



РД 17097



003114538

COBISS ◉

**ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ  
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Дејан Љ. Диван**

**ПРИЛОГ МЕТОДАМА ДЕФИНИСАЊА ПАРАМЕТАРА  
КОНСТИТУТИВНИХ МОДЕЛА  
ЗА ИСПУЦАЈЕ СТЕНСКЕ МАСЕ**

**докторска дисертација**

**Београд, 2000.**



ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ  
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

ПРИЛОГ МЕТОДАМА ДЕФИНИСАЊА ПАРАМЕТАРА  
КОНСТИТУТИВНИХ МОДЕЛА  
ЗА ИСПУЦАЛЕ СТЕНСКЕ МАСЕ

докторска дисертација

Ментор:

Проф. др Петар Анагности

Кандидат:

Мр Дејан Дивац

Београд, 2000.

Универзитет Маршала Тито - БЕОГРАД  
Ул. Н. Бр. 114538



Мојим синовима, Љуби и Николи



Пријатна ми је дужност да истакнем значај и улогу професора и наставника, колега, сарадника и пријатеља, заправо свих оних без чије велике помоћи, сталне подршке и сарадње, у било ком облику, израда овог рада сигурно не би била успешно окончана.

Пре свега, својим корисним саветима и бројним препорукама, значајно ми је помогао ментор, *др инж. Петар Анагности*, редовни професор Грађевинског факултета у Београду.

У току израде овог рада добио сам много драгоцених сугестија и усмеравања од *др инж. Милоша Којића*, редовног професора Машинског факултета у Крагујевцу.

Посебно истичем веома велику помоћ у изради овог рада коју сам добио, кроз дугогодишњу успешну сарадњу, од *др инж. Ненада Грујовића*, доцента Машинског факултета у Крагујевцу, без чијег изузетног залагања и инвентивног доприноса у изради софтвера, многе идеје сигурно не би биле остварене.

У изради нумеричких примера у великој мери ми је помогао колега *инж. Дејан Вучковић*.

Значајну помоћ у изради слика и цртежа добио сам од колегинице *техн. Николине Кардум*.

Наглашавам изузетно пожртвовање, педантност и ефикасност које је, приликом прикупљања и интерпретације теренских информација, показао колега *инж. Зоран Данков*, јер би, без његових напора, тешко било остварити заснованост овог рада на веродостојним подацима.

Заслугом колега *мр инж. Владимира Анђелковића*, *техн. Васе Рајшића*, *техн. Бориса Душанића* и *лаб. Здравка Стаматовића*, и њиховим озбиљним и професионалним извршењем изузетно тешких и сложених експеримената, прибављени су значајни подаци на којима се темељи ова дисертација.

На крају желим да истакнем да овај рад свакако не бих могао да реализујем да нисам имао подршку и помоћ целокупног колектива *Института за водопривреду "Јарослав Черни"*.

Свима напред поменутима, као и другима који нису именом наведени, дугујем најдубљу захвалност.

У сваком случају, најзначајнију захвалност дугујем својој најужој породици, супрузи и синовима, због њихове несебичне помоћи, сталне подршке и охрабрења, упркос чињеници да су они највише трпели због израде овог рада.

*Аутор*





## РЕЗИМЕ

Стенска маса је један природни материјал са дугом историјом механичких, топлотних и хемијских ефеката, која је услед тога нехомогена и анизотропна, и што је најважније, испресецана дисконтинуитетима различитих врста и величина. Стенски монолит и дисконтинуитети, заједно, одређују каква ће бити својства свеукупне стенске масе, при чему дисконтинуитети доминантно утичу на њено механичко понашање: смањују крутост и чврстоћу и генерално радикализују нелинеарност напонско-деформацијског понашања, повећавајући варијабилност и расипање резултата на тестовима и уводећи у предвиђање понашања материјала ефекат размере. У анализи механичког понашања таквих, сложених и разнородних, стенских маса, морају се ипак усвојити извесне претпоставке које, на одређен начин, идеализују стенске масе, и које омогућавају примену математичких модела. У овом раду, моделирање механичког понашања стенске масе засновано је на макроскопском, феноменолошком, приступу.

Полазиште за предложени поступак моделирања механичког понашања стенске масе су неколико основних претпоставки које се могу сматрати исправним у великом броју случајева у пракси. Стенска маса, иако је у основи дисконтинуална средина, може да се у размери проблема апроксимира квази-континуумом. Конститутивни модел треба да опише најзначајнија својства такве, дисконтинуиране, стенске масе, а то су: еласто-пластично понашање обухватајући ојачање, омекшање и дилатантно понашање. Конститутивни модел стенске масе као сложене структуре треба да се заснива на понашању елемената те структуре (стенски монолит и дисконтинуитети) и да обухвати утицај размере посматрања, односно величине објекта за чију се анализу дефинише конститутивни модел стенске масе.

Формиран је предлог новог конститутивног модела за пукотину. Модел је заснован на теорији пластичности са применом неасоцијативног закона течења. Коришћен је Desai-јев једноповршински услов течења. Извршена су значајна побољшања дефинисањем оригиналних решења за услов ојачања/омекшања и функцију пластичног потенцијала.

Развијен је модел механичког понашања стенске масе као дисконтинуалне и анизотропне средине, тако што је у конститутивне релације уграђена интеракција система пукотина и монолита, чиме се уважава ефекат размере. Формирани конститутивни модел за испуцалу стенску масу, који садржи у себи поменути конститутивни модел пукотине. Концепт се заснива на спрези деформација монолита и свих пукотинских система, уважавајући њихов реалан просторни положај и учесталост.

Извршена је нумеричка адаптација предложеног конститутивног модела за примену у методи коначних елемената, користећи алгоритам нумеричке интеграције конститутивних једначина који се заснива на имплицитном концепту. Извршена је уградња развијеног конститутивног модела у програмски пакет ПАК.

Развијен је методолошки поступак и софтвер за интерпретацију информација добијених испитивањима, у циљу добијања параметара конститутивног модела стенске масе. Поступак се заснива на итеративном поступку симулације опита применом методе коначних елемената и минимизацији грешке. Формирани су нумерички модели за симулацију више типских опита: лабораторијски триаксијални опити на узорцима монолита, лабораторијски опити директног смицања на узорцима дисконтинуитета, теренски опити методом круте распињаче и теренски опити методом крутог блока.

Приказани су резултати експерименталних истраживања која су извршена за потребе финансирања бетонске вишелучне бране на реци Црни Тимок у Србији. Опити обухватају испитивања узорака монолита и дисконтинуитета, као и теренска испитивања стенске масе у великој размери. Извршене су верификације конститутивног модела и поступка естимације параметара на резултатима ових истраживања.

Резултати приказани у овом раду могу пружити одређени допринос развоју савремене методе интерпретације резултата испитивања и математичког моделирања напонско-деформацијског понашања чврстих испуцалих стенских маса, чиме би се допринело подизању квалитета истраживања и повећању поузданости техничких решења, а у циљу сигурног и рационалног грађења широког спектра објеката различитих намена.

### Кључне речи

Стена, пукотина, стенска маса, конститутивни модел, еласто-пластичност, ојачање/омекшање, напон, метода коначних елемената, имплицитна интеграција, експеримент, параметар.

**ABSTRACT**

*A rock mass is a natural material with a long history of exposure to mechanical, thermal and chemical effects. It is therefore inhomogeneous and anisotropic, and most importantly, intersected by discontinuities of various kinds and sizes. A rock monolith (inact rock) and rock joints (discontinuities) determine all properties of the whole rock mass. The discontinuities dominantly influence the rock mass mechanical behaviour: decrease its stiffness and strenght, and generally radicalize the stress-strain nonlinearity, increasing the test results variability and dissipation, and introducing the scale effect into the material behaviour anticipation.*

*The analysis of such complex and diverse rock masses must include some suppositions which, to some extent, idealize rock masses and enable the mathematical models application. The rock masses behaviour modelling presented in this paper is based on a macroscopic, phenomenological approach.*

*The starting point of the proposed approach to the rock mass mechanical behaviour modelling, is represented by several basic assumptions which could be considered correct in a large number of practical cases. A rock mass, being basically a discontinuous media, could be approximated by a quasi-continuum within the scope of a problem. The constitutive model should describe the most important properties of such discontinuous rock mass, namely: elastic-plastic behaviour including the hardening, softening and the dilatant behaviour. The constitutive model of a rock mass as a complex material, should be based upon the fabric elements behaviour (the rock monolith and discontinuities) and encompass the observation scale effect, i.e. the size of the planned structure for the analysis of which the model has been developed.*

*A new constitutive model proposal for joint behaviour has been formed. The model is based on the theory of plasticity and the use of the nonassociative flow rule. The Desai single-surface yield condition has been used. Considerable improvements have been achieved by defining original solutions for the hardening/softening condition and the plasticity potential function.*

*A rock mass as a discontinuous and anisotropic media mechanical behaviour model has been developed by introducing the rock monolith and rock joint system interaction into the constitutive relations, and thus respecting the scale effect. The jointed rock mass constitutive model includes the mentioned joint constitutive model. The concept is based on interaction of the monolith and all joint systems deformations, considering their real spatial position and frequency.*

*A numerical adaptation of the proposed constitutive model for the application within the finite element method has been performed using the constitutive equations numerical integration algorithm based on the implicit concept. The developed constitutive model has been introduced into the PAK program package.*

*The methodology and software for the test data interpretation have been developed to obtain the rock mass constitutive model parameters. The procedure is based on the iterative test simulation using the finite element method and error minimization. Numerical models for several typical tests simulation have been developed: monolith samples laboratory triaxial tests, discontinuity samples laboratory direct shear tests, field tests using the stiff jack method, and field tests using the stiff concrete block method.*

*The results of the experiments carried out for a concrete dam foundation on the Crni Timok River in Serbia, are presented here. The investigations included the monolith and discontinuities sample tests, as well as large scale rock mass field investigations. The constitutive model and the parameter estimation procedure have been verified, using the investigation results.*

*The results presented in this paper could contribute to the development of hard, jointed rock masses stress-strain behaviour mathematical modelling, and the result interpretation methods. This would improve the quality of investigations and increase the structure designing reliability in order to provide for the safe and rational construction of a wide scale of structures for various purposes.*

**Key words**

*Rock, joint, rock mass, constitutive model, stress, elastic-plastic behaviour, hardening/softening, finite element method, implicit integration, experiment, parameter.*

## САДРЖАЈ

<b>1.</b>	<b>Општи преглед .....</b>	<b>1</b>
1.1	Предмет истраживања .....	1
1.2	Сврха и примена истраживања .....	3
1.3	Садржај поглавља .....	6
<b>2.</b>	<b>Доминантна својства стенске масе .....</b>	<b>8</b>
2.1	Увод .....	8
2.2	Дисконтинуалност као основно структурно својство стенске масе .....	9
2.3	Механичко понашање монолита .....	12
2.4	Механичко понашање пукотина .....	18
2.5	Механичко понашање стенске масе .....	21
<b>3.</b>	<b>Преглед значајнијих конститутивних модела коришћених за стенске масе .....</b>	<b>25</b>
3.1	Увод .....	25
3.2	Еластично понашање .....	30
3.3	Основни еласто-пластични концепт .....	33
3.4	Услов пластичног течења .....	38
3.5	Услов ојачања/омекшања .....	44
3.6	Закон течења .....	46
3.7	Моделирање оштећења .....	47
3.8	Моделирање понашања пукотина .....	50
<b>4.</b>	<b>Предлог конститутивног модела за испуцале стенске масе .....</b>	<b>53</b>
4.1	Координатни системи, ознаке и дефиниције .....	53
4.2	Теоријске поставке конститутивног модела за пукотину .....	57
4.3	Теоријске поставке конститутивног модела за стенску масу .....	63
<b>5.</b>	<b>Нумеричка имплементација предложеног конститутивног модела .....</b>	<b>67</b>
5.1	Инкрементално-итеративни поступак у методи коначних елемената .....	67
5.2	Интеграција напона .....	70
<b>6.</b>	<b>Естимација параметара предложеног конститутивног модела .....</b>	<b>78</b>
6.1	Концепт методе минимума квадрата одступања .....	78
6.2	Опис примењене методе естимације параметара .....	82
6.3	Значење и одређивање параметара .....	87
<b>7.</b>	<b>Експериментална истраживања .....</b>	<b>89</b>
7.1	Опште о извршеним истраживањима .....	89
7.2	Комбиновани огледи притиска и смицања методом бетонског блока .....	95
7.3	Огледи притиска методом круте хидрауличке распињаче .....	99
7.4	Испитивања дисконтинуитета на узорцима .....	102
7.5	Испитивања стенског монолита на узорцима .....	108
<b>8.</b>	<b>Верификација предложеног конститутивног модела .....</b>	<b>110</b>
8.1	Верификација предложеног конститутивног модела за пукотину .....	110
8.2	Верификација предложеног конститутивног модела за стенску масу .....	119
<b>9.</b>	<b>Закључна разматрања .....</b>	<b>125</b>
9.1	Коментар о извршеним истраживањима .....	125
9.2	Препоруке за даља истраживања .....	127
	<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>130</b>

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ  
ՊՐԵՍՆԱԿԱՆԱԿ

## 1. ОПШТИ ПРЕГЛЕД

### 1.1 Предмет истраживања

Стене, које су настале у природи, постојале већ милионима година и све то време функционисале као природни системи, биће ускоро узнемирене деловањем инжењера који су одлучили да остваре неке своје циљеве. Механичко понашање таквих стенских маса, у њиховом природном положају и стању, са њиховим природним физичким и структурним својствима, веома је сложено, па стога, дефинисање и одређивање њихових механичких карактеристика захтева свеобухватан стратегијски приступ, користећи одговарајући научни концепт. Наиме, ми морамо одлучити: која својства стена желимо знати, које методе тестирања би требало да применимо и на који начин би разматрано стенско подручје требало да буде карактерисано, а све то усклађено са циљевима пројекта, односно потребама објекта. Морамо утврдити да ли методе карактеризације стена зависе од својстава стенске масе и у којој мери ће понашање стена бити промењено људским деловањем, тј. могу ли се стене карактерисати једном за свагда, или је карактерисање стена трајан процес који ће се настављати докле год постоји и објекат. Из свих ових разлога, веома је сложен приступ ма ком инжењерском проблему везаном за стенске масе, а нарочито када нам пракса донесе неки случај за који не постоји раније искуство и када немамо кохерентно структурисану методологију.

Описивање механичког понашања стенских маса још увек се у великој мери заснива на оним теоријским поставкама и прорачунским техникама које су првобитно формулисале за пројектовање конструкција од вештачких материјала. Али, стена се разликује од других материјала: она је милионима година стара, и већ је трпела промене од природних процеса који су веома разноврсни – механички, термални и хемијски. Посматрајмо комад компактног камена (стенски монолит): он је сам по себи најчешће нехомоген и анизотропан, и што је веома значајно, садржи у себи микроштећења. Микроштећења су међусобно повезане поре које се налазе између зрнаца седиментних стена, затим изоловане шупљине различитог порекла у вулканским и у растворивим карбонатним стенама, као и микрофисуре, које се често виђају у чврстим стенама, а појављују се унутар кристала и на границама између кристала. Присуство микроштећења је подједнако важно или чак важније за механичка својства стене него њен минералoшки састав.

Међутим, најважнија разлика између вештачких материјала и природне стене састоји се у томе што природна стена садржи макроштећења различитих врста и величина. У макроштећења спадају пукотине (фрактуре) и прслине (фисуре), равни слојевитости, раседи, као и други слични облици. *Пошто макроштећења, каква год да су, у размери инжењерских објеката значе видљиво прекидање механичког континуума, за њих ћемо на даље користити збирни назив: дисконтинуитети.* Дисконтинуитети су уобичајени у стенским формацијама плитко испод површине терена, док се неки од њих настављају и хиљадама метара у дубину Земљине коре. Врло лако могу постојати читаве групе дисконтинуитета, свака са другачијом историјом настанка, а резултат свега тога је комплексна структура стенске масе са нехомогеним механичким својствима. Дисконтинуитети радикално мењају понашање стена, у односу на понашање које би се могло очекивати на основу тестирања нетакнутих, монолитних, узорака.

На следећим сликама приказане су фотографије стенске масе прожете дисконтинуитетима различитог порекла: испуцали кристаласти шкриљци у истражном засеку

на преградном месту Кључ на реци Шуманки [115] и пукотине лучења у дијабазима на преградном месту Орловача на Великом Рзаву [1].



Слика 1.1: Преградно место Кључ на реци Шуманки  
- испуцали кристаласти шкриљци -



Слика 1.2: Преградно место Орловача на реци Велики Рзав  
- пукотине лучења у дијабазима -

Стенски монолит и дисконтинуитети, заједно, одређују каква ће бити својства свеукупне стенске масе, при чему дисконтинуитети доминантно утичу на њено механичко понашање: смањују крутост и чврстоћу и генерално радикализују нелинеарност напонско-деформацијског понашања, повећавајући варијабилност и расипање резултата на тестовима и уводећи у предвиђање понашања материјала ефекат размере.

При теоријским и практичним разматрањима напонско-деформацијских проблема у стенама, морају се ипак усвојити извесне претпоставке које, на одређен начин, идеализују стенске масе, и које омогућавају лакшу примену постојећих теорија механичког понашања и коришћење математичког апарата, али које у природи нису испуњене. Зато, увођење оваквих претпоставки крије у себи опасност од суштинских грешака, односно од удаљавања наших разматрања и закључака од стварног понашања стенских маса као реалних средина. У том смислу, свака идеализација стенске масе, односно модел њеног стања, својства или понашања, мора се заснивати на параметрима и карактеристикама, како физичких, тако и структурних својстава стенске масе која се истражује, односно имајући у виду стенске масе као реалне средине: дисконтинуалне, хетерогене, анизотропне и природно напрегнуте.

Кључно питање математичког моделирања напонско-деформацијског проблема у стенама је дефинисање конститутивних релација за стенске масе и одређивање њихових параметара. Ако се као полазиште за моделирање усвоји претпоставка да се стенска маса, иако је у основи дисконтинуална средина, може у размери проблема апроксимирати замењујућим, еквивалентним континуумом, тада конститутивни модел треба да укључи утицај свих елемената стенске структуре (утицај односа монолита и дисконтинуитета) и ефекат размере посматрања у односу на величину објекта који се анализира.

Проблем дефинисања конститутивних релација стенских маса окупира пажњу истраживача од настанка механике стена као научне дисциплине. У ранијим радовима [47, 48, 54] истраживачи су тежили да сложено напонско-деформационо понашање стенске масе анализирају применом релативно једноставних модела (еластично или круто-пластично понашање). Међутим, развојем рачунара и нумеричких метода стекли су се услови за развој и примену сложенијих и реалистичнијих модела напонско-деформационог понашања. Тежећи да обухвате доминантна својства одређених врста стенских маса, истраживачи су развијали конститутивне моделе користећи различите приступе са различитим нивоом општости. Генерално, значајан развој и примену доживели су модели засновани на теорији пластичности, укључујући и актуелне, развојне правце: кинематичко и изотропно ојачање, анизотропно ојачање, неасоцијативну пластичност, моделе критичног стања и др [28].

Користећи као полазиште, са једне стране, феномене напонско-деформационог процеса у стенским масама, регистроване експериментима, и, са друге стране, постојеће приступе у формулисању конститутивних релација, у овом раду су презентирани неке нове могућности у моделирању механичког понашања испуцале стенске масе, заснивајући их на интеракцији понашања стенског монолита и стенских дисконтинуитета.

## 1.2 Сврха и примена истраживања

Развој привредних грана као што су: енергетика, водопривреда, саобраћај, грађевинарство и рударство, захтева значајна инвестициона улагања у различите врсте објеката (високе бране, хидротехнички тунели под притиском, саобраћајни тунели, рударски копови и јаме, подземна складишта и др.). Различите активности инжењера у планирању, дизајну и изградњи ових објеката, генерално, у знатној мери зависе од сазнања из механике стена. На пример, то су: процена геолошких ризика у квантитативним терминима, процена могућности селекције и припреме стенског материјала, евалуација сечивости и бушивости стена и дизајн алата за сечење и бушење, анализа деформација и стабилности стенске масе, дефинисање и контрола процедура минирања, пренос топлоте, струјање флуида и хидрауличко разламање стене. Имајући у виду предмет овог рада, истаћи ћемо неке од инжењерских активности који су у директној вези са напонско-деформацијским понашањем стенске масе као природне средине.

Инжењерски објекти који се постављају на површину земље обично не захтевају подробно проучавање карактеристика и понашања стена, осим ако су веома велики, или

специјални, или ако стена има неке неповољне одлике. На пример, када се граде мостови, зидају веома велике зграде или фабрике, потребна су испитивања да се установи какво ће бити деформисање стена под тим оптерећењем.

Међутим, од површинских објеката, са становишта механике стена, највећи изазов представљају високе бране, нарочито лучне, код којих се остварују велика напрезања у темељима и опорцима, како због оптерећења конструкције водом, тако (симултано) и због непосредног деловања воде на стенску масу. Ту се прво морају сагледати, у макро размери, активни раседи и опасност од великих клизишта (још је свежа у нашем памћењу катастрофа на високој лучној брани Вајонт у Италији, где се стенска маса одронила у огромним количинама у вештачко језеро и истиснула воду, која се, затим, прелила преко бране и усртила више од 2 000 људи низводно). Анализа деформација у стенама и анализа стабилности стена, сачињавају важан део инжењерских студија за пројектовање ових објеката, а служе и за потврђивање да ли је за један одређени терен одабран прави тип бране. Стенској маси у фундаментима приписујемо извесне карактеристике њиховог напонско-деформацијског понашања, које сагледавамо помоћу лабораторијских тестова и помоћу тестова *in situ*, а добијене вредности интегрисемо у нумеричке анализе напрезања и деформисања система објекат-стена. Ако је потребно, пројектују се потпорни системи са стенским анкерима да би се преднапрегнула стена или место контакта стене и бране. Код брана се јавља и потреба да се изведу засеци за преливе, који такође могу достићи импресивне димензије. Такви засеци су значајни, зато што би одрон, којим би се такав засек затрпао, могао довести до препуњавања вештачког језера и до преливања воде преко бране. Анализа деформисања и стабилности стенске масе помаже у одлуци да ли вишак воде треба да се одлива под ведрим небом или кроз тунел. На слици 1.3 приказана је фотографија осигурања засека за преливни шахт бране Првонек код Врања, које је остварено преднапрезањем испуцале стенске масе [31, 39].



Слика 1.3: Брана Првонек – осигурање преливног шахта

Пројектовање косина ископа за путеве, железничке пруге, канале и цевоводе, такође захтева испитивање и анализу напонско-деформацијског понашања стенске масе. У урбаним зонама, саобраћајнице на површини терена ће због високих цена земљишта, можда морати да имају субвертикалне косине, и онда, да би такве косине биле трајне мораће да буду вештачки подупиране (ојачане).

Рудници са површинском експлоатацијом су предузећа која морају минимизирати трошкове откопавања да би им се рад уопште исплатио. Врло често су потребне обимне студије да би се одабрао угао под којим ће стајати стенска маса у површинском копу. Да би



илустровали величину и значај проблема дефинисања оптималног нагиба косина површинског копа, на слици 1.4 приказана је фотографија рудника бакра Велики Кривељ.



Слика 1.4: Површински коп Велики Кривељ

Пошто такви рудници не могу себи приуштити, у економском смислу, да имају високе факторе сигурности, зато морају уложити средства за темељито испитивање, анализу и осматрање стенских деформација и напрезања [35, 36]. Нормалан је случај у таквим рудницима да се и не размишља о подпорним конструкцијама јер би трошкови били неприхватљиво велики, али понекад су потребни стенски анкери, дренаже и друге мере у непосредној близини виталних места у руднику (енергетских чворова, дробилишних постројења или транспортних трака).

Једна значајна одлука у рудницима са подземном експлоатацијом јесте: хоћемо ли покушати да јаме одржимо у отвореном стању, или ћемо допустити да се стена обрушава. Ако изаберемо стабилне методе рударења, онда димензије стубова, просторија и других компоненти рудника, треба заснивати на студијама у којима се користи нумеричка анализа, уз неизбежно темељито испитивање стенске масе. Ако се одлучимо на нестабилне рударске методе, онда треба прогнозировати деформисање стенске масе, да би извршили поуздан распоред капиталних просторија, и са циљем да се руда што мање меша са бескорисном стеном, као и да се постигну минималне штете у околини [37, 38].

Израда подземних просторија различите намене захтева, по правилу, поуздано познавање напонско-деформацијског понашања стенске масе. Ово важи за израду разних врста тунела, али и за подземне објекте који се користе за многе сврхе које нису транспорт, а нису ни рударење. Подземне хидроелектране, које имају извесне предности над површинским електранама на планинском терену, имају веома велике машинске дворане, а и многе друге подземне отворе, у комплексном тродимензионалном распореду. Оријентација и распоред тих отвора зависе скоро у целости од стања и механичких својстава стенске масе. Чување нафте или природног гаса у течном стању у подземним дворанама, захтева да извршимо и различите анализе везане за пренос топлоте или струјање флуида кроз стенску масу, што је готово увек у функцији напонско-деформацијског стања, које такође морамо познавати. Механичко понашања стена је веома значајно и код војних подземних просторија, зато што се безбедност таквих објеката мора одржати и при експлозијама.

Према томе, у фазама пројектовања, изградње, коришћења и одржавања различитих врста објеката неопходно је познавање напонско-деформационог понашања стенских маса, као дела система објекат-стена, за шта су потребна опсежна и комплексна истраживања из области механике стена, наравно уз коришћење и других научно-техничких дисциплина као што су:

инжењерска геологија, геофизика, теоријска механика и др. Из ових разлога, у свету је у последњим деценијама овог века веома интензиван развој механике стена, као младе, а по сложености проблема које изучава и методологији која се при том користи, изразито специфичне научне дисциплине.

Развој мерне технике и истраживачке опреме је допринео да се добијају све квалитетније и поузданије информације о стенском медију, а интензивни развој рачунара и рачунарске технике је довео до изванредних могућности у прорачунима и пројектовању објеката. Развијени су софтверски пакети са којима могу да се анализирају конструкције са различитим, веома сложеним понашањима материјала. Као последица, настаје потреба и за развојем метода и техника интерпретације резултата истраживачких поступака, како оних који се традиционално изводе, тако и нових испитивања, а у складу са савременим захтевима и могућностима.

Основни циљ спроведених истраживања и израде овог рада је анализа и систематизација различитих претпоставки о понашању испуцалог стенског медија, анализа и систематизација експерименталних могућности дефинисања параметара конститутивних модела стенских маса, те на основу претходног, критичка анализа, селекција, развој и разрада одабраног приступа, уз верификацију на примерима из праксе са документованим мерењима и испитивањима. Ово би требало да допринесе даљем развоју методологије према којој би се вршио одабир врсте потребних испитивања стенског медија, квантификовао њихов обим и дефинисала метода интерпретације резултата, а у циљу сигурног и рационалног пројектовања и грађења широког спектра објеката различитих намена.

### 1.3 Садржај поглавља

Поглавље 1 је уводни део рада, и у њему је дат општи преглед разматране проблематике. Описан је предмет истраживања, дефинисани су сврха, циљ и садржај рада.

У поглављу 2 је дат кратак приказ доминантних својстава стенске масе, посматране као реалне средине, пре свега имајући у виду дисконтинуалност као њено основно структурно својство. Дате су опште поставке о испуцалости стенских маса, укључујући генезу пукотина и параметре описивања испуцалости. Описано је напонско-деформацијско понашање стенског монолита, као и модалитети и критеријум слома стене, где је посебно истакнута анизотропија, утицај ефекта размере и др. Анализирано је механичко понашање дисконтинуитета (понашање при нормалном затварању и смичуће понашање). Коначно, дат је и приказ понашања стенске масе као сложене средине у природним условима.

У раду се даје преглед неких публикованих конститутивних модела (који се заснивају на теорији пластичности), са освртом на могућности њиховог коришћења за описивање напонско-деформацијског понашања стена (поглавље 3). Анализирани су различити предлози за услов течења, услов ојачања и закон течења. Истакнута је могућност моделирања понашања дисконтинуитета.

Поглавље 4 садржи предлог новог конститутивног модела за пукотину. Модел је заснован на теорији пластичности. Коришћен је једноповршински услов течења који је предложио *Desai*. Извршена су одређена побољшања коришћењем неасоцијативног закона течења и дефинисањем оригиналних решења за пластични потенцијал и услов ојачања/омекшања. У овом поглављу дат је и предлог конститутивног модела за испуцалу стенску масу, у који је инкорпориран и предложени конститутивни модел пукотине. Концепт се заснива на спречи деформација монолита и свих пукотинских система уважавајући реалан просторни положај и учесталост пукотина.

За предложени конститутивни модел извршена је нумеричка имплементација. Приказан је алгоритам нумеричке интеграције конститутивних једначина, који се заснива на имплицитном концепту (поглавље 5).

Развијен је методолошки поступак за интерпретацију информација добијених испитивањима, у циљу добијања параметара конститутивног модела испитиване средине. Поступак се заснива на симулацији опита применом методе коначних елемената. У поглављу 6 је приказана метода и алгоритам софтвера за естимације параметара конститутивног модела, који се заснива на итеративном поступку симулације и минимизацији грешке.

У поглављу 7 приказани су неки резултати експерименталних истраживања која су извршена за потребе фундарања бетонске бране Боговина на реци Црни Тимок у Србији. Опити обухватају испитивања дисконтинуитета и узорака монолита, као и теренска испитивања стенске масе у великој размери.

Извршена је верификација предложеног конститутивног модела и поступка естимације параметара на резултатима спроведених истраживања (поглавље 8).

Коначно, у закључним разматрањима (поглавље 9), дат је сажетак и коментар о резултатима извршених истраживања, односно њиховом доприносу конципирању савремене методе интерпретације резултата испитивања и моделирања напонско-деформацијског понашања стенских дисконтинуитета и чврстих испуцалих стенских маса, као и могућим пољима примене. На крају су дате и препоруке за даља истраживања.



## 2. ДОМИНАНТНА СВОЈСТВА СТЕНА

### 2.1 Увод

У овом поглављу обратићемо пажњу на оне карактеристике механичког понашања стена које се толико истичу, и издвајају стену од других материјала, да су допринеле потреби да се механика стена формулише као засебна научна дисциплина.

У микроскопским размерама, стена може да се састоји од зрнаца различитих материјала која имају различита физичка својства. Кристаласте стене саграђене су од збијено испреплетених кристала разних силикатних минерала или карбонатних, сулфатних или других соли. Ако нису биле изложене дејству атмосферских утицаја, такве стене су обично еластичне и јаке, са кртим карактеристикама при лому под притисцима, у читавом оном распону који је уобичајен код грађевинских радова. Међутим, ако су у питању стене у којима су кристали оштећени прслинама, тада су деформације делимично нелинеарне и неповратне. Кречњачке стене могу такође бити јаке и крте, али ће постати пластичне при довољно великом притиску, зато што ће њихови кристали да клизе једни преко других. Лискун и други листасте минерали као серпентин, талк, хлорит и графит, редукују чврстоћу стене зато што лако клизе тамо где су им сучељене површине. Лискунски шкриљци и њима сродне стене веома су анизотропне и имају малу чврстоћу у равнима своје шкриљавости. Вулканске стене као што су базалти могу имати много малих шупљина (вугова); а ако се изузме та појава, оне се понашају слично гранитним стенама, крто и еластично. Серпентинити, зато што имају склоност да се смичу по неким непредвидивим површинама, веома су варијабилних својстава. Кластичне седиментне стене, саграђене од комадића и зрна различитих врста стена и минерала, добијају своје одлике онајвише од оног везива које држи све те фрагменте на окупу. Неке су стабилно и чврсто везане, па се зато понашају крто и еластично, док је друге довољно натопити водом па да се претворе у најобичнији талог. Органске стене се могу понашати веома разнолико. Тврди угаљ, као и нафтоносни шкриљац, јесу крте, еластичне стене. Мекан угаљ је већ јако испуцао, а може и садржати угљоводоничне гасове под притиском у својим порама.

Анизотропија је уобичајена појава у многим стенама, зато што зрнаца минерала имају неку своју преферирану оријентацију, или због напона који су на ту стену деловали у прошлости. Слојевитост и фолијација доводе до тога да су разне врсте седиментних и метаморфних стена високо анизотропне у погледу своје деформабилности, чврстоће и других одлика. Осим тога, чак и узорци стена који, на први поглед, немају никакву слојевиту структуру, као што су пешчари и кречњаци који леже у дебелим слојевима, могу под оптерећењем показати да ипак имају анизотропна својства, зато што су били подвргнути неједнаким главним напонима у процесу петрификације, када су се полако претварали из седимента у стену.

Главна тешкоћа у предвиђању какво ће бити механичко понашање стенских маса проистиче из чињенице да су стене по својој природи дисконтинуалне. Стена се разликује од других инжењерских материјала по томе што у њој постоје инхерентни пукотински системи, што додатно узрокује анизотропна и изразито нелинеарна механичка својства. Ако је у стенској маси само једна једина пукотина, њен ефекат биће следећи: затезна чврстоћа у правцу управном на равани пукотине биће сведена готово на нулу, а чврстоћа на смицање у правцу паралелном са равни пукотине биће значајно смањена. Ако пукотине нису насумично дистрибуиране, а оне то скоро никад нису, онда настаје изразита анизотропија чврстоће, као и

других својстава стенске масе. Најзад, свака испуцала, природно напрегнута стенска маса, биће анизотропна зато што на њене одлике, преко дисконтинуитета, знатно утиче стање напона; то је један материјал кад су пукотине затворене, а сасвим други материјал кад су пукотине отворене или смакнуте.

Дакле, стенске масе у природи, посматране као реалне средине, по правилу су испуцале, хетерогене, анизотропне и већ се налазе у неком природном напонском стању. Дисконтинуалност, хетерогеност, анизотропија и природна напрегнутост представљају општа физичко-структурна својства стенских маса. Сви начелни и конкретни, теоријски и практични проблеми механике стена морају се разматрати, анализирати и проучавати водећи рачуна о наведеним општим физичко-структурним својствима стенских маса.

## 2.2 Дисконтинуалност као основно структурно својство стенске масе

### Опште поставке о испуцалости стенских маса

Дисконтинуитет је генерални термин који се користи за сваки механички прекид у стенској маси где је она раздвојена тако да је затезна чврстоћа на том месту једнака нули, или веома мала. Својство стенске масе да је прожета пукотинама и прслинама назива се испуцалост. Испуцалост, односно дисконтинуалност, је основно физичко-структурно својство стенске масе, које битно и суштински утиче на њено механичко понашање.

Пукотине, у ствари, представљају ломове у стенској маси, дуж којих је дошло до потпуног раскида међумолекуларних сила и до потпуног губљења кохезије када су напони, чијем је дејству стенска маса била изложена у процесу свог настајања и развоја, прешли граничне чврстоће њене основне камене супстанције. Ломови који представљају површине дуж којих је дошло до потпуног губитка кохезије, али ограничених дужина, које се не протежу кроз цело посматрано подручје, већ се завршавају у основној каменој супстанци, називају се прслине.

Испуцалост стенских маса везана је за њихову геолошку прошлост. У природне, геолошке узроке појаве пукотина спадају: дејства тектонских сила, смањење запремине услед хлађења магме, скупљање исталожених маса услед сушења, гравитационе силе и дејство ерозије, дејства температурних промена и др. Пукотине могу настати и услед антропогених узрока, који се свде на излагање стене прекомерним напрезањима услед ископа, оптерећења, минирања и сл.

Досадашња бројна истраживања су показала да пукотине у стенској маси нису хаотично распоређене, већ да у њиховом просторном распореду по правилу постоји одређени ред. Пре свега постоје фамилије пукотина које представљају њихове скупове приближно исте просторне оријентације и, најчешће, исте генезе. Више фамилија пукотина у својој укупности чине одређени пукотински систем који влада у одређеном квазихомогеном подручју.

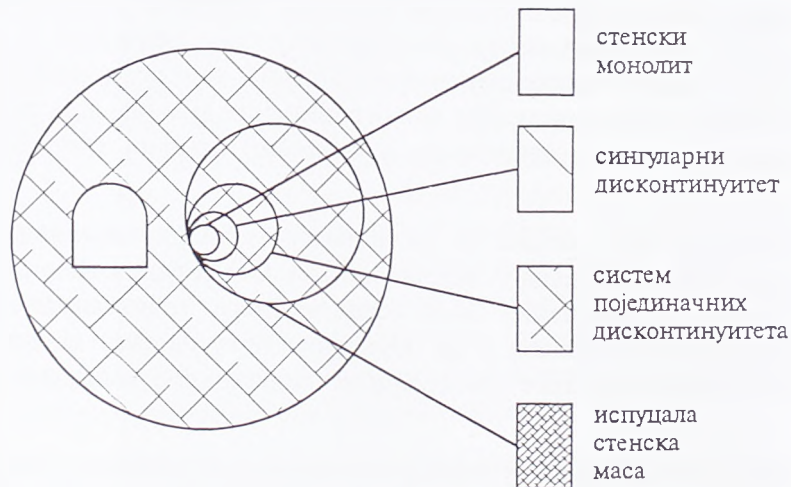
Стенски монолит представља камену супстанцију одвојену са свих страна пукотинама и може се издвојити из стенске масе као комад камена. Мада и он сам може бити прожет микрофисурама ипак се по њима не може без додатног механичког рада раздвојити на два или више делова. Дисконтинуум се јавља као релативна категорија у односу на величину посматраног подручја. Ако се дисконтинуум посматра као велико подручје испуцале стенске масе унутар још већих дисконтинуитета, онда се то подручје може сматрати квазиконтинуумом. Стенска маса у квазиконтинуалном подручју може да буде хетерогена, услед различитог интензитета испуцалости појединих зона.

Низ извршених експерименталних испитивања је показао да механичке карактеристике одређене на монолиту постају све слабије уколико расте величина монолита који се испитује. Посматрано генерално, уколико је стенска маса издељена већим бројем пукотинских фамилија,

са пукотинама на мањим међусобним растојањима и са лошијим својствима пукотина, утолико су механичка својства стенске масе у односу на стенски монолит слабија. Овај ефекат се назива ефекат размере и тумачи се са утицајем дисконтинуитета на механичко понашање стене.

Међутим, величина и број оштећења не расте континуално са повећањем посматраног подручја. Постоје просторне границе, које се у конкретном случају могу тачно дефинисати, у којима долази до јављања нових структурних елемената. Ове границе се могу јављати у широком у распону: с једне стране у реду величина раседа, а са друге у границама величине кристала. У реду величине подручја у којима се јављају нови структурни елементи није *apriori* оправдано стенску масу посматрати као квазиконтинуум коме би се могле саопштити одређене физичко-механичке законитости. Тек када посматрано подручје буде тако велико да се ти нови структурни елементи могу посматрати као статистички распоређени, поново има смисла говорити о квазиконтинууму и његовим физичко-механичким карактеристикама. Механичка својства у једном реду величине посматраног подручја разликују се битно од својстава у другом реду величине, јер се појавом новог квалитета структурних елемената омогућује нови кинематички механизам. Може се говорити о следећој законитости: уколико је веће посматрано подручје, утолико на механичка својства утиче више кинематичких механизма, почев од померања кристалне решетке до померања на раседима.

Слика 2.1 показује на поједностављен начин како ће на избор модела понашања стенске масе утицати однос између размака дисконтинуитета и величине посматране области. Понашање интактног стенског материјала може бити од значаја кад разматрамо ископ стена бушењем или минирањем. Понашање појединачних дисконтинуитета може бити од пресудног значаја када је кинематички омогућено да се нарушавање равнотеже блокова стена догађа дуж спојница блокова. Коначно, често је потребно размотрити глобални одговор стенске масе, у којој је размак између дисконтинуитета мали у односу на димензије објекта. У тим случајевима стенску масу третирамо као еквивалентни или квази-континуум.



Слика 2.1: Утицај размере на избор модела понашања стене

Из оваквог схватања испуцалости, односно дисконтинуалности стенских маса произилази и приступ интерпретацији података добијених испитивањима и мерењима, као и приступ успостављању веза између појединих физичко-механичких карактеристика.

### Генеза пукотина

У склопу инжењерско-геолошких истраживања увек је корисно да се утврди генеза појединих пукотина или њихових скупова, из два основна ралога. Прво, генеза по правилу предодређује многе карактеристике пукотина (димензије, облик зидова, испуне и др.), а тиме и механичко понашање појединих пукотинских фамилија или система при деформисању и лому стенске масе и, друго, генетска разврставања су један од основних предуслова за екстраполацију података добијених у истражним објектима, на подручја која нису била доступна за директно истраживање.

Различити аутори су на различите начине класификовали пукотине према њиховој генези. У овом раду нећемо изучавати проблем генетских класификација пукотина, нити ћемо детаљније улазити у механизам њиховог настајања. Овде је дат само кратак приказ, према Кујунџићу [54], најчешћих и најдоминантнијих врста пукотина, односно дисконтинуитета.

*Дијаклазе* су пукотине тектонског порекла, типични представници кртих ломова, који настају у брзом процесу деформације. Дијаклазе су знатно рапаве и без трагова трења. Најстарије фамилије дијаклаза често су испуњене кварцним или калцитним испунама. У случају циркулације воде, могу бити јако алтерисане.

*Пукотине смицања* такође се испољавају као крти ломови и врло се често јављају у природи; ретке су само у изразито пластичним срединама. Њихове површине су најчешће равне а понекад и закривљене; често показују трагове трења на свежој површини лома.

*Пукотине клизања* настају веома спорим процесом деформације, без промене запремине и без потпуног губитка кохезије, у стенама које се под дејством оптерећења у великој мери понашају пластично. У природи се јављају често. Уочљиве су бразде (стрије) које настају одмах при настајању пукотина.

*Међуслојне пукотине* су механички дисконтинуитети у седиментним стенским масама до којих долази услед релативно ниже отпорности у међуслојним површинама. Непосредни узроци настајања међуслојних пукотина су: скупљање и слегање услед сушења и релативно померање услед тектонских процеса. Величина међусобних растојања ових пукотина представља параметар према коме се седиментне стенске масе деле на: банковите, слојевите, плочасте и листасте. Међуслојне пукотине се, по правилу, одликују великим дужинама.

*Цепљивост* је потенцијална испуцалост. Ако се посматра са аспекта механике, она се испољава у смањеној отпорности на затезање или смицање у правцу једне или више равни. Код седиментних стена цепљивост се јавља дуж површина које су формиране променом врсте материјала који се таложио или прекидима процеса исталоживања. Код шкриљаца потенцијалну дисконтинуалност представљају површине шкриљавости, по правилу на малим међусобним растојањима милиметарског и сантиметарског реда величине, које се испољавају у изразито оријентисаној текстури стабличастих или листалних минерала.

*Пукотине лучења* настају у магматским стенама као последица хлађења и груписања минералних састојака.

*Пукотине растерећења* настају у процесу формирања долина насталих дејством ерозије, односно усецањем водног тока у стенску масу, када долази у боковима долине до релаксације напона, што има за последицу стварање фамилија пукотина паралелних са правцем водотока. Ова појава је нарочито изражена у теснацима.

*Раседи* су велики механички дисконтинуитети, код којих су се обе стране релативно кретале клизањем, једна у односу на другу. Раседи су настали као лом услед смицања и раседне површине су често углачане трењем раседних блокова (раседна огледала) и по њима се виде стрије, које показују правце извршених кретања. Крила раседа могу бити приљубљена или размакнута, али се врло често раседи испољавају и у виду смрвљених зона. *Смрвљене зоне* се одликују врло великим бројем ломова. Стенска маса у овим зонама може бити смрвљена у толикој мери да се као производ лома добије врло финозрни материјал - милонит.

*Вештачке (антропогене) пукотине* настају у процесу инжењерске делатности човека, под дејством експлозива при минирању стенске масе или као последица ефекта релаксације напона када се врши ископ стенске масе, било на површини било у подземљу.

#### Параметри описивања пукотина

Да би се омогућила анализа, истраживање или прогноза механичког понашања испуцалих стенских маса у условима одређеног напонског стања, неопходно је пре свега истражити својства и карактеристике самих пукотина као елемената испуцалости и извршити њихову квантификацију. Према препорукама *Међународног друштва за механику стена (ISRM)*



– *International Society for Rock Mechanics*), за квантитативни опис дисконтинуитета у стенским масама [15], одабрано је следећих десет параметара:

*Просторна оријентација* дисконтинуитета дефинише се помоћу азимута и падног угла. Азимут је угао који хоризонтална пројекција падног правца (оријентација на ниже) заклапа са севером (од  $0^\circ$  до  $360^\circ$ ), падни угао је угао који падни правац заклапа са хоризонталном равни (од  $0^\circ$  до  $90^\circ$ ). Пукотине у стенској маси се, с обзиром на њихов положај и оријентацију, у највећем броју случајева јављају у виду одређених фамилија, које се не могу лако на први поглед уочити, али се статистичком обрадом могу јасно утврдити.

*Размакнутост* је управно растојање између два суседна дисконтинуитета. Обично се исказује као просечна размакнутост у оквиру једне фамилије. Често се користи и реципрочна величина – *учесталост* дисконтинуитета.

*Простирање* пукотина дефинише се дужином (мери се по правцу пружања) и ширином (мери се по падном правцу). Границе површине једног дисконтинуитета су или чврста стена или неки други дисконтинуитет. Најчешће се мери *распрострањеност* – дужина трага једног дисконтинуитета која се види на некој стенској површини која је изложена погледу, чиме се може прибавити макар каква-таква, груба процена колика је површина једног дисконтинуитета.

*Величина зева* пукотине је међусобно растојање њених зидова. Величина зева је различита код различитих пукотина и углавном зависи од њиховог настанка; дијаказе се отварају при самом њиховом настајању, пукотине смицања остају најчешће затворене. Величина зева је често променљива, нарочито у функцији положаја у односу на површину терена.

*Морфологија* пукотина односи се на рапавост и заталасаност површине пукотине и мери се као одступање од средње равни једног дисконтинуитета. Према облику зидова јављају се пукотине са равним површинама, са кривим површинама (таласасте, витоперне итд.) и са изломљеним површинама. У односу на рапавост зидова, пукотине се могу поделити на: пукотине са глатким површинама, неуједначеном текстурном рапавошћу.

*Чврстоћа зидова* пукотина је притисна чврстоћа два суседна стенска зида у једном истом дисконтинуитету. Она може бити мања од чврстоће стенског монолита, због физичко-хемијских промена (распадања) камене материје у зони непосредно уз зид пукотине, као и оштећења ове зоне услед механичких дејстава при њеном настанку.

*Пукотинске испуне* су материјали којима је пукотина потпуно или делимично испуњена или којима су зидови пукотина потпуно или делимично обложени. Материјал пукотинских испуна може да буде донет подземном водом која га исталожава у пукотини, може да буде и смрвљени материјал стенске супстанције настао при формирању саме пукотине, и, најзад, може да буде искристалисан из раствора у подземној води. С обзиром на потребе инжењерске праксе, пукотине се, по параметру испуна, могу условно класификовати на: пукотине без испуне ("отворене"), пукотине са трошном испуном, пукотине са глиненом испуном, пукотине са кристализационом испуном ("залечене").

Поред наведених параметара често се за описивања испуцалости користе кумулативни, изведени, показатељи као што су: коефицијенти испуцалости, пукотинска порозност и коефицијент оштећености.

### 2.3 Механичко понашање стенског монолита

Механичко понашање интактне стене, односно стенског монолита, описано је детаљно у великом броју радова [11, 22, 47, 98, 101, 105, 109, 111]. Механичко понашање стенског монолита квантификује се испитивањем узорака, што је углавном довољно у оним применама



где је важно понашање саме стене као камена. На пример: за процену бушивости, сечивости, и употребу као ломљеног камена или агрегата за бетон. Међутим, за главнину послова у којима имамо површинска или подземна ископавања, или ослањање великих објеката, једнако је важно, ако не и важније, понашање система дисконтинуитета, него природа саме стене. У оваквим случајевима, процена механичког понашања стенске масе не може бити заснована само на испитивањима узорака, него и на одређивању структурних карактеристика стенске масе на терену.

### Индексне карактеристике стенског монолита

На основу неколико најосновнијих мерења на узорцима могу се одредити извесне одлике стенског монолита које се називају индексним карактеристикама. То су: порозност, густина, брзина звука, водопропустљивост, трајност и чврстоћа. Ове карактеристике треба оценити кад хоћемо емпиријски да класификујемо стену, јер ови атрибути, заједно, допуштају да се ослонимо на ранија искуства са истим таквим или сличним стенама, и да на основу тих корелација доносимо, у нашој пракси, корисне одлуке.

Порозност стене се квантификује помоћу бездимензионалне константе, која је једнака односу запремине пора и укупне запремине. У седиментним стенама порозност варира у широком распону (од близу нуле па све до 90%). Код ових стена, генерално, порозност постаје све мања протицањем времена и све већом дужином испод површине, ако сви други фактори остају непромењени. У кристалистим кречњацима и евапоритима, и у већини вулканских и метаморфних стена, велики део порозности састоји се од планарних прслина. Већ и релативно мала порозност ове врсте делује на карактеристике стене у истој мери као много већи проценат порозности субсферичне врсте. Кад процес деградације напредује, порозност се многоструко повећава. Резултат овога је, да код неких стена ми можемо оценити релативни квалитет стене најпросто мерењем порозности.

Водопропустљивост може да послужи и као индексна одлика монолита зато што нам даје информацију о степену међусобне повезаности пора или микрофисура – а то је један од основних фактора који утиче на механичка својства стене. Наиме, варијације у водопропустљивости до којих долази при променама нормалног напона, а нарочито на прелазу од компресије ка тензији, јесу мера за степен оштећености стене, јер на равне прслине веома јако делује нормалан напон док на лоптасте поре не делује. Последица овога је следећа: стене чија пропустљивост потиче једним делом од присуства мреже микрофисура испољиће огромну разлику пропустљивости кад се напонско стање промени. *Bernaix* је године 1969. [9], тестирао лискунски шкриљац из темеља брана *Malpase* после њеног рушења и показао да је разлика у пропустљивости, у функцији напонског стања, била чак педесет хиљада пута!

Само по себи је очигледно зашто нам је у интересу да имамо неки показатељ (индекс) за чврстоћу стенског монолита. Проблем је, међутим, у томе што одређивање чврстоће стена, обично захтева пажљиву припрему теста, као и узорка за тест, а резултати су веома осетљиви на метод и начин оптерећивања. Индекс је користан само ако се исте одлике покажу у свакој лабораторији и ако мерење није много скупо. Један такав индекс чврстоће заснива се на тесту тачкастог оптерећења – *Broch* и *Franklin* 1972. године [13].

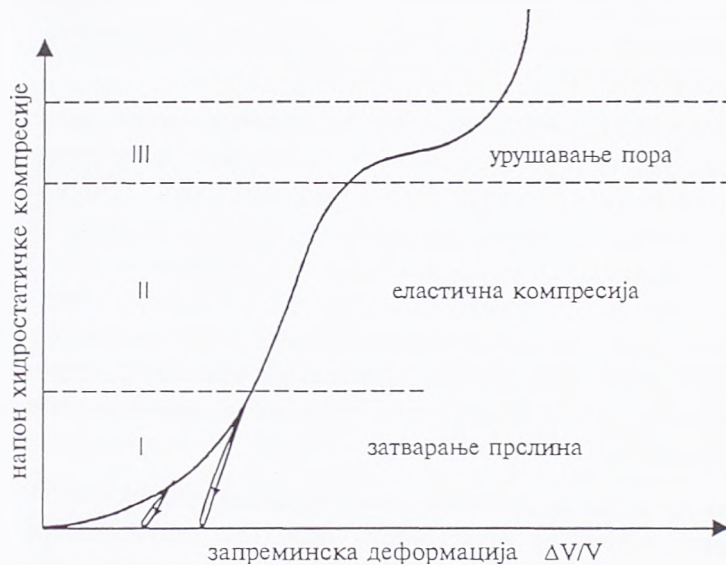
Својства монолита се могу мењати током времена под дејством различитих утицаја, као што су: разлиставање, хидратација, растварање, оксидација и други процеси. Трајност стена од битне је важности за све примене. Корисно је имати некакав индекс о степену променљивости стенског монолита, упркос томе што ниједан тест не може репродуковати све оне услове који ће се највероватније стварно појавити у природи, осим за неколико сасвим одређених ситуација. Један добар индексни тест ("*slake durability*"), користан углавном зато што нуди релативно рангирање трајности стена, предложили су *Franklin* и *Chandra* 1972. године [93].

Мерење брзине простирања звучних таласа кроз монолит релативно је једноставно. Могу се установити брзине и лонгитудиналних и трансферзалних звучних таласа. Индексни тест захтева одређивање само лонгитудиналне брзине, коју је, као што се у пракси показује, лакше мерити. По теорији еластичности, брзина којом напонски таласи путују кроз стену зависи

искључиво од њених еластичних својстава и њене густине. У пракси, мрежа микрофисура у узорку ствара један јачи, надмоћан ефекат и, пошто је то тако, брзина звука може послужити као индекс степена оштећености који постоји у узорку.

### Напонско-деформацијско понашање стенског монолита

Хидростатичка компресија доводи до смањивања запремине, а после неке границе мења се, трајно, унутрашње структура стене, и то зато што поре бивају згњечене. Међутим, тиме се не може достићи вршно оптерећење; наиме, стена увек може да прихвати још веће, и све веће, хидростатичко оптерећење, па и огромно, колико год ми можемо да произведемо, па и много више од тога. Крива хидростатичког притиска у функцији запреминске деформације стенског монолита, генерално је конкавна нагоре, као што је показано на слици 2.2, са четири јасно распознатљива, одвојена, подручја.

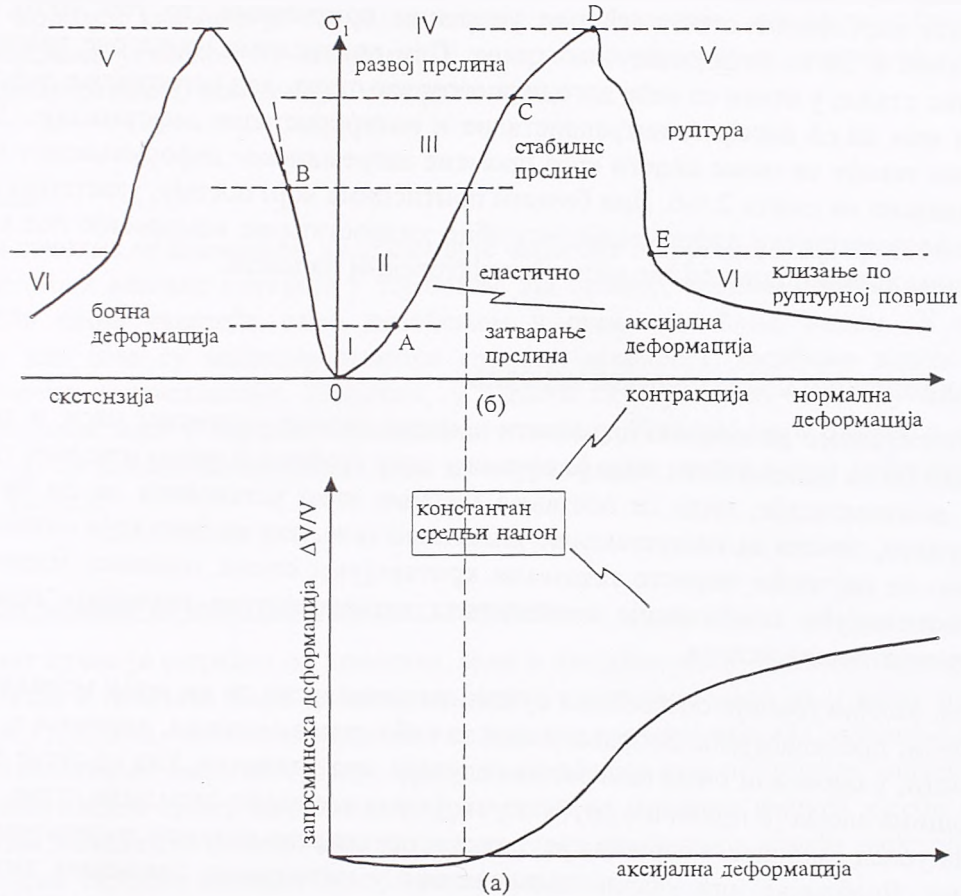


Слика 2.2: Понашање стенског монолита при хидростатичкој компресији

У првом подручју, фисуре које су постојале од раније почињу да се затварају. Кад се оптерећење уклони, већина фисура остане затворена тако да остаје једна трајна деформација. Кад је већина прслина затворена, даља компресија довешће до збијања стене саме, а оно се састоји у деформисању пора и у збијању зрна, и напредује приближно линеарно. Код изражено порозних стена као што су пешчар, креда, и кластични кречњак, поре почињу да се урушавају у себе, због велике концентрације напона свуд око њих; у добро цементованим стенама то неће почети да се дешава све док притисак не достигне ред величине од  $100 \text{ MPa}$ , док у слабо цементованим стенама почиње да се дешава много раније. Коначно, кад су све поре затворене, једини компресибилни елементи који су преостали јесу сама зрна. Непорозне стене немају деформисање пора па зато имају уједначену нагоре-конкавну криву која важи све до  $30 \text{ GPa}$  или више, док је код веома порозних стена као што су креда или пловућац урушавање пора изразито уочљиво, па чак и деструктивно, јер те стене, кад их извадимо из тест-коморе, постају прах без икакве кохезије.

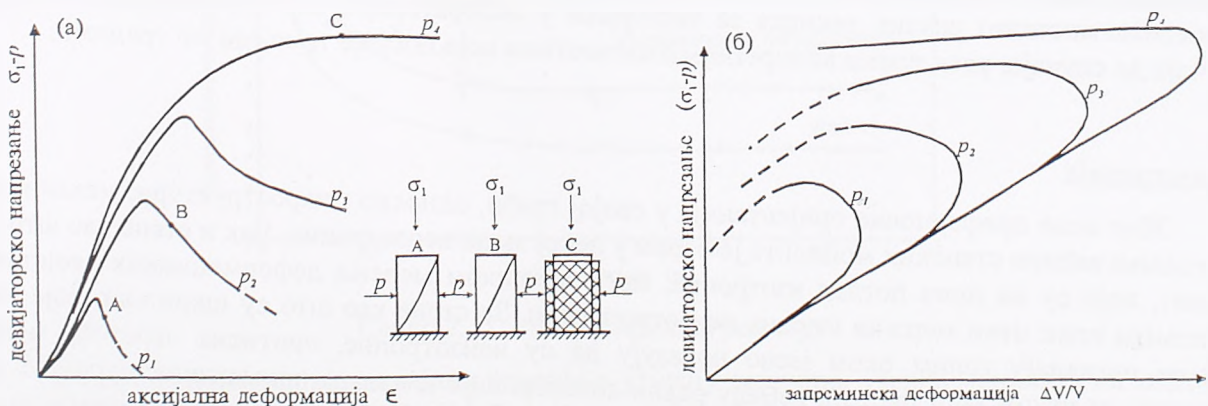
Девијаторско напрезање даје упадљиво другачије резултате, као што се види на слици 2.3 [2, 22]. На почетку, фисуре почињу да се затварају. Ово, даје један нееластичан, нагоре-конкаван део напонско-деформацијске криве. Код већине стена, после овога наступају линеарни односи између аксијалног напона и аксијалне деформације, као и између аксијалног напона и бочне деформације. На тачки 'B' (слика 2.3-а) прираштај бочне деформације почиње да се увећава у односу на прираштај аксијалне деформације зато што настају нове прслине, а старе се продужавају. У региону између напона 'B' и напона 'C', сматра се да су прслине стабилне, а то би значило да се са сваким новим повећањем напона оне прошире у једној ограниченој мери, али онда престану да расту. После тачке 'C', развија се један систем међусобно изукрштаних прслина, које се постепено уједињавају, тако да настаје једна полу-континуирана руптурна површина. Вршно оптерећење, тачка 'D', уобичајени је

критеријум за слом. Ако се волуметријска деформација уцрта насупрам девијаторског напона, као што је учињено на слици 2.3-б, добијена крива показује да је достизање оног напона код кога већ почињу да настају прелине ('B') означено почетком повећања запремине. На нивоу напона који одговара тачки 'C', узорак може имати запремину већу него на почетку теста. Ово повећање запремине које је у вези са настанком прелина зове се дилатанца.



Слика 2.3: Понашање стенског монолита при једноаксијалној компресији

Спречено боочно ширење ће већину монолита знатно ојачати, што је нарочито упадљиво код високо фисуриране стене. Кад се средњи притисак повећава, брзи пад способности ношења оптерећења после пређеног вршног оптерећења (тачка 'D' на слици 2.3) постаје, постепено, све мање и мање упадљив, а онда, кад се постигне она вредност средњег притиска која је позната као притисак транзиције из кртог понашања у дуктилно, стена почне да се понаша у потпуности пластично (слика 2.4).



Слика 2.4: Понашање стенског монолита при триаксијалној компресији

Транзиција из кртог понашања у дуктилно, за већину чврстих стена, дешава се при притисцима који су далеко изван оног подручја које је од интереса у грађевинским пројектима. Међутим, у евапоритским стенама и у меканим глиненим шкриљцима, пластично понашање може се показати већ при оптерећењима која се дешавају у темељима грађевина. Гранит може да се понаша као крт еластичан материјал чак и под бочним притиском од више стотина мегапаскала, док карбонатне стене, већ под умереним притисцима (до  $100 \text{ MPa}$ ), могу да постану пластичне и да се деформишу као глина. При притисцима изнад ове транзиције из кртог у дуктилно стање, у стени се неће догодити слом као такав, али испитивање деформисане стене показаће нам да се догађале интракристалне и интеркристалне деформације. Деловање бочног притиска такође се може видети кроз промене запреминског деформационог одговора, као што је приказано на слици 2.4-б. При бочним притисцима који постају, узастопно све виши и виши, криве волуметријске деформације јесу збир хидростатичке компресије под све већим средњим напоном и дилатанце под све већим девијаторским напоном.

### Модалитети и критеријум слома стенског монолита

Ако претпоставимо да можемо проценити почетне напоне у стенској маси, и да можемо предвидети како ће ти напони бити модификовани у току грађења и након изведене грађевине, као и у току експлоатације, онда се поставља питање: како установити да ли ће се стена здробити, исплукати, почети да незауостављиво пластично тече, или на било који начин угрозити објекат? За ово се најчешће користе такозвани критеријуми слома, односно, једначине које дефинишу лимитирајуће комбинације компонената напона и тако раздвајају прихватљиве услове од неприхватљивих услова.

У пракси, конфигурације оптерећења су толико разноврсне да ни један модалитет слома није, сам по себи, преовлађујући. Заправо, свако за себе стање смицања, затезања и притиска, може се показати, у овом или оном конкретном случају, као критично. Кад се стена сломи под тензијом површина слома је прилично груба и у њој нема комадића сломљене стене. Насупрот томе, код лома услед смицања, површина је глатка и прекривена великом количином праха од мрвљења стене. Дробљење или ударни слом настаје у интензивно смањеним запреминама стене. Испитивања дробљења показују да су то веома комплексни процеси, у којима настају тензионе пукотине, које расту, и ступају у међудејство путем смицања. Кад честице и крхотине настале распрскавањем монолита нису слободне да се крећу ван зоне компресије, оне се ситно, фино измрве.

Може се, дакле, увидети да је слом стенског монолита заправо прилично компликован процес, у коме се појављују један или више од тих, поменутих, модалитета. Зато још не постоји такав метод за тестирање монолита који би, сам за себе, био довољан, а да би се остале методе тестирања могле искључити. У стварности, теорија стенског слома је таква да ми морамо користити мноштво разних техника за тестирање у лабораторији, али и на терену, и то од случаја до случаја, увек према конкретним околностима које постоје тамо где ми градим.

### Анизотропија

Због неке префериране оријентације у својој грађи, односно микроструктури, механичко реаговање већине стенских монолита је барем у некој мери неизотропно. Чак и стене као што је гранит, које су на први поглед изотропне, могу приликом мерења деформационих својстава испољити ипак неки мерљив ступањ неизотропности. За стене као што су шкриљци, које већ кад се погледају голим оком јасно показују да су неизотропне, притисна чврстоћа може варирати са углом који постоји између равни анизотропије и правца примењеног напона 5 до 10 пута [11, 47]. Јака анизотропија карактеристична је за стене које су сачињене од паралелних склопова пљоснатих минерала као што су лискун, хлорит и глина, или од издужених минерала као што је хорнбленда. Отуд су метаморфне стене, као шкриљац, често изразито анизотропне у свом понашању. Анизотропија се такође појављује у седиментним стенама, које садрже слојеве различитог састава који се правилно, наизменично ређају.

