UNIVERZITET U BEOGRADU

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Mr. Mihailo A. Muravljov, dipl. ing.

PONAŠANJE TANKOZIDNIH ŠTAPOVA OTVORENIH PROFILA OD PREDNAPREGNUTOG BETONA PRI OGRANIČENOJ TORZIJI SA UTICAJIMA TEČENJA BETONA

doktorska disertacija

BEOGRAD
1975.

UNIVERZITET U BEOGRADU

G R A Đ E V I N S K I F A K U L T E T

Mr. Mihailo A. Muravljov, dipl. ing.

PONAŠANJE TANKOZIDNIH ŠTAPOVA OTVORENIH PROFILA OD PREDNAPREGNUTOG BETONA PRI OGRANIČENOJ TORZIJI SA UTICAJIMA TEČENJA BETONA

Doktorska disertacija

Beograd, 1975.

S A D R Ž A J

1. ELASTIČNA TEORIJA I EKSPERIMENTALNA ISPITIVANJA PREDNAPREGNUTIH TANKOZIDNIH ŠTAPOVA OTVORENIH PROFILA

1.1. U v o d

Teorijska i eksperimentalna ispitivanja pokazuju da svi linijski sistemi u opštem slučaju ne zadovoljavaju Bernoulli-jeve pretpostavke o deformaciji štapa. Pokazalo se da hipoteza ravnih preseka važi samo u jednom specijalnom slučaju, a to je slučaj kada pravci spoljnih sila koje deluju na štap prolaze kroz tačke koje se definišu kao centri smicanja poprečnih preseka. U svim ostalim slučajevima u konstrukcijama se, osim momenata savijanja, transverzalnih i normalnih sila, javljaju i momenti torzije, pa preseci ne ostaju ravni već se krive, ili kako se to drugačije kaže, deplaniraju. Ukoliko se deplanacija obavlja neometano, bez ikakvih ograničenja, radi se o tzv. slobodnoj (Saint - Venant-ovoj) torziji.

Međutim, slobodna torzija se javlja vrlo retko pošto realne konstrukcije najčešće ne zadovoljavaju uslov neograničene deplanacije. U takvim slučajevima radi se o naprezanju na o g r a n i č e n u torziju, pri čemu se u presecima sistema javljaju i izvesna naprezanja koja klasični proračuni ne iskazuju. Veličine ovih dodatnih napona, kako normalnih tako i smičućih, zavise od više faktora, ali, slobodno se može reći, glavnu ulogu u ovom pogledu igra tip poprečnog preseka konstrukcije. Na primer, najveće efekte izazvane ograničenošću deplanacije imamo kod tankozidnih štapova otvorenih profila stoga, što su i veličine deplanacija njihovih preseka pri slobodnoj torziji najveće. Znatno manje, pak, deplanacije javljaju se kod tankozidnih konstrukcija zatvorenih profila, pa su zato kod njih pomenuti efekti mnogo manji.

Baš zbog navedenog, do sada je vrlo mnogo pažnje poklonjeno teorijskoj i eksperimentalnoj analizi ponašanja tankozidnih štapova otvorenih profila. Neka pitanja naponskog i deformacionog stanja konstrukcija ove vrste prvi je dotakao S.P.Timošenko 1905. god. u vezi sa svojim ispitivanjima stabilnosti štapova I preseka. Dalji korak u pravcu proučavanja ove materije učinio je C.Bah 1909. god. vršeći opite na gredama [profila, a intenzivna ispitivanja ponašanja tankozidnih štapova otvorenih profila otpočela su dvadesetih godina ovog veka. 1926. god. C. Weber je uveo pojam centra smicanja, a značajne doprinose u ovom periodu dali su još R.Majar, H.Vagner, B.G.Galjerkin, F.Blajh i drugi. Ipak, najznačajnije mesto među onima koji su se bavili navedenim problemom pripada nesumnjivo V.Z.Vlasovu, koji je u periodu od 1936. do 1939. godine formulisao osnovne stavove danas već klasične teorije tankozidnih štapova otvorenih profila /108/. Vrlo značajne priloge ovoj teoriji (/44/, /45/, /49/, /50/, /51/) dali su u poslednje vreme C.F. Kollbrunner, N.Hajdin i K.Basler.

Međutim, teorija Vlasova, koja se zasniva na stavovima teorije elastičnosti i na nekim posebnim pretpostavkama, nije iz više razloga primenljiva u odnosu na betonske konstrukcije. Ona se u izvornom obliku ne može primeniti čak ni za proračun betonskih konstrukcija izloženih kratkotrajnim opterećenjima, i to iz sledećih razloga:

1./ Svaka konstrukcija od betona predstavlja spregu najmanje dva materijala (betona i čelika), što znači da u opštem slučaju nije ni izotropna, ni homogena;

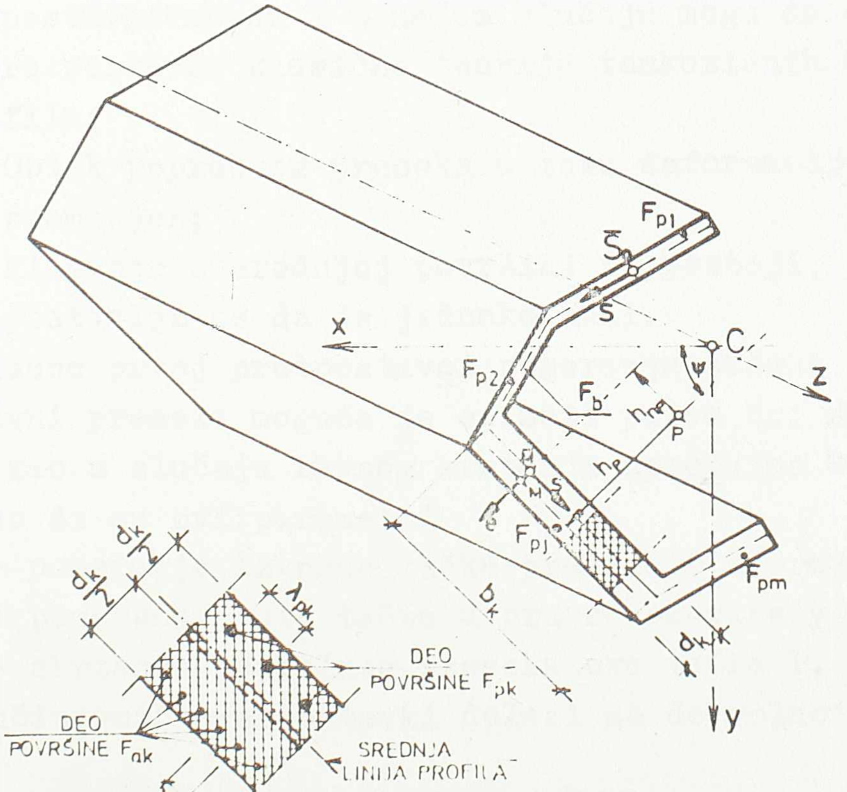
2./ Pojam tankozidnosti betonskih konstrukcija ne odgovara u potpunosti pojmu tankozidnosti definisanom u klasčnoj teoriji tankozidnih štapova.

Mada tankozidne konstrukcije u vidu sprege betona i čelika svakim danom dobijaju sve veći značaj, njima u stručnoj literaturi još uvek nije dato mesto koje zaslužuju. Broj eksperimentalnih i teorijskih radova koji tretiraju ovu problematiku je veoma skroman, a najveći broj studija iz ove oblasti uglavnom ima karakter analize nekog konkretnog problema i daleko je od pretenzija u smislu iznalaženja opštijih formulacija. Ipak, u izvesnom broju radova, a to su radovi /25/, /28/, /49/, /50/ i /51/, već su dovoljno definisani osnovni stavovi jedne opštije teorije koja bi bila primenljiva u odnosu na sve tipove spregnutih betonsko-čeličnih konstrukcija, tj. u odnosu na armiranobetonske, prednapregnute i spregnute konstrukcije u užem smislu.

U daljem će se razmatrati isključivo tankozidni štapovi otvorenih profila od prednapregnutog betona. Teorija koja će biti izložena zasnivaće se na izvesnom broju osnovnih pretpostavki o kojima će biti reči onda kada to bude neophodno za kontinuitet izlaganja. Međutim, ovde je već potrebno da se naglasi da će se sva izlaganja u okviru ovog poglavlja zasnivati na pretpostavci koja je uobičajena kod većine prednapregnutih konstrukcija, a to je pretpostavka da betonski delovi konstrukcija rade bez prslina koje su u stanju da dezangažuju pojedine elemente poprečnih preseka.

1.2. Osnovne pretpostavke i deformacija štapa

Predmet ovoga rada je prav prednapregnut štap sa tankim zidovima kod koga tzv. srednja linija profila, o kojoj ćemo docnije nešto više reći, ima formu otvorene poligonalne linije (sl. 1.1). Radi se, znači, o štapu čiji je poprečni presek for-



Sl. 1.1

miran od niza dovoljno uzanih pravougaonika dužina b_k i debljina d_k, pri čemu se podrazumeva da je betonski deo preseka F_b prožet tzv. "mekom" armaturom ukupne površine $F_a = \sum_k F_{ak}$ i armaturom površine $F_p = \sum_k F_{pk} = \sum_{j=1}^{m} F_{pj}$ koja predstavlja presek svih zategnutih žica (kablova) od visokovrednog čelika.

Kao srednju površinu štapa definisaćemo površ koja nastaje kretanjem neke prave paralelne osi z (izvodnica) duž srednje linije profila. Tačke ove površi, kao i sve ostale tačke na štapu, određene su dekartovim koordinatama x, y i z, pri čemu osovine x i y prestavljaju glavne težišne osovine tzv. idealnog preseka štapa. Pored ovih osovina, u ravni poprečnog preseka usvojićemo još i sistem ortogonalnih osovina e i s. Veličinom e biće određeno odstojanje proizvoljne tačke na štapu u pravcu spoljne normale na srednju površinu, odnosno odstojanje izvesne tačke na ekvidistantnoj površini, dok koordinata s, koja je orijentisana u pravcu srednje linije profila, predstavlja rastojanje koje se po ovoj liniji meri od jedne unapred određene tačke $\bar{S}_o$. Tačka $\bar{S}_o$ je tzv. nulta tačka srednje linije profila.

Pretpostavićemo da i u našem slučaju mogu da se prihvate sledeće pretpostavke klasične teorije tankozidnih štapova otvorenih profila:

1./ Oblik poprečnog preseka u toku deformacije ostaje nepromenjen;

2./ Klizanje u srednjoj površini ne postoji, odnosno pretpostavlja se da je jednako nuli.

Saglasno prvoj pretpostavci pomeranja tačaka poprečnog preseka u ravni preseka moguće je opisati putem tri nezavisna parametra, kao u slučaju ravnog kretanja apsolutno krute ploče. Ako uzmemo da su ovi parametri

$\xi_p(z)$ - pomeranje izvesne tačke preseka P u pravcu osovine x,

$\eta_p(z)$ - pomeranje iste tačke u pravcu osovine y i

$\theta(z)$ - obrtanje poprečnog preseka oko tačke P,

na bazi učinjenih pretpostavki dolazi se do relacije

$$w(x,y,z) = \zeta(z) - \frac{d\xi_p(z)}{dz}x - \frac{d\eta_p(z)}{dz}y - \frac{d\theta(z)}{dz}\omega_p , \qquad (1.2.1)$$

koja definiše pomeranje proizvoljne tačke M na štapu u pravcu osovine z.

Osim članova čija značenja ne treba posebno objašnjavati, izraz (1.2.1), prema /49/ i /51/, sadrži i dve funkcije o kojima do sada nije bilo reči. To su $\zeta(z)$- pomeranje poprečnog preseka kao celine u pravcu z ose i $\frac{d\theta}{dz}\omega_p$- funkcija koja definiše deplanaciju poprečnog preseka. Oblik deplanacije u ovom slučaju određuje funkcija

$$\omega_p = \int_0^s (h_p - e)\, ds + e h_{np}, \qquad (1.2.2)$$

koja u stvari predstavlja sektorsku koordinatu proizvoljne tačke M na štapu. Ako stavimo da je $h_p - e = \bar{h}_p$, izraz (1.2.2) možemo da prikažemo i u obliku

$$\omega_p = \bar{\omega}_p + e h_{np}, \qquad (1.2.3)$$

gde je sada sa $\bar{\omega}_p = \int_0^s \bar{h}_p\, ds$ označena sektorska koordinata proizvoljne tačke $\bar{M}$ na srednjoj liniji profila.

Znajući veličinu pomeranja $w = w(x,y,z)$, dilataciju u tački M možemo da odredimo na osnovu izraza $\varepsilon_z(x,y,z) = \frac{dw}{dz}$. Imamo, dakle, da je

$$\varepsilon_z(x,y,z) = \frac{d\zeta(z)}{dz} - \frac{d^2\xi_p(z)}{dz^2}x - \frac{d^2\eta_p(z)}{dz^2}y - \frac{d^2\theta(z)}{dz^2}\omega_p. \qquad (1.2.4)$$

Vrednost klizanja $\gamma_{sz} = \gamma_{sz}(x,y,z)$ u našem slučaju, pak, obzirom na /49/ i /51/, definisana je izrazom

$$\gamma_{sz}(x,y,z) = 2e\frac{d\theta(z)}{dz}, \qquad (1.2.5)$$

koji u potpunosti zadovoljava pretpostavku 2./.

Obzirom na učinjene pretpostavke, dilatacija $\varepsilon_z = \varepsilon_z(x,y,z)$ i klizanje γ_{sz} u posmatranom slučaju predstavljaju jedine deformacijske veličine.

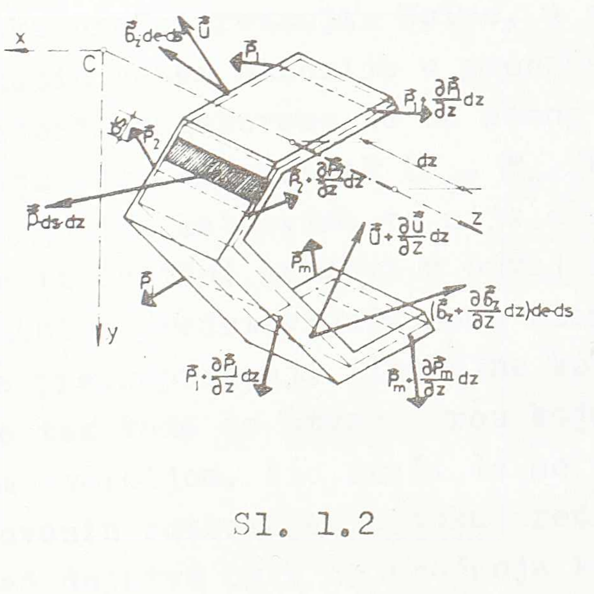
1.3. Naponi, opterećenja, presečne sile

Poći ćemo od pretpostavke da tenzor napona u tački M ima samo komponente σ_z, τ_{zs} i τ_{ze}. Pored toga, dalja izlaganja baziraćemo i na pretpostavci da se napon τ_{zs} može prikazati u vidu zbira dve komponente na sledeći način:

$$\tau_{zs} = \tau_s + \tau_w . \qquad (1.3.1)$$

Sa τ_s je označen napon koji se integracijom po površini elementa štapa $d_k b_k$ svodi samo na izvesan momenat, dok je oznaka τ_w uvedena za napon koji nakon integracije po istoj površini daje određenu silu koja deluje u nivou srednje linije profila.

