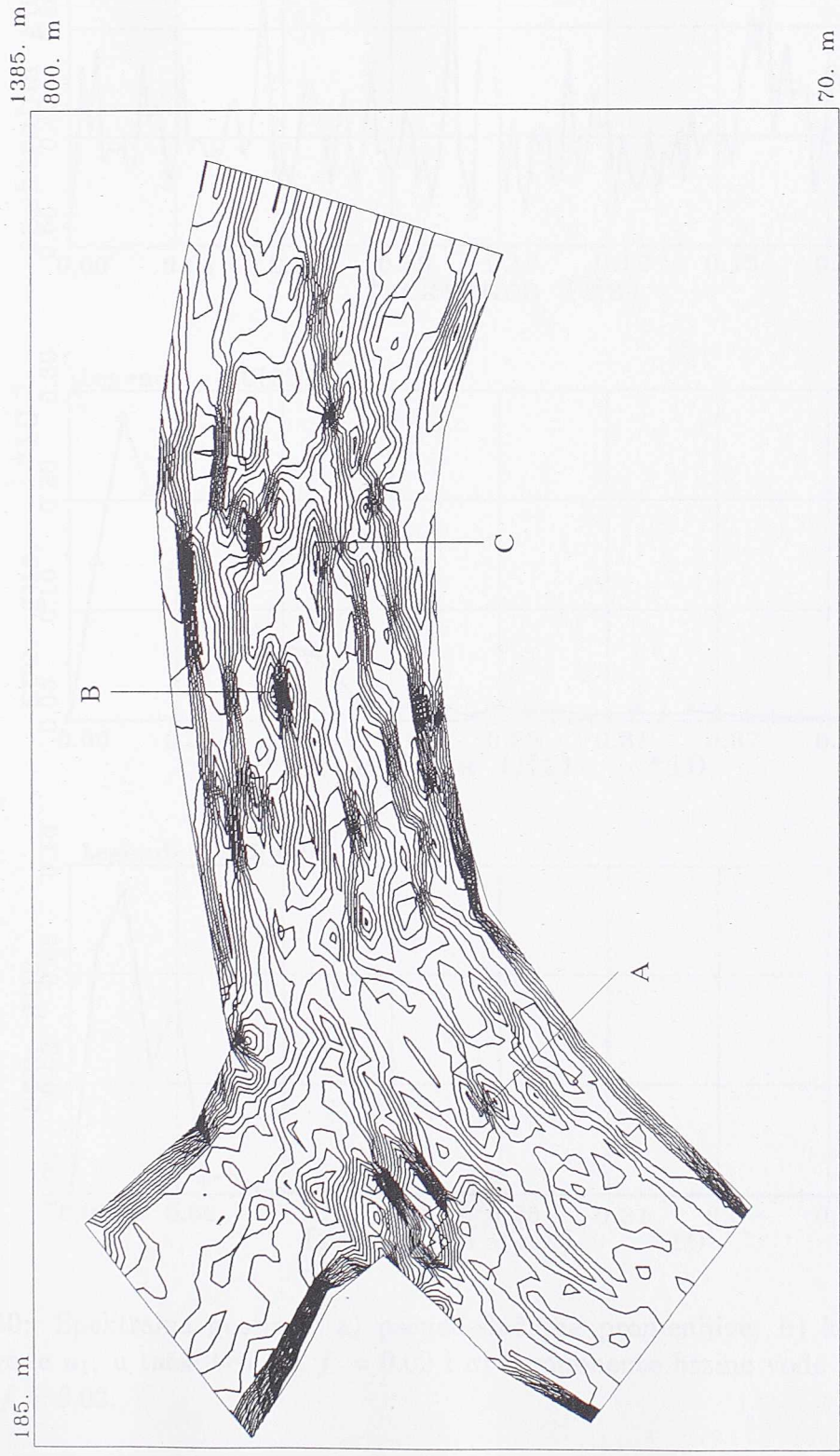
Prilog 36: Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karaterističnim tačkama prve varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.005$.



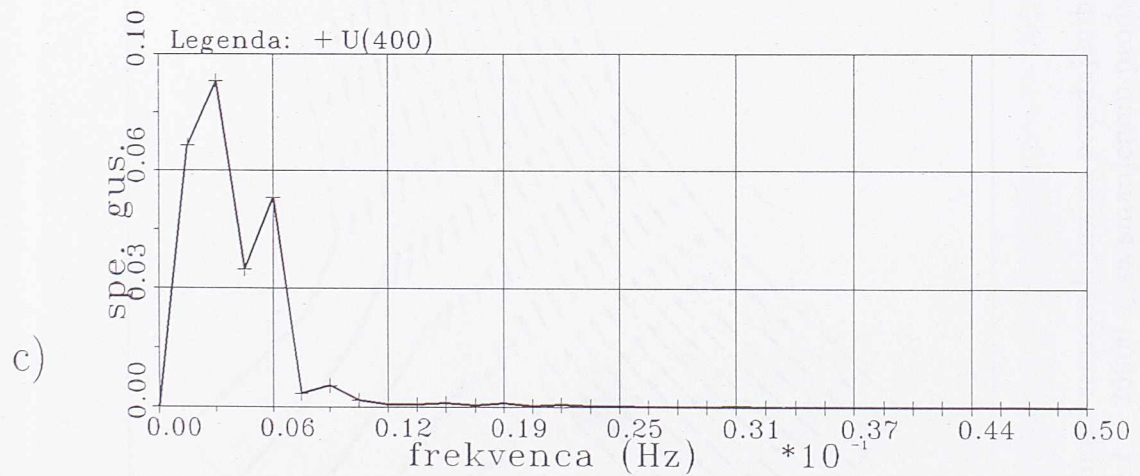
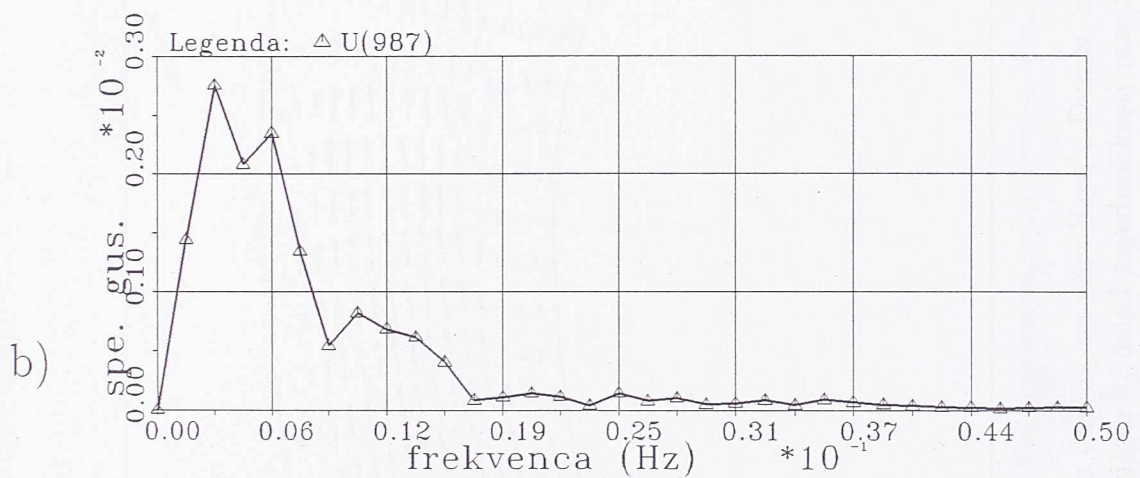
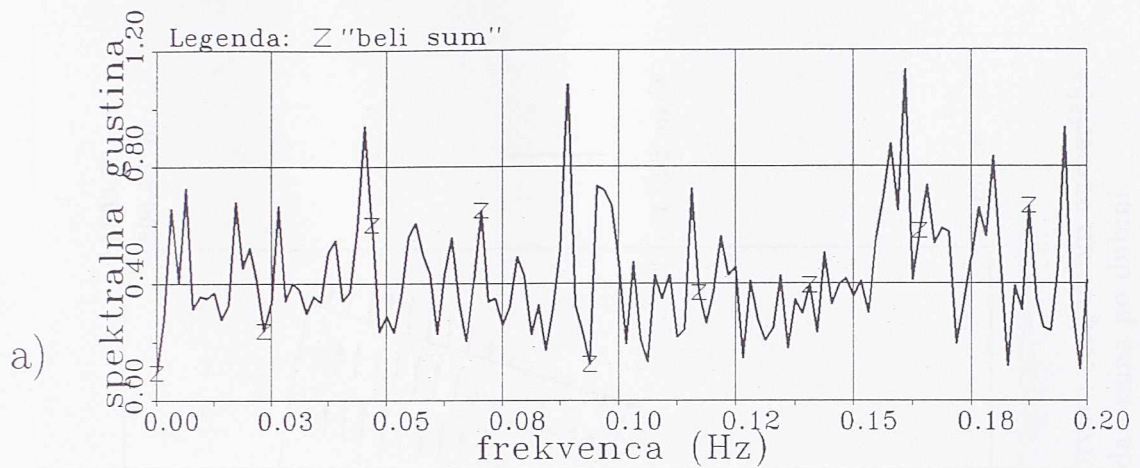
Prilog 37: Izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.02$, za vreme $t = 20000$ s.