## Распадање

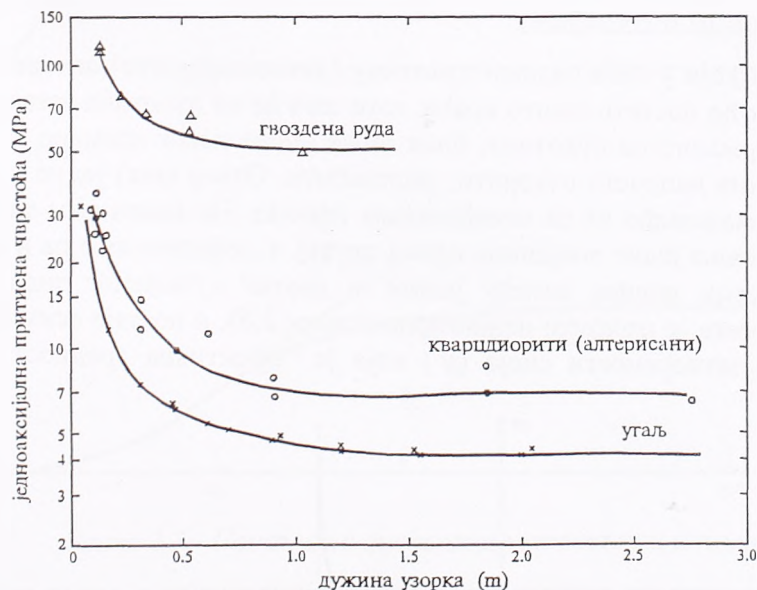
Распадање (атмосферска ерозија) је хемијско и/или физичко мењање површине стене реаговањем те површине са атмосферским гасовима и са растворима атмосферских гасова у води. Аналогија за овај процес је, код конвенционалних инжењерских материјала, корозија. Распадање значајно утиче на механичка својства стене. Близу површине Земљине коре могући су физички процеси као што је термални циклус и инсолација, док су у дубинама Земље, процеси распадања углавном су хемијски. У те процесе убрајају се: растварање кречњака и феномени јонске размене, оксидација и хидратација.

## Деловање воде

Неким стенама се додавањем воде смањује чврстоћа и крутост, а тај ефекат се заснива на хемијској промени везивне материје у тој стени. На пример, трошан пешчар може, типично, изгубити 15% своје чврстоће само довођењем у стање zasiћења водом. У екстремним случајевима, као што су монтморионитски глинени шкриљци, zasiћење водом доводи до потпуне промене конзистенције. Међутим, у већини случајева, на чврстоћу стене утицаће углавном притисак воде у порама и фисурама, у смислу *Terzaghi*-јевог закона о ефективном напону, тако да се механичко деловање воде исказује се кроз услове слома дефинисаним преко ефективних напона.

## Утицај ефекта размере на чврстоћу стенског монолита

Монолит стене је саграђен од кристала, зрна и аморфне масе, утканих у једно ткиво, али у коме има пора и прслина. Када је монолит чврсте стене тако мали да у њему постоји само врло мали број прслина, слом неизбежно значи додатни раст прслина. За разлику од тога, слом веће запремине стенске масе на терену, може да се догоди дуж постојећих оштећења. Угаљ, измењене гранитоидне стене, шкриљац, и друге стене са мрежама фисура у себи испољавају највећи ступањ зависности од величине узорка; код њих пропорција између чврстоће на терену и лабораторијске чврстоће понекад буде 10 или чак и више.



Слика 2.5: Утицај ефекта размере

Начињено је неколико значајних студија о утицају величине узорка монолита на мерену притисну чврстоћу. *Bieniawski* је 1968. године објавио тестове на призматичним *in situ* узорцима угља [3], чија је величина достигала чак 1,6 x 1,6 x 1 метар. *Jahns* је године 1966. саопштио резултате сличних тестова на коцкастим узорцима гвоздене руде [46], где је препоручио да узорак буде тако велики да сваку његову ивицу пресеца барем 10 дисконтинуитета. Наиме, узорци још већи од тога постају скупљи, а не показују неко битно умањење чврстоће; а мањи узорци показују неприродно велике чврстоће због ефекта размере.

Због недовољног броја испитивања не можемо прихватити ове *Jahns*-ове препоруке за све типове стена; али, сви су изгледи да, генерално, постоји нека горња величина узорка, толика да још већи узорци монолита не би показивали даље смањење своје чврстоће. На слици 2.5, изведеној из радова *Bieniawski*-ог и *Van Heerden*-а 1975 [4], приказан је овај образац понашања као сумарни извештај о већем броју тестова изведених на угљу и на гвозденој руди, као и тестова са измењеним и фисурираним кварц-диоритом [78].

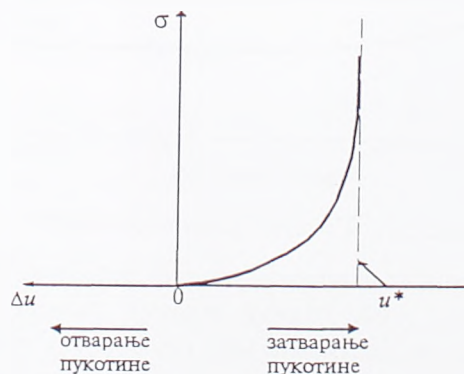
## 2.4 Механичко понашање дисконтинуитета

Кад се формира ископ у стенској маси, неке пукотине ће се затварати, али неке друге ће се отворити, а поједини блокови ће клизити низ друге блокове и то по површинама дисконтинуитета. Да би било могуће моделирати ове процесе, нужно је познавати напонско-деформацијско понашање дисконтинуитета. Када се оптерети нормалном силом један блок стене у којој постоји само један једини дисконтинуитет, две површине тог дисконтинуитета, које су једна са другом у додиру, биће присиљене да се још ближе приљубе једна уз другу. Ако се, уз то, примени и оптерећење на смицање, те две површине биће присиљене и да клизе једна по другој. Затварање дисконтинуитета, и померање смицањем, јесу две главне компоненте деформабилности стенских дисконтинуитета.

Опит директног смицања је најбољи метод за тестирање дисконтинуитета, зато што можемо лако измерити и нормално и смичуће померање и зато што се могу остварити велика померања, тако да можемо пратити пад чврстоће до минимума, односно резидуалне чврстоће дисконтинуитета. Осим тога, опит директног смицања може да се уради и на узорку и на терену.

### Понашање при нормалном оптерећењу

Ако се један блок који у себи садржи пукотину (дисконтинуитет) оптерети нормално на тај дисконтинуитет, блок ће постати нешто краћи, зато што ће се пукотина затварати, стиснути, а ако га развлачимо нормално на пукотину, блок ће се после неког времена раздвојити у два блока, јер, ће се пукотина напосто отворити, расклопити. Отвор (зев) једне пукотине која је изложена компресији смањиваће се са повећавањем напона. На механизам таквог затварања утичу подешавања налегања једне површине према другој и деформисање па и мрвљење стене на малом броју тачкастих додира између једног и другог сучељеног зида. Компресионо понашање дисконтинуитета је изразито нелинеарно (слика 2.6), и постаје асимптотично кад се примакне максималној затворености споја ( $u^*$ ) која је "ефективна вредност почетног зева пукотине".



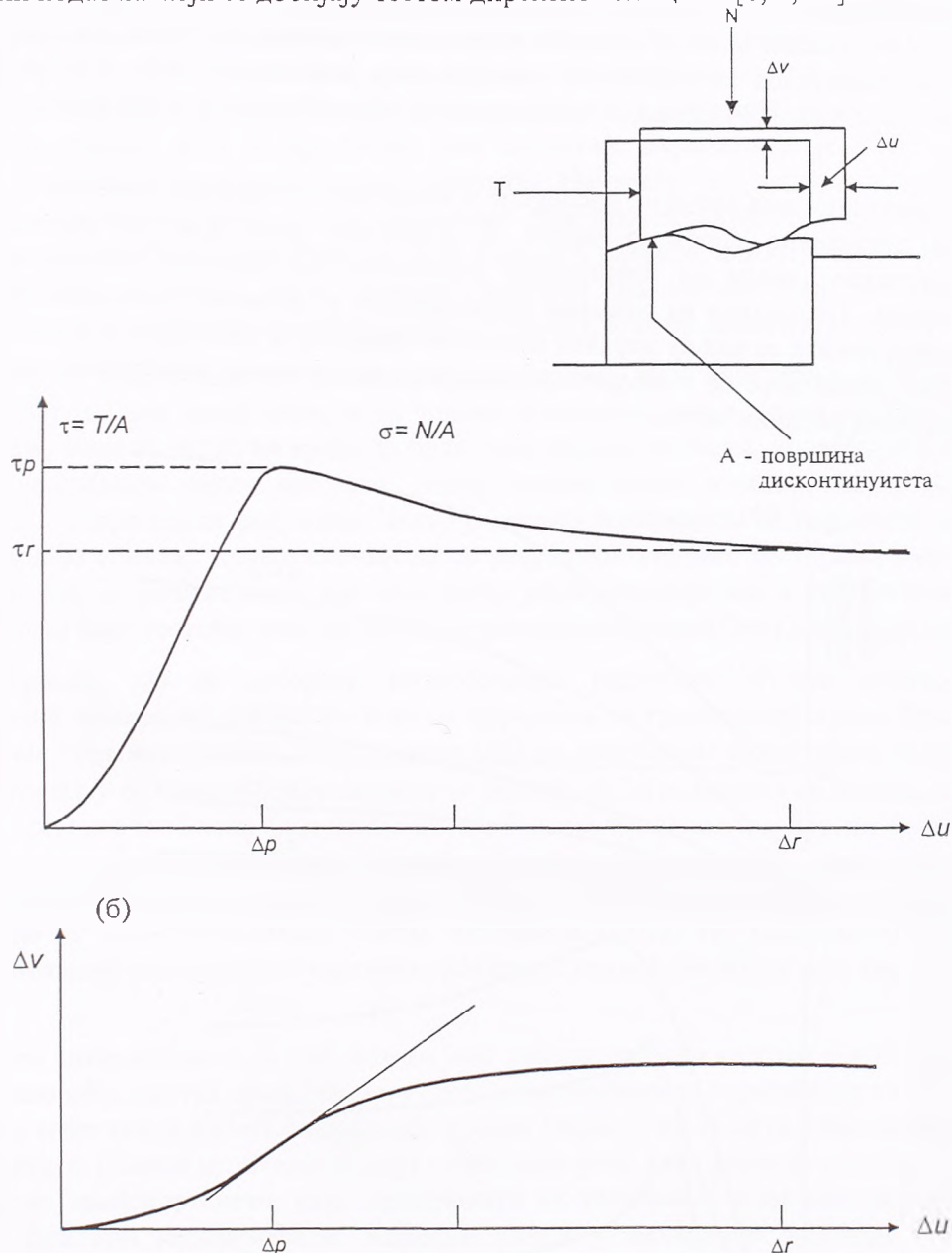
Слика 2.6: Компресионо понашање дисконтинуитета

Током растеређивања, понашање дисконтинуитета је изразито хистерезисно. Еластичне деформације су углавном мале, често занемарљиве. Ако се понављају циклуси оптерећења и

растерећења, дисконтинуитети постају крући, то јест ојачавају се, како у међусобно-уклопљеним, тако и у дислоцираним положајима. Међутим, понашање и после неколико тих циклуса остаје типично нелинеарно [6, 7].

### Понашање при смицању

Када стенски блок који у себи садржи пукотину подвргнемо смичућем напону који је паралелан са тим дисконтинуитетом, долази до смичућег, али и нормалног померања. Слика 2.7 приказује тип података који се добијају тестом директног смицања [6, 7, 22].



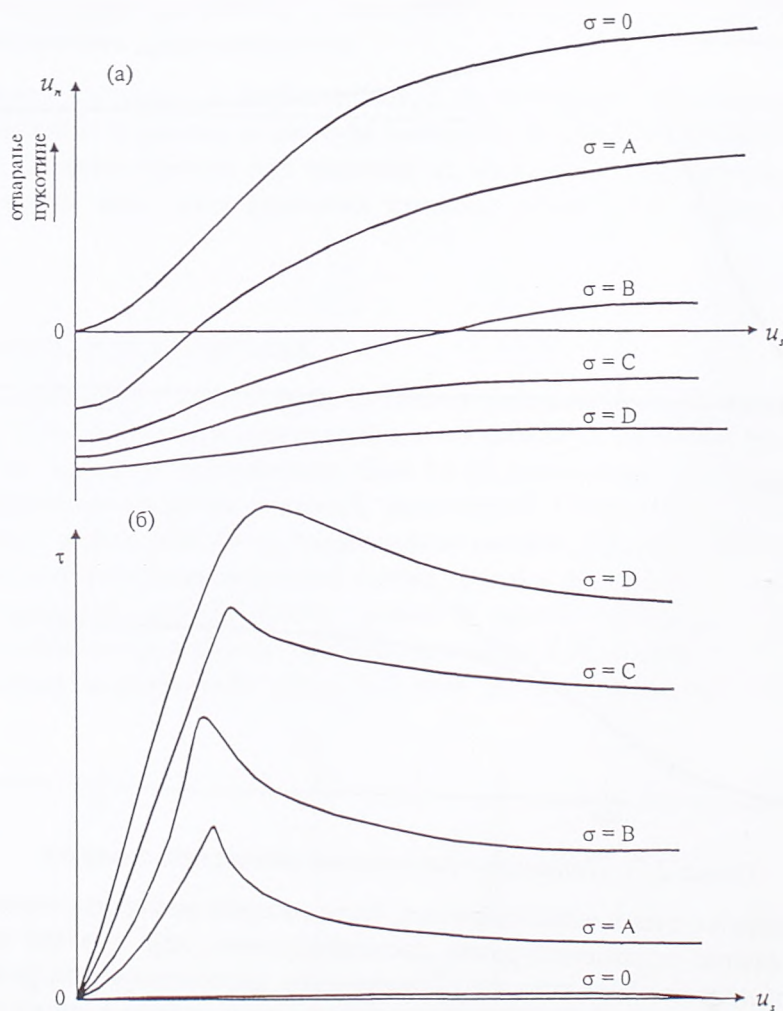
Слика 2.7: Понашање дисконтинуитета при смицању

Смичуће померање дуж дисконтинуитета, јесте разлика померања горњег блока и доњег блока, мерена паралелно са средњом равни дисконтинуитета, која пролази кроз неравнине на површини дисконтинуитета. Због тога што је површина дисконтинуитета рапава и заталасана, дисконтинуитет ће имати склоност да се још више рашири током смицања. Разлика између величине отвора дисконтинуитета пре и за време смицања назива се дилатанца. Док се смичући напон повећава, наступа период прилагођавања, током кога је дилатанца још веома мала, али, после тога се дилатанца нагло повећава; прираштај тог повећања је највећи кад се достигне вршни смичући напон. После тога, смичући напон континуирано опада, све док не достигне резидуалну вредност, што се, у зависности од рапавости, може десити након мањег или већег

померања од достигања вршне вредности смичућег напона. Рапавост површине дисконтинуитета ствара појаву дилатанце, а утиче и на чврстоћу дисконтинуитета. Максимални прираштај дилатанце углавном коинцидира са тренутком мобилизације вршне смичуће чврстоће, и нестаје у резидуалној фази [6, 22].

Претпоставимо да је један узорак подвргнут смицању, а да нормалног притиска нема уопште. Догодиће се дилатанца, тј. повећање зева у пукотини, као што је приказано на горњој кривој на слици 2.8, а смичући напон се уопште неће дизати изнад нуле зато што, у овом случају, нема фриксионог отпора (најнижа крива на слици 2.8). Да је узорак био на почетку стиснут до вредности 'A', 'B', 'C' или 'D', односи дилатанце и смичућег напона наспрам смичућег померања били би онакви како је исказано породицама кривих на слици 2.8. Кад нормални притисак расте, дилатанца се постепено смањује зато што се све већи и већи део зубаца рапавости оштећује током смицања, а понашање дисконтинуитета постаје више пластично, а мање крто.

Дакле, дилатанца има значајне последице у понашању испуцалих стенских маса, јер, ако је размицање делимично спречено јавиће се реактивне силе дуж тог дисконтинуитета. Величина дилатанце зависи од површинске рапавости, од чврстоће камена, и од нивоа нормалног напона. Транзиција из смицања прејакхивањем у смицање мрвљењем, што је други облик понашања, догађа се кад су неравне пукотине подвргнуте повећаном нормалном напону. У складу с тим, размицање се смањује а појављује се компонента повећавања чврстоће, због разарања појединих рапавих места.



Слика 2.8: Понашање дисконтинуитета при смицању

Присуство меканих испуњавајућих материјала има значајан утицај на понашање дисконтинуитета. Геометријска корелација између дебљине материјала испуне и амплитуде рапавости зидова, диктира да ли ће уопште доћи до контакта камен-камен током смицања. Ако испуне нема, резултат ће бити трење између зидова. Али, ако је испуна веома дебела она ће,



сама, контролисати читав процес смицања. У пракси је запажен широки распон разних понашања између те две крајности.

## 2.5 Механичко понашање стенске масе

Експериментима су констатовани различити облици деформација и лома стенске масе, који варирају у зависности од размака, оријентације и распрострањености дисконтинуитета, и у зависности од напонског стања. Могуће је да се формира пукотина смицања или пукотина затезања у материјалу који је првобитно био интактан. Вероватније је да ће се догодити клизање по једном или више дисконтинуитета. Најчешће се дешава композитни лом, делимично кроз интактни материјал, а делимично дуж дисконтинуитета, укључујући ротацију појединачних блокова или група блокова. Због природе, размере, анизотропије и хетерогености дисконтинуираних стенских маса, њихова основна механичка својства (тј. зависност оптерећење-померање или напон-деформација) је компликовано директно мерити.

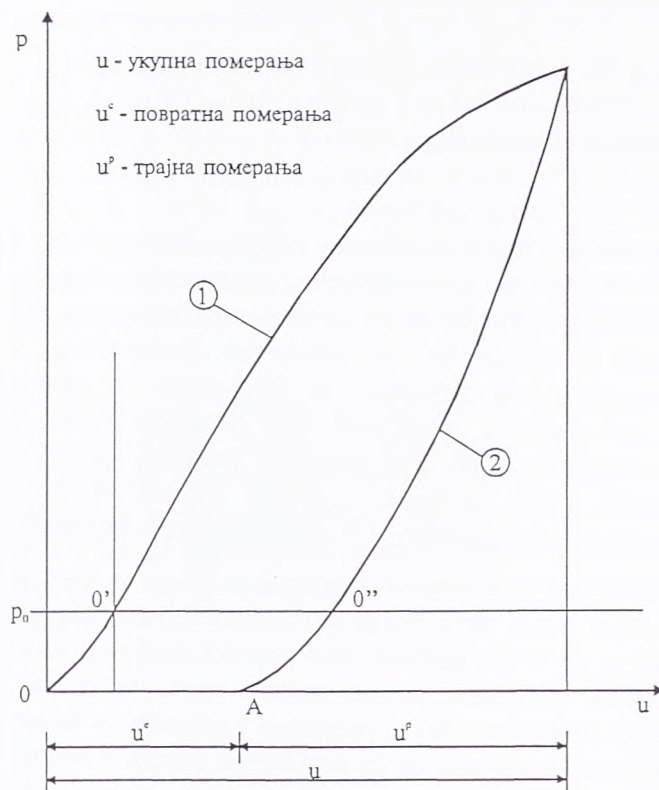
Тестови *in situ*, обављени у великим размерама, јесу очигледно најбољи директни приступ. Међутим, они имају неке, исто толико очигледне, мане. Једна од тих мана је што много коштају, мада то често не треба да буде тако крупан проблем, упоређујући цене тестова са укупним коштањем целог пројекта. Једна, нешто мање уочљива мана, односи се на поновљивост и упоредивост резултата. Често је тешко припремити *in situ* опите који су један другоме довољно слични, толико слични да се резултати њиховог тестирања могу међусобно упоређивати. Ако је стенска маса, као што често јесте, неизотропна и хетерогена, може бити потребан велики број тестова, чиме ће проблем њиховог коштања бити још више наглашен.

Као пример где су добијени интересантни резултати *in situ* опита, наводе се мултиаксијални компресиони тестови који су обављени на градилишту лучне бране *Kurobe*, у Јапану, крајем 1961. и почетком 1962. године [64] на испуцалом биотитском граниту. Блок је био 2,8 m дугачак у  $\sigma_1$  правцу, 1,4 m широк у  $\sigma_3$  правцу, и 2,8 m висок у  $\sigma_2$  правцу, што значи да је укупна запремина тог блока била неких 11 m<sup>3</sup>. У овом тесту, као и у другим тестовима у овој серији, почетна граница попуштања опажена је при ниском напону, после кога су почеле значајне бесповратне деформације. Главна граница попуштања и вршни напон (напон при лому), такође су идентификовани. Током тестирања блока, тај максимални напон био је 13 МПа. Једноаксијална притисна чврстоћа гранитних језгара узетих са исте тест-локације била је 23 МПа.

Једна од алтернатива за *in situ* тестове јесу лабораторијски тестови у великим размерама. Уопштено говорећи, сматра се да они могу бити искоришћени за одређивање укупних својстава стенске масе само ако је најмања димензија узорка барем 5 до 10 пута већа од размака између дисконтинуитета. Главни проблеми на које се наилази јесу: како узети те узорке, како руковати њима, како их транспортовати, како припремити за тестирање, а да они остану све до тог тренутка у суштини непоремећени. Корисни увиди у механичке одговоре стенских маса добијени су и на основу резултата лабораторијских тестова обављених на моделима стенских маса који су били припремљени од блокова материјала налик на стену, или неких еквивалентних [14, 80].

На слици 2.9 приказан је типичан дијаграм померања оптерећене површине стенске масе у функцији притиска, за један циклус оптерећења и растерећења, у опиту *in situ* методом хидрауличког јастука [54]. Из овог дијаграма се види, пре свега, да се укупна деформација стенске масе састоји из два дела: повратне и трајне. Ово је законита појава и било до ког оптерећења оптеретили стенску масу увек ће се добити деформација која у себи садржи један повратни део и један трајни, неповратни део. На величину еластичног дела деформације утичу пре свега својства монолита. Трајни део деформације, за уобичајене интензитете оптерећења, последица је пре свега затварања пукотина у стенској маси, деформација пукотинских испуна и

локалних ломова. Тек ако се интензитети оптерећења повећавају до граница лома може, у одређеним случајевима у зависности од деформационих својстава основне камене супстанције, доћи до пластифицирања стенског монолита.

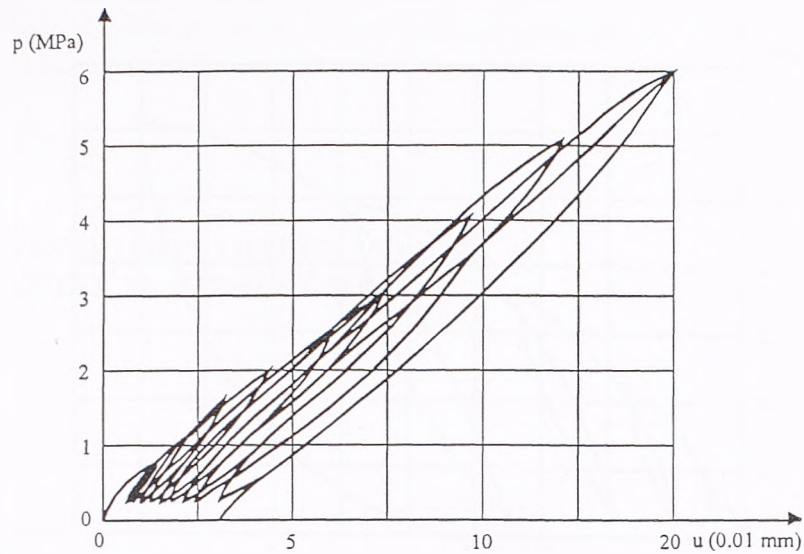


Слика 2.9: Типичан дијаграм померања оптерећене површине стенске масе у функцији притиска, у опиту *in situ* методом хидрауличког јастука

У подручју мањих оптерећења, до  $p_0$ , узлазна грана дијаграма је конкавна према ординати. За једнаке прираштаје оптерећења, прираштаји деформације се смањују. На ову појаву утиче затварање прслина и пукотина које су се отвориле услед ефекта ослобађања напона и услед дејства минирања у фази припреме мерног места. При изазивању оптерећења ове прслине и пукотине се затварају и доводе стенску масу у приближно исто стање у каквом је била као нетакнута, када је била у стању примарних напона. Такође, значајан је и утицај прилагођавања уређаја-посредника који преноси оптерећење на стенску масу. Деформације које се испољавају у интервалу оптерећења  $0-p_0$  називају се почетне деформације. Од оптерећења  $p_0$ , односно тачке  $0'$ , при повећању оптерећења узлазна линија се приближава правој линији или је, најчешће, крива са великим полупречником криве, све до притиска  $p_k$ , када почињу локални ломови који се испољавају у покретању појединих монолита стенске масе. Од тог притиска надаље прираштаји деформација брже расту од прираштаја оптерећења, тј. стенска маса се деформише у све већој мери крећући се према лому. При растерећењу силазна грана дијаграма је стрма.

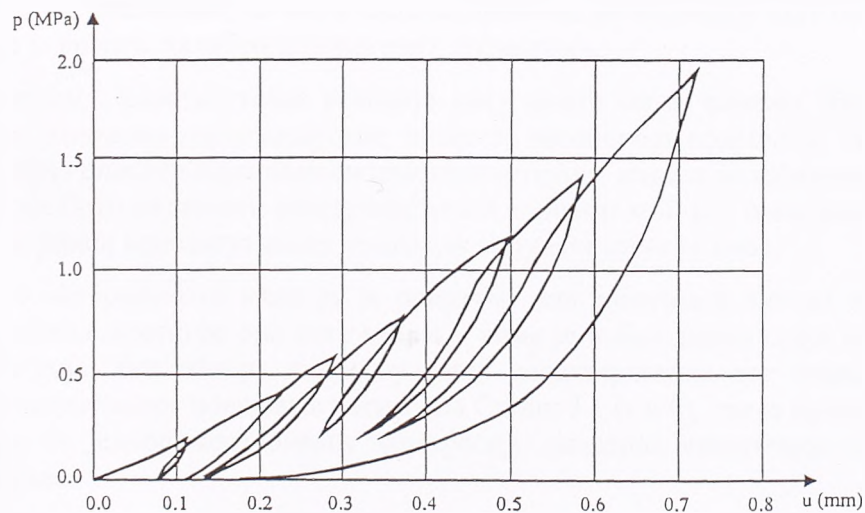
Од неколико стотина теренских огледа притиска извршених у Југославији, највећи број је извршен у кречњацима и шкриљцима [54]. Проучавањем резултата извршених мерења, односно проучавањем њихових дијаграма деформација у функцији притиска, уочена су, генерално, следећа три типа стена: чврсти и компактни кречњаци, чврсти али испуцали кречњаци и шкриљци разних врста.

Типичан дијаграм померања у функцији притиска за чврсте и компакне кречњаке приказан је на слици 2.10 [54]. Дијаграм је скоро потпуно линеаран. Трајне деформације су веома мале а њихов удео у укупним деформацијама је минималан. Анвелопа дијаграма деформација је приближно права. За овакве стене често се могу примењивати разни прорачуни засновани на теорији еластичности.



Слика 2.10: Дијаграм померања у функцији притиска, за чврсте и компактне кречњаке, у опиту *in situ* методом хидрауличног јастука

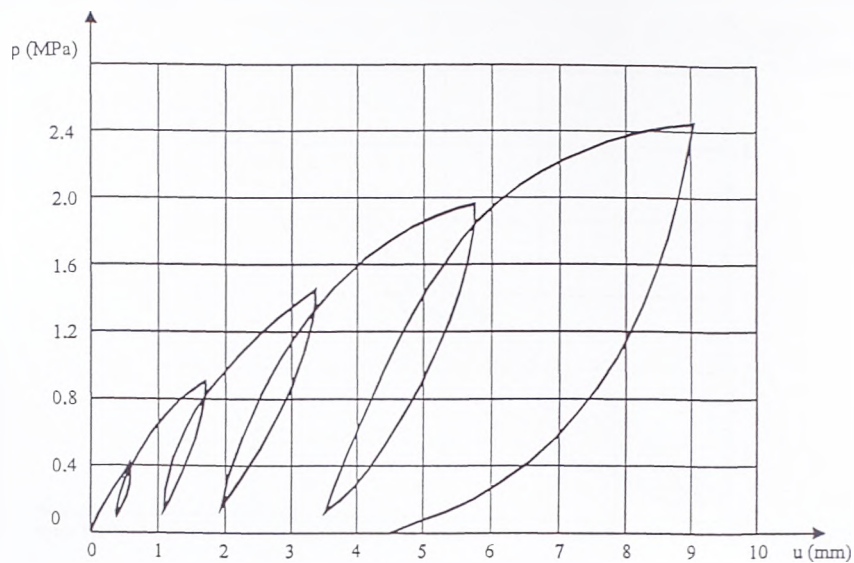
При оптерећивању испуцалих кречњака, обавља се сабијање стене на рачун затварања прелина и пукотина, после чега долази до ојачања односно повећања крутости материјала, што се у дијаграму померања у функцији притиска (слика 2.11) показује у релативно великим почетним померањима и конкавности анvelope дијаграма према ординати (ако је на ординату нането оптерећење а на апцису померање). Понекад су, код овог типа стена, укупна померања релативно велика, али су у великој мери и повратног карактера [54].



Слика 2.11: Дијаграм померања у функцији притиска, за испуцале кречњаке, у опиту *in situ* методом хидрауличног јастука

Основна карактеристика шкриљаца састоји се у релативно великим деформацијама. Дијаграм померања у функцији притиска (сл. 2.12) је од почетка конвексан према ординати, а такође и анvelope дијаграма свих циклуса [54].

Сажето, резултати експеримената указују на следеће важне одлике напонско-деформацијског понашања испуцалих стенских маса. Чврстоћа испуцале стенске масе је мања него код одговарајуће интактне стене, док је деформабилност већа. Испуцале стенске масе понашају се, генерално говорећи, више пластично, а мање крто него интактни стенски материјал. После попуштања, неповратне деформације су веће.



Слика 2.12: Дијаграм померања у функцији притиска, за шкриљце, у опиту *in situ* методом хидрауличког јастука

У већини случајева најважнији утицај на механичко понашање испуцалих стенских маса имају дисконтинуитети: пукотине, прслине, равни слојевитости и шкриљавости. У овом раду ћемо настојати да развијемо одговарајући конститутивни модел, којим би се суперпонирала својства монолита и својства дисконтинуитета.

### 3. ПРЕГЛЕД КОНСТИТУТИВНИХ МОДЕЛА КОРИШЋЕНИХ ЗА СТЕНСКЕ МАСЕ

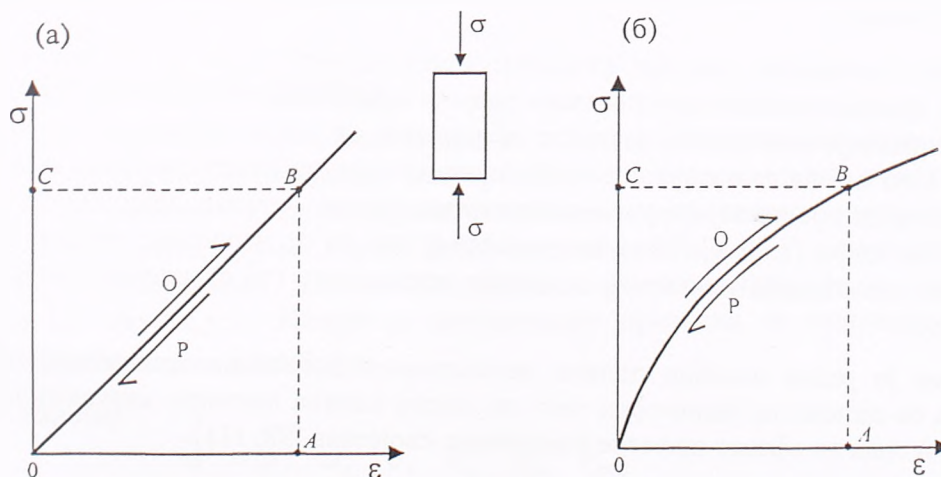
#### 3.1 Увод

##### Опште напомене

Термин конститутивна релација, или конститутивни закон, означава један скуп једначина које доводе у везу напон и деформацију (и време, када је реч о материјалима осетљивим на брзину промене стања напона и деформација). Конститутивни модел ће имати солидну механичку заснованост, уколико буде способан да квалитативно репродукује понашање материјала, слично оном експериментално опаженом. При томе се бирају, односно калибришу вредности параметара тог материјала, тако да се може постићи добро квантитативно подударане између расположивих експерименталних података и одговарајућих величина које нам модел даје. Адекватан конститутивни модел би требало да даје резултате разумно блиске оним експериментално опаженим, па чак и када се примени на ситуације које се разликују од ситуација у којима је вршена калибрација његових параметара.

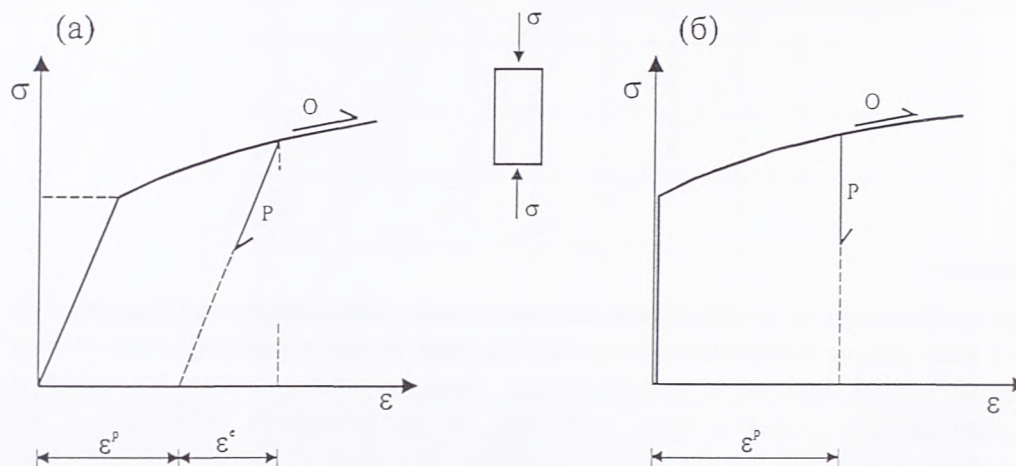
У општем случају, конститутивне релације могу имати веома сложен облик. У једном широком подручју напонско-деформацијских процеса, механичко понашање стена може се прилично реалистично описати коришћењем еластопластичног модела материјала. Због тога ће у наставку детаљније бити размотрен еластопластични концепт, који је у овом раду усвојен као основа за анализу и развој конститутивних модела за испуцале стенске масе.

За понашање материјала се каже да је повратно или еластично, ако на крају циклуса оптерећење-растерећење достигне оно исто стање у коме је и био, дакле своје почетно стање напона и деформација, без обзира какве су биле карактеристике тог стања и процеса оптерећивања. Примери таквог понашања дати су на Слици 3.1 (а и б), где је приказан дијаграм напон-деформација за једнодимензионалну компресију линеарно еластичног и нелинеарно еластичног материјала.



Слика 3.1: Крива једноаксијалне компресије  
 (а) Линеарно еластичан материјал  
 (б) Нелинеарно еластичан материјал

Ако се по завршетку процеса оптерећивања и растерећивања задржала трајна деформација, понашање материјала је неповратно или пластично. Илустрација је дата на Слици 3.2. У многим случајевима пластична деформација се појављује само када напонско стање достигне неки одређени, дати праг. Свеукупно понашање је еластопластичног типа, ако су еластичне деформације до тог прага знатне (Слика 3.2-а). Насупрот томе, такозвани круто-пластични модел материјала применљив је (слика 3.2-б) ако су еластичне деформације занемарљиво мале у поређењу са пластичним.



Слика 3.2: Крива једноаксијалне компресије

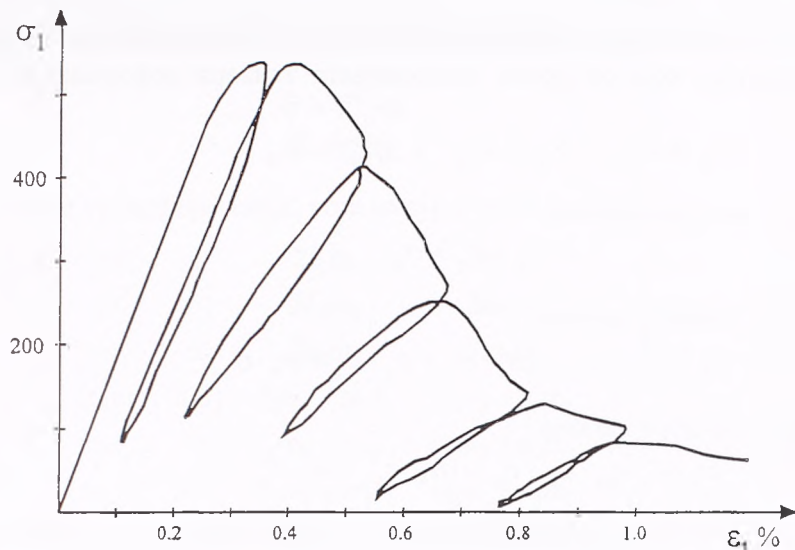
(а) Еласто-пластичан материјал

(б) Круто-пластичан материјал

Међутим, директна примена традиционалне еластопластичности у описивању понашања стена може бити неадекватна, зато што су неке појавне одлике стенских материјала очигледно неспојиве са класичном теоријом пластичности (пластичност метала) и, штавише, захтевају измену неких од основних поставки традиционалне теорије еластопластичног понашања. Карактеризација еластопластичних материјала у традиционалној теорији еластопластичности има следећи садржај: прво, један константан, симетричан, позитиван, сасвим одређен тензор еластичних модула; друго, једну скаларну функцију напонског тензора (услов течења), која дефинише домен еластичности у простору напонских компоненти; треће, једно правило пластичног течења које доводи у везу градијенте пластичне деформације са напонским градијентима – а за то правило се претпоставља да је асоцијативно, односно придружено услови течења; четврто, једно правило о ојачању, правило које каже да неки параметри садржани у функцији течења зависе од неких мера неповратног деформационог процеса (као што су запреминске пластичне деформације, или, уопштеније говорећи, разне унутрашње променљиве величине).

За стенске материјале постоје феноменолошки аспекти који су итекако значајни, а разликују се од традиционалних претпоставки теорије еласто-пластичности: вектор прираштаја пластичне деформације има правац различит од нормале на површ течења, а у некој релацији са дилатанцом (ова појава се назива неасоцијативност); модули еластичности се мењају док се нееластичне деформације развијају; у инкременталном процесу течења, површина течења може или да се локално шири (то је ојачавајуће понашање) или да се, напротив, скупља, сажима (то је омекшавајуће понашање), или може да остаје неизмењена (то су идеално пластична или критична стања).

Омекшање је једна посебна одлика нееластичног понашања стеновитих материјала. Слика 3.3, која се односи на једно-осни тест на узорку камена пешчара, визуализује изразито омекшање, као и снажан ефекат промене еластичних својстава [98, 111].



Слика 3.3: Типичан експериментални резултат једноосијалне компресије

Омекшавајуће понашање у многим случајевима је последица неких значајних промена које су се догодиле са материјалом у току деформисања. На пример, често се може опазити тај ефекат код тврдих, крутих стена у којима постоји систем пукотина које се интензивно шире док се оптерећење ближи својој вршној вредности. Из тог разлога, ако посматрамо само један узорак, омекшавајуће понашање се јавља заједно са губитком континуитета. Полазећи од овог опажања, неки аутори кажу да то понашање не карактерише материјал, већ је то понашање структуре која садржи делове, који су само узане зоне, али у којима се концентришу велике неповратне деформације. У том смислу, омекшање је проучавано на два начина: прво, узимањем у обзир локализације деформације или, друго, чинећи одређену апроксимацију, усвајајући концепт заснован на претпоставци да су напонска и деформацијска поља континуална. Овај други приступ, који је лакше сагледати и поставити са аспекта математичке формулације и параметризације, биће усвојен у овом раду.

Одступање од нормалности, као и пластично омекшање, могу знатно утицати на укупну реакцију дисконтинуиране стенске масе на спољашње дејство, и не смеју бити занемарени у формулисању конститутивних релација.

У овом поглављу даје се опис неких од најпопуларнијих модела, генерално заснованих на еластопластичном концепту, а који се користе у механици стена, при том се ограничавајући на статичке услове, уз занемарење других фактора као што је температура. У контексту интеракције са флуидом, разматране конститутивне релације важе за напоне који су, у *Terzaghi*-јевом смислу, ефективни [88].

### Нотација, дефиниције и основне релације

У овом поглављу биће коришћена матрична нотација. Променљиве које се означавају малим "болд" карактерима представљају вектор колоне, док променљиве које се означавају великим "болд" карактерима представљају матрице. Компоненте вектора и матрица означавају се косим ("италик") карактерима. Горњи десни индекси "Т" и "-1" означавају операције транспонована и инвертовања. Напони и деформације изражавају се у *Descartes*-овом координатном систему  $x, y, z$ . Напони и деформације притиска се означавају позитивно. Користиће се следеће ознаке и симболи:

Вектор напона:

$$\sigma^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \quad (3.1.1)$$

Вектор деформација:

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \quad (3.1.2)$$

Напомиње се да су у вектору деформација, за смичуће деформације, коришћене ознаке инжењерских деформација, које се преко компонената тензора деформације изражавају на следећи начин:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}, \quad \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} \quad \text{и} \quad \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx} \quad (3.1.3)$$

Прва инваријанта тензора напона:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (3.1.4)$$

Друга инваријанта тензора напона:

$$I_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x) \quad (3.1.5)$$

Трећа инваријанта тензора напона:

$$I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - (\sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 + \sigma_y \cdot \tau_{zx}^2 + \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2) \quad (3.1.6)$$

У примени, посебно у теорији пластичности, тензор напона се разлаже на сферни и девијаторски део. Средњи или хидростатички напон, представља сферни део напона, и дефинише се као:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (3.1.7)$$

Тензор девијатора напона, дефинише се као:

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \delta \cdot \sigma_m \quad (3.1.8)$$

где је  $\delta$  вектор колона еквивалентан *Kronecker*-вом делта симболу:

$$\delta^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.1.9)$$

Главни правци девијатора напона се поклапају са главним правцима тензора напона, пошто су то правци који дефинишу равни на којима нема смичућих напона.

Прва инваријанта тензора девијатора напона:

$$J_1 = s_x + s_y + s_z = 0 \quad (3.1.10)$$

Друга инваријанта тензора девијатора напона:

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \quad (3.1.11)$$

Трећа инваријанта тензора девијатора напона:

$$J_3 = \|\mathbf{s}\| \quad (3.1.12)$$

Тензор деформације се, такође, разлаже на сферни и девијаторски део. Средња или волуметријска деформација дефинише се као:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.1.13)$$

Тензор девијатора напона, дефинише се као:

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \delta \cdot \varepsilon_v \quad (3.1.14)$$

Нека  $x_i$  и  $\bar{x}_i$  представљају два произвољна *Descartes*-ова координатна система. Везе између координата ових координатних система одређене су помоћу матрице трансформације координата  $\mathbf{T}$  (матрице косинуса углова између оса наведених координатних система) на следећи начин:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \quad (3.1.15)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.1.16)$$



Трансформације вектора напона и деформације могу да се напишу помоћу једначина (3.1.17) и (3.1.18):

$$\bar{\sigma} = \mathbf{T}^\sigma \cdot \sigma \quad (3.1.17)$$

$$\bar{\varepsilon} = \mathbf{T}^\varepsilon \cdot \varepsilon \quad (3.1.18)$$

где су  $\mathbf{T}^\sigma$  и  $\mathbf{T}^\varepsilon$  матрице трансформација, које имају следећи облик:

$$\mathbf{T}^\sigma = \begin{bmatrix} \ell_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2\ell_1 m_1 & 2m_1 n_1 & 2n_1 \ell_1 \\ \ell_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2\ell_2 m_2 & 2m_2 n_2 & 2n_2 \ell_2 \\ \ell_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2\ell_3 m_3 & 2m_3 n_3 & 2n_3 \ell_3 \\ \ell_1 \ell_2 & m_1 m_2 & n_1 n_2 & \ell_1 m_2 + m_1 \ell_2 & m_1 n_2 + n_1 m_2 & n_1 \ell_2 + \ell_1 n_2 \\ \ell_2 \ell_3 & m_2 m_3 & n_2 n_3 & \ell_2 m_3 + m_2 \ell_3 & m_2 n_3 + n_2 m_3 & n_2 \ell_3 + \ell_2 n_3 \\ \ell_3 \ell_1 & m_3 m_1 & n_3 n_1 & \ell_3 m_1 + m_3 \ell_1 & m_3 n_1 + n_3 m_1 & n_3 \ell_1 + \ell_3 n_1 \end{bmatrix} \quad (3.1.19)$$

и

$$\mathbf{T}^\varepsilon = \begin{bmatrix} \ell_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & \ell_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 \ell_1 \\ \ell_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & \ell_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 \ell_2 \\ \ell_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & \ell_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 \ell_3 \\ 2\ell_1 \ell_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & \ell_1 m_2 + m_1 \ell_2 & m_1 n_2 + n_1 m_2 & n_1 \ell_2 + \ell_1 n_2 \\ 2\ell_2 \ell_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & \ell_2 m_3 + m_2 \ell_3 & m_2 n_3 + n_2 m_3 & n_2 \ell_3 + \ell_2 n_3 \\ 2\ell_3 \ell_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & \ell_3 m_1 + m_3 \ell_1 & m_3 n_1 + n_3 m_1 & n_3 \ell_1 + \ell_3 n_1 \end{bmatrix} \quad (3.1.20)$$

Такође имамо:

$$\sigma = \bar{\mathbf{T}}^\sigma \cdot \bar{\sigma} = (\mathbf{T}^\varepsilon)^T \cdot \bar{\sigma} \quad (3.1.21)$$

$$\varepsilon = \bar{\mathbf{T}}^\varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} = (\mathbf{T}^\sigma)^T \cdot \bar{\varepsilon} \quad (3.1.22)$$

где матрице  $\bar{\mathbf{T}}^\sigma$  и  $\bar{\mathbf{T}}^\varepsilon$  одговарају наведеним координатним трансформацијама. Можемо да покажемо да важе следеће релације

$$\bar{\mathbf{T}}^\sigma = (\mathbf{T}^\varepsilon)^T \quad (3.1.23)$$

$$\bar{\mathbf{T}}^\varepsilon = (\mathbf{T}^\sigma)^T \quad (3.1.24)$$

Такође, важи следећи услов ортогоналности, што се може лако доказати:

$$(\mathbf{T}^\sigma)^T \cdot \mathbf{T}^\varepsilon = \mathbf{I} \quad (3.1.25)$$

где је  $\mathbf{I}$  јединична матрица реда 6x6.

Ако означимо са  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  и  $\mathbf{C}$  означимо вектор напона, вектор деформације и конститутивну матрицу који одговарају координатном систему  $x_i$ , а са  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\varepsilon}$  и  $\bar{\mathbf{C}}$  вектор напона, вектор деформације и конститутивну матрицу који одговарају координатном систему  $\bar{x}_i$ , инкрементална веза напона и деформација се може исказати на следећа два начина:

$$d\sigma = \mathbf{C} \cdot d\varepsilon \quad (3.1.26)$$

$$d\bar{\sigma} = \bar{\mathbf{C}} \cdot d\bar{\varepsilon} \quad (3.1.27)$$

На основу претходних релација лако се изводи закон трансформације произвољне конститутивне матрице  $\mathbf{C}$ :

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{T}^\sigma \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{T}^\sigma)^T \quad (3.1.28)$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{T}^\varepsilon)^T \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{T}^\varepsilon \quad (3.1.29)$$

### 3.2 Еластично понашање

#### Појам хипереластичног и хипоеластичног материјала

Вероватно је најједноставнија формулација еластичне, дакле, реверзибилне, конститутивне релације, такозвани *Cauchy*-јев еластични материјал, који је карактерисан напонско-деформацијском везом израженом у директној  $\sigma = f(\varepsilon)$  или инверзној  $\varepsilon = g(\sigma)$  форми. Међутим, за произвољно дефинисан *Cauchy*-јев материјал, може се догодити да се, при одређеном циклусу оптерећење-растерећење, наруше закони термодинамике. Ово се превазилази увођењем ограничења напонско-деформацијске везе, постојањем одређене функције, такозване енергије деформације  $W_E(\sigma, \varepsilon)$ . У том случају ради се о хипереластичном или *Green*-овом еластичном материјалу, где важи:

$$\sigma = \frac{\partial W_E}{\partial \varepsilon} \quad (3.2.1)$$

Може се показати да уведено ограничење искључује могућност нарушавања закона термодинамике и води ка симетричној конститутивној матрици. Ако је хипереластична напонско-деформацијска веза дата у директној форми  $\sigma = f(\varepsilon)$ , неопходан је услов за егзистенцију и јединственост инверзне релације  $\varepsilon = g(\sigma)$ , да матрица  $D$  (3.2.2) буде позитивно дефинитна.

$$D = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial W_E}{\partial \varepsilon} \right)^T \quad (3.2.2)$$

Генерално, може се показати да, услед симетрије условљене егзистенцијом енергије деформације, само 21 компонента линеарно еластичне конститутивне матрице (од укупно 36) могу бити међусобно различите.

Хипоеластично понашање материјала односи се на инкременталну форму нелинеарне еластичне конститутивне релације, која је најчешће дефинисана тако да је прираштај напона функција текућег стања напона и прираштаја деформације:

$$d\sigma = C_t(\sigma) \cdot d\varepsilon \quad (3.2.3)$$

где је  $C_t(\sigma)$  тангентна конститутивна матрица. Основна разлика између овакве нелинеарне релације и еласто-пластичних (такође нелинеарних) напонско-деформацијских веза је то што је хипоеластични закон реверзибилан, док еласто-пластични није. Хипоеластични закон не подразумева да се правци главних напона и деформација поклапају.

За дефинисање еласто-пластичних конститутивних закона користиће се хипереластичне везе, које ће стога у даљем тексту бити детаљно приказане, и то за изотропни и ортотропни материјал.

#### Изотропна еластичност

У случају линеарног еластичног изотропног материјала све компоненте конститутивне матрице зависе од само два параметра материјала, најчешће дефинисаних као *Young*-ов модул еластичности  $E$ , који мора бити позитиван, и *Poisson*-онов коефицијент  $\nu$ .

Линеарно-еластична изотропна конститутивна веза гласи:

$$\varepsilon = (C^e)^{-1} \cdot \sigma \quad (3.2.4)$$

где је  $(C^e)^{-1}$  матрица флексибилности:

$$(C^e)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

Као што је речено, у матрици флексибилности постоје само две независне материјалне константе, па се смичући модул  $G$  може изразити помоћу следеће релације:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.2.6)$$

У даљем излагању ћемо много чешће користити везу за дефинисање напона у зависности од деформација. Инвертујући релацију (3.2.4) добијамо

$$\sigma = C^e \cdot \varepsilon \quad (3.2.7)$$

где је:

$$C^e = \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

еластична конститутивна матрица. Да би вредности коефицијената  $C_{ij}^e$  биле коначне, *Poisson*-оов коефицијент  $\nu$  мора да се нађе у границама

$$-1 < \nu < 0.5 \quad (3.2.9)$$

Важна последица претпоставке о изотропији линеарно-еластичних материјала је да се правци главних напона и деформација поклапају. Услед ове карактеристике следи да чисто хидростатичко напонско стање има за последицу чисту волуметријску деформацију, а да чисто девијаторски напон производи чисту девијаторску деформацију. Због овог својства, за одређене примене погодан је и следећи облик линеарне конститутивне релације, исказан у функцији сферног и девијаторског дела тензора напона и деформације:

$$\sigma_m = K \cdot \varepsilon_v \quad (3.2.10)$$

$$s = 2G \cdot e \quad (3.2.11)$$

где је  $K$  модул стишљивости материјала.

Еластична конститутивна матрица  $C^e$  за изотропан еластичан материјал је инваријантна у односу на координатну трансформацију.

### Ортотропна еластичност

Ако материјал није изотропан, али је и даље еластичан, број независних параметара расте. Уколико материјал поседује три ортогоналне равни симетрије, односно ако је материјал ортотропан, може да се покаже да конститутивна матрица има следећи облик:

$$C^e = \begin{bmatrix} C_{11}^e & C_{12}^e & C_{13}^e & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^e & C_{22}^e & C_{23}^e & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^e & C_{23}^e & C_{33}^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^e \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

У пракси се користи матрица флексибилности, у којој су коефицијенти изражени у зависности од инжењерских материјалних константи. Матрица флексибилности тада има следећи облик:

$$(C^e)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_a} & -\frac{\nu_{ba}}{E_b} & -\frac{\nu_{ca}}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{ab}}{E_a} & \frac{1}{E_b} & -\frac{\nu_{cb}}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{ac}}{E_a} & -\frac{\nu_{bc}}{E_b} & \frac{1}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{ab}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{ac}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{bc}} \end{bmatrix} \quad (3.2.13)$$

Овде су  $E_a$ ,  $E_b$  и  $E_c$  модули еластичности за материјалне осе  $a$ ,  $b$  и  $c$ , а  $\nu_{ij}$  ( $i = a, b, c; j = a, b, c$ ) су *Poisson*-ови коефицијенти за те осе. Матрица флексибилности је симетрична, пошто је материјал хипереластичан, међутим следеће релације морају бити задовољене:

$$\frac{\nu_{ab}}{E_a} = \frac{\nu_{ba}}{E_b} \quad \frac{\nu_{ac}}{E_a} = \frac{\nu_{ca}}{E_c} \quad \frac{\nu_{bc}}{E_b} = \frac{\nu_{cb}}{E_c} \quad (3.2.14)$$

Када се ове релације узму у обзир следи да матрица флексибилности (3.2.13) садржи девет независних материјалних константи.

Ако инвертујемо матрицу флексибилности (3.2.13) добијамо коефицијенте конститутивне матрице (3.2.12) у зависности од инжењерских материјалних константи:

$$\begin{aligned} C_{11}^e &= \frac{1 - \nu_{bc} \cdot \nu_{cb}}{E_b \cdot E_c \cdot D} & C_{12}^e &= \frac{\nu_{ba} + \nu_{ca} \cdot \nu_{bc}}{E_b \cdot E_c \cdot D} & C_{44}^e &= G_{ab} \\ C_{22}^e &= \frac{1 - \nu_{ac} \cdot \nu_{ca}}{E_b \cdot E_c \cdot D} & C_{13}^e &= \frac{\nu_{ca} + \nu_{ba} \cdot \nu_{cb}}{E_b \cdot E_c \cdot D} & C_{55}^e &= G_{ac} \\ C_{33}^e &= \frac{1 - \nu_{ab} \cdot \nu_{ba}}{E_b \cdot E_c \cdot D} & C_{23}^e &= \frac{\nu_{cb} + \nu_{ab} \cdot \nu_{ca}}{E_b \cdot E_c \cdot D} & C_{66}^e &= G_{bc} \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

где је:

$$D = \frac{1 - \nu_{ab} \cdot \nu_{ba} - \nu_{ac} \cdot \nu_{ca} - \nu_{bc} \cdot \nu_{cb} - 2 \cdot \nu_{ba} \cdot \nu_{ac} \cdot \nu_{cb}}{E_a \cdot E_b \cdot E_c} \quad (3.2.16)$$

детерминанта матрице (3.2.13).

Ако искористимо услове позитивне дефинитности конститутивне матрице и матрице флексибилности, које следе из позитивности енергије деформације, добијамо да сви дијагонални чланови у (3.2.13) морају бити позитивни па имамо да сви модули морају бити позитивни, тј.

$$E_a, E_b, E_c, G_{ab}, G_{ac}, G_{bc} > 0 \quad (3.2.17)$$

Даље, сви дијагонални чланови у (3.2.12) морају бити позитивни. Користећи (3.2.14) и (3.2.15) добијамо услове:

$$|v_{ba}| < \left( \frac{E_b}{E_a} \right)^{1/2} \quad |v_{cb}| < \left( \frac{E_c}{E_b} \right)^{1/2} \quad |v_{ac}| < \left( \frac{E_a}{E_c} \right)^{1/2} \quad (3.2.18)$$

Детерминанта  $D$  дата релацијом (3.2.16) мора бити позитивна, а такође и следећи услов мора бити задовољен:

$$v_{ba} \cdot v_{cb} \cdot v_{ac} < \frac{1}{2} \left( 1 - v_{ba}^2 \cdot \frac{E_a}{E_b} - v_{cb}^2 \cdot \frac{E_b}{E_c} - v_{ac}^2 \cdot \frac{E_c}{E_a} \right) \quad (3.2.19)$$

### 3.3 Основни еласто-пластични концепт

#### Основне једначине теорије пластичности

О класичној теорији пластичности постоји обимна литература [28, 51, 66, 100 ...], где су приказана детаљна објашњења и извођења свих аспеката еласто-пластичног концепта, са поступцима нумеричке имплементације. Овде се даје кратак преглед и анализа основних једначина, које представљају полазиште и оквир за конститутивни модел за испуцале стенске масе, који је развијен и презентира у овом раду.

Основна карактеристика пластичних деформација је њихова трајна, неповратна природа, што значи да се пластичне деформације, које су произведене током процеса оптерећивања, не могу поништити једноставним растерећењем. Између еластичних, трајних (пластичних) и укупних деформација важи следећа веза (адитивна декомпозиција):

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (3.3.1)$$

где су:

$\varepsilon^e$  - укупне еластичне деформације

$\varepsilon^p$  - укупне пластичне деформације

Одговарајући прираштај напона се може одредити на основу еластичне конститутивне релације:

$$d\sigma = C^e \cdot d\varepsilon^e = C^e \cdot (d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (3.3.2)$$

где је  $C^e$  одговарајућа еластична конститутивна матрица.

Генерално, еласто-пластични закони се заснивају на три основне релације: услов течења, услов ојачања и закон течења. Услов течења, представља површ у напонском простору, и дефинише стања напона у којима је могућ развој пластичних деформација. Услов ојачања одређује могућности и начин промене облика, величине и позиције површи течења. Закон течења одређује интензитет и смер пластичног деформисања, односно инкременте пластичне деформације.

За нереверзибилни део понашања материјала каже се да је идеално пластично ако граница еластичности (услов течења) не зависи од дотадашње путање напона и од остварене пластичне деформације. За случај који се може карактерисати повећањем границе еластичности, док се повећавају пластичне деформације, каже се да је то понашање са ојачањем материјала. Ако имамо случај који можемо карактерисати редукцијом границе еластичности, кажемо да је то понашање са омекшањем материјала. Услов течења може бити исказан у следећем облику:

$$F = F(\sigma, p(\epsilon^p)) = 0 \quad (3.3.3)$$

где је

$$p(\epsilon^p) \quad (3.3.4)$$

вектор параметара ојачања који одређују промену површи течења са повећањем пластичних деформација (услов ојачања). Ако је  $F < 0$ , напонско стање је репрезентовано тачком у напонском простору унутар површи течења, тако да је у том случају понашање материјала чисто еластично. Када је  $F = 0$ , напонско стање задовољава услов течења. Напонско стање за које је  $F > 0$  није могуће.

Пластично деформисање се може развијати само ако напонско стање задовољава услов течења током прираштаја деформација, односно ако је следећи услов конзистентности задовољен:

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T \cdot d\sigma + \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)^T \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial \epsilon^p} \right) \cdot d\epsilon^p \quad (3.3.5)$$

Закон течења се заснива на пропорционалности прираштаја пластичне деформације и градијента пластичног потенцијала, а према следећем:

$$d\epsilon^p = d\lambda \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (3.3.6)$$

где је:

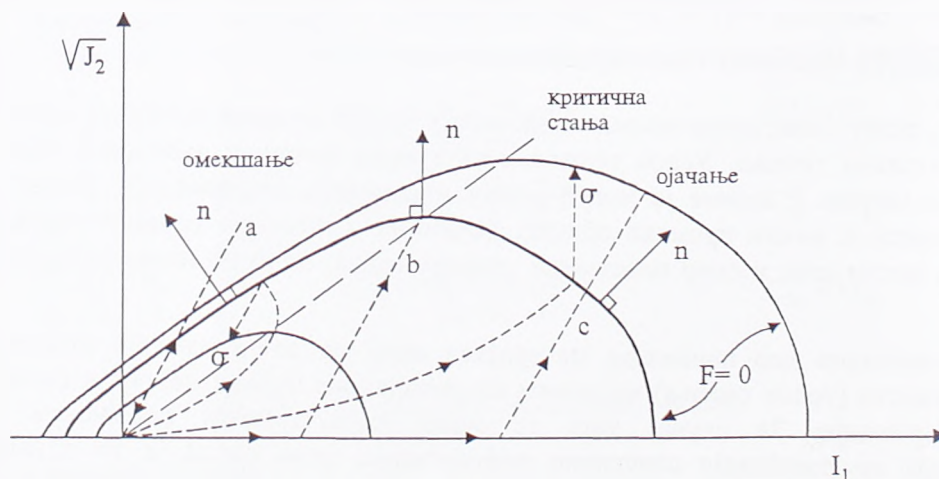
$$Q = Q(\sigma, \epsilon^p) \quad (3.3.7)$$

пластични потенцијал, а  $d\lambda$  је не-негативни скалар (мултипликатор пластичности). Уколико су пластични потенцијал и услов течења иста функција, односно ако важи релација  $Q \equiv F$ , тада се за закон пластичног течења каже да је асоцијативан уз функцију течења и онда је вектор градијента пластичне деформације (у деформацијском простору који је суперпониран преко напонског простора) усмерен као нормала-према-споља из површи течења која сачињава контуру конвексног еластичног домена. Асоцијативни закон течења има следећи облик:

$$d\epsilon^p = d\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (3.3.8)$$

У супротном ради се о неасоцијативном закону течења.

Слика 3.4 илуструје нека могућа понашања материјала према еласто-пластичном концепту. Испрекидане линије (a, b, c) су напонске путање које наговештавају омекшање, критично стање и ојачање. Приказане промене површи течења одговарају изотропном ојачању а контролисане су запреминским пластичним деформацијама.



Слика 3.4: Илустрација еласто-пластичног понашања материјала

Инкрементална еласто-пластична конститутивна релација

За нумеричку анализу еласто-пластичног понашања материјала погодно је изразити еласто-пластичне конститутивне релације у инкременталном облику, преко еласто-пластичне конститутивне матрице. Еласто-пластично понашање дефинисано је у инкременталном облику релацијом (3.3.9):

$$d\sigma = C^{ep} \cdot d\varepsilon \quad (3.3.9)$$

при чему је  $C^{ep}$  еластопластична матрица крутости, која се може извести из закона течења (3.3.6) и услова конзистенције (3.3.5) и има следећи облик:

$$C^{ep} = C^e - \frac{C^e \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^T \cdot C^e}{H^p - H^c} \quad (3.3.10)$$

где је:

$$\begin{aligned} H^c &= -\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^T \cdot C^e \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right) \\ H^p &= -\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon^p}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Једначину (3.3.9) назваћемо директна инкрементална еласто-пластична напонско-деформацијска релација. Могуће је дефинисати инверзну везу (3.3.12), коју ћемо звати инверзна инкрементална еласто-пластична напонско-деформацијска релација:

$$d\varepsilon = D^{ep} \cdot d\sigma \quad (3.3.12)$$

при чему је:

$$D^{ep} = (C^{ep})^{-1} = (C^e)^{-1} + \frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^T}{H^p} \quad (3.3.13)$$

Тако формулисани инкрементални закони јесу "линеарни" неасоцијативни закони еластопластичног течења, у смислу да су ове релације линеарне у прираштајима. Величине дефинисане једначинама (3.3.11) зависе од почетне ситуације, али не од напонских и деформацијских инкремената. За скалар  $H^p$  казаћемо да је модул ојачања. Услов  $H^p > 0$  карактерише очвршћавајуће понашање,  $H^p = 0$  идеално пластично понашање, и  $H^p < 0$  омекшавајуће понашање.

За чисто еластичне инкременталне процесе ( $d\lambda = 0$  и  $dF \leq 0$ ) важи једначина (3.3.14):

$$d\sigma = C^e \cdot d\varepsilon \quad (3.3.14)$$

Директна релација  $d\varepsilon \rightarrow d\sigma$  и инверзна релација  $d\sigma \rightarrow d\varepsilon$ , ако се разматрају унутар одговарајућих распона модула ојачања  $H^p$ , испољавају пуну аналогност. Размотримо један инкрементални процес у коме се појављује пластично течење, то јест  $d\lambda > 0$  и  $dF = 0$ , па отуд и  $d\varepsilon^p \neq 0$ . Очигледно је да су, за  $H^p \neq 0$  и  $H^p \neq H^c$ , еласто-пластична конститутивна матрица  $C^{ep}$  и матрица флексибилности  $D^{ep}$ , несингуларне и међусобно инверзне, а и симетричне у случају асоцијативног закона течења.

Кад дискутујемо о релацијама прираштаја, прво се поставља питање да ли постоји одговор прираштаја напона за дате прираштаје деформације, и обрнуто. Путања инкременталне деформације је допустива ако постоји путања инкременталног напона који јој одговара кроз директну инкременталну релацију (3.3.9). Ако заменимо места речи напон и деформација, добијамо слично питање о инверзној релацији (3.3.12). Још један интересантан проблем у истом контексту односи се на јединственост, односно многострукост, напонских (деформацијских) прираштаја реаговања за дате деформацијске (напонске) прираштаје. На питања ове врсте могу се дати јасни, директни одговори на бази гоњих релација.