Ako iz posmatranog štapa izdvojimo elemenat dužine dz (sl. 1.2), na osnovu izloženog sledi da će u preseku $z = z_o$ delovati vektor $\vec{\sigma}_z(\sigma_z, \tau_{zs}, \tau_{ze})$, dok ćemo u preseku $z = z_o + dz$ imati vektor $(\vec{\sigma}_z + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} \cdot dz)$. Pored toga, na ovom elementu ćemo u opštem slučaju imati i proizvoljno površinsko opterećenje $\vec{p} = \bar{p}_x \vec{i} + \bar{p}_y \vec{j} + \bar{p}_z \vec{k}$, za koje ćemo pretpostaviti da deluje u tačkama srednje površine štapa, a takođe i izvesno opterećenje koje se javlja kao rezultat prednaprezanja. Sa $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ su označeni jedinični vektori osovina x, y i z.



Sl. 1.2

Pošto se prednaprezanje najčešće tretira kao specifičan vid opterećenja, njemu ćemo ovde posvetiti nešto više prostora.

Kao što je poznato, prednaprezanje konstrukcija se u najvećem broju slučajeva ostvaruje putem zatezanja žica od visokovrednog čelika. Uglavnom postoje dva osnovna postupka prednaprezanja. Kod jednog žice se zatežu na tzv. stazi za prednaprezanje pre izrade same betonske konstrukcije, pa se njihovo opuštanje, tj. apliciranje prednaprezanja, izvodi tek pošto je dostignuta potrebna čvrstoća betona i obezbeđeno prenošenje sila sa žica na beton. Obzirom da je ovo prenošenje uslovljeno athezijom između betona i čelika, ovaj način prednaprezanja je poznat kao prednaprezanje putem athezije.

Drugi postupak je tzv. prednaprezanje kablovima. Ovaj naziv je nastao stoga što se u ovom slučaju najčešće koriste kablovi - snopovi formirani od većeg broja žica, koji se provlače kroz unapred ostavljene otvore u konstrukciji i zatežu po isteku izvesnog vremena nakon betoniranja. Za razliku od prvog načina, gde u momentu apliciranja sile prednaprezanja imamo pojavu potpuno istih deformacija žica i korespondentnih tačaka betonske mase, kod drugog načina se u toku zatezanja kablova javljaju potpuno nezavisne deformacije žica i ostalih delova konstrukcije.

Treba ukazati i na još jednu razliku između navedenih postupaka prednaprezanja. Naime, u slučaju konstrukcija prednapregnutih putem athezije u prenošenju napona od spoljašnjih opterećenja angažovane su od samog početka sve površine koje formiraju poprečni presek (F_a, F_p, F_b), dok kod konstrukcija prednapregnutih kablovima to nije slučaj. Ovo dolazi stoga što zategnuti čelični kablovi u prvoj fazi rada prednapregnute konstrukcije predstavljaju samo elemenat preko koga se ostvaruje sila prednaprezanja. Površine kablova (F_{pj}) postaju delovi preseka tek kada se otvori kroz koje oni prolaze injektiraju cementnom emulzijom, što znači da se preko njih, osim napona prouzrokovanih zatezanjem u toku prednaprezanja, prenose samo naponi usled dejstva onih opterećenja koja na konstrukciju dolaze nakon ostvarenja veze između kablova i betona posredstvom injekcione smese.

Sile u žicama, odnosno kablovima, u daljem ćemo obeležavati sa $\vec{P}_j$, što znači da ćemo smatrati da se odnose na preseke čelika F_{pj}. Ovakav način izražavanja usvajamo kao opštiji, pošto se može dogoditi da unutar pojedinih elemenata $d_k b_k$ imamo po nekoliko sila $\vec{P}_j$.

Imajući u vidu izloženo proizilazi da će na elemenat dz prednapregnutog štapa, između ostalih sila, delovati i rezultanta sila u kablovima u presecima $z=z_0$ i $z=z_0+dz$. U prvom preseku deluju sile $\vec{P}_j$, dok u drugom preseku imamo sile $\vec{P}_j + \frac{\partial \vec{P}_j}{\partial z}dz$, ($j=1,2,3,...m$). Pravci ovih, u svim slučajevima zatežućih sila, određeni su trasama žica, odnosno kablova, ili drugim rečima, određeni su pravcima tangenti na ove trase.

Uzmimo sada da je linija nekog kabla (ili linija zategnute žice, odnosno grupe žica, u konstrukciji prednapregnutoj na stazi), kao izvesna kriva u prostoru, definisana u vidu preseka dve cilindrične površine:

$$F(x,y,z)=f_x(z)-x=0,\qquad \Phi(x,y,z)=f_y(z)-y=0. \tag{1.3.2}$$

Saglasno ovome, kosinusi pravaca tangente na liniju kabla, odnosno komponente njenog jediničnog vektora $\vec{t}_k$ u sistemu xyz, biće definisani vezama

$$\lambda\cos\alpha_t=\frac{df_x(z)}{dz}=f_x'(z),\quad \lambda\cos\beta_t=\frac{df_y(z)}{dz}=f_y'(z),\quad \lambda\cos\gamma_t=1,$$

odakle se dobija da je

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_x(z)&=\cos\alpha_t=\frac{f_x'(z)}{\sqrt{1+f_x'^2(z)+f_y'^2(z)}},\\ \mathcal{H}_y(z)&=\cos\beta_t=\frac{f_y'(z)}{\sqrt{1+f_x'^2(z)+f_y'^2(z)}},\\ \mathcal{H}_z(z)&=\cos\gamma_t=\frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2(z)+f_y'^2(z)}}\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Silu u kablu, pak, možemo da prikažemo u vidu relacije

$$\vec{P}_j(z)=P_j(z)\cdot\vec{t}_k=P_{jx}(z)\vec{i}+P_{jy}(z)\vec{j}+P_{jz}(z)\vec{k}, \tag{1.3.4}$$

pa na osnovu napred dobijenih kosinusa pravaca tangente na liniju kabla imamo da je

$$\begin{aligned}P_{jx}(z)&=P_j(z)\cdot\mathcal{H}_x(z),\\ P_{jy}(z)&=P_j(z)\cdot\mathcal{H}_y(z),\\ P_{jz}(z)&=P_j(z)\cdot\mathcal{H}_z(z).\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Sila u kablu $\vec{P}_j(z)$ predstavlja u stvari silu koju imamo na samom početku rada konstrukcije. Obzirom da ovde razmatramo samo ponašanje konstrukcija pod pretpostavkom primenljivosti teorije elastičnosti, sila $\vec{P}_j(z)$ će uslovno biti nezavisna od vremena. Njen intenzitet će u najvećoj meri zavisiti od trenja između kabla i kanala kroz koji on prolazi, dok će u slučaju prednaprezanja putem athezije zavisiti i od elastične deformacije koja se javlja pod dejstvom sila u zategnutim žicama u trenutku njihovog opuštanja.

Ako sa $\vec{\tilde{u}}$ označimo virtualno pomeranje proizvoljne tačke u preseku $z=z_o$, a sa $\vec{\tilde{u}}+\frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial z}dz$ pomeranje koje se odnosi na neku tačku u preseku $z=z_o+dz$, primenom principa virtualnih radova dolazi se do sledeće relacije:

$$\widetilde{W}+\widetilde{U}_a+\widetilde{U}_p+\widetilde{U}_b=\widetilde{W}+\sum_{f=a,p,b}\widetilde{U}_f=0. \qquad (1.3.6)$$

Ovde je sa $\widetilde{W}$ označen specifičan virtualan rad spoljnih sila koje deluju na elemanat štapa prikazan na sl. 1.2, dok su $\widetilde{U}_a$, $\widetilde{U}_p$ i $\widetilde{U}_b$ virtualni radovi unutrašnjih sila koje se prenose preko površina F_a, F_p i F_b.

Izraz za rad spoljnih sila sveden na jedinicu dužine štapa možemo da prikažemo u obliku

$$\widetilde{W}=\sum_{f=a,b,p}\int_{F_f}\left(\frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z}\vec{\tilde{u}}+\vec{\sigma}_z\frac{\partial\vec{\tilde{u}}}{\partial z}\right)deds+\int\vec{p}\cdot\vec{\tilde{u}}\cdot ds+\sum_{j=1}^{m}\frac{d\vec{P}_j(z)}{dz}\vec{\tilde{u}}_j, \qquad (1.3.7)$$

dok virtualan rad unutrašnjih sila po jedinici dužine štapa iznosi

$$\widetilde{U}=\sum_{f=a,p,b}\widetilde{U}_f=-\sum_{f=a,p,b}\int_{F_f}(\sigma_z\cdot\tilde{\varepsilon}_z+\tau_s\tilde{\gamma}_{sz})\,deds. \qquad (1.3.8)$$

Vrednost $\vec{\tilde{u}}$ koja figuriše u izrazu (1.3.7) predstavlja virtualno pomeranje proizvoljne tačke na srednjoj površini štapa. Ovaj vektor uveden je u postupak stoga, što je pretpostavljeno da spoljašnja površinska opterećenja deluju samo u tačkama srednje površine. Kod ispisivanja relacije (1.3.8), kojom je u stvari definisan negativan rad komponenata napona pri datim virtualnim deformacijama $\tilde{\varepsilon}_z$ i $\tilde{\gamma}_{sz}$, vođeno je računa o činjenici da komponente smičućeg napona τ_w ne vrše nikakav rad. Treba još napomenuti i to da smo u izrazima (1.3.7) i (1.3.8) diferencijalni elemenat površine dF prikazali u vidu proizvoda de·ds.

Na bazi pretpostavki da je vektor $\vec{\bar{u}}$ neprekidna funkcija koordinata i da zadovoljava uvedene pretpostavke o deformaciji, ovu funkciju možemo da usvojimo u istom obliku kao i vektor stvarnog pomeranja proizvoljne tačke na štapu. Treba samo imati u vidu da komponente vektora $\bar{u}$, kao i izvodi ovih komponenata do onog reda koji nam je potreban, uvek moraju da imaju vrednosti različite od nule.

Ako se primene svi do sada izloženi stavovi, i ako se pri tome upotrebe relacije (1.3.6), (1.3.7), (1.3.8), (1.2.4) i (1.2.5), kao i vrednosti komponenata napona $\vec{\sigma}_z$ u pravcima osovina x i y, dolazi se do sledećih relacija:

$$
\begin{aligned}
&Q_x' + p_{xp} + p_{xk} = 0,\\
&Q_y' + p_{yp} + p_{yp} = 0,\\
&N' + p_{zp} + p_{zk} = 0,\\
&M_x' - Q_x + \mathfrak{m}_{xp} + \mathfrak{m}_{xk} = 0,\\
&M_y' - Q_y + \mathfrak{m}_{yp} + \mathfrak{m}_{yk} = 0,\\
&T_p' + \mathfrak{m}_{P_p} + \mathfrak{m}_{pk} = 0,\\
&M_{\omega p}' - T_p + T_s + \mathfrak{m}_{\omega_p p} + \mathfrak{m}_{\omega_p k} = 0.
\end{aligned}
\qquad (1.3.9)
$$

U izrazima (1.3.9), u kojima smo simbolom "′" označili izvode po promenljivoj z, figurišu presečne sile tankozidnog štapa koje se definišu na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
&N = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \sigma_z \, dF,\\
&M_x = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \sigma_z x \, dF,\\
&M_y = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \sigma_z y \, dF,
\end{aligned}
\qquad (1.3.10)
$$

$$
\begin{aligned}
&Q_x = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} (\tau_{ze} \cos\psi - \tau_{zs} \sin\psi) \, dF,\\
&Q_y = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} (\tau_{ze} \sin\psi + \tau_{zs} \cos\psi) \, dF,
\end{aligned}
\qquad (1.3.11)
$$

$$T_p = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} (\tau_{ze} h_{np} + \tau_{zs} h_p)\, dF, \qquad (1.3.12)$$

$$T_s = 2 \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \tau_s e\, dF, \qquad (1.3.13)$$

$$M_{\omega p} = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \sigma_z \omega_p\, dF. \qquad (1.3.14)$$

N je normalna sila, M_x i M_y su momenti savijanja oko osa y i x, dok su Q_x i Q_y transverzalne sile u pravcima osovina x i y. Pored ovih, u otpornosti materijala i teoriji konstrukcija uobičajenih presečnih sila, definisane su još i sledeće veličine:

T_p - torzioni momenat u odnosu na tačku P,
T_s - Saint-Venant - ov momenat slobodne torzije i
$M_{\omega p}$ - tzv. b i m o m e n t.

Osim presečnih sila, u relacijama (1.3.9) figurišu i spoljne sile.

$$\begin{aligned} p_x &= p_{xp} + p_{xk} = \int_s \bar{p}_x ds + \sum_{j=1}^{m} P'_{jx}, \\ p_y &= p_{yp} + p_{yk} = \int_s \bar{p}_y ds + \sum_{j=1}^{m} P'_{jy}, \qquad (1.3.15) \\ p_z &= p_{zp} + p_{zk} = \int_s \bar{p}_z ds + \sum_{j=1}^{m} P'_{jz}, \end{aligned}$$

su linijska opterećenja, dok su

$$\begin{aligned} m_x &= m_{xp} + m_{xk} = \int_s \bar{p}_z \bar{x} ds + \sum_{j=1}^{m} P'_{jz} x_j, \\ m_y &= m_{yp} + m_{yk} = \int_s \bar{p}_z \bar{y} ds + \sum_{j=1}^{m} P'_{jz} y_j \qquad (1.3.16) \\ m_p &= m_{pp} + m_{pk} = \int_s [\bar{p}_y(\bar{x} - x_p) - \bar{p}_x(\bar{y} - y_p)] ds + \sum_{j=1}^{m} [P'_{jy}(x_j - x_p) - P'_{jx}(y_j - y_p)], \end{aligned}$$

podeljeni momenti u odnosu na osovine y, x i z_p. U ovom slučaju z_p je osovina paralelna osi z koja prolazi kroz tačku P, dok su $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koordinate proizvoljne tačke na srednjoj liniji profila.

Veličina

$$m_{\omega p} = m_{\omega pp} + m_{\omega pk} = \int_s \bar{p}_z \bar{\omega}_p ds + \sum_{j=1}^{m} P'_{jz} \omega_{pj} \qquad (1.3.17)$$

je tzv. spoljni podeljeni bimoment.