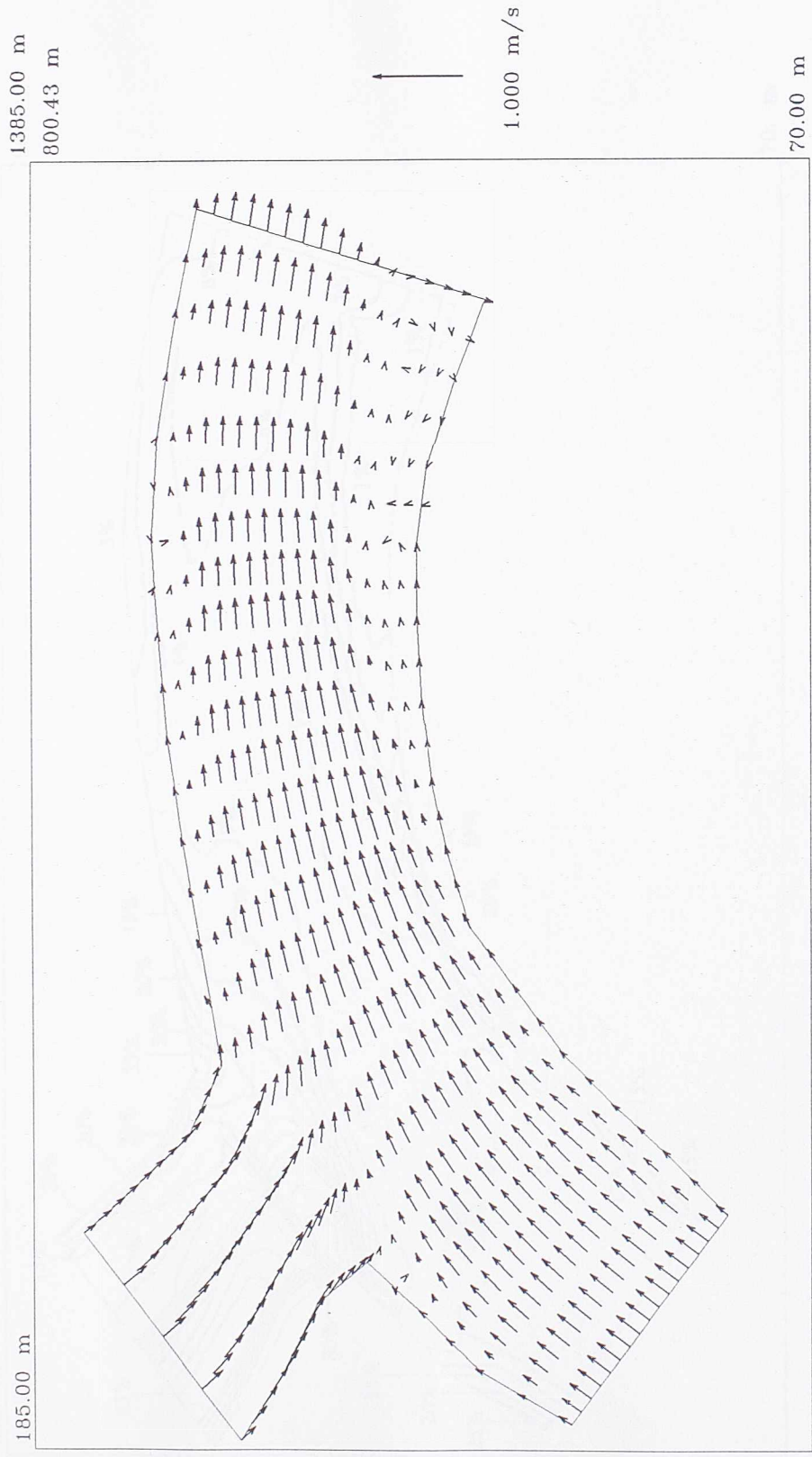
Prilog 38: Izračunate linije jednake vrtložnosti Ω , na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.02$, za vreme $t = 19810$ s ($\Delta\Omega = 3\% = 0.00104$ 1/s).