Допустивост свих инкременталних деформацијских путања важи само за  $H^p > H^c$ , док је свака напонска путања допуштена за  $H^p > 0$ . Околност да, за  $H^p \leq H^c$ , није допуштено тензор деформацијског прираштаја, значи да, у датој ситуацији, постоји један дисконтинуитет (један "коначни скок") у напонима, кад деформација креће путањом као  $d\epsilon$ .

Јединственост одазива напонског прираштаја не успева да се одржи када је  $H^p \leq H^c$ ; за  $H^p < H^c$  ("субкритично" омекшање) увек постоји један еластични и један еластопластични одазив напонског прираштаја. За  $H^p = H^c$  ("савршено крто" понашање или "критично" омекшање) постоји безброј одговора напонског прираштаја, укључујући један чисто еластичан одговор. Аналогно томе, не постоји јединственост прираштаја деформације у распону  $H^p \leq 0$ ; за омекшавајуће понашање, дакле за  $H^p < 0$ , постоје два и само два прираштаја  $d\epsilon$  (једно чисто еластично и друго еластично-пластично).

Механичка стабилност обично се схвата као тенденција да се, упркос разним поремећајима, очува равнотежна конфигурација система (тела, конструкције ...); другим речима, на сваки утицај стабилан систем ће реаговати деформацијом, али таквом да подесне мере амплитуде те деформације у сваком каснијем времену теже ка нули чим и мере тог утицаја крену ка нули. Ако је материјал независан од времена, стабилност система у неком датом стању може се повезати са не-негативношћу рада  $W$  који се обавља деловањем неких спољашњих фактора, по ма којој инфинитезималној путањи која води од сагледане актуелне ситуације ка ма којој суседној (виртуелној) конфигурацији [100].

$$W = \frac{1}{2} d\sigma \cdot d\epsilon \geq 0 \quad (3.3.15)$$

Критеријум (3.3.15) је довољан, а не само потребан, услов за стабилност у поменутом смислу. Систем ће се сматрати стабилним у своме садашњем стању ако и само ако је  $W \geq 0$  за све  $d\epsilon$ . Захваљујући позитивној одређености еластичне матрице крутости  $C^e$ , следи да је  $W > 0$  за сваки чисто еластични инкрементални процес ( $d\lambda = 0$ ). Према томе, само скуп процеса течења ( $d\lambda > 0$ ) треба да се узима у разматрање.

Може се показати, у случају савршено пластичног понашања,  $H^p = 0$ , недостатак нормалности неизбежно генерише (изазива) нестабилност понашања материјала, у смислу критеријума (3.3.15), наиме  $W < 0$  за неке прираштаје деформације. Очигледно, ојачање  $H^p > 0$  може да надокнади дестабилизујуће ефекте неасоцијативности. Од интереса је да знамо који је минимални модул  $H^p$  који ће, упркос тих ефеката, обезбедити стабилност. Једноставним извођењем може се доћи до следећих закључака (који су илустровани сликом 3.5):

$$W < 0 \quad \text{за} \quad H^b < H^p < H^a \quad (3.3.16)$$

$$W \geq 0 \quad \text{за} \quad H^p \geq H^a, \text{ као и за } H^p \leq H^b \quad (3.3.17)$$

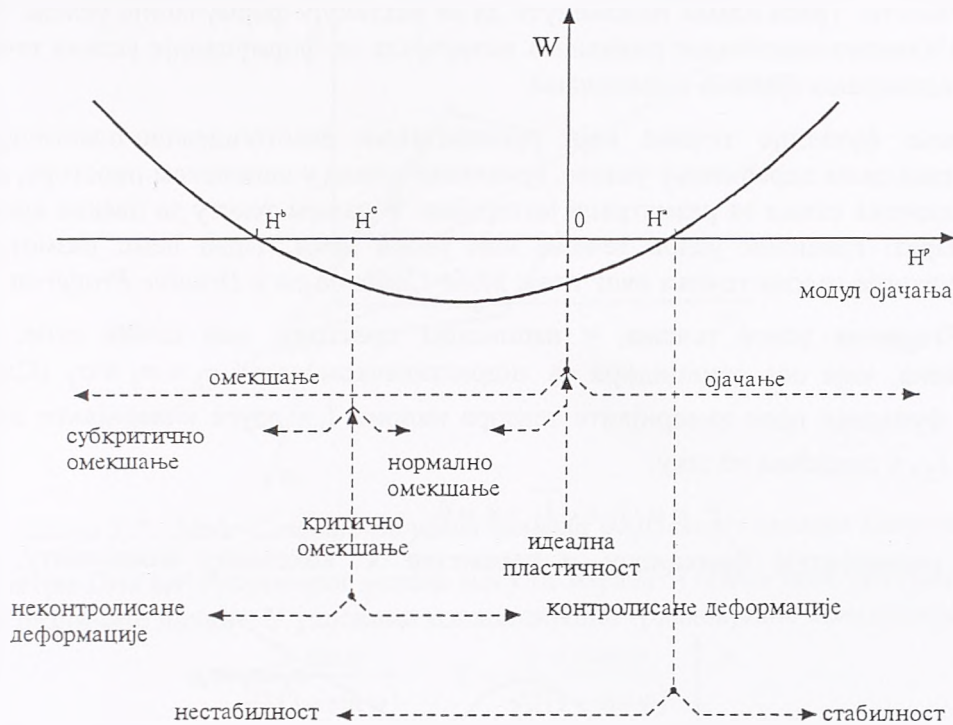
$$H^a = \frac{1}{2} H^c + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right)^T \cdot C^e \cdot \left( \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T \cdot C^e \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) \right]^{\frac{1}{2}} > 0 \quad (3.3.18)$$

$$H^b = \frac{1}{2} H^c - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right)^T \cdot C^e \cdot \left( \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T \cdot C^e \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) \right]^{\frac{1}{2}} < H^c \quad (3.3.19)$$

Уколико је  $H^p \leq H^b$ , тада је рад  $W$  не-негативан у складу са (3.3.17). Међутим, због неједнакости (3.3.19), ова чињеница не имплицира стабилност; заправо, цео распон  $H^p \leq H^c$  је карактерисан непостојањем инфинитезималних напонских одзива за скуп инфинитезималних деформацијских инкремената, дакле, карактерисан је једним дисконтинуитетом у напонском одазиву. За дату девијацију од нормалности вектора прираштаја пластичне деформације модул ојачања  $H^a$  представља минимално ојачање које се мора догодити да би се имала стабилност у



смислу (3.3.15), а када важи неасоцијативни закон течења. Важно је нагласити да је  $N^a = 0$ , према једначини (3.3.18), ако је вектор прираштаја бесповратне деформације усмерен као нормала из тренутне површине течења, односно, када је правило о пластичном течењу асоцијативно.



Слика 3.5: Опсеги модула ојачања

Горњи ставови о стабилности понашања материјала сумирани су на слици 3.5. Вреди запазити да је, код модула ојачања у његовом распону  $0 < N^p < N^a$ , нестабилност материјала у смислу критеријума (3.3.15) праћена постојањем и уникатношћу одазива у погледу прираштаја. Другим речима, у овом распону нестабилност, схваћена као негативни рад  $W$ , јесте испољена инкременталним понашањем које је карактерисано јединственом кореспонденцијом између тензора прираштаја напона и тензора прираштаја деформације. Ова необичност неасоцијативног закона еластопластичног течења, која ишчезава у асоцијативним законима када је  $N^a = 0$ , често није узимана у обзир.

Девијација од нормалности у иреверзибилном тензору деформацијског прираштаја имплицира да постоји један распон позитивних модула ојачања  $0 < N^p < N^a$  у коме ће материјал бити нестабилан према критеријуму позитивног рада  $W$ ; па ипак, унутар тог распона још увек важи кореспонденција један-према-један између вектора напонског и вектора деформацијског прираштаја. Према томе, морамо имати у виду да одступање од нормалности има за последицу дестабилизујуће ефекте и чини анализу непоузданом. Али, са друге стране, локално тренутно нестабилно понашање може бити надокнађено стабилним понашањем околних зона, тако да свеукупно понашање стенских маса може и даље бити стабилно [60].

Кад се стабилност у смислу позитивног рада  $W$  не одржава, за распон модула ојачања  $N^b < N^p < N^a$ , један конус дефинише локус путања инкременталних деформација за које је рад  $W$  негативан, док он остаје позитиван за све екстерне путање. Карактеристични модул ојачања  $N^c$ , садржан у горњем распону  $N^a - N^b$ , дефинише "савршено крто" ("критично" омекшање), и даје нам разграничење између нормалног омекшања и субкритичног омекшања које карактеришу "напонски прескоци" у кинематички контролисаним узорцима или системима [60].

## 3.4 Услов течења

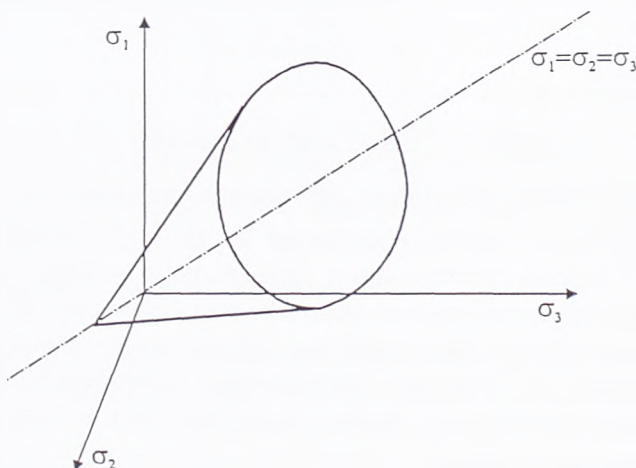
У литератури постоји веома много предлога за услов течења, који је основна релација теорије пластичности. Треба одмах напоменути да се разликују формулације услова течења за концепт еласто/идеално-пластичног понашања материјала од формулације услова течења који се користе за моделирање ојачања и омекшања.

Дефинисање функције течења која претпоставља еласто/идеално-пластични модел материјала заснива се на одређивању услова, граничног стања у напонском простору, изван ког нису могућа напонска стања за разматрани материјал. У даљем тексту за овакве критеријуме користећемо израз: гранични услов течења или услов лома. Прво ћемо размотрити две класичне формулације услова течења овог типа: *Mohr-Coulomb*-ов и *Drucker-Prager*-ов.

*Drucker-Prager*-ов услов течења, у напонском простору, има облик купе, кружног попречног пресека, чија оса коинцидира са хидростатичком осом  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (Слика 3.6). Изражава се у функцији прве инваријанте тензора напона  $I_1$  и друге инваријанте девијатора тензора напона  $J_2$ , у следећем облику:

$$F = \alpha \cdot I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (3.4.1)$$

Параметар  $\alpha$  репрезентује фриксиону, а параметар  $k$  кохезиону компоненту, смичуће отпорности.



Слика 3.6: *Drucker-Prager*-ов услов течења у простору главних напона

*Drucker-Prager*-ов критеријум је погодан за нумеричку имплементацију, пошто је изражен јединственом квадратном једначином. Из тог разлога, овај критеријум је веома често употребљаван у примени методе коначних елемената у еласто-пластичним анализама у геомеханици. Међутим, као последица његове једноставности, појављује се одређен недостатак у тачности описа понашања геоматеријала: пошто је овај критеријум независан од треће инваријанте тензора напона он не може да представи разлику између резултата добијених тестовима триаксиалне компресије и екстензије [102].

Класични *Mohr-Coulomb*-ов услов течења је, са експерименталне тачке гледишта, тачнији. У напонском простору има облик пирамиде са неправилним шестоугаоним попречним пресеком (слика 3.7).

*Mohr-Coulomb*-ов услов течења се изражава следећом једначином:

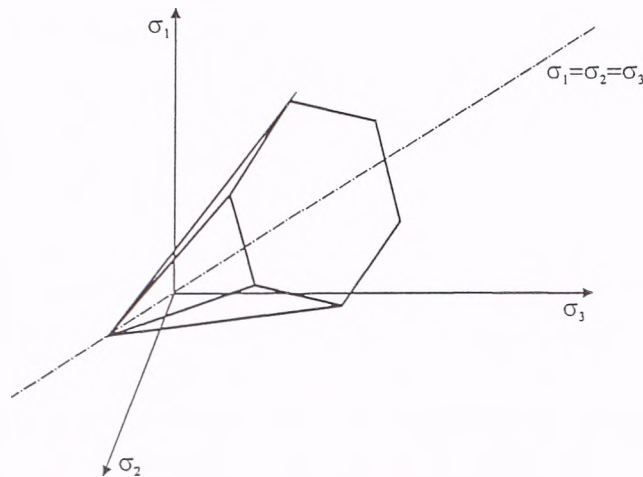
$$F = I_1 \cdot \frac{\sin \varphi}{3} + \sqrt{J_2} \cdot \left( \cos(\theta) - \frac{\cos(\theta) \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{3}} \right) - c \cdot \cos(\varphi) = 0 \quad (3.4.2)$$

где су:  $\varphi$  угао унутрашњег трења,  $c$  кохезија, а  $\theta$  *Lode*-ов угао који зависи од друге и треће инваријанте девијатора тензора напона (3.4.3):

$$\theta = -\frac{1}{3} \sin^{-1} \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \quad (3.4.3)$$

Изражен у конвенционалном облику, преко главних напона, *Mohr-Coulomb*-ов услов течења гласи:

$$\sigma_3 = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \cdot \sigma_1 - \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (3.4.4)$$



Слика 3.7: *Mohr-Coulomb*-ов услов течења у простору главних напона

Параметри *Drucker-Prager*-овог услова могу се изразити преко угла унутрашњег трења и кохезије, на различите начине. У условима конвенцијалне триаксијалне компресије важи:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad k = \frac{6 \cdot c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad (3.4.5)$$

Лако се може показати да горња једначина води до *Drucker-Prager*-ове купе која пролази кроз спољашње улове *Mohr-Coulomb*-ове пирамиде, што је, са инжењерског становишта, са стране мање сигурности, јер проширује еластични домен. У условима равног стања деформација важи:

$$\alpha = \frac{\tan \varphi}{(9 + 12 \cdot \tan^2 \varphi)^{1/2}} \quad k = \frac{3 \cdot c}{(9 + 12 \cdot \tan^2 \varphi)^{1/2}} \quad (3.4.6)$$

што је и доња граница за параметре  $\alpha$  и  $k$ , где купа тангира са унутрашње стране *Mohr-Coulomb*-ову пирамиду

Постојање ивица између суседних страница *Mohr-Coulomb*-ове пирамиде, односно дисконтинуитет у градијентима услова течења, узрок је одређеним тешкоћама у нумеричким анализама. Из тог разлога, неопходне су не баш безначајне промене у еласто-пластичним рутинама: два различита мултипликатора када се напонско стање налази на ивицама пирамиде или, алтернативно, дисконтинуитет се може избећи заменом оригиналног услова течења у његовој околини континуалном закривљеном површи.

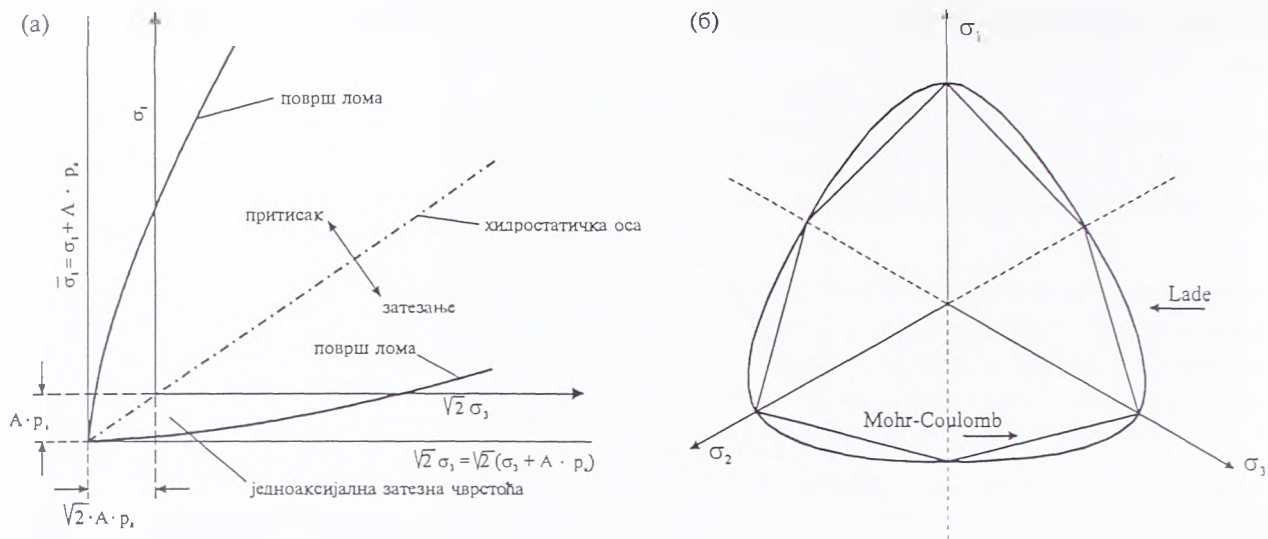
*Lade* је на основу великог броја експерименталних чињеница, које је анализирао у напонском простору приказујући их у октаедарској и биаксиалним равнима, указао на облик који мора имати гранична површ течења [57]. Предложио је услов течења у функцији прве и треће инваријанте тензора напона, формулисан једначином (3.4.7), за који се може рећи да узима у обзир утицај треће инваријанте тензора напона, али превазилази проблеме сингуларитета *Mohr-Coulomb*-овог критеријума, као и да уважава чињеницу да смичућа отпорност стена не расте линеарно са средњим напоном (Слика 3.8).

$$F = \left( \frac{\bar{I}_1^3}{\bar{I}_3} - 27 \right) \cdot \left( \frac{\bar{I}_1}{p_a} \right)^m - k = 0 \quad (3.4.7)$$

У једначини (3.4.7)  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$  и  $\bar{I}_3$  су инваријанте модификованог стања напона  $\bar{\sigma}$  које зависи од актуелног напона  $\sigma$  на следећи начин:

$$\bar{\sigma} = \sigma + \delta \cdot A \quad (3.4.8)$$

где су параметри  $A$ ,  $m$  и  $k$  материјалне константе,  $p_a$  је атмосферски притисак, а  $\delta$  је *Kronecker*-ов јединични вектор дат једначином (3.1.9).



Слика 3.8: Lade-ов услов лома у простору главних напона

(а) Пресек са триаксијалном равни

(б) Пресек са октаедарском равни

Напред наведене формулације услова течења односе се, пре свега, на гранични услов течења, који се може схватити и као услов лома материјала. Дакле, сагласно раније изложеном општем концепту еласто-пластичности, до достизања ове границе материјал би се понашао еластично, а по испуњењу услова течења, настало би пластично деформисање без ојачања, односно омекшања.

Међутим, код природних материјала, пре свега код нормално консолидованог глиненог тла, али и код испуцалих стенских маса, експериментално је уочено да неререверзибилна деформација почиње да се развија, и наставља континуирано да расте, још од веома раних фаза оптерећивања, и да ту не постоји никакав приметан иницијални распон еластичности. Лом настаје тек кад нелинеарне деформације достигну одређене граничне вредности. Другим речима, код оваквих материјала постоји јасна разлика између напонских услова под којима нелинеарно понашање почиње и оних који одговарају лому. Да би се моделирало континуално пластично деформисање, које је веома значајно својство природних материјала, морају се увести услови течења способни да се модификују кроз процес деформисања, сагласно неком услову, за који смо рекли да се зове услов ојачања и који ће бити разматран у следећем поглављу.

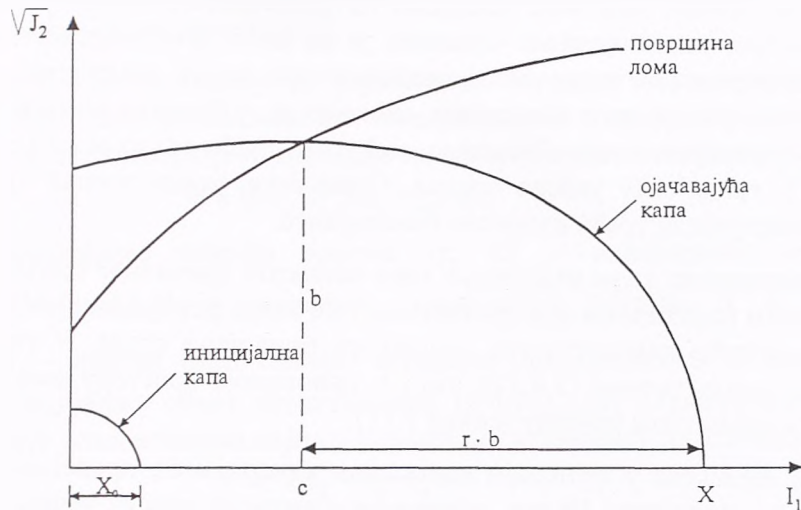
Прве формулације конститутивних модела способних да репродукују континуално пластично течење материјала, заснивале су се и даље на једном фиксираном, граничном услову течења, односно услову лома, који је, као што смо рекли, лимит за могућа напонска стања, али и на увођењу једне допунске, ојачавајуће површи течења – која је названа капа. Ова капа у напонском простору представља границу постојећег домена еластичности и допушта нелинеарно понашање материјала под растућим хидростатичким напоном, док по граничној површи лома нема ојачања, већ се дешава лом тог материјала под све већим девијатором напона. Гранични услов течења може имати облик било ког од напред описаних критеријума (иницијални модели са капом су користили *Drucker-Prager*-ов услов), док се за ојачавајућу капу најчешће користи нека једноставна форма, као што је елипса (назив "модели са капом" је и изведен због елиптичног облика ојачавајућег услова течења, који подсећа на капу). Један облик услова течења који је подобан за концепт модела са капом, предложили су *DiMaggio* и *Sandler* [42, 81]. Према овој формулацији фиксирана, гранична површ течења је дата изразом (3.4.9):

$$F = \gamma \cdot \exp(-\beta \cdot I_1) + \sqrt{J_2} - \alpha = 0 \quad (3.4.9)$$

где су  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  параметри материјала. За ојачавајућу капу дефинисан је елипсоид према једначини (3.4.10):

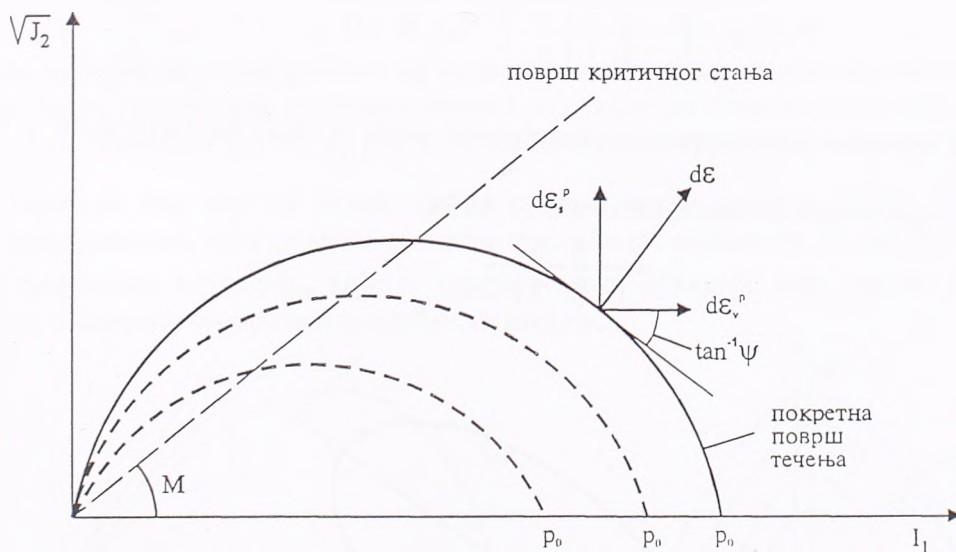
$$F = (I_1 - c)^2 + r^2 \cdot \sqrt{J_2} - r^2 \cdot b^2 = 0 \quad (3.4.10)$$

Слика 3.9 приказује пресек ојачавајуће капе и површине лома у равни  $I_1, \sqrt{J_2}$ . У једначини (3.4.10),  $g$  је однос веће и мање осе елипсе,  $c$  је вредност прве инваријанте напона у центру елипсе, као и тачки пресека између ојачавајуће капе и граничне површи лома,  $b$  је вредност  $\sqrt{J_2}$  када је  $I_1 = c$ , док је величина  $X = g \cdot b + c$  вредност прве инваријанте напона на пресеку између ојачавајуће капе и хидростатичке осе  $I_1$ . Величина  $X$  представља функцију ојачања. Фиксирана и покретна површ течења имају пресек такав да је тангента на површ течења, у тачки пресека, паралелна са  $I_1$  осом. У случају асоцијативне пластичности, ово има за последицу да инкремент пластичне деформације не доводи до промене запремине када се достигне фиксирани (гранични) услов течења.



Слика 3.9: Услов течења за "моделе са капом" у простору напонских инваријанти

Као продужење описаних модела са капом, развијени су такозвани модели критичног стања (слика 3.10).



Слика 3.10: Услов течења за "Cam-Clay" модел у простору напонских инваријанти

Модел критичног стања су првобитно били предложени за моделирање понашања кохезивног и некохезивног тла [86], а у новије време проширени су и на стенске и стенама сличне материјале [18]. Главна одлика коју имају модели критичног стања, а немају је модели са капом, састоји се у томе што су они способни да објасне омекшавајуће понашање кртих материјала као што су стене. Ово се добија увођењем закона ојачања способног да, у зависности од положаја напонске тачке на површи течења, произведе, како ширење, тако и скупљање површи течења, а који ће бити анализиран у следећем поглављу. На граници ове две зоне, која је названа површ критичног стања, пластично течење се одвија без ојачања, односно омекшања, и без промене запремине.

зоне, која је названа површ критичног стања, пластично течење се одвија без ојачања, односно омекшања, и без промене запремине.

Првобитна, оригинална верзија модела са критичним стањем звала се "Cam-Clay" модел [86]. Услов течења према овој формулацији модела критичног стања има облик елипсе, према једначини (3.4.11).

$$F = \left(\frac{I_1}{3}\right)^2 - p_0 \cdot \left(\frac{I_1}{3}\right) + \frac{3}{M^2} \cdot J_2 = 0 \quad (3.4.11)$$

где је  $M$  - материјална константа, а  $p_0$  - функција ојачања. Површ течења по овој формулацији веома је слична оној које добијамо из једначине (3.4.10); суштинску разлику чини, како је већ речено, закон ојачања. Опажено је да ниво девијаторског напона на коме почињу пластично деформисање може бити прецењен код малих вредности хидростатичког напона. Да би се смањио утицај овог недостатка, можемо да, у близини координатног почетка, уместо елипсоида дефинишемо конус. Запазимо, међутим, да би такво решење могло довести до дисконтинуитета у градијенту услова течења. Осим тога, услов течења према једначини (3.4.11) не узима у обзир утицај треће напонске инваријанте.

Све ово је имплицирало даље надградње како концепта критичног стања, тако и других модела са континуалним пластичним деформисањем, пре свега формулисањем услова течења у облику који, што је могуће реалистичније, одсликава понашање стена. У том смислу *Lade* [49, 55, 56] је развио услов течења (3.4.12), који у напонском простору има облик сузе, са тачкастим врхом у координатном почетку (слика 3.11).

Површ течења, изражена у функцији напонских инваријанти, представља локус где је укупни пластични рад константан. Наиме, параметар ојачања у услову течења изражава се у директној зависности од укупног пластичног рада (услед запреминских и смичућих деформација), чиме се контролише положај и облик текуће површи течења. Услов течења је дефинисан следећом једначином:

$$F = \left(\psi_1 \cdot \frac{\bar{I}_1^3}{\bar{I}_3} - \frac{\bar{I}_1^2}{\bar{I}_2}\right) \cdot \left(\frac{\bar{I}_1}{p_a}\right)^h \cdot L - K = 0 \quad (3.4.12)$$

где су:

- $K$  - функција ојачања која зависи од пластичног рада, о чему ће бити речи у следећем поглављу;
- $L$  - функција која зависи од нивоа напона  $S$  (3.4.13):

$$L = \frac{a \cdot S}{1 - (1 - a) \cdot S} \quad (3.4.13)$$



Слика 3.11: *Lade*-ов услов течења у простору главних напона

Ниво напона  $S$  варира од нуле на хидростатичкој оси до јединице на површи лома (3.4.7), а према следећем изразу:

$$S = \frac{1}{K} \left( \frac{\bar{I}_1^3}{\bar{I}_3} - 27 \right) \cdot \left( \frac{\bar{I}_1}{P_a} \right)^m \quad (3.4.14)$$

У једначинама (3.4.12) и (3.4.13),  $h$ ,  $a$  и  $\psi_1$  су материјалне константе, док се инваријанте  $\bar{I}_i$  односе на модификовано стање напона  $\bar{\sigma}$ , дефинисано раније једначином (3.4.8). *Lade*-ов услов течења је, заправо, двоповршински услов, који се састоји од текуће површи течења (3.4.12) и граничне површи течења, односно услова лома (3.4.7), слично моделима са капом. Значајна разлика се састоји, са једне стране у реалистичнијем облику површи течења и лома, и са друге стране, у могућности моделирања како ојачања, тако и омекшања, а сагласно облику функције ојачања  $K$  (поглавље 3.5). Прелаз између ојачања и омекшања догађа се на услову лома (3.4.7).

*Desai* је дефинисао процедуру за одређивање погодног услова течења изражног као полиномска функција инваријантних делова тензора напона и тензора пластичне деформације, као и инваријанти та два тензора [24]. На тај начин услов течења има форму функционала:

$$F = F(I_i, E_i^p, M_j, \alpha_m) = 0 \quad (3.4.15)$$

где су:  $I_i$  - инваријанте тензора напона  $\sigma$ ;  $E_i^p$  - инваријанте тензора пластичне деформације  $\epsilon^p$ ;  $M_j (j=1,2,3)$  - мешовите инваријанте тензора  $\sigma$  и  $\epsilon^p$  (на пример:  $M_1 = \sigma^T \cdot \epsilon^p \dots$ );  $\alpha_m$  - вектор (или скалар) интерних променљивих. У наредном излагању анализираће се специјални облик функционала (3.4.15), дат једначином (3.4.16), који је значајан за различите услове течења који су коришћени у контексту пластичности [28, 29]:

$$F = J_2 - F_b \cdot F_s = 0 \quad (3.4.16)$$

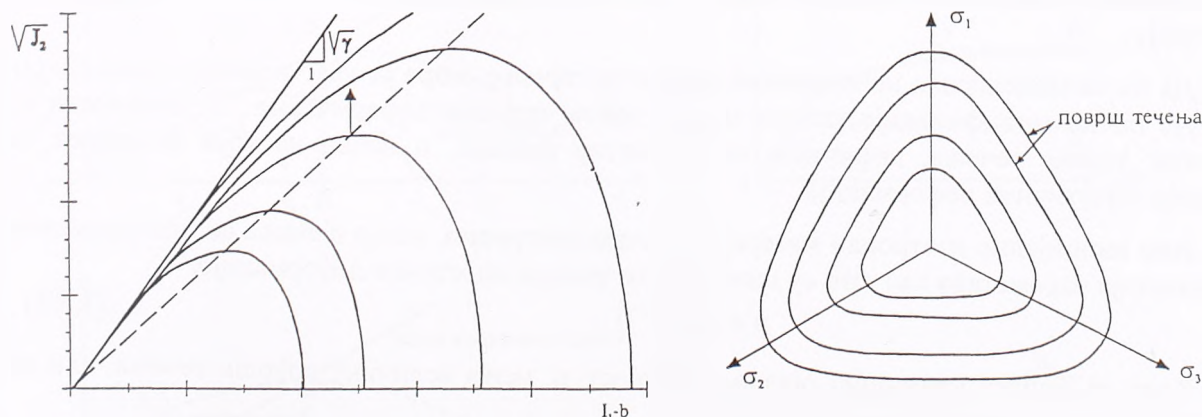
где је:

$$F_b = -\alpha \cdot (I_1 - T)^n + \gamma \cdot \alpha \cdot (I_1 - T)^2 \quad (3.4.17)$$

$$F_s = \left( 1 - \beta \cdot \frac{J_3^{1/3}}{J_2^{1/2}} \right)^m \quad (3.4.18)$$

Овде се никаква појмовна разлика не прави између површи течења и површи лома, него се дефинише једна јединствена функција течења која води до површи лома кад је достигнут гранични услов. Параметри  $m$ ,  $n$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  и  $T$  су константе придружене граничном услову.

За материјале као што су стене, површ течења може мењати облик током еласто-пластичног деформисања, што се може постићи третирањем параметра  $\beta$ , као функције од  $I_1$ . Ојачање се дефинише помоћу  $\alpha$ , које је одређено као функција која зависи од интерних променљивих, о чему ће бити речи у следећем поглављу.



Слика 3.12: *Desai*-јев услов течења

(а) У простору напонских инваријанти

(б) У простору главних напона - пресек са октаедарском равни

На слици 3.12 је приказан типичан изглед *Desai*-јеве површи течења. Функција  $F_b$  у једначини (3.4.16) представља површ у  $I_1, \sqrt{J_2}$  простору, са кружним попречним пресеком у октаедарској равни у простору главних напона, где је  $n$  параметар облика. Уколико је  $n = 2$ , површ у  $I_1, \sqrt{J_2}$  простору има облик елипсе. Функција  $F_b$  је уведена као функција облика која модификује кружни попречни пресек у простору главних напона, где параметри  $\beta$  и  $m$  дефинишу облик. На тај начин, функција течења (3.4.16) садржи као специјалне случајеве, многе функције течења које су раније предложене, као што су и напред поменуте (*Drucker-Prager*, "*Cam-Clay*", *Lade* и др.). На пример, решавањем једначине  $F_{Desai} = F_{Cam-Clay} = 0$  лако се показује, да се *Desai*-јев услов течења своди на "*Cam-Clay*" (3.4.11), једноставним додељивањем следећих вредности за параметре материјала:

$$n = 1, \quad \beta = 0, \quad b = 0, \quad \gamma = -\frac{M^2}{27}, \quad \alpha = -\frac{M^2}{9} p_0 \quad (3.4.19)$$

Значајна предност *Desai*-јевог услова течења је што се састоји од само једне континуалне функције, у читавом опсегу напонске историје, а при том има облик и својства која одговарају стенама и сличним материјалима. Предложена је једна серија варијација ових модела [29] примењујући, асоцијативни и неасоцијативни закон течења код стена и код стенама сличних материјала, као проширивање тих модела на анализу анизотропије индуковану историјом напона.

*Desai*-јев услов течења, имајући у виду његову општост, биће коришћен у овом раду као основа за развој конститутивног модела за испуцале стенске масе (поглавље 4).

### 3.5 Услов ојачања/омекшања

За материјале за које усвојимо еласто/идеално-пластичан модел напонско-деформацијског понашања, након достизања границе еластичности, односно испуњења услова течења, настаје пластично деформисање без ојачања. Услов ојачања (3.3.4) за тај тип материјала може се написати као:

$$p(\epsilon^p) = \text{const} \quad (3.5.1)$$

што значи да се облик, величина и оријентација површи течења не мења током пластичног деформисања. Класични *Drucker-Prager*-ов и *Mohr-Coulomb*-ов услов течења спадају у ту категорију.

Да би се моделирало континуално пластично течење, мора се увести услов ојачања, који одређује начин модификације услова течења током процеса деформисања. У зависности од усвојеног услова течења, дефинише се параметар ојачања, и начин на који он зависи од повећања пластичних деформација.

Ако иницијално изотропан материјал ојачава изотропно, услов ојачања се може исказати као функција параметара као што су инваријанте тензора пластичне деформације.

$$p = p(I_i(\epsilon^p)) \quad (3.5.2)$$

Када се дешава изотропно ојачање вредност  $p$  мења величину површи течења, али не мења њен облик и оријентација.

Модели са капом и модели критичног стања спадају у ову групу модела са изотропним ојачањем. На пример, за модел са капом *DiMaggio* и *Sandler* [81] су предложили да услов течења (3.4.10) ојачава према једначини (3.5.3), која исказује услов ојачања као функцију пластичне волуметријске деформације напона  $\epsilon_v^p$ :



$$X = -\frac{1}{d} \cdot \ln\left(1 - \frac{\epsilon_v^p}{w}\right) + z \quad (3.5.3)$$

Овде су  $d$ ,  $z$ , и  $w$  параметри материјала.

Услов ојачања који је дефинисан за моделе критичног стања је диференцијална једначина, која одређује зависност прираштаја параметра ојачања од прираштаја пластичне волуметријске деформације. У случају "Cam-Clay" модела [86], услов ојачања гласи:

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\frac{1+e}{k_s} d\epsilon_v^p \quad (3.5.4)$$

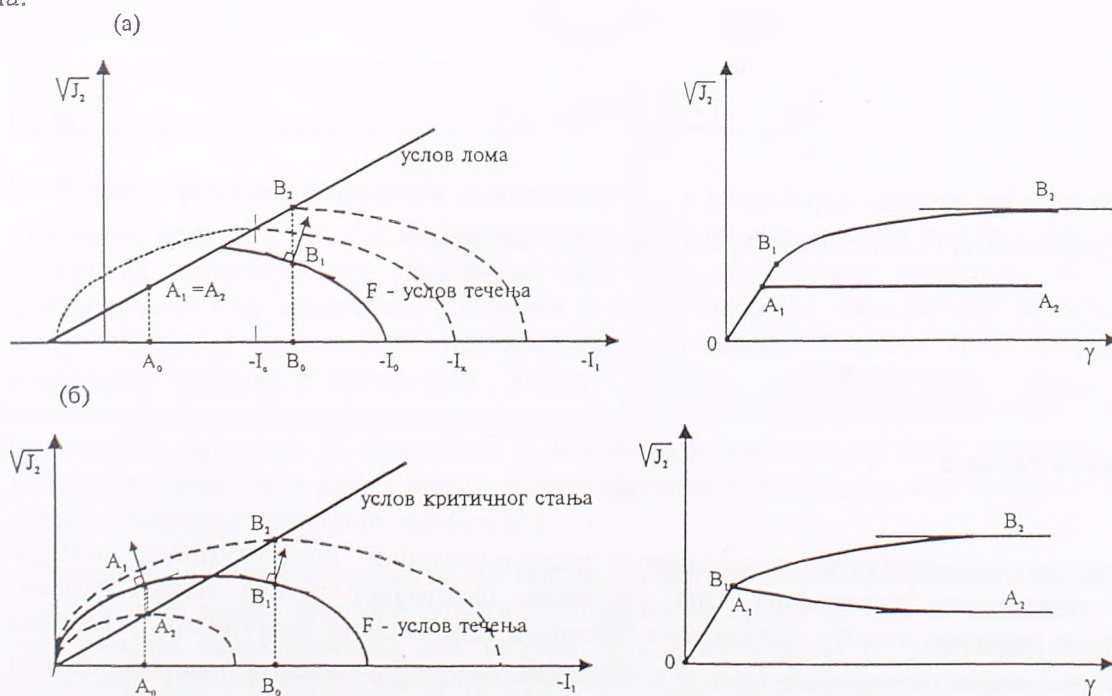
при чему важе следеће релације:

$$d\epsilon_v = \frac{de}{1+e} \quad \epsilon_v = \int_{e_0}^e \frac{de}{1+e} \quad e = (1+e_0)\exp(\epsilon_v) - 1 \quad (3.5.5)$$

где су:  $e_0$  - почетна порозност;  $e$  - порозност;  $k_s$  - материјална константа. Услов ојачања (3.5.4) се, користећи релације (3.5.5), може написати и у следећем облику:

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\frac{(1+e_0)\exp(\epsilon_v)}{k_s} d\epsilon_v^p \quad (3.5.6)$$

Главна одлика коју имају модели критичног стања, а немају је модели са капом, састоји се у томе што су они способни да објасне омекшавајуће понашање преконсолидованог глиненог тла и стена, а захваљујући карактеристикама закона ојачања. Ову значајну разлику између модела са капом и модела критичног стања можемо видети ако упоредимо дијаграме напона и деформације на смицање за напонске путање А и Б (слика 3.13). За напонску путању Б, која би се могла односити на умерено-преконсолидовано глинено тло, или на меку, односно јако испуцалу стену, модели са капом и са критичним стањем воде до еквивалентних резултата, зато што цела напонска путања лежи унутар површине лома, или површине критичног стања. За напонску путању А, која се односи на тешко-преконсолидовано земљиште или на чврсту стену, модел са капом наговештава савршено пластично понашање. Насупрот томе, резултати примене модела критичног стања јасно кажу да ће се десити омекшање. Наиме, закон течења, придружен услову течења, производи повећање запремине када градијент услова течења има једну компоненту у затезућем смеру хидростатичке осе. На основу формулације услова ојачања (3.5.4), као последица повећања запремине, површина попуштања постаје мања, скупља се (а то је омекшање) а ово, опет, има за последицу редукују у нивоу девијатора напона.



Слика 3.13: Напонско-деформацијско понашање при девијаторском напрезању  
(а) "Модел са капом"; (б) "Cam-Clay" модел

Lade [49, 55, 56] је услов ојачања изразио у зависности од пластичног рада (3.5.7), али је предвидео различите једначине за ојачање (3.5.8) и омекшање (3.5.9):

$$W_p = \int \bar{\sigma} \cdot d\varepsilon = \int \sigma \cdot d\varepsilon + a \cdot p_a \cdot d\varepsilon_v \quad (3.5.7)$$

$$k = \left(\frac{1}{d}\right)^{1/\rho} \cdot \left(\frac{W_p}{p_a}\right)^{1/\rho} \quad (3.5.8)$$

$$k = a \cdot \exp\left(-b \cdot \frac{W_p}{p_a}\right) \quad (3.5.9)$$

где су:  $d$ ,  $\rho$ ,  $a$  и  $b$  материјалне константе,  $p_a$  је атмосферски притисак, док је  $\bar{\sigma}$  модификовано стање напона, чија је зависност од актуелног напона  $\sigma$  раније дата једначином (3.4.8). Према овако дефинисаном услову ојачања, док пластични рад  $W_p$  расте, изотропна површ течења (3.4.12) се, сагласно монотонно растућој функцији (3.5.8), шири у напонском простору, док текуће напонско стање не достигне услов лома (3.4.7). Тада настаје омекшање, односно изотропно скупљање површи течења (3.4.12), сагласно експоненцијално опадајућој функцији (3.5.9).

Desai [29] је предложио промену услова течења (3.4.16) у функцији повећања пластичних деформација, применом изотропног услова ојачања у форми једначина (3.5.10) или (3.5.11):

$$\alpha = \frac{a_1}{(\bar{\varepsilon}^p)^{a_2}} \quad (3.5.10)$$

$$\alpha = b_1 \cdot \exp\left(-b_2 \cdot \bar{\varepsilon}^p \cdot \left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}^p}{b_3 + b_4 \cdot \bar{\varepsilon}^p}\right)\right) \quad (3.5.11)$$

где је:

$$\bar{\varepsilon}^p = \int (d\varepsilon^p \cdot d\varepsilon^p)^{1/2} \quad \bar{\varepsilon}_v^p = \varepsilon_v^p / \sqrt{3} \quad \bar{\varepsilon}^p = \int (d\varepsilon^p \cdot d\varepsilon^p) \quad (3.5.12)$$

док су  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  и  $b_4$  материјалне константе.

Међутим, могуће је Desai-јевом услову течења придружити функцију ојачања и неког другог облика. На пример, у неким случајевима је погодно уградити концепт критичног стања у Desai -јев услов течења. У том случају функција ојачања би имала облик према једначини (3.5.13), односно (3.5.14):

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{1+e}{k_s} d\varepsilon_v^p \quad (3.5.13)$$

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{(1+e_0)\exp(\varepsilon_v)}{k_s} d\varepsilon_v^p \quad (3.5.14)$$

где су везе између почетне порозности  $e_0$ , порозности  $e$  и укупне запреминске деформације  $\varepsilon_v$ , дате једначинама (3.5.5), док је  $k_s$  - материјална константа.

### 3.6 Закон течења

Једна од најзначајнијих компоненти еласто-пластичног конститутивног модела је функција пластичног потенцијала. Она је основа пластичног закона течења, којим се успостављају релације између инкремената напона и инкремената пластичних деформација. Функција пластичног потенцијала  $Q(\sigma, \varepsilon^p)$  дефинише површ у напонском простору, на коју су управни инкременти пластичних деформација, како је то дефинисано једначином (3.3.6). У класичној теорији пластичности, уобичајена је претпоставка да функција пластичног

потенцијала  $Q(\sigma, \varepsilon^p)$  и услов течења  $F(\sigma, \varepsilon^p)$  имају исту форму, односно да важи асоцијативни закон течења (3.3.8). Велики број конститутивних модела који су развијани за природне материјале, укључујући и стене, полазили су од асоцијативног закона течења. Ово се односи и на једноставније идеално-пластичне моделе који су засновани на *Drucker-Prager*-овом услову течења, као и на моделе са континуалним ојачањем (модели са капом или модели критичног стања).

Међутим, на основу многобројних експерименталних истраживања, показано је да је претпоставка о асоцијативном закону течења неадекватна, односно да је за фриксионе материјале, у које спадају и стене, нужно увести функцију пластичног потенцијала  $Q(\sigma, \varepsilon^p)$  која је различита од услова течења  $F(\sigma, \varepsilon^p)$ .

Пластични потенцијал који одговара *Lade*-овом услову течења (3.4.12) има облик дат једначином (3.6.1):

$$Q = \left( \psi_1 \cdot \frac{\bar{I}_1^3}{\bar{I}_3} - \frac{\bar{I}_1^2}{\bar{I}_2} + \psi_2 \right) \cdot \left( \frac{\bar{I}_1}{p_a} \right)^g \quad (3.6.1)$$

где су:  $p_a$  атмосферски притисак;  $\psi_1$  параметар дефинисан у услову течења (3.4.12), а  $g$  и  $\psi_2$  нове материјалне константе. Инваријанте  $\bar{I}_i$  односе се на модификовано стање напона  $\bar{\sigma}$ , дефинисано раније једначином (3.4.8).

Генерално, функција пластичног потенцијала може бити изражена као композиција услова течења  $F(\sigma, \varepsilon^p)$  и неке корекционе функције  $\bar{F}(\sigma, \varepsilon^p)$ , према једначини (3.6.2):

$$Q = F(\sigma, \varepsilon^p) + \bar{F}(\sigma, \varepsilon^p) \quad (3.6.2)$$

*Desai* [29] је предложио следећи облик корекционе функције  $\bar{F}(\sigma, \varepsilon^p)$ , придружујући је услову течења (3.4.16):

$$\bar{F} = \left( \alpha + \kappa \cdot (\alpha_0 - \alpha) \cdot \left( 1 - \frac{\bar{\varepsilon}_v^p}{\bar{\varepsilon}^p} \right) \right) \cdot I_1^n \cdot \left( 1 - \beta \cdot \frac{J_3^{1/3}}{J_2^{1/2}} \right)^m \quad (3.6.3)$$

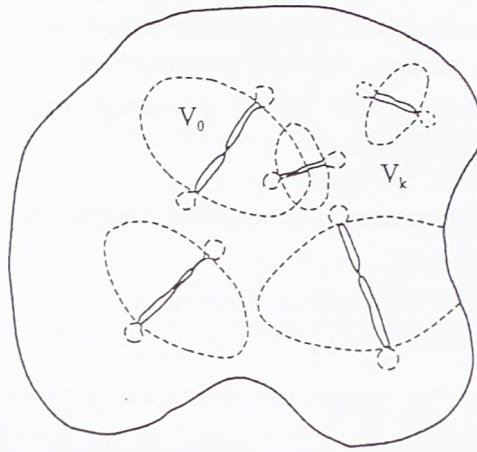
где су нови параметри  $\alpha_0$  и  $\kappa$ .

### 3.7 Моделирање оштећења

Основна претпоставка у конститутивном моделирању је концепт континуума. Под том претпоставком, карактеристике материјала могу бити дефинисани тестовима на узорцима коначне величине под хомогеним напонима и деформацијама. Ако напони и деформације значајније одступају од хомогености, осматрено понашање не може више представљати карактеристике хомогеног материјала. Услед тешкоћа у идентификацији утицаја таквих нехомогености, то је често игнорисано, и осматрена релација оптерећење-деформација на узорку коначне величине је преведена у напонско-деформацијску везу. Међутим, утицај нехомогености може бити веома важан у интерпретацији омекшања, као значајног чиниоца свеукупног понашања природних материјала.

Омекшање се може дефинисати као опадање чврстоће током прогресивног деформисања након достигнуте вршине чврстоће. Многа ограничења су присутна када се омекшање третира као материјална карактеристика континуума. Експериментално је утврђено за стене да омекшање није карактеристика материјала третираног као континуум, већ својство структуре, у којој индивидуалне компоненте као што су прелине и пукотине, резултују у глобалном паду чврстоће, са прогресивним деформисањем. Није лако развити моделе који садрже у детаљима

све структурне промене, односно пропацију прслина. Међутим, могуће је моделирати просечан утицај структурних промена и такав приступ је овде приказан, а према *Desai*-јевој формулацији [94, 95]. Узето је да се укупна деформација састоји из еластичне деформације, пластичне деформације и деформације оштећења. Оштећење може бити последица постојећих микропрслина и нових микропрслина које настају и даље се проширују. У овом *Desai*-вом моделу, понашање елемента материјала је декомпоновано у два дела (Слика 3.14).



Слика 3.14: Декомпозиција материјала на носећи и неносећи део

Један локални део запремине  $V_k$  представља понашање континуума, који није омекшавајући и влада се по еласто-пластичном конститутивном моделу. У другом делу, који се односи на оштећени или сломљени део, запремине  $V_0$ , понашање материјала је такво да је његова крутост нула. За сваки елемент материјала коначне величине укупна запремина  $V$  састоји се из наведене две компоненте:

$$V = V_0 + V_k \quad (3.7.1)$$

Дефинишимо степен оштећења као однос:

$$\Omega = V_0 / V \quad (3.7.2)$$

Пре било ког оптерећења,  $\Omega = 0$ . Након монотоног, хомогеног, оптерећивања  $\Omega$  достиже граничну вредност  $\Omega_u$ , која може тежити јединици.

Просечан одговор материјала је декомпонован на два дела. Означимо са горњим десним индексом "к" напоне који одговара делу запремине  $V_k$ , а са горњим десним индексом "0" напоне који одговарају делу запремине  $V_0$ .

$$\sigma = (1 - \Omega) \cdot \sigma^k + \Omega \cdot \sigma^0 \quad (3.7.3)$$

Усвојено је да се елемент материјала запремине  $V_k$  понаша по еласто-пластичном конститутивном закону, а да се оштећени елемент материјала запремине  $V_0$  понаша као идеално пластичан са условом течења једнаким нули (не може ности девијатор напона). Према томе, уведимо следеће претпоставке:

$$s^0 = 0 \quad (3.7.4)$$

$$s^k = s \quad (3.7.5)$$

$$\sigma_m^k = \sigma_m^0 = \sigma_m \quad (3.7.6)$$

На основу горњих релација, важе и следеће везе:

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{J_2^k} \cdot (1 - \Omega) \quad (3.7.7)$$

$$I_1 = I_1^k = I_1^0 \quad (3.7.8)$$

$$s = (1 - \Omega) \cdot s^k \quad (3.7.9)$$

$$\sigma = (1 - \Omega) \cdot \sigma^k + \frac{\Omega}{3} \cdot \sigma_m \quad (3.7.10)$$

У овом моделу  $\Omega$  је третирано као променљива континуалног поља, уместо у изолованим деловима простора. Тада, због компатибилности на нивоу континуума, деформације у делу  $V_0$  једнаке су деформацијама у делу  $V_k$ , односно уводи се претпоставка:

$$\varepsilon = \varepsilon^k = \varepsilon^0 \quad (3.7.11)$$

Настајање, ширење и повезивање микропрелина су значајне структурне промене у стени. Закон развоја ових структурних промена није довољно проучен, али је експериментална чињеница да оне значајно утичу на понашање материјала. У претходном опису, практично смо увели једну нову, значајну, унутрашњу променљиву, степен оштећења  $\Omega$ . Самим тим потребно је увести још једну допунску релацију која ће дефинисати развој оштећења, односно начин промене параметра  $\Omega$ . Искључићемо могућност да  $\Omega$  експлицитно зависи од напона, јер би то било у супротности са експерименталном чињеницом да нема промене оштећења при растерећењу материјала. Уважавајући и чињеницу да се са хидростатичком компресијом не развија оштећење, усвојена је промена параметра  $\Omega$  према једначини (3.7.12):

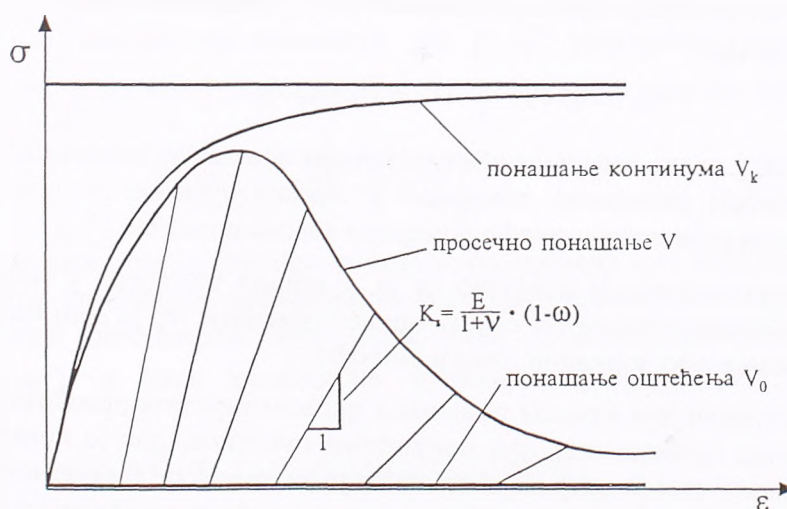
$$\Omega = \Omega_u - \Omega_u \cdot \exp(-k \cdot (\bar{\varepsilon}^p)^r) \quad (3.7.12)$$

Претходна релација се назива и закон развоја оштећења, при чему су  $k$ ,  $r$  и  $\Omega_u$  – материјалне константе, док је  $\bar{\varepsilon}^p$  дефинисано изразом (3.5.12).

Усвојили смо да се неоштећени део понаша еласто-пластично, што значи да се, за дефинисање релације  $d\sigma^k \leftrightarrow d\varepsilon$ , у потпуности могу применити све, у претходним поглављима наведене, еластопластичне теорије. Дакле, све приказане једначине важе, с тим што се уместо укупног напона  $d\sigma$  узима напон неоштећеног дела  $d\sigma^k$ . Према томе, конститутивна веза за локални, неоштећени део гласи:

$$d\sigma^k = C^{ep} \cdot d\varepsilon \quad (3.7.13)$$

Сажето, релације (3.7.13), (3.7.12) и (3.7.10) потпуно дефинишу овај модел, који је релативно једноставан, а може да опонаша битне одлике понашања стене под триаксиалном компресијом: омекшање под монотоним смичућим оптерећењем, опадање смичуће крутости под прогресивним оптерећењем и дилатантно понашање под монотоним смичућим оптерећењем. Ове одлике су приказане на Слици 3.15, где напон и деформација представљају просечне вредности, а не актуелне напоне и деформације на локалном нивоу.



Слика 3.15: Омекшање и опадање крутости у моделу оштећења

### 3.8 Моделирање понашања дисконтинуитета

Конститутивни модели за испуцале стенске масе могу се заснивати на моделирању понашања појединачних пукотина и синтези њихових утицаја на укупно деформисање средине (што ће бити детаљно приказано у поглављу 4). За конципирање оваквих модела неопходно је правилно дефинисати понашање индивидуалног дисконтинуитета.

Пошто се деформисање дешава у равни пукотине и управно на њу, погодно је да се цео модел понашања пукотина развије у локалном координатном систему, везаном за посматрани дисконтинуитет. Резултати експеримената се најчешће интерпретирају са претпоставком о изотропном напонско-деформацијском понашању у равни дисконтинуитета. У том случају, конститутивне релације је најпогодније формулисати у дводимензионалном координатном систему ( $n$  – правац нормале на пукотину;  $s$  – правац у равни пукотине који се поклапа са правцем деформације смицања). Увешће се аналогија између величина које дефинишу тродимензионално напонско стање у солиду и величина које дефинишу напонско стање на дисконтинуитету [27], према следећем:

- Прва инваријанта напона  $I_1$  у континууму аналогна је нормалном напону  $\sigma_d$  на дисконтинуитету.
- Друга инваријанта девијатора напона  $J_2$  у континууму аналогна је смичућем  $\tau_d$  напону на дисконтинуитету.
- Запреминска деформација  $\epsilon_v$  у континууму аналогна је релативном нормалном померању  $u_n$  дисконтинуитета (затварању или отварању пукотине).
- Девијатор тензора деформације  $e$  у континууму аналоган је релативном смичућем померању  $u_s$  дисконтинуитета.

У неким ситуацијама коришћени су еластични модели за предвиђање нормалног и смичућег деформисања дисконтинуитета под оптерећењем. На пример: Еластично понашање неке пукотине може да се изрази преко два параметра  $K_n$  (нормална крутост) и  $K_s$  (смичућа крутост), на следећи начин:

$$\sigma_d = K_n \cdot u_n \quad ; \quad \tau_d = K_s \cdot u_s \quad (3.8.1)$$

Треба уочити да, у овако дефинисаном еластичном понашању дисконтинуитета, смичуће напрезање не производи релативно померање у правцу нормале и обрнуто, нормално напрезање не производи релативно смичуће померање зидова пукотине.

Међутим, експериментима је показано да је, у већини случајева, у анализи понашања дисконтинуитета оправдано занемарити еластичну деформацију, јер је доминантно пластично, неповратно деформисање, као нормално, тако и смичуће.

Теорија пластичности је у анализи понашања дисконтинуитета првобитно коришћена да опише гранично стање, односно лом или попуштање пукотине, док је понашање пре лома усвајано као еластично. У том смислу, највећи напор је улаган да се адекватном формулацијом опише услов лома по дисконтинуитету  $F_d = 0$ , односно смичућа чврстоћа пукотине.

Прва квантификација смичуће чврстоће дисконтинуитета био је класични *Mohr-Coulomb*-ов критеријум дат једначином (3.8.1):

$$F_d = |\tau_d| - \sigma_d \cdot \tan \varphi_d = 0 \quad (3.8.2)$$

према коме се, у граничном случају смицања, напонске компоненте на дисконтинуитету налазе у линеарном односу преко угла трења  $\varphi_d$ .

На основу великог броја експеримената, показано је да са повећањем нормалног напона смичућа отпорност одступа од линеарног *Mohr-Coulomb*-овог услова лома. Постоји доста

различитих предлога који уважавају нелинеарност услова лома по дисконтинуитету. Овде ћемо навести неколико предлога, не улазећи у детаљније анализе и коментаре њихових предности и недостатака:

*Barton* [6, 7, 8]:

$$F_d = |\tau_d| - \sigma_d \cdot \tan \left( \text{JRC} \cdot \log_{10} \left( \frac{\text{JCS}}{\sigma_d} \right) + \varphi_r \right) = 0 \quad (3.8.3)$$

где су JRC, JCS и  $\varphi_r$  материјалне константе.

*Gens, Karol* [17]:

$$F_d = |\tau_d| - b^2 \cdot \sqrt{\sigma_d^2} + 2 \cdot a \cdot \sigma_d \quad (3.8.4)$$

где су a и b материјалне константе.

*Максимовић* [63]:

$$F_d = |\tau_d| - \sigma_d \cdot \tan \left( \varphi_b + \frac{\Delta\varphi}{(1 + \sigma_d / p_n)} \right) \quad (3.8.6)$$

где су  $\varphi_b$ ,  $\Delta\varphi$  и  $p_n$  материјалне константе.

Веома мало има покушаја развоја интегралног приступа за симулацију целокупног процеса деформисања до коначног понашања при лому. *Desai* је предложио еласто-пластични модел понашања дисконтинуитета који се заснива на специјалном облику услова течења за дисконтинуитете, изведеног из генералне формулације (3.4.16) развијене за солид [27]. Модел узима у обзир факторе као што су: ојачање током пластичног деформисања, неасоцијативност и дилатанца.

Пластично течење је описано помоћу континуално повећавајуће функције дате једначином (3.8.6).

$$F_d = \tau_d^2 + \alpha \cdot \sigma_d^n - \gamma \cdot \sigma_d^2 = 0 \quad (3.8.7)$$

Услов ојачања *Desai* је дефинисао у функцији обе (нормалне и смичуће) компоненте померања.

$$\alpha = a \cdot (\bar{u}^p)^b \quad (3.8.8)$$

при чему су a и b материјалне константе, док је  $\bar{u}^p$  резултанта пластичног померања (аналогна ефективној пластичној деформацији у континууму), која се дефинише следећим изразом:

$$d\bar{u}^p = \left[ (du_n^p)^2 + (du_s^p)^2 \right]^{1/2} \quad (3.8.9)$$

Деформисање дисконтинуитета при смицању, по правилу има неасоцијативан карактер, односно инкременти пластичних деформација нису ортогонални на површ течења, већ на функцију пластичног потенцијала која може бити изражена као композиција услова течења  $F_d(\sigma_d, \tau_d, u_n^p, u_n^p)$  и неке корекционе функције  $\bar{F}_d(\sigma_d, \tau_d, u_n^p, u_n^p)$ , према следећој једначини:

$$Q_d = F_d(\sigma_d, \tau_d, u_n^p, u_n^p) + \bar{F}_d(\sigma_d, \tau_d, u_n^p, u_n^p) \quad (3.8.11)$$

*Desai* је предложио да се услови течења (3.8.6) придружи следећи облик корекционе функције  $\bar{F}_d$ :

$$\bar{F}_d(\sigma_d, \bar{u}^p) = k \cdot (\alpha_0 - \alpha) \cdot \left( 1 - \frac{\bar{u}^p}{\bar{u}^p} \right) \cdot (\sigma_d)^n \quad (3.8.12)$$

где су  $\alpha_0$  и k параметри материјала, док је  $\bar{u}^p$  интензитет нормалне компоненте пластичног померања (аналогно запреминском делу ефективне пластичне деформације  $\bar{u}^p$ ), дефинисан на основу једначине (3.8.13):

$$d\bar{u}_v^p = \left( du_n^p \right) \quad (3.8.13)$$

Једна од значајних одлика предложеног приступа је то што је модел изведен из генераног модела пластичности континуума као његов специјални случај. То уводи као могућност да се понашање дисконтинуитета и околне стенске масе опишу у оквиру јединственог методолошког концепта моделирања.



#### 4. ПРЕДЛОГ КОНСТИТУТИВНОГ МОДЕЛА ЗА ИСПУЦАЛЕ СТЕНСКЕ МАСЕ

##### 4.1 Координатни системи, ознаке и дефиниције

###### Координатни системи

У наредним разматрањима користиће се координатни системи, према следећим дефиницијама:

Општи координатни систем:

- $x$  – правац запад-исток
- $y$  – правац југ-север
- $z$  – вертикала на горе

Вектор положаја:  $\mathbf{x}^T = [x \ y \ z]$

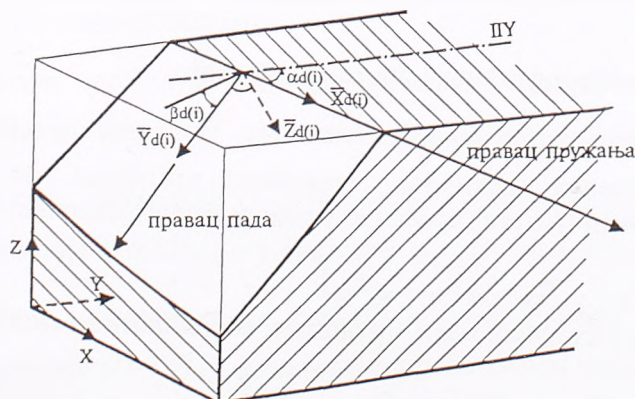
Локални координатни систем – везан за средњу раван  $i$ -те фамилије дисконтинуитета ( $i = 1, N_d$ )

- $\bar{x}_{d(i)}$  – правац пружања дисконтинуитета  $i$ -те фамилије – пресек равни дисконтинуитета и хоризонталне равни (раван  $x - y$ )
- $\bar{y}_{d(i)}$  – правац пада равни дисконтинуитета  $i$ -те фамилије
- $\bar{z}_{d(i)}$  – правац нормале на раван дисконтинуитета  $i$ -те фамилије

Вектор положаја:  $\bar{\mathbf{x}}_{d(i)}^T = [\bar{x}_{d(i)} \ \bar{y}_{d(i)} \ \bar{z}_{d(i)}]$

Локални координатни систем је, у односу на општи-апсолутни координатни систем, дефинисан са два угла (Слика 4.1):

- $\alpha_{d(i)}$  – угао пружања равни дисконтинуитета
- $\beta_{d(i)}$  – угао пада равни дисконтинуитета



Слика 4.1: Релација између локалног и општег-апсолутног координатног система

Угао пружања произвољне равни се дефинише као угао мерен у смислу казаљке на сату, од позитивног смера  $y$ -осе општег координатног система, ка позитивном смеру координатне осе  $\bar{x}_{d(i)}$ .