Kao što se vidi, uticaj zategnutih kablova u posmatranom štapu može da se izrazi putem uobičajenih spoljašnjih opterećenja. Imajući u vidu napred definisane veličine sila u kablovima, odnosno relacije (1.3.5), dobijaju se sledeće vrednosti:

$$
\begin{aligned}
p_{xk} &= \sum_{j=1}^{m} P'_{jx} = \sum_{j=1}^{m} [P'_j(z)\cdot \mathcal{H}_x(z) + P_j(z)\cdot \mathcal{H}'_x(z)],\\
p_{yk} &= \sum_{j=1}^{m} P'_{jy} = \sum_{j=1}^{m} [P'_j(z)\cdot \mathcal{H}_y(z) + P_j(z)\cdot \mathcal{H}'_y(z)],\\
p_{zk} &= \sum_{j=1}^{m} P'_{jz} = \sum_{j=1}^{m} [P'_j(z)\cdot \mathcal{H}_z(z) + P_j(z)\cdot \mathcal{H}'_z(z)],\\
\mathfrak{M}_{xk} &= \sum_{j=1}^{m} P'_{jz}\cdot x_j = \sum_{j=1}^{m} [P'_j(z)\cdot \mathcal{H}_z(z) + P_j(z)\cdot \mathcal{H}'_z(z)]\cdot x_j,\\
\mathfrak{M}_{yk} &= \sum_{j=1}^{m} P'_{jz}\cdot y_j = \sum_{j=1}^{m} [P'_j(z)\, \mathcal{H}_z(z) + P_j(z)\, \mathcal{H}'_z(z)]\cdot y_j,\\
\mathfrak{M}_{pk} &= \sum_{j=1}^{m} \{[P'_j(z)\cdot \mathcal{H}_y(z) + P_j(z)\cdot \mathcal{H}'_y(z)](x_j - x_p) - [P'_j(z)\cdot \mathcal{H}_x(z) + P_j(z)\cdot \mathcal{H}'_x(z)](y_j - y_p)\},\\
\mathfrak{M}_{\omega_p k} &= \sum_{j=1}^{m} P'_{jz}\cdot \omega_{pj} = \sum_{j=1}^{m} [P'_j(z)\cdot \mathcal{H}_z(z) + P_j(z)\cdot \mathcal{H}'_z(z)]\, \omega_{pj}.
\end{aligned}
\tag{1.3.18}
$$

Ovi izrazi važe u najopštijem slučaju, međutim pod određenim uslovima oni se mogu i uprostiti. Naime, ukoliko je reč o kablovima sa malom zakrivljenošću, što je u praksi i najčešći slučaj, veličine izvoda $f'_x(z)$ i $f'_y(z)$ biće male veličine pa će kvadrati ovih vrednosti biti male veličine u odnosu na jedinicu. Stoga se može uzeti da je

$$\mathcal{H}_x(z) \approx f'_x(z), \quad \mathcal{H}_y(z) \approx f'_y(z), \quad \mathcal{H}_z(z) \approx 1.$$

Pored toga, ako se zanemari trenje između kabla i kanala kroz koji on prolazi, sila u njemu neće zavisiti od koordinate z, pa će izvodi $\frac{dP_j(z)}{dz} = P'_j(z)$ biti jednaki nuli.

Prema tome, približni, ali za praktičnu upotrebu ipak dovoljno tačni izrazi za linijska opterećenja koja izražavaju uticaj kablova u posmatranom štapu, glase:

$$
\begin{aligned}
p_{xk} &= \sum_{j=1}^{m} P_j\cdot f''_x(z),\\
p_{yk} &= \sum_{j=1}^{m} P_j\cdot f''_y(z),\\
\mathfrak{M}_{pk} &= \sum_{j=1}^{m} [f''_y(z)(x_j - x_p) - f''_x(z)(y_j - y_p)]\, P_j,\\
p_{zk} &= \mathfrak{M}_{xk} = \mathfrak{M}_{yk} = \mathfrak{M}_{\omega_p k} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.3.19}
$$

Šest prvih jednačina grupe (1.3.9) predstavljaju uslove ravnoteže tela u prostoru. Ove izraze smo mogli da dobijemo i primenom klasičnog postupka formiranja uslova ravnoteže za elemenat dz, ali u tom slučaju ne bi bili u stanju da na neposredan način definišemo bimoment M_{ω_p} i da uspostavimo vezu između presečnih sila M_{ω_p}, T_p i T_s. Kao što se vidi, primenjen postupak, na koji se prvi put nailazi u radu N.Hajdina /26/, omogućava da se osim šest uslova ravnoteže, dobije i jednačina koja povezuje navedene presečne sile.

Uticaj napona τ_{ze} u odnosu na presečne sile Q_x i Q_y je redovno veoma mali, pa se bez opasnosti od veće greške može i zanemariti, tako da definicioni izrazi za transverzalne sile dobijaju nešto jednostavnije oblike. Međutim, ovaj napon se ne sme zanemariti u izrazu za torzioni momenat T_p, pošto bi to bitno uticalo na tačnost teorije koja se ovde izlaže. Naime, ako se pođe od činjenice da se Saint-Venant - ov torzioni momenat može prikazati i u obliku

$$T_s = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \tau_s \cdot e \cdot dF + \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \tau_{ze} \cdot h_{np} \cdot dF,$$

izraz (1.3.12) se može prikazati na sledeći način:

$$T_p = T_s + T_{\omega p}. \tag{1.3.20}$$

Ovde je

$$T_{\omega p} = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \tau_w \cdot h \cdot dF \tag{1.3.21}$$

tzv. torzioni momenat krivljenja, što znači da je ukupni momenat torzije T_p jednak zbiru Saint-Venant - ovog momenta i torzionog momenta krivljenja.

Ispisaćemo sada još jednom definitivne forme definicionih izraza za sve presečne sile na koje ćemo se u slučaju potrebe pozivati:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \sigma_z dF, \\ M_x &= \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \sigma_z x dF, \\ M_y &= \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \sigma_z y dF, \end{aligned} \tag{1.3.22}$$

$$Q_x = -\sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \tau_w \sin\psi \, dF,$$
$$Q_y = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \tau_w \cos\psi \, dF, \qquad (1.3.23)$$

$$M_{\omega p} = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \sigma_z \cdot \omega_p \cdot dF, \qquad (1.3.24)$$

$$T_s = \sum_{f=a,p,b} 2 \int_{F_f} \tau_s e \, dF, \qquad (1.3.25)$$

$$T_{\omega_p} = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \tau_w \cdot h_p dF \qquad (1.3.26)$$

1.4. Veze između pomeranja, napona i presečnih sila

Izlaganja u ovom poglavlju baziraćemo na Hooke - ovim vezama između napona i deformacija:

$$\sigma_{fo} = \sigma_{fzo} = E_f \cdot \varepsilon_{zo}, \quad f = a,p,b, \qquad (1.4.1)$$

$$\tau_{sfo} = G_f \cdot \gamma_{szo}, \quad f = a,p,b. \qquad (1.4.2)$$

Indeksi "o" koji stoje uz ispisane naponske i deformacijske veličine označavaju da je reč o elastičnom ponašanju štapa, odnosno o dejstvu tzv. kratkotrajnih opterećenja, pa ćemo ih ubuduće stavljati uz sve veličine koje se odnose na ovaj slučaj opterećenja. Pored toga, treba imati u vidu da se napon σ_{ao}, kada se radi o konstrukcijama prednapregnutim putem athezije, odnosi na stanje neposredno nakon opuštanja staze za prednaprezanje, i da su veze između klizanja γ_{szo} i napona smicanja ispisane saglasno pretpostavci da naponi τ_{wfo} ne proizvode nikakve deformacije.

Na bazi definicionih izraza za presečne sile, kao i korišćenjem veza (1.4.1) i (1.2.4), dobijaju se sledeće vrednosti:

$$\begin{aligned}
N_o &= E_b(F \cdot \zeta_o' - S_x \cdot \xi_{po}'' - S_y \cdot \eta_{po}'' - S_{\omega p} \cdot \theta_o''),\\
M_{xo} &= E_b(S_x \zeta_o' - I_{xx} \xi_{po}'' - I_{xy} \cdot \eta_{po}'' - I_{x\omega_p} \cdot \theta_o''),\\
M_{yo} &= E_b(S_y \cdot \zeta_o' - I_{xy} \xi_{po}'' - I_{yy} \cdot \eta_{po}'' - I_{x\omega_p} \cdot \theta_o'')\\
M_{\omega_p o} &= E_b(S_{\omega_p} \cdot \zeta_o' - I_{x\omega_p} \xi_{po}'' - I_{y\omega_p} \eta_{po}'' - I_{\omega_p\omega_p} \theta_o''),
\end{aligned} \qquad (1.4.3)$$

Uz pomeranja u relacijama (1.4.3) figurišu veličine

$$F=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\int_{F_f} dF=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\cdot F_f,$$

$$S_x=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\int_{F_f} x\,dF=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\cdot S_{xf},$$

$$S_y=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\int_{F_f} y\,dF=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\cdot S_{yf},$$

$$I_{xx}=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\int_{F_f} x^2dF=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\cdot I_{xxf},$$

$$I_{yy}=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\int_{F_f} y^2dF=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\cdot I_{yyf}, \qquad (1.4.4)$$

$$I_{xy}=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\int_{F_f} xy\,dF=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\cdot I_{xyf},$$

$$S_{\omega_p}=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\int_{F_f} \omega_p dF=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\cdot S_{\omega_p f},$$

$$I_{x\omega_p}=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\int_{F_f} \omega_p x\,dF=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\cdot I_{x\omega_p f},$$

$$I_{y\omega_p}=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\int_{F_f} \omega_p y\,dF=\sum_{f=a,p,b} n_{Ef}\cdot I_{y\omega_p f},$$

gde su faktori n_{Ea}, n_{Ep} i n_{Eb} definisani na sledeći način:

$$n_{Ea}=\frac{E_a}{E_b}, \quad n_{Ep}=\frac{E_p}{E_b}, \quad n_{Eb}=1. \qquad (1.4.5)$$

Vrednosti (1.4.4) predstavljaju geometrijske karakteristike tzv. idealnog preseka štapa. Pošto položaji tačaka P i S_o načelno nisu ničim uslovljeni, pogodnim izborom ovih tačaka može se ispuniti uslov

$$S_{\omega p}=I_{x\omega p}=I_{y\omega p}=0, \qquad (1.4.6)$$

pa kada se još uzme u obzir da su osovine x i y glavne težišne osovine inercije idealnog preseka, relacije (1.4.3) možemo da napišemo i na znatno jednostavniji način:

$$\begin{aligned} N_o&=E_bF\zeta_o',\\ M_{xo}&=E_bI_{xx}\xi_o'',\\ M_{yo}&=E_bI_{yy}\eta_o'',\\ M_{\Omega o}&=E_bI_{\Omega\Omega}\Theta_o''. \end{aligned} \qquad (1.4.7)$$

Ne ulazeći na ovom mestu dublje u pitanja praktičnog određivanja specijalnih položaja za pol i nultu tačku srednje linije profila saglasno uslovu (1.4.6), ovde ćemo samo napomenuti da izrazi $I_{x\omega p}$ i $I_{y\omega p}$ zavise isključivo od izbora tačke P, dok vrednost $S_{\omega p}$ zavisi i od položaja tačke $\bar{S}_o$.

Pol za koji se izrazi $I_{x\omega p}$ i $I_{y\omega p}$ anuliraju obeležavaćemo ubuduće sa D i zvaćemo centrom smicanja idealnog preseka. Sektorsku koordinatu koja se odnosi na tačku D, a koja osim toga zadovoljava i uslov $S_{\omega p}= 0$, obeležavaćemo u daljem sa Ω i zvaćemo normiranom sektorskom koordinatom idealnog preseka. Zbog toga smo u poslednjem od izraza (1.4.7) i izvršili zamenu indeksa ω_p indeksom Ω , pri čemu smo , kao što se vidi, dobili veličinu $I_{\Omega\Omega}$ koja predstavlja tzv. sektorski momenat inercije:

$$I_{\Omega\Omega} = \sum_{f=a,p,b} n_{Ef} \int_{F_f} \Omega^2 dF. \tag{1.4.8}$$

Na osnovu izloženog proizilazi da su ξ_o i η_o sada pomeranja centra smicanja u pravcima glavnih težišnih osovina inercije idealnog preseka, dok je θ_o obrtanje preseka oko iste tačke.

Transverzalne sile Q_{xo} i Q_{yo} u funkciji pomeranja možemo da prikažemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} Q_{xo} &= -E_b I_{xx}\, \xi_o''' + \mathfrak{m}_x, \\ Q_{yo} &= -E_b I_{yy}\, \eta_o''' + \mathfrak{m}_y. \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Torzioni momenat krivljenja, pak, na bazi iznetih stavova možemo da predstavimo u obliku

$$T_{\Omega o} = -E_b I_{\Omega\Omega} \cdot \theta_o''' + \mathfrak{m}_\Omega, \tag{1.4.10}$$

gde je

$$\mathfrak{m}_\Omega = \int_s \Omega \bar{p}_z ds. \tag{1.4.11}$$

Definisanje veze između torzionog momenta T_{so} i pomeranja nije moguće sve dok se potpuno jasno ne definiše koordinata e, odnosno srednja površina štapa. I ako je ovaj problem u našem slučaju obzirom na diskretan raspored čeličnih delova po površini poprečnog preseka veoma složen, uz izvesne dopunske pretpostavke on se može rešiti na zadovoljavajući način. Naime, pretpostavićemo da su površine čelika F_{ak} i F_{pk} raspoređene po presecima elemenata $d_k \cdot b_k$ u nizu ekvidistantnih, dovoljno bliskih tačaka i da su linije ovih rasporeda paralelne stranama b_k. Obzirom na definiciju napona τ_s datu u poglavlju 1.2. biće

$$\sum_{f=a,p,b} \int_{F_{fk}} \tau_s dF = 0,$$

pa kada se uzmu u obzir veze (1.2.5) i (1.4.2) dobija se da je

$$\sum_{f=a,p,b} \frac{G_f}{G_b} \int_{F_{fk}} e\, dF = 0. \qquad (1.4.12)$$

Ova relacija definiše u stvari u ravni poprečnog preseka geometrijsko mesto tačaka koje ispunjava uslove srednje linije profila, odnosno geometrijsko mesto tačaka putem koga se na već opisan način definiše srednja površina štapa. Imajući u vidu napred uvedene pretpostavke u vezi rasporeda čeličnih elemenata po preseku pravougaonika $d_k \cdot b_k$, može se sa dovoljnom tačnošću usvojiti da je srednja linija profila u našem slučaju poligonalna linija čiji su delovi paralelni odgovarajućim stranama b_k.

Korišćenjem definicionog izraza (1.3.25), kao i drugih relacija koje smo napred izveli, dobija se da je

$$T_{s_o} = G_b \cdot K \cdot \theta_o' . \qquad (1.4.13)$$

Ovde smo sa K označili veličinu

$$K = \sum_{f=a,p,b} 4 n_{cf} \int_{F_f} e^2 dF, \qquad (1.4.14)$$

koja predstavlja tzv. torzionu konstantu idealnog preseka.

Na bazi iznetih stavova dobijaju se i sledeće vrednosti:

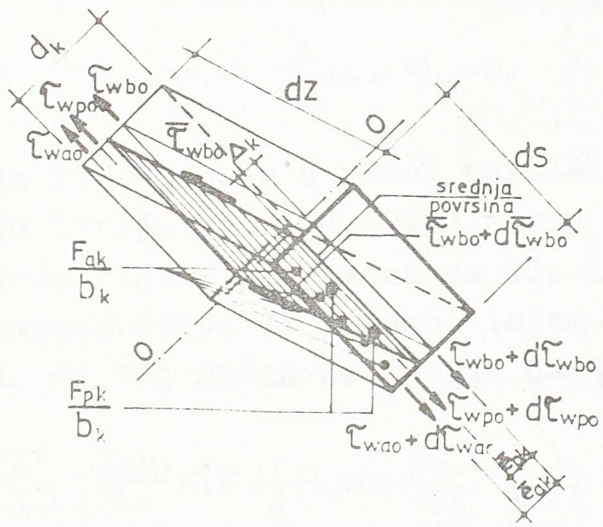
$$\sigma_{fo} = n_{cf} \left(\frac{N_o}{F} + \frac{M_{xo}}{I_{xx}} x + \frac{M_{yo}}{I_{yy}} y + \frac{M_{\Omega o}}{I_{\Omega\Omega}} \Omega \right), \quad f=a,p,b \qquad (1.4.15)$$

$$\tau_{sfo} = 2e \frac{T_{so}}{K} \cdot n_{cf} . \quad f=a,p,b \qquad (1.4.16)$$

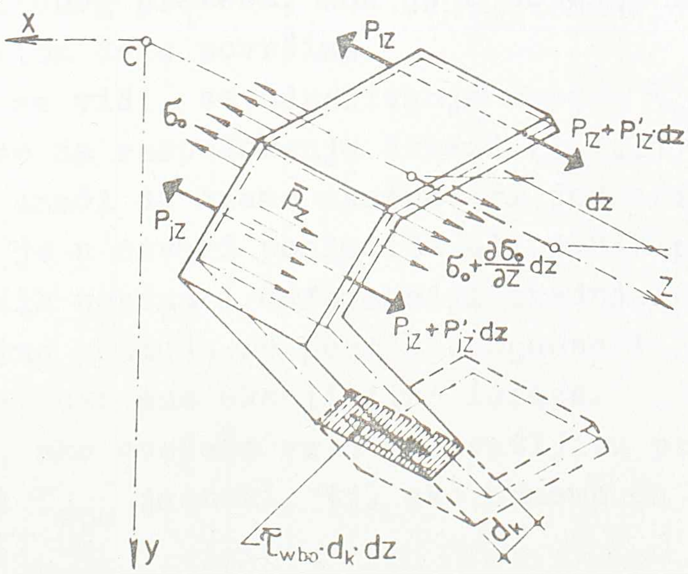
Pošto smo uveli pretpostavku po kojoj je klizanje u srednjoj površini štapa jednako nuli, napone τ_{wfo} (f=a,p,b) nismo u mogućnosti da izrazimo u funkciji odgovarajuće deformacijske veličine, pa ćemo zato ovaj problem rešavati na poseban način.