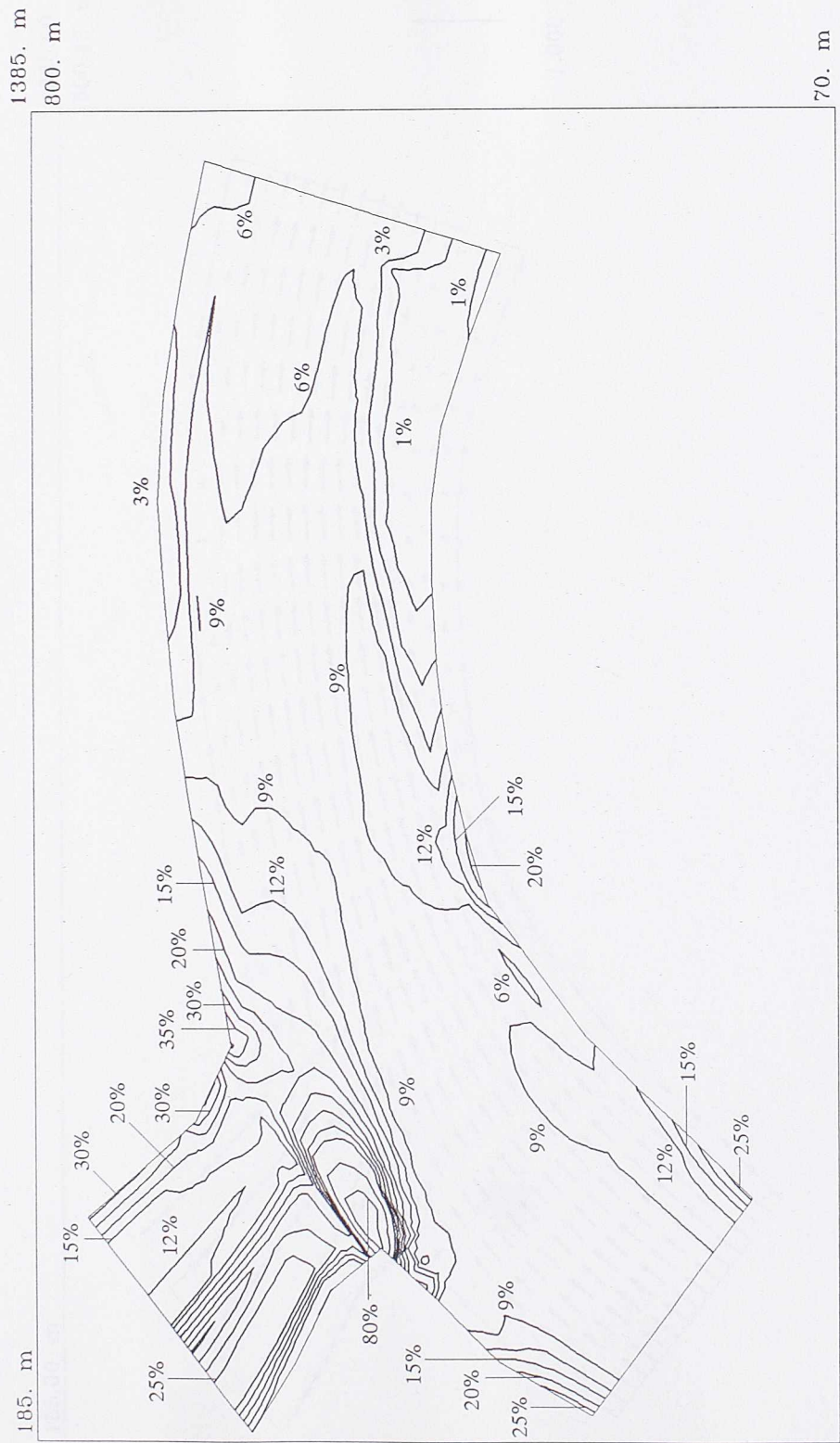
Prilog 39: Izračunate linije jednake vrtložnosti Ω , na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.02$, za vreme $t = 20000 \text{ s}$ ($\Delta\Omega = 3\% = 0.00104 \text{ 1/s}$).



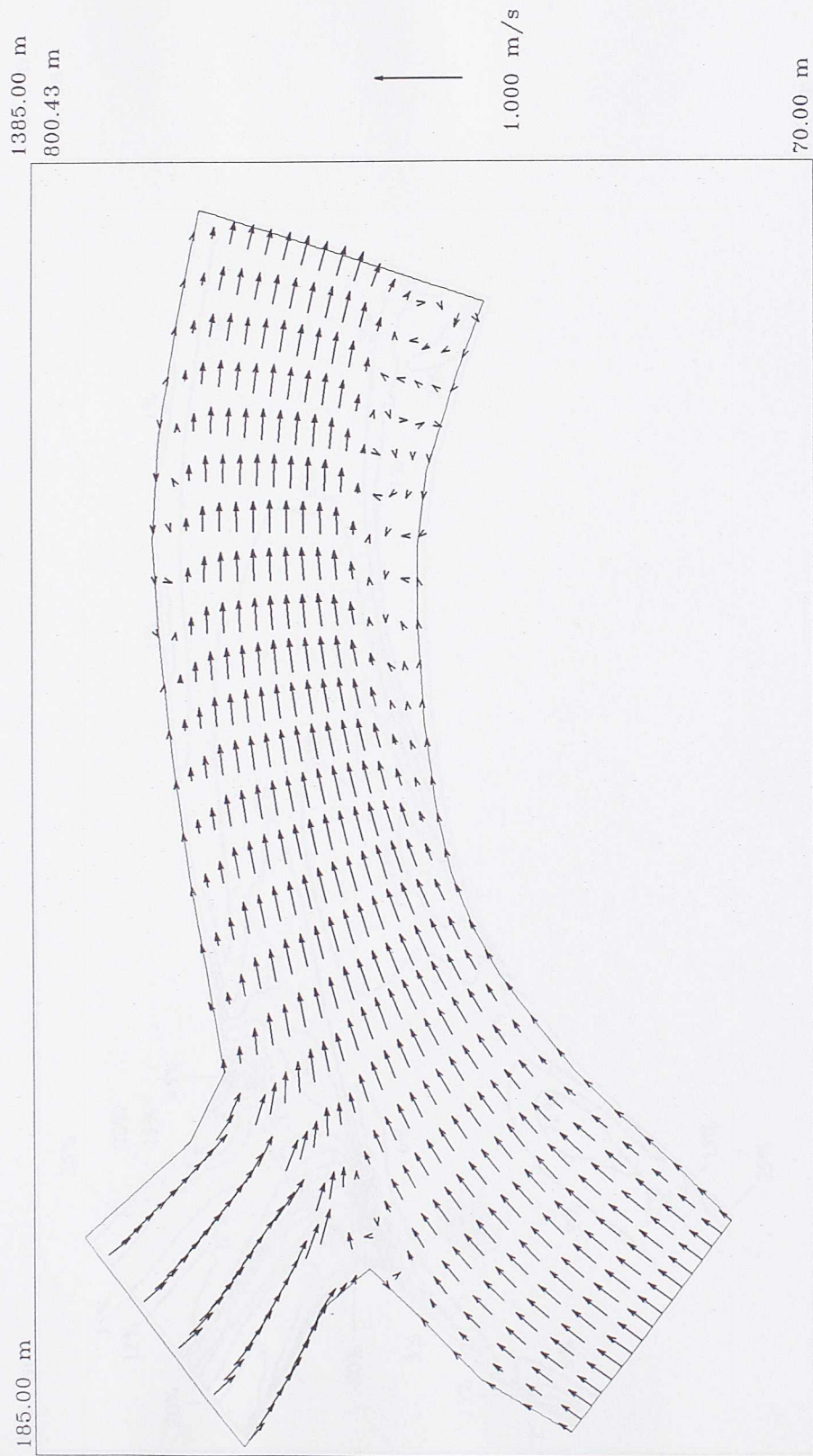
Prilog 40: Spektralna gustina: a) pseudo-slučajne promenljive; b) komponente brzine vode u_1 , u tački 987, sa $f = 0.02$ i c) komponente brzine vode u_1 , u tački 400, sa $f = 0.02$.