Угао пада произвољне равни се дефинише као угао мерен у смислу супротном од казаљке на сату, од позитивног смера хоризонталне пројекције координатне осе  $\bar{y}_{d(i)}$ , ка позитивном смеру координатне осе  $\bar{y}_{d(i)}$ .

Увешће се и локални-релативни координатни систем, такође везан за средњу раван посматраног дисконтинуитета:

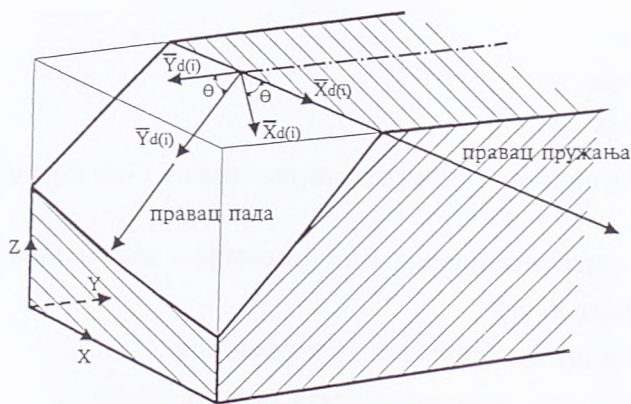
- $\bar{x}_{d(i)}$  – правац у равни дисконтинуитета који се поклапа са правцем (резултантом) смицања.
- $\bar{y}_{d(i)}$  – правац у равни дисконтинуитета управан на правац смицања.
- $\bar{z}_{d(i)}$  – правац нормале на раван дисконтинуитета  $i$ -те фамилије ( $\bar{z}_{d(i)} \equiv \bar{z}_{d(i)}$ )

Вектор положаја:  $\bar{x}_{d(i)}^T = [\bar{x}_{d(i)} \quad \bar{y}_{d(i)} \quad \bar{z}_{d(i)}]$

Раван  $\bar{x}_{d(i)} - \bar{z}_{d(i)}$  поклапа се са дводимензионалним координатним системом ( $s - n$ ) који је дефинисан у поглављу 3.8.

Локални-релативни координатни систем зависи од правца смицања и дефинисан је, у односу на локални координатни систем, једним углом (Слика 4.2):

- $\theta_{d(i)}$  – угао правца смицања у равни дисконтинуитета



Слика 4.2: Релација између локалног и локалног-релативног координатног система

Угао смицања у равни дисконтинуитета дефинише се као угао мерен у смислу казаљке на сату, од позитивног смера координатне осе  $\bar{x}_{d(i)}$  локалног координатног система, ка позитивном смеру координатне осе  $\bar{x}_{d(i)}$ .

### Ознаке и дефиниције

$N_d$  – укупан број фамилија дисконтинуитета

$f_{d(i)}$  – учесталост дисконтинуитета  $i$ -те фамилије ( $i=1, N_d$ ); учесталост је реципрочна величина управног растојања између два суседна дисконтинуитета (просечно у оквиру једне фамилије)

$$\sigma_{sm}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$$

– напон у стенској маси – у општем координатном систему

$$\sigma_{mon}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$$

– напон у монолиту – у општем координатном систему

$$\sigma_{d(i)}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$$

– напон за раван  $i$ -те фамилије дисконтинуитета ( $i=1, N_d$ ) – у општем координатном систему

$$\bar{\sigma}_{d(i)}^T = \left[ \bar{\sigma}_x \quad d(i)\bar{\sigma}_y \quad d(i)\bar{\sigma}_z \quad d(i)\bar{\tau}_{xy} \quad d(i)\bar{\tau}_{yz} \quad d(i)\bar{\tau}_{zx} \right]^T$$

– напон за раван  $i$ -те фамилије дисконтинуитета ( $i = 1, N_d$ ) – у локалном координатном систему

$$\bar{\bar{\sigma}}_{d(i)}^T = \left[ \bar{\bar{\sigma}}_x \quad d(i)\bar{\bar{\sigma}}_y \quad d(i)\bar{\bar{\sigma}}_z \quad d(i)\bar{\bar{\tau}}_{xy} \quad d(i)\bar{\bar{\tau}}_{yz} \quad d(i)\bar{\bar{\tau}}_{zx} \right]^T$$

– напон за раван  $i$ -те фамилије дисконтинуитета ( $i = 1, N_d$ ) – у локалном-релативном координатном систему

$$\varepsilon_{sm}^T = \left[ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right]^T$$

– укупне деформације стенске масе – у општем координатном систему

$$\varepsilon_{mon}^T = \left[ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right]^T$$

– укупне деформације стенског монолита – у општем координатном систему

$$\varepsilon_{d(i)}^T = \left[ \varepsilon_x \quad d(i)\varepsilon_y \quad d(i)\varepsilon_z \quad d(i)\gamma_{xy} \quad d(i)\gamma_{yz} \quad d(i)\gamma_{zx} \right]^T$$

– укупне деформације дисконтинуитета  $i$ -те фамилије ( $i = 1, N_d$ ) – у општем координатном систему

$$\bar{\varepsilon}_{d(i)}^T = \left[ \bar{\varepsilon}_x \quad d(i)\bar{\varepsilon}_y \quad d(i)\bar{\varepsilon}_z \quad d(i)\bar{\gamma}_{xy} \quad d(i)\bar{\gamma}_{yz} \quad d(i)\bar{\gamma}_{zx} \right]^T$$

– укупне деформације дисконтинуитета  $i$ -те фамилије ( $i = 1, N_d$ ) – у локалном координатном систему

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{d(i)}^T = \left[ \bar{\bar{\varepsilon}}_x \quad d(i)\bar{\bar{\varepsilon}}_y \quad d(i)\bar{\bar{\varepsilon}}_z \quad d(i)\bar{\bar{\gamma}}_{xy} \quad d(i)\bar{\bar{\gamma}}_{yz} \quad d(i)\bar{\bar{\gamma}}_{zx} \right]^T$$

– укупне деформације дисконтинуитета  $i$ -те фамилије ( $i = 1, N_d$ ) – у локалном-релативном координатном систему

$$\bar{\bar{u}}_{d(i)} = \left[ \bar{\bar{u}}_x \quad d(i)\bar{\bar{u}}_y \quad d(i)\bar{\bar{u}}_z \right]$$

– укупно релативно померање дисконтинуитета  $i$ -те фамилије ( $i = 1, N_d$ ) – у локалном-релативном координатном систему

На исти начин као укупне, дефинишу се и пластичне и еластичне деформације стенске масе, монолита и дисконтинуитета. Дакле:

$\varepsilon_{sm}^p, \varepsilon_{sm}^e$  – укупне, пластичне и еластичне деформације стенске масе – у општем координатном систему

$\varepsilon_{mon}^p, \varepsilon_{mon}^e$  – укупне, пластичне и еластичне деформације стенског монолита – у општем координатном систему

$\varepsilon_{d(i)}^p, \varepsilon_{d(i)}^e$  – укупне, пластичне и еластичне деформације дисконтинуитета  $i$ -те фамилије ( $i = 1, N_d$ ) – у општем координатном систему

$\bar{\varepsilon}_{d(i)}^p, \bar{\varepsilon}_{d(i)}^e$  – укупне, пластичне и еластичне деформације дисконтинуитета  $i$ -те фамилије ( $i = 1, N_d$ ) – у локалном координатном систему

$\bar{\bar{\varepsilon}}_{d(i)}^p, \bar{\bar{\varepsilon}}_{d(i)}^e$  – укупне, пластичне и еластичне деформације дисконтинуитета  $i$ -те фамилије ( $i = 1, N_d$ ) – у локалном-релативном координатном систему

$\bar{\bar{u}}_{d(i)}^p, \bar{\bar{u}}_{d(i)}^e$  – укупна, пластична и еластична релативна померања дисконтинуитета  $i$ -те фамилије ( $i = 1, N_d$ ) – у локалном-релативном координатном систему

Усвојене су претпоставке о деформисању дисконтинуитета као у поглављу 3.8, односно да је деформисање одређено са две доминантне компоненте (релативно смичуће померање у

равни дисконтинуитета и релативно померање (затварање или отварање) управно на дисконтинуитет, као и да је деформисање у равни дисконтинуитета изотропно. Сагласно томе, величине које дефинишу стање деформација и напона на дисконтинуитету биће изражене у локалном-релативном координатном систему.

У једначинама које се односе на индивидуални дисконтинуитет (поглавље 4.2), у којима се јављају напонске и деформацијске компоненте, увешће се, ради прегледности, нешто краће ознаке компоненти (изоставиће се индекс (i) из обележавања, као и надвлачење које сугерише да се ради о локалном-релативном координатном систему). Према томе, користиће се и следеће ознаке:

- $\sigma_d$  – нормални напон – компонента управна на раван дисконтинуитета ( $\sigma_d \equiv_{d(i)} \bar{\sigma}_z$ )
- $\tau_d$  – смичући напон – компонента у равни дисконтинуитета ( $\tau_d \equiv_{d(i)} \bar{\tau}_{zx}$ )
- $u_n$  – релативно нормално померање дисконтинуитета – затварање или отварање пукотине ( $u_n \equiv_{d(i)} \bar{u}_z$ )
- $u_s$  – релативно смичуће померање дисконтинуитета ( $u_s \equiv_{d(i)} \bar{u}_x$ )

### Координатне трансформације

Генерално, везе између координата различитих координатних система одређене су матрицом трансформације координата  $T$ , која је дефинисана релацијом (3.1.15), док су везе вектора напона и деформације у различитим координатним системима, дефинисане једначинама (3.1.16) и (3.1.17), односно матрицама трансформација напона и деформација  $T^\sigma$  и  $T^\epsilon$ , а према изразима (3.1.18) и (3.1.19).

За сваки напред дефинисани локални координатни систем, везан за одређену фамилију дисконтинуитета, трансформација координата између локалног и општег координатног система, на основу (3.1.15), има следећи облик:

$$\bar{x}_{d(i)} = \bar{T}_{d(i)} \cdot x \quad (4.1.1)$$

где, на основу (3.1.16) матрица трансформације координата  $\bar{T}_{d(i)}$  има следећи облик:

$$\bar{T}_{d(i)} = \begin{bmatrix} \sin\alpha_{d(i)} & \cos\alpha_{d(i)} & 0 \\ \cos\beta_{d(i)} \cdot \cos\alpha_{d(i)} & -\cos\beta_{d(i)} \cdot \sin\alpha_{d(i)} & -\sin\beta_{d(i)} \\ -\sin\beta_{d(i)} \cdot \cos\alpha_{d(i)} & \sin\beta_{d(i)} \cdot \sin\alpha_{d(i)} & -\cos\beta_{d(i)} \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

На тај начин, трансформација напона и деформација из локалног у односу на општи координатни систем, врши се помоћу следећих израза:

$$\bar{\sigma}_{d(i)} = \bar{T}_{d(i)}^\sigma \cdot \sigma_{d(i)} \quad (4.1.3)$$

$$\bar{\epsilon}_{d(i)} = \bar{T}_{d(i)}^\epsilon \cdot \epsilon_{d(i)} \quad (4.1.4)$$

где су  $\bar{T}_{d(i)}^\sigma$  и  $\bar{T}_{d(i)}^\epsilon$ , матрице трансформације напона и деформација између општег координатног система и локалног координатног система везаног за i-ту фамилију дисконтинуитета, а према изразима (3.1.18) и (3.1.19).

За одређену фамилију дисконтинуитета, трансформација координата између локалног-релативног и локалног координатног система, а на основу правца смицања у равни дисконтинуитета (који је одређен углом  $\theta_{d(i)}$ ), врши се према следећем изразу – на основу (3.1.15):

$$\bar{x}_{d(i)} = \bar{T}_{d(i)} \cdot \bar{x} \quad (4.1.5)$$

где, на основу (3.1.16) матрица трансформације координата  $\bar{T}_{d(i)}$  има следећи облик:

$$\bar{\bar{\mathbf{T}}}_{d(i)} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{d(i)} & \sin\theta_{d(i)} & 0 \\ \sin\theta_{d(i)} & \cos\theta_{d(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

На тај начин, трансформација напона и деформација из локалног-релативног у односу на локални координатни систем, врши се помоћу следећих израза:

$$\bar{\bar{\sigma}}_{d(i)} = \bar{\bar{\mathbf{T}}}_{d(i)} \cdot \bar{\sigma}_{d(i)} \quad (4.1.7)$$

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{d(i)} = \bar{\bar{\mathbf{T}}}_{d(i)} \cdot \bar{\epsilon}_{d(i)} \quad (4.1.8)$$

где су  $\bar{\bar{\mathbf{T}}}_{d(i)}^{\sigma}$  и  $\bar{\bar{\mathbf{T}}}_{d(i)}^{\epsilon}$ , матрице трансформације напона и деформација између локалног координатног система и локалног-релативног координатног система везаног за  $i$ -ту фамилију дисконтинуитета, а према изразима (3.1.18) и (3.1.19).

Везе између компоненти деформација и релативних померања дисконтинуитета, у локално-релативном координатном систему, дате су следећим изразом:

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{d(i)} = \mathbf{f}_{d(i)} \cdot \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{d(i)} \quad (4.1.9)$$

где је  $\mathbf{M}$  константна везна матрица:

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.10)$$

Напоменимо да из дефиниције угла смицања  $\theta_{d(i)}$  следи релација:

$$\tan \theta_{d(i)} = {}_{d(i)}\bar{\tau}_{zx} / {}_{d(i)}\bar{\tau}_{yz} \quad (4.1.11)$$

## 4.2 Теоријске поставке конститутивног модела за пукотину

### Феноменолошко полазиште

Конститутивни модел за испуцале стенске масе који се овде предлаже је сложен модел, заснован на синтези утицаја понашања појединачних пукотина и стенског монолита на укупно деформисање стенске масе. Први корак у развоју сложеног модела је правилно дефинисање понашања компонената модела. У случају испуцалих стенских маса, имајући у виду да се деформисање доминантно одиграва затварањем, отварањем и смицањем пукотина, најзначајније је правилно дефинисање конститутивног модела таквог индивидуалног дисконтинуитета.

У поглављу 2 разматрано је понашење пукотине при нормалном и смичућем оптерећењу. Овде се истичу следећа запажања, која ће послужити као основ за развој конститутивног модела за дисконтинуитете.

- Деформисање дисконтинуитета, како нормално, тако и смичуће, доминантно је пластично, односно неповратно. Еластичне (повратне) деформације су у већини случајева занемарљиве.
- Деформисање дисконтинуитета приликом компресије (затварање споја), је изразито нелинеарно, хиперболичног је карактера и има асимптоту која је једнака ефективној вредности почетног отвора споја.
- Понашање дисконтинуитета приликом монотоне компресије је увек ојачавајуће и асоцијативно.

- Деформисање дисконтинуитета приликом смицања, под константним нормалним напонем је такође нелинеарно. Типичан је случај да после једног брзог уздицања смичућег напона до максималне (вршне) вредности  $\tau_d$  уследи једно постепено опадање ка некој резидуалној вредности  $\tau_d$  после великих смичућих померања.
- Понашање дисконтинуитета приликом смицања је увек до неке границе ојачавајуће, након које се може (али не мора увек) јавити и омекшање, односно пад смичућег напона при константном нормалном напону.
- Понашање дисконтинуитета приликом смицања је увек неасоцијативно.
- Максимални прираштај дилатанце (повећања отвора услед смицања) коинцидира (малтене се подудара) са тренутком мобилизације вршне смичуће чврстоће.
- У резидуалној фази смицања прираштај дилатанце тежи нули.

Као теоријско полазиште за развој конститутивног модела за дисконтинуитет усвојен је концепт теорије пластичности, сагласно изложеном у поглављу 3.

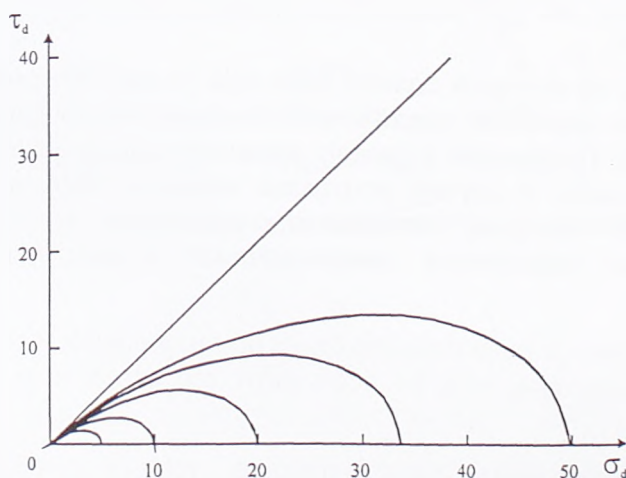
Деформисање индивидуалног дисконтинуитета ће у овом поглављу бити изражено преко компоненти релативних померања ( $u_n$  и  $u_s$ ). За прелазак на фамилију дисконтинуитета, односно на стенску масу, користи се веза између компоненти деформација и релативних померања (4.1.9).

#### Услов течења

Усвојен је *Desai*-јев услов течења, који је описан у поглављу 3.8 (једначина 3.8.7), која се као основна једначина модела понавља и на овом месту:

$$F_d = \tau_d^2 + \alpha \cdot \sigma_d^n - \gamma \cdot \sigma_d^2 = 0 \quad (4.2.1)$$

Услов течења, како је дефинисан једначином (4.2.1), јесте континуално променљива функција (Слика 4.3), а у зависности од пластичних релативних померања  $u_n^p$  и  $u_s^p$ , које фигуришу у услови ојачања израженом преко параметра  $\alpha = \alpha(u_n^p, u_s^p)$ .



Слика 4.3: Услов течења за дисконтинуитет

#### Услов ојачања

Услов ојачања који је дефинисао *Desai* (3.8.8) није усвојен у овом конститутивном моделу, пре свега зато што је *Desai*-јев услов ојачања монотона функција, помоћу које не може да се моделира омекшање.

Уколико би се усвојио услов ојачању који карактерише модел критичног стања (3.8.10), добила би се могућност моделирања омекшања. Међутим, према овој једначини омекшање би

се неизоставно јављало са повећањем отвора пукотине, што је у очигледној супротности са експерименталним чињеницама.

Због наведених тешкоћа у коришћењу постојећих формулација, овде је дат нов предлог за услов ојачања, а према следећој једначини:

$$\alpha = k_0 \cdot \exp\left[-k_\psi \cdot \exp(-k_{1\psi} \cdot T)\right] \cdot \exp\left[\exp\left(-k_n \cdot \frac{U}{u^* - U}\right)\right] \quad (4.2.2)$$

где су  $T$  и  $U$  следеће функције пластичних релативних померања дисконтинуитета:

$$T = \tan \psi = \frac{du_n^p}{du_s^p} \quad (4.2.3)$$

$$U = \int \sin^2 \psi \cdot du_n^p \quad (4.2.4)$$

док су  $k_0$ ,  $k_\psi$ ,  $k_{1\psi}$ ,  $k_n$ , и  $u^*$ , материјалне константе.

Ради лакше дискусије, уведемо следеће ознаке:

$$A_\psi = \exp\left[-k_\psi \cdot \exp(-k_{1\psi} \cdot T)\right] \quad (4.2.5)$$

$$A_n = \exp\left[\exp\left(-k_n \cdot \frac{U}{u^* - U}\right)\right] \quad (4.2.6)$$

након чега услов ојачања (4.2.2) можемо написати као:

$$\alpha = k_0 \cdot A_\psi \cdot A_n \quad (4.2.7)$$

Уочимо да  $A_n$  углавном контролише ојачање услед нормалног деформисања, док  $A_\psi$  контролише ојачање приликом смичућег деформисања дисконтинуитета.

У случају нормалног деформисања – без смицања ( $du_s^p = 0$ ), важе следеће релације:

$$du_s^p = 0 \Rightarrow \psi = \pi/2 \Rightarrow T = \infty \Rightarrow A_\psi = 1 \quad (4.2.8)$$

па се услов ојачања своди на једначину 4.2.9:

$$\alpha = k_0 \cdot A_n \quad (4.2.9)$$

У случају смичућег деформисања – са константним нормалним напоном, апроксимативно важе следеће релације:

$$\sin^2 \psi \approx 0 \Rightarrow \Delta U \approx 0 \Rightarrow A_n \cong \text{const.} \quad (4.2.10)$$

Пре почетка деформисања ( $du_n^p = du_s^p = 0$ ) параметар ојачања  $\alpha$  је неодређен. Уколико важи ( $du_n^p \rightarrow 0$ ;  $du_s^p = 0$ ), што иначе одговара уобичајеним почетним условима у опиту директног смицања, тада параметар ојачања  $\alpha$  има следећу почетну вредност:

$$\alpha = k_0 \cdot \exp(1) \quad (4.2.11)$$

Приликом компресије ( $du_s^p = 0$ ), затварање дисконтинуитета има граничну вредност  $u^*$ , која је једнака "ефективном" отвору дисконтинуитета, и за коју параметар ојачања  $\alpha$  има следећу вредност:

$$U \rightarrow u^* \Rightarrow A_n = 1 \Rightarrow \alpha = k_0 \quad (4.2.12)$$

На крају процеса смицања (при константном нормалном напону) дисконтинуитет долази у такозвано резидуално стање, које се карактерише даљим пластичним течењем без ојачања, односно омекшања, као и резидуалним отвором дисконтинуитета, што значи да приликом даљег смицања не постоји промена нормалног померања ( $du_n^p = 0$ ). За резидуално стање важе следеће релације:

$$du_n^p = 0 \Rightarrow \psi = 0 \Rightarrow T = 0 \Rightarrow A_\psi = \exp(-k_\psi) \quad (4.2.13)$$

што значи да се услов ојачања за резидуално стање своди на једначину 4.1.14:

$$\alpha_{rez} = k_0 \cdot \exp[-k_\psi] \cdot \exp\left[\exp\left(-k_n \cdot \frac{U}{u^* - U}\right)\right] = k_0 \cdot \exp[-k_\psi] \cdot A_n \quad (4.2.14)$$

Важно је уочити да се, предложеном формулацијом услова ојачања, параметар ојачања  $\alpha$  доводи у директну монотону везу са функцијама  $T$  и  $U$ , односно да важе следеће релације:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial T} \geq 0 \quad ; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial U} \leq 0 \quad (4.2.15)$$

Својство услова ојачања исказано релацијама (4.2.15) веома је важно, јер се на тај начин постиже подударане са експерименталним запажањима наведеним на почетку овог поглавља.

### Пластични потенцијал

Основне карактеристике које функција пластичног потенцијала треба да има јесте да омогући асоцијативно деформисање у случају нормалног напрезања, односно да у том случају буде сведена на услов течења, док у случају смичућег напрезања треба да омогући деформисање које има неасоцијативан карактер. Ово значи да функција пластичног потенцијала може бити изражена према једначини (4.2.16), као композиција услова течења  $F_d(\sigma_d, \tau_d, u_n^p, u_n^p)$  и неке корекционе функције  $\bar{F}_d(\sigma_d, \tau_d, u_n^p, u_n^p)$ , која ће за случај нормалног деформисања (без смицања) постати једнака нули (4.2.17):

$$Q_d = F_d(\sigma_d, \tau_d, u_n^p, u_n^p) + \bar{F}_d(\sigma_d, \tau_d, u_n^p, u_n^p) \quad (4.2.16)$$

$$du_s^p = 0 \Rightarrow \psi = \pi/2 \Rightarrow \bar{F}_d(\sigma_d, \tau_d, u_n^p, u_n^p) = 0 \Rightarrow Q_d = F_d(\sigma_d, \tau_d, u_n^p, u_n^p) \quad (4.2.17)$$

Корекциона функција (3.8.12), коју је *Desai* предложио да се придружи услову течења, не задовољава услов постављен релацијом (4.2.17), а садржи и допунске константе.

Конститутивни модел који се овде предлаже заснива се на функцији пластичног потенцијала која има следећи облик:

$$Q_d = \tau_d^2 + (\alpha - \alpha_{rez} \cdot \cos^2 \psi) \cdot \sigma_d^n - \gamma \cdot (1 - \cos^2 \psi) \cdot \sigma_d^2 \quad (4.2.18)$$

што значи да се корекциона функција  $\bar{F}_d$ , која се додаје услову течења  $F_d$ , може изразити једначином (4.2.19).

$$\bar{F}_d = -(\alpha_{rez} \cdot \sigma_d^n - \gamma \cdot \sigma_d^2) \cdot \cos^2 \psi \quad (4.2.19)$$

при чему је  $\alpha_{rez}$ , параметар ојачања у резидуалном стању, а према једначини (4.2.14).

Сагласно усвојеној функцији пластичног потенцијала, следи закон течења:

$$du_n = d\lambda \cdot \frac{\partial Q_d}{\partial \sigma_d} \quad ; \quad du_s = d\lambda \cdot \frac{\partial Q_d}{\partial \tau_d} \quad (4.2.20)$$

који се, користећи релацију (4.2.3), може сажето изразити као директна веза напона у функцији прираштаја деформација, односно релативних померања дисконтинуитета:

$$\tau_d = \frac{n \cdot (\alpha - \alpha_{rez} \cdot \cos^2 \psi) \cdot \sigma_d^{n-1} - \gamma \cdot (1 - \cos^2 \psi)}{2 \tan \psi} \cdot \sigma_d \quad (4.2.21)$$

### Решавање напона

Услов течења (4.2.1), услов ојачања (4.2.2) и закон течења (4.2.21), у целини дефинишу процес пластичног деформисања дисконтинуитета. Из познатих деформација (релативних померања), решавањем наведених једначина, једнозначно се добијају напони на дисконтинуитету, и то у затвореном облику, према једначинама (4.2.22) и (4.2.23):

$$\sigma_d = \left[ \frac{2 \cdot Y_1 \cdot Y_2 - \alpha + \sqrt{(\alpha - 2 \cdot Y_1 \cdot Y_2)^2 - 4 \cdot Y_1^2 \cdot (Y_1^2 - \gamma)}}{2 \cdot Y_1^2} \right]^{\frac{1}{n-2}} \quad (4.2.22)$$

$$\tau_d = Y_1 \cdot \sigma_d^{n-1} - Y_2 \cdot \sigma_d \quad (4.2.23)$$



где су:

$$Y_1 = \frac{n \cdot (\alpha - \alpha_{rez} \cdot \cos^2 \psi)}{2 \tan \psi} \quad (4.2.24)$$

$$Y_2 = \frac{\gamma \cdot (1 - \cos^2 \psi)}{\tan \psi} \quad (4.2.25)$$

### Везе између константи

Може се показати да нису све константе конститутивног модела независне, односно да постоји веза између неких константи. У том циљу анализираћемо процес смицања под константним нормалним напоном.

Обележимо са  $\hat{\sigma}_d$  нормални напон и са  $\hat{\alpha}$  параметар ојачања у тренутку почетка процеса смицања. На основу услова течења (4.2.1) и услова ојачања (4.2.7) важе следеће релације:

$$\hat{\alpha} = k_0 \cdot A_n = \frac{\gamma}{\hat{\sigma}_d^{n-1}} \quad (4.2.26)$$

Претпоставимо да се  $\hat{\sigma}_d$  не мења током смицања, односно да је  $\hat{\sigma}_d = (\sigma_d)_{rez}$ , где је  $(\sigma_d)_{rez}$  – нормални напон на крају процеса смицања, у резидуалном стању дисконтинуитета. На крају процеса смицања параметар ојачања  $\alpha$  достиже своју резидуалну вредност  $\alpha_{rez}$ . На основу једначина (4.2.14), (4.2.26) и (4.2.10) следи:

$$\alpha_{rez} = \frac{\gamma}{\hat{\sigma}_d^{n-1}} \cdot \exp(-k_\psi) \quad (4.2.27)$$

Замењујући  $\alpha_{rez}$  према једначини (4.2.27) у услов течења за резидуално стање, добија се следећа једначина:

$$(\tau_d)_{rez} = \sqrt{\gamma \cdot (1 - \exp(-k_\psi))} \cdot (\sigma_d)_{rez} \quad (4.2.28)$$

Са друге стране, на основу једначина (4.2.13) и (4.2.23), у резидуалном стању важе следеће релације:

$$du_n^p = 0 \Rightarrow \psi = 0 \Rightarrow Y_2 = 0 \Rightarrow (\tau_d)_{rez} = Y_1(U) \cdot (\sigma_d)_{rez}^{n-1} \quad (4.2.29)$$

при чему се може доказати да важи следећа импликација:

$$\psi \rightarrow 0 \Rightarrow Y_1(U) \rightarrow \frac{1}{2} n \cdot k_0 \cdot k_\psi \cdot k_n \cdot \exp(-k_\psi) \cdot A_n(U) \quad (4.2.30)$$

или краће (користећи израз (4.2.14) за резидуалну вредност параметра ојачања):

$$Y_1(U) \xrightarrow{\psi \rightarrow 0} \frac{1}{2} n \cdot k_\psi \cdot k_n \cdot \alpha_{rez}(U) \quad (4.2.31)$$

Такође, поставићемо услов да у резидуалном стању, пошто нема даље промене услова течења, важе следеће релације:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_d} = 0 \Rightarrow \alpha_{rez} = \frac{2 \cdot \gamma}{n \cdot (\sigma_d)_{rez}^{n-2}} \quad (4.2.32)$$

Коначно, на основу релација (4.2.28), (4.2.29), (4.2.31) и (4.2.32), може се константа  $k_{1\psi}$  изразити у зависности од  $k_\psi$  и  $\gamma$ , а према следећој једначини:

$$k_{1\psi} = \frac{1}{k_\psi} \sqrt{\frac{(1 - \exp(-k_\psi))}{\gamma}} \quad (4.2.33)$$

док константа  $k_\psi$  зависи само од  $n$ , на следећи начин:

$$k_\psi = \ln\left(\frac{n}{2}\right) \quad (4.2.34)$$

У циљу дефинисања значења појединих параметара конститутивног модела, извршићемо следећу анализу. Поставићемо услов да  $\sigma_d \rightarrow 0$ . Лако се може показати да у том случају, на основу једначина (4.2.1) и (4.2.23), важи следећа релација:

$$\sigma_d = 0 \Rightarrow \frac{d\tau_d}{d\sigma_d} = \sqrt{\gamma} = -Y_2 \quad (4.2.35)$$

Такође, на основу услова  $\sigma_d \rightarrow 0$  и једначине (4.2.22), следи:

$$\sigma_d = 0 \Rightarrow Y_1 = \sqrt{\gamma} \quad (4.2.36)$$

Развијајући једначину (4.2.35), коришћењем (4.2.25), добија се да параметар  $\gamma$  директно зависи од дилатанце неоптерећеног дисконтинуитета, а према следећем:

$$\sqrt{\gamma} = -\frac{1 + T_0^2}{T_0} \quad (4.2.37)$$

где је  $T_0$  – почетна вредност дилатанце (према једначини 4.2.3), за случај смицања без нормалног напона ( $\sigma_d \rightarrow 0$ ).

Користећи једначине (4.2.35) и (4.2.36), може се извести још једна релација између параметара конститутивног модела. Наиме, развијајући ове једначине примењујући релације (4.2.24) и (4.2.25), као и услов ојачања (4.2.2) и (4.2.14), долази се до релативно сложене везе:

$$k_0 = \frac{-2}{\exp(1) \cdot \left[ n \cdot \left[ \exp(-\exp(0.5 \cdot \sqrt{\gamma} \cdot k_{1\psi} - 0.5 \cdot \sqrt{\gamma - 4} \cdot k_{1\psi}) \cdot k_{\psi}) - \exp(-k_{\psi}) \right] \right]} \quad (4.2.38)$$

Треба напоменути да је у извођењу коришћена апроксимација (4.2.10).

Дакле, усвајајући везе између параметара (4.2.33), (4.2.34) и (4.2.38), конститутивни модел пукотине се своди на само 4 независне материјалне константе:  $n$ ,  $\gamma$ ,  $k_n$  и  $u^*$ .

#### Еласто-пластично деформисање дисконтинуитета

У неким случајевима, када се то експериментално покаже, није оправдано занемарити еластичне деформације, па се у том случају лако може процес деформисања изразити кроз комплетан еласто-пластичан приступ, уважавајући основно начело да важи адитивна декомпозиција:

$$d\bar{\bar{\epsilon}}_{d(i)} = d\bar{\bar{\epsilon}}_{d(i)}^e + d\bar{\bar{\epsilon}}_{d(i)}^p \quad (4.2.39)$$

Еластично понашање пукотине изражава се једначином (3.8.1), односно у матричном облику према следећој једначини:

$$d\bar{\bar{\sigma}}_{d(i)} = \bar{\bar{C}}_{d(i)}^e \cdot d\bar{\bar{\epsilon}}_{d(i)}^e \quad (4.2.40)$$

где је  $\bar{\bar{C}}_{d(i)}^e$  еластична конститутивна матрица:

$$\bar{\bar{C}}_{d(i)}^e = \begin{bmatrix} {}_{d(i)}K_n & 0 \\ 0 & {}_{d(i)}K_s \end{bmatrix} \quad (4.2.41)$$

при чему су:  ${}_{d(i)}K_n$  – нормална крутост и  ${}_{d(i)}K_s$  – смичућа крутост.

Дакле, уколико су познате деформације, одговарајући прираштај напона може се одредити на основу следеће релације:

$$d\bar{\bar{\sigma}}_{d(i)} = \bar{\bar{C}}_{d(i)}^e \cdot d\bar{\bar{\epsilon}}_{d(i)}^e = \bar{\bar{C}}_{d(i)}^e \cdot (d\bar{\bar{\epsilon}}_{d(i)} - d\bar{\bar{\epsilon}}_{d(i)}^p) \quad (4.2.42)$$

\* \* \*

Развијен је интегрални приступ за симулацију целокупног процеса деформисања дисконтинуитета, узимајући у обзир битне факторе као што су: ојачање и омекшање током пластичног деформисања, неасоцијативност и дилатанца.

Једна од значајних одлика напред предложеног приступа у дефинисању конститутивног модела за дисконтинуитет је то што је модел изведен из генераног концепта пластичности солида као специјални случај. То уводи као могућност да се одговор дисконтинуитета и околне стенске масе опишу у оквиру јединственог методолошког концепта моделирања.

## 4.2 Теоријске поставке конститутивног модела за стенску масу

### Концепт вишекомпонентног еласто-пластичног материјала

Испуцала стенска масе се третира као сложени материјал, који се у макроструктури понаша као јединствен ентитет, односно као јединствен материјал као носилац оптерећења. Основни циљ је функционално повезати произвољан број еласто-пластичних материјала у систем, односно у сложени материјал, који се и сам понаша као еласто-пластичан, а на начин да се моделом у великој мери уважи стварни просторни положај дисконтинуитета и њихова својства и, последично, да се на непосредан начин уведе анизотропија услед испуцалости.

Прво ћемо размотрити основне принципе моделирања сложеног еласто-пластичног материјала чији је задатак да репрезентује стенску масу издељену фамилијама дисконтинуитета.

Модел напонско-деформационог понашања испуцале стенске масе, који се даље разматра, заснива се на претпоставкама да се под истим напонам деформишу и стенски монолит и дисконтинуитети, те да је укупна деформација једнака збиру деформација стенског монолита и дисконтинуитета. Дакле, уводе се следеће претпоставке:

- укупно оптерећење носе све материјалне компоненте (стенски монолит и дисконтинуитети), односно одговарајући напон је хомоген и једнак у свим материјалним компонентама

$$\sigma_{sm} = \sigma_{mon} = \sigma_{d(i)} \quad (4.3.1)$$

- укупна деформација система материјала има адитивни карактер тј. укупна деформација је једнака збиру деформација материјала компоненти

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{mon} + \sum_{i=1}^{N_d} (f_{d(i)} \cdot \varepsilon_{d(i)}) \quad (4.3.2)$$

Између еластичних, пластичних и укупних деформација елемената стенске структуре важе следеће везе:

$$\varepsilon_{mon} = \varepsilon_{mon}^e + \varepsilon_{mon}^p \quad (4.3.3)$$

$$\varepsilon_{d(i)} = \varepsilon_{d(i)}^e + \varepsilon_{d(i)}^p \quad (4.3.4)$$

Адитивна декомпозиција деформација дата претходним изразом важи и за укупне деформације стенске масе као сложеног материјала. Када уврстимо израз (4.3.3) и (4.3.4) у израз (4.3.2) добија се:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sm}^e + \varepsilon_{sm}^p \quad (4.3.5)$$

где су укупне еластичне деформације  $\varepsilon_{sm}^e$  и укупне пластичне деформације  $\varepsilon_{sm}^p$  изражавају према следећем:

$$\varepsilon_{sm}^e = \varepsilon_{mon}^e + \sum_{i=1}^{N_d} (f_{d(i)} \cdot \varepsilon_{d(i)}^e) \quad (4.3.6)$$

$$\varepsilon_{sm}^p = \varepsilon_{mon}^p + \sum_{i=1}^{N_d} (f_{d(i)} \cdot \varepsilon_{d(i)}^p) \quad (4.3.7)$$

Еластична конститутивна матрица

Користећи уведену претпоставку о хомогености напона (4.3.1) и уважавајући једначине трансформација напона и деформација између координатних система (4.1.3), (4.1.4), (4.1.7) и (4.1.8), из познатих еластичних деформација, било стенског монолита, било неког од пукотинских система, може се одредити напон у стенској маси према следећем изразу:

$$\sigma_{sm} = C_{mon}^e \cdot \varepsilon_{mon}^e = (\bar{T}_{d(i)}^e)^T \cdot (\bar{T}_{d(i)}^e)^T \cdot \bar{C}_{d(i)}^e \cdot \bar{T}_{d(i)}^e \cdot \bar{T}_{d(i)}^e \cdot \varepsilon_{d(i)}^e \quad (4.3.8)$$

где су:

$C_{mon}^e$  - еластична конститутивна матрица монолита, која за изотропно понашање има облик (3.2.8), а за ортотропно (3.2.12)

$\bar{C}_{d(i)}^e$  - еластична конститутивна матрице  $i$ -те фамилије дисконтинуитета ( $i=1, N_d$ ), дата изразом (4.2.37)

Једначина (4.3.8) се може написати и на следећи начин:

$$\sigma_{sm} = C_{mon}^e \cdot \varepsilon_{mon}^e = C_{d(i)}^e \cdot \varepsilon_{d(i)}^e \quad (4.3.9)$$

где је:

$$C_{d(i)}^e = (\bar{T}_{d(i)}^e)^T \cdot (\bar{T}_{d(i)}^e)^T \cdot \bar{C}_{d(i)}^e \cdot \bar{T}_{d(i)}^e \cdot \bar{T}_{d(i)}^e \quad (4.3.10)$$

Једначина (4.3.9) може се и инверзно исказати, односно могу се изразити деформације елемената стенске структуре преко напона и инверзних еластичних конститутивних матрица:

$$\varepsilon_{d(i)}^e = \left( (\bar{T}_{d(i)}^e)^T \cdot (\bar{T}_{d(i)}^e)^T \cdot \bar{C}_{d(i)}^e \cdot \bar{T}_{d(i)}^e \cdot \bar{T}_{d(i)}^e \right)^{-1} \cdot \sigma_{sm} \quad (4.3.11)$$

$$\varepsilon_{mon}^e = \left( C_{mon}^e \right)^{-1} \cdot \sigma_{sm} \quad (4.3.12)$$

Сада се еластична деформација стенске масе може добити када се на основу израза (4.3.11) и (4.3.12) формира сума из израза (4.3.6):

$$\varepsilon_{sm}^e = \left( \left( C_{mon}^e \right)^{-1} + \sum_{i=1}^{N_d} \left( (\bar{T}_{d(i)}^e)^T \cdot (\bar{T}_{d(i)}^e)^T \cdot \bar{C}_{d(i)}^e \cdot \bar{T}_{d(i)}^e \cdot \bar{T}_{d(i)}^e \right)^{-1} \right) \cdot \sigma_{sm} \quad (4.3.13)$$

Израз (4.3.13) представља еластичну конститутивну везу коју можемо дати и према следећем изразу:

$$\sigma_{sm} = C_{sm}^e \cdot \varepsilon_{sm}^e \quad (4.3.14)$$

где је  $C_{sm}^e$  - еластична конститутивна матрица стенске масе:

$$C_{sm}^e = \left( \left( C_{mon}^e \right)^{-1} + \sum_{i=1}^{N_d} \left( (\bar{T}_{d(i)}^e)^T \cdot (\bar{T}_{d(i)}^e)^T \cdot \bar{C}_{d(i)}^e \cdot \bar{T}_{d(i)}^e \cdot \bar{T}_{d(i)}^e \right)^{-1} \right) \quad (4.3.15)$$

\* \* \*

Раније је истакнуто да је за испуцале стенске масе често оправдано занемарити еластично деформисање дисконтинуитета.

$$\varepsilon_{d(i)}^e = 0 \quad (4.3.16)$$

Такође, у односу на пластичне деформације дисконтинуитета, често је оправдано занемарити и пластичне деформације монолита.

$$\varepsilon_{mon}^p = 0 \quad (4.3.17)$$

Према томе, укупне еластичне и пластичне деформације стенске масе су:

$$\varepsilon_{sm}^e = \varepsilon_{mon}^e \quad (4.3.18)$$

$$\varepsilon_{sm}^p = \sum_{i=1}^{N_d} \left( f_{d(i)} \cdot \varepsilon_{d(i)}^p \right) \quad (4.3.19)$$

Лако се показује да се, у случају уведених апроксимација, еластична конститутивна матрица стенске масе своди на еластична конститутивну матрицу монолита:

$$\mathbf{C}_{sm}^e = \mathbf{C}_{mon}^e \quad (4.3.20)$$

### Пластично деформисање

Размотрићемо и пластично понашање стенске масе као деформисање сложеног материјала, узимајући у обзир пластично деформисање компоненти, односно елемената стенске структуре. Не улазећи у природу пластичног деформисања појединачних компоненти, за сваку од њих се може дефинисати услов течења. Да би се говорило о пластичном деформисању сложеног материјала потребан и довољан услов је да се макар једна компонента у систему деформише пластично. Дакле, може се извести закључак да се услов течења система материјала своди на једноставну контролу појаве течења за све компоненте система.

Означимо са  $F_{d(i)}$  функцију течења  $i$ -те фамилије дисконтинуитета, а са  $F_{mon}$  функцију течења стенског монолита. Може се констатовати да ће се стенска маса као сложени материјал пластично деформисати ако буде испуњен било који од следећих услова:

$$F_{d(i)} > 0 \quad ; \quad i = 1, N_d \quad (4.3.21)$$

$$F_{mon} > 0 \quad (4.3.22)$$

Ако се на овај начин утврди да долази до течења, следећи корак је одређивање величине пластичних деформација. Из израза (4.3.7) следи да се сумирањем претходно одређених пластичних деформација компоненти добија пластична деформација система.

Пластично деформисање стенског монолита одређено је условом течења (3.4.16), условом ојачања (3.5.10) и пластичним потенцијалом (3.6.3). Пластично понашање сваке фамилије дисконтинуитета одређено је условом течења (4.2.1), условом ојачања (4.2.2) и пластичним потенцијалом (4.2.18), односно законом течења (4.2.21).

Прираштаји пластичних деформација су чланови вектора који лежи на правцу нормале на потенцијал, односно, пластичне деформације дисконтинуитета  $\varepsilon_{d(i)}^p$  и монолита  $\varepsilon_{mon}^p$  су вектори у правцу градијента потенцијала дисконтинуитета  $Q_{d(i)}$  и градијента потенцијала монолита  $Q_{mon}$ , према следећим изразима:

$$\bar{\mathbf{n}}_{d(i)} = \frac{\partial Q_{d(i)}}{\partial \bar{\sigma}_{d(i)}} \bigg/ \left| \frac{\partial Q_{d(i)}}{\partial \bar{\sigma}_{d(i)}} \right| \quad ; \quad i = 1, N_d \quad (4.3.23)$$

$$\mathbf{n}_{mon} = \frac{\partial Q_{mon}}{\partial \sigma_{mon}} \bigg/ \left| \frac{\partial Q_{mon}}{\partial \sigma_{mon}} \right| \quad (4.3.24)$$

Дакле, прираштај пластичних деформација материјала компоненти је:

$$\Delta \varepsilon_{mon}^p = \Delta \varepsilon_{mon}^p \cdot \mathbf{n}_{mon} \quad (4.3.25)$$

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{d(i)}^p = \Delta \varepsilon_{d(i)}^p \cdot \bar{\mathbf{n}}_{d(i)} \quad (4.3.26)$$

где су:

$\Delta \varepsilon_{d(i)}^p$  - интезитет прираштаја пластичне деформације  $i$ -те фамилије дисконтинуитета, односно интезитет вектора  $\Delta \varepsilon_{d(i)}^p$

$\Delta \varepsilon_{mon}^p$  – интезитет прираштаја пластичне деформације монолита, односно интезитет вектора  $\Delta \varepsilon_{mon}^p$

Градијенти пластичног потенцијала су према наведеним изразима формулисани у локалном-релативном координатном систему. Да би била могућа суперпозиција деформација неопходно је извршити трансформације у општи координатни систем, према једначинама (4.1.3), (4.1.4), (4.1.7) и (4.1.8).

Иако смо увођењем појма прираштаја пластичних деформација имплицитно назначили да се ради о инкременталној анализи, о чему ће бити речи у поглављу 5, нагласићемо основне ознаке које ће се надаље користити у изразима као леви горњи индекс, а то су  $t$ ,  $\Delta t$  и  $t + \Delta t$ . Ове три ознаке представљају редом временски тренутак  $t$  за који су одређене све величине претходном анализом, временски корак  $\Delta t$  и тренутак  $t + \Delta t$  у коме се тренутно одређују и израчунавају тражене величине. Тако се текуће, тражене вредности пластичних деформација могу дати инкременталним изразима:

$${}^{t+\Delta t}\epsilon_{\text{mon}}^p = {}^t\epsilon_{\text{mon}}^p + \Delta\epsilon_{\text{mon}}^p \quad (4.3.27)$$

$${}^{t+\Delta t}\epsilon_{d(i)}^p = {}^t\epsilon_{d(i)}^p + \Delta\epsilon_{d(i)}^p \quad (4.3.28)$$

Израчунавање напона у инкременталној формулацији, на основу (4.3.9), врши се применом следећег израза:

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{sm}} = {}^{t+\Delta t}C_{\text{mon}}^e \cdot {}^{t+\Delta t}\epsilon_{\text{mon}}^e = {}^{t+\Delta t}C_{d(i)}^e \cdot {}^{t+\Delta t}\epsilon_{d(i)}^e \quad (4.3.29)$$

односно на основу (4.3.3) и (4.3.4):

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{sm}} = {}^{t+\Delta t}C_{\text{mon}}^e \cdot \left( {}^{t+\Delta t}\epsilon_{\text{mon}}^e - {}^{t+\Delta t}\epsilon_{\text{mon}}^p \right) \quad (4.3.30)$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{sm}} = {}^{t+\Delta t}C_{d(i)}^e \cdot \left( {}^{t+\Delta t}\epsilon_{d(i)}^e - {}^{t+\Delta t}\epsilon_{d(i)}^p \right) \quad (4.3.31)$$

Користећи инкременталне везе (4.3.27) и (4.3.28) следи:

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{sm}} = {}^{t+\Delta t}C_{\text{mon}}^e \cdot \left( {}^{t+\Delta t}\epsilon_{\text{mon}}^e - {}^t\epsilon_{\text{mon}}^p - \Delta\epsilon_{\text{mon}}^p \right) \quad (4.3.32)$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{sm}} = {}^{t+\Delta t}C_{d(i)}^e \cdot \left( {}^{t+\Delta t}\epsilon_{d(i)}^e - {}^t\epsilon_{d(i)}^p - \Delta\epsilon_{d(i)}^p \right) \quad (4.3.33)$$

Када се инкременталне везе (4.3.27) и (4.3.28) примене на стенску масу као сложени материјал, имаћемо:

$${}^{t+\Delta t}\epsilon_{\text{sm}}^p = {}^t\epsilon_{\text{sm}}^p + \Delta\epsilon_{\text{sm}}^p \quad (4.3.34)$$

где су:

$${}^{t+\Delta t}\epsilon_{\text{sm}}^p = {}^{t+\Delta t}\epsilon_{\text{mon}}^p + \sum_{i=1}^{N_d} \left( f_{d(i)} \cdot {}^{t+\Delta t}\epsilon_{d(i)}^p \right) \quad (4.3.35)$$

$${}^t\epsilon_{\text{sm}}^p = {}^t\epsilon_{\text{mon}}^p + \sum_{i=1}^{N_d} \left( f_{d(i)} \cdot {}^t\epsilon_{d(i)}^p \right) \quad (4.3.36)$$

$$\Delta\epsilon_{\text{sm}}^p = \Delta\epsilon_{\text{mon}}^p + \sum_{i=1}^{N_d} \left( f_{d(i)} \cdot \Delta\epsilon_{d(i)}^p \right) \quad (4.3.37)$$

Коначно, на основу изложеног, следи једначина за одређивање напона у стенској маси као систему материјала:

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{sm}} = {}^{t+\Delta t}C_{\text{sm}}^e \cdot \left( {}^{t+\Delta t}\epsilon_{\text{sm}}^e - {}^t\epsilon_{\text{sm}}^p - \Delta\epsilon_{\text{sm}}^p \right) \quad (4.3.38)$$

## 5. НУМЕРИЧКА ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА ПРЕДЛОЖЕНОГ КОНСТИТУТИВНОГ МОДЕЛА

### 5.1 Инкрементално-итеративни поступак у методи коначних елемената

Нумеричку имплементацију предложеног конститутивног модела посматраћемо у оквиру концепта нелинеарне анализе методом коначних елемената (МКЕ). Наиме, најчешћи приступ нумеричком решавању проблема напонско-деформацијске анализе јесте путем дискретизације поља на подобласти, а данас најопштије примењени метод овог типа је метод коначних елемената [66, 82]. Целокупно излагање у овом поглављу биће усмерено ка примени у МКЕ, мада предложени поступци нумеричке имплементације конститутивних релација могу бити коришћени и у другачијим приступима нелинеарне анализе.

Савремено решавање нелинеарних проблема углавном подразумева инкрементални нумерички поступак. На основу почетног стања тражи се ново равнотежно стање, путем линеаризације основних релација око последњег познатог стања и формирањем одговарајуће итеративне шеме.

Нека је позната равнотежна конфигурација анализираних структуре  ${}^t\mathbf{B}$ , у којој имамо равнотежу спољашњих и унутрашњих генералисаних сила у чворовима  ${}^t\mathbf{F}^s$  и  ${}^t\mathbf{F}^u$  тј.

$${}^t\mathbf{F}^u = {}^t\mathbf{F}^s \quad (5.1.1)$$

Нова равнотежна конфигурација  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{B}$  која одговара спољашњим силама  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s$  дефинише се једначином:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^u = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s \quad (5.1.2)$$

У општем случају унутрашње силе  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s$  су нелинеарне функције померања  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ . Линеаризацијом једначину (1.2) можемо написати у облику

$${}^t\mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^t\mathbf{F}^u \quad (5.1.3)$$

где су:  ${}^t\mathbf{K}$  – матрица крутости дата једначином (5.1.4) и  $\Delta\mathbf{U}$  – вектор прираштаја чворних померања.

$${}^t\mathbf{K} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}^u}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{F}^s}{\partial \mathbf{U}} \right|_t \quad (5.1.4)$$

Итеративна равнотежна једначина која директно следи из (5.1.3) има облик

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \cdot \Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i-1)} \quad (5.1.5)$$

при чему  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}$  и  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i-1)}$  одговарају последњој познатој конфигурацији  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{B}^{(i-1)}$ , а  $\Delta\mathbf{U}^{(i)}$  је вектор прираштаја померања у  $i$ -тој итерацији. Укупни вектор померања који одговара  $i$ -тој итерацији је

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^t\mathbf{U}^{(1)} + \Delta\mathbf{U}^{(2)} + \dots + \Delta\mathbf{U}^{(i)} \quad (5.1.6)$$

Једначина (5.1.5) се решава итеративно све док прираштај померања  $\Delta\mathbf{U}^{(i)}$  не буде довољно мали, односно, док не буде испуњен неки од услова (5.1.7) или (5.1.8), у којима су задате толеранције: за померања –  $\varepsilon_u$ , односно за неуравнотежену енергију –  $\varepsilon_E$ .

$$\|\Delta \mathbf{U}^{(i)}\| \leq \varepsilon_u \quad (5.1.7)$$

$$\left( {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{u(i)} \right) \cdot \Delta \mathbf{U}^{(i)} \leq \varepsilon_E \quad (5.1.8)$$

Вектор унутрашних сила следи из принципа виртуалног рада и може се написати у следећем облику:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{u(i)} = \sum_e \int_V {}^{t+\Delta t} \mathbf{B}^{(i-1)T} \cdot {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} \cdot dV \quad (5.1.9)$$

где сабирање обухвата све коначне елементе запремина  $V$ , а матрица  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{B}^{(i-1)}$  представља трансформациону матрицу између деформација  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}$  у материјалној тачки и чворних померања елемената, сагласно релацији

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{B}^{(i-1)} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} \quad (5.1.10)$$

Узимајући у обзир да се померање у тачки  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}$  изражава преко интерполације чворних померања:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} = \mathbf{H}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{U}^{(i-1)} \quad (5.1.11)$$

где је  $\mathbf{H}$  интерполациона матрица, следи да  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{B}^{(i-1)}$  садржи одговарајуће изводе интерполационих функција  $h_k$  по координатама  ${}^{t+\Delta t} x_s^{(i-1)}$ ,

$$B_{ks}^{(i-1)} = \frac{\partial h_k}{\partial {}^{t+\Delta t} x_s^{(i-1)}} \quad (5.1.12)$$

Матрица  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{B}^{(i-1)}$  зависи од промене геометрије тела, и у случају малих померања она је константна. Напон  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$  може да се изрази као збир напона са почетка корака  $\Delta t$  и прираштаја напона  $\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$  у кораку  $\Delta t$ , према следећем:

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} \quad (5.1.13)$$

У току даљег излагања сматраћемо да су  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}$  деформације на крају корака познате, тако да се проблем који своди на одређивање прираштаја напона  $\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$  у кораку  $\Delta t$ , односно на интеграцију конститутивне релације (што се зове и интеграција напона):

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot ({}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} - {}^t \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (5.1.14)$$

где је:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.1.15)$$

конститутивна матрица, односно конститутивни тензор.

У општем случају матрица  $\mathbf{C}$  је нелинеарна функција напона, односно деформација, тако да је интеграција сложен задатак. У следећем поглављу је презентирани нумерички алгоритам за интеграцију напона за деформацијски вођене проблеме, који се јављају у формулацији методе коначних елемената заснованој на померањима. Размотриће се пластично деформисање материјала; задатак је да срачунати напоне и пластичне деформацијена крају временског корака, односно инкремента оптерећења, када је познато стање напона и деформација на почетку временског корака и за задат инкремент деформације. Овим прорачуном, који се зове и интеграција напона, ми можемо да трасирамо историју деформисања материјала у материјалној тачки, и у целој структури, услед задатих услова оптерећења.

Анализирајмо сада матрицу крутости  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)}$  у једначини (5.1.5). Тачност решења не зависи од матрице крутости, међутим брзина конвергенције решења у итеративном процесу директно је зависна од начина рачунања матрице  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)}$ . Може се констатовати да се квадратна брзина конвергенције решења постиже ако је матрица крутости тангентна, односно уколико је одређена на основу величина на крају корака интеграције. Матрица  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)}$  је иначе одређена изразом

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} = \int_V {}^{t+\Delta t} \mathbf{B}^{(i-1)T} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{C}^{(i-1)} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{B}^{(i-1)} \cdot dV^e \quad (5.1.16)$$

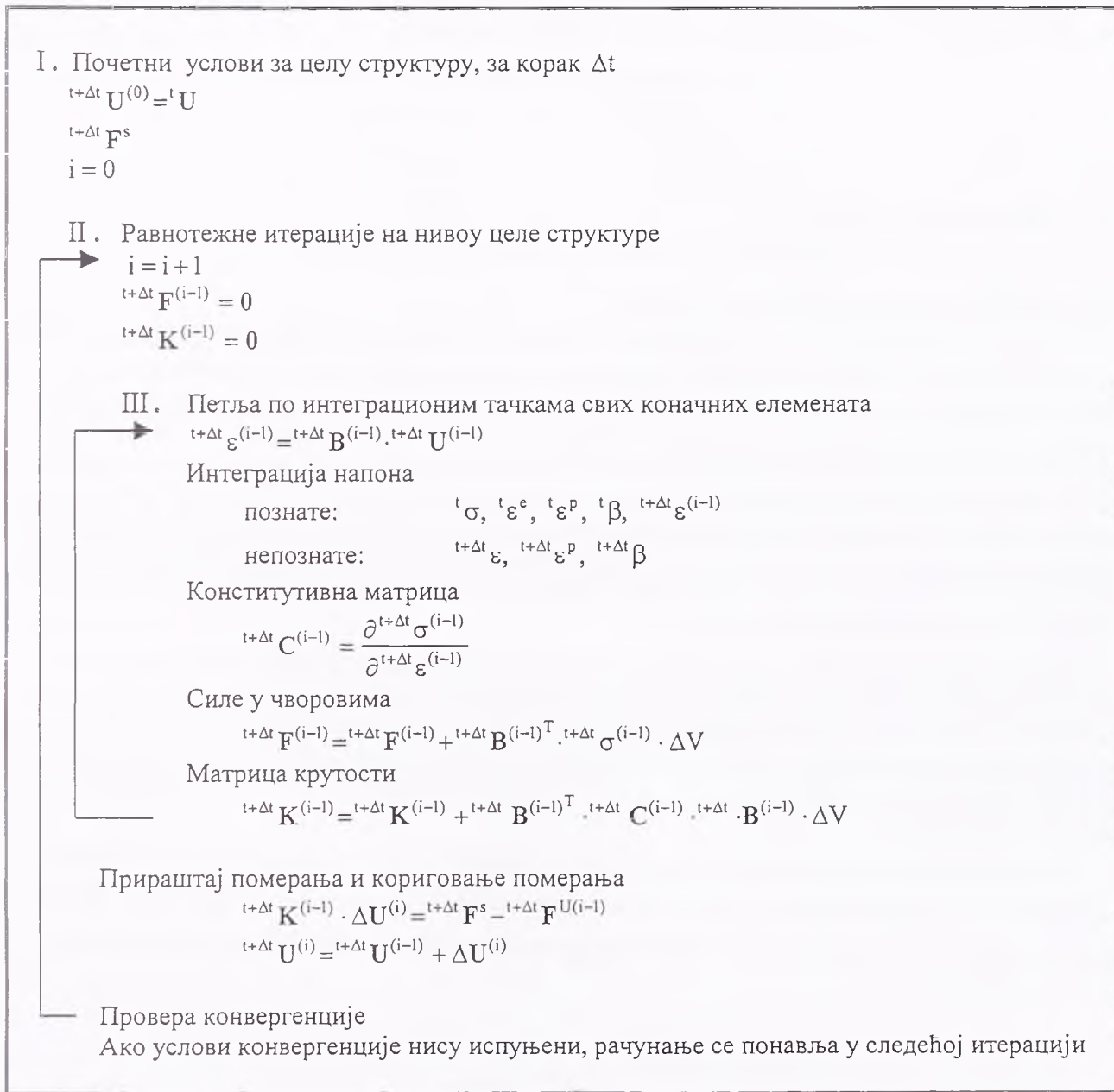


Матрица  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{B}^{(i-1)}$  је дефинисана преко геометрије кретања у складу са (5.1.11) и (5.1.12). Нас овде посебно интересује значај рачунања конститутивне матрице, а из (5.1.16) видимо да је за одређивање тангентне матрице крутости неопходно наћи тангентну конститутивну матрицу

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{C}^{(i-1)} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}}{\partial {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}} \quad (5.1.17)$$

која одговара напонима и деформацијама на крају корак интеграције. У следећем поглављу посебна пажња биће посвећена одговарајућем извођењу основних једначина интеграције напона, које обезбеђује тангентну конститутивну матрицу (5.1.17).

Табела 5.1 Инкременталне равнотежне итерације у методи коначних елемената



У табели 5.1 сумиран је инкрементално-итеративни поступак решавања нелинеарних проблема применом методе коначних елемената, одакле се види улога интеграције напона и рачунања конститутивне матрице.

Из табеле 5.1 се види да интеграција напона и прорачун тангентне конститутивне релације представљају кључне кораке у нееластичној инкременталној анализи. Због ових чињеница истичемо најзначајније карактеристике нумеричког алгоритма за интеграцију напона.

Општи нумерички алгоритам треба да буде: робустан, тачан и ефикасан. Алгоритам је робустан ако даје решења за било која оптерећења и граничне услове, и за произвољне (велике)

инкременте деформације (или оптерећења). Веома је значајно за инжењерске анализе да алгоритам нема ограничења у опсегу примене, и да не садржи нумеричку нестабилност. Наш примарни циљ је задовољење ових захтева. Решење нелинеарног напонско-деформацијског проблема је инкременталног типа, са инкрементом оптерећења (или деформације) у временском кораку  $\Delta t$ . Генерално, ми чинимо грешку у прорачуну напона, као последицу апроксимације коришћене за временски корак  $\Delta t$ . Алгоритам треба да пружи разумну тачност за велики временски корак и да обезбеди брзо смањење грешке са опадањем временског корака. Ефикасност је важна карактеристика нумеричког алгоритма. Нумеричка процедура интеграције напона треба да буде ефикасна, зато што се овај прорачун понавља за сваку материјалну тачку у анализираној структури. Данашњи захтеви у инжењерским анализама су такве да, на пример, у уобичајеним анализама коначним елементима, хиљаде елемената се користе и према томе потребни су милиони интеграционих места за прорачун напона.

## 5.2 Интеграција напона

### Метод водећег параметра – опште разматрање

Уколико намеравамо да користимо сложене материјалне моделе у напонско-деформацијским анализама и посебно, у примени методе коначних елемената, неопходно је да имамо нумеричку процедуру способну да спроведе тачан прорачун материјалног одговора, сагласно одабраном моделу и условима оптерећења. Огроман истраживачки напор је у прошлости био оријентисан на развој поуздане и тачне нумеричке процедуре за интеграцију напона. Постоје различити методи који срећу у литератури [10, 58, 59, 103]. За потребе овог рада коришћен је концепт имплицитне интеграције напона, који је развио Којић за широк спектар материјалних модела [50, 51]. Прорачунска процедура је названа метод водећег параметра, а то је зато што се интеграција напона своди на решавање једне нелинеарне једначине по такозваном водећем параметру.

Генерално, према општем концепту имплицитне интеграције напона применом методе водећег параметра, проблем одређивања напона на крају корака  $\Delta t$  своди се на решавање једне нелинеарне једначине, док се рачунања тангентне конститутивне матрице врше путем одговарајућег диференцирања основних релација у односу на деформације на крају корака. Прво ћемо размотрити општу поставку, а потом детаљно развити алгоритам за предложени конститутивни модел.

Интеграција напона може да се представи на следећи начин. Полазимо од претпоставке да су напони  ${}^t\sigma$ , деформације  ${}^t\varepsilon$ , пластичне деформације  ${}^t\varepsilon^p$  и унутрашњи параметри  ${}^t\beta$  на почетку корака, као и деформације  ${}^{t+\Delta t}\varepsilon$  на крају корака, познати у материјалној тачки. Дакле, познате величине су:

$${}^t\sigma, {}^t\varepsilon, {}^t\varepsilon^p, {}^t\beta, {}^{t+\Delta t}\varepsilon \quad (5.2.1)$$

Непознате величине на крају корака су:

$${}^{t+\Delta t}\sigma, {}^{t+\Delta t}\varepsilon^p, {}^{t+\Delta t}\beta \quad (5.2.2)$$

Овде изостављамо индекс који означава равнотежну итерацију (видети табелу 5.1) ради једноставности означавања, мада подразумевамо да је целокупно рачунање у току итеративног процеса описаног у претходном у поглављу. Пластичне деформације и унутрашње променљиве су нелинеарне функције напона, а интеграција напона у кораку се зове имплицитна зато што се прираштаји  $\Delta\varepsilon^p$  и  $\Delta\beta$  изражавају преко напона  ${}^{t+\Delta t}\sigma$  на крају корака.

Основни концепт методе водећег параметра састоји се у следећа три основна корака:

1. Изразити непознате величине на крају корака (5.2.2) преко једног параметра  $p$

2. Формирати функцију  $f(p)$  и решити по параметру  $p$  нелинеарну једначину:

$$f(p) = 0 \tag{5.2.3}$$

3. Израчунати непознате (5.2.2) на основу срачунате вредности  ${}^{t+\Delta t}p = p$  основног параметра.