Prema pretpostavci o karakteru napona τ_w, a saglasno sl. 1.3a, ovi naponi moraju da zadovolje relaciju

a/



b/



Sl. 1.3

$$\frac{F_{ak}}{b_k} ds\cdot\tau_{wao}(\bar{e}_{ak}-\Delta_k)+\frac{F_{pk}}{b_k} ds\cdot\tau_{wpo}(\bar{e}_{pk}-\Delta_k)=d_k\cdot ds\cdot\tau_{wbo}\cdot\Delta_k, \qquad (1.4.17)$$

gde je na bazi uslova (1.4.12)

$$\Delta_k=\frac{(n_{Ga}-1)F_{ak}\bar{e}_{ak}+(n_{Gp}-1)F_{pk}\bar{e}_{pk}}{(n_{Ga}-1)F_{ak}+(n_{Gp}-1)F_{pk}+d_k\cdot b_k}. \qquad (1.4.18)$$

Pored toga, na osnovu iste slike, a iz uslova $\sum M_{o-o}=0$, dobija se veza

$$\tau_{wao}\frac{F_{ak}}{b_k}+\tau_{wpo}\frac{F_{pk}}{b_k}+\tau_{wbo}\cdot d_k-\bar{\tau}_{wbo}\cdot d_k=0, \qquad (1.4.19)$$

gde je $\bar{\tau}_{wbo}$ napon koji deluje u ravni paralelnoj osi z, a upravnoj na srednju liniju profila. Ovaj napon možemo da dobijemo iz uslova ravnoteže figure prikazane na sl. 1.3b, koja se dobija kada se elemenat štapa dz preseče istom ravni o kojoj je već bilo reči. Na taj način se dobija da je

$$\bar{\tau}_{wbo}=-\frac{1}{d_k}\Big(\sum_{j=a,p,b}\int_{\tilde{F}}\frac{\partial\sigma_{to}}{\partial z}dF+\int_{\tilde{s}}\bar{p}_z ds+\sum_{(\tilde{s})}P'_{jz}\Big). \qquad (1.4.20)$$

Ovde su $\tilde{F}_a$, $\tilde{F}_p$ i $\tilde{F}_b$ preseci čelika i betona u odsečenom delu površine poprečnog preseka, dok je $\tilde{s}$ srednja linija profila koja pripada istom delu površine.

Kao što se vidi, za određivanje napona τ_{wao}, τ_{wpo}, τ_{wbo} i $\bar{\tau}_{wbo}$ stoje nam na raspoloženju izrazi (1.4.17), (1.4.19) i (1.4.20) što znači da imamo ukupno tri jednačine sa četiri nepoznate. Ovo je u stvari posledica učinjenih pretpostavki o rasporedu smičićih napona i deformaciji srednje površine, i ukoliko se one striktno poštuju ne postoji mogućnost da se predmetni naponi razdvoje, odnosno eksplicitno izraze.

Međutim, ako uvedemo vrlo prihvatljivu pretpostavku da su naponi τ_{wao} i τ_{wpo} jednaki, tj. ako uzmemo da je

$$\tau_{wao}\approx\tau_{wpo}=\tau_{wAo}, \qquad (1.4.21)$$

preko izraza (1.4.19) dobija se veza

$$\tau_{wAo}(F_{ak}+F_{pk})=(\bar{\tau}_{wbo}-\tau_{wbo})d_k\cdot b_k, \qquad (1.4.22)$$

dok relacija (1.4.17) daje zavisnost

$$\tau_{wAo}\left[F_{ak}(\bar{e}_{ak}-\Delta_k)+F_{pk}(\bar{e}_{pk}-\Delta_k)\right]=\tau_{wbo}\cdot d_k b_k \Delta_k. \qquad (1.4.23)$$

Rešavanjem jednačina (1.4.22) i (1.4.23) dobijaju se sledeći odnosi:

$$\tau_{wbo}=\frac{F_{ak}(\bar{e}_{ak}-\Delta_k)+F_{pk}(\bar{e}_{pk}-\Delta_k)}{F_{ak}\bar{e}_{ak}+F_{pk}\bar{e}_{pk}}\cdot\bar{\tau}_{wbo},$$
$$\tau_{wAo}=\frac{d_k b_k \Delta_k}{F_{ak}\bar{e}_{ak}+F_{pk}\bar{e}_{pk}}\cdot\bar{\tau}_{wbo}. \qquad (1.4.24)$$

Napon $\bar{\tau}_{wbo}$ koji figuriše u izrazima (1.4.24), na osnovu relacije (1.4.20), izražavamo putem ovih zavisnosti:

$$\bar{\tau}_{wbo}=\frac{1}{d_k}\left[\left(p_z\frac{\tilde{F}}{F}-\int_{\tilde{s}}p_z ds-\sum_{(\tilde{s})}P'_{jz}\right)-\frac{\bar{Q}_{xo}\tilde{S}_x}{I_{xx}}-\frac{\bar{Q}_{yo}\tilde{S}_y}{I_{yy}}-\frac{\bar{T}_{\Omega o}S_\Omega}{I_{\Omega\Omega}}\right], \qquad (1.4.25)$$

$$\bar{\tau}_{wbo}=\frac{1}{d_k}\left[\left(p_z\frac{\tilde{F}}{F}-\int_{\tilde{s}}\bar{p}_z ds-\sum_{(\tilde{s})}P'_{jz}\right)+E_b(\tilde{S}_x\xi'''_o+\tilde{S}_y\eta'''_o+\tilde{S}_\Omega\theta'''_o)\right]. \qquad (1.4.26)$$

U gornjim izrazima figurišu sledeće geometrijske veličine:

$$\tilde{F}=\sum_{f=a,p,b}n_{Ef}\int_{\tilde{F}_f}dF,$$
$$\tilde{S}_x=\sum_{f=a,p,b}n_{Ef}\int_{\tilde{F}_f}x\,dF,$$
$$\tilde{S}_y=\sum_{f=a,p,b}n_{Ef}\int_{\tilde{F}_f}y\,dF, \qquad (1.4.27)$$
$$\tilde{S}_\Omega=\sum_{f=a,p,b}n_{Ef}\int_{\tilde{F}_f}\Omega\,dF.$$

$\tilde{F}$ je idealna površina odsečenog dela preseka, dok su $\tilde{S}_x$, $\tilde{S}_y$ i $\tilde{S}_\Omega$ statički momenti u odnosu na ose y i x, odnosno sektorski statički momenat istog dela preseka.

U izrazu (1.4.25), pak, figurišu i sile

$$\bar{Q}_{xo}=Q_{xo}-\mathfrak{M}_x,$$
$$\bar{Q}_{yo}=Q_{yo}-\mathfrak{M}_y, \qquad (1.4.28)$$
$$\bar{T}_{\Omega o}=T_{\Omega o}-\mathfrak{M}_\Omega.$$

1.5. Diferencijalne jednačine štapa

Diferencijalne jednačine problema dobijaju se na bazi jednačina (1.3.9), (1.3.20), (1.4.7), (1.4.10) i (1.4.13), pri čemu treba uzeti u obzir i činjenicu da je u postupak uveden pojam centra smicanja.

Pod pretpostavkom promenljivosti geometrijskih karakteristika poprečnih preseka, jednačine problema se mogu prikazati na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
&E_b(F\zeta_0')' = -p_z, \\
&E_b(I_{xx}\xi_0'')'' = p_x + \mathfrak{M}_x', \\
&E_b(I_{yy}\eta_0'')'' = p_y + \mathfrak{M}_y', \\
&E_b(I_{\Omega\Omega}\theta_0'')'' - G_b(K\theta_0')' = \mathfrak{M}_D + \mathfrak{M}_\Omega'.
\end{aligned}
\qquad (1.5.1)
$$

Ukoliko, pak, pretpostavimo da je poprečni presek štapa konstantan, ove jednačine glase:

$$
\begin{aligned}
&E_bF\zeta_0' = -p_z, \\
&E_bI_{xx}\xi_0^{IV} = p_x + \mathfrak{M}_x', \\
&E_bI_{yy}\eta_0^{IV} = p_y + \mathfrak{M}_y', \\
&E_bI_{\Omega\Omega}\theta_0^{IV} - G_bK\theta_0'' = \mathfrak{M}_D + \mathfrak{M}_\Omega'.
\end{aligned}
\qquad (1.5.2)
$$

U oba slučaja je, kao što se vidi, dobijen sistem potpuno nezavisnih diferencijalnih jednačina, a to je posledica usvajanja specijalnih položaja za pol i nultu tačku srednje linije profila. Da smo ove tačke usvojili sasvim proizvoljno, problem bi formalno-matematički opet bio u potpunosti definisan, ali bi imali sisteme simultanih diferencijalnih jednačina, što bitno komplikuje rešavanje konkretnih zadataka.

Prve tri jednačine iz grupa (1.5.1) i (1.5.2) su poznate jednačine otpornosti materijala i teorije konstrukcija, tako da se na njima u daljem nećemo zadržavati. Treba samo još jednom istaći da u našem slučaju pomeranja ζ_0 , ξ_0 i η_0 nisu pomeranja težišnih tačaka poprečnih preseka, već tačaka D - centara smicanja. Funkcije $\zeta_0 = \zeta_0(z)$, $\xi_0 = \xi_0(z)$ i $\eta_0 = \eta_0(z)$, prema tome, nisu geometrijska mesta tačaka deformisane osovine sistema, već su u opštem slučaju geometrijska mesta tačaka deformisane ose koja povezuje tačke D.

Izrazima

$$(I_{\Omega\Omega}\theta_o'')'' - \frac{G_b}{E_b}(K\theta_o')' = \frac{\mathfrak{M}_D + \mathfrak{M}_\Omega'}{E_b}, \tag{1.5.3}$$

odnosno

$$\theta_o^{IV} - \lambda^2\theta_o'' = \frac{\mathfrak{M}_D + \mathfrak{M}_\Omega'}{E_b I_{\Omega\Omega}}, \tag{1.5.4}$$

gde je

$$\lambda = \sqrt{\frac{G_b K}{E_b I_{\Omega\Omega}}}, \tag{1.5.5}$$

definisana je torzija posmatranog štapa. Može se pokazati da do naprezanja ove vrste dolazi u dva slučaja:

1./ U slučaju kada je štap opterećen spoljnim silama (u koje treba ubrojati i reakcije oslonaca) koje deluju u ravnima upravnim na osovinu štapa, a čiji pravci ne presecaju osovinu smicanja, i

2./ U slučaju proizvoljnog opterećenja usmerenog u pravcu osovine štapa.

Obzirom da je predmet ovoga rada analiza ponašanja prednapregnutih tankozidnih štapova, i ovde ćemo, prvenstveno sa aspekta ograničene torzije, reći nešto više o opterećenjima koja se javljaju kao rezultat prednaprezanja.

Kao što smo videli, uticaj kablova u prednapregnutom štapu svodi se na opterećenja definisana izrazima (1.3.18), odnosno (1.3.19). Ukoliko se na preseke koji odgovaraju početnim i krajnjim tačkama kablova primene granični uslovi, dolazi se do zaključka da u ovim tačkama deluju izvesne koncentrisane sile koje zajedno sa pomenutim podeljenim opterećenjima obrazuju ravnotežni sistem sila. Intenziteti pomenutih koncentrisanih sila definisani su vrednostima sila u kablovima, njihove pravce određuju tangente na kablovske krive, dok su im smerovi suprotni od smerova zatežućih sila u kablovima. Komponente ovih sila u pravcima osovina x i y proizvode koncentrisane momente torzije, dok komponente u pravcu osovine štapa, između ostalog, uslovljavaju i pojavu koncentrisanih bimomenata.

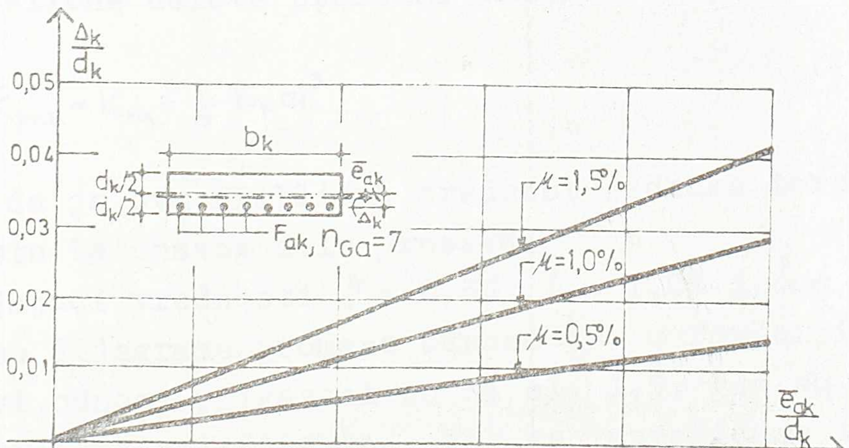
Kada kablovi imaju forme poligonalnih linija, bilo linija u ravni ili linija u prostoru, saglasno napred iznetim stavovima i u skretnim tačkama kablova javiće se određene koncentrisane sile. Njihovi intenziteti, pravci i smerovi dobijaju se određivanjem rezultanti kablovskih sila u prelomnim tačkama. Jasno je da pravac svake od ovih sila mora da padne u ravan određenu pravcima poligona koji se u posmatranoj tački sustiču.

Sva opterećenja za koja smo rekli da se u konstrukcijama javljaju kao posledica prisustva zategnutih čeličnih žica, zvaćemo u daljem ekvivalentnim kablovskim opterećenjima, a tretiraćemo ih na isti način kao i sva druga spoljašnja opterećenja.

1.6. Analiza uticaja pojedinih geometrijskih karakteristika na rešenja problema ograničene torzije

1.6.1. Uticaj čeličnih elemenata na položaj srednje linije profila. Torziona konstanta preseka.

Na sl. 1.4 prikazijemo vrednosti odnosa $\frac{\Delta_k}{d_k}$ u funkciji odnosa $\frac{\bar{e}_{ak}}{d_k}$ i veličina $\mu(\%) = \frac{F_{ak}}{d_k b_k} 100$ za slučaj elementa štapa $d_k b_k$.