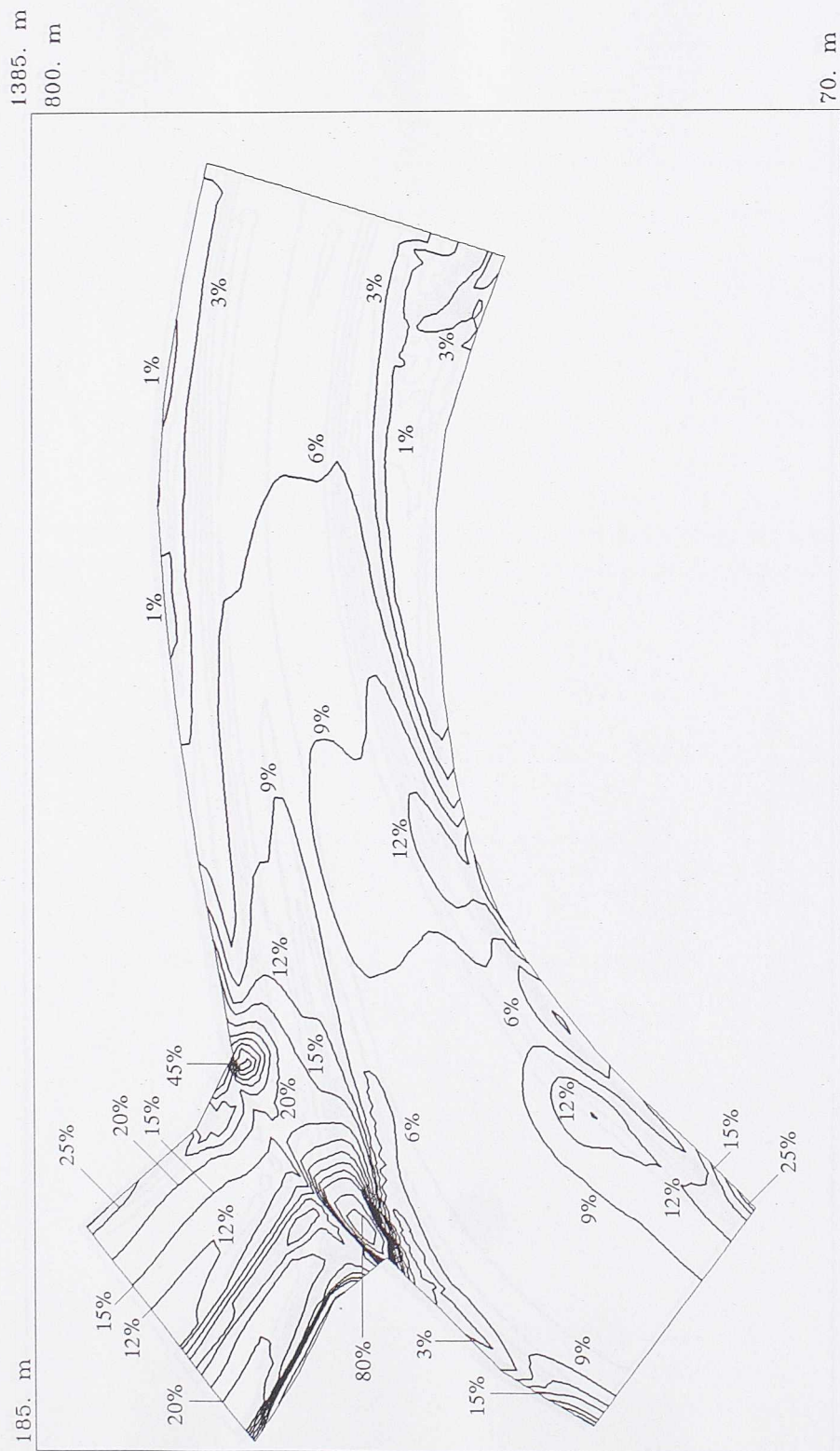
Prilog 41: Izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 20000$ s, sa smanjenom produkcijom \tilde{k}_g usled nejednolikosti rasporeda brzina po dubini.



Prilog 42: Izračunate linije jednake *SGS* turbulentne kinetičke energije osrednjene po dubini \tilde{k}_g , na ušću Save u Dunav, sa prvom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 20000$ s, sa smanjenom produkcijom \tilde{k}_g usled nejednolikosti rasporeda brzina po dubini ($100\% = 0.0442 (m/s)^2$ i $0\% = 0 (m/s)^2$).



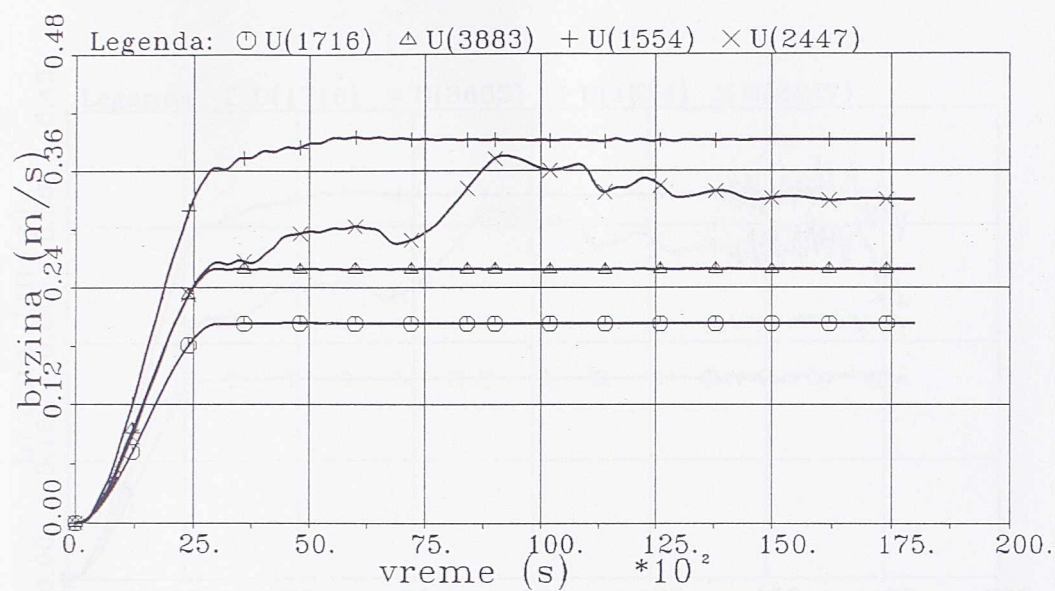
Prilog 43: Izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na ušću Save u Dunav, sa drugom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 18000$ s.