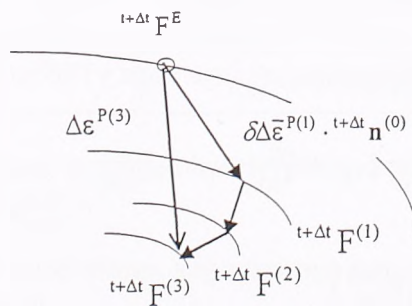
Ови кораци рачунања су приказани у табели 5.2

Табела 5.2: Основни кораци у имплицитној интеграцији напона

Познате величине:	${}^t\sigma, {}^t\varepsilon, {}^t\varepsilon^p, {}^t\beta, {}^{t+\Delta t}\varepsilon$
Непознате величине:	${}^{t+\Delta t}\sigma, {}^{t+\Delta t}\varepsilon^N, {}^{t+\Delta t}\beta$
Корак 1: Изразити све непознате помоћу основног параметра $p$ :	
	${}^{t+\Delta t}\sigma ({}^t\sigma, {}^t\varepsilon, {}^t\varepsilon^p, {}^t\beta, {}^{t+\Delta t}\varepsilon, p)$ ${}^{t+\Delta t}\varepsilon^p ({}^t\sigma, {}^t\varepsilon, {}^t\varepsilon^p, {}^t\beta, {}^{t+\Delta t}\varepsilon, p) \tag{a}$ ${}^{t+\Delta t}\beta ({}^t\sigma, {}^t\varepsilon, {}^t\varepsilon^p, {}^t\beta, {}^{t+\Delta t}\varepsilon, p)$
Корак 2: Формирати функцију $f(p)$ и и одредити решење ${}^{t+\Delta t}p$ водеће једначине:	
	$f(p) = 0 \tag{b}$
Корак 3: Заменили решење ${}^{t+\Delta t}p$ водеће једначине (b) у изразе (a), чиме се одређују непознате величине	

Може се рећи да је за многе материјале могуће дефинисати основни параметар  $p$  [51]. Најчешће се за основни параметар усваја ефективна пластична деформација  $\tilde{\varepsilon}^p$ , али је у појединим моделима погодније изабрати неку другу величину; на пример код "Cam-Clay" модела основни параметар је запреминска пластична деформација  $\varepsilon_v^p$  (односно прираштај у кораку  $\Delta\varepsilon_v^p$ ).

На слици 5.1 показане су површи течења и напонска стања на почетку и на крају корака. На слици је такође назначено да интеграција подразумева враћање на површ течења из тачке која одговара еластичном решењу. Имплицитна интеграција напона подразумева прираштај пластичне деформације  $\Delta\varepsilon^p$  у правцу нормале  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{n}$  на пластични потенцијал на крају корака.



Слика 5.1: Илустрација поступка интеграције напона

Интеграција напона за предложени конститутивни модел

Описана метода водећег параметра примењена је за интеграцију напона у нумеричкој имплементацији предложеног конститутивног модела. Разрађен је алгоритам који је адаптиран за методу коначних елемената и примењен у рачунарском програму ПАК [51].

У даљем тексту је, у форми одговарајућих табела, детаљно приказан алгоритам интеграције напона за предложени конститутивни модел.

Табела 5.3: Алгоритам интеграције напона конститутивног модела за испуцале стенске масе - основни алгоритам -

## 1. ПРОБНО ЕЛАСТИЧНО РЕШЕЊЕ

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{sm}^e = C_{sm}^e \cdot ({}^{t+\Delta t} \epsilon_{sm} - {}^t \epsilon_{sm}^p)$$

## 2. ПРОВЕРА ТЕЧЕЊА

Иницијализација: индикатор = "еластичност"

Монолит

$${}^{t+\Delta t} F_{mon}^e = {}^{t+\Delta t} F_{mon}^e ({}^{t+\Delta t} \sigma_{sm}^e)$$

Ако је  ${}^{t+\Delta t} F_{mon}^e > 0$ , индикатор = "пластичност"

Петља по фамилијама дисконтинуитета ( $k = 1, N_d$ )

$$(A) \text{ СЕГМЕНТ АЛГОРИТМА } \Rightarrow {}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^e$$

Ако је  ${}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^e > 0$ , индикатор = "пластичност"

Следеће ( $k$ )

Ако је индикатор = "еластичност"  $\Rightarrow$  КРАЈ.

## 3. ИТЕРАЦИЈЕ

Иницијализација:  $i = 0$ ,  $TOL = 10^{-8}$

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{sm}^{(0)} = {}^{t+\Delta t} \sigma_{sm}^e, \quad {}^{t+\Delta t} F_{mon}^{(0)} = {}^{t+\Delta t} F_{mon}^e, \quad \Delta \tilde{\epsilon}_{mon}^{p(0)} = 0, \quad \Delta \epsilon_{mon}^{p(0)} = 0$$

$${}^{t+\Delta t} \theta_{d(k)}^{(0)} = {}^{t+\Delta t} \theta_{d(k)}^e, \quad {}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{(0)} = {}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^e, \quad \Delta \tilde{\epsilon}_{d(k)}^{p(0)} = 0, \quad \Delta \bar{\bar{\epsilon}}_{d(k)}^{p(0)} = 0, \quad \forall (k)$$

$i = i + 1$

Монолит

$$(B) \text{ СЕГМЕНТ АЛГОРИТМА } \Rightarrow \Delta \epsilon_{mon}^{p(i)}$$

Петља по фамилијама дисконтинуитета ( $k = 1, N_d$ )

$$(B) \text{ СЕГМЕНТ АЛГОРИТМА } \Rightarrow \Delta \bar{\bar{\epsilon}}_{d(k)}^{p(i)}$$

Следеће ( $k$ )

Укупни прираст пластичне деформације стенске масе у глобалном координатном систему

$$\Delta \epsilon_{sm}^{p(i)} = \Delta \epsilon_{mon}^{p(i)} + \sum_{k=1}^{N_d} f_{d(k)} \cdot (\bar{T}_{d(k)}^e)^{-1} \cdot ({}^{t+\Delta t} \bar{T}_{d(k)}^{e(i-1)})^{-1} \cdot \Delta \bar{\bar{\epsilon}}_{d(k)}^{p(i)}$$

Напони у итерацији ( $i$ )

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{sm}^{(i)} = C_{sm}^e \cdot ({}^{t+\Delta t} \epsilon_{sm} - {}^t \epsilon_{sm}^p - \Delta \epsilon_{sm}^{p(i)})$$

Релативно одступање у итерацији ( $i$ )

$$ERR = \frac{\delta \Delta \tilde{\epsilon}_{mon}^{p(i)} + \sum_{k=1}^{N_d} \delta \Delta \tilde{\epsilon}_{d(k)}^{p(i)}}{\Delta \tilde{\epsilon}_{mon}^{p(i)} + \sum_{k=1}^{N_d} \Delta \tilde{\epsilon}_{d(k)}^{p(i)}}$$

Критеријум: ако је  $ERR > Tolerancija$  -- следећа итерација

Табела 5.4: Алгоритам интеграције напона конститутивног модела за испуцале стенске масе - (А) сегмент алгоритма -

ПРОВЕРА ТЕЧЕЊА ПО ФАМИЛИЈАМА ДИСКОНТИНУИТЕТА ( $k = 1, N_d$ )

$${}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^e = \bar{T}_{d(k)}^{\sigma} {}^{t+\Delta t} \sigma_{sm}^e$$

$$\tan {}^{t+\Delta t} \theta_{d(k)}^e = \frac{{}^{t+\Delta t} \bar{\tau}_{xz}^e}{{}^{t+\Delta t} \bar{\tau}_{yz}^e} \Rightarrow {}^{t+\Delta t} \bar{T}_{d(k)}^{\sigma}$$

$${}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^e = {}^{t+\Delta t} \bar{T}_{d(k)}^{\sigma} {}^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^e$$

$${}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^e = {}^{t+\Delta t} F_d^e ({}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^e)$$

Табела 5.5: Алгоритам интеграције напона конститутивног модела за испуцале стенске масе - (Б) сегмент алгоритма -

ПРORAЧУН ПРИРАШТАЈА ПЛАСТИЧНЕ ДЕФОРМАЦИЈЕ МОНОЛИТА

Напон у монолиту

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{mon}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \sigma_{sm}^{(i-1)}$$

Нумерички извод функције течења монолита по инкременту еквивалентне пластичне деформације

$$(B.1) \text{ СЕГМЕНТ } \Rightarrow \partial {}^{t+\Delta t} F_{mon}^{(i-1)} / \partial \Delta \tilde{\epsilon}_{mon}^p = \frac{{}^{t+\Delta t} F_{mon}^{(i-1)} [\Delta \tilde{\epsilon}_{mon}^{p(i-1)} + TOL] - {}^{t+\Delta t} F_{mon}^{(i-1)} [\Delta \tilde{\epsilon}_{mon}^{p(i-1)}]}{TOL}$$

Корекција еквивалентне инкременталне пластичне деформације монолита

$$\delta \Delta \tilde{\epsilon}_{mon}^{p(i)} = -(\partial {}^{t+\Delta t} F_{mon}^{(i-1)} / \partial \Delta \tilde{\epsilon}_{mon}^p) \cdot {}^{t+\Delta t} F_{mon}^{(i-1)}$$

$$\Delta \tilde{\epsilon}_{mon}^{p(i)} = \Delta \tilde{\epsilon}_{mon}^{p(i-1)} + \delta \Delta \tilde{\epsilon}_{mon}^{p(i)}$$

Нормала на површ течења монолита одређену у претходној итерацији

$$(B.2) \text{ СЕГМЕНТ } \Rightarrow {}^{t+\Delta t} \mathbf{n}_{mon}^{(i-1)} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t} Q_{mon}^{(i-1)} / \partial {}^{t+\Delta t} \sigma_{mon}^{(i-1)}}{\left\| \partial {}^{t+\Delta t} Q_{mon}^{(i-1)} / \partial {}^{t+\Delta t} \sigma_{mon}^{(i-1)} \right\|}$$

Корекција инкременталног вектора пластичних деформација

$$\delta \Delta \epsilon_{mon}^{p(i)} = \delta \Delta \tilde{\epsilon}_{mon}^{p(i)} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{n}_{mon}^{(i-1)}$$

Инкрементални вектор пластичних деформација монолита у итерацији ( $i$ )

$$\Delta \epsilon_{mon}^{p(i)} = \Delta \epsilon_{mon}^{p(i-1)} + \delta \Delta \epsilon_{mon}^{p(i)}$$

Табела 5.6: Алгоритам интеграције напона конститутивног модела за испуцале стенске масе - (B) сегмент алгоритма -

## ПРОРАЧУН ПРИРАШТАЈА ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦИЈА ДИСКОНТИНУИТЕТА

Напон у монолиту

$${}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{\text{мон}}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{\text{см}}^{(i-1)}$$

Матрица трансформације на локални систем фамилије дисконтинуитета ( k )

$${}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^{(i-1)} = \bar{T}_{d(k)}^{\sigma} {}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{см}}^{(i-1)}$$

$$\tan {}^{t+\Delta t} \theta_{d(k)}^{(i-1)} = \frac{{}^{t+\Delta t} \bar{\tau}_{zx}^{(i-1)}}{{}^{t+\Delta t} \bar{\tau}_{yz}^{(i-1)}} \Rightarrow {}^{t+\Delta t} \bar{T}_{d(k)}^{\sigma(i-1)}$$

Напон из претходне итерације у локалном координатном систему фамилије дисконтинуитета ( k )

$${}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \bar{T}_{d(k)}^{\sigma(i-1)} {}^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{(i-1)}$$

Нумерички извод функције течења фамилије дисконтинуитета ( k ) по инкременту еквивалентне пластичне деформације

$$(B.1) \text{ СЕГМЕНТ} \Rightarrow \partial^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{(i-1)} / \partial \Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^p = \frac{{}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{(i-1)} [\Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i-1)} + \text{TOL}] - {}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{(i-1)} [\Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i-1)}]}{\text{TOL}}$$

Корекција еквивалентне инкременталне пластичне деформације фамилије дисконтинуитета ( k )

$$\delta \Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i)} = -(\partial^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{(i-1)} / \partial \Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^p) {}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{(i-1)}$$

$$\Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i)} = \Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i-1)} + \delta \Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i)}$$

Нормала на површ течења фамилије прслина ( k ) одређене у претходној итерацији

$$(B.2) \text{ СЕГМЕНТ} \Rightarrow {}^{t+\Delta t} \bar{n}_{d(k)}^{(i-1)} = \frac{\partial^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)} / \partial {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^{(i-1)}}{\left\| \partial^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)} / \partial {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^{(i-1)} \right\|}$$

Корекција инкременталног вектора пластичних деформација фамилије дисконтинуитета ( k )

$$\delta \Delta \bar{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i)} = \delta \Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i)} {}^{t+\Delta t} \bar{n}_{d(k)}^{(i-1)}$$

Инкрементални вектор пластичних деформација фамилије прслина ( k ) у итерацији ( i )

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i)} = \Delta \bar{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i-1)} + \delta \Delta \bar{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i)}$$

Табела 5.7: Алгоритам интеграције напона конститутивног модела за испуцале стенске масе - (Б1) сегмент алгоритма -

НУМЕРИЧКИ ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ ТЕЧЕЊА МОНОЛИТА ПО ИНКРЕМЕНТУ ЕКВИВАЛЕНТНЕ ПЛАСТИЧНЕ ДЕФОРМАЦИЈЕ

$$\frac{\partial^{t+\Delta t} F_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\partial \Delta \tilde{\varepsilon}_{\text{mon}}^p} = \frac{\boxed{^{t+\Delta t} F_{\text{mon}}^{(i-1)} [\Delta \tilde{\varepsilon}_{\text{mon}}^{p(i-1)} + \text{TOL}]} - \boxed{^{t+\Delta t} F_{\text{mon}}^{(i-1)} [\Delta \tilde{\varepsilon}_{\text{mon}}^{p(i-1)}]}}{\text{TOL}}$$

$$^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} = ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{sm}}^{(i-1)}$$

$$\boxed{^{t+\Delta t} F_{\text{mon}}^{(i-1)} [\Delta \tilde{\varepsilon}_{\text{mon}}^{p(i-1)}]} = F_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \right]$$

$$\Delta \tilde{\varepsilon}_{\text{mon}}^{p\text{TOL}} = \Delta \tilde{\varepsilon}_{\text{mon}}^{p(i-1)} + \text{TOL} \Rightarrow \delta \Delta \varepsilon_{\text{mon}}^{p\text{TOL}} = \text{TOL} \cdot ^{t+\Delta t} n_{\text{mon}}^{(i-1)} \Rightarrow \Delta \varepsilon_{\text{mon}}^{p\text{TOL}} = \Delta \varepsilon_{\text{mon}}^{p(i-1)} + \delta \Delta \varepsilon_{\text{mon}}^{p\text{TOL}}$$

$$\Delta \varepsilon_{\text{sm}}^{p(i-1)} = \Delta \varepsilon_{\text{mon}}^{p(i-1)} + \sum_{k=1}^{N_d} f_{d(k)} \cdot (\bar{T}_{d(k)}^\varepsilon)^{-1} \cdot (\bar{T}_{d(k)}^\varepsilon)^{-1} \cdot \Delta \bar{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i-1)}$$

$$\Delta \varepsilon_{\text{sm}}^{p\text{TOL}} = \Delta \varepsilon_{\text{sm}}^{p(i-1)} + \delta \Delta \varepsilon_{\text{mon}}^{p\text{TOL}}$$

$$^{t+\Delta t} \sigma_{\text{sm}}^{\text{TOL}} = C_{\text{sm}}^e \cdot ( ^{t+\Delta t} \varepsilon_{\text{sm}} - {}^t \varepsilon_{\text{sm}}^p - \Delta \varepsilon_{\text{sm}}^{p\text{TOL}} ) = C_{\text{sm}}^e \cdot ( ^{t+\Delta t} \varepsilon_{\text{sm}} - {}^t \varepsilon_{\text{sm}}^p - \Delta \varepsilon_{\text{sm}}^{p(i-1)} - \delta \Delta \varepsilon_{\text{mon}}^{p\text{TOL}} )$$

$$^{t+\Delta t} \sigma_{\text{sm}}^{\text{TOL}} = ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{sm}}^{(i-1)} - \text{TOL} \cdot (C_{\text{sm}}^e \cdot ^{t+\Delta t} n_{\text{mon}}^{(i-1)})$$

$$^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{\text{TOL}} = ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{sm}}^{\text{TOL}}$$

$$\boxed{^{t+\Delta t} F_{\text{mon}}^{(i-1)} [\Delta \tilde{\varepsilon}_{\text{mon}}^{p(i-1)} + \text{TOL}]} = F_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{\text{TOL}} \right]$$

Табела 5.8: Алгоритам интеграције напона конститутивног модела за испуцале стенске масе - (Б2) сегмент алгоритма -

ПРОРАЧУН НОРМАЛЕ НА ПЛАСТИЧНИ ПОТЕНЦИЈАЛ МОНОЛИТА

$$^{t+\Delta t} n_{\text{mon}}^{(i-1)} = \frac{\partial^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)} / \partial ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\left\| \partial^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)} / \partial ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \right\|}$$

$$\frac{\partial^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\partial ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\partial ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \text{mon-xx}} \\ \frac{\partial^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\partial ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \text{mon-yy}} \\ \frac{\partial^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\partial ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \text{mon-zz}} \\ \frac{\partial^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\partial ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \text{mon-xy}} \\ \frac{\partial^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\partial ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \text{mon-yz}} \\ \frac{\partial^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\partial ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \text{mon-zx}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\Delta^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \text{mon-xx}} \\ \frac{\Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\Delta^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \text{mon-yy}} \\ \frac{\Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\Delta^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \text{mon-zz}} \\ \frac{\Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\Delta^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \text{mon-xy}} \\ \frac{\Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\Delta^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \text{mon-yz}} \\ \frac{\Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\Delta^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \text{mon-zx}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\text{xx}} / \text{TOL} \\ \frac{\Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\text{yy}} / \text{TOL} \\ \frac{\Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\text{zz}} / \text{TOL} \\ \frac{\Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\text{xy}} / \text{TOL} \\ \frac{\Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\text{yz}} / \text{TOL} \\ \frac{\Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)}}{\text{zx}} / \text{TOL} \end{bmatrix}$$

$$^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)} = Q_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \right]$$

$$\left[ \Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)} \right]_{\text{xx}} = Q_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} + \text{XX}_{\text{TOL}} \right] - Q_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \right] \quad \text{XX}_{\text{TOL}} = [\text{TOL} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\left[ \Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)} \right]_{\text{yy}} = Q_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} + \text{YY}_{\text{TOL}} \right] - Q_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \right] \quad \text{YY}_{\text{TOL}} = [0 \ \text{TOL} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\left[ \Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)} \right]_{\text{zz}} = Q_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} + \text{ZZ}_{\text{TOL}} \right] - Q_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \right] \quad \text{ZZ}_{\text{TOL}} = [0 \ 0 \ \text{TOL} \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\left[ \Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)} \right]_{\text{xy}} = Q_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} + \text{XY}_{\text{TOL}} \right] - Q_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \right] \quad \text{XY}_{\text{TOL}} = [0 \ 0 \ 0 \ \text{TOL} \ 0 \ 0]^T$$

$$\left[ \Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)} \right]_{\text{yz}} = Q_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} + \text{YZ}_{\text{TOL}} \right] - Q_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \right] \quad \text{YZ}_{\text{TOL}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \text{TOL} \ 0]^T$$

$$\left[ \Delta^{t+\Delta t} Q_{\text{mon}}^{(i-1)} \right]_{\text{zx}} = Q_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} + \text{ZX}_{\text{TOL}} \right] - Q_{\text{mon}} \left[ ^{t+\Delta t} \sigma_{\text{mon}}^{(i-1)} \right] \quad \text{ZX}_{\text{TOL}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \text{TOL}]^T$$

Табела 5.9: Алгоритам интеграције напона конститутивног модела за испуцале стенске масе - (B1) сегмент алгоритма -

НУМЕРИЧКИ ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ ТЕЧЕЊА ФАМИЛИЈЕ ДИСКОНТИНУИТЕТА (k) ПО ИНКРЕМЕНТУ ЕКВИВАЛЕНТНЕ ПЛАСТИЧНЕ ДЕФОРМАЦИЈЕ

$$\partial^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{(i-1)} / \partial \Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^p = \frac{{}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{\text{TOL}} - {}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{(i-1)}}{\text{TOL}}$$

$$\partial^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{(i-1)} / \partial \Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^p = \frac{\boxed{{}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{(i-1)} [\Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i-1)} + \text{TOL}]} - \boxed{{}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{(i-1)} [\Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i-1)}]}}{\text{TOL}}$$

$${}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^{(i-1)} = \bar{T}_{d(k)}^{\sigma} \quad {}^{t+\Delta t} \sigma_{sm}^{(i-1)}$$

$${}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \bar{T}_{d(k)}^{\sigma} \quad {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^{(i-1)} \quad \left( \tan^{t+\Delta t} \theta_{d(k)}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \bar{\tau}_{zx}^{(i-1)} / {}^{t+\Delta t} \bar{\tau}_{yz}^{(i-1)} \Rightarrow {}^{t+\Delta t} \bar{T}_{d(k)}^{\sigma(i-1)} \right)$$

$$\left( \Delta u_{n(k)}^{p(i-1)} \equiv \Delta \bar{\varepsilon}_{zd(k)}^{p(i-1)} / f_{d(k)} ; \Delta u_{s(k)}^{p(i-1)} \equiv \Delta \bar{\gamma}_{zx}^{p(i-1)} / f_{d(k)} ; {}^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{(i-1)} \equiv {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{zd(k)}^{(i-1)} ; {}^{t+\Delta t} \tau_{d(k)}^{(i-1)} \equiv {}^{t+\Delta t} \bar{\tau}_{xy}^{(i-1)} / f_{d(k)} \right)$$

$${}^{t+\Delta t} T_{d(k)}^{(i-1)} = \tan^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{(i-1)} = \frac{du_{n(k)}^{p(i-1)}}{du_{s(k)}^{p(i-1)}} \approx \frac{\Delta u_{n(k)}^{p(i-1)}}{\Delta u_{s(k)}^{p(i-1)}} \Rightarrow \sin^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{(i-1)}) = \frac{\tan^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{(i-1)})}{1 + (\tan^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{(i-1)})^2}$$

$${}^{t+\Delta t} U_{d(k)}^{(i-1)} = \int du_{n(k)}^p \cdot \sin^2(\Psi_{(k)}) \approx \sum \Delta u_{n(k)}^p \cdot \sin^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{(i-1)}) = {}^t U_{d(k)} + \Delta u_{n(k)}^{p(i-1)} \cdot \sin^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{(i-1)})$$

$${}^{t+\Delta t} \alpha_{d(k)}^{(i-1)} = k_0 \cdot \exp[-k_{\psi} \cdot \exp(-k_{l\psi} \cdot {}^{t+\Delta t} T_{d(k)}^{(i-1)})] \cdot \exp\left[\exp\left(-k_n \cdot \frac{{}^{t+\Delta t} \tau_{d(k)}^{(i-1)}}{u^* - {}^{t+\Delta t} U_{d(k)}^{(i-1)}}\right)\right]$$

$$\boxed{{}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{(i-1)} [\Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i-1)}]} = ({}^{t+\Delta t} \tau_{d(k)}^{(i-1)})^2 + {}^{t+\Delta t} \alpha_{d(k)}^{(i-1)} \cdot ({}^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{(i-1)})^n - \gamma \cdot {}^{t+\Delta t} (\sigma_{d(k)}^{(i-1)})^2$$

$$\Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^{p\text{TOL}} = \Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i-1)} + \text{TOL} \Rightarrow \delta \Delta \bar{\varepsilon}_{d(k)}^{p\text{TOL}} = \text{TOL} \quad {}^{t+\Delta t} \bar{n}_{d(k)}^{(i-1)} \Rightarrow \Delta \bar{\varepsilon}_{d(k)}^{p\text{TOL}} = \Delta \bar{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i-1)} + \delta \Delta \bar{\varepsilon}_{d(k)}^{p\text{TOL}}$$

$$\Delta \varepsilon_{sm}^{p(i-1)} = \Delta \varepsilon_{mon}^{p(i-1)} + \sum_{k=1}^{N_d} f_{d(k)} (\bar{T}_{d(k)}^{\varepsilon})^{-1} (\bar{T}_{d(k)}^{\varepsilon})^{-1} \Delta \bar{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i-1)}$$

$$\Delta \varepsilon_{sm}^{p\text{TOL}} = \Delta \varepsilon_{sm}^{p(i-1)} + f_{d(k)} (\bar{T}_{d(k)}^{\varepsilon})^{-1} (\bar{T}_{d(k)}^{\varepsilon})^{-1} \delta \Delta \bar{\varepsilon}_{d(k)}^{p\text{TOL}}$$

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{sm}^{\text{TOL}} = C_{sm}^c ({}^{t+\Delta t} \varepsilon_{sm} - {}^t \varepsilon_{sm}^p - \Delta \varepsilon_{sm}^{p\text{TOL}}) = C_{sm}^c ({}^{t+\Delta t} \varepsilon_{sm} - {}^t \varepsilon_{sm}^p - \Delta \varepsilon_{sm}^{p(i-1)} - f_{d(k)} (\bar{T}_{d(k)}^{\varepsilon})^{-1} (\bar{T}_{d(k)}^{\varepsilon})^{-1} \delta \Delta \bar{\varepsilon}_{d(k)}^{p\text{TOL}})$$

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{sm}^{\text{TOL}} = {}^{t+\Delta t} \sigma_{sm}^{(i-1)} - \text{TOL} (C_{sm}^c f_{d(k)} (\bar{T}_{d(k)}^{\varepsilon})^{-1} (\bar{T}_{d(k)}^{\varepsilon})^{-1} {}^{t+\Delta t} \bar{n}_{d(k)}^{(i-1)})$$

$${}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^{\text{TOL}} = \bar{T}_{d(k)}^{\sigma} \quad {}^{t+\Delta t} \sigma_{sm}^{\text{TOL}}$$

$${}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^{\text{TOL}} = {}^{t+\Delta t} \bar{T}_{d(k)}^{\sigma} \quad {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^{\text{TOL}} \quad \left( \tan^{t+\Delta t} \theta_{d(k)}^{\text{TOL}} = {}^{t+\Delta t} \bar{\tau}_{zx}^{\text{TOL}} / {}^{t+\Delta t} \bar{\tau}_{yz}^{\text{TOL}} \Rightarrow {}^{t+\Delta t} \bar{T}_{d(k)}^{\sigma\text{TOL}} \right)$$

$$\left( \Delta u_{n(k)}^{p\text{TOL}} \equiv \Delta \bar{\varepsilon}_{zd(k)}^{p\text{TOL}} / f_{d(k)} ; \Delta u_{s(k)}^{p\text{TOL}} \equiv \Delta \bar{\gamma}_{zx}^{p\text{TOL}} / f_{d(k)} ; {}^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{\text{TOL}} \equiv {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{zd(k)}^{\text{TOL}} ; {}^{t+\Delta t} \tau_{d(k)}^{\text{TOL}} \equiv {}^{t+\Delta t} \bar{\tau}_{xy}^{\text{TOL}} / f_{d(k)} \right)$$

$${}^{t+\Delta t} T_{d(k)}^{\text{TOL}} = \tan^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{\text{TOL}} = \frac{du_{n(k)}^{p\text{TOL}}}{du_{s(k)}^{p\text{TOL}}} \approx \frac{\Delta u_{n(k)}^{p\text{TOL}}}{\Delta u_{s(k)}^{p\text{TOL}}} \Rightarrow \sin^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{\text{TOL}}) = \frac{\tan^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{\text{TOL}})}{1 + (\tan^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{\text{TOL}})^2}$$

$${}^{t+\Delta t} U_{d(k)}^{\text{TOL}} = \int du_{n(k)}^p \cdot \sin^2(\Psi_{(k)}) \approx \sum \Delta u_{n(k)}^p \cdot \sin^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{\text{TOL}}) = {}^t U_{d(k)} + \Delta u_{n(k)}^{p\text{TOL}} \cdot \sin^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{\text{TOL}})$$

$${}^{t+\Delta t} \alpha_{d(k)}^{\text{TOL}} = k_0 \cdot \exp[-k_{\psi} \cdot \exp(-k_{l\psi} \cdot {}^{t+\Delta t} T_{d(k)}^{\text{TOL}})] \cdot \exp\left[\exp\left(-k_n \cdot \frac{{}^{t+\Delta t} U_{d(k)}^{\text{TOL}}}{u^* - {}^{t+\Delta t} U_{d(k)}^{\text{TOL}}}\right)\right]$$

$$\boxed{{}^{t+\Delta t} F_{d(k)}^{(i-1)} [\Delta \tilde{\varepsilon}_{d(k)}^{p(i-1)} + \text{TOL}]} = ({}^{t+\Delta t} \tau_{d(k)}^{\text{TOL}})^2 + {}^{t+\Delta t} \alpha_{d(k)}^{\text{TOL}} \cdot ({}^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{\text{TOL}})^n - \gamma \cdot {}^{t+\Delta t} (\sigma_{d(k)}^{\text{TOL}})^2$$



Табела 5.10: Алгоритам интеграције напона конститутивног модела за испуцале стенске масе - (B2) сегмент алгоритма -

ПРОРАЧУН НОРМАЛЕ НА ПЛАСТИЧНИ ПОТЕНЦИЈАЛ ДИСКОНТИНУИТЕТА

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{(i-1)} \equiv {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{zz d(k)}^{(i-1)}$$

$${}^{t+\Delta t} \tau_{d(k)}^{(i-1)} \equiv {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{xy d(k)}^{(i-1)}$$

$$\partial^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)} / \partial^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{d(k)}^{(i-1)} = \left\{ \frac{\partial^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)} / \partial^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{(i-1)}}{\partial^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)} / \partial^{t+\Delta t} \tau_{d(k)}^{(i-1)}} \right\} \approx \left\{ \frac{\Delta^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)} / \Delta^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{(i-1)}}{\Delta^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)} / \Delta^{t+\Delta t} \tau_{d(k)}^{(i-1)}} \right\} = \left\{ \frac{\left[ \Delta^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)} \right]_{\Delta\sigma} / \text{TOL}}{\left[ \Delta^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)} \right]_{\Delta\tau} / \text{TOL}} \right\}$$

$${}^{t+\Delta t} T_{d(k)}^{(i-1)} = \tan^{t+\Delta t} \psi_{(k)}^{(i-1)} = \frac{du_{n(k)}^p}{du_{s(k)}^p} \approx \frac{\Delta u_{n(k)}^p}{\Delta u_{s(k)}^p} \Rightarrow \cos^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{(i-1)}) = \frac{1}{1 + (\tan^{t+\Delta t} \psi_{(k)}^{(i-1)})^2}$$

$${}^{t+\Delta t} U_{d(k)}^{(i-1)} = \int du_{n(k)}^p \cdot \sin^2({}^{t+\Delta t} \psi_{(k)}^{(i-1)}) \approx \sum \Delta u_{n(k)}^p \cdot \sin^2({}^{t+\Delta t} \psi_{(k)}^{(i-1)}) = {}^t U_{d(k)} + \Delta u_{n(k)}^p \cdot \sin^2({}^{t+\Delta t} \psi_{(k)}^{(i-1)})^2$$

$${}^{t+\Delta t} \alpha_{d(k)}^{(i-1)} = k_0 \cdot \exp[-k_\psi \cdot \exp(-k_{1\psi} \cdot {}^{t+\Delta t} T_{d(k)}^{(i-1)})] \cdot \exp\left[ \exp\left( -k_n \cdot \frac{{}^{t+\Delta t} U_{d(k)}^{(i-1)}}{u^* - {}^{t+\Delta t} U_{d(k)}^{(i-1)}} \right) \right]$$

$${}^{t+\Delta t} \alpha_{rez(k)}^{(i-1)} = k_0 \cdot \exp[-k_\psi] \cdot \exp\left[ \exp\left( -k_n \cdot \frac{{}^{t+\Delta t} U_{d(k)}^{(i-1)}}{u^* - {}^{t+\Delta t} U_{d(k)}^{(i-1)}} \right) \right]$$

$${}^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)} = ({}^{t+\Delta t} \tau_{d(k)}^{(i-1)})^2 + \left( {}^{t+\Delta t} \alpha_{d(k)}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t} \alpha_{rez(k)}^{(i-1)} \cos^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{(i-1)}) \right) \chi^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{(i-1)n} - \gamma (1 - \cos^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{(i-1)})) \chi^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{(i-1)2}$$

$$\left[ \Delta^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)} \right]_{\Delta\sigma} = ({}^{t+\Delta t} \tau_{d(k)}^{(i-1)})^2 + \left( {}^{t+\Delta t} \alpha_{d(k)}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t} \alpha_{rez(k)}^{(i-1)} \cos^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{(i-1)}) \right) \chi^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{(i-1)} + \text{TOL})^n - \gamma (1 - \cos^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{(i-1)})) \chi^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{(i-1)} + \text{TOL})^2 - {}^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)}$$

$$\left[ \Delta^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)} \right]_{\Delta\tau} = ({}^{t+\Delta t} \tau_{d(k)}^{(i-1)} + \text{TOL})^2 + \left( {}^{t+\Delta t} \alpha_{d(k)}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t} \alpha_{rez(k)}^{(i-1)} \cos^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{(i-1)}) \right) \chi^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{(i-1)n} - \gamma (1 - \cos^2({}^{t+\Delta t} \Psi_{(k)}^{(i-1)})) \chi^{t+\Delta t} \sigma_{d(k)}^{(i-1)2} - {}^{t+\Delta t} Q_{d(k)}^{(i-1)}$$

## 6. ЕСТИМАЦИЈА ПАРАМЕТАРА ПРЕДЛОЖЕНОГ КОНСТИТУТИВНОГ МОДЕЛА

### 6.1 Концепт методе минимума квадрата одступања

#### Експерименти и модел

Експериментални подаци су оптерећени неизвесностима, које можемо поделити у три типа: дистурбанције (поремећаји), расипање резултата и непотпуност. Дистурбанције су оно што се неизбежно дешава због грешака у мерењу. Расипање резултата се догађа ако понављањем једног истог експеримента, али на различитим узорцима, добијемо различите резултате (што је последица нехомогености). У пракси се примећује да су ефекти расипања драстичнији него дистурбанције. Непотпуност података је присутна ако подаци не покривају цео распон намераваних примена модела; на пример: ако извесни физички ефекти нису активирани током експеримента, или, ако су подаци прибављени са само једног места при чему су напони и деформације високо неуниформни.

У претходним поглављима смо детаљно анализирали математичко моделирање понашања нееластичних материјала, примењујући конститутивне једначине, односно релације између напона и деформација. У процесу дефинисања математичке структуре конститутивних једначина симултано се уводе параметри. У наставку, параметри ће бити означени вектором  $\xi$ , а додатно ће бити употребљена и следећа нотација:

- $\Xi$  – простор допустивих параметара  $\xi$
- $X$  – простор улазних величина (променљивих)  $x$
- $Y$  – простор излазних величина (стања)  $y$
- $D$  – простор експерименталних података  $d$

Даље,  $g(y, x, \xi)$  је једначина стања која репрезентује стање излазних величина  $y$  за дати улаз  $x$  и параметре  $\xi$ . Са овом нотацијом, формулишимо директни (непосредни) проблем: наћи  $y(x, \xi) \in Y$ , такво да је  $g(y, x, \xi) = 0$ , за дато  $x \in X$  и за дато  $\xi \in \Xi$ . Претпоставићемо да постоји решење  $y(\xi) = \text{Arg}(g(y, x(\xi)) = 0)$  за свако  $x \in X$  и  $\xi \in \Xi$ .

Као што смо поменули, експериментални подаци  $d \in D$  нису комплетни. Отуд је корисно да уведемо један оператор  $M$  који ће дати мапу трајекторије  $y(\xi)$  до тачака  $M \cdot y(\xi)$  у опсервационом простору  $D$ . Даље, употребљавајући нотације  $\tilde{y}$  за стварно физичко стање и  $\xi_c$  за коректан вектор параметара, дефинишемо следеће векторе грешака:

- грешка мерења:

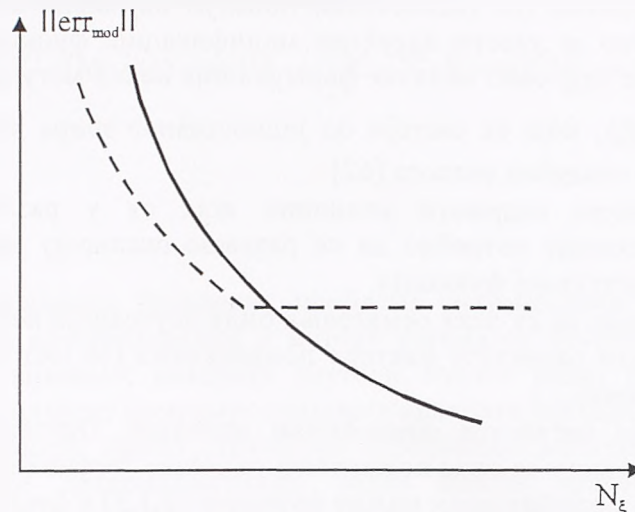
$$\text{err}_{\text{exp}} = d - M \cdot \tilde{y} \in D \quad (6.1.1)$$

- грешка модела:

$$\text{err}_{\text{mod}} = y(\xi_c) - \tilde{y} \in Y \quad (6.1.2)$$

Ако се сматра да је грешка модела  $\text{err}_{\text{mod}}$  сувише висока, уобичајена стратегија била би да се повећа комплексност модела, што обично доводи до последице да се повећа број материјалних параметара  $N_{\xi}$ . На овај начин, уопштено говорећи, постиже се смањење грешке модела  $\text{err}_{\text{mod}}$ , као што је приказано на Слици 6.1 (пуна линија). Међутим, увођење

у модел релација и параметара који су међусобно зависни, неће дати допунску редукцију грешке модела (испрекидана линија на Слици 6.1).



Слика 6.1: Утицај броја параметара на смањивање грешке у моделовању

Основна поставка методе минимума квадрата одступања

Генерално говорећи, скуп параметара за једначине модела није познат, и мора се одредити на основу експерименталних података  $d$ . У овом циљу, а претпостављајући да је математичка структура модела позната, ми разматрамо инверзни проблем: наћи  $\xi^* \in \Xi$ , такво да је  $M \cdot y(\xi) = d$ , за дато  $x \in X$  и  $d \in D$ . Пошто на податке  $d$  утичу грешке у мерењу  $err_{exp}$  и пошто су они некомплетни, резултујући вектор  $\xi^*$  може само да се сматра за приближну процену (естимацију) у односу на коректан скуп параметара  $\xi_c$ . Пошто је у пракси број експерименталних података већи него број непознатих параметара, проблем је, уопштено говорећи, преодређен.

Стратегија естимације параметара преодређених проблема, у основи се поставља као проблем оптимизације. На овај начин, основни проблем биће замењен другим, наиме, на његово место поставиће се проблем минимума циљне функције  $f(\xi)$ , односно минимума квадрата одступања:

наћи  $\xi^* \in \Xi$ , такво да:

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \|M \cdot y(\xi) - d\|_D^2 \rightarrow \min_{\xi \in \Xi}, \tag{6.1.3}$$

за дато  $x \in X$  и  $d \in D$

све у циљу да се минимализују неслагања између симулираних података  $M \cdot y(\xi)$  и експерименталних података  $d$ . Употребом једначина (6.1.1) и (6.1.2), горњи проблем се може сажето написати као:

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \|M \cdot (err_{mod}(\xi)) + err_{exp}\|^2 \rightarrow \min_{\xi \in \Xi} \tag{6.1.4}$$

Дакле, користећи приступ минимума квадрата одступања ми у основи желимо да минимализујемо збир грешака у мерењу и грешака у моделу, у осматрачком простору некомплетних података  $D$ . Ова тачка гледишта указује нам да се резултирајући вектор параметара  $\xi^*$  понекад помиње као обична процена најмањих квадрата одступања.

Модификације функционала најмањих квадрата

Генерално, у случајевима где једноставни приступ најмањих квадрата може бити незадовољавајући, потребно је увести одређене модификације функционала (6.1.3). Без залажења у детаље, овде се дају само коначне формулације неких могућности [62].

Циљна функција  $f(\xi)$ , која се састоји од једноставног збира квадрата одступања, често је неодговарајућа из следећих разлога [62]:

- Циљна функција може садржати количине које су у различитим физичким димензијама. Тада постаје потребно да се разумно скалирају величине које су се повезале у таквој објективној функцији.
- Може бити да ми знамо да су нека осматрања била поузданија него нека друга. Онда је природно приписати различите факторе пондерисања (то јест дати већу "тежину" првима, а мању другима).
- Понекад је пожељно нагласити специфични интервал. Одговарајући ентитети у објективној функцији могу се онда помножити са већим "тежинама".

Горња разматрања воде ка модификацији циљне функције (6.1.3) у следећи облик:

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \|W_{\delta} \cdot (M \cdot y(\xi) - d)\|^2 \rightarrow \min_{\xi \in \Xi} \quad (6.1.5)$$

где је  $W_{\delta}$  матрица пондерисања, обично дијагонална по форми. Резултирајући параметарски вектор  $\xi^*$ , који минимализује (6.1.5), назваћемо пондерисана процена најмањих квадрата.

Већ је поменуто да технике мерења имају неку своју ограничену прецизност, и да једне исте количине неколико пута мерене дају резултате који се баш и не подударaju. Па, кад је тако, треба прикупити довољну количину података, а онда прибећи пробабилистичком приступу. Под претпоставком да имамо нормалну дистрибуцију за експерименталне податке  $d$ , са средњом грешком нула, уводимо вектор средњих вредности  $\mu(d)$  и коваријантну матрицу мерења:

$$C_{\delta} = \mu((d - \mu(d)) \otimes (d - \mu(d))) \quad (6.1.6)$$

где  $\mu(\bullet)$  означава средње вредности аргумената. Треба запазити да врло често подаци нису у корелацији, тако да  $C_{\delta}$  има дијагоналну структуру. Онда проблем минимизације изгледа овако:

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \|C_{\delta}^{-1/2} \cdot (M \cdot y(\xi) - \mu(d))\|^2 \rightarrow \min_{\xi \in \Xi} \quad (6.1.7)$$

За нормалну дистрибуцију са познатим варијансама, циљна функција (6.1.7) води ка пондерисаном функционалу најмањих квадрата (6.1.5), при чему "тежине" одговарају елементима инверзне коваријантне матрице (6.1.6).

Најчешће подразумевамо да наше једначине модела јесу детерминистичке природе, и да су способне да, што је могуће више, приближе резултате модела ономе што се стварно види у пракси. Међутим, експериментални подаци, због дистурбанција и расипања, нису сасвим поуздани, па је зато разумно дати моделу и стохастичку природу. Најпростији начин да се ово уради је следећи: сматрамо да су процене параметара  $\xi^*$  случајне променљиве, које чине додатак експерименталним подацима  $d$ . У овом циљу, аналогно, претпостави се да имамо нормалну дистрибуцију, која води до средњих вредности  $\mu(\xi^*)$  и коваријантну матрицу:

$$C_{\xi} = \mu((\xi^* - \mu(\xi^*)) \otimes (\xi^* - \mu(\xi^*))) \quad (6.1.8)$$

која, за разлику од  $C_{\delta}$  има термине изван дијагонала, због корелације параметара.

Развијајући даље описани метод максималне вероватноће, можемо сматрати да су, осим процена параметара  $\xi^*$ , и експериментални подаци случајне променљиве. Онда,

користећи раније информације за средње  $\mu(\xi^*)$  и једначину (6.1.8) за коваријантну матрицу  $C_\xi$ , добијамо следећу циљну функцију:

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \|C_\delta^{-1/2} \cdot (M \cdot y(\xi) - \mu(d))\|^2 + \frac{1}{2} \|C_\xi^{-1/2} \cdot (\xi - \mu(\xi^*))\|^2 \rightarrow \min_{\xi \in \Xi} \quad (6.1.9)$$

Методe решавања

Алгоритми за решавање наведених проблема оптимизације: (6.1.3), (6.1.5), (6.1.7) или (6.1.9), могу бити класификовани у методе којима су потребне само израчунавања вредности функција најмањих квадрата (методи нултог реда) и у методе којима је, додатно, потребан и градијент функције најмањих квадрата (методи првог реда). Могућа је и другачија класификација, према стратегији одређивања вектора итерације, која може бити стохастичка или детерминистичка. Један општи преглед алгоритама за те класификације дат је у Табели 6.1.

Табела 6.1: Класификација оптимизационих метода

у зависности од градијента функције

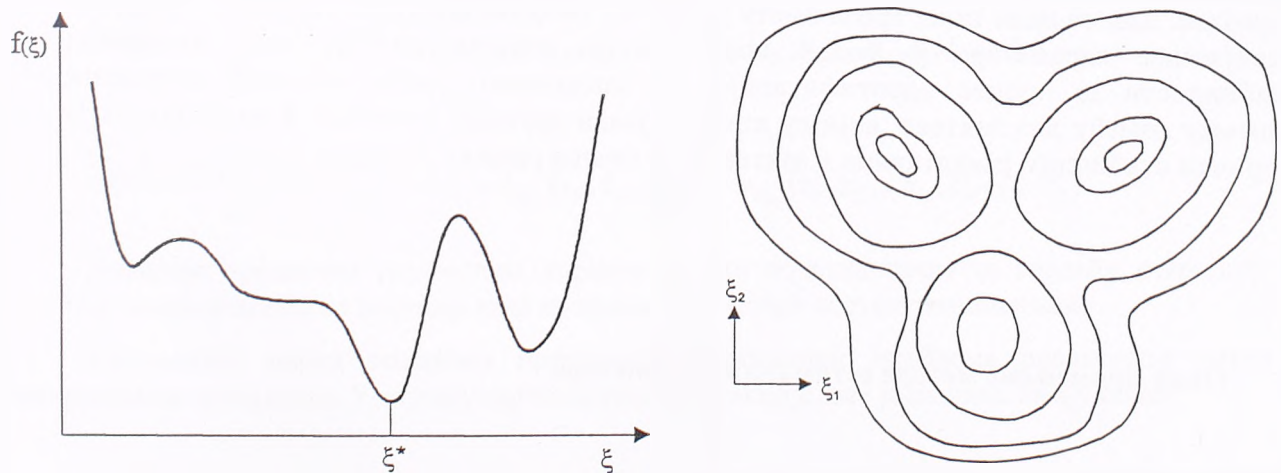
нултог реда	првог реда
еволуциони генетички симплекс "Monte Carlo"	Gauss-Newton Levenberg-Marquard BFGS

према начину израчунавања нове итерације

детерминистичке	стохастичке
Gauss-Newton Levenberg-Marquard симплекс BFGS	еволуциони генетички "Monte Carlo"

Локални и глобални минимуми

Једна типична одлика функционала најмањих квадрата (6.1.3) или (6.1.5), састоји се у томе што се појављују различити локални минимуми, како је илустровано на Слици 6.2. У потрази за глобалним минимумом, стохастички алгоритми имају ту предност што надвладавају локалне минимуме. То није случај код стратегија заснованих на детерминистичком градијенту, где је нужно размотрити ефекат различитих полазних вектора. Могуће је употребити и мешовити метод: наиме, комбинацију детерминистичке и стохастичке стратегије.



Слика 6.2: Илустрација локалних минимума за функционале најмањих квадрата

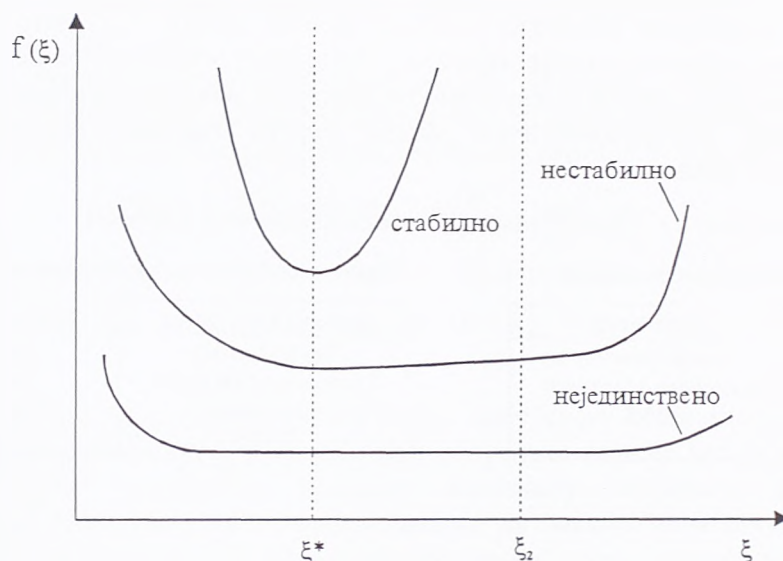
Стабилне, нестабилне и нејединствене процене параметара

Да бисмо анализирали утицај облика функционала  $f$  близу глобалног решења  $\xi^*$ , уведемо допунски вектор  $\xi_2$ , који има одлику  $\|\xi^* - \xi_2\| > A \cdot \|\xi^*\|$ , где је  $A \gg 0$  неки број.

Онда можемо разликовати следећа три случаја за процену  $\xi^*$ :

- стабилан:  $f(\xi^*) < f(\xi_2)$
- нестабилан:  $f(\xi^*) \equiv f(\xi_2)$
- нејединствен:  $f(\xi^*) = f(\xi_2)$

Илустрација за једнодимензионалан случај дата је на Слици 6.3.



Слика 6.3: Илустрација стабилне, нестабилне и нејединствене естимације параметара

Феномени нестабилности или чак нејединствености биће изазвани ако материјални модел има превише функционалних термина и/или параметара, што доводи до скоро линеарних зависности унутар модела, или ако је експеримент неадекватан у смислу да неки ефекти претпостављани моделом нису исправно "активирани". У вези са првом од те две поенте, већ је поменуто да типичан корак за смањивање грешке у моделу јесте тај да повећамо комплексност модела, а ово је, генерално, праћено повећањем броја параметара материјала. Кад се ради тако, треба имати у виду да увођење додатних термина и додатних материјалних параметара у модел може такође довести до поменуте нумеричке нестабилности за процес идентификације. Да закључимо: треба пажљиво потражити равнотежу између два захтева, који су понекад један другоме супротни, а то су захтев за нумерички стабилним резултатима и захтев да се смањи грешка у моделу.

## 6.2 Опис примењене методе естимације параметара

### Теоријска основа

Нека је систем описан са релацијама:  $y_1(x_1, x_2, \dots, x_1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ ,  $y_2(x_1, x_2, \dots, x_1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$  ....  $y_n(x_1, x_2, \dots, x_1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ , где су  $x_1, x_2, \dots, x_1$  независне променљиве од којих зависе функције  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , а  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$  представљају параметре модела. Ови параметри модела не зависе од променљивих  $x_1, x_2, \dots, x_1$ . Довољан број мерења вредности  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , при различитим  $x_{1(i)}$ , ( $i = 1, 2, \dots, m_1$ ),  $x_{2(j)}$ , ( $j = 1, 2, \dots, m_2$ ), .....  $x_{1(q)}$ , ( $q = 1, 2, \dots, m_1$ ), резултоваће довољним бројем

међусобно независних релација између параметара  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ , и дати вредности ових параметара користећи се решењем инверзног проблема.

На пример, скуп од  $p_1$  мерења вредности  $d_1$ , доводи до  $t = \sum_{i=1}^1 m_i$  релација следећег облика:

$$\begin{aligned} y_{11}(x_1, x_2, \dots, x_1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) &= d_{11}(x_1, x_2, \dots, x_1) \\ y_{12}(x_1, x_2, \dots, x_1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) &= d_{12}(x_1, x_2, \dots, x_1) \\ &\vdots \\ y_{1p_1}(x_1, x_2, \dots, x_1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) &= d_{1p_1}(x_1, x_2, \dots, x_1) \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

На исти начин, скуп од  $p_n$  мерења вредности  $y_n$ , доводи до  $t = \sum_{i=1}^1 m_i$  релација следећег облика

$$\begin{aligned} y_{n1}(x_1, x_2, \dots, x_1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) &= d_{n1}(x_1, x_2, \dots, x_1) \\ y_{n2}(x_1, x_2, \dots, x_1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) &= d_{n2}(x_1, x_2, \dots, x_1) \\ &\vdots \\ y_{np_n}(x_1, x_2, \dots, x_1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) &= d_{np_n}(x_1, x_2, \dots, x_1) \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Релације од (6.2.1), која се може развити у систем  $p_1 \times t$  нелинеарних једначина, преко система релација са функцијом  $y_2$  димензија  $p_2 \times t$ , па све до релација (6.2.2), које се такође могу развити у систем  $p_n \times t$  нелинеарних једначина, за решења имају вредности естимираних параметара  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ , које дају резултате најприближније експерименталним. Решење ових нелинеарних једначина може се наћи, користећи се итеративним поступком, решавањем следећег система линеаризованих једначина:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{11}(x_1, x_2, \dots, x_1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_r} \Delta \xi_r &= d_{11}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{1q}) - y_{11}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{1q}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \\ &\vdots \\ \frac{\partial y_{1p_1}(x_1, x_2, \dots, x_1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_r} \Delta \xi_r &= d_{1p_1}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{1q}) - y_{1p_1}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{1q}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \\ &\vdots \\ \frac{\partial y_{n1}(x_1, x_2, \dots, x_1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_r} \Delta \xi_r &= d_{n1}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{1q}) - y_{n1}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{1q}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \\ &\vdots \\ \frac{\partial y_{np_n}(x_1, x_2, \dots, x_1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_r} \Delta \xi_r &= d_{np_n}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{1q}) - y_{np_n}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{1q}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Добијене вредности параметара користе се као почетна тачка за следећу итерацију. Конвергенција решења се постиже када промене параметара постану занемарљиве.

Ефикаснији метод решавања претходног нелинеарног проблема представља метод логаритамске варијације. У случају две посматране функције, ове једначине имају облик:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log(y_{1l}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{lq}, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k))}{\partial \log(\xi_r)} \Delta \xi_r &= \log \frac{d_{1l}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{lq})}{y_{1l}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{lq}, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)} \\
\vdots & \\
\frac{\partial \log(y_{lp_l}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{lq}, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k))}{\partial \log(\xi_r)} \Delta \xi_r &= \log \frac{d_{lp_l}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{lq})}{y_{lp_l}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{lq}, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)} \\
\vdots & \\
\frac{\partial \log(y_{nl}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{lq}, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k))}{\partial \log(\xi_r)} \Delta \xi_r &= \log \frac{d_{nl}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{lq})}{y_{nl}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{lq}, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)} \\
\vdots & \\
\frac{\partial \log(y_{np_n}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{lq}, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k))}{\partial \log(\xi_r)} \Delta \xi_r &= \log \frac{d_{np_n}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{lq})}{y_{np_n}(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{lq}, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)}
\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

где  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$  представљају текућу естимацију вектора параметара модела  $\xi$ .

Једначина (6.2.3) или (6.2.4) се може написати у матричном облику као:

$$\mathbf{A} \cdot \Delta \xi = \mathbf{b} \tag{6.2.5}$$

где су:  $\mathbf{A}$  – матрица осетљивости (димензија  $\sum_{i=1}^n p_i \times k$ )

$\Delta \xi$  – вектор инкремента параметара  $\xi$  (димензија  $k \times 1$ )

$\mathbf{b}$  – вектор грешке (димензија  $\sum_{i=1}^n p_i \times 1$ ).

Генерално, матрица  $\mathbf{A}$  није квадратна и број мерења далеко превазилази број параметара модела и директно инверзно решавање није могуће.

Усвојен је приступ који је назван пригушена метода најмањих квадрата и који представља једноставан метод инверзије помоћу кога се врши минимизација одступања. Спада у детерминистичке методе првог реда (*Gauss-Newton*).

Промене параметара модела добијају се из релације:

$$\Delta \xi = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} \tag{6.2.6}$$

где  $\varepsilon^2$  представља фактор пригушења који омогућује налажење инверзне матрице  $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{I})^{-1}$ . Заправо овакав метод минимизује вредност  $\|\mathbf{b}\|^2 + \varepsilon^2 \cdot \|\Delta \xi\|^2$ . Добро одабрана вредност коефицијента  $\varepsilon$  може да "пригуши" сваки поремећај (на пример, мерни шум настао током вршења експеримента). У ствари, најбољи избор за  $\varepsilon^2$  јесте однос варијансе шума и варијансе модела. Наравно, свака ненулта вредност  $\varepsilon$  донекле умањује резолуцију параметара. Ово се дешава јер су једина тачна решења она која се добијају при  $\varepsilon=0$  (када релација постаје  $\mathbf{A} \cdot \Delta \xi = \mathbf{b}$ ). Међутим, у том случају врло је вероватно да је немогуће наћи  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Стварна блискост добијених вредности са параметрима модела може се проверити релацијом

$$\mathbf{R} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \tag{6.2.7}$$

Када се решења потпуно поклапају са правим параметрима модела тада је матрица  $\mathbf{A} \approx \mathbf{I}$ , што значи да су добијене вредности једино решење. Наравно, ако матрица  $\mathbf{R}$  има ван дијагонале елементе који се знатно разликују од нуле, грешка начињена код естимације једног параметра може се компензовати варијацијама других параметара, тако да и у том случају подаци одговарају експерименталним. Ако нека врста у овој матрици поседује само врло мале елементе у односу на јединицу, одговарајући параметар се не може добити из расположивих података. На овај начин, матрица резолуције  $\mathbf{R}$  указује на бесмислена решења, а такође и указује на параметре који се могу мењати без утицаја на одзив система, што говори о нејединствености решења.



Принцип рада програма CONTROL

Развијен је посебан рачунарски програм *CONTROL*, који се заснива на претходно изнетој теорији естимације параметара и примени програма ПАК, описаног у поглављу 5.2.

Иако је најчешћи случај да се ова апликација користи за изражено нелинеарне проблеме, за развој програма *CONTROL* је искоришћена релација (6.2.3). Одавде следи да се матрица осетљивости добија као:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{11}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_{12}}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial y_{1l}}{\partial \xi_l} \\ \frac{\partial y_{21}}{\partial \xi_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_{2n_1 l}}{\partial \xi_1} & \dots & \dots & \frac{\partial y_{2n_1 l}}{\partial \xi_l} \end{bmatrix} \quad (6.2.8)$$

У овој матрици се налазе изводи који се добијају тако што се вредности за  $y_{ij}$  израчунавају прво за  $\xi_r$ , а потом за  $\xi_r + \Delta \xi$  где је  $\Delta \xi = 10^{-6}$  и представља параметар који утиче на тачност налажења извода (обично у границама од  $10^{-6}$  до  $10^{-8}$ ). Извод је, дакле:

$$A_{ij} = \frac{y_{ij}(\xi_r + \Delta \xi_r) - y_{ij}(\xi_r)}{\Delta \xi_r} \quad (6.2.9)$$

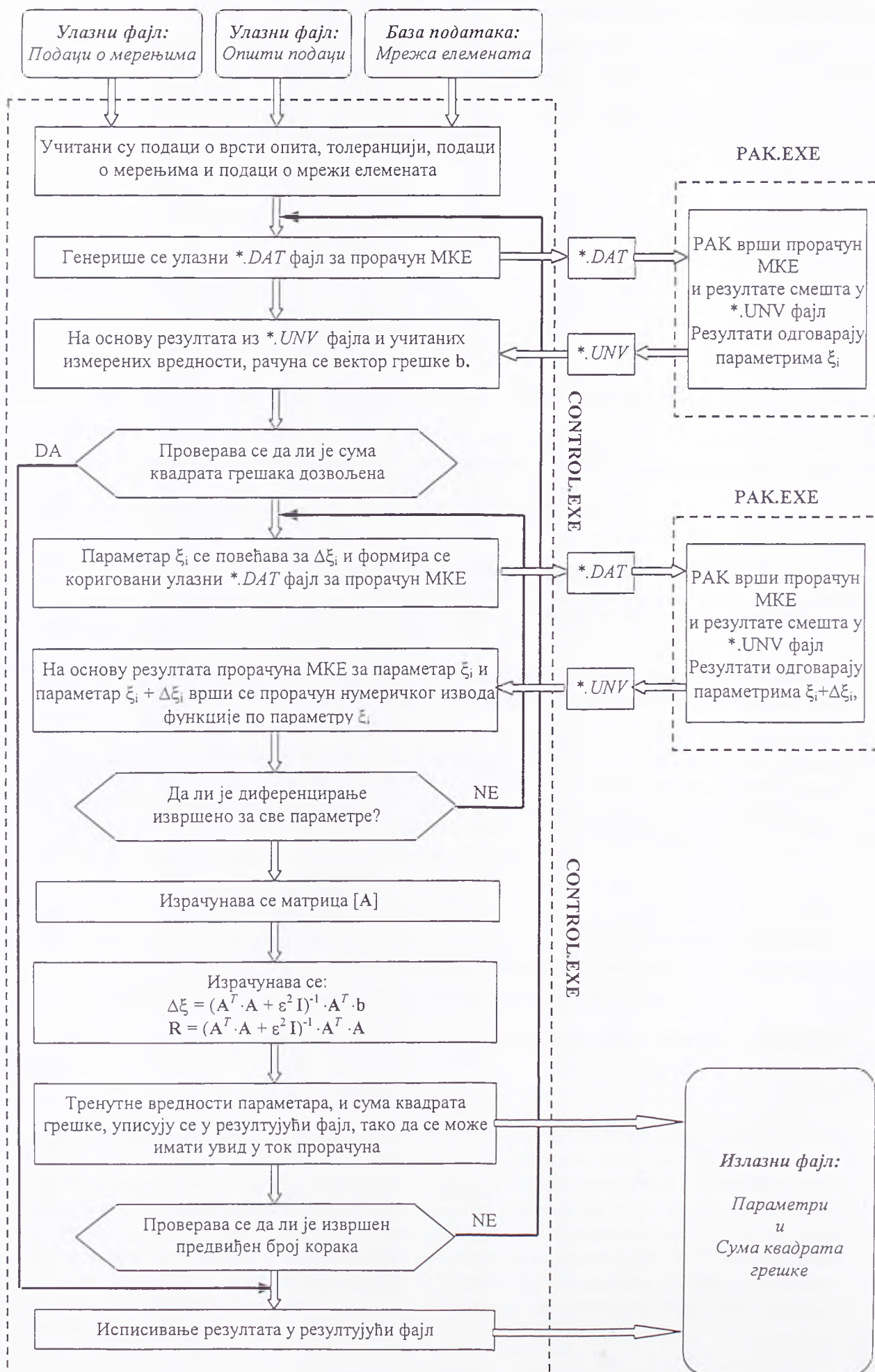
Након израчунавања матрице  $A$ , формирају се матрица  $b$  и матрица  $A^T \cdot A + \varepsilon^2 \cdot I$ . До вредности за  $\Delta \xi$  долази се решавањем система једначина:

$$(A^T \cdot A + \varepsilon^2 \cdot I)^{-1} \cdot \Delta \xi = b \quad (6.2.10)$$

Након налажења решења једначине (6.2.10), израчунава се матрица  $R$  дефинисана са (6.2.7) која ће послужити за оцену добијених параметара, као што је већ објашњено.

Програм *CONTROL*, адаптиран је за естимацију параметара на основу неколико уобичајених типова опита (опити методом распињаче, опити методом блока и сл.), за које је формирана база података (мреже коначних елемената у функцији типа и димензија опита). О самим опитима ће бити речи у следећем поглављу. У наставку је приказан алгоритам рада програма *CONTROL* (табела 6.2).

Табела 6.2 Алгоритам програма CONTROL



### 6.3 Значење и одређивање параметара

У претходним поглављима дефинисан је конститутивни модел који узима у обзир дисконтинуалну структуру стенске масе и при том уважава оријентацију и напонско-деформацијско понашање пукотина. Предложени конститутивни модел садржи следеће параметре:

#### Стенски монолит

- $E_{\text{мон}}, \nu_{\text{мон}}$  – параметри еластичности (модул еластичности и *Poisson*-ов коефицијент)  
*Напомиње се да је у случају одређења за еластичну ортотропију стенског монолита (што је често нужно, када се ради о шкриљцима и сличним изразито анизотропним структурама), тада потребно одредити девет еластичних константи (видети поглавље 3.2):  $E_a, E_b, E_c, G_{ab}, G_{ac}, G_{bc}, \nu_{ab}, \nu_{ac}, \nu_{bc}$ .*
- $n_{\text{мон}}, \gamma_{\text{мон}}, m_{\text{мон}}, \beta_{\text{мон}}, T_{\text{мон}}$  – параметари услова течења, према (3.4.16)
- $a_{1\text{мон}}, a_{2\text{мон}}$  – параметри услова ојачања, према (3.5.10)
- $\alpha_{0\text{мон}}, \kappa$  – параметри пластичног потенцијала, према (3.6.3)
- $k_{\text{мон}}, r_{\text{мон}}, \Omega_{\text{мон}}$  – параметри закона развоја оштећења, према (3.7.12)

#### Дисконтинуитети у стенској маси

- $N_d$  – укупан број фамилија дисконтинуитета
- $\alpha_{d(i)}, \beta_{d(i)}, (i=1, N_d)$  – параметри оријентације (углови пружања и залегања)
- $f_{d(i)}, (i=1, N_d)$  – учесталост
- $K_{nd(i)}, K_{sd(i)}, (i=1, N_d)$  – параметри еластичности, према (4.2.37)
- $n_{d(i)}, \gamma_{d(i)}, (i=1, N_d)$  – параметри услова течења, према (4.2.1)
- $k_{nd(i)}, u^*_{d(i)}, (i=1, N_d)$  – параметри услова ојачања, према (4.2.2)

*Напомиње се, да се у услову ојачања (4.2.2) налазе 5 константи, али да су, коришћењем веза (4.2.33), (4.2.34) и (4.2.38), само 2 независне.*

Уколико се уведу претпоставке о занемарењу еластичних деформација дисконтинуитета и пластичних деформација монолита, што је, како је већ истакнуто, за чврсте испуцале стенске масе често оправдано, тада се значајно редукује број константи конститутивног модела.