Sl. 1.4

Kao što se vidi, položaj srednje linije je u najvećem broju praktičnih slučajeva vrlo blizak srednjoj liniji betonskog dela preseka. Stoga se, ponekad, potpuno opravdano, može uzeti da je srednja linija celokupnog preseka određena relacijom $\Delta_k = 0$, što znači da se može računati sa linijom koja debljine

d_k deli na dva jednaka dela. Na bazi ovih razmatranja proizilazi i zaključak da sve eventualne, strogo koncentrisane delove čelika, bilo čelika F_{ak} ili čelika F_{pk}, ne treba uvoditi u postupak određivanja srednje linije, pošto oni imaju samo lokalni značaj i ne mogu bitno da utiču na tačnost proračuna.

Primenom opšteg izraza (1.4.14) za torzionu konstantu idealnog preseka, u slučaju elementa prikazanog na sl. 1.4 dobija se sledeća vrednost:

$$K_k = 12\left[\left(\frac{1}{12} + \frac{\Delta_k^2}{d_k^2}\right) + \mu(n_{ca}-1)\left(\frac{\bar{e}_{ak}}{d_k} - \frac{\Delta_k}{d_k}\right)^2\right] \cdot K_{bk}. \qquad (1.6.1)$$

Ukoliko zanemarimo odnose $\frac{\Delta_k}{d_k}$ kao male veličine, približnu vrednost torzione konstante u datom slučaju možemo da predstavimo izrazom

$$K_{pr.k} = \left[1 + 12\mu(n_{ca}-1) \cdot \frac{\bar{e}_{ak}^2}{d_k^2}\right] \cdot K_{bk}, \qquad (1.6.2)$$

Ako, pak, prilikom izračunavanja konstante K potpuno zanemarimo čelične delove preseka, imaćemo da je

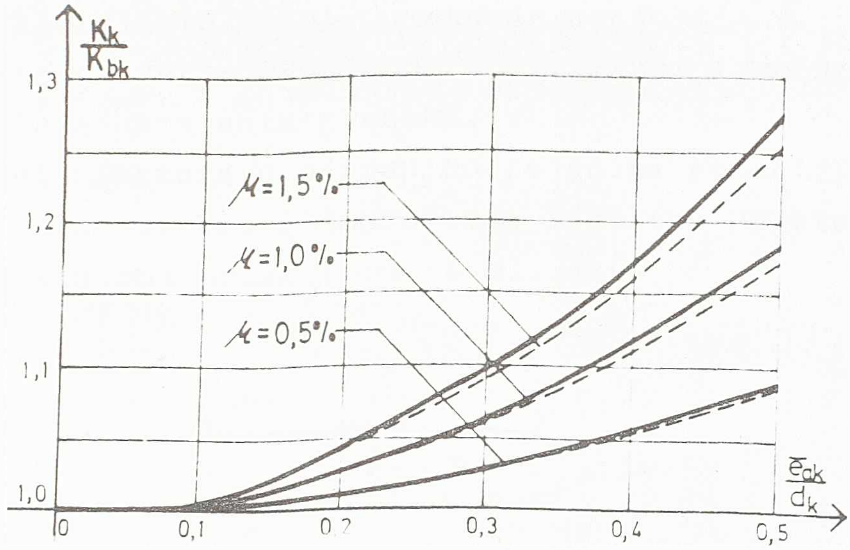
$$\bar{K}_{pr.k} = K_{bk} = \frac{1}{3} \cdot b_k d_k^3, \qquad (1.6.3)$$

što znači da je ova približna vrednost jednaka torzionoj konstanti čisto betonskog dela preseka.

Usvajajući vrednosti $\mu = 0,5\%$, $\mu = 1,0\%$ i $\mu = 1,5\%$, možemo da načinimo dijagrame promena odnosa $\frac{K_k}{K_{bk}}$ u funkciji promenljive $\frac{\bar{e}_{ak}}{d_k}$. Ovi odnosi prikazani su na sl. 1.5, gde su punim linijama predstavljene veličine $\frac{K_k}{K_{bk}}$, dok se isprekidane linije odnose na funkciju $\frac{K_{pr.k}}{K_{bk}}$.

Kao što se vidi, čelični elementi kojima se armira betonski presek u opštem slučaju mogu da igraju značajnu ulogi u odnosu na vrednost torzione konstante. Međutim, na konstantu K vrlo malo utiču odnosi $\frac{\Delta_k}{d_k}$, pa se njihovim zanemarivanjem čine greške koje samo izuzetno prelaze vrednost od 2%.

Relacijom (1.6.3) je, kao što smo već rekli, definisana torziona konstanta betonskog pravougaonog elementa sa stranama d_k i b_k. Međutim, ovaj izraz vredi samo u slučajevima kada je



Sl. 1.5

odnos d_k/b_k dovoljno mali, dok u opštem slučaju za uzane pravougaonike, prema /46/ i /48/, važi relacija

$$K'_{bk} = \frac{1}{3} b_k d_k^3 \left(1 - 0{,}63 \frac{d_k}{b_k}\right) = K_{bk}\left(1 - 0{,}63 \frac{d_k}{b_k}\right). \qquad (1.6.4)$$

Očigledno je da razlike u vrednostima K_{bk} i K'_{bk} dolaze isključivo kao posledica veličine parametra $\varrho_k = d_k/b_k$. Na primer, za slučaj $1/\varrho_k = 10$ ova razlika iznosi oko 7%, dok je za $1/\varrho_k = 5$ njena vrednost oko 14%. Postavlja se pitanje do koje vrednosti odnosa ϱ_k može da se koristi izraz (1.6.3) kao dovoljno tačan, obzirom da je on dobijen uz pretpostavku malih debljina d_k. Međutim, kod traženja odgovora na ovo pitanje treba imati u vidu da rešenja problema ograničene torzije nisu direktno i isključivo zavisna od veličina K. Ona zavise i od sektorskih karakteristika profila, odnosno od faktora $\lambda = \sqrt{\frac{G_b K}{E_b I_{\Omega\Omega}}}$, pa se zbog toga odgovor na postavljeno pitanje može dati tek nakon kompleksnije analize.

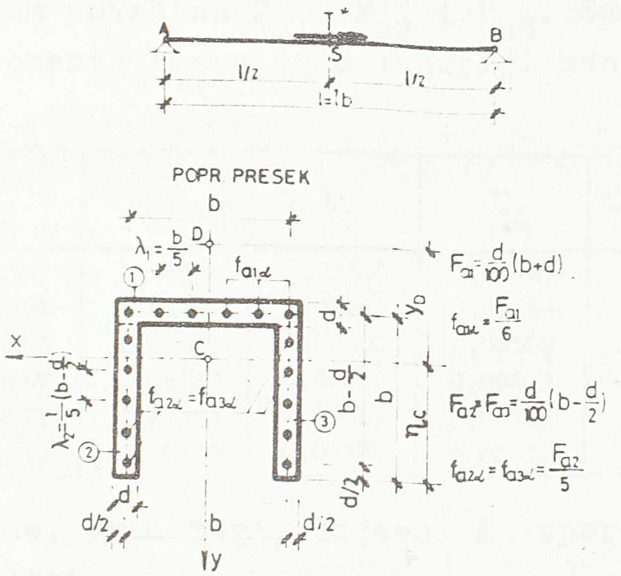
1.6.2. Analiza uticaja odnosa d_k/b_k.

Pretpostavka o tankozidnosti poprečnih preseka u okviru klasične teorije štapa sa tankim zidovima i otvorenim profilom ogleda se u sledećem:

1./ U zanemarivanju vrednosti $eh_n = eh_{n,p}$ u izrazu za sektorsku koordinatu $\Omega = \omega_p$, tako da se dobija da je $\Omega \approx \bar{\Omega}$

2./ U zanemarivanju odnosa d_k/b_k prilikom izračunavanja torzione konstante preseka.

Uticaj ovih faktora u odnosu na pojedine geometrijske karakteristike preseka, kao i na rešenja problema uopšte, proanaliziraćemo na sistemu prikazanom na sl. 1.6.



Sl. 1.6

I ako u opštem slučaju sve sektorske karakteristike preseka zavise od veličina eh_n, može se pokazati da kod preseka koji imaju bar jednu osovinu simetrije koordinate centra smicanja ne zavise od navedenog faktora. Ispitaćemo stoga ovde u kojoj meri zavisi položaj centra smicanja preseka prikazanog na sl. 1.6 od usvojene armature. Uzećemo da je $n_{Ea} = 6$, a b=1,0 m, pa ćemo varirati debljine zidova d izražavajući ih preko odnosa d = b/n. Rezultate ove analize prikazujemo u tabeli 1-I, gde su sa y_D označene tačne vrednosti koordinate centra smicanja, dok su sa y_D^o označene iste vrednosti dobijene na bazi uslova $F_{a1} = F_{a2} = F_{a3} = 0$.

Postupajući na isti način i u odnosu na sektorski momenat inercije, možemo da sračunamo vrednosti $I_{\Omega\Omega}$ i $I_{\Omega\Omega}^o$, pri čemu

Tabela 1-I

$n=\frac{b}{d}$	y_D (m)	y_D^o (m)	$\frac{(y_D-y_D^o)\cdot 100}{y_D}$
2,5	-0,700	-0,705	-0,7
5	-0,746	-0,747	-0,1
7,5	-0,756	-0,755	0,2
10	-0,760	-0,758	0,3
12,5	-0,762	-0,759	0,4
15	-0,764	-0,760	0,5

gornji indeks "o" označava da se radi o veličini dobijenoj pod pretpostavkom da je $F_{a1}=F_{a2}=F_{a3}=0$. Pored toga, možemo da izračunamo i veličine sektorskih momenata inercije $\bar{I}_{\Omega\Omega}$ na bazi zanemarivanja vrednosti eh_n, kao i sektorske momente inercije $\hat{I}_{\Omega\Omega}$ koji se dobijaju i zanemarivanjem članova eh_n i zanemarivanjem površina F_{a1}, F_{a2} i F_{a3}. Sve navedene vrednosti sektorskog momenta inercije u funkciji odnosa n=b/d dajemo u tabeli 1-II, gde, osim toga, dajemo i upoređenja tačnih i približnih rezultata.

Tabela 1-II

$n=\frac{b}{d}$	$I_{\Omega\Omega}$ (m^6)	$I_{\Omega\Omega}^o$ (m^6)	$\bar{I}_{\Omega\Omega}^o$ (m^6)	$\hat{I}_{\Omega\Omega}^o$ (m^6)	$\frac{(I_{\Omega\Omega}-I_{\Omega\Omega}^o)\cdot 100}{I_{\Omega\Omega}}$	$\frac{(I_{\Omega\Omega}-\bar{I}_{\Omega\Omega}^o)\cdot 100}{I_{\Omega\Omega}}$	$\frac{(I_{\Omega\Omega}-\hat{I}_{\Omega\Omega}^o)\cdot 100}{I_{\Omega\Omega}}$
2,5	0,03537	0,03440	0,02569	0,02469	2,7	27,4	30,2
5	0,01404	0,01344	0,01275	0,01214	4,3	9,2	13,5
7,5	0,00891	0,00848	0,00852	0,00809	4,8	4,3	9,2
10	0,00657	0,00623	0,00640	0,00607	5,1	2,5	7,6
12,5	0,00521	0,00494	0,00513	0,00485	5,3	1,6	6,9
15	0,00433	0,00409	0,00428	0,00404	5,4	1,1	6,5

Ukoliko se striktno pridržavamo svih pretpostavki teorije koju ovde primenjujemo, torzionu konstantu preseka morali bi da izračunamo putem izraza

$$K=\bar{K}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} b_k d_k^3 = bd^3.$$

Međutim, imajući u vidu da ova vrednost važi samo pri dovoljno malim veličinama odnosa d/b, izračunaćemo ovde i vrednost torzione konstante preseka za slučaj kada ovaj uslov nije u potpunosti ispunjen. Naime, za dati presek odredićemo veličinu K_G primenom postupka Ritz-Galjerkina, kao i vrednost K_T prema Trefftzu, pa ćemo, obzirom na poznata svojstva ovako dobijenih rešenja, kao dovoljno tačnu vrednost torzione konstante usvojiti veličinu $\hat{K} = (K_G+K_T)/2$.

Obzirom da ova analiza ima za cilj da pokaže u kojim se slučajevima neki štap može razmatrati po teoriji tankozidnih štapova, vrednost $\hat{K}$ ćemo u daljem smatrati za uslovno tačnu.

Tabela 1-III sadrži upoređenja "tačnih" vrednosti torzione

Tabela 1-III

$n=\frac{b}{d}$	$\hat{K}$ (m^4)	$\bar{K}$ (m^4)	$\frac{(\hat{K}-\bar{K})\cdot 100}{\hat{K}}$
2,5	0,05328	0,06400	-20,1
5	0,00733	0,00800	-9,2
7,5	0,00224	0,00237	-5,9
10	0,00096	0,00100	-4,4
12,5	0,00049	0,00051	-3,5
15	0,00029	0,00030	-2,9

konstante i "približnih" vrednosti, koje smo označili sa $\bar{K}$, u zavisnosti od parametra $n=b/d$.

Razmotrićemo sada i veličine statičkih uticaja u sistemu datom na sl. 1.6 u funkciji odnosa b/d, pri čemu ćemo računati sa odnosom $G_b/E_b=0,4$. U svim slučajevima koristićemo tačne vrednosti sektorskog momenta inercije $I_{\omega\omega}$, pa ćemo analizirati rezultate dobijene na bazi veličina $\hat{K}$ i $\bar{K}$. Pored svakog uticaja biće označen presek sistema na koji se odnosi, kao i vrednost torzione konstante na osnovu koje je sračunat. Rezultate sprovedenih analiza, pri kojima je uvek uzimana vrednost $T^*= 1,0$ Mpm, prikazujemo u tabelama 1-IV do 1-VII. Uticaji u sistemu određivani su na bazi literature /49/.