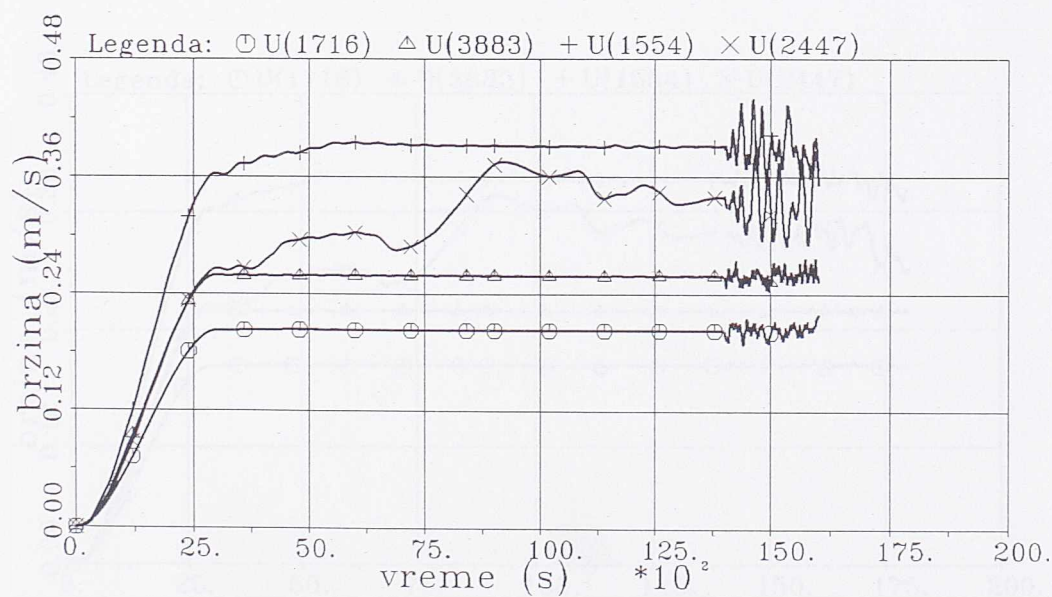
Prilog 44: Izračunate linije jednake *SGS* turbulentne kinetičke energije osrednjene po dubini \tilde{k}_g , na ušću Save u Dunav, sa drugom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 18000 s$ ($100 \% = 18000 s (100 \% = 0.0379 (m/s)^2$ i $0 \% = 0 (m/s)^2$).



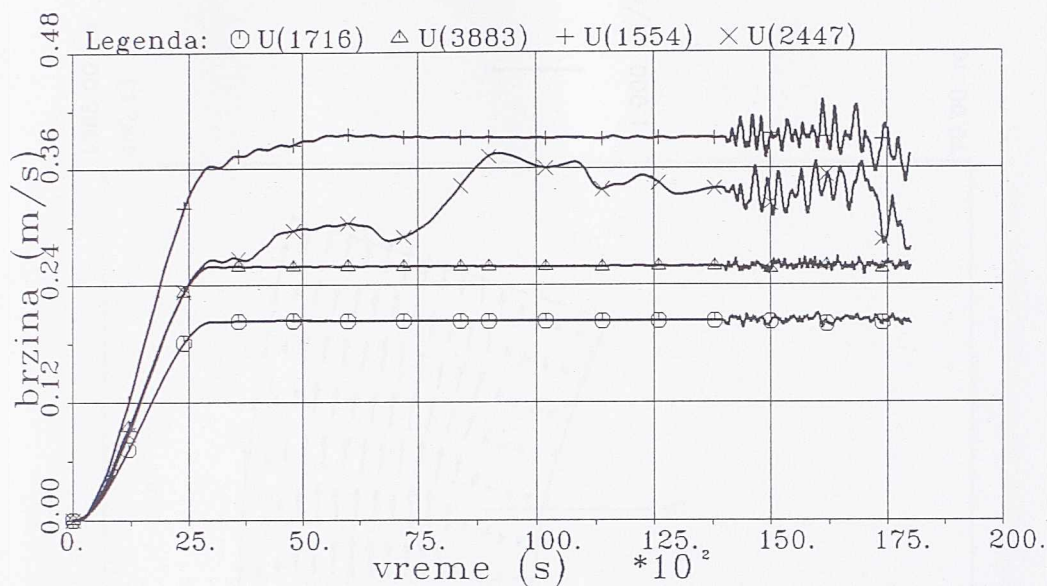
Prilog 45: Izračunate linije jednake vrtložnosti Ω , na ušću Save u Dunav, sa drugom varijantom numeričke mreže, za vreme $t = 18000 \text{ s}$ ($\Delta\Omega = 3\% = 0.0021 \text{ 1/s}$).



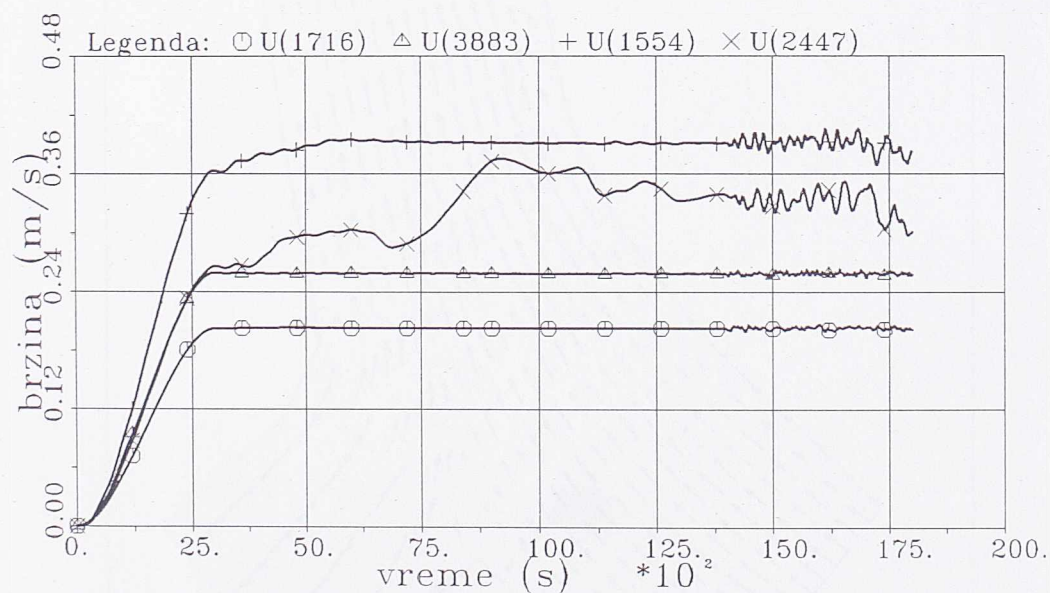
Prilog 46: Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karaterističnim tačkama druge varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.00$.