- Монолит:  $E_{\text{мон}}, \nu_{\text{мон}}$
- Дисконтинуитети:  $N_d, \alpha_{d(i)}, \beta_{d(i)}, f_{d(i)}, n_{d(i)}, \gamma_{d(i)}, k_{nd(i)}, u^*_{d(i)}, (i=1, N_d)$

Сви наведени параметри конститутивног модела за испуцале стенске масе могу се добити интегралном применом поступка естимације параметара описаног у претходном поглављу, анализирајући наменске *in situ* опите у великој размери.

Са друге стране, параметри предложеног конститутивног модела имају одређено физичко значење, односно зависе од непосредних структурних карактеристика стенске масе и материјалних својстава стенског монолита и пукотина. Наиме, параметри  $\alpha_{d(i)}, \beta_{d(i)}, f_{d(i)}$  (подаци о просторној оријентацији и учесталости пукотина), јесу подаци помоћу којих се уобичајено описује испуцалост стенске масе према препорукама *Међународног друштва за механику стена* (видети поглавље 2). Параметари  $\gamma_{d(i)}$  и  $n_{d(i)}$  су у директној зависности од морфологије пукотина (рапавости и заталасаности) и фрикционих карактеристика стенског монолита и пукотинске испуне, што се непосредно може закључити на основу једначина (4.2.28) и (4.2.37), док параметар  $u^*_{d(i)}$  практично представља величину зева пукотине, што такође спада у параметре редовног описивања испуцалости. Коначно, параметар  $k_{nd(i)}$  зависи од компресибилности пукотине (на шта утиче пукотинска испуна, као и чврстоћа и

морфологија пукотних зидова. Параметри  $E_{\text{мон}}$ ,  $\nu_{\text{мон}}$  су основни показатељи механичког понашања стенског монолита.

Имајући у виду претходна објашњења, параметри конститутивног модела за испуцале стенске масе могу се добити и непосредним одређивањем структурних параметара и појединачном квантификацијом елемената стенске структуре (монолит и дисконтинуитети). Треба напоменути да вредности параметара које се добијају путем поступака непосредне процене, нису подједнако поуздане. Покушаћемо овде да назначимо неке чињенице које треба имати у виду у таквом поступку квантификације параметара, па да одлучимо које од механичких и геометријских својстава стенске масе треба непосредно мерити.

- Параметри  $\alpha_{d(i)}$ ,  $\beta_{d(i)}$  и  $f_{d(i)}$ , могу се проценити уобичајеним поступцима теренског картирања. Наиме, подаци о просторној оријентацији и учесталости пукотинских система ( $\alpha_{d(i)}$ ,  $\beta_{d(i)}$  и  $f_{d(i)}$ ) могу се добити у великом броју. Наиме, ако на изложеној површини стене имамо дисконтинуитет, ми његову оријентацију можемо, геолошким компасом, измерити сасвим добро. Размак између дисконтинуитета је параметар који се такође може одлично измерити, ако су језгра пажљиво прибављена. Имајући у виду да су подаци о просторној оријентацији и учесталости пукотинских система релативно репрезентативни за целу квазихомогену зону, као и да се могу статистички анализирати, можемо рећи да они спадају у податке који се релативно поуздано могу директно утврдити.
- Параметари  $\gamma_{d(i)}$ ,  $n_{d(i)}$  и  $k_{nd(i)}$ , могу се одредити на основу тестова директног смицања дуж дисконтинуитета. Параметри  $\gamma_{d(i)}$  и  $n_{d(i)}$  се могу проценити и комбинацијом података о рапавости и базном (резидуалном) трењу дисконтинуитета. Али, рапавост површине дисконтинуитета је тешка за мерење, иако је у овој области остварен знатан напредак. Како се базно трење дисконтинуитета иначе добија тестовима смицања, може се констатовати да је ипак најједноставнији и најпоузданији начин за квантификацију параметара  $\gamma_{d(i)}$  и  $n_{d(i)}$ , реализација довољног броја опита директног смицања дуж дисконтинуитета, на које треба применити напред објашњени поступак естимације (поглавље 6.2).
- Параметри  $E_{\text{мон}}$  и  $\nu_{\text{мон}}$ , могу се добити стандарним опитима на узорцима стенског монолита.
- Параметар  $u_{d(i)}$  је, сагласно својој дефиницији, директно зависан од зева пукотина, а који је по својој природи променљив и унутар квазихомогене зоне. Самим тим, проглашавање параметра  $u_{d(i)}$  за материјалну константу је очигледна апроксимација. Даље, ширина зева дисконтинуитета тешко се мери, јер је она веома осетљива на промене напона и, уопште, поремећаје. У процесу бушења, када бушилица наиђе на неки отворен дисконтинуитет, баш ће овај податак бити уништен. На изложеним површинама стене, пукотине ће до неке мере да се отворе због смањења напона, што наравно значи да такви отвори не приказују истинито оно што се налази у дубинама, у стенској маси. Из ових разлога, процена овог параметра на основу података теренског картирања није поуздана. Такође, није могуће ни његово директно дефинисање на основу опита смицања, због наведене просторне променљивости овог податка (узорци су само тачкасти подаци, и то малобројни).

Може се закључити да је, за предложени конститутивни модел, оптимално користити фазни приступ, односно као прву итерацију користити непосредне процене параметара на основу теренског картирања и испитивања узорака, а затим, извршити корекције применом описаног поступка естимације параметара, користећи резултате *in situ* опита у великој размери.

## 7. ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ИСТРАЖИВАЊА

### 7.1 Опште о извршеним истраживањима

#### Увод

Развој теоријских поставки моделирања механичког понашања испуцалих стенских маса, које су изложене у претходним поглављима, као и њихова верификација, о чему ће бити речи у следећем поглављу, засновани су на експериментима који су реализовани у време израде овог рада са циљем да буду ослонац теоријским разматрањима.

Експериментална истраживања која су коришћена у изради овог рада, део су великог истраживачког процеса који се врши за потребе изградње бране Боговина на реци Црни Тимок. Пре детаљнијег прегледа извршених експеримената, у тексту који следи даје се кратак осврт на истражни простор и врсту и намену објекта.

Брана Боговина служи за формирање акумулације која треба да поправи природни режим вода Црног Тимока и омогући њихово коришћење према потребама корисника. Вода би се користила за водоснабдевања градова Бора, Зајечара, Неготина и Бољевца, као и за наводњавања долине Црног Тимока. У току 1995. године започета је реализација истражних радова и израда главног пројекта. Носилац реализације свих радова на изради техничке документације је Институт "Јарослав Черни" [115].

Преградно место се налази приближно 600 *m* узводно од ушћа реке Арнауте у Црни Тимок. На слици 7.1 приказан је фотографски снимак преградног места.



Слика 7.1: Преградно место за брану "Боговина" – поглед са леве обале

На преградном месту заступљен је стенски комплекс дебљине 330 *m*, који чине наизменичним смењивањем: кречњаци, пешчари, лапоровити кречњаци и јако фосилоносни кречњаци. У подини овог комплекса налазе се доњокредни, ургонски кречњаци. У сасвим малој мери заступљене су на површини терена и квартарне творевине. У подручју преградног места утврђени су различити дисконтинуитети. Раседи су релативно ретки, а дуж њих није било великих померања. Имају углавном вертикални или субвертикални положај. Пукотински систем је развијен од прслина до пукотина величине зева неколико центиметара. На преградном месту нису заступљене значајније крашке појаве.

Брана Боговина је бетонска брана, чија је максимална висина у односу на терен 52 *m*, док је максимална грађевинска висина приближно 65 *m*. Дужина бране у круни износи 460 *m*. Брана се фундира на стени. За фундирање врши се уклањање алувијалног наноса у речној долини и површинског слоја стенске масе који, с обзиром на стање распаднутости има слабије карактеристике у односу на једру стенску масу на већој дубини.

У овом поглављу кратко је изложен општи приказ извршених испитивања. У следећим поглављима дат је приказ оних експеримената који су коришћени у изради овог рада.

### Врсте и сврха извршених истраживања

Изведена су вишедисциплинарна истраживања: инжењерскогеолошка, хидрогеолошка, геофизичка и геомеханичка. У пројекту комплексних истраживања [115] детаљно су дефинисани сви аспекти истраживачког процеса: концепција, методологија, намена и сврха истраживачких активности, врсте, обим и локације истражних радова, диспозиција испитивања, програм извођења огледа, као и технички услови за извршење испитивања. Истраживања су се обављала коришћењем метода теренског истраживања, лабораторијских испитивања и кабинетске обраде резултата, уз израду фото и видео документације.

Побројани истражни радови на преградном месту су вишенаменског карактера. Један значајан циљ је формирање поузданог модела стенске масе са квантификацијом просторне дистрибуције вредности оних механичких карактеристика које се користе као улазни подаци за напонско-деформацијска моделирања и анализу стабилности објекта и стенске масе у зони фундирања бране. Да би се постигао постављени циљ, потребно је да се:

- инжењерско-геолошким картирањем, уз помоћ геофизичких и других истраживачких метода, дефинише инжењерско-геолошки модел преградног места (литолошки састав, тектонски склоп, испуцалост, распаднутост) и одреде репрезентативне локације;
- на ограниченом броју репрезентативних места изврше геомеханички *in situ* опити у великој размери и на тај начин добију поуздане и репрезентативне нумеричке вредности релевантних показатеља механичког понашања стенске масе као сложене средине;
- детаљним инжењерско-геолошким картирањем утврди структура стенске масе на локалитетима испитивања;
- изврши квантификација механичког понашања елемената стенске структуре, лабораторијским испитивањем репрезентативних узорака монолита и дисконтинуитета;
- дефинише механичко понашање стенске масе на локалитетима испитивања (применом методологије описане у претходним поглављима).

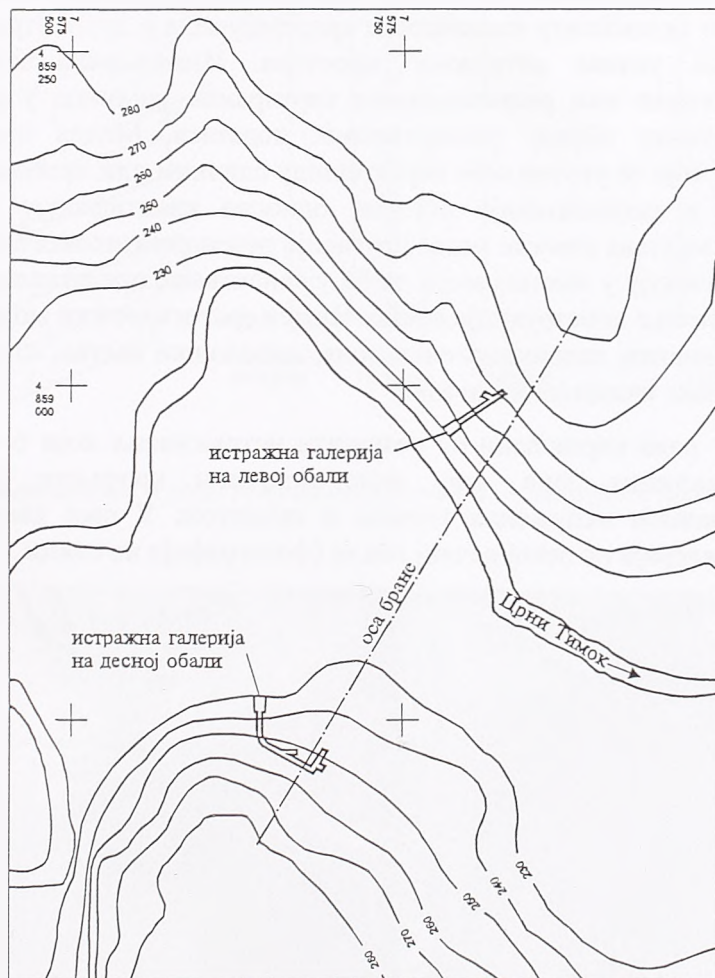
Затим је потребно да се стенска маса, у зони од интереса за анализе, покрије резултатима аналогних истраживања (инжењерско-геолошких и геофизичких), који се могу корелисати са показатељима механичког понашања стенске масе на местима испитивања. На основу дистрибуције аналогних показатеља и веза између аналогних и мерених величина дефинишу се захтевани модели механичког понашања стенске масе на целом истражном простору.

### Истражни објекти

За реализацију истраживачког процеса неоподно је било извести истражне објекте (истражне бушотине и галерије).

Истражне бушотине у зони преградног места служе за просторно дефинисање геолошког модела стенске масе (старост, састав, склоп), као и за квантификацију својстава стенске масе. У истражним бушотинама врше се одговарајућа истраживања и испитивања *in situ* као и на узетим узорцима. Користе се за инжењерскогеолошко картирање језгра, геофизичка каротажна испитивања, геофизичка испитивања сеизмичким прозривањем, геомеханичка *in situ* испитивања методом сондажног дилатометра, узимање узорака за геомеханичка испитивања, испитивања водопропустљивости и уградњу пијезометара.

Истражне галерије се користе за инжењерскогеолошко картирање, сеизмоакустична мерења, геомеханичка *in situ* испитивања методама хидрауличке распињаче и бетонског блока стена, као и за узимање узорака за лабораторијска геомеханичка испитивања. Направљене су две истражне галерије (у левом и десном боку преградног места). Локације истражних бушотина и галерија приказане су на плану преградног места (слика 7.2).



Слика 7.2: Преградно место за брану Боговина – локације истражних објеката

#### Инжењерскогеолошки модел

У непосредном и околном подручју преградног места изведено је детаљно инструментално инжењерскогеолошко картирање терена, са циљем да се утврди просторни положај раседа и граница литолошких чланова и одреде најповољније локације за истражне објекте, односно, да се прикупљањем свих релевантних информација допринесе изради инжењерско-геолошког модела анализираниг простора. У процесу детаљног инжењерскогеолошког картирања истражних објеката, прикупљени су следећи подаци: литолошки састав (опис литолошког члана, састав, структура, текстура и боја основне масе, тип и облик литолошке границе), испуцалост (опис и генеза пукотина, оријентација, учесталост, распрострањеност, рапавост, чврстоћа зидова, величина зева, испуна, количина воде која се процеђује, број фамилија пукотина и димензије блока стенског монолита), распаднутост стенке масе (главни узроци распадања, механички или хемијски; дебљина масе

садржај минерала као производ хемијских измена), физичко-механичка својства - квалитативно (сва својства која се могу макроскопски опажати и проценити), као и локације узетих узорака и локације *in situ* опита. Напоменимо да је пракса показала је да резултати инжењерскогеолошких картирања често у многоме зависе од критеријума самог истраживача. То је имало за последицу да су се доносиле субјективне оцене при дефинисању стенске масе са аспекта испуцалости. У циљу повећања објективности, односно редуције утицаја субјективних критеријума истраживача, картирање је спроведено према техничким условима који се у највећој мери заснивају на упутству међународног друштва за механику стена [15].

Дефинисан је инжењерско-геолошки модел стенске масе као својеврсна симплификација реалних геолошких услова. Област моделирања је дефинисана ширим подручјем утицаја бране. Циљ инжењерскогеолошког моделирања је да природну средину која је дисконтинуална, хетерогена и анизотропна, сведе на упрошћен, квантитативан и квалитативан просторни приказ који ће с једне стране задовољити инжењерске критеријуме, а с друге стране испоштовати све релевантне геолошке услове истражног простора. Инжењерско-геолошко моделирање подразумева укрупњавање или рашичлањивање картираних јединица у квазихомогене зоне, примењујући статистичку обраду расположивих података. Модел садржи коначан број квазихомогених зона које се унутар себе карактеришу сличним или приближно истим утицајем на услове грађења и експлоатације објекта, односно квантификују истим вредностима параметара стања и својстава стенске масе. Другачије речено квазихомогене зоне се најмање по једном параметру разликују у толикој мери да би уједначавање представљало реалну грешку за правилно димензионисање конструкције бране. Инжењерскогеолошки модел преградног места садржи: просторни положај квазихомогених зона, литолошки састав, стање распаднутости и стање испуцалости сваке квазихомогене зоне.

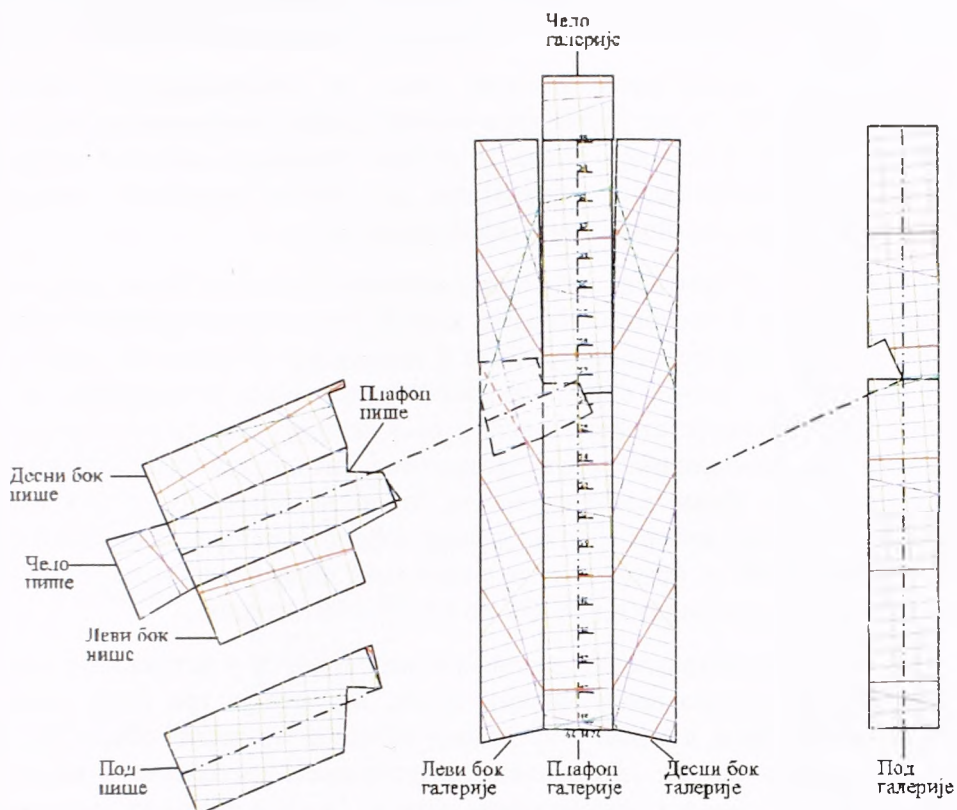
За израду овог рада коришћени су резултати истраживања који се односе на једну од издвојених квазихомогених зона, коју чине испуцали кречњаци, са више фамилија дисконтинуитета углавном испуњених глином и калцитом. У овој квазихомогеној зони је лоцирана истражна галерија на левој речној обали (фотографија на слици 7.3).



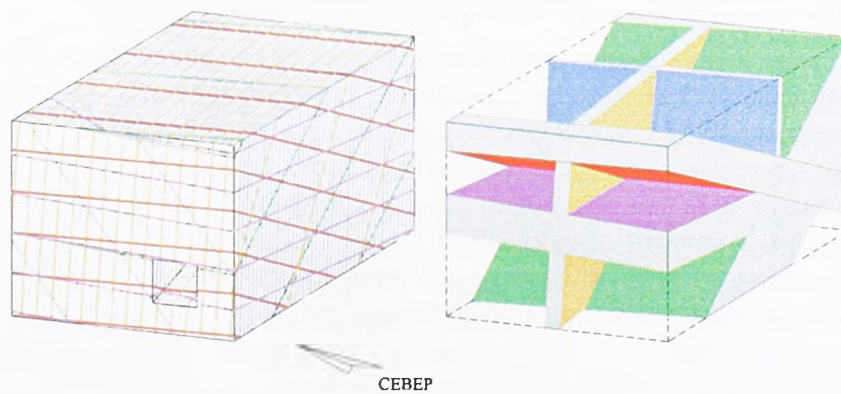
Слика 7.3: Истражна галерија на левој обали







На слици 7.4 дат је сажет приказ испуцалости стенске масе на локалитету истражне галерије, у форми развијеног плана. Статистичком обрадом података о картираним пукотинама и прслинама, дефинисан је модел испуцалости посматране квазихомогене зоне, који је приказан на слици 7.5.





Слика 7.4: Дисконтинуитети у зони испуцалих кречњака – развијени план истражне галерије



ознака	фамилија	угао пружања	падни угао	распојање између суседних пукотина (m)
	1. фамилија	11	5	2,00
	2. фамилија	233	86	0,80
	3. фамилија	325	19	2,00
	4. фамилија	140	29	5,25
	5. фамилија	143	86	0,50
	стена			

Слика 7.5: Модел испуцалости зоне испуцалих кречњака

### Геомеханичка испитивања

Изведена су *in situ* испитивања стенске масе и лабораторијска испитивања дисконтинуитета и монолита. Извршено је два типа огледа *in situ*: комбиновани *in situ* огледи притиска и смицања методом бетонског блока и огледи притиска методом хидрауличке распињаче. Лабораторијска испитивања обухватала су опите директног смицања по дисконтинуитетима и једноаксијалне опите притиска на монолиту.

Комбиновани *in situ* огледи притиска и смицања методом бетонског блока извршени су у истражним галеријама (односно у посебним нишама, које су копане из истражних галерија) на укупно две локације, од чега је једна локација била у истражној галерији на левој обали, а друга у истражној галерији на десној обали. Микролокација ниша је одређена на основу инжењерскогеолошке класификације стенске масе, а са критеријумом да испитивања треба извести на репрезентативним деоницама за два заступљена литолошка члана на преградном месту (кречњаци и пешчари). Осим критеријума за избор локације по основу састава и квалитета стенске масе, приликом избора микролокације вођено је рачуна да се нише налазе у зони изван ископа темељне јаме за брану и да је изнад њих најмање 15 m надслоја стенске масе. Испитивања су извршена у периоду од 24. 08. до 18. 09. 1997. године.

Огледи притиска методом хидрауличке распињаче извршени су у истражним галеријама на левој и десној обали, на укупно десет мерних места, од чега је три било лоцирано у истражној галерији на левој обали, а седам у истражној галерији на десној обали. Од укупно десет огледа притиска, четири огледа је извршено разупирањем распињаче у вертикалном правцу, а шест огледа разупирањем у хоризонталном правцу. Огледи притиска методом круте хидрауличке распињаче лоцирани су на следећим местима: по један оглед извршен је у нишама, на локацијама испитивања методом бетонског блока. Ови огледи изведени су у тежиштима огледних површина испод блокова, после припреме површина, а пре бетонирања блокова. Локације осталих осам испитивања налазиле су се у истражним галеријама, ван зоне ископа за фундарање бране. Критеријум за утврђивање микролокација био је да се испитивања изврше у сваком литолошком члану, који је заступљеном на преградном месту, и у различитим квазихомогеним зонама по испуцалости. Огледи притиска на левој обали извршени су у периоду од 08. 04. до 18. 04. 1997. године, а на десној обали у времену од 01. 06. до 02. 06. 1997. године и у времену од 24. 08. до 18. 09. 1997. године.

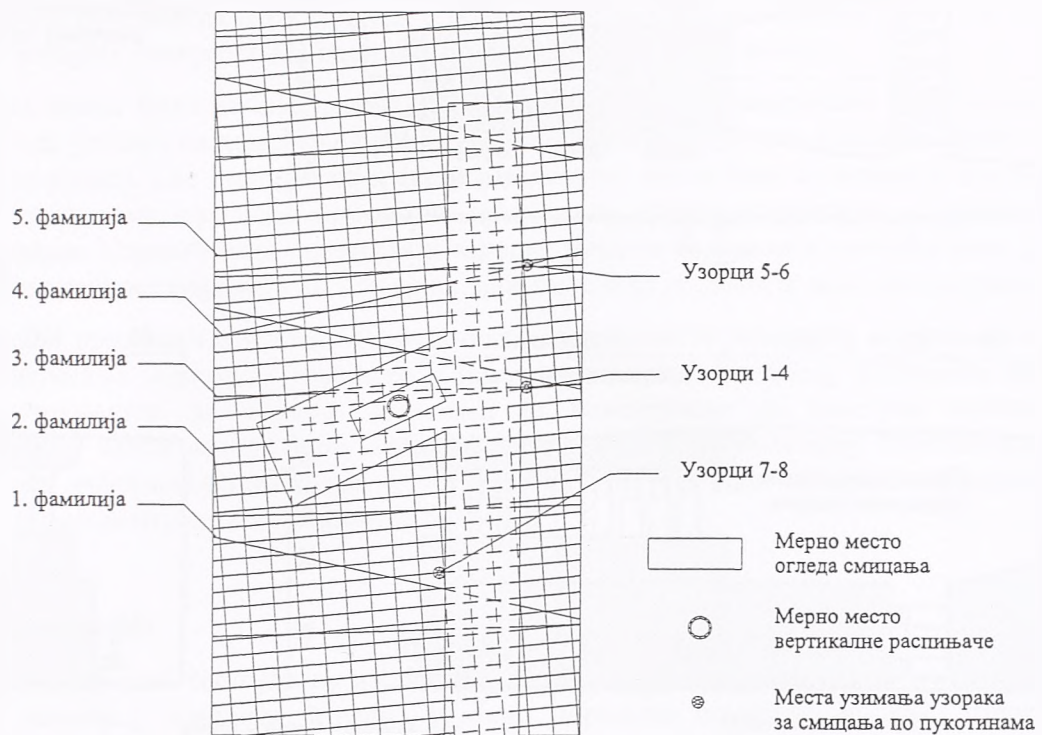
Механичка испитивања дисконтинуитета изведена су са циљем да се експерименталним путем утврди напонско-деформацијско понашање дисконтинуитета. На основу израђеног инжењерско-геолошког модела испуцалости стенске масе на преградном месту одређени су релевантни типови пукотина за које је потребно одредити параметре напонско-деформацијског понашања. Испитивани су дисконтинуитети који су репрезенти одређених фамилија пукотина. Према класификацији пукотина, дефинисан је потребан број огледа и локације узорковања. Извршено је испитивање на укупно 32 узорка. Узорци су узимани из истражних галерија дуж претходно обележених дисконтинуитета на зидовима галерија (8 узорака из галерије на левој обали и 24 узорка из галерије на десној обали). Одмах после вађења узорци су картирани, обележени, заштићени од промена природне влажности и запаковани за транспорт до лабораторије у којој су вршена испитивања. Испитивања дисконтинуитета извршена су у периоду од 26. 12. 1997. до 19. 02. 1998. године, у лабораторији Института "Јарослав Черни".

У циљу прецизне идентификације и квантификације својстава различитих класа стенског монолита изведен је одређен број механичких испитивања. Извршени су једноаксијални опити чврстоће и деформабилности на цилиндричним узорцима, који су добијени из истражних бушотина (укупно 8 узорака). Ова испитивања су извршена у претходној фази истражних радова (1992. године) у лабораторији Рударско-геолошког факултета у Београду [115].

\* \* \*

Геомеханичка испитивања која су коришћена у изради овог рада, како је напред речено, односе се на квазихомогену зону испуцалих кречњака, а извршена су у истражној галерији на левој обали. На слици 7.6 приказане су локације изведених испитивања *in situ* (један опит

бетонским блоком и један опит хидрауличком распињачом), као и места узетих узорка за испитивање дисконтинуитета (8 узорка). Коришћена су и испитивања монолита извршена на језгрима из оближње бушотине (3 узорка).



Слика 7.6: Локације геомеханичких испитивања у истражној галерији

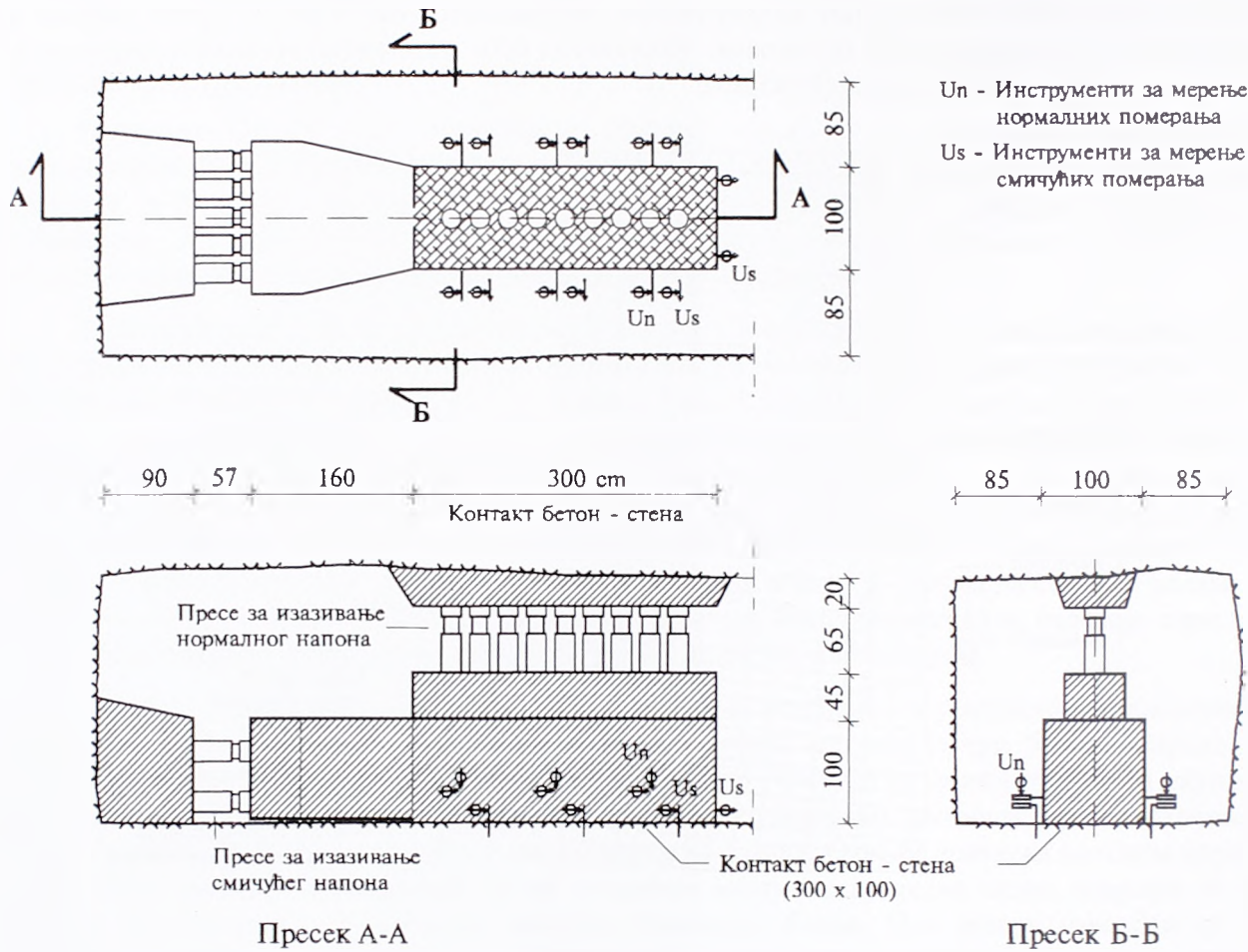
## 7.2 Комбиновани огледи притиска и смицања методом бетонског блока

### Опис методе

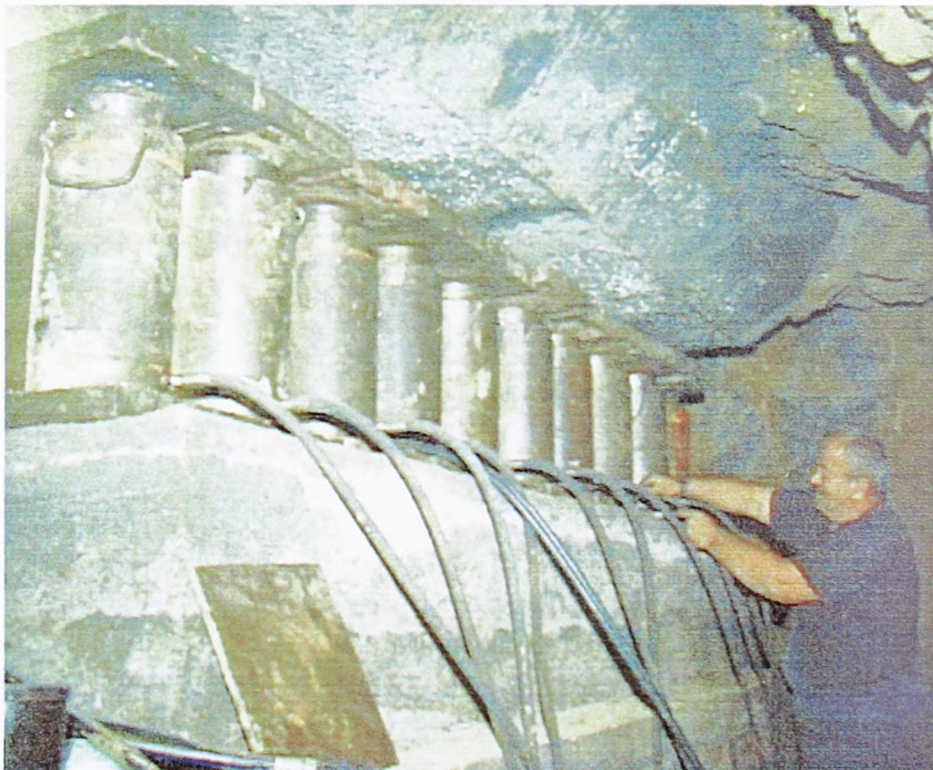
Комбиновани огледи притиска и смицања вршени су преко бетонског блока контактне површине  $3,0 \times 1,0 \text{ m}$ , који је избетониран заједно са потребним опорцима на изабраном потезу истражне галерије, односно у ниши која је за ту намену и грађена. Наношење вертикалног и хоризонталног оптерећења вршило се преко хидрауличких преса. Распоред вертикалних преса је био такав да даје приближно равномерну расподелу нормалног контактнoг напона, док су хоризонталне постављене на бочној страни блока, тако да се њиховим дејством изазива приближно равномерна расподела контактних напона смицања. Одговарајућа померања блока, нормална и смичућа, мерена су погодном распоређеним угибомерима. Диспозиција опита је приказана на слици 7.7, а фотографија испитивања на слици 7.8.

### Опрема за испитивање

Вертикалне пресе за изазивање нормалног напона у контактної спојници (девет преса, носивости по  $1000 \text{ kN}$ ), биле су равномерно распоређене на горњој површини испитног блока, тако да резултанта пролази кроз тежиште контакта. Систем за наношење вертикалног оптерећења био је подешен тако да буде обезбеђен ход у правцу наношења силе већи од очекиваног слегања бетонског блока, затим, да буде омогућено одржање нормалног оптерећења са тачношћу од 2% од максималног, током целог огледа, као и да буде обезбеђено слободно померање блока у правцу силе смицања.



Слика 7.7: Диспозиција испитивања методом бетонског блока



Слика 7.8: Испитивање у левообалној истражној галерији методом бетонског блока

Хоризонталне пресе (десет преса, носивости по 1000  $kN$ ) биле су равномерно постављене на бочној страни блока, тако да се њиховим дејством изазивала приближно равномерна расподела конактних напона смицања. Хоризонталне пресе су биле распоређене што је могуће ближе контактної површини, да би ефекат промене расподеле нормалних напона, био што мањи. Систем је морао да обезбеди ход у правцу дејства силе од најмање 5  $cm$ , као и тачност одржања смичућег оптерећења 2 % од максималног, током целог огледа.

Свака преса била је снабдевена сферним зглобом. Одговарајућим прибором било је обезбеђено да утицаји на померање блока у правцу смицања буду што мањи (челични ваљци за вертикалне пресе). Све вертикалне и све хоризонталне пресе биле су везане у два независна хидрауличка система, снабдевена посебним пумпама за изазивање притиска и манометрима за њихово мерење. Коришћена је опрема за независно мерење нормалне и смичуће силе, при чему је обезбеђена тачност мерења мин 2 % од највеће силе која је током огледа аплицирана.

Мерење померања извршено је механичком опремом са тачношћу мерења од 0,01  $mm$ . Током испитивања мерена су нормална и смичућа померања по ободу контактне површине. Носач инструмената за мерење померања је конструисан да омогући стабилност и непомерљивост током огледа, лаку монтажу инструмената, елиминацију паразитних утицаја (температура, деформација бетонског блока, и др.) и приступачност сваком инструменту током огледа са циљем контроле или корекције опсега.

### Програм испитивања

Програм огледа састојао се из три дела. У првој фази испитивања изазиван је само нормални напони у контакту. Мерена су само нормална померања блока. Оптерећење је наносено у три циклуса, поступно, кроз прираштаје који су константни у једном циклусу, а варирају од циклуса до циклуса. Максимални притисци у циклусима су износили:  $p_I = 0,82 MPa$ ;  $p_{II} = 1,63 MPa$  и  $p_{III} = 1,84 MPa$ . Трећа степеница оптерећења била је мања од предвиђене ( $p_{III} = 1,84 MPa < 2,45 MPa$ ) због попуштања горњег опорца под оптерећењем. Трајање степеница оптерећења је износило 15 минута (изузев за највеће и најмање оптерећење у циклусу). Трајање оптерећења на максималној степеници износило је 120 минута. Степеница минималног оптерећења је трајала 60 минута. За дужину трајања максималног и минималног оптерећења у циклусу важио је и критеријум стабилизације нормалних померања: да у интервалу од последњих 15 минута стабилизације, прираштај просечног померања буде мањи или једнак 0,02  $mm$ .

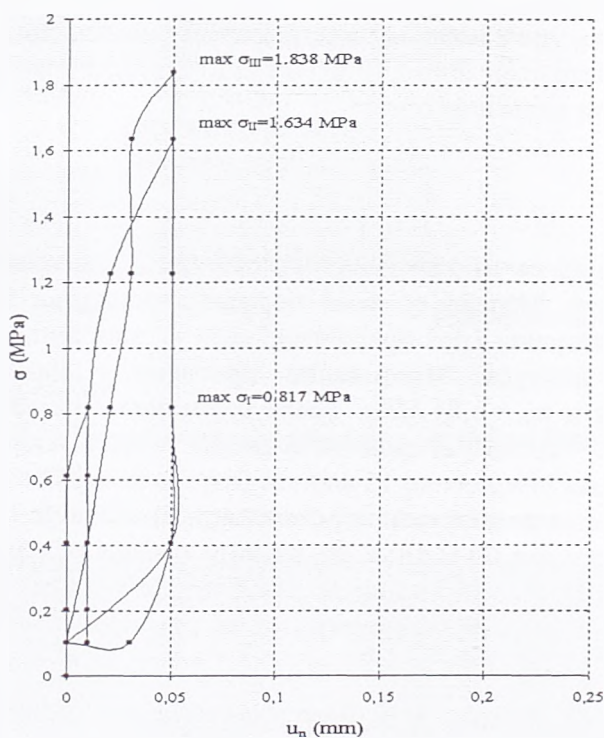
Другу фазу испитивања чинило је 5 циклуса наносења смичућег оптерећења, при различитим нормалним напонима за сваки циклус смичућег оптерећења. Вредности нормалних напона су биле следеће:  $\sigma (MPa) = 0,306; 0,613; 0,885; 1,191$  и  $1,293$ . Максималне вредности смичућег оптерећења на одређеном циклусу ишле су до одређеног односа према нормалном напону на том циклусу, диктираног граничним капацитетом ношења хоризонталних преса на последњем циклусу. Трајање степеница оптерећења засновано је на сличним критеријумима као за фазу испитивања деформабилности на притисак.

Трећа фаза испитивања вршена је на исти начин као и друга, при чему смичућа сила није била ограничена, већ је наносена до појаве лома у контакту. Нормални напон је одржан константним током ове фазе огледа. Смичуће оптерећење је наносено поступно, у степеницама, до лома, односно клизања комплетног блока, при чему је вршено поступно кориговање величине прираштаја оптерећења и дужине трајања степенице у циљу прецизнијег одређивања тренутка лома. Због високих вредности чврстоћа, имајући у виду и капацитет уређаја, смицање је извршено при ниској вредности нормалног напона ( $\sigma_{III} = 0,306 MPa$ ). Трајање степеница оптерећења је било константно и износило 15 минута, докле год је смичући напон био мањи од максималног смичућег напона из испитивања деформабилности на смицање (при одговарајућем нормалном напону). Када је смичући напон превазишао ову вредност вршено је постепено смањивање величине степенице (прираштаја) оптерећења, као и постепено повећавање њеног трајања. При томе је поштован критеријум величине прираштаја просечног смичућег померања, која треба да буде мања од 0,01  $mm$  у интервалу од 5 минута.

### Резултати испитивања

Током испитивања мерене су следеће величине: укупна нормална и смичућа сила ( $N$  и  $S$ ), нормална и смичућа померања бетонског блока и смичућа померања стене по ободу контактне површине. Нормални и смичући напон срачунати су као просечне вредности за контактну површину, према изразима:  $\sigma = N/A$  и  $\tau = S/A$ , где је  $A$  површина активног контакта блока и стене. Подаци о померањима су осредњавани за целу контактну површину ( $u_s$  – смичућа померања и  $u_n$  – нормална померања).

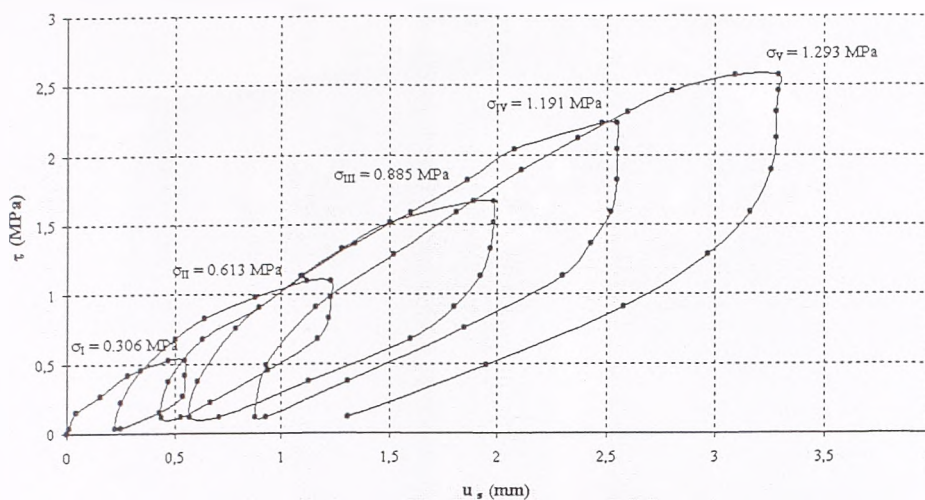
У првој фази испитивања опсег оптерећења од  $\sigma = 0$  до  $\sigma = 1,838 \text{ MPa}$  није био довољан да изазове неко значајно вертикално померање због крутости кречњачке подлоге, тако да су измерене деформације у овој фази нерепрезентативне за анализу параметара конститутивног модела. Резултати испитивања прве фазе приказани су на дијаграму  $\sigma - u_n$ , на слици 7.9.



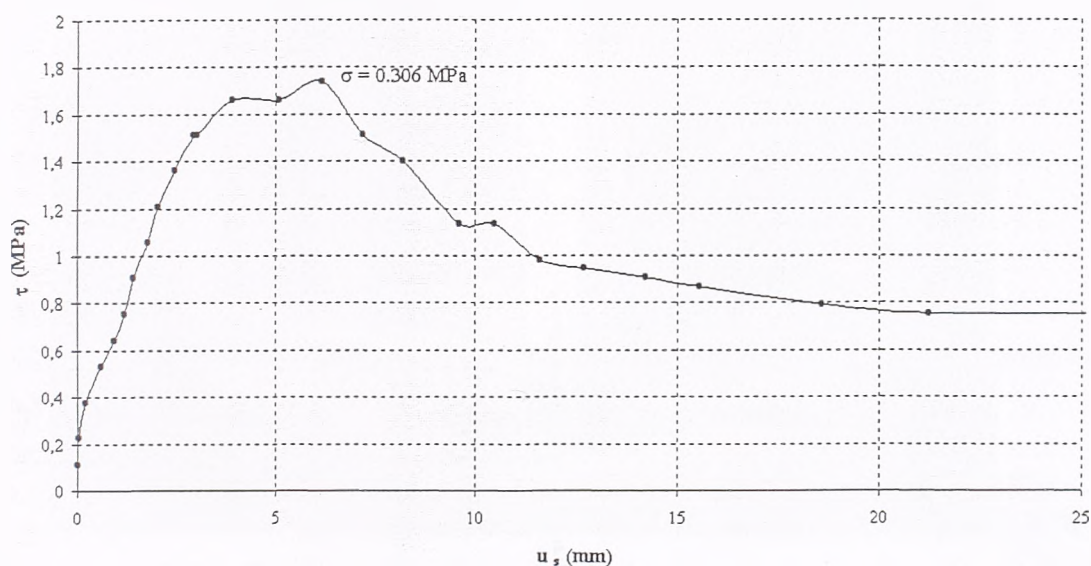
Слика 7.9: Резултати опита притиска методом бетонског блока

Резултати испитивања друге фазе приказани су дијаграмом  $\tau - u_n$  на слици 7.10. Дијаграм смицања у функцији смичућег напона приказан је за осредњену вредност мерења на свих осам инструмената. На основу мерених вертикалних померања констатовано је да за време смицања није било практично никаквог одизања блока, па је због тога евентуална појава напона затезања у делу контактне површине искључена.

Приказ испитивања треће фазе дат је графички (слика 7.11) и то кроз осредњене вредности деформација смицања из свих осам инструмената. Анализом вертикалних померања по паровима може се уочити да су забележена вертикална померања до граничне чврстоће на смицање  $\tau = 1,74 \text{ MPa}$  веома мала и усмерена у правцу слегања. После вршне чврстоће и пада смичућег напона на резидуалне вредности, настаје издизање блока милиметарског реда, што је последица дилатантног понашања стенске масе при лому. Облик криве показује да се није радило о кртом лому. Наиме, уочљива је релативно велика вредност смичућих померања пре почетка лома ( $u_s = 3,92 \text{ mm}$ ), затим, значајно померање у области лома ( $u_s = 3,92 - 6,16 \text{ mm}$ ), као и постепени пад смичућег напона на резидуалну вредност ( $u_s \geq 18,55 \text{ mm}$ ).



Слика 7.10: Резултати опита смицања методом бетонског блока

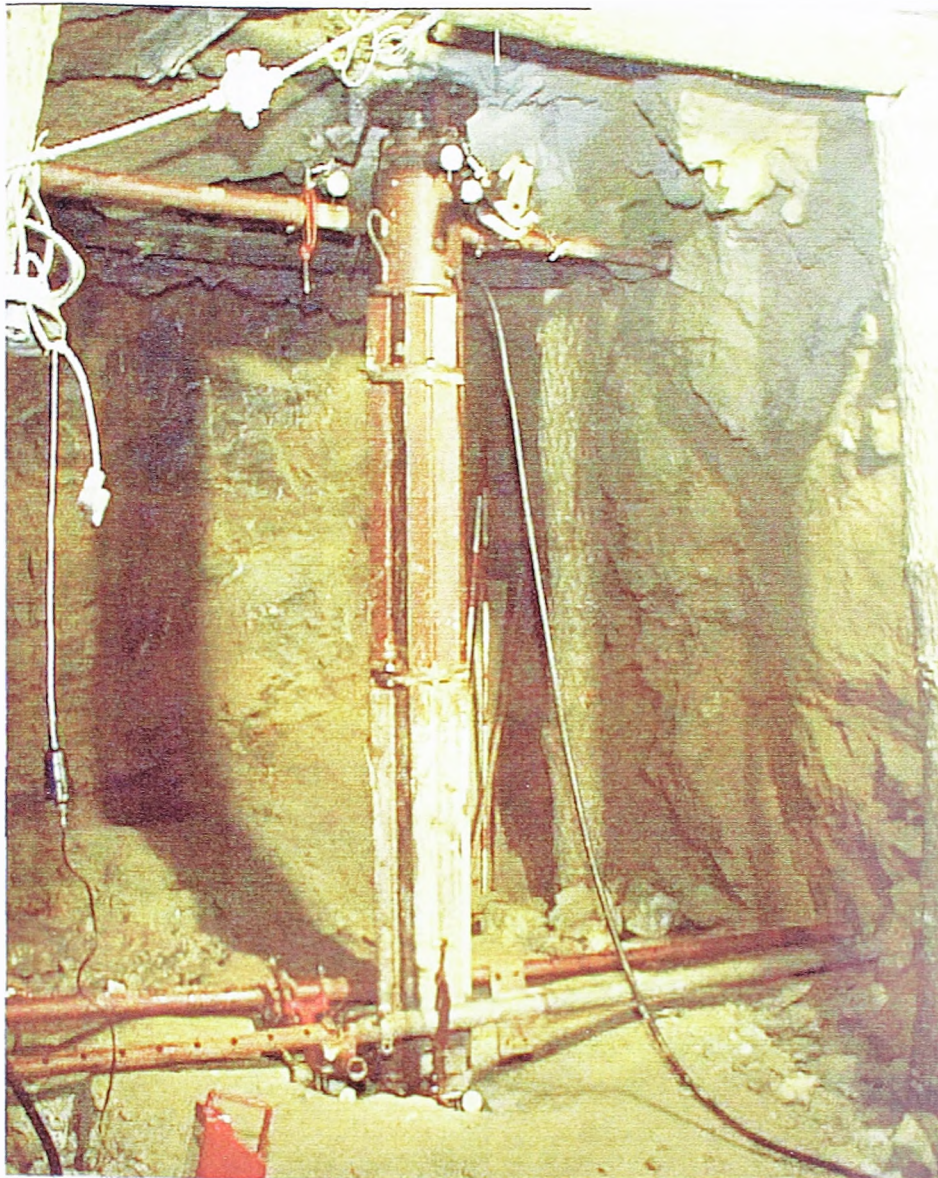


Слика 7.11: Резултати опита граничне носивости методом бетонског блока

### 7.3 Огледи притиска методом круте хидрауличке распињаче

#### Опис методе

Метода круте хидрауличке распињаче састоји се од оптерећивања и растерећивања стенске масе и симултаног мерења њених деформација. Наношење оптерећења врши се хидрауличком пресом. Оптерећење се преноси на контактну површину преко круте разупоре (дебелозидне челичне цеви) и крутих преносника (дебеле челичне плоче). Основни подаци о деформационим карактеристикама стенске масе добијају се из измерених деформација помоћу три угбомера којима се мери угиб круте плоче. За испитивање су претходно дотеране огледне површине: одстрањене се све лабаве и растресене партије стенске масе; огледне површине су поравнате тако да су две наспремне површине перфектно паралелне и да неравнине на огледним површинама не буду веће од  $\pm 1$  см. Мерена су само нормална померања. Фотографија са испитивања је приказана на слици 7.12, а диспозиција опита на слици 7.13.



Слика 7.12: Испитивање у левообалној истражној галерији методом хидрауличке распињаче

#### Опрема за испитивање

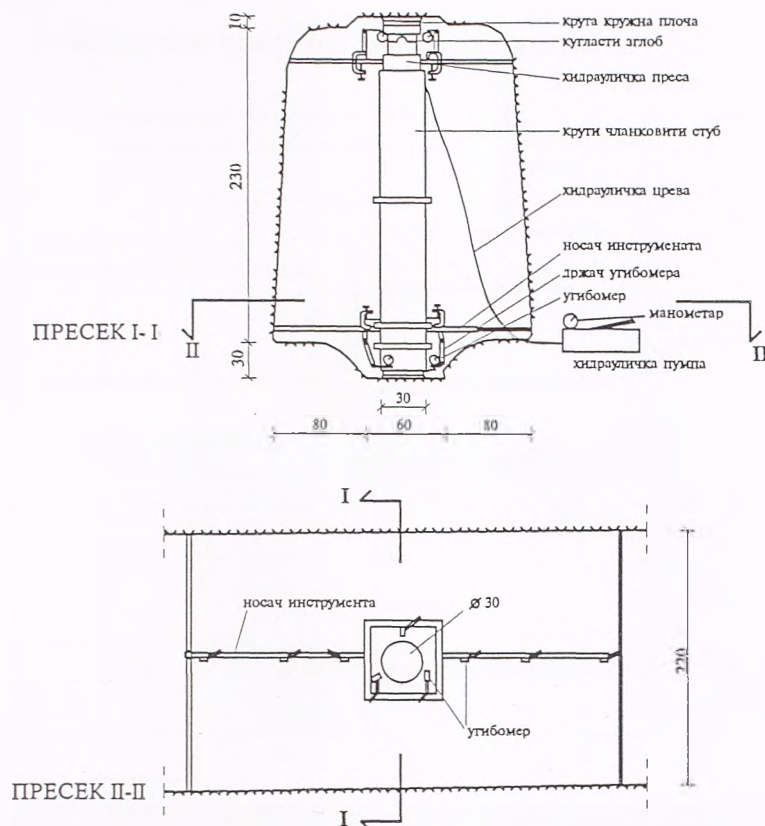
Уређај за испитивање састојао се од система за оптерећивање и система за мерење деформација. Уређај за оптерећивање чине:

- две круте кружне плоче  $\phi 32 \text{ cm}$ , које налажу на стенску масу на два супротна краја истражне галерије, у попречном пресеку на локацији на којој се врши испитивање;
- два кугласта зглоба која налажу на круте челичне плоче и служе за центрисање силе;
- један крути чланковити стуб, који служи за преношење оптерећења;
- хидрауличка преса капацитета  $1000 \text{ kN}$ , која служи за изазивање оптерећења;
- хидрауличке пумпе и хидрауличка црева капацитета преко  $500 \text{ bar}$ , помоћу којих се активира хидрауличка преса;
- манометар способан да мери хидраулички притисак до  $500 \text{ bar}$ .

Уређај за мерење деформација на свакој од наспремних оптерећених површина састојао се од:

- механичких угбомера са ходом од  $1 \text{ cm}$  и прецизношћу читавања од  $0,01 \text{ mm}$ ;
- недеформабилног и непомерљивог носача инструмената, који се фиксира за бокове галерије ван зоне утицаја распињаче;
- држача угбомера, који се причвршћују за носач инструмената;
- анкера, уграђених у стену, према распореду са слике 7.13; слободни крајеви угбомера налажу на ову челичну плочицу и на тај начин мере померања стенске масе.





Слика 7.13: Диспозиција испитивања методом хидрауличке распињаче

Програм испитивања

Испитивање деформабилности на притисак је вршено тако што је оптерећење нането поступно, у циклусима (осам циклуса), према следећем:

- Максимална оптерећења у циклусима била су:
 

$\sigma_I = 1 \text{ MPa}$	$\sigma_{II} = 2 \text{ MPa}$	$\sigma_{III} = 3 \text{ MPa}$	$\sigma_{IV} = 4 \text{ MPa}$
$\sigma_V = 6 \text{ MPa}$	$\sigma_{VI} = 8 \text{ MPa}$	$\sigma_{VII} = 10 \text{ MPa}$	$\sigma_{VIII} = 12 \text{ MPa}$
- Прираштаји оптерећења били су:
 

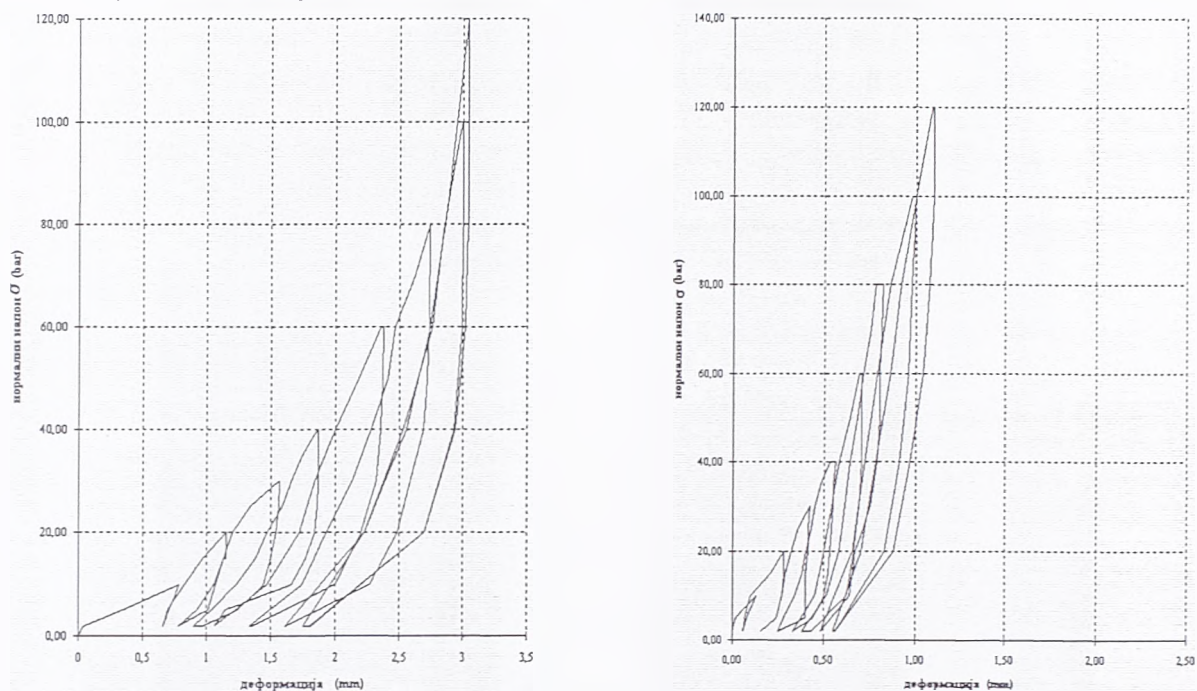
од првог до четвртог циклуса	0,5 MPa
у петом и шестом циклусу	1,0 MPa
у седмом и осмом циклусу	2,0 MPa

Трајање оптерећења на степеницама оптерећења и растерећења износило је 15 минута. Трајање оптерећења на максималним притисцима у циклусима износило је најмање 60 минута, односно до стабилизације деформације са временом, на свакој од две оптерећене површине. Критеријум стабилизације је испуњен када прираштај највеће ободне деформације оптерећене површи буде мањи од 0,01 mm у трајању од 30 минута. Трајање оптерећења на минималним оптерећењима у циклусу износило је најмање 30 минута, односно до стабилизације оптерећења. Критеријум стабилизације је испуњен када прираштај деформације највеће ободне деформације оптерећене површи буде мањи од 0,01 mm у трајању од 15 минута.

Резултати испитивања

Током испитивања мерена је укупна нормална сила, као и нормално померање, односно угиб круте плоче. Нормални напон срачунат је као просечна вредност за контактну површину, према изразу:  $\sigma = N/A$ , где је  $A$  површина контакта круте плоче и стене. Подаци о деформацијама стенске масе испод круте плоче ( $u_n$ ) добијени су помоћу три угибомера, осредњавањем мерених вредности. Резултати испитивања методом хидрауличке распињаче

приказани су графички. Приказани су дијаграми просечних померања круте плоче (у кровини и подини) у функцији оптерећења (слика 7.14).



Слика 7.14: Резултати опита притиска методом хидрауличке распињаче дијаграм деформација у функцији напона – а) подина – б) кровина

На дијаграмима померање - притисак на мерним местима у подини и кровини уочавају се велике разлике у величинама и врсти забележене деформације, што је последица веће растресености кровине (већи отвор дисконтинуитета) услед формирања истражне галерије.

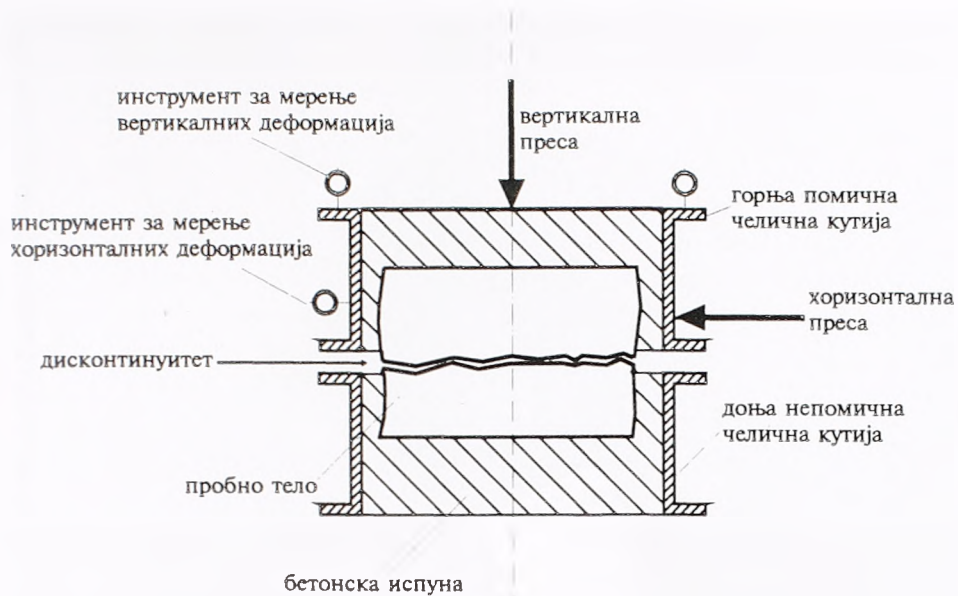
#### 7.4 Испитивања дисконтинуитета на узорцима

##### Опис методе

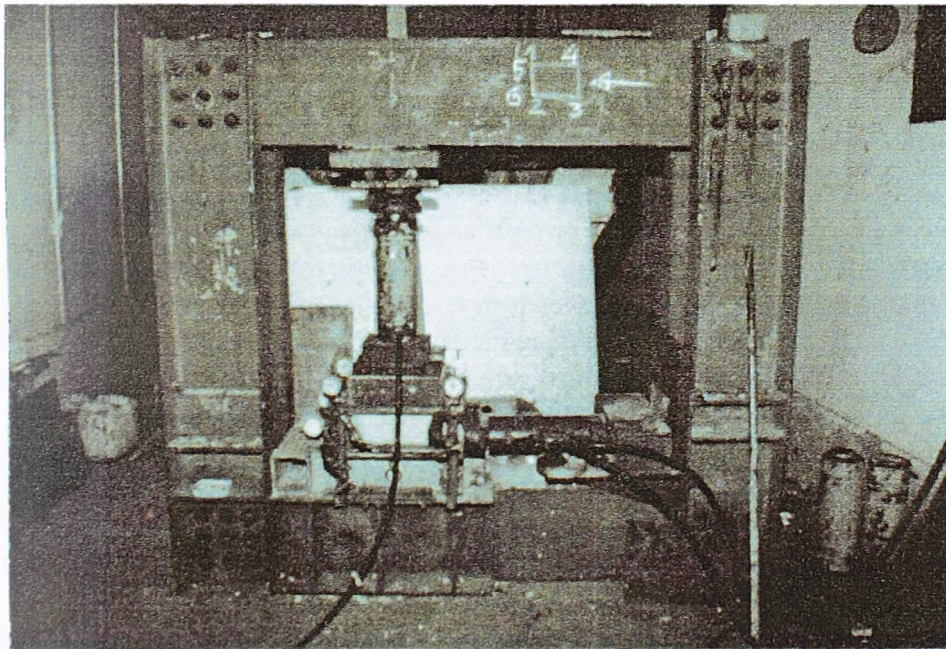
Испитивање механичког понашања пукотина извршено је на цилиндричним пробним телима, димензија  $\phi 150\text{ mm}$ , дужине 150-200 mm, уграђеним у челичне кутије постављене у специјалном раму (слика 7.15). Фотографија са испитивања приказана је на слици 7.16.

Обезбеђени су услови чистог смицања по унапред одређеној површи – природној пукотини. Нормално и смичуће оптерећење наносено је помоћу хидрауличких преса. Одговарајуће деформације мерене су помоћу угибомера распоређених према слици 7.15.

Прво је поступно наносено нормално оптерећење, односно нормални напон, а затим се под том вредношћу нормалног напона, која је током огледа одржавана константном, вршило поступно смицање, све до постизања резидуалне чврстоће на смицање. Наношење оптерећења (нормалног и смичућег) вршено је у степеницама, према програму испитивања који укључује величину и трајање степенице, као и критеријуме консолидације. После добијања прве резидуалне вредности чврстоће на смицање, пробно тело је враћано у почетни положај. Понављан је поступак наношења нормалне силе и смицања за још три до четири вредности нормалног напона, с тим што је први опит трења рађен са највећим нормалним напонам, а последњи са најмањим. Огледи трења изведени су по брзом поступку, без испуњавања критеријума консолидације нормалних померања и са брзим наношењем смичућег напона.