Tabela 1-IV

	n	$G_b\cdot\Theta_0(\frac{1}{2},\hat{K})$ Mp/m²	$G_b\cdot\Theta_0(\frac{1}{2},\bar{K})$ Mp/m²	GREŠKA %
$\bar{l}=5$	2,5	12	11	10,6
	5	49	47	3,0
	7,5	94	92	1,2
	10	138	138	0,6
	12,5	182	182	0,3
	15	226	225	0,2
$\bar{l}=10$	2,5	35	29	14,2
	5	195	184	5,7
	7,5	469	456	2,8
	10	803	791	1,6
	12,5	1160	1149	0,9
	15	1522	1513	0,6
$\bar{l}=20$	2,5	82	69	15,7
	5	533	494	7,3
	7,5	1532	1465	4,4
	10	3093	3003	2,9
	12,5	5125	5022	2,0
	15	7505	7397	1,4
$\bar{l}=30$	2,5	129	108	16,1
	5	874	806	7,7
	7,5	2647	2517	4,9
	10	5671	5476	3,4
	12,5	10001	9747	2,5
	15	15560	15258	1,9

Tabela 1-V

$M_{\Omega o}(\frac{1}{2},\hat{K})$ Mp·m²	$M_{\Omega o}(\frac{1}{2},\bar{K})$ Mp·m²	GREŠKA %
0,618	0,571	7,6
0,892	0,871	2,4
1,041	1,031	0,9
1,117	1,112	0,4
1,160	1,157	0,2
1,185	1,183	0,1
0,644	0,587	8,7
1,072	1,030	3,9
1,450	1,420	2,1
1,730	1,709	1,2
1,926	1,912	0,7
2,062	2,052	0,5
0,644	0,588	8,8
1,094	1,047	4,3
1,573	1,528	2,8
2,037	1,997	2,0
2,464	2,429	1,4
2,838	2,808	1,1
0,644	0,588	8,8
1,094	1,047	4,3
1,577	1,532	2,8
2,067	2,024	2,1
2,551	2,510	1,6
3,019	2,979	1,3

Tabela 1-VI

	n	$T_{so}(0,\hat{K})$ Mp·m	$T_{so}(0,\bar{K})$ Mp·m	GREŠKA %
$\hat{l}=5$	2,5	0,359	0,382	-6,4
	5	0,210	0,222	-5,7
	7,5	0,124	0,130	-4,6
	10	0,079	0,082	-3,8
	12,5	0,054	0,056	-3,2
	15	0,039	0,040	-2,7
$\hat{l}=10$	2,5	0,479	0,486	-1,3
	5	0,399	0,409	-2,4
	7,5	0,303	0,311	-2,7
	10	0,226	0,232	-2,6
	12,5	0,170	0,174	-2,4
	15	0,130	0,133	-2,2
$\hat{l}=20$	2,5	0,499	0,500	0,0
	5	0,490	0,492	-0,4
	7,5	0,458	0,462	-0,8
	10	0,411	0,416	-1,1
	12,5	0,360	0,365	-1,2
	15	0,312	0,316	-1,3
$\hat{l}=30$	2,5	0,500	0,500	0,0
	5	0,499	0,499	0,0
	7,5	0,491	0,492	-0,2
	10	0,473	0,475	-0,4
	12,5	0,446	0,449	-0,6
	15	0,414	0,417	-0,6

Tabela 1-VII

$T_{\Omega o}(0,\hat{K})$ Mp·m	$T_{\Omega o}(0,\bar{K})$ Mp·m	GREŠKA %
0,141	0,118	16,6
0,290	0,278	4,1
0,376	0,370	1,5
0,421	0,418	0,7
0,446	0,444	0,4
0,461	0,460	0,2
0,021	0,014	31,1
0,101	0,091	9,6
0,197	0,188	4,2
0,274	0,268	2,2
0,330	0,326	1,2
0,370	0,367	0,8
0	0	52,5
0,010	0,008	18,5
0,042	0,038	8,8
0,089	0,084	5,0
0,140	0,135	3,2
0,188	0,184	2,1
0	0	67,3
0,001	0,001	26,4
0,009	0,007	13,0
0,027	0,025	7,5
0,054	0,051	4,9
0,086	0,083	3,3

Ispitaćemo i zavisnost napona τ_{sbo} u odnosu na promenu veličine torzione konstante preseka. Uzmimo, na primer, slučaj sistema sa $\hat{l} = 10$ i sa odnosom b/d=5 . Obzirom na rezultate prikazane u tablici 1-VI, kao i na konkretne geometrijske karakteristike preseka, dobija se da je $\tau_{sbo}(\hat{K}) = 10,89$ Mp/m^2 , a $\tau_{sbo}(\bar{K}) = 10,22$ Mp/m^2, pa sledi da je

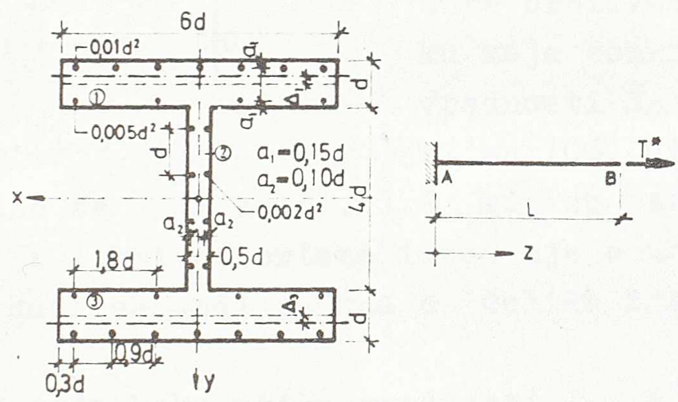
$$\frac{\tau_{sbo}(\hat{K}) - \tau_{sbo}(\bar{K})}{\tau_{sbo}(\hat{K})} \cdot 100 = 6,15\%.$$

Imajući u vidu dobijene rezultate proizilazi da teorija izložena u poglavljima 1.1. do 1.5. može da se primeni sa tačnošću od 5-10% u slučaju tankozidnih konstrukcija kod kojih su odnosi $d_k/b_k \leq 1/5$. Isto tako, na bazi prednjih analiza može da se zaključi da je u slučajevima odnosa $d_k/b_k \leq 1/10$ tačnost izložene teorije još veća, tako da se eventualne greške kreću do najviše 5%.

I ako ovi zaključci, formalno posmatrano, nisu u skladu sa rezultatima analize presečnih sila $T_{\Omega o}$ (tabela 1-VII), oni suštinski ipak stoje. Naime, u posmatranoj tački sistema ($z=0$) momenti $T_{\Omega o}$ su za sve vrednosti $\hat{l} \geq 10$ srazmerno mali u odnosu na momente T_{so}, pa stoga nisu od značaja. Međutim, u svim ostalim presecima sistema napred izveden zaključak važi u punoj meri.

1.6.3. Uticaj čeličnih elemenata u preseku tankozidnog štapa na rešenja problema ograničene torzije.

Analiziraćemo sistem prikazan na sl. 1.7. Pretpostavićemo da unutar betonskog preseka postoji samo jedna vrsta čelika, što neće imati uticaja na opštost izlaganja.



Sl. 1.7

Obzirom da se kod predmetnog preseka centar smicanja poklapa sa težišnom tačkom, usvajajući vrednosti $d=0,1$ m i $n_{Ea}= n_{Ga}=6$, dobija se sledeće:

(I) $\Delta_1=\Delta_3= 0,0014$ m, $I_{\Omega\Omega}= 2,516\cdot 10^{-4}$ m^6, $K = 4,647\cdot 10^{-4}$ m^4.

Ove vrednosti predstavljaju tačne veličine geometrijskih karakteristika preseka. Ako, pak, zanemarimo parametre Δ_1 i Δ_3, odnosno ako za srednju liniju idealnog preseka usvojimo srednju liniju čisto betonskog dela preseka, dobićemo da je

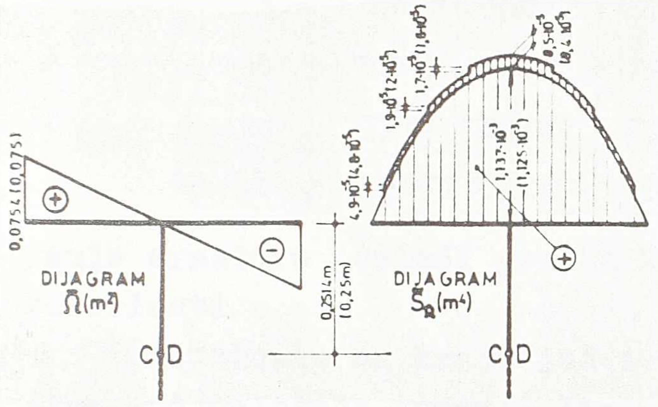
(II) $\Delta_1=\Delta_3= 0,0$, $I_{\Omega\Omega}= 2,463\cdot 10^{-4}$ m^6, $K = 4,656\cdot 10^{-4}$ m^4.

Ukoliko sada potpuno zanemarimo sve čelične elemente unutar preseka biće

(III) $\Delta_1=\Delta_3= 0,0$, $I_{\Omega\Omega}= 2,292\cdot 10^{-4}$ m^6, $K = 4,208\cdot 10^{-4}$ m^4.

Poredjenjem rezultata pod (I), (II) i (III) može se zaključiti da zanemarivanje veličina Δ_1 i Δ_3 dovodi do greške u rezultatu koja se kreće oko 2%, dok potpuno zanemarivanje čeličnih elemenata uslovljava grešku od oko 10%.

Do sličnih zaključaka dolazi se i analizom sektorske koordinate $\overline{\Omega}$ i sektorskog statičkog momenta. Dijagrami ovih sektorskih karakteristika na gornjoj flanši preseka prikazani su na sl. 1.8. Kao što se vidi, u oba slučaja se vrednosti ovih karakteristika sračunate uz uslov $\Delta_1 = \Delta_3 = 0$ (brojevi i zagradama) vrlo malo razlikuju od tačnih vrednosti. Međutim, zanemarivanje celokupne armature proizvodi osetniju grešku koja konkretno u slučaju vrednosti $\widetilde{S}_\Omega$ može da iznosi i blizu 10%. Uticaj čelika na veličine $\widetilde{S}_\Omega$ jasno se vidi na sl. 1.8 gde su razmacima između stepenaste linije i krive ucrtane ispod nje obuhvaćene razlike između slučaja kada se vodi računa o čeliku i slučaja kada se on zanemaruje.



Sl. 1.8

Ispitaćemo sada kako utiču vrednosti $I_{\Omega\Omega}$ i K na veličine statičkih uticaja u pojedinim presecima sistema. U razmatranje ćemo izeti slučaj (I), slučaj (II) i slučaj (III) geometrijskih karakteristika preseka, a takođe i vrednosti $G_b/E_b = 0{,}4$ i $T^* = 1{,}0$ Mpm. Rezultati ovih analiza, sprovedenih primenom gotovih obrazaca iz literature /49/, prikazani su u tabelama 1-VIII do 1-X, gde su sve vrednosti izražene u funkciji raspona L.

Tabela 1-VIII

L m	$G_b \cdot O_o(L)$ (Mp/m²) slučaj I	slučaj II	slučaj III
5	8257	8269	9109
10	19015	19006	20989
15	29775	29743	32871
20	40534	40481	44752

Tabela 1-IX

L m	$M_{\Omega o}(0)$ (Mp/m²) slučaj I	slučaj II	slučaj III
5	-1,1631	-1,1496	-1,1666
10	-1,1635	-1,1500	-1,1670
15	-1,1635	-1,1500	-1,1670
20	-1,1635	-1,1500	-1,1670

Na osnovu dobijenih vrednosti geometrijskih karakteristika i statičkih uticaja proizilazi zaključak da se uzimanjem srednje linije betonskog dela preseka za srednju liniju celokupnog preseka čini praktično zanemarljiva greška, dok potpuno isključi-

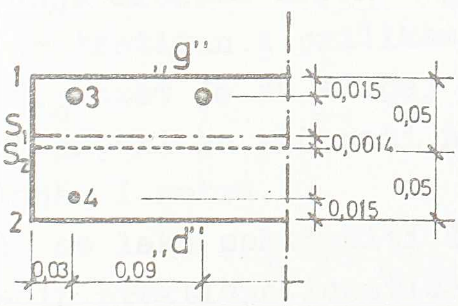
Tabela 1-X

L m	VREDNOSTI $\frac{T_{so}(O)}{T_{so}(L)}$ I $\frac{T_{\Omega o}(O)}{T_{\Omega o}(L)}$ U $\frac{Mp \cdot m}{Mp \cdot m}$ slučaj I		slučaj II		slučaj III	
5	$\frac{0}{0{,}973}$	$\frac{1}{0{,}027}$	$\frac{0}{0{,}974}$	$\frac{1}{0{,}026}$	$\frac{0}{0{,}972}$	$\frac{1}{0{,}028}$
10	$\frac{0}{0{,}999}$	$\frac{1}{0{,}001}$	$\frac{0}{0{,}999}$	$\frac{1}{0{,}001}$	$\frac{0}{0{,}999}$	$\frac{1}{0{,}001}$
15	$\frac{0}{1{,}000}$	$\frac{1}{0{,}000}$	$\frac{0}{1{,}000}$	$\frac{1}{0{,}000}$	$\frac{0}{1{,}000}$	$\frac{1}{0{,}000}$
20	$\frac{0}{1{,}000}$	$\frac{1}{0{,}000}$	$\frac{0}{1{,}000}$	$\frac{1}{0{,}000}$	$\frac{0}{1{,}000}$	$\frac{1}{0{,}000}$

vanje armature povlači grešku koja se u opštem slučaju ne može tolerisati.

Proučićemo na kraju još i zavisnost napona u posmatranom štapu od položaja srednje linije profila.

Kao prvo, ispitaćemo normalne napone u gornjoj flanši preseka i to napone u tačkama 1, 2, S_1 i S_2 na površini betona, i napone u tačkama 3 i 4 koje su u težištima pojedinih čeličnih delova (sl. 1.9). Uzećemo slučaj sistema kod koga je L = 10 m, a analizu ćemo sprovesti za presek z=0.



Sl. 1.9

Na bazi konkretnih brojnih podataka dobijaju se sledeće tačne vrednosti normalnih napona:

$$\sigma_{S1o} = -349 \ Mp/m^2$$
$$\sigma_{1o} = -281 \ \text{-"-}$$
$$\sigma_{2o} = -420 \ \text{-"-}$$
$$\sigma_{3o} = -1840 \ \text{-"-}$$
$$\sigma_{4o} = -2364 \ \text{-"-} .$$

Približne vrednosti, pak, na bazi pretpostavke da je $\Delta_1 = \Delta_3 = 0$, su sledeće:

$$\sigma_{S2o} = -350 \ Mp/m^2$$
$$\sigma_{1o} = -280 \ \text{-"-}$$
$$\sigma_{2o} = -420 \ \text{-"-}$$
$$\sigma_{3o} = -1838 \ \text{-"-}$$
$$\sigma_{4o} = -2364 \ \text{-"-} .$$

Napone smicanja τ_{sbo} u gornjoj flanši, za slučaj istog sistema, a za presek z=10 m, sračunaćemo u nivoima "g" i "d", dok ćemo napone τ_{sao} sračunati za gornji i donji red armature.

Tačne vrednosti su:

$$\tau_{sbo}^{(g)} = 209 \ Mp/m^2, \qquad \tau_{sbo}^{(d)} = -221 \ Mp/m^2,$$

$$\tau_{sao}^{(g)} = 867 \ Mp/m^2, \qquad \tau_{sao}^{(d)} = -940 \ Mp/m^2.$$

Približne vrednosti na bazi pretpostavke da je $\Delta_1 = \Delta_3 = 0$ su:

$$\tau_{sbo}^{(g,d)} = \pm 215 \ Mp/m^2, \qquad \tau_{sao}^{(g,d)} = \pm 902 \ Mp/m^2.$$

Prikazaćemo još i napone $\overline{\tau}_{wbo}$, τ_{wbo} i τ_{wAo}. Vodeći računa o svim elementima preseka dobija se sledeće:

$$\overline{\tau}_{wbo} = -48{,}6 \ Mp/m^2$$
$$\tau_{wbo} = -45{,}1 \quad -"-$$
$$\tau_{wAo} = -234 \quad -"- .$$

Ako se, pak, zanemare veličine Δ_1 i Δ_3, biće:

$$\overline{\tau}_{wbo} = -49{,}1 \ Mp/m^2$$
$$\tau_{wbo} = -49{,}1 \quad -"-$$
$$\tau_{wAo} = 0 \quad -"- .$$

Prednja analiza napona τ_{wo} sprovedena je za slučaj sistema koji je tretiran i prilikom razmatranja napona σ_o i τ_{so}, a momenat $T_{\Omega o}$ uzet je za slučaj z=0. U odnosu na poprečni presek, predmetni naponi su računati na mestu gde su oni najveći, tj. na spoju flanše i rebra.