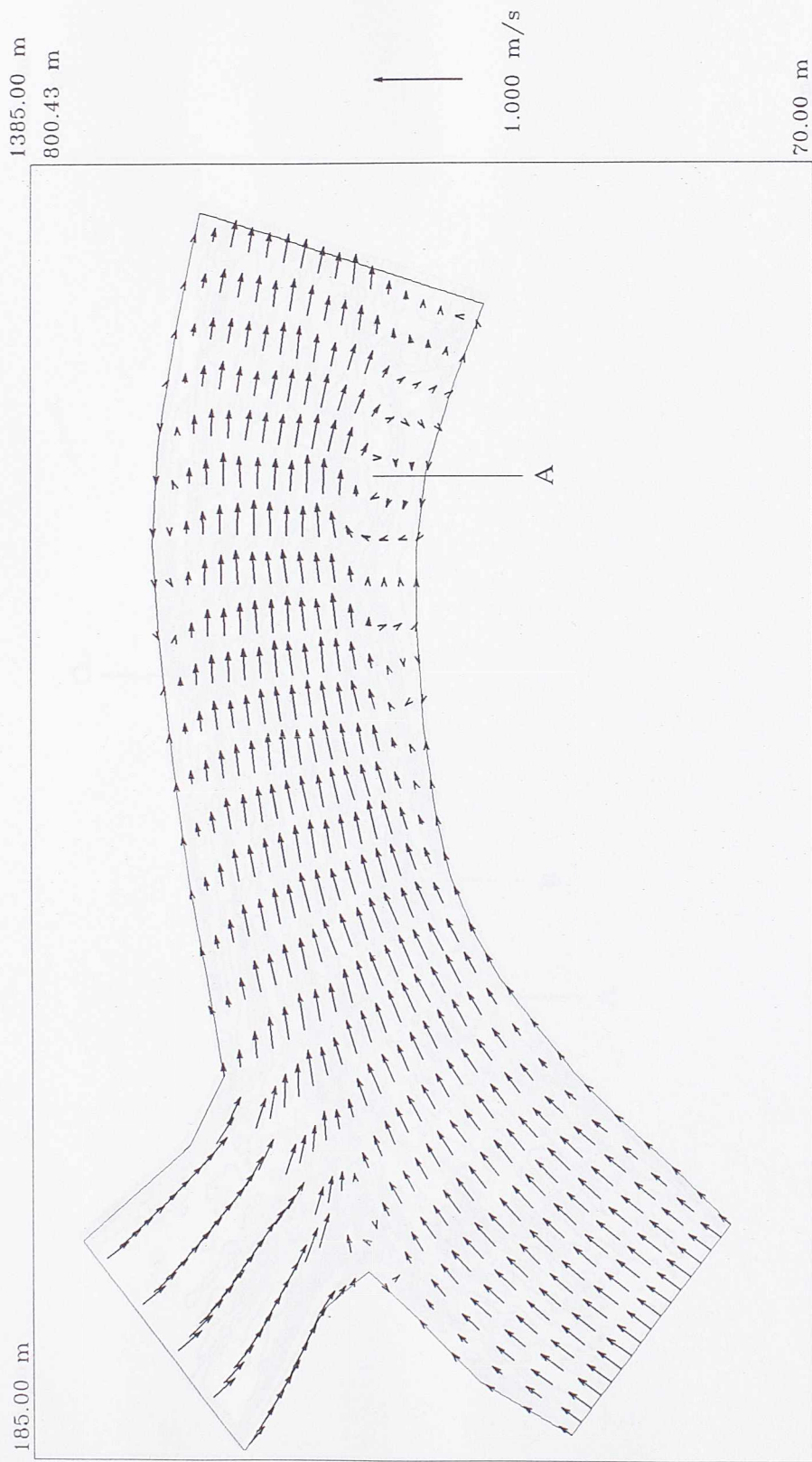
Prilog 47: Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karaterističnim tačkama druge varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.02$.



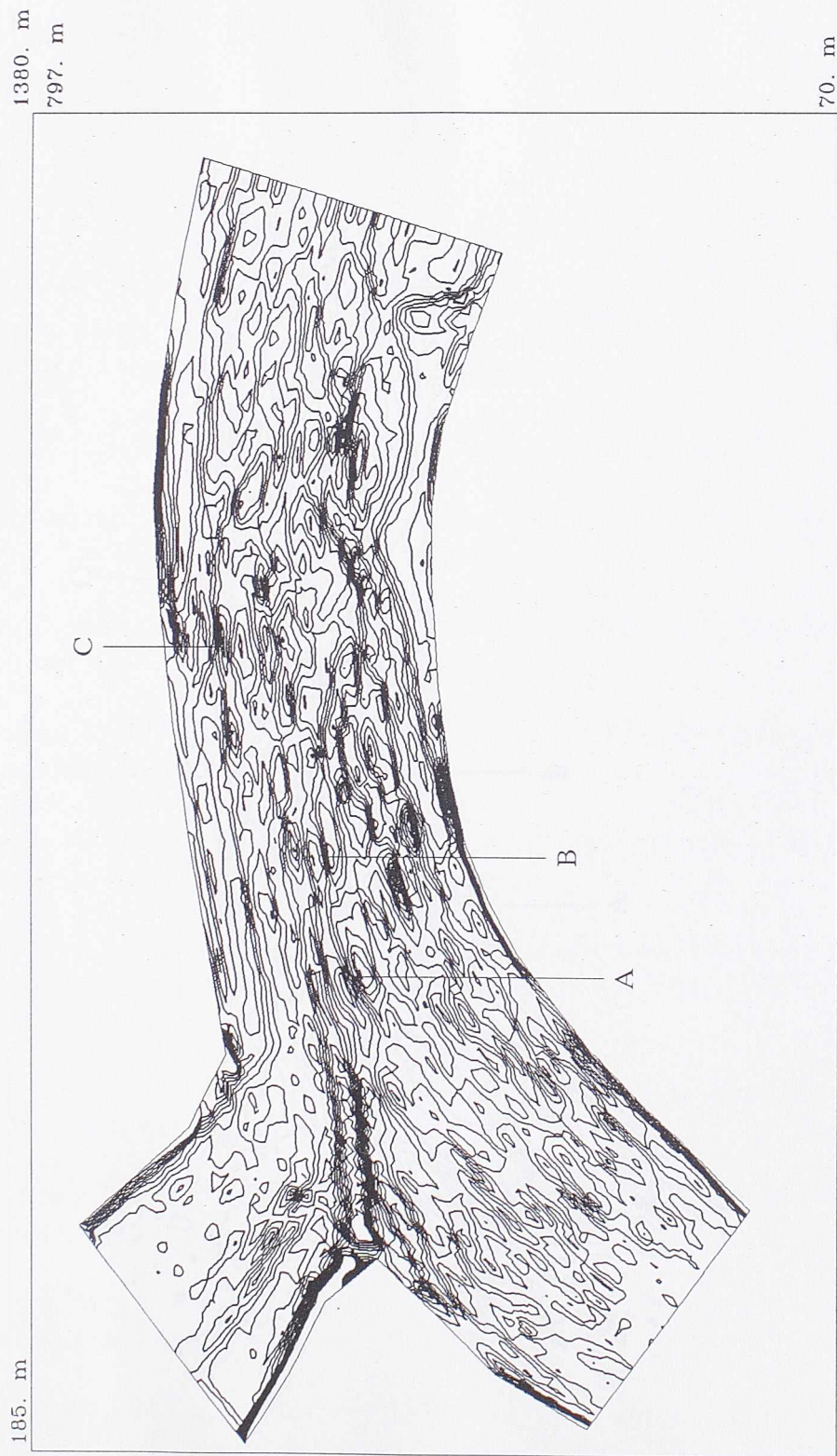
Prilog 48: Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karaterističnim tačkama druge varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.01$.