Слика 7.15: Кутија за испитивања дисконтинуитета



Слика 7.16: Испитивање дисконтинуитета у лабораторији

#### Припремни радови, узорковање

Вађење пробних тела је вршено машинским путем, употребом ротационе бушилице са дијамантском круницом, уз минимално коришћење воде за хлађење. На тај начин је постигнуто да пробна тела буду непоремећена. Пробно тело је вађено тако да га дисконтинуитет полови по изводници цилиндра на два приближно једнака дела. Одступање у положају дисконтинуитета на челу пробног тела није било веће од  $1/4$  пречника пробног тела, при чему су продори пукотине на оба краја цилиндра били паралелни. Пробна тела су била прописно заштићена до испитивања. Пре уграђивања пробних тела у кутије за смицање извршено је поравнање њихових основа. Пробна тела су уграђивана у кутију за смицање тако да дисконтинуитет лежи у средини зазора између доње и горње половине кутије. Овај зазор је износио око  $20\text{ mm}$ . Простор између пробног тела и зидова кутије попуњаван је бетоном. На слици 7.17 приказана је фотографија једног од места узимања узорка.



Слика 7.17: Место узетог узорка за опит смицања по дисконтинуитету

#### Опрема за испитивање

Уређај за испитивање је приказан на фотографији 7.17 има следећи садржај:

- Средство за изазивање нормалног оптерећења: хидраулички систем, конструисан тако да омогућује равномерну расподелу оптерећења у равни која се испитује. Систем има ход у правцу наношења силе већи од очекиваног слегања пробног тела и треба да омогући одржавање нормалног оптерећења са тачношћу од 2 % од потребног, током целог огледа.
- Средство за изазивање смичућег оптерећења: хидраулички систем, конструисан тако да равномерно преноси оптерећење на чело једне половине пробног тела, при чему резултанта мора да делује у равни смицања. Опрема је конструисана тако да омогући ход у току смицања већи од 10 % дужине пробног тела у правцу смицања, односно најмање 5 cm.
- Опрема за независно мерење нормалних и смичућих сила са тачношћу већом од 2 % од највеће силе која може да се постигне у току огледа.
- Опрема за мерење нормалног и смичућег померања, која треба да има најмањи подеок 0.01 mm и ход довољан да се без премештања инструмената може пратити померање од 25 mm. За мерење нормалних померања коришћена су 4 инструмента распоређена у 4 угла горње половине кутије; за смичућа померања – 2 инструмента распоређена на супротном крају од краја на коме делују уређаји за изазивање смичуће силе.

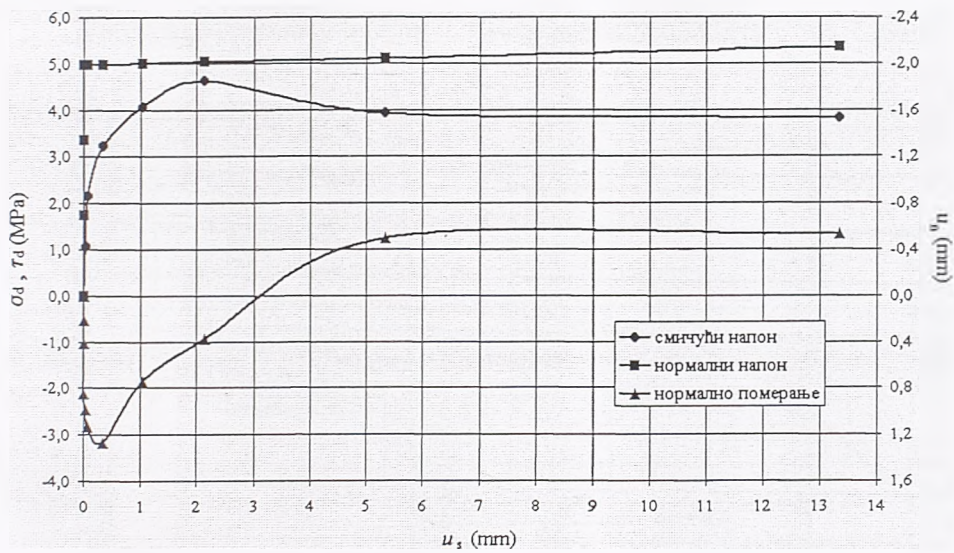
#### Програм испитивања

Прво је у степеницама наношен нормални напон до предвиђене максималне вредности за испитивано пробно тело, који је даље одржаван константним. Затим је наношен смичући напон, такође у степеницама, чија је величина бирана зависно од забележених смичућих померања (у почетку су степенице оптерећења биле веће и поступно су смањиване). Након попуштања и лома, даљим смицањем пробног тела док се величина смичуће силе не устали, одређивана је и резидуална чврстоћа дисконтинуитета. Трајање степенице нормалног напона је било толико да омогући 3-4 читавања инструмената на основу којих се јасно могао уочити облик функције развоја нормалних померања. На вредностима номиналног нормалног напона трајање степенице је било најмање 30 минута, односно до стабилизације нормалних померања.

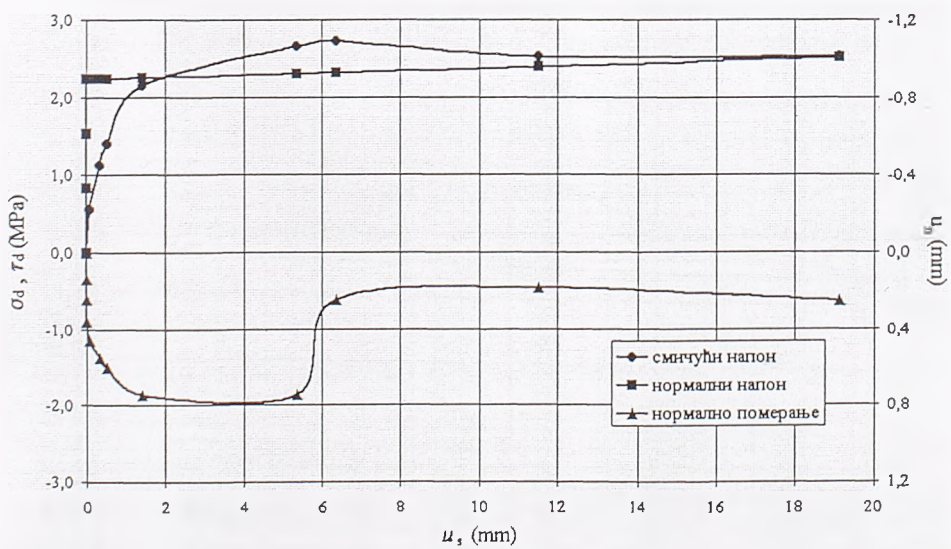
Критеријум стабилизације је следећи: консолидација је испуњена када се у интервалу од 10 минута добије прираштај нормалног померања мањи од 0.05 mm. По добијању вршне и прве резидуалне чврстоће на смицање при номиналном нормалном напону, вршени су огледи трења. При трењу мерена су само смичућа померања.

Резултати испитивања

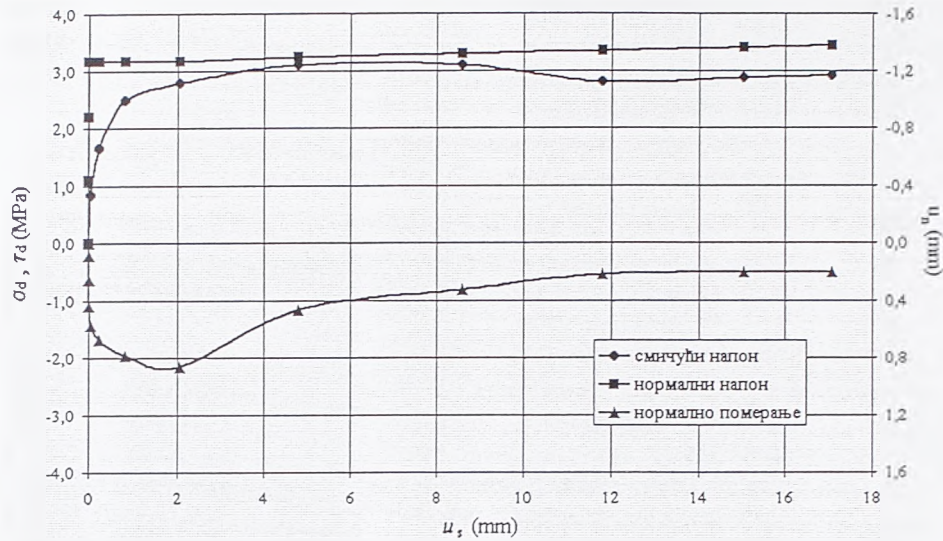
Током испитивања мерене су следеће величине: укупна нормална и смичућа сила ( $N$  и  $S$ ), као и релативна нормална и смичућа померања површине дисконтинуитета. Нормални и смичући напон срачунати су као просечне вредности за површину дисконтинуитета, према изразима:  $\sigma = N/A$  и  $\tau = S/A$ , где је  $A$  активна површина дисконтинуитета (са поправком услед смичућег померања). Подаци о померањима су осредњавани. На сликама 7.18 до 7.25 приказани су дијаграми нормалног напона у функцији нормалног померања, дијаграми смичућег напона у функцији смичућег померања и дијаграми нормалног померања у функцији смичућег померања.



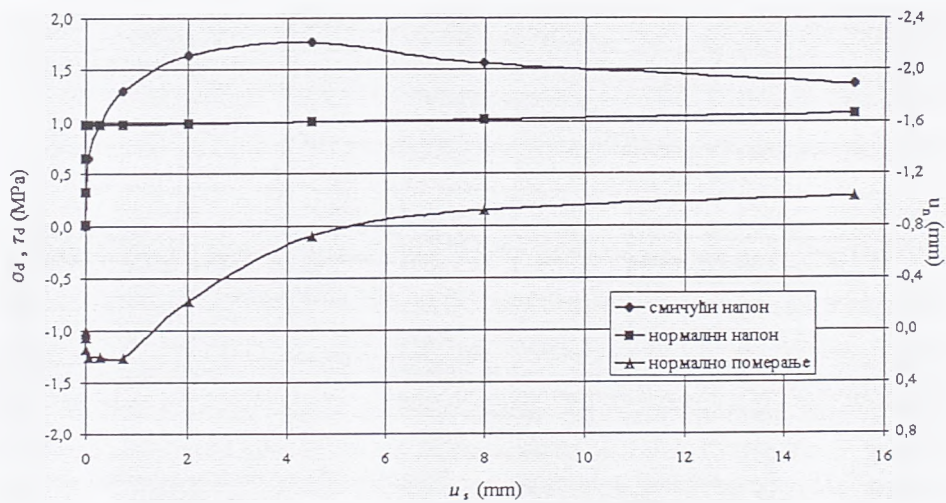
Слика 7.18: Резултати испитивања 1. узорка дисконтинуитета



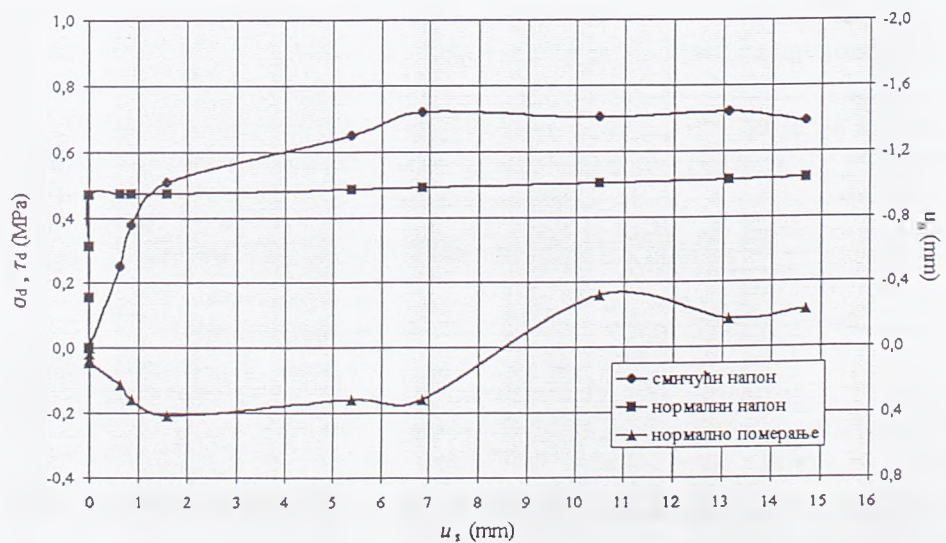
Слика 7.19: Резултати испитивања 2. узорка дисконтинуитета



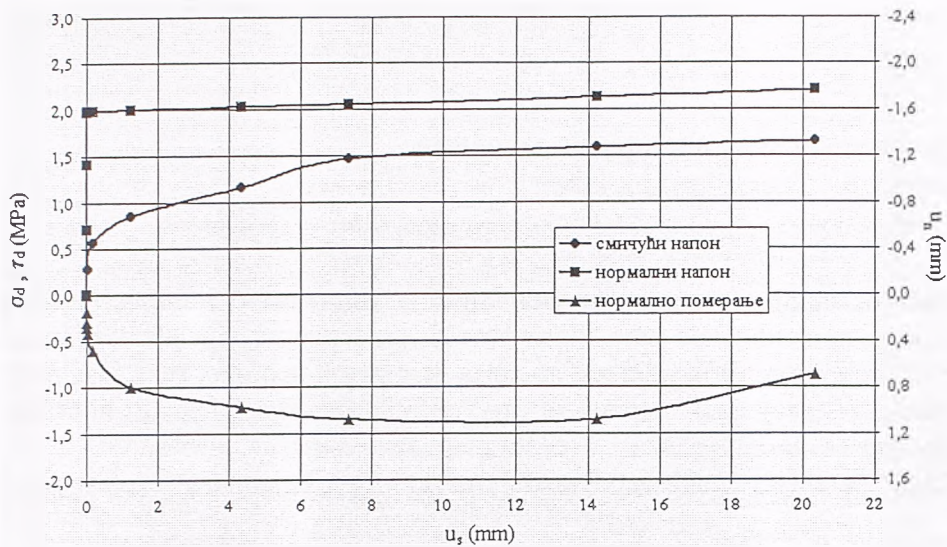
Слика 7.20: Резултати испитивања 3. узорка дисконтинуитета



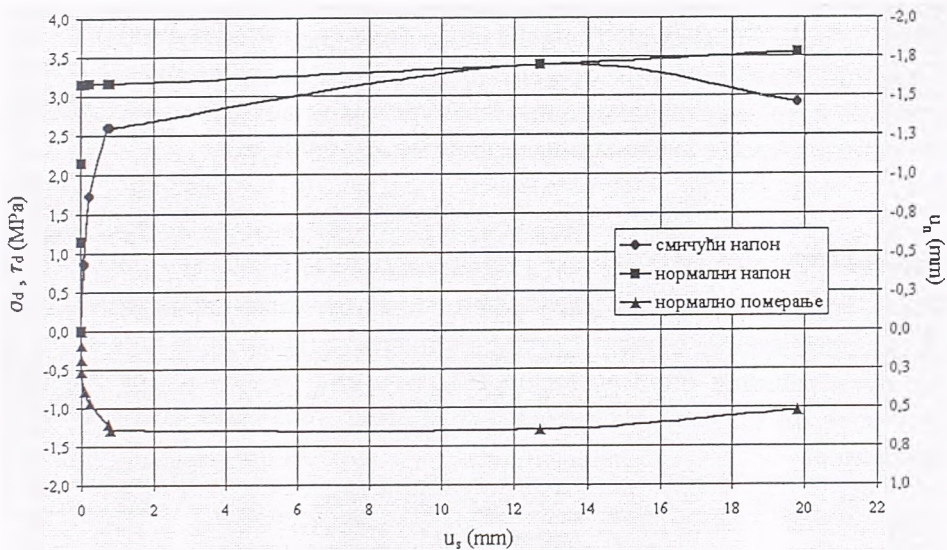
Слика 7.21: Резултати испитивања 4. узорка дисконтинуитета



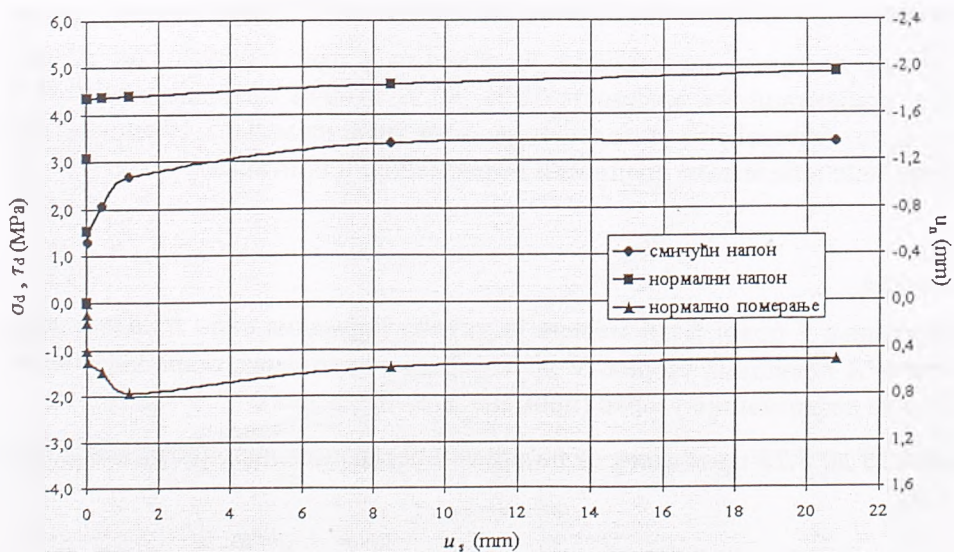
Слика 7.22: Резултати испитивања 5. узорка дисконтинуитета



Слика 7.23: Резултати испитивања б. узорка дисконтинуитета



Слика 7.24: Резултати испитивања 7. узорка дисконтинуитета



Слика 7.25: Резултати испитивања 8. узорка дисконтинуитета

## 7.5 Испитивања стенског монолита на узорцима

### Опис методе

Напонско-деформацијско понашање монолита је испитивано помоћу једноаксијалних опита. Испитивање је вршено у две фазе. Прва фаза се односила на одређивање једноаксијалне притисне чврстоће монолита, оптерећењем до лома изабраних пробних тела (4-5 пробних тела чини један узорак). У првој фази мерена је само аксијална сила, односно нормални напон. Друга фаза односила се на одређивање и целог напонско-деформацијског одговора стенског монолита у једноаксијалним условима, обухватајући мерење аксијалног напона и деформације.

### Опрема за испитивање

За једноаксијални опит коришћена је преса капацитета 2000 *kN*. Оптерећење је преношено преко челичних кружних плоча на оба краја цилиндричног пробног тела. Челичне кружне плоче су имале равну површину (највеће неравнине нису прелазиле 0,0005 *mm*). Горња плоча је имала сферично лежиште чији се центар, заједно са центром кружне горње површи пробног тела налази на истој, вертикалној оси. Осим уређаја за оптерећење апаратура је имала и уређај за врло прецизно мерење вертикалних деформација (0,002 *mm*).

### Припрема пробних тела

Пробна тела су добијена машинском обрадом; била су цилиндричног облика пречника 54 *mm*, при чему је однос висине и пречника био најмање 2,5. Површине које се оптерећују су обрађене тако да су неравнине биле мање од 0,02 *mm*, док су неравнине на вертикалним површинама биле мање од 0,3 *mm*. Аксијална оса пробног тела није имала већи отклон од 0,05 *mm* на 50 *mm* висине.

### Поступак испитивања

У првој фази испитивања оптерећење је повећавано у границама од 0,5-1,0 *MPa/s*, што значи да се лом пробног тела дешавао након 5-10 минута континуалног, растућег оптерећења. У току опита константно је праћено и бележено вертикално оптерећење и време трајања опита.

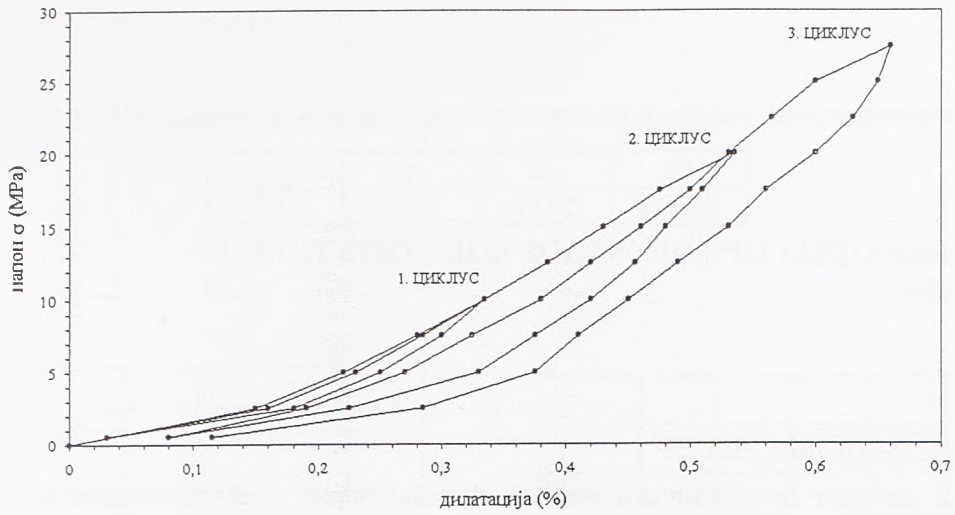
У другој фази, поступак испитивања је обављан у три циклуса где су максимална оптерећења имала оријентациону вредност: 20 %, 40 % и 60 % од једноаксијалне чврстоће. Прираштај вертикалног оптерећења је подешен да опит траје најмање 5-10 минута по циклусу. Континуално су праћене и бележене вредности деформације и притиска.

### Резултати испитивања

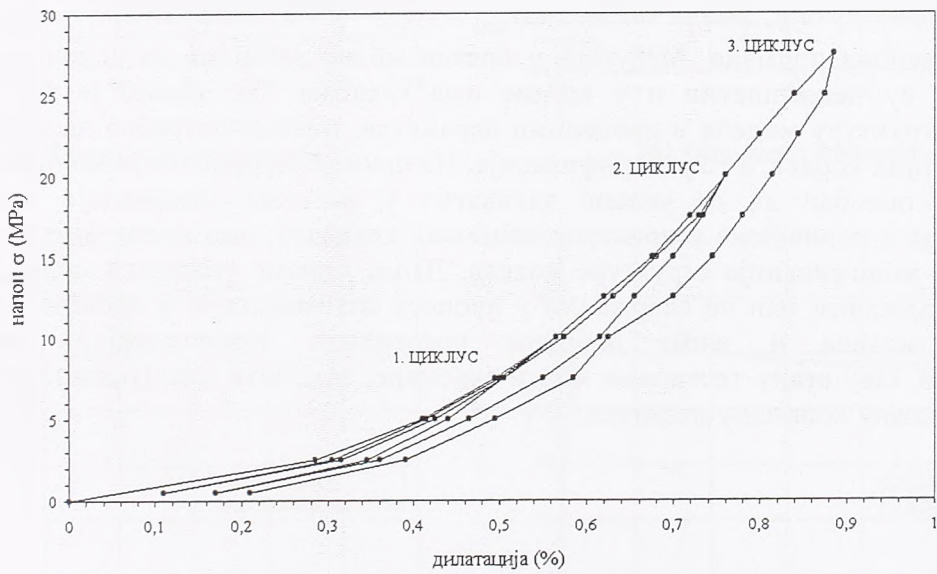
Током испитивања у првој фази мерена је укупна нормална сила  $N$ , односно нормални напон  $\sigma = N/A$ , где је  $A$  површина узорка. У другој фази испитивања, осим нормалног напона, мерене су и аксијалне деформације узорка (промена дужине узорка).

На сликама 7.26 до 7.28 приказани су дијаграми нормалног напона  $\sigma$  (*MPa*) у функцији деформације  $\varepsilon$  (%).

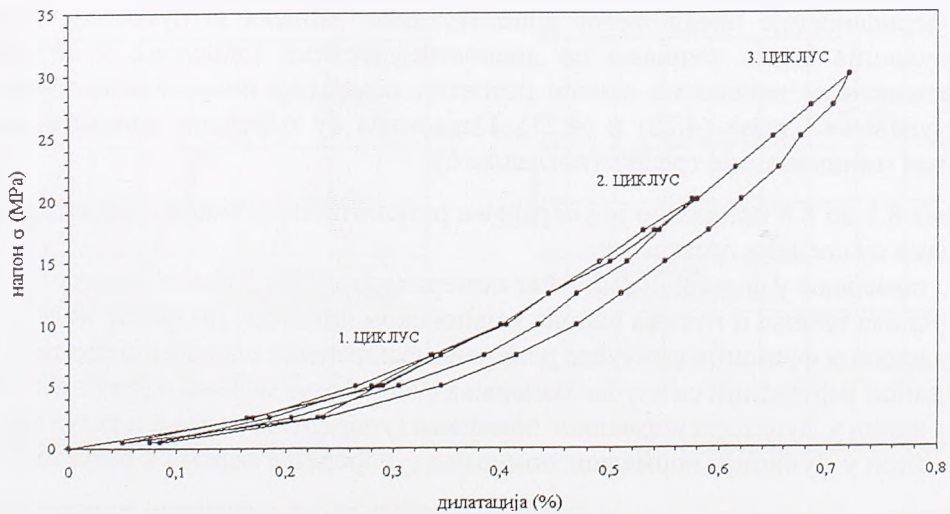




Слика 7.26: Резултати испитивања 1. узорка монолита



Слика 7.27: Резултати испитивања 2. узорка монолита



Слика 7.28: Резултати испитивања 3. узорка монолита

## 8. ВЕРИФИКАЦИЈА ПРЕДЛОЖЕНОГ КОНСТИТУТИВНОГ МОДЕЛА

### Верификација и тестирање модела

Добро је познато да различити начини оптерећивања у експериментима доводе до различитих реакција. Из тог разлога, циљ тестова је да простудирају односе између улазних података (узрок), и излазних података (ефекат, дакле, последица) за променљиве факторе, и то на неки систематичан начин.

У идеалном случају, имали бисмо:  $\text{err}_{\text{mod}} = y(\xi_c) - \tilde{y} = 0$ , дакле нулту грешку модела преко целог распона примене. Међутим, у пракси модел добијамо на основу измерених података који су некомплетни и у којима има грешака. Па, пошто је то тако, кад успоставимо структуру модела и проценимо параметре, постаје потребно да урадимо још неколико додатних корака, а то је верификација. На пример, постаје потребно проверити да ли је модел способан да се уклопи адекватно у физичке опсервације садржане у експериментима и коришћене у приступу најмањих квадрата. Ако модел није то у стању, биће потребна модификација структуре модела. Даље, морамо тестирати модел у разним применама, садржаним или не садржаним у процесу оптимизације, и проверити да ли су перформансе модела и њиме добијена предвиђања задовољавајући или нису задовољавајући. Ову етапу тестирања многи занемаре, зато што немају довољно времена или немају довољну количину података.

### 8.1 Верификација предложеног конститутивног модела за пукотину

У циљу верификације предложеног конститутивног модела за пукотину, извршена је нумеричка симулација опита смицања по дисконтинуитетима (описаних у поглављу 7.4), непосредним решавањем напона на основу познатих померања применом поступка који се своди на израчунавање израза (4.22) и (4.23). Параметри су одређени описаним поступком естимације, путем минимизације грешке (поглавље 6).

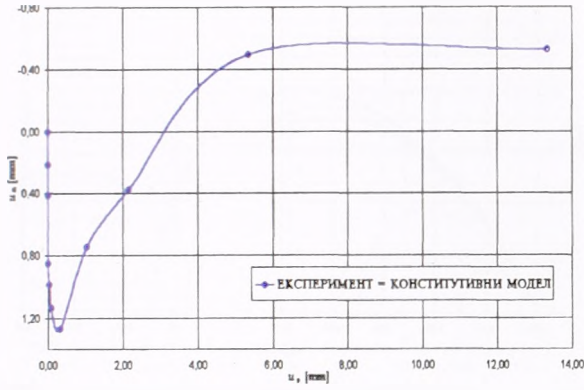
На сликама 8.1 до 8.8 приказано је упоређење резултата симулације и мерених вредности напона. Приказани су следећи дијаграми:

- (а) нормално померање у функцији смичућег померања (мерење, улаз за модел)
- (б) промена услова течења и путања напона у напонском простору (резултат модела)
- (в) нормални напон у функцији смичућег померања (упоређење мерења и резултата модела)
- (г) смичући напон у функцији смичућег померања (упоређење мерења и резултата модела)
- (д) нормални напон у функцији нормалног померања (упоређење мерења и резултата модела)
- (ђ) смичући напон у функцији нормалног померања (упоређење мерења и резултата модела)

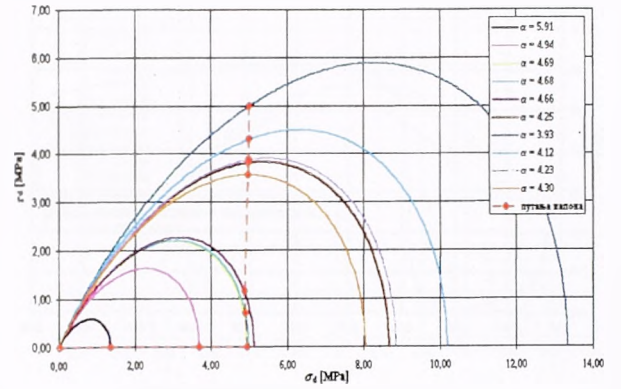
Из приказанах слика види се да је модел способан да се адекватно уклопи у физичке опсервације. Нарочито се истиче да модел показује једнако добро понашање и у фази нормалног оптерећења и у фази смицања.

Tabela 8.1: Параметри конститутивног модела за 1. узорак дисконинуитета

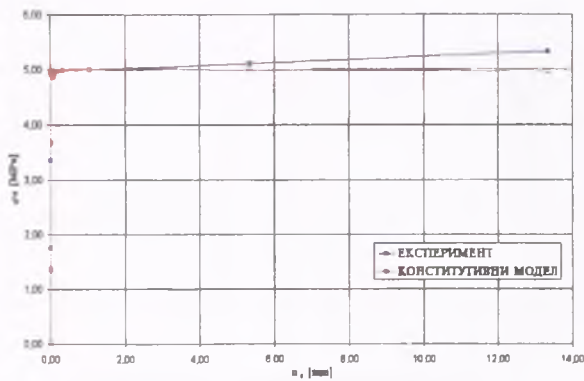
$n$	$\gamma$	$k_n$	$u^*$
2,18	6,24	37,92	0,0058



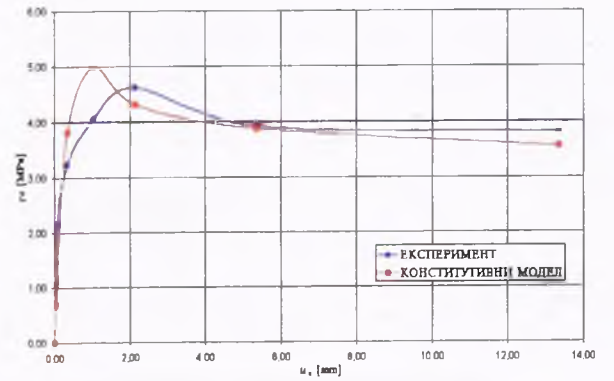
(a) Мерене деформације



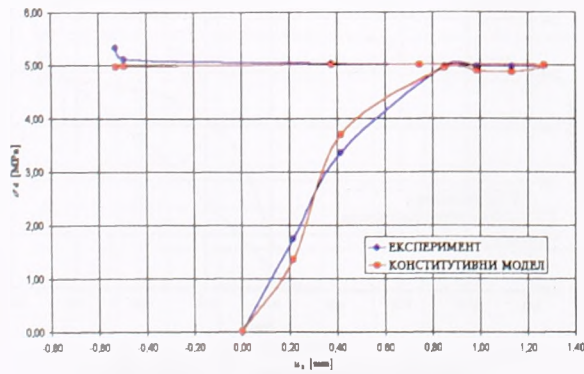
(б) Напонска путања – модел



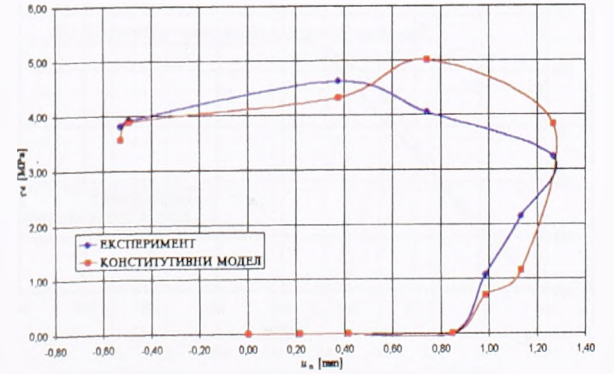
(v) Нормални напон - упоређење



(г) Смичући напон - упоређење



(d) Нормални напон - упоређење

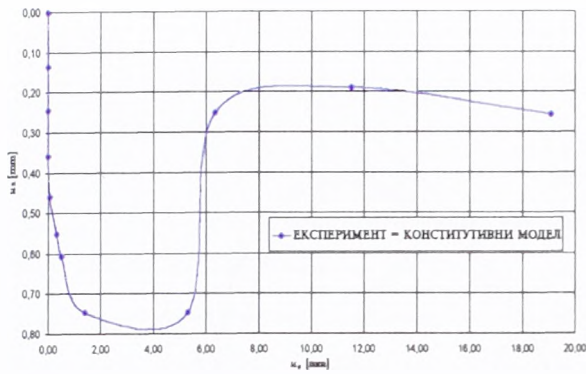


(h) Смичући напон - упоређење

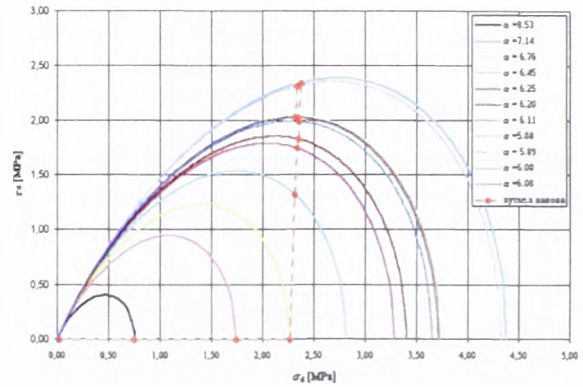
Слика 8.1: Упоређење експеримента и модела на 1. узорку дисконинуитета (a-ћ)

Табела 8.2: Параметри конститутивног модела за 2. узорак дисконтинуитета:

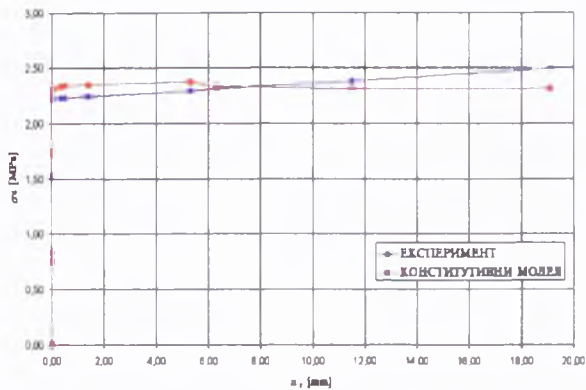
$n$	$\gamma$	$k_n$	$u^*$
2,21	8,04	18,92	0,0020



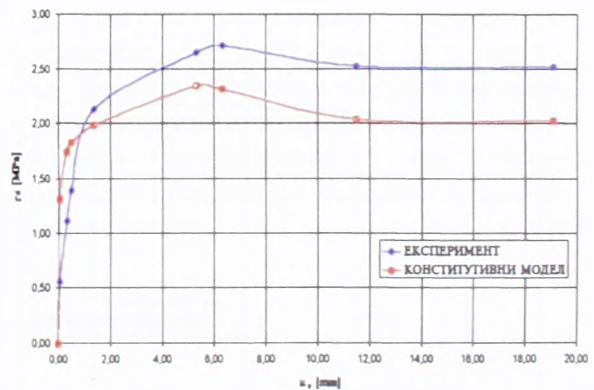
(а) Мерене деформације



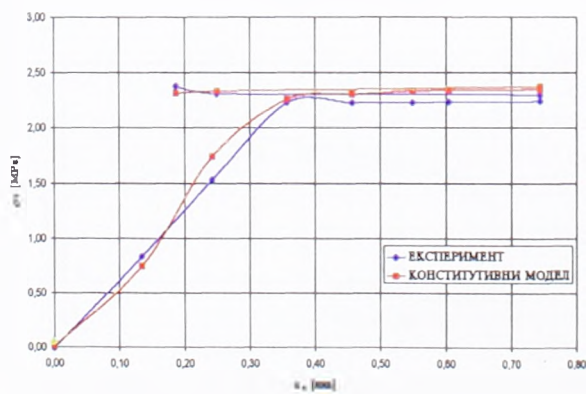
(б) Напонска путања – модел



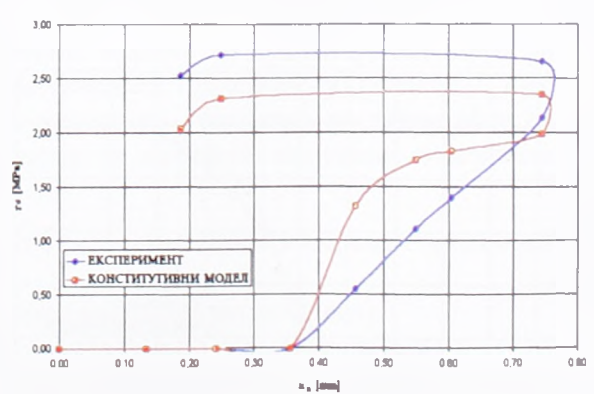
(в) Нормални напон - упоређење



(г) Смичући напон - упоређење



(д) Нормални напон – упоређење

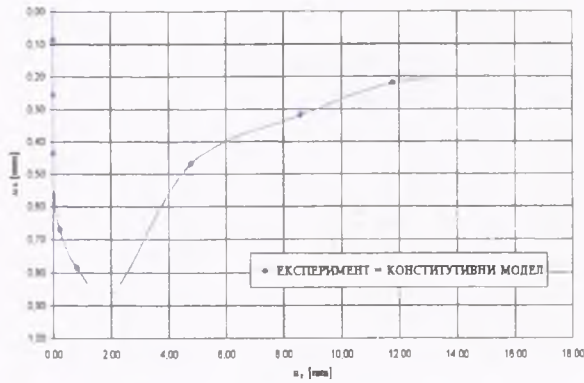


(ђ) Смичући напон - упоређење

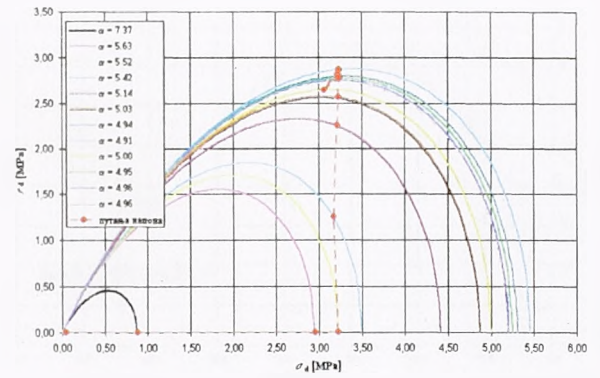
Слика 8.2: Упоређење експеримента и модела на 2. узорку дисконтинуитета (а-ђ)

Tabela 8.3: Параметри конститутивног модела за 3. узорак дисконтинуитета:

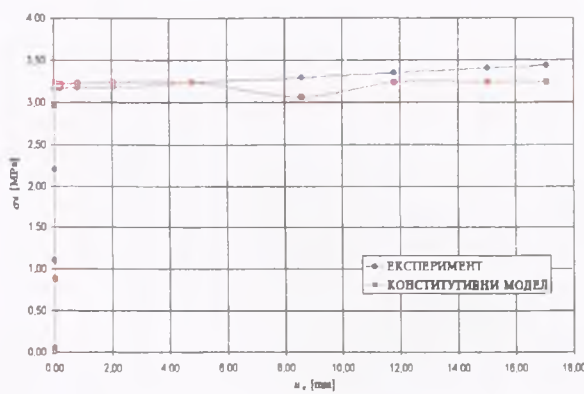
$n$	$\gamma$	$k_n$	$u^*$
2,22	7,16	37,94	0,0028



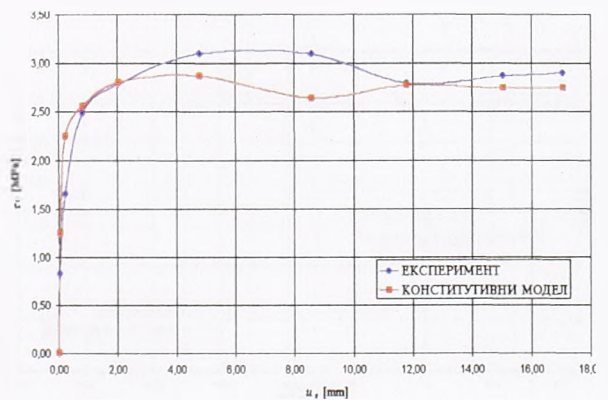
(a) Мерене деформације



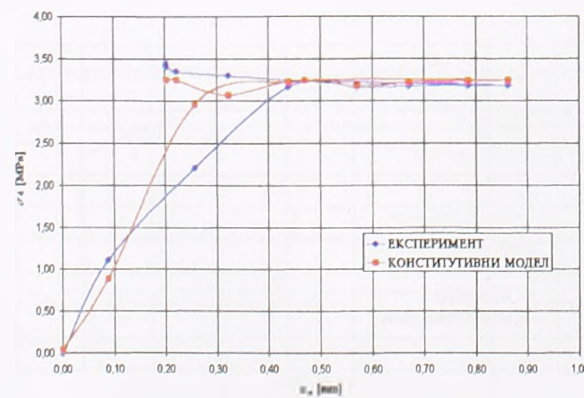
(б) Напонска путања - модел



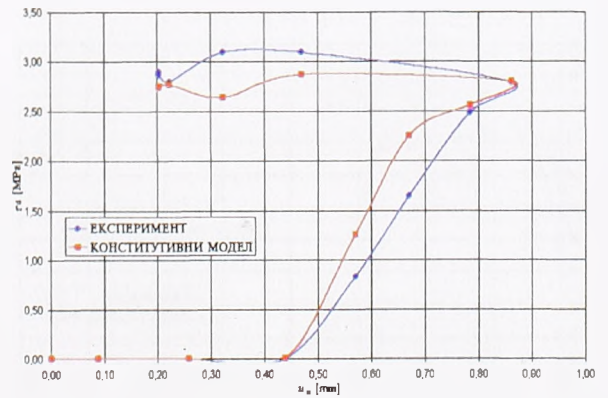
(v) Нормални напон - упоређење



(z) Смичући напон - упоређење



(d) Нормални напон - упоређење

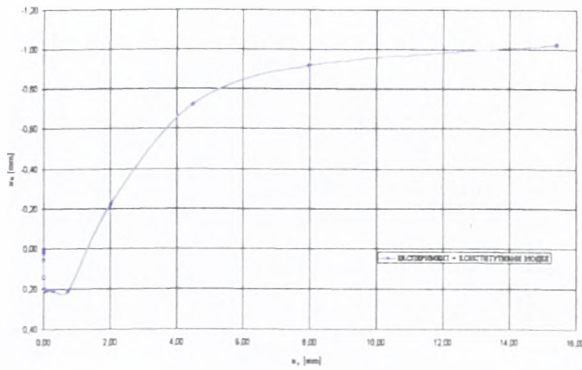


(h) Смичући напон - упоређење

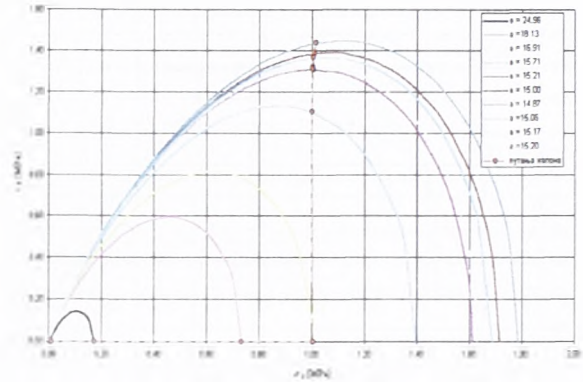
Слика 8.3: Упоређење експеримента и модела на 3. узорку дисконтинуитета (a-ћ)

Табела 8.4: Параметри конститутивног модела за 4. узорак дисконтинуитета:

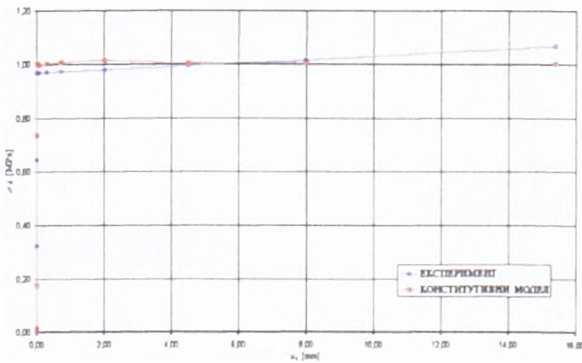
$n$	$\gamma$	$k_n$	$u^*$
2.22	16.92	10.26	0.0003



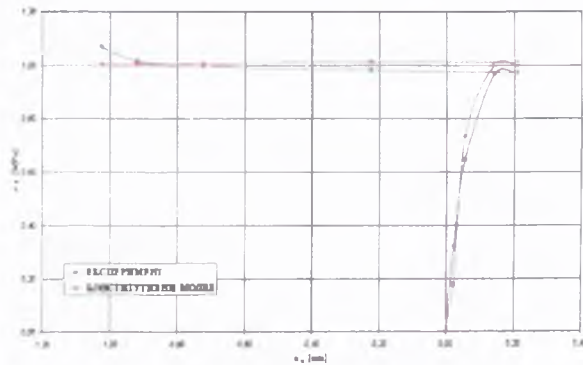
(а) Мерене деформације



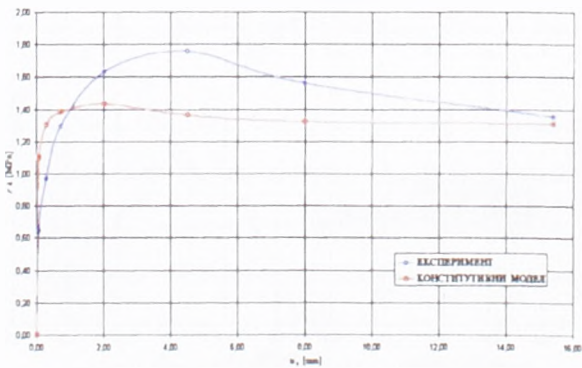
(б) Напонска путања - модел



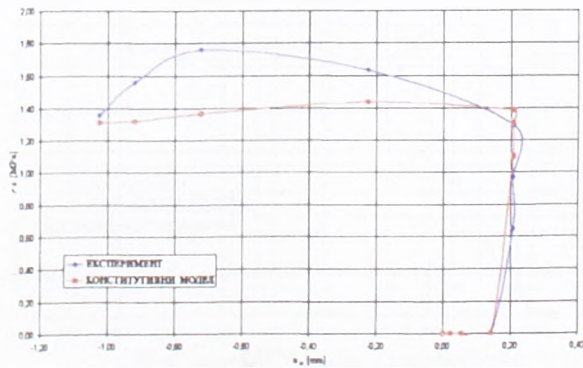
(в) Нормални напон - упоређење



(з) Смичући напон - упоређење



(д) Нормални напон - упоређење

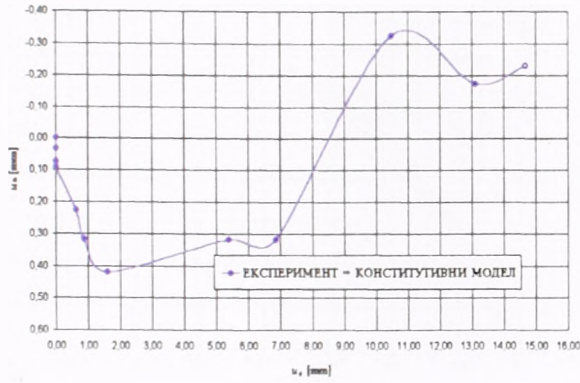


(ђ) Смичући напон - упоређење

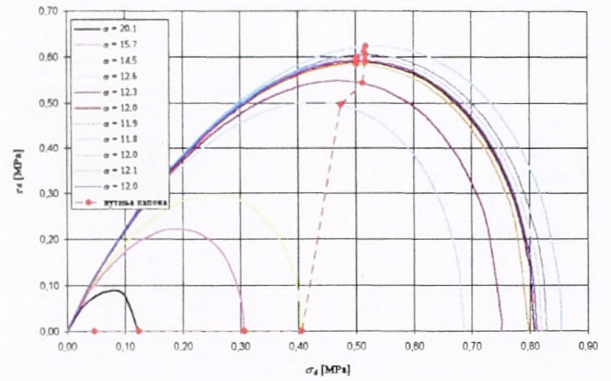
Слика 8.4: Упоређење експеримента и модела на 4. узорку дисконтинуитета (а-ђ)

Tabela 8.5: Параметри конститутивног модела за 5. узорак дисконтинуитета:

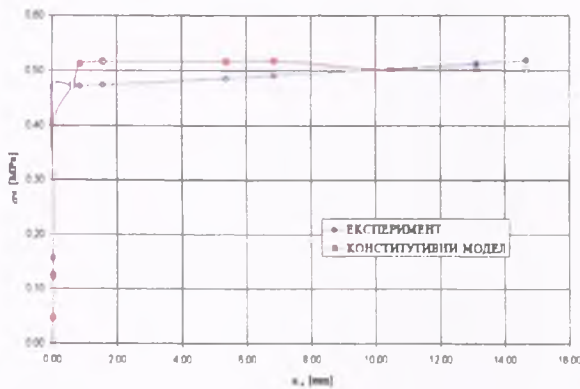
$n$	$\gamma$	$k_n$	$u^*$
2,27	11,34	38,12	0,0040



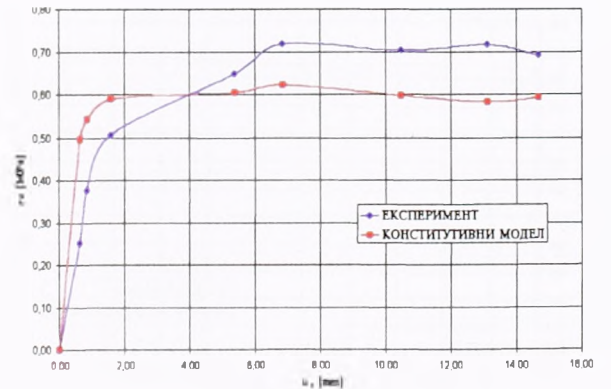
(a) Мерене деформације



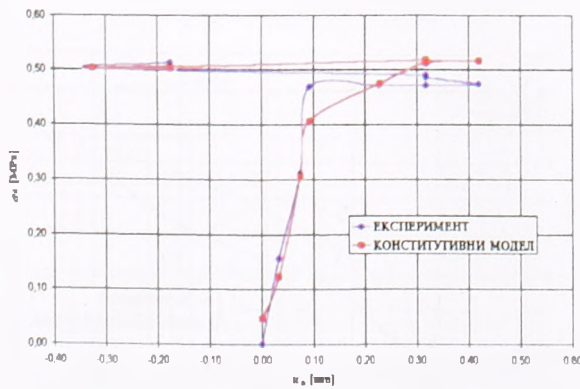
(б) Напонска путања - модел



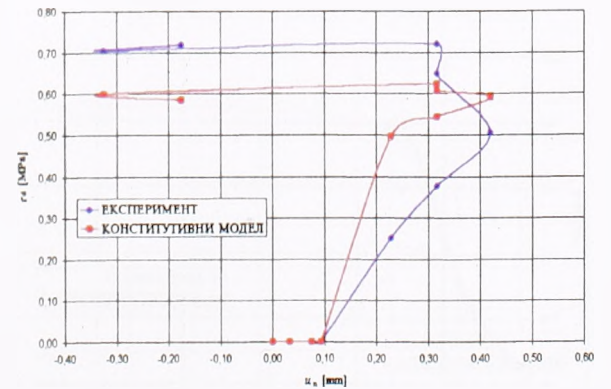
(v) Нормални напон - упоређење



(г) Смичући напон - упоређење



(д) Нормални напон - упоређење

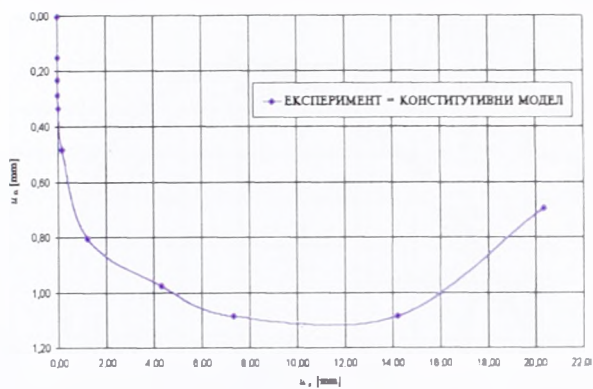


(h) Смичући напон - упоређење

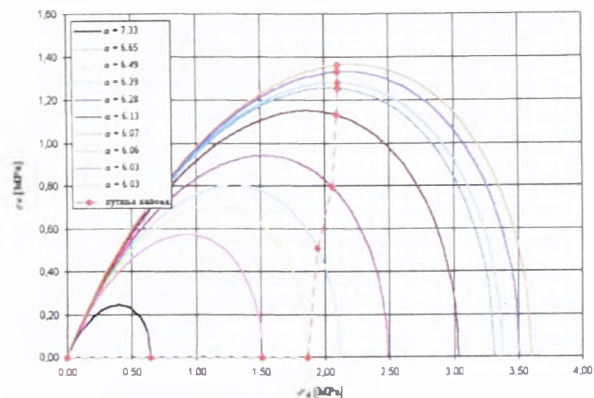
Слика 8.5: Упоређење експеримента и модела на 5. узорку дисконтинуитета (a-ћ)

Tabela 8.6: Параметри конститутивног модела за б. узорак дисконтинуитета:

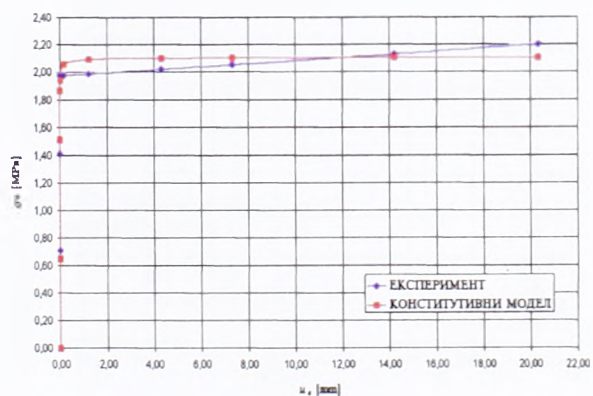
$n$	$\gamma$	$k_n$	$u^*$
2,12	6,97	20,90	0,0017



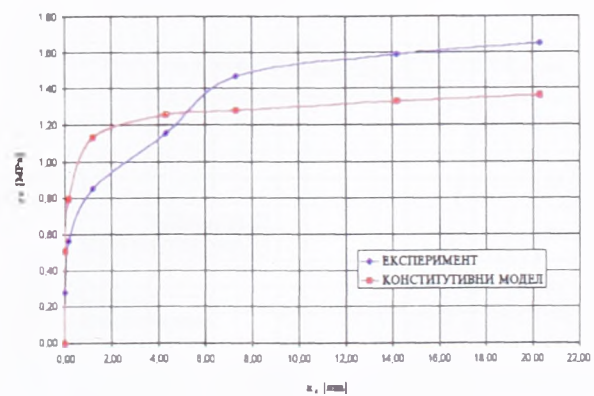
(a) Мерене деформације



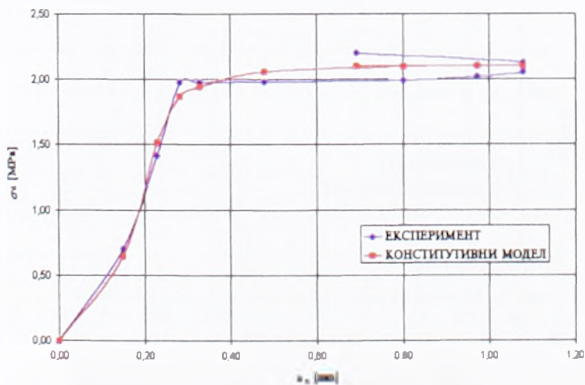
(б) Напонска путања – модел



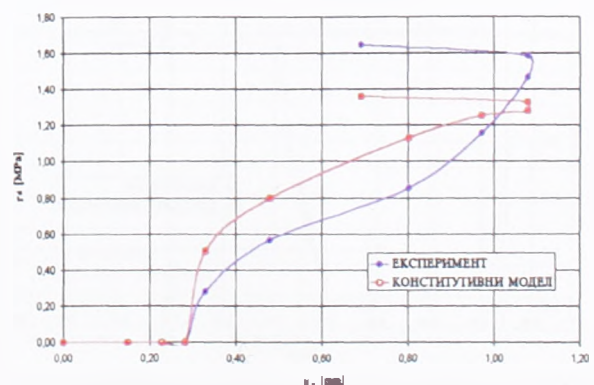
(v) Нормални напон - упоређење



(г) Смичући напон - упоређење



(д) Нормални напон - упоређење



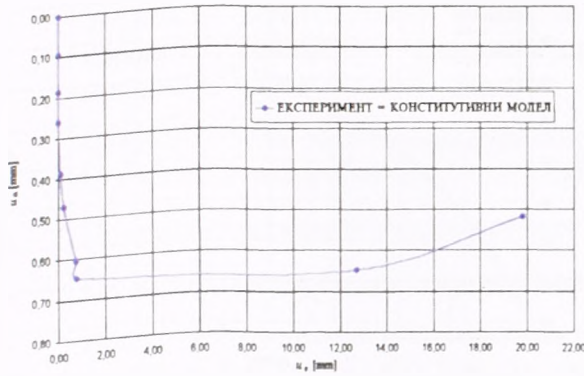
(ђ) Смичући напон - упоређење

Слика 8.6: Упоређење експеримента и модела на б. узорку дисконтинуитета (а-ђ)

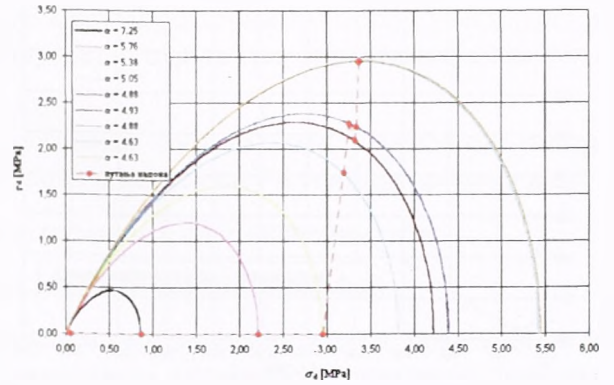


Tabela 8.7: Параметри конститутивног модела за 7. узорак дисконтинуитета:

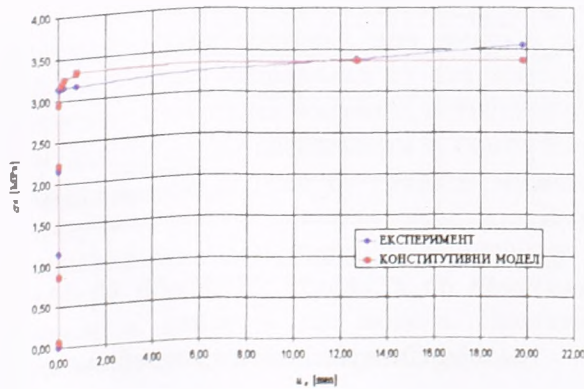
$n$	$\gamma$	$k_n$	$u^*$
2,24	7,00	20,67	0,0019



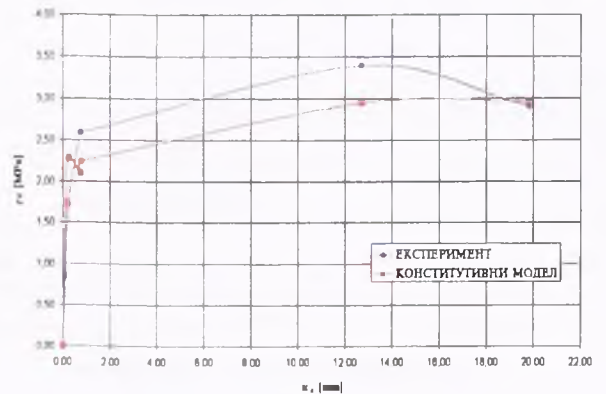
(a) Мерене деформације



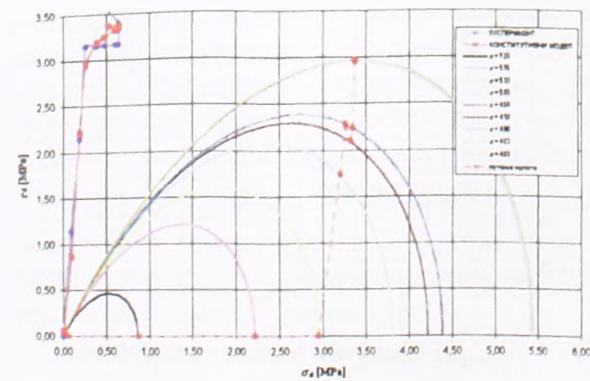
(б) Напонска путања - модел



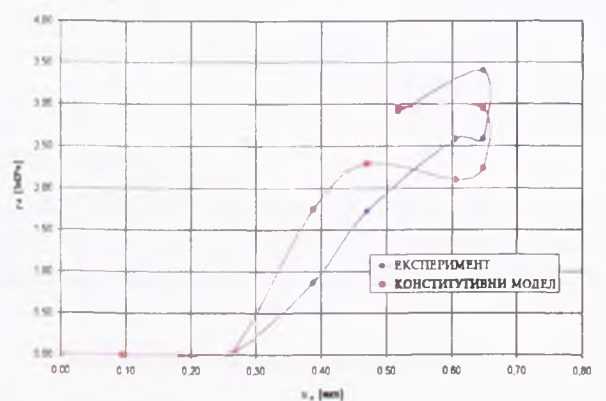
(v) Нормални напон - упоређење



(z) Смичући напон - упоређење



(d) Нормални напон - упоређење

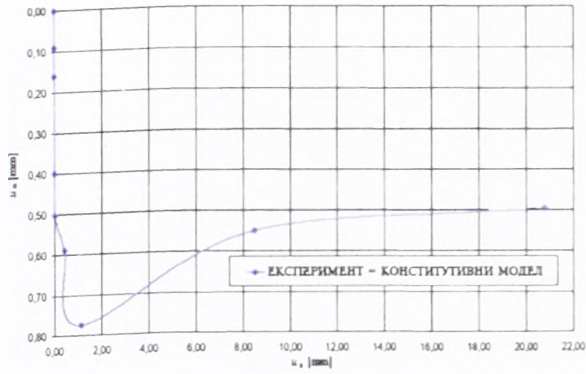


(h) Смичући напон - упоређење

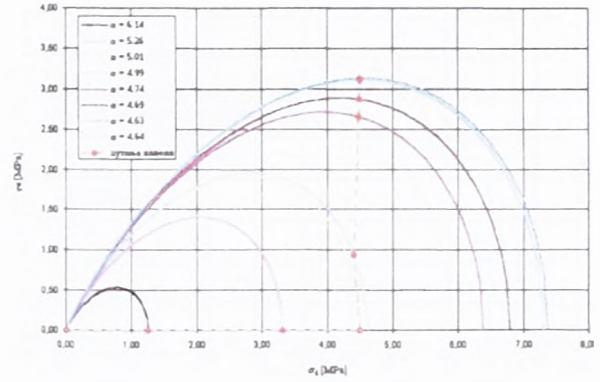
Слика 8.7: Упоређење експеримента и модела на 7. узорку дисконтинуитета (a-ћ)

Tabela 8.8: Параметри конститутивног модела за 8. узорак дисконтинуитета:

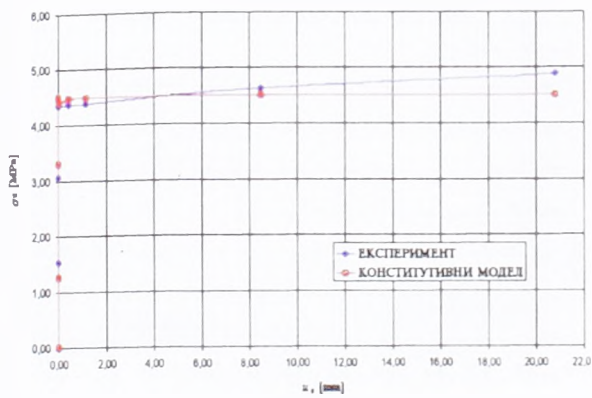
$n$	$\gamma$	$k_n$	$u^*$
2,16	6,38	37,92	0,0058



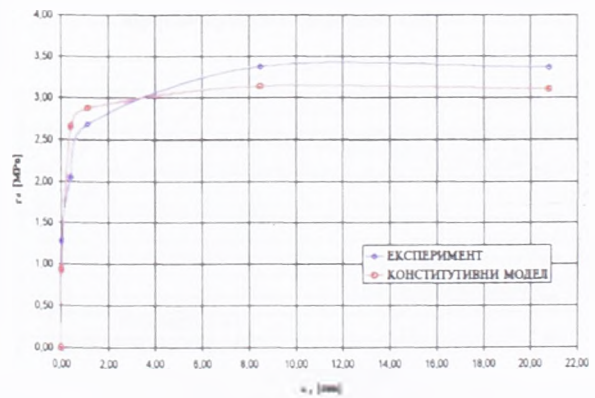
(a) Мерење деформације



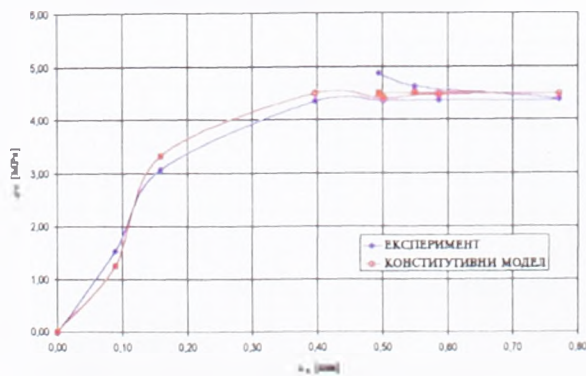
(б) Напонска путања - модел



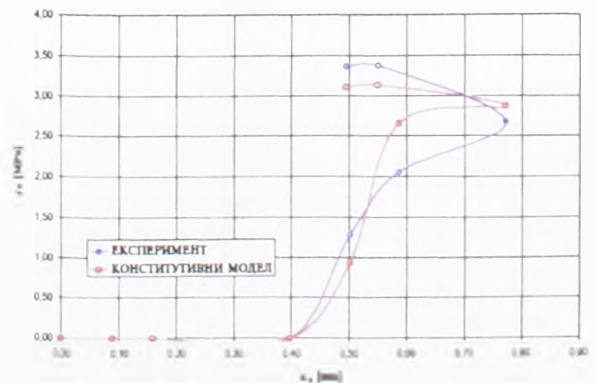
(v) Нормални напон - упоређење



(z) Смичући напон - упоређење



(d) Нормални напон - упоређење



(h) Смичући напон - упоређење

Слика 8.8: Упоређење експеримента и модела на 8. узорку дисконтинуитета (a-ћ)

## 8.2 Верификација предложеног конститутивног модела за стенску масу

У циљу верификације предложеног конститутивног модела за стенску масу извршене су симулације опита бетонским блоком (описан у поглављу 7.2) и опита крутом распињачом (описан у поглављу 7.3). Извршено је моделирање дела процеса тестирања (један циклус оптерећења и растерећења) и напонско-деформацијске реакције стенског медија, заснивајући ово на предложеном конститутивном моделу и примени методе коначних елемената, како је то описано у поглављу 5. Израда модела ових теренских опита обухватила је следеће активности:

- Синтеза и интерпретација резултата испитивања, у циљу припреме улазних података који дефинишу конститутивни модел за стенску масу: просторни положај, учесталост и параметри механичког понашања дисконтинуитета; параметри механичког понашања монолита.
- Израда модела напонско-деформацијског понашања стенске масе у условима опита: мреже коначних елемената (модел простора), контурни услови у функцији времена и др.
- Прорачуни напонско-деформацијског стања за различите фазе експеримента.
- Приказ и интерпретација резултата прорачуна (поља померања и напона).