Može se lako zaključiti da su veličine napona dobijene na tačan način praktično identične sa vrednostima koje se dobijaju pod pretpostavkom $\Delta_1 = \Delta_3 = 0$. Ovaj zaključak jedino ne važi u potpunosti za napone τ_{wAo}, jer su isti po približnom proračunu jednaki nuli. Međutim, imajući u vidu veličine ovih napona, kao i njihov uticaj na opštu sliku naponskog i deformacionog stanja neke tankozidne konstrukcije, ova činjenica nema bitnog značaja. Ovo važi utoliko pre, što približan proračun u odnosu na napone smicanja u betonu τ_{wbo} daje rezultate koji su na strani sigurnosti, dok su stvarne vrednosti napona τ_{wAo} u proseku 5-10 puta veće od korespondentnih napona u betonu, pa stoga nisu od naročitog praktičnog interesa .

1.7. Eksperimentalno ispitivanje prednapregnutih nosača I preseka izloženih ograničenoj torziji

1.7.1. U v o d.

Ovaj eksperimentalni rad ima za cilj da utvrdi stepen saglasnosti opitnih rezultata i teorijskih vrednosti koje se dobijaju na bazi stavova izloženih u prethodnim poglavljima. Ispitivanja su sprovedena na centrično prednapregnutim nosačima I preseka izloženim torzionom opterećenju, pri čemu su efekti ograničene torzije ostvareni usvajanjem tankozidnog poprečnog preseka saglasno analizi sprovedenoj u poglavlju 1.6.2., kao i izborom odgovarajućeg statičkog sistema. Osnovni razlog za primenu prednaprezanja, pak, bio je da se stvore uslovi da opitni nosači, pod rastućim torzionim opterećenjem, što duže rade kao izotropni, tj. da što duže budu bez prslina u zonama u kojima se javljaju naponi zatezanja.

1.7.2. Opitni nosači.

Ispitivanja su obavljena na nosačima čije geometrijske mere, odnosno armiranje, prikazujemo na sl. 1.10 i 1.11.

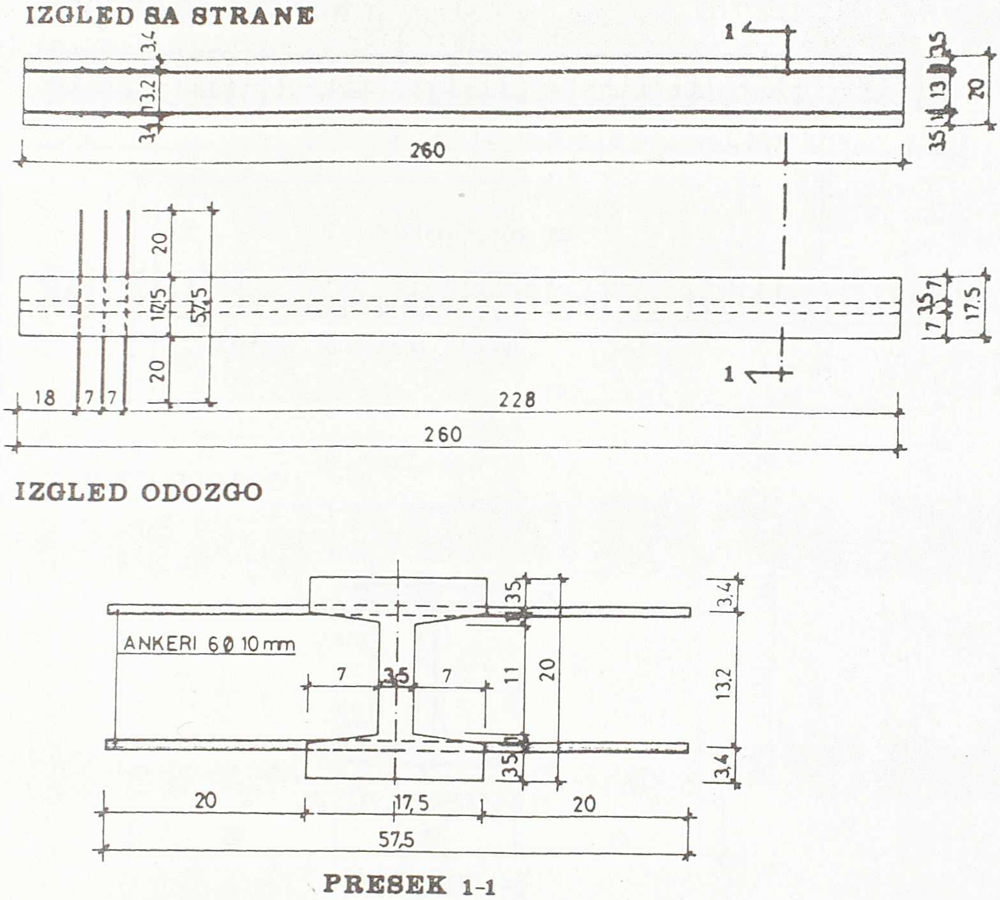
Kao što se vidi, normalna sila pritiska u nosačima ostvarena je primenom prednaprezanja putem athezije. Upotrebljeno je 14 snopova od po dve žice Ø2,5 mm (Č 200/180, $E_p = 2 \cdot 10^6$ kp/cm^2). Žice su pre zatezanja upredene na stazi za prednaprezanje tako da je svaki snop uvrnut za ugao od 540^o na jedan metar dužine. Početni napon u žicama iznosio je 130 kp/mm^2, što je utvrđeno merenjem putem tenzofrekvencmetra. Ovo merenje je obavljeno neposredno pre početka betoniranja nosača.

Osim visokovrednog čelika Č 200/180, za armiranje nosača upotrebljen je i "meki" čelik. Ovde je reč o uzengijama Ø3,3 mm izrađenim od materijala kod koga su eksperimentalnim postupkom utvrđene sledeće vrednosti osnovnih mehaničkih karakteristika:

- granica velikih izduženja: $\sigma_{vi} = 27$ kp/mm^2,
- zatezna čvrstoća: $\sigma_m = 37$ kp/mm^2.

U opitne nosače ugrađen je beton sledećeg sastava:

agregat:	moravski šljunak (0-4 mm - 30%, 4-8 mm - 30%, 8-12 mm - 40%),
cement:	PC 350 20DT - Novi Popovac (500 kg/m^3),
vodocementni faktor:	V/C = 0,41.



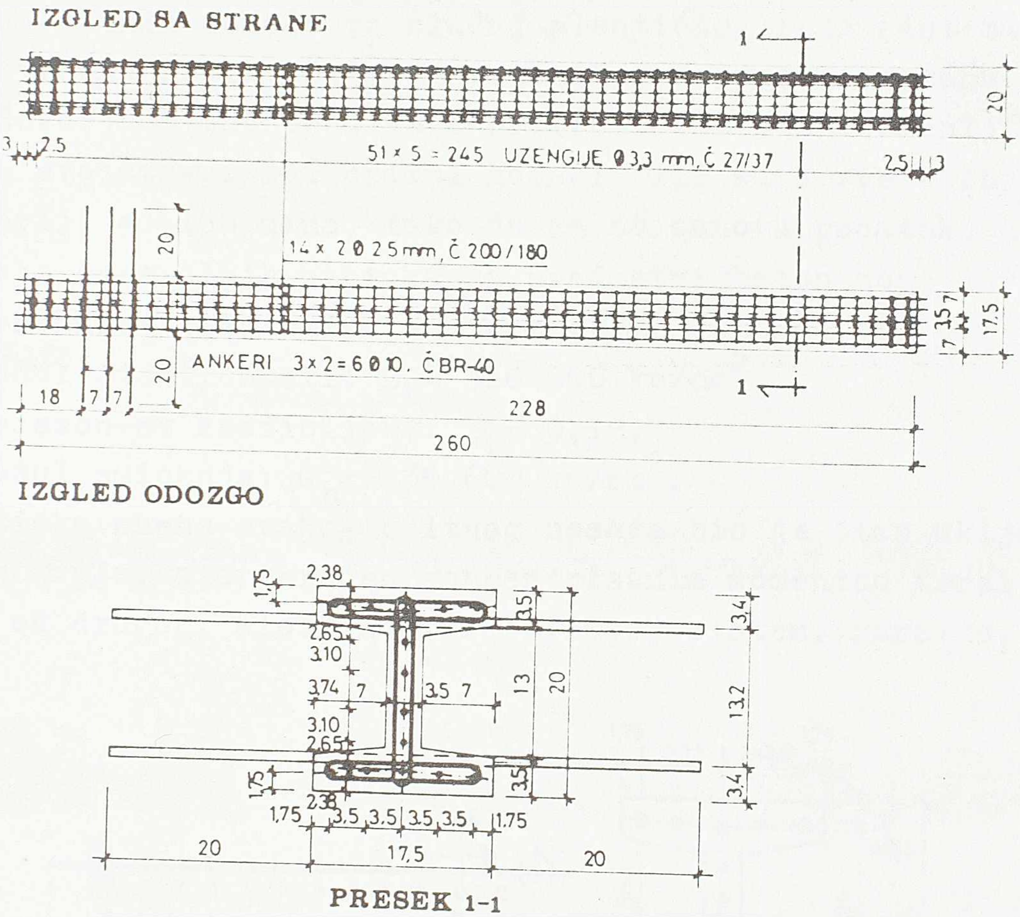
Sl. 1.10

Negovanje izbetoniranih elemenata ostvareno je intenzivnim kvašenjem u periodu od sedam dana. Prilikom ugrađivanja betona korišćeni su odgovarajući vibratori.

Pored opitnih nosača, istovremeno je načinjen i određen broj kontrolnih opitnih tela - kocki 14x14x14 cm i prizmi 12x12x36 cm. Na ovim uzorcima mereno je sledeće:

- čvrstoća betona (na kockama i prizmama),
- modul elastičnosti (na prizmama),
- Poisson-ov koeficijent (na prizmama).

U tabeli 1-XI dat je pregled rezultata ispitivanja čvrstoća pri različitim starostima. Ove vrednosti predstavljaju prosečne veličine koje su dobijene u slučaju kocki na tri uzorka, a u slučaju prizmi na serijama od po šest uzoraka. Treba naglasiti da su prikazane čvrstoće prizmi dobijene na uzorcima na ko-



Sl. 1.11

jima su prethodno sprovedena merenja modula elastičnosti i Poison-ovog koeficijenta betona.

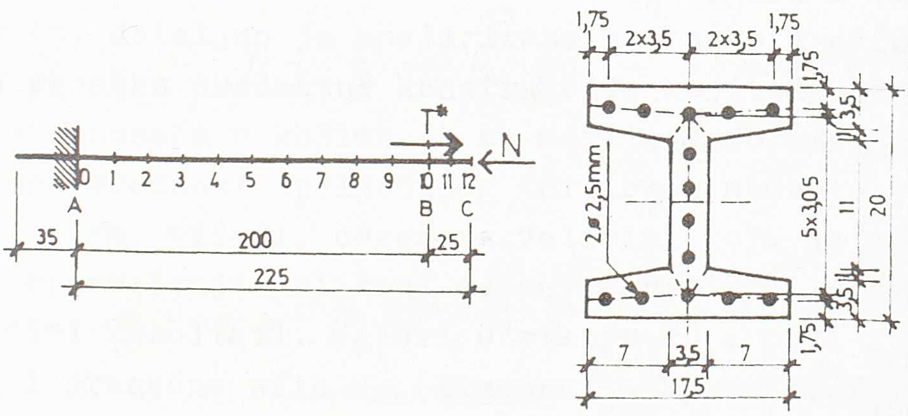
Tabela 1-XI

STAROST BETONA U VREME ISPITIVANJA (dani)	ČVRSTOĆA KOCKE 14x14x14 cm (kp/cm^2)	ČVRSTOĆA PRIZME 12x12x36 cm (kp/cm^2)
7	-	310
14	405	353
28	505	471
36	515	-
90	545	511
150	550	-

Obzirom da osnovu ovog ispitivanja predstavlja analiza deformacija opitnih nosača za slučaj elastičnog rada sistema, merenja su vršena na tzv. "starom betonu", odnosno na betonu kod koga sa dovoljnom tačnošću važi pretpostavka o nepromenljivosti reoloških svojstava. Svi opitni nosači bili su u vreme ispitivanja stariji od 150 dana, tako da se na osnovu podataka dobijenih preko kontrolnih uzoraka za predmetni beton mogu usvojiti sledeće vrednosti fizičkih konstanti:

- modul elastičnosti: E_b= 320 000 kp/cm^2,
- Poisson-ov koeficijent: ν_b= 0,18,
- modul smicanja: G_b= 135 600 kp/cm^2.

Statička shema svakog opitnog nosača bio je štap uklješten na jednom kraju, a opterećen koncentrisanim momentom torzije T^* na 25 cm od drugog, slobodnog kraja. Ovaj sistem, naravno, bio



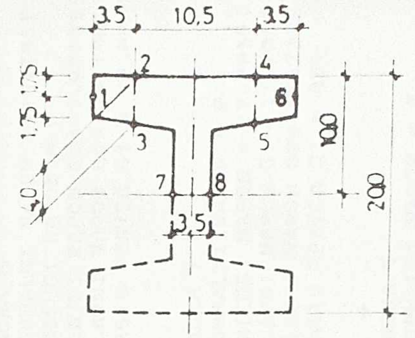
Sl. 1.12

je izložen i sili prednaprezanja -N, pri čemu je njegov raspon, računato od uklještenog do slobodnog kraja, iznosio 225 cm (sl. 1.12).

Geometrijske karakteristike preseka sistema, izračunate na bazi relacija izvedenih u prethodnim poglavljima, prikazane su u tabeli 1-XII. Kao što se vidi, ova tabela sadrži sve geometrijske elemente potrebne za proračun napona u tačkama 1 do 8 prouzrokovanih torzionim opterećenjem. Obzirom na definicione izraze za karakteristike $I_{\omega\omega}$, $\tilde{S}_{\omega}$ i K, brojne vrednosti ovih veličina sračunate su primenom postupka numeričke integracije.

Tabela 1-XII

TAČKA	e (cm)	eh_n (cm²)	$\bar{\Omega}$ (cm²)	Ω (cm²)	$\tilde{S}_\Omega$ (cm⁴)
1	0	0	66,72	66,72	0
2	2,00	-11,61	40,03	28,42	731,17
3	-2,00	11,61	40,03	51,64	731,17
4	2,00	11,61	-40,03	-28,42	731,17
5	-2,00	-11,61	-40,03	-51,64	731,17
6	0	0	-66,72	-66,72	0
7	1,75	0	0	0	0
8	-1,75	0	0	0	0



$I_\Omega = 212.926 \, cm^6$

$K = 866 \, cm^4$

Na bazi gotovih obrazaca iz literature /49/, a za slučaj $T^* = \pm 7800$ kp cm, detaljno je analizirano naponsko i deformaciono stanje onih preseka predmetne konstrukcije koji odgovaraju presecima opitnih nosača u kojima će se meriti deformacijske veličine. Usvojena vrednost spoljašnjeg torzionog momenta T^*, kao što ćemo u daljem videti, odgovara veličini koja je uslovno uzeta kao nivo opterećenja pri kome će se upoređivati teorijski i eksperimentalni rezultati. Uglovi obrtanja θ_o, prvi izvodi ovih uglova, kao i presečne sile $M_{\Omega o}$ (bimoment u kp·cm²), T_{so} (momenat T-S u kp·cm) i $T_{\Omega o}$ (momenat T-W u kp·cm), sračunati su u presecima z=20 cm, z=100 cm i z=180 cm, a zatim je u istim presecima, u tačkama 1 do 8, izračunato i sledeće: normalni naponi, naponi smicanja, glavni naponi G1 i G2 i uglovi nagiba napona G1 prema osovini nosača. Sve vrednosti napona izražane su u kp/cm². Rezultati ovog proračuna prikazani su na stranama 39, 40 i 41.