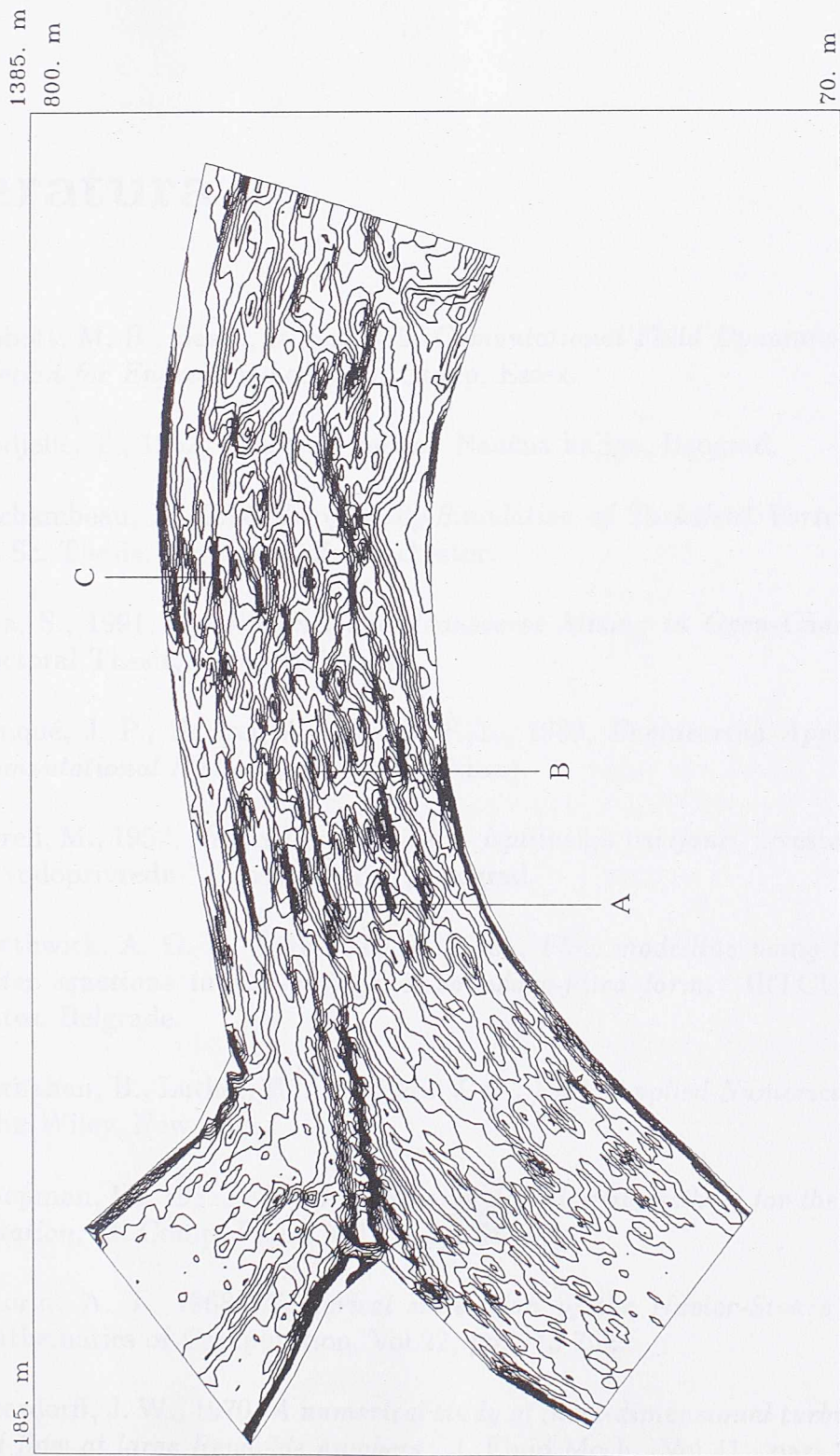
Prilog 49: Promene komponente brzine vode u_1 , u toku vremena, na karaterističnim tačkama druge varijante numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.005$.



Prilog 50: Izračunati rasporedi brzina osrednjenih po dubini, na ušću Save u Dunav, sa drugom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.01$, za vreme $t = 18000$ s.



Prilog 51: Izračunate linije jednake vrtložnosti Ω , na ušću Save u Dunav, sa drugom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.01$, za vreme $t = 17820$ s ($\Delta\Omega = 3\% = 0.00207$ 1/s).



Prilog 52: Izračunate linije jednake vrtložnosti Ω , na ušću Save u Dunav, sa drugom varijantom numeričke mreže, sa koeficijentom intenziteta slučajne komponente $f = 0.01$, za vreme $t = 18000$ s ($\Delta\Omega = 3\% = 0.00207$ 1/s).

Literatura

- [1] Abbott, M. B., Basco, D. R., 1989, *Computational Fluid Dynamics An Introduction for Engineers*, Longman Group, Essex.
- [2] Andjelić, T., 1952, *Tenzorski račun*, Naučna knjiga, Beograd.
- [3] Archambeau, F., 1995, *Large-Eddy Simulation of Turbulent Vortex Shedding* M. Sc. Thesis, University of Manchester.
- [4] Aya, S., 1991, *Longitudinal and Transverse Mixing in Open-Channel Flows* Doctoral Thesis, Kyoto University.
- [5] Benqué, J. P., Haugel, A., Viollet, P. L., 1982, *Engineering Applications of Computational Hydraulics*, Vol.II, Pitman.
- [6] Boreli, M., 1957, *Beogradski hidročvor - ispitivanja varijanti*, izveštaj Instituta za vodoprivredu "Jaroslav Černi", Beograd.
- [7] Borthwick, A. G. L., Barber, R. W., 1991, *Flow modelling using the shallow water equations in non-orthogonal boundary-fitted form*, IRTCUD Lecture Notes, Belgrade.
- [8] Carnahan, B., Luther, H. A., Wilkes, J. O., 1969, *Applied Numerical Methods*, John Wiley, New York.
- [9] Chapman, M., 1981, *FRAM - nonlinear damping algorithms for the continuity equation*, J. Comp. Phys., Vol.44, pp. 84-103.
- [10] Chorin, A. J., 1968, *Numerical simulation of the Navier-Stokes equations*, Mathematics of Computation, Vol.22, pp. 745-762.
- [11] Deardorff, J. W., 1970, *A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers*, J. Fluid Mech., Vol.41., part 2, pp. 453-480.