Пошто је број дискретних модела за један проблем неограничено велики, први задатак је да се формира онај модел који довољно добро апроксимира одговарајући гранични проблем. Генерално, нема егзактних критеријума који обезбеђују избор најбољег дискретног модела, па је у решавању конкретних задатака, поред познавања општих принципа теорије коначних елемената, потребно квалитативно познавање природе разматраног проблема, па и инжењерска интуиција.

У овом раду дефинисани су модели који, сагласно својој намени, задовољавају основне феноменолошке поставке, али имају и одређен степен апроксимације у односу на реалне услове. Наиме, направљена су два просторна модела (слике 8.9 и 8.12), односно две мреже тродимензионалних коначних елемената за нумеричку симулацију извршених испитивања (за симулацију опита распињачом и опита блоком), које одражавају тродимензионални карактер проблема, и у којима су границе модела довољно удаљене у циљу постављања реалних контурних услова по померањима. Сами гранични услови у напонско-деформацијским анализама су дефинисани на уобичајени начин: по силама на делу контуре модела који одговара површини терена, а по померањима (спречена померања управно на контуру) на бочним и доњој ивици модела. Променом контурних услова по силама симулирано је испитивање (оптерећење и растерећење).

У односу на реалне услове занемарена је хетерогеност стенске масе у подручју испитивања, односно, на основу инжењерско-геолошких сагледавања процењено је да су опити, у подручју утицаја на напонско-деформацијске промене у стенском масиву, реализовани у једнородној квазихомогеној средини. У комплекснијим условима, или у прецизнијим анализама са дате услове, могуће би било формирати квазихомогене зоне моделираног простора по релевантним параметрима, којима би се обухватиле различите средине. Осим наведеног занемарења хетерогености, занемарен је и утицај постојећег (природног) напонског стања у стенском масиву, као и утицај микро-оштећења монолита.

Дакле, усвојена је хомогена средина коју карактеришу параметри монолита и пет фамилија пукотина (слика 7.5), при чему је, сагласно занемарењу утицаја микро-прелина, усвојена и претпоставка о линеарно-еластичном понашању монолита. Према томе, неопходно је дефинисати следеће параметре:

- Монолит:  $E_{\text{мон}}, \nu_{\text{мон}}$
- Дисконтинуитети:  $\alpha_{d(i)}, \beta_{d(i)}, f_{d(i)}, n_{d(i)}, \gamma_{d(i)}, k_{nd(i)}, u_{d(i)}^*$  ( $i=1,5$ )

Овде је учињена још једна апроксимација која се састоји у хомогенизацији и осредњавању параметара који описују механичко понашање пукотина ( $n_{d(i)}, \gamma_{d(i)}, k_{nd(i)}, u_{d(i)}^*$ ). Ово је учињено из два разлога: прво, зато што током инжењерско-геолошких истраживања

нису уочене значајне разлике у погледу рапавости, зева и испуне између картираних фамилија и, друго, зато што не постоји већи обим опита на узорцима дисконтинуитета, чији би се резултати могли разврстати по картираним фамилијама и статистички обрадити. У тим околностима процењено је да је сврсисходно и довољно реалистично усвојити претпоставку да се механичко понашање свих фамилија пукотина може описати истим вредностима параметара, а које одговарају просечним вредностима параметара установљених на основу симулација опита извршеним на узетим узорцима (табеле 8.1 до 8.8).

Усвојени параметри конститутивног модела су приказани у табели 8.9.

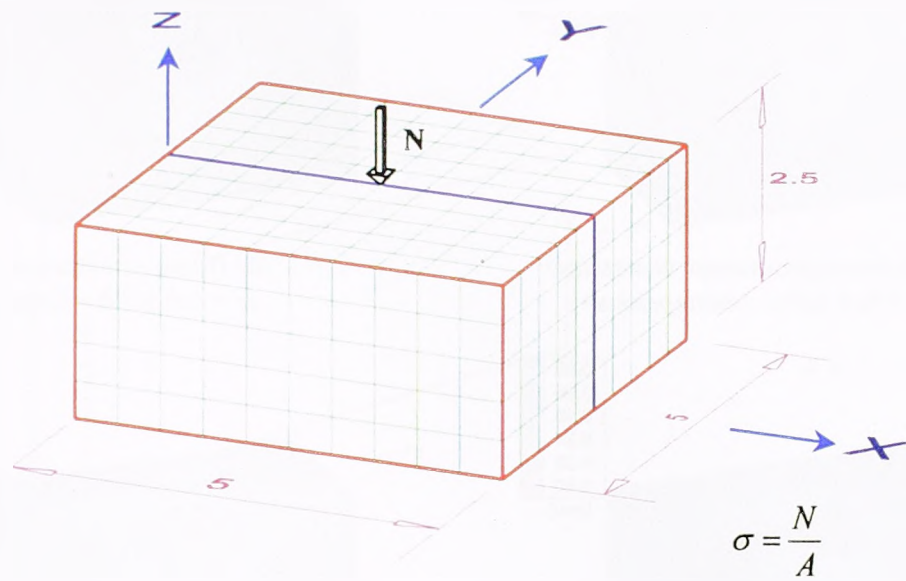
*Tabela 8.9: Параметри конститутивног модела стенске масе усвојени за симулације опита распињачом и блоком*

МОНОЛИТ изотропно- еластичан	E = 3500 Мра							
	ν = 0,3							
ПУКОТИНЕ круто-пластичне	familija	α	β	f	n	γ	k <sub>n</sub>	u*
	1	11	5	0,5	2,20	8,76	25,6	0,0025
	2	233	86	1,25	2,20	8,76	25,6	0,0025
	3	325	19	0,5	2,20	8,76	25,6	0,0025
	4	140	29	0,19	2,20	8,76	25,6	0,0025
5	143	86	2,0	2,20	8,76	25,6	0,0025	

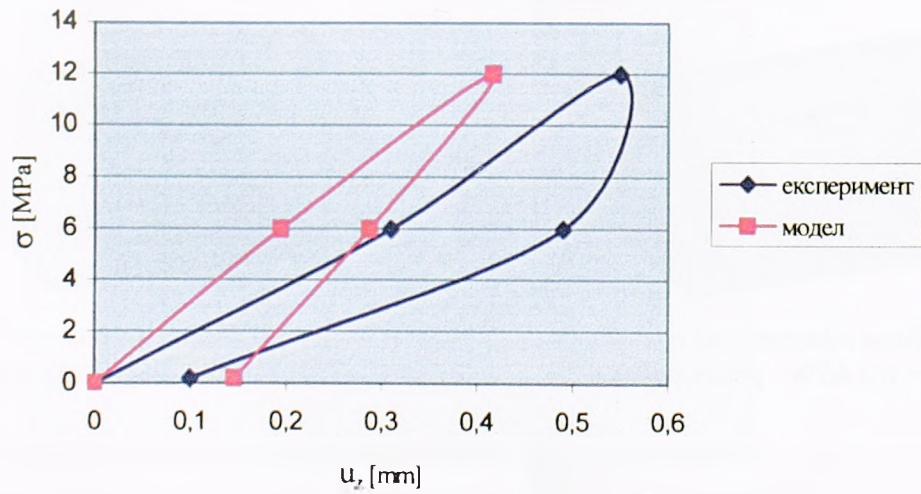
Као резултат прорачуна, за сваку фазу испитивања, добијају се поља потенцијала (скалар), померања (вектор), укупних деформација (тензор), напона (тензор), пластичних деформација (тензор) и др. Приказ оваквих величина је веома компликован – за сваки прорачун се као резултат добије више стотина хиљада нумеричких података. Због тих разлога, резултати су овде презентирани графички, при чему се водило рачуна да приказ буде сугестиван у смислу илустрације феноменологије процеса, као и довољно садржајан у погледу неопходних нумеричких (кумулативних) показатеља. Извршена је селекција резултата, у смислу детаљности приказа.

На сликама 8.10 и 8.13 приказано је упоређење резултата симулације и мерених вредности померања, док су на сликама 8.11 и 8.14 приказане промене поља померања и ефективних напона у функцији оптерећења, односно растерећења.

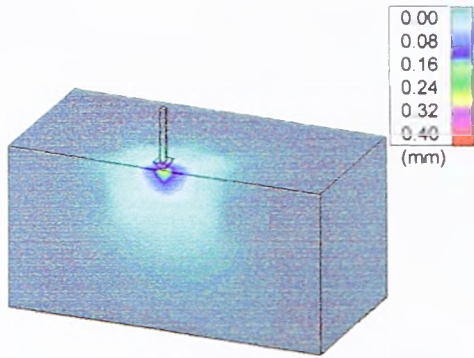
Може се констатовати да су, упркос уведеним апроксимацијама, добијени квалитетни резултати који се углавном уклапају у експериментална запажања. Истиче се чињеница да су овакви, задовољавајући, резултати нумеричке симулације *in situ* опита, добијени само на основу непосредне процене параметара користећи податке теренског картирања и испитивања узорака, не вршећи корекцију применом поступка естимације параметара на самим резултатима *in situ* опита.



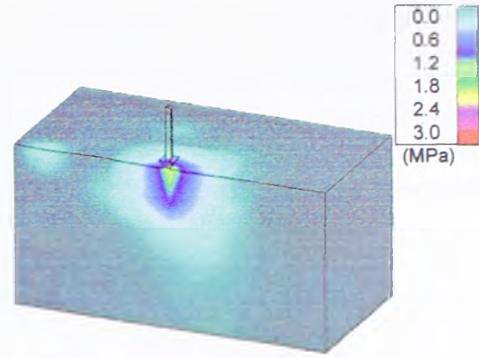
Слика 8.9: Нумеричка симулација опита распињачом – мрежа коначних елемената –



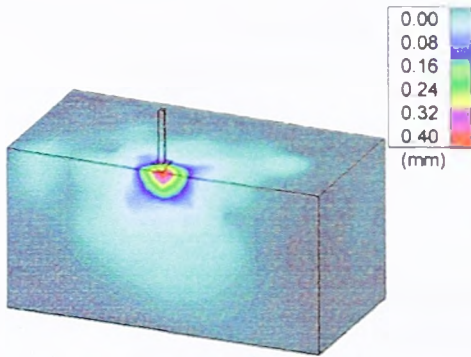
Слика 8.10: Нумеричка симулација опита распињачом – упоређење експеримента и модела –



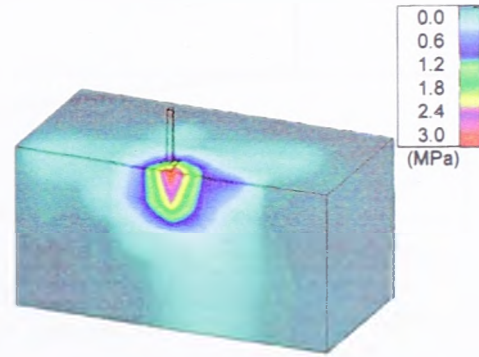
(а) Поље ефективних померања  
 $\sigma = 6,0 \text{ MPa}$  – оптерећење



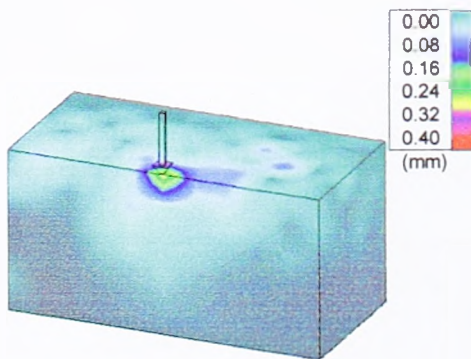
(б) Поље ефективних напона  
 $\sigma = 6,0 \text{ MPa}$  – оптерећење



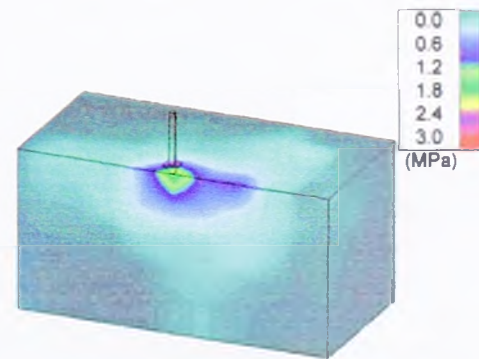
(в) Поље ефективних померања  
 $\sigma = 12,0 \text{ MPa}$  – оптерећење



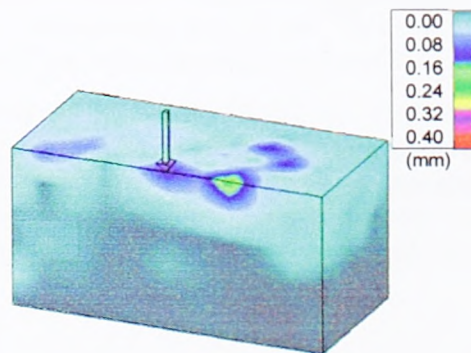
(г) Поље ефективних напона  
 $\sigma = 12,0 \text{ MPa}$  – оптерећење



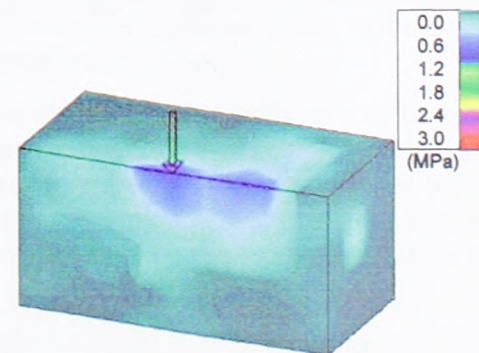
(д) Поље ефективних померања  
 $\sigma = 6,0 \text{ MPa}$  – растеређење



(ђ) Поље ефективних напона  
 $\sigma = 6,0 \text{ MPa}$  – растеређење

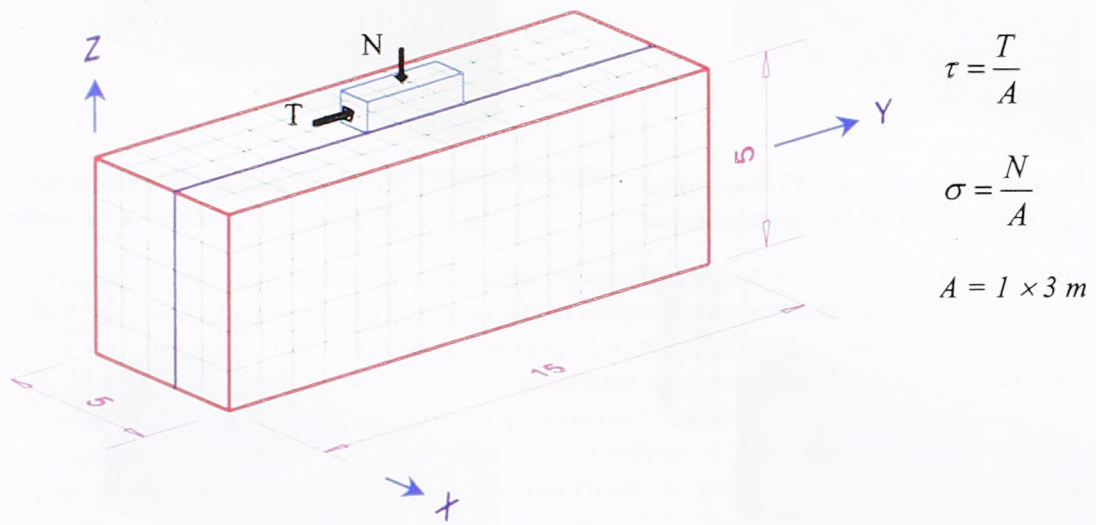


(е) Поље ефективних померања  
 $\sigma = 0,1 \text{ MPa}$  – растеређење

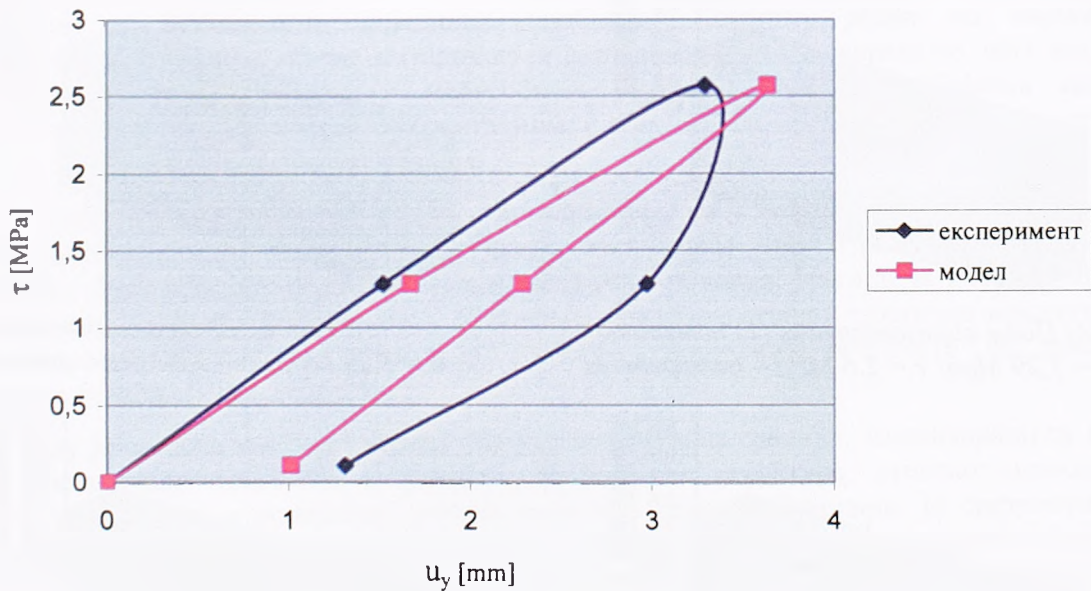


(ж) Поље ефективних напона  
 $\sigma = 0,1 \text{ MPa}$  – растеређење

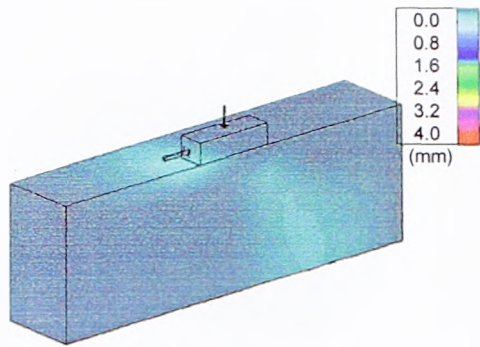
Слика 8.11: Нумеричка симулација опита распињачом (а - ж)  
– поља померања (mm) и напона (MPa) –



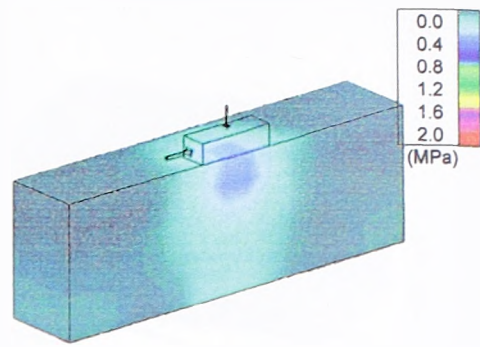
Слика 8.12: Нумеричка симулација опита бетонским блоком – мрежа коначних елемената –



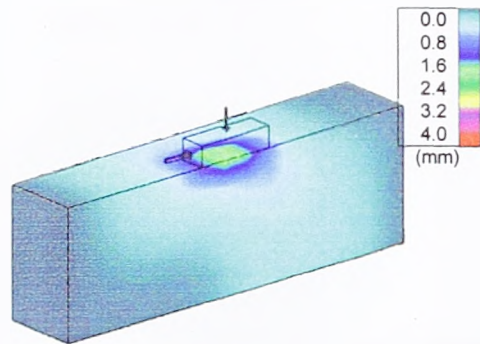
Слика 8.13: Нумеричка симулација опита бетонским блоком – упоређење експеримента и модела –



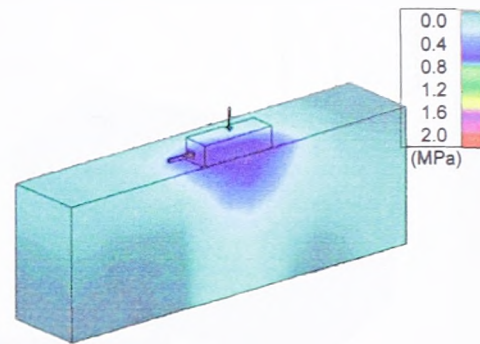
(а) Поље хоризонталних ( $Y$ ) померања  $\sigma = 1,29 \text{ MPa}$ ;  $\tau = 0 \text{ MPa}$  – оптерећење



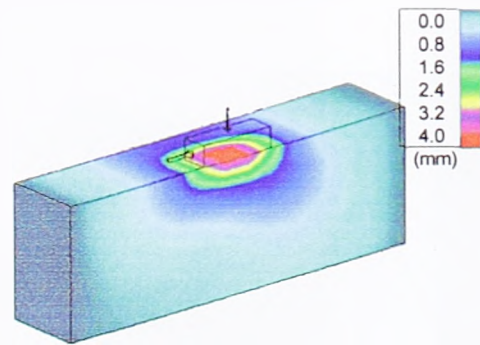
(б) Поље ефективних напона  $\sigma = 1,29 \text{ MPa}$ ;  $\tau = 0 \text{ MPa}$  – оптерећење



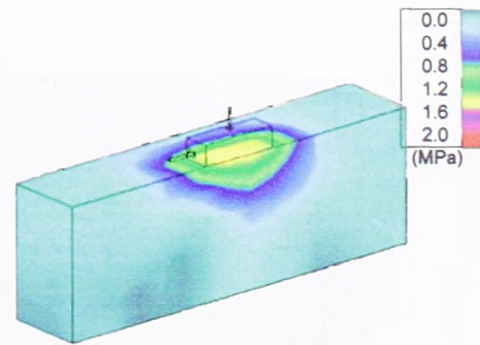
(в) Поље хоризонталних ( $Y$ ) померања  $\sigma = 1,29 \text{ MPa}$ ;  $\tau = 1,3 \text{ MPa}$  – оптерећење



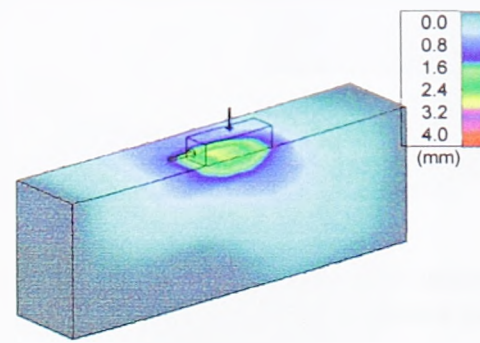
(г) Поље ефективних напона  $\sigma = 1,29 \text{ MPa}$ ;  $\tau = 1,3 \text{ MPa}$  – оптерећење



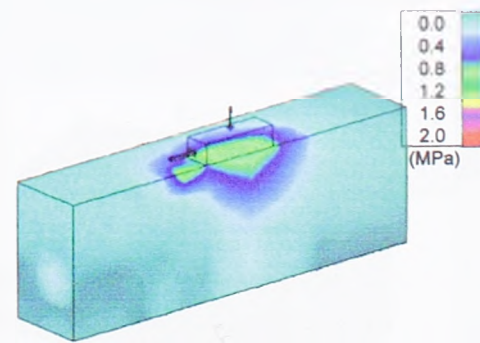
(д) Поље хоризонталних ( $Y$ ) померања  $\sigma = 1,29 \text{ MPa}$ ;  $\tau = 2,6 \text{ MPa}$  – оптерећење



(ђ) Поље ефективних напона  $\sigma = 1,29 \text{ MPa}$ ;  $\tau = 2,6 \text{ MPa}$  – оптерећење



(е) Поље хоризонталних ( $Y$ ) померања  $\sigma = 1,29 \text{ MPa}$ ;  $\tau = 1,3 \text{ MPa}$  – растерећење



(ж) Поље ефективних напона  $\sigma = 1,29 \text{ MPa}$ ;  $\tau = 1,3 \text{ MPa}$  – растерећење

Слика 8.14: Нумеричка симулација опита бетонским блоком (а - ж)  
– поља померања (mm) и напона (MPa) –



## 9. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

### 9.1 Коментар о извршеним истраживањима

Предметна истраживања су обављена применом комплексног методолошког приступа, коришћењем комбинације експерименталних и нумеричких метода, анализом постојећег фонда података и синтезом публикованих знања, уз верификацију на примерима из праксе. Експерименталне методе истраживања, изоловано посматране, имају изузетан значај, јер је механика стена релативно млада научна и техничка дисциплина, а чињеница је да се стенске масе у природи, по свом облику, саставу, стањима и својствима, испољавају на готово бескрајно много начина. У начелу, систематско и непрекидно прикупљање података о механичким карактеристикама стенских маса као реалних средина, односно стварање одговарајућег квантитета чињеничног фонда, подстиче и повремене квалитативне промене у сазнањима и схватањима. Са друге стране, развој електронских рачунара и нумеричких метода прорачуна створио је нове могућности развоја како саме механике стена као научне и техничке дисциплине, тако и примене њених резултата у пракси. Наиме, у области напонско-деформацијске анализе развијени су софтверски пакети на основу савремених нумеричких метода, који на веома високом нивоу могу да анализирају материјалне нелинеарне проблеме, и чијом се применом могу обухватити, анализирати и варирати велики број параметара при прорачунима и решавањима појединих проблема. Коначно, једна од најважнијих карактеристика савремене научне методологије јесте практично проверавање свих резултата научних истраживања. Управо у међусобном утицају резултата добијених научним истраживањима, теоријским и експерименталним, и резултата добијених њиховом практичном применом, лежи основни пут даљег развоја.

У смислу наведених поставки, концепција овог рада је замишљена као мултидисциплинарна и комплексна студија, као одраз све израженије потребе да инжењерска пракса користи домете фундаменталних области. Извршена истраживања би требало да пруже одређени допринос у областима механике стена и техничке механике, као фундаменталних дисциплина, као и у примени теоријских резултата на решавања практичних инжењерских задатака.

У раду је стенска маса разматрана као дисконтинуална средина. Анализирани су главни аспекти механичког понашања елемената ове сложене структуре: стенског монолита и дисконтинуитета, али и понашање стенске масе као целине. Извршена је систематизација различитих експерименталних искустава, на основу чега су истакнута доминантна механичка својства. Такође, извршена је и анализа и систематизација неких постојећих конститутивних модела, у циљу сагледавања њихових могућности да обухвате механичко понашања испуцалих стенских маса. Скренута је пажња на нека карактеристична понашања и неке од опасности на које можемо наићи кад разматрамо својства стена у циљу дефинисања конститутивних релација. Све ове анализе послужиле су као непосредни основ за предлоге који су настали током предметних истраживања, али, овај приказ постојећег стања, уз коришћење и изворних публикација сагласно списку литературе која је дата на крају овог рада, може бити користан и у неким другачијим развојним правцима моделирања механичког понашања стена.

У раду су предложене одређене модификације постојећих конститутивних модела, у мери да се може рећи да је конципиран нов конститутивни модел. У том смислу истиче се предлог конститутивног модела за пукотину, који је заснован на теорији пластичности (коришћен је *Desai*-јев једноповршински услов течења), са применом неасоцијативног закона течења, где

су извршена значајна побољшања дефинисањем оригиналних решења за услов ојачања/омекшања и функцију пластичног потенцијала. Даље, развијен је и модел механичког понашања стенске масе као дисконтинуалне и анизотропне средине, који се заснива на поменутом конститутивном моделу понашања пукотине и спреси деформација монолита и свих пукотинских система уважавајући њихов реалан просторни положај и учесталост. На тај начин је у конститутивне релације уграђена интеракција система пукотина и монолита, чиме се имплицитно уважава ефекат размере. За предложени конститутивни модел, аутор сматра да може постићи већи склад са експериментално уоченим феноменима, од постојећих публикованих модела.

Извршена је нумеричка адаптација предложеног конститутивног модела, за примену у методи коначних елемената, користећи алгоритам нумеричке интеграције конститутивних једначина који се заснива на имплицитном концепту. На тај начин омогућена је уградња развијеног конститутивног модела у постојеће рачунарске програме за напонско-деформацијску анализу.

Предложени конститутивни модел је уграђен у програмски пакет ПАК, чиме је омогућена његова детаљнија верификација, као и даљи развој и адаптација, али и непосредна примена у решавању практичних задатака. Добијена су позитивна искуства која проширују могућност примене савремених нумеричких метода.

Развијен је методолошки поступак и софтвер за интерпретацију информација добијених испитивањима, у циљу добијања параметара конститутивног модела стенске масе. Формирани су нумерички модели за симулацију више типских опита: лабораторијски триаксијални опити на узорцима монолита, лабораторијски опити директног смицања на узорцима дисконтинуитета, теренски опити методом круте распињаче и теренски опити методом крутог блока. Овај методолошки поступак и софтвер имају могућност и шире примене, дакле, не само за конститутивни модел развијен у овом раду, већ и за постојеће конститутивне моделе који су уграђени у програмски пакет ПАК.

Обављена су експериментална истраживања која су значајна зато што су на једној локацији обухватила испитивања узорака монолита и дисконтинуитета, као и теренска испитивања стенске масе у великој размери. Резултати ових експерименталних истраживања послужили су за верификацију предложеног конститутивног модела и поступка естимације параметара. Осим овог непосредног ефекта, приказани резултати представљају одређени допринос сам за себе, јер проширују чињенични фонд података о карактеристикама стенских маса као реалних средине, омогућујући његово коришћење и за друге и другачије покушаје моделирања механичког понашања стена.

Уколико се буду користили, резултати спроведених истраживања могу на посредан начин дати допринос и неким потенцијалним активностима које предстоје. У том смислу наговештавају се следеће евентуалне могућности:

- Утврђивање принципа и основа за формирање базе података о резултатима извршених истраживања у нашој земљи и публикованим светским резултатима.
- Израда препорука према којима би се вршио избор врсте опита, квантификовао обим испитивања и дефинисала метода интерпретације резултата испитивања стенских маса, у зависности од врсте и намене објекта.
- Модификација постојећих и конципирање нових поступака испитивања напонско-деформацијских својстава стена, на узорцима и *in situ*, у складу са захтевима и могућностима интерпретације, као и савременим технолошким могућностима из области мерне технике.

Генерално, резултати приказани у овом раду могу пружити одређени допринос развоју савремене методе интерпретације резултата испитивања и математичког моделирања напонско-деформацијског понашања чврстих испуцалих стенских маса, чиме би се допринело подизању квалитета истраживања и повећању поузданости техничких решења, а у циљу сигурног и рационалног грађења широког спектра објеката различитих намена.

## 9.2 Препоруке за даља истраживања

Видели смо да је математичко моделирање механичког понашања реалних стенских маса веома сложен процес, а опет, са друге стране, представља само мање или више грубу апроксимацију природе. Овај раскорак сугерише и основни путоказ у концепту даљег развоја конститутивних модела за стенске масе. Генерално, треба покушати да се широка природна лепеза појава и процеса у стенама угради у конститутивни модел, али тежећи да модел садржи лако мерљиве и упоредиве карактеристике стена, имајући у виду стару мудрост да се у свим стварима савршенство на крају постигне, не кад се више нема шта додати, него кад се више ништа не може одузети.

У следећем тексту ћемо покушати да издвојимо оно што се може сматрати као директан пут пред нама.

### Развој метода тестирања

Чињеница је да сада, употребом сервоконтролисаних тест-машина, можемо стенски монолит механички испитати на практично сваки замисливи начин, и тим путем прибавити експерименталне вредности за механичке карактеристике стенског монолита, утолико пре што те вредности, по дефиницији, не зависе од дисконтинуитета. Повољно је и то што карактеристике стенског монолита не зависе толико од величине узорка колико то зависе својства испуцале стенске масе.

Карактерисање дисконтинуитета је комплексно. Разне организације ставиле су нам на располагање разноврсне методе тестирања. Постоје усмеравајући документи које је дало *Међународно друштво за механику стена (ISRM)*, али у будућности њих треба побољшати укључивањем интерпретативних коментара.

Препоручује се да, тамо где је то прикладно и могућно, обавимо дугорочно тестирање и то у великим размерама (захватајући нашим тестирањем велики обим стенске масе). Широм света овај приступ се све више спроводи, па и употребом подземних истраживачких лабораторија и пробних градилишта. Улазимо, штавише, у еру све већег броја пројеката за које раније није било преседана нити искуства, а ту су дугорочни тестови у великим размерама још потребнији.

Иако су очигледне тешкоће мерења у стенама, имплицитно је сугерисана потреба за стандардизованим методама тестирања, зато што су такви методи од непроцењиве вредности јер омогућавају да резултате поредимо, што инжењерима даје оријентацију.

### Интеракције конститутивног модела и природног напонског поља

Већ је наглашен значај тестирања у великој размери у *in situ* условима, а нарочито њихова улога у идентификацији параметара конститутивног модела. Да бисмо узели у обзир нехомогености напонског и деформацијског поља, морамо вршити нумеричке симулације ових опита применом методе коначних елемената. У предстојећим истраживањима треба анализирати у којој мери природно напонско поље, које постоји у стенској маси у којој вршимо испитивања, утиче на вредност параметара конститутивног модела.

Увођење природних напона у поступке дефинисања конститутивних релација за стенске масе је исто што и отварање Пандорине кутије, јер што се више изучава напон у стенама, то се више проблема примећује. Ко год је икада на терену пробао да измери напон у стенама разумеће ову резервисаност. Четири главна метода мерења, препоручена од стране *ISRM*, мере различите делове напонског тензора. Битно је схватити шта ти подаци стварно значе кад се зна да ће дисконтинуитети у стенама највероватније јако утицати на мерења. Многи истраживачи су чак и одбацивали сопствена тачна мерења само зато што су, обављајући свој програм

експериментисања, наилазили на велике варијације у напону у стенама. А такве варијације заправо постоје у свим размерама, од микрофисура преко пукотина до великих раседа.

То не значи да треба да одустанемо од даљег изучавања *in situ* напона у стенама и његовог утицаја на механичко понашање. Напротив, не може се ваљано разумети понашање стена, ни у теорији ни у пракси, ако не постоји познавање напона у стенама.

### Интеракције мерљивих карактеристика стена и параметара конститутивног модела

Ако покушавамо да меримо једну одређену карактеристику, и ако она зависи од неколико других, разноврсних својстава, како можемо знати да смо стварно мерили, изоловано, баш ту једну карактеристику? Дакле, на исти начин као што треба добро да пазимо на разлику између замишљеног идеалног материјала и реалне стене са којом имамо посла, једнако треба да пазимо и на ефекте ових интеракција; инжењер мора бити сигуран шта заправо покушава да мери, а затим мора учинити све што може да изолује, издвоји баш ту једну карактеристику стене и да мери управо њу, а не неке друге.

Када се карактеристике стена користе у математичком моделу, тада је потребно размотрити шта ће се десити ако наступи варијација у некој појединачној карактеристици – како ће она утицати на коначни исход. У том правцу треба даље развијати употребу случајних променљивих и анализу осетљивости. Наиме, свакако је од користи да размотримо како ће варијације у улазним параметрима неке формуле утицати на резултат, јер ћемо кроз тај рад сагледати значај сваке поједине карактеристике, па ћемо на основу тога знати потребу и оправданост напора који треба да уложимо да бисмо прибавили те вредности.

Али, статистика не треба да нам служи уместо разумевања понашања стена. Другим речима, неприхватљиво је рећи да неки "одговор" стене не разумемо и да ћемо га зато третирати као случајну променљиву. Статистика може бити корисна у експерименталном процесу и може помоћи да презентирамо и студирамо податке о карактеристикама стена; али смо у опасности ако се, због недостатка информација о основној механици, препустимо да нас вероватноћа и статистика воде. Постоје ту и компромисни методи, као што су *fazi* аритметика и алгебра, у којима, по мишљењу овог аутора, лежи велики потенцијал, и које ће ускоро бити у пуној мери примењени у механици стена.

### Информациони системи

Веома је битно да ми будемо у стању да информације о карактеризацији грађевинског подручја прикажемо на јасан и недвосмислен начин. Како кохерентно приказати велику количину информација са једног истраживања на терену? Инжењерство стена постаје све компликованије уколико више имамо на располагању информација, како о самим стенама тако и о интерпретацији карактеристика тих стена. Срећом, током последњих десетак година видели смо тако нагли пораст распрострањености и моћи компјутера, тако да би требало да се концентришено на коришћење компјутера за боље бележење података, анализирање података и за интерактивне презентације које би побољшале разумевање. Репидно улазимо у мултимедијску еру где ћемо у истом програму моћи да имамо фотографије, звук, екранску графику и способност израчунавања. Ове могућности, које обухватају, на пример, и видео-снимке са терена, морају водити ка побољшаним процедурама карактеризације подручја градилишта.

С тим у вези је и питање архивирања података. Иако се многе вредности могу израчунати помоћу компјутера, такви рачунски, или субјективни, подаци не би требало да буду примарно архивирани подаци. Требало би архивирати фундаменталне податке, оне који су на терену установљени, тако да нам буде могућа каснија рекалкулација неког другог фактора. Такође, у систему архивирања треба сачувати и знање о претпоставкама од којих се полазило кад су прибављане карактеристике стена, а и знање о начинима како се тим карактеристикама манипулисало пошто су прибављене. Ово је такође једна тема зрела за развој.

Реалистичан однос према карактеризацији стенских маса

У целом овом раду бавили смо се стенским масама и њиховим механичким понашањем. Независно од било каквог свођења рачуна о евентуалном научном и стручном доприносу извршених истраживања и њиховом подстицају за будуће истраживачке напоре, потребно је да, на крају, још једном истакнемо специфичност стена, зато што је то материјал који нису људи правили, а морају у њему градити. Наиме, када се као инжењери суочимо са неким грађевинским проблемом, ми морамо установити карактеристике стена на том конкретном локалитету, дакле, истражити њихова својства, а не наручити их од произвођача. Морамо се, на жалост, суочити са чињеницом да је стена један природни материјал са дугом историјом механичких, топлотних и хемијских ефеката, и да ни у ком случају не спада у идеалне материјале. Реална стена није хомогена, нити је изотропна, нити је линеарно еластична, а што је најтеже, није ни континуална. Недопустиво је напросто игнорисати неугодне истине о стенској маси и надати се да ће те истине некако да ишчезну, јер, ми можемо правити модел за идеални материјал, али после ћемо морати да урадимо стварни инжењерски посао за реалну стену. Због свега тога, увек се морамо пажљиво одредити како да карактеришемо и анализирамо подручје стенских маса и његово механичко понашање, затим које карактеристике стена треба да измеримо и како да их измеримо.

## ЛИТЕРАТУРА

1. БАБИЋ П., ДАНКОВ З., ДИВАЦ Д., МИЛОВАНОВИЋ Д., *Геолошки услови коришћења вода реке Велики Рзав са суседним сливовима (Увац и Лим)*, 12. Југ. симп. о хидрологији и инжењерској геологији, стр. 25, књига 2, Нови Сад, 1999.
2. BIENIAWSKI Z. T., *Mechanism of Brittle Fracture of Rock*, Int. Jou. of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomech. Abs., p 395, Volume 4, Number 4, 1967.
3. BIENIAWSKI Z. T., *The Effect of Specimen Size on Compressive Strenght of Coal*, Int. Jou. of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomech. Abs., p 325, Volume 5, 1968.
4. BIENIAWSKI Z. T., VAN HEERDEN W. L., *The Significance of In-Sity Test on Large Rock Specimens*, Int. Jou. of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomech. Abs., p 101, Volume 12, 1975.
5. BANDIS S. C., *Scale Effects in the Strength and Deformability of Rock Joints*, Scale Effects in Rock Masses, Proceedings of the First International Workshop on Scale Effects in Rock Masses, pp. 59-77, Loen, Norway, Jun. 1990.
6. BANDIS S. C., *Engineering Properties and Characterization of Rock Diskontinuities*, Comprehensive Rock Engineering, edited by Hudson E., Brown E., Fairhurst C. and Hoek E., Volume 1 – Fundamentals, Pergamon Press Ltd, 1993.
7. BANDIS S., LUMSDEN A. C., BARTON N. R., *Experimental Studies of Scale Effects on the Shear Behaviour of Rock Joints*, Int. Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, p1, Volume 18, Number 1, Feb. 1981.
8. BARTON N., *Scale Effect or Sampling Bias?*, Scale Effects in Rock Masses, Proceedings of the First International Workshop on Scale Effects in Rock Masses, pp.31-59, Loen, Norway, Jun. 1990.
9. BERNAIX J., *New Laboratory Methods of Studying the Mechanical Properties of Rock*, Int. Jou. of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomech. Abstr., p 97, Volume 6, 1969.
10. BORJA R. I., *Cam-clay plasticity, part II: Implicit integration of constitutive equation based on a nonlinear elastic stress predictor*, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1991.
11. BRADY B. H. G., BROWN E. T., *Rock Mechanics for Underground Mining*, Allen & Unwin, London, 1985.
12. BRAY J. W., *A Study of Jointed and Fractured Rock, Part II - Theory of Limiting Equilibrium*, Rock Mechanics and Engineering Geology, Vol.5, Vienna, Austria, pp.197-216, Dec. 1967.
13. BROCH E., FRANKLIN J. A., *The Point Load Strehgh Test*, Int. Jou. of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomech. Abstr., p 669, Volume 73, Number 6, 1972.
14. BROWN E.T., *Volume Changes in Model of Jointed Rock*, J. Geotech. Eng. Div., ASCE, p 273, Vol 102, 1976.
15. BROWN E.T., *Rock characterization testing and monitoring, ISRM Suggested Methods*, Pergamon Press Ltd, 1981.
16. BROWN E. T., *Modelling the stress-strain behaviour of rock masses*, Proceedings of the 7. International Congress on Rock Mechanics, A. A. Balkema, 1991.

17. GENS A., CAROL I., ALONSO E., *A Constitutive Model for Rock Joints Formulation and Numerical Implementation*, Computers and Geotechnics, p 3, Vol. 9, 1990.
18. GEROGIANNOPOULOS N. G., BROWN E. T., *The critical state concept applied to rock*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, p 1, Number 15, 1978.
19. GERRARD C. *Shear failure of rock joints: appropriate constraints for empirical relations*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, p 421, Volume 23, Number 6, December 1986.
20. GERRARD C.M. *Joint compliances as a basis for rock mass properties and the design of supports*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, p 285, Volume 19, Number 6, December 1982.
21. GERRARD C.M., *Background to Mathematical Modelling in Geomechanics: The Roles of Fabric and Stress History*, Finite Elements in Geomechanics - edited by G.Gudehus, John Wiley and Sons, Ltd., 1977.
22. GOODMAN R. E., *Introductio to Rock Mechanics*, John Wiley and Sons inc., New York, N.Y., 1980.
23. GUDEHUS G., *Some Interactions of Finite element Methods and Geomechanics: A Survey*, Finite Elements in Geomechanics - edited by Gudehus G., John Wiley and Sons,Ltd., 1977
24. DESAI C. S., *A general basis for yield, failure and potential functions in plasticity*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomech. 4, p 361, 1980.
25. DESAI C. S., *Constitutive Modelling for Rocks and Joints with Comments on Numerical Implementation*, Comprehensive Rock Engineering, edited by Hudson E., Brown E., Fairhurst C. and Hoek E., Pergamon Press Ltd, 1993.
26. DESAI C. S., CHRISTIAN J. T., *Constitutive Laws for Geologic Media*, Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill inc., USA, 1977.
27. DESAI C.S., FICHMAN K.L., *Plasticity-based constitutive model with associated testing for joints*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, p 15, Volume 28, Number 1, Januaru 1991.
28. DESAI C. S., SIRIWARDANE H. J., *Constitutive laws for engineering materials - with emphasis on geologic materials*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
29. DESAI C. S., SOMASUNDARAM S., FRANTZISKONIS G., *A hierarchical approach for constitutive modelling of geologic matrials*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomech. 10, p 225, 1986.
30. ДИВАЦ Д., *Математичко моделирање својстава и процеса у стенским масама у анализи подземних просторија*, магистарски рад, Грађевински факултет Универзитета у Београду, Београд 1992.
31. ДИВАЦ Д., ВУЧКОВИЋ Д., *Обезбеђење стабилности стенске масе на месту шахтног прелива бране Првонек код Врања*, XIV конгрес ЈДВБ, Струга, 1989.
32. ДИВАЦ Д., ВУЧКОВИЋ Д., *Анализа могућности подземне експлоатације рудника мермера Венчац са аспекта стабилности подземних просторија*, Подземни радови бр. 2, РГФ Београд, 1993.
33. ДИВАЦ Д., ВУЧКОВИЋ Д., БАБИЋ П., *Неке могућности моделирања напонско-деформацијских својстава стенске масе у анализи утицаја рударских радова на примеру рудног тела Тилва Рош у Бору*, XI Југ. симп. о хидрогеологији и инжењерској геологији, Будва, 1996.
34. ДИВАЦ Д., ВУЧКОВИЋ Д., ГРУЈОВИЋ Н. АНЂЕЛКОВИЋ В., *Неке могућности моделирања напонско-деформацијског понашања стенске масе на преградном месту Боговина*, Саопштења са 1. Конгреса ЈДВБ, стр: 277-283, Будва, октобар 1997.

35. DIVAC D., VUČKOVIĆ D., ŽIVKOVIĆ M., GRUJOVIĆ N., *Numerical modelling of rock mass stress strain changes caused by underground excavation in the Bor copper mine*, 4th European conference on numerical methods in geotechnical engineering, Udine, Italy, oct. 1998.
36. ДИВАЦ Д., ВУЧКОВИЋ Д., КОЈИЋ М., СЛАВКОВИЋ Р., ЖИВКОВИЋ М. ГРУЈОВИЋ Н., *Примена МКЕ на моделирање процеса зарушавања и напонско деформацијских промена услед подземне рударске експлоатације*, XXII Југословенски конгрес теоријске и примењене механике, Врњачка Бања, 1997.
37. ДИВАЦ Д., ВУЧКОВИЋ Д., МАШАЛА С., *Комплексна методологија моделирања својстава стенских маса и слегање терена услед подземне експлоатације*, Подземни радови бр. 2, РГФ Београд, 1993.
38. DIVAC D., VUČKOVIĆ D., MAŠALA S., DENIĆ D., *A new method of modelling subsidence above underground mining excavation*, News Journal, ISRM, 1996.
39. ДИВАЦ Д., ВУЧКОВИЋ Д., МИЛОЈКОВИЋ Б., *Примери примене преднапрегнутих сидара у обезбеђењу стабилности косина у чврстим стенским масама*, Међународни научни скуп "Правци развоја геотехнике", Београд, 1996.
40. ДИВАЦ Д., ВУЧКОВИЋ Д., Б. МИЛОЈКОВИЋ, *Примери пројектних решења и искустава из градње бране Првонек код Врања*, Саопштења са 1. Конгреса ЈДВБ, стр: 197-207, Будва, октобар 1997.
41. ДИВАЦ Д., МАШАЛА С., ПУЈЕВИЋ Б., *Прилог примени методе коначних елемената у напонско-деформацијској анализи подземних просторија*, VII југословенски симпозијум за механику стена и подземне радове, Београд, 1989.
42. DIMAGGIO F. L., SANDLER I. S., *Material model for granular soils*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 97, p 935, 1971.
43. EDMOND J.M. and PATERSON M.S., *Volume Changes During Deformation of Rock at High Pressures*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol.9, No.2, pp. 161-182, Mar. 1972.
44. ZIENKIEWICZ O.C. and PANDE G.N., *Some Useful Forms of Isotropic Yield Surfaces for Soil and Rock Mechanics*, Finite Elements in Geomechanics - edited by G.Gudehus, John Wiley and Sons, Ltd., 1977.
45. ИТО Н., *On rheological behaviour on in situ rock based on long-term creep experiments*, Proceedings of the Seventh International Congress on Rock Mechanics, A.A.Balkema, pp. 265-269, Vol. 1., 1991.
46. JAHNS H., *Measuring the Strength of Rock In-Situ at the Increasing Scale*, Proc. 1. Congress ISRM, Vol. 1, p 477, Lisbon, 1966.
47. JEAGER J.C. and COOK N.G., *Fundamentals of Rock Mechanics*, Methuen and Co Ltd, 1969.
48. JEAGER J. C., *Rock mechanics and engineering*, Cambridge University press, 1979.
49. KIM M. K., LADE P. V., *Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials I. Plastic Potential Function*, Computers and Geotechnics, p 307, Vol. 5, No. 4, 1988.
50. КОЈИЋ М., *Општи концепт имплицитне интеграције конститутивних релација при нееластичном деформисању материјала*, Центар за научна истраживања САНУ и Универзитета у Крагујевцу, 1993.
51. КОЈИЋ М., *Computational procedures in inelastic analysis of solids and structures*, Centar of Scientific Research of Serbian Academy of Sciences and Arts and University of Kragujevac and Faculty of Mechanical Engineering in Kragujevac, Kragujevac, 1997.
52. КОЈИЋ М., SLAVKOVIĆ R., GRUJOVIĆ N., VUKIĆEVIĆ M. *Implicit stress integration algorithm for the modified cam-clay material*, Теоријска и применјена механика, 1994.



53. KOVARI K., *Models for the interpretation of plastic and brittle behaviour of rock*, Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, A.A.Balkema, pp. 533-545, Vol.2, 1979.
54. КУЈУНЦИЋ Б., *Основе механике стена - I*, Грађевински календар, СИТЈ, Београд, 1977.
55. LADE P. V., KIM M. K., *Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials II. Yield Criterion and Plastic Work Contours*, Computers and Geotechnics, p 13, Vol. 6, No. 1 1988.
56. LADE P. V., KIM M. K., *Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials III. Comparisons with Experimental Data*, p 31, Vol. 6, No. 1 1988.
57. LADE P. V., *Rock strenght criteria, the theories and the evidence*, Comprehensive rock engineering (Edited by Hudson et all), Volume 1 – Fundamentals, p 255, Pergamon Press, 1993.
58. LEE R. S., BORJA R. I. *Cam-clay plasticity, part I: Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations*, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1990.
59. LUCCIONI B., OLLER S., DANESI R., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 129, p 81, 1996.
60. MAJER G., HUECKEL T., *Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, p 77, Volume 16, Number 2, Januaru 1979.
61. MAJEWSKI S., *Elasto-Plastic Model with Isotropic Hardening/Softening Rule for Cohesive-Frictional Materials*, Copmputational Plasticity, Fundamentals and Aplications, edited by Owen D.R.J., Onate E., Hinton E., CIMNE, Barcelona, 1997.
62. MAHNKEN R., STEIN E., *Concepts and Computational Methods for Parameter Identification of Inelastic Material Models*, Copmputational Plasticity, Fundamentals and Aplications, edited by Owen D.R.J., Onate E., Hinton E., CIMNE, Barcelona, 1997.
63. MAKSIMOVIĆ M., *The Shear Strength Components of a Rough Rock Joint*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, Volume 33, Number 8, p 769, 1996.
64. MULLER-SALZBERG L., GE HIN RUN, *Untersuchungen Zum MechanischenVerhallen Geklufteten Gebirges unter Wechsellasten*, Proc. 5. Congress ISRM Melbourne, Vol 1, p A43, Balkema, 1983.
65. OUYANG Z., ELSWORTH D., *A Phenomenological Failure Criterion for Brittle Rock*, Rock Mechanics and Rock Engineering, p 133, Volume 24, Number 3, July-September 1991.
66. OWEN D.R.J. and HINTON E., *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press Limited, 1980.
67. PANDE G. N., *Numerical modelling of rocks - Possibilities and problems*, Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, A. A. Balkema, Vol.4, p 1341, 1979.
68. PANDE G. N., *Constitutive Models for Intact Rock, Rock Joints and Jointed Rock Masses*, Comprehensive Rock Engineering, edited by Hudson E., Brown E., Fairhurst C. and Hoek E., Volume 1 – Fundamentals, Pergamon Press Ltd, 1993.
69. PANDE G. N., BEER G., WILLIAMS J. R., *Numerical Methods in Rock Mechanics*, John Wiley and Sons Ltd., England, 1990.
70. PANDE G.N., LIANG J.X. & MIDDLETON J. *Equivalent Elastic Moduli for Brick Masonry*, Computers and Geotechnics, p 243, Vol. 8, No. 3 1989.
71. PANDE G.N., PIETRUSZCZAK S. *Symmetric Tangential Stiffness Formulation for Non-Associated Plasticity*, Computers and Geotechnics, p 89, Vol. 2, No. 2 1986.

72. PANDE G. N., XIONG W., *An improved multi-laminate model of jointed rock masses*, Proc. Int. Symp. Numerical Models in Geomechanics, Zurich, Sept.1982.
73. PEARCE C. J., BIĆANIĆ N., *On Multi-Surface Plasticity and Rankine Model*, Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, edited by Owen D.R.J., Onate E., Hinton E., CIMNE, Barcelona, 1997.
74. PERZYNA P., *Fundamental problems in viscoplasticity*, Adv. Appl. Mech. 9, 1966.
75. PIETRUSZCZAK S. *A Flow Theory for Soil: Concept of Multiple Neutral Loading Surfaces*, Computers and Geotechnics, p 185, Vol. 2, No. 3 1986.
76. PINTO DA CUNHA A., *Scale effects in rock mechanics*, Scale effects in Rock masses, Proceedings of the First International Workshop on Scale Effects in Rock Masses, pp. 3-31, Loen, Norway, Jun. 1990.
77. PINTO DA CUNHA A., *Scale effects in the determination of mechanical properties of joints and rock masses*, Proceedings of the Seventh International Congress on Rock Mechanics, A.A.Balkema, pp. 311-319, Vol. 1.,1991.
78. PRATT H. R., BLACK A. D., BROWN W. D., BRACE W. F., *The Effect of Specimens Size on the Mechanical Properties on Unjointed Diorite*, Int. Jou. of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomech. Abs., p 513, Volume 9, 1972.
79. PREVOST JEAN H. *Localization of deformations in elastic-plastic solids*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1984.
80. REIK G., ZACAS M., *Strength and Deformation Characteristics of Jointed Media in True Triaxial Compression*, Int. Jou. of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomech. Abs., p 295, Volume 15, 1978.
81. SANDLER I. S., DIMAGGIO F. L., BALADI G. Y., *Generalized cap model for geologic materials*, J. Geotech. Eng. Div., ASCE, p 683, Vol 102, 1976.
82. СЕКУЛОВИЋ М., *Метода коначних елемената*, ИРО ГК, Београд, 1984.
83. SPASOJEVIĆ A., DIVAC D., ŠUŠIĆ N., *Some remarks on implicit integration of Modified Cam-Clay model*, Beyond 2000 in Computational Geotechnics. Amsterdam, The Netherlands, March, 1999.
84. STARFIELD A.M., CUNDALL P.A. *Towards a methodology for rock mechanics modelling*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, p 99, Volume 25, Number 3, June 1988.
85. SUN Z., GERRARD C., STEPHANSSON O. *Rock joints compliance tests for compression and shear loads*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, p 197, Volume 22, Number 4, August 1985.
86. SCHOFIELD A. N.; WROTH C. P., *Critical state soil mechanics*. McGraw Hill, New York, 1968.
87. TALIERCIO A., SACCHI L. G., *A failure condition for layered rock*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol. 25, No.5, pp. 299-307. Oct. 1988.
88. TERZAGHI K., *Theoretical soil mechanics*, Wiley, New York, 1943.
89. TISA A., KOVARIK. *Continuous Failure State Direct Shear Tests*, Rock Mechanics and Rock Engineering, p 83, Volume 17, Number 2, April-June 1984.
90. FARUQUE M. O., DESAI C. S., *Implementation of a general constitutive model for geological materials*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1985.
91. FOSSUM A.F. *Effective elastic properties for a randomly jointed rock mass*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, p 467, Volume 22, Number 6, December 1985.

92. FRANKLIN J. A., DUSSEAUULT M. B., *Rock Engineering*, McGraw-Hill Publishing Company, 1989.
93. FEANKLIN J. A., CHANDRA R., *The Slake Durability Test*, Int. Jour. of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomech. Abstr., p 325, Volume 9, Number 3. 1972.
94. FRANTZISKONIS G., DESAI C. S., *Elastoplastic model with damage for strain softening geomaterials*, Acta Mechanica, 1986.
95. FRANTZISKONIS G., DESAI C. S., *Analysis of a strain softening constitutive model*, Int. J. Solid Struct. 23, p 733, 1986.
96. FRITZ P., *Modelling rheological problems in rock*, Proc. of Forth Int. Conf. Numerical methods in geomechanics, Edmonton, Canada, June 1982.
97. FRITZ P., *Numerical solution of rheological problems in rock*, Proc. Int. Symp. Numerical Models in Geomechanics, Zurich, Sept.1982.
98. HARDY M. P., HUDSON J., FAIRHURST C., The failure of rock beams, Part I and II, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, p 53 and p 69, Number 10, Januaru 1973.
99. HILL R., *A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids*, Journal of mechanics and physics solids, p 236, Num. 6, 1958.
100. HILL R., *The mathematical theory of plasticity*, University Press, Oxford, 1960.
101. HOBBS D.W., *A Study of the Behavior of Broken Rock under Triaxial Compression and its Application to Mine Roadways*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol.3, pp.11-43, Mar. 1966.
102. HOEK E., BROWN E. T., *Empirical Strength Criterion for Rock Masses*, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, VOL. 106, No.659, Proc. paper 15715, pp. 1013-1035, Sept. 1980.
103. HOFSTETTER G., SIMO J. C., TAYLOR R. L., *A modified cap model: Closest point solution algorithms*, 1993.
104. CHANG K. J., YANG T. W., *A constitutive model for the mechanical properties of rock*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, p 123, Volume 19, Number 3, June 1982.
105. COOK N. G. W., *An Experiment Proving that Dilatancy is a Pervasive Volumetric Property of Brittle Rock Loaded to Failure*, Rock Mechanics, Vol. 2, No. 4, Vienna, Austria, pp. 181-188, Dec. 1970.
106. CIVIDINI A., *Constitutive Behavior and Numerical Modeling*, Comprehensive Rock Engineering, edited by Hudson E., Brown E., Fairhurst C. and Hoek E., Volume 1 – Fundamentals, Pergamon Press Ltd, 1993.
107. CRISTESCU N., *Elastic/viscoplastic constitutive equations for rock*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, p 271, Volume 24, Number 5, October 1987.
108. CRISTESCU N. D., GIODA G., *Visco-plastic behaviour of geomaterials*, Springer Verlag Wien-New York, Udine, 1994.
109. CRUOCH S. L., *Experimental Determination of Volumetric Strains in Failed Rock*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol.7, No.6, pp.589-603, Nov. 1970.
110. ЧОЛИЋ Б., ДИВАЦ Д., МАШАЛА С., *Прилог примени анизотропних модела у инжењерскогеолошком моделирању стенских маса*, XIV конгрес ЈДВБ, Струга, 1989.

111. WAWERSIK W. R., FAIRHURST C, *A study of brittle rock fracture in laboratory compression experiments*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, p 561, Number 7, Januарu 1970.
112. WITTKЕ W., *Rock Mechanics - Theory and Applications with Case Histories*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1990.
113. WOHUA Zh., VALLIAPPAN S., *Analysis of Random Anisotropic Damage Mechanics Problems of Rocks Mass. Part I - Probabilistic Simulation*, Rock Mechanics and Rock Engineering, p 91, Volume 23, Number 2, April-June 1990.
114. WOHUA Zh., VALLIAPPAN S. *Analysis of Random Anisotropic Damage Mechanics Problems of Rocks Mass. Part II - Statistical Estimation*, Rock Mechanics and Rock Engineering, p 241, Volume 23, Number 4, October-December 1990.

\* \* \*

115. ТЕХНИЧКА ДОКУМЕНТАЦИЈА УРАЂЕНА У ИНСТИТУТУ "ЈАРОСЛАВ ЧЕРНИ"
- Вишенаменски водоводни и хидроенергетски систем Студеница, истраживање стенских маса, елаборат, 1987.
  - Водоводни тунел Созина, истраживање стенских маса, елаборат, 1987.
  - ХЕ Чебрен, истраживање стенских маса, елаборат, 1988.
  - Брана Првонек – Врање, главни пројекат, 1989.
  - Осигурање падина и косина на фабрици воде у Ариљу, главни пројекат, 1991.
  - Брана Првонек – Врање, Прелив и оточни тунел, Истраживања у току градње, 1991.
  - Санација бране Шевељ – Ариље, истраживања и главни пројекат", 1991.
  - Брана Првонек–Врање, Испуст и водозахват, Истраживања у току градње, 1992.
  - РВС Боговина – Брана Боговина, идејни пројекат, 1994.
  - РВС Боговина – Пројекат истраживања, главни пројекат, 1995.
  - Брана Кључ на реци Шуманки – пројекат истраживања, идејни пројекат, 1996.
  - Студија напонско-деформацијског понашања стенског масива услед јамске експлоатације рудног тела "Тилва Рош", 1996.
  - Брана Боговина – Геотехничка истраживања, главни пројекат, 1997.
  - Брана и акумулација Кључ на реци Шуманки код Лебана, идејни пројекат, 1998-1999.