- [12] Djurić, M., Kapor, R., Pavlović, R. N., 1986, *Depth-Average Model with Body Fitted Co-ordinates for the Calculation of the Strongly Curved Elliptic Flows*, Hydrossoft 86, Hydraulic Engineering Software, Proceedings of the 2nd International Conference, Southampton, United Kingdom, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, pp. 179-192.
- [13] Djurić, M., Kapor, R., Pavlović, R. N., 1986, *Proračun strujne slike u zoni zahvata i ispusta vode u reku*, Zbornik radova sa IX savetovanja jugoslovenskih stručnjaka za hidraulička istraživanja, Split, str. 193-205.
- [14] Djurić, M., Kapor, R., Pavlović, R.N., Pop Trajković, V., 1987, *Prediction of Velocity and Concentration Fields in the Intake Region*, Proceedings of XXII Congress International Association for Hydraulic Research, Lausanne, Switzerland, Technical session A, Lausanne, pp. 293-298.
- [15] Djurić, M., Kapor, R., Pavlović, R. N., 1989, *Complex Flow Modelling by Curvilinear Coordinates*, Proceedings of HYDROCOMP '89, the International Conference on Interaction of Computational Methods and Measurements in Hydraulics and Hydrology, Dubrovnik, Yugoslavia, Elsevier, London, pp. 97-106.
- [16] Djurić, M., Hajdin, G., Kapor, R., 1994, *Prediction of Velocity, Concentration and Temperature Fields on Three Cases of Danube River Basin* Proceedings of XVII Conference of the Danube Countries on Hydrological Forecasting and Hydrological Date of Water Management, Volume II, Budapest, pp. 805-810.
- [17] Ferziger, J. H., 1981, *Numerical Methods for Engineering Application*, John Wiley, New York.
- [18] Ferziger, J. H., Perić, M., 1996, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- [19] Findikakis, A. N., Street, R. L., 1982, *Mathematical description of turbulent flow*, Proc. ASCE, J. Hyd. Div., Vol.108, No. HY8, August, pp. 887-903.
- [20] Flokstra, C., 1976, *Generation of Two-Dimensional Horizontal Secondary Currents*, Delft Hydraulics Lab. Res. Rept. S163, part II, July.
- [21] Goda, K., 1979, *A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows*, J. Comp. Phys., Vol. 30, pp. 76-95.
- [22] Hajdin, G., 1983, *Mehanika fluida*, Gradjevinska knjiga, Beograd.

- [23] Hoffmann, K. A., 1989., *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Engineering Education System, Austin.
- [24] Horiuti, K., 1985, *Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow by One-Equation Modeling*, Jour. of the Physical Society of Japan, Vol. 54, No. 8, August, pp. 2855-2865.
- [25] Ivetić, M., 1989, *Numerical Simulation of Turbulent Flow in Shallow Flow Domains by SGS Modelling*, Doctoral Thesis, Kyoto University.
- [26] Iwasa, Y., Inoue, K., 1984, *Plane multi-layered (or three-dimensional) flow analysis for lake Biwa*, HYDROSOFT' 84, C. A. Brebbia, Č. Maksimović and M. Radojković, Comp. Mech. Centre Publ. and Elsevier.
- [27] Iwasa, Y., Inoue, K., 1989, *Large Eddy Simulation for large water bodies*, HYDROCOMP 89 – Supplements, Č. Maksimović and M. Radojković editors, University of Belgrade.
- [28] Kapor, R., 1990., *Depth-Averaged Model for Calculation of Turbulent Flow in Shallow Flow Domains*, Kyoto University School of Civil Engineering, Research Report No. 90-HY-1, pp. 1-46, Kyoto.
- [29] Kapor, R., Ivetić, M., 1990., *Proračun tečenja u vodotoku matematičkim modelom osrednjenim po dubini toka*, Zbornik radova sa X savetovanja jugoslovenskog društva za hidraulička istraživanja, Sarajevo, str. 114-124.
- [30] Kapor, R., Ivetić, M., Maksimović, Č., 1994., *Proračun turbulentnog tečenja u vodotoku sa bočnim ispuštom*, Saopštenje sa XI savetovanja jugoslovenskog društva za hidraulička istraživanja, Beograd, str. 323-329.
- [31] Kapor, R., 1994., *Proračun turbulentnog tečenja u otvorenim tokovima osnovnim jednačinama osrednjenim po prostoru* Zaštita voda i upravljanje vodnim resursima Srbije, Institut za vodoprivredu "Jaroslav Černi", Beograd, str. 1-37.
- [32] Kapor R., Ivetić M., Maksimović Č., 1996, *Computation of the flow in natural watercourse by large eddy simulation*, II International Symposium Contemporary Problems of Fluid Mechanics, Belgrade, Yugoslavia, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, pp. 273-276.
- [33] Kuipers, J., Vreugdenhil, C. B., 1973, *Calculations of Two-Dimensional Horizontal Flow*, Delft Hydraulics Lab. Res. Rept. S163, part I, October.
- [34] Leonard, A., 1974, *Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows*, Adv. in Geophys., Vol.18A., pp 237-248.

- [35] Lesieur, M., Staquet, C., Le Roy, P., Comte, P., 1988, *The mixing layer and its coherence examined from the point of view of two-dimensional turbulence*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 192, pp. 511-534.
- [36] Lilly, D. K., 1967, *The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments*, Proc. IBM Sci. Comput. Symp. Environ. Sci., IBM Data Process. Div., White Plains, N.Y. pp. 195-210.
- [37] Maekawa, I., Muramatsu, T., 1986, *Higher order differencing schemes in fluid flow analysis and their applications to in-vessel thermal hydraulics*, Proc. 5th IAHR Liquid Metal Work. Gr. Meeting, Grenoble, France, pp. 1-23.
- [38] Ohtsuka, M., Yamakawa, M., 1988, *An Analytical Study of Turbulence in a Stably Stratified Shear Flow*, Proceedings of the Third International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, pp. 289-296.
- [39] Pavlović R. N., Kapor R., Djurić M., 1984, *Application of the Body Fitted Coordinates for Calculation of Elliptic Flows*, Hydrosoft 84, Hydraulic Engineering Software, Proceedings of the International Conference, Portorož, Yugoslavia, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, pp. 3-15 - 3-28.
- [40] Rastogi, A. K., Rodi, W., 1978, *Predictions of Heat and Mass Transfer in Open Channels*, Jour. of Hyd. Div., Vol. 104, No. HY3, March, pp. 397-420.
- [41] Roache, P. J., 1976, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, Albuquerque.
- [42] Rodi, W., 1980, *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics*, IAHR, Delft, The Netherlands, June.
- [43] Spasojević, M., 1988, *Numerical Simulation of Two-Dimensional (Plan View) Unsteady Water and Sediment Movement in Natural Watercourses* Doctoral Thesis, The University of Iowa, Iowa City.
- [44] Smagorinsky, J., 1963, *General circulation experiments with primitive equations: I. The basic experiment*, Monthly Weather Review, Vol.91, No. 3, pp. 99-164.
- [45] Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., Mastin, C. W., 1985, *Numerical grid generation - foundations and applications* Elsevier, New York.
- [46] Todorović, V., 1956, *Beogradski hidročvor - hidrometrijska merenja*, izveštaj Instituta za vodoprivredu "Jaroslav Černi", Beograd.

- [47] Usseglio-Polatera, J. M., Lesieur, M., 1988, *Ability of a Conventional 2-D Shallow Water Code in Modelling Coherent Structures Within a Mixing Layer*, Proceedings of the Third International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, pp. 233-240.
- [48] Wen, F., Kamalu, N., Crowe, C. T., Troutt, T. R., Chung, J. N., 1988, *Visualization and Measurement of Particle Dispersion in a Turbulent Plane Mixing Layer*, Proceedings of the Third International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, pp. 765-772.
- [49] Wijnbenga, J. H. A., 1985, *Determination of Flow Patterns in Rivers with Curvilinear Coordinates* Proceedings of the 21st IAHR Congress Melbourne, Australia pp. 132-138.
- [50] Yoshizawa, A., Horiuti, K., 1985, *A statistically-derived subgrid scale kinetic energy model for the large-eddy simulation of turbulent flows*, J. Phys. Soc. Japan, Vol.54, No. 8, August, pp. 2834-2839.