Nosači na kojima su sprovedena ispitivanja imali su oznake I_1, I_2, I_3 i I_4. Na nosače I_1 i I_2 prednaprezanje je aplicirano pri starosti od 36 dana, dok je u slučaju nosača I_3 i I_4 ovo vreme iznosilo 14 dana. Za sve vreme, od momenta betoniranja nosača pa do ispitivanja, merene su njihove deformacije, tj. merene su ukupne deformacije koje su u ovom slučaju jednake zbiru elastične deformacije, deformacije tečenja i deformacije skupljanja.

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 20
ZA SLUCAJ T = 7800

UGAO TETA = 4.29454E-04
IZVOD UGLA TETA = 3.73071E-05
BIMOMENT =-82292.
MOMENAT T-S = 4380.96
MOMENAT T-V = 3419.05

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-25.7861
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1=-1.90735E-06
GLAVNI NAPON G2=-25.7861
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-10.9838
SMICUCI NAPON = 23.1705
GLAVNI NAPON G1= 18.3206
GLAVNI NAPON G2=-29.3044
NAGIB PRAVCA G1 =-51.6671

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-19.9579
SMICUCI NAPON =-17.3002
GLAVNI NAPON G1= 9.99292
GLAVNI NAPON G2=-29.9508
NAGIB PRAVCA G1 = 59.9885

TACKA 4
NORMALNI NAPON = 10.9838
SMICUCI NAPON = 23.1705
GLAVNI NAPON G1= 29.3044
GLAVNI NAPON G2=-18.3206
NAGIB PRAVCA G1 =-38.3329

TACKA 5
NORMALNI NAPON = 19.9579
SMICUCI NAPON =-17.3002
GLAVNI NAPON G1= 29.9508
GLAVNI NAPON G2=-9.99292
NAGIB PRAVCA G1 = 30.0116

TACKA 6
NORMALNI NAPON = 25.7861
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 25.7861
GLAVNI NAPON G2= 1.90735E-06
NAGIB PRAVCA G1 = 0

TACKA 7
NORMALNI NAPON = 0
SMICUCI NAPON = 17.7059
GLAVNI NAPON G1= 17.7059
GLAVNI NAPON G2=-17.7059
NAGIB PRAVCA G1 =-45.

TACKA 8
NORMALNI NAPON = 0
SMICUCI NAPON =-17.7059
GLAVNI NAPON G1= 17.7059
GLAVNI NAPON G2=-17.7059
NAGIB PRAVCA G1 = 45.

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 20
ZA SLUCAJ T =-7800

UGAO TETA =-4.29454E-04
IZVOD UGLA TETA =-3.73071E-05
BIMOMENT = 82292.
MOMENAT T-S =-4380.96
MOMENAT T-V =-3419.05

TACKA 1
NORMALNI NAPON = 25.7861
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 25.7861
GLAVNI NAPON G2= 1.90735E-06
NAGIB PRAVCA G1 = 0

TACKA 2
NORMALNI NAPON = 10.9838
SMICUCI NAPON =-23.1705
GLAVNI NAPON G1= 29.3044
GLAVNI NAPON G2=-18.3206
NAGIB PRAVCA G1 = 38.3329

TACKA 3
NORMALNI NAPON = 19.9579
SMICUCI NAPON = 17.3002
GLAVNI NAPON G1= 29.9508
GLAVNI NAPON G2=-9.99292
NAGIB PRAVCA G1 =-30.0116

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-10.9838
SMICUCI NAPON =-23.1705
GLAVNI NAPON G1= 18.3206
GLAVNI NAPON G2=-29.3044
NAGIB PRAVCA G1 = 51.6671

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-19.9579
SMICUCI NAPON = 17.3002
GLAVNI NAPON G1= 9.99292
GLAVNI NAPON G2=-29.9508
NAGIB PRAVCA G1 =-59.9885

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-25.7861
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1=-1.90735E-06
GLAVNI NAPON G2=-25.7861
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 7
NORMALNI NAPON = 0
SMICUCI NAPON =-17.7059
GLAVNI NAPON G1= 17.7059
GLAVNI NAPON G2=-17.7059
NAGIB PRAVCA G1 = 45.

TACKA 8
NORMALNI NAPON = 0
SMICUCI NAPON = 17.7059
GLAVNI NAPON G1= 17.7059
GLAVNI NAPON G2=-17.7059
NAGIB PRAVCA G1 =-45.

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 100
ZA SLUCAJ T^{*} = 7800

UGAO TETA = 5.05683E-03
IZVOD UGLA TETA = 6.49190E-05
BIMOMENT =-1667.69
MOMENAT T-S = 7623.41
MOMENAT T-W = 176.592

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-.522568
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 0
GLAVNI NAPON G2=-.522568
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-.222593
SMICUCI NAPON = 35.3636
GLAVNI NAPON G1= 35.2525
GLAVNI NAPON G2=-35.4751
NAGIB PRAVCA G1 =-45.0002

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-.404458
SMICUCI NAPON =-35.0604
GLAVNI NAPON G1= 34.8588
GLAVNI NAPON G2=-35.2633
NAGIB PRAVCA G1 = 45.1653

TACKA 4
NORMALNI NAPON = .222593
SMICUCI NAPON = 35.3636
GLAVNI NAPON G1= 35.4751
GLAVNI NAPON G2=-35.2525
NAGIB PRAVCA G1 =-44.9999

TACKA 5
NORMALNI NAPON = .404458
SMICUCI NAPON =-35.0604
GLAVNI NAPON G1= 35.2633
GLAVNI NAPON G2=-34.8588
NAGIB PRAVCA G1 = 44.8348

TACKA 6
NORMALNI NAPON = .522568
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= .522568
GLAVNI NAPON G2= 0
NAGIB PRAVCA G1 = 0

TACKA 7
NORMALNI NAPON = 0
SMICUCI NAPON = 30.8105
GLAVNI NAPON G1= 30.8106
GLAVNI NAPON G2=-30.8106
NAGIB PRAVCA G1 =-45.

TACKA 8
NORMALNI NAPON = 0
SMICUCI NAPON =-30.8105
GLAVNI NAPON G1= 30.8106
GLAVNI NAPON G2=-30.8106
NAGIB PRAVCA G1 = 45.

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 100
ZA SLUCAJ T^{*} =-7800

UGAO TETA =-5.05683E-03
IZVOD UGLA TETA =-6.49190E-05
BIMOMENT = 1667.69
MOMENAT T-S =-7623.41
MOMENAT T-W =-176.592

TACKA 1
NORMALNI NAPON = .522568
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= .522568
GLAVNI NAPON G2= 0
NAGIB PRAVCA G1 = 0

TACKA 2
NORMALNI NAPON = .222593
SMICUCI NAPON =-35.3636
GLAVNI NAPON G1= 35.4751
GLAVNI NAPON G2=-35.2525
NAGIB PRAVCA G1 = 44.9999

TACKA 3
NORMALNI NAPON = .404458
SMICUCI NAPON = 35.0604
GLAVNI NAPON G1= 35.2633
GLAVNI NAPON G2=-34.8588
NAGIB PRAVCA G1 =-44.8348

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-.222593
SMICUCI NAPON =-35.3636
GLAVNI NAPON G1= 35.2525
GLAVNI NAPON G2=-35.4751
NAGIB PRAVCA G1 = 45.0002

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-.404458
SMICUCI NAPON = 35.0604
GLAVNI NAPON G1= 34.8588
GLAVNI NAPON G2=-35.2633
NAGIB PRAVCA G1 =-45.1653

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-.522568
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 0
GLAVNI NAPON G2=-.522568
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 7
NORMALNI NAPON = 0
SMICUCI NAPON =-30.8105
GLAVNI NAPON G1= 30.8106
GLAVNI NAPON G2=-30.8106
NAGIB PRAVCA G1 = 45.

TACKA 8
NORMALNI NAPON = 0
SMICUCI NAPON = 30.8105
GLAVNI NAPON G1= 30.8106
GLAVNI NAPON G2=-30.8106
NAGIB PRAVCA G1 =-45.

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 180
ZA SLUČAJ T* = 7800

UGAO TETA = 1.00524E-02
IZVOD UGLA TETA = 5.37229E-05
BIMOMENT = 35709.4
MOMENAT T-S = 6308.65
MOMENAT T-V = 1491.35

TACKA 1
NORMALNI NAPON = 11.1895
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 11.1895
GLAVNI NAPON G2=-9.53674E-07
NAGIB PRAVCA G1 = 0

TACKA 2
NORMALNI NAPON = 4.76626
SMICUCI NAPON = 30.4196
GLAVNI NAPON G1= 32.8959
GLAVNI NAPON G2=-28.1296
NAGIB PRAVCA G1 =-42.7603

TACKA 3
NORMALNI NAPON = 8.66045
SMICUCI NAPON =-27.859
GLAVNI NAPON G1= 32.5237
GLAVNI NAPON G2=-23.8633
NAGIB PRAVCA G1 = 40.5825

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-4.76626
SMICUCI NAPON = 30.4196
GLAVNI NAPON G1= 28.1296
GLAVNI NAPON G2=-32.8959
NAGIB PRAVCA G1 =-47.2398

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-8.66045
SMICUCI NAPON =-27.859
GLAVNI NAPON G1= 23.8633
GLAVNI NAPON G2=-32.5237
NAGIB PRAVCA G1 = 49.4175

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-11.1895
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 9.53674E-07
GLAVNI NAPON G2=-11.1895
NAGIB PRAVCA G1 = 90

TACKA 7
NORMALNI NAPON = 0
SMICUCI NAPON = 25.4969
GLAVNI NAPON G1= 25.4969
GLAVNI NAPON G2=-25.4969
NAGIB PRAVCA G1 =-45.

TACKA 8
NORMALNI NAPON = 0
SMICUCI NAPON =-25.4969
GLAVNI NAPON G1= 25.4969
GLAVNI NAPON G2=-25.4969
NAGIB PRAVCA G1 = 45.

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 180
ZA SLUČAJ T =-7800*

UGAO TETA =-1.00524E-02
IZVOD UGLA TETA =-5.37229E-05
BIMOMENT =-35709.4
MOMENAT T-S =-6308.65
MOMENAT T-V =-1491.35

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-11.1895
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 9.53674E-07
GLAVNI NAPON G2=-11.1895
NAGIB PRAVCA G1 = 90

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-4.76626
SMICUCI NAPON =-30.4196
GLAVNI NAPON G1= 28.1296
GLAVNI NAPON G2=-32.8959
NAGIB PRAVCA G1 = 47.2398

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-8.66045
SMICUCI NAPON = 27.859
GLAVNI NAPON G1= 23.8633
GLAVNI NAPON G2=-32.5237
NAGIB PRAVCA G1 =-49.4175

TACKA 4
NORMALNI NAPON = 4.76626
SMICUCI NAPON =-30.4196
GLAVNI NAPON G1= 32.8959
GLAVNI NAPON G2=-28.1296
NAGIB PRAVCA G1 = 42.7603

TACKA 5
NORMALNI NAPON = 8.66045
SMICUCI NAPON = 27.859
GLAVNI NAPON G1= 32.5237
GLAVNI NAPON G2=-23.8633
NAGIB PRAVCA G1 =-40.5825

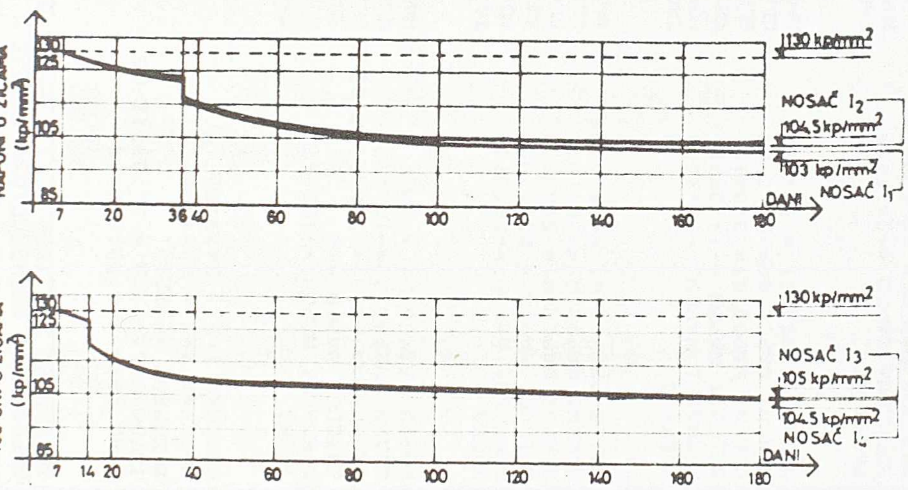
TACKA 6
NORMALNI NAPON = 11.1895
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 11.1895
GLAVNI NAPON G2=-9.53674E-07
NAGIB PRAVCA G1 = 0

TACKA 7
NORMALNI NAPON = 0
SMICUCI NAPON =-25.4969
GLAVNI NAPON G1= 25.4969
GLAVNI NAPON G2=-25.4969
NAGIB PRAVCA G1 = 45.

TACKA 8
NORMALNI NAPON = 0
SMICUCI NAPON = 25.4969
GLAVNI NAPON G1= 25.4969
GLAVNI NAPON G2=-25.4969
NAGIB PRAVCA G1 =-45.

Ova merenja su sprovedena pomoću deformetra "Huggenberger" sa bazom 10" i podatkom 0,0001", pri čemu su se baze merenja nalazile na sredinama opitnih nosača, odnosno u osovinama gornjih flanši.

Imajući u vidu vrednost početnog napona u žicama od visokovrednog čelika, na osnovu navedenih merenja izračunate su vrednosti napona u vreme ispitivanja nosača na torziju. Promena napona u žicama svakog nosača prikazana je na sl. 1.13 i kao što



Sl. 1.13

se vidi, ova promena je zanemarljiva već za starosti nosača veće od 140 dana. Obzirom na ovo, kao i obzirom da su ispitivanja na torziju kod svih nosača sprovedena posle ovog vremena, kao dovoljno tačno može se uzeti da je u svim slučajevima trajni napon u žicama iznosio 105 kp/mm^2. Pošto je površina svih žica Ø 2,5 mm u jednom nosaču F_p= 14·0,0982 = 1,374 cm^2, dobija se da je centrična sila prednaprezanja svakog nosača u vreme ispitivanja na torziju iznosila 14400 kp. Sa ovom vrednošću, kao i sa površinom preseka F = 191 cm^2, dobija se intenzitet centričnog pritiska u nosačima od cca 75 kp/cm^2.

Na stranama 43-49 prikazani su rezultati proračuna sistema izloženog kako uticaju momenta torzije T^*= 7800 kp·cm, tako i uticaju sile prednaprezanja N =-14400 kp. Ovi rezultati ne služe za upoređivanje sa eksperimentalnim veličinama, već se daju

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 0
ZA SLUCAJ T* = 7800 I N =-14400

UGAO TETA = 0
IZVOD UGLA TETA = 0
BIMOMENT =-187804.
MOMENAT T-S = 0
MOMENAT T-W = 7800

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-134.241
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1=-1.52588E-05
GLAVNI NAPON G2=-134.241
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-100.46
SMICUCI NAPON = 6.69872
GLAVNI NAPON G1= .444733
GLAVNI NAPON G2=-100.904
NAGIB PRAVCA G1 =-86.2017

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-120.94
SMICUCI NAPON = 6.69237
GLAVNI NAPON G1= .369217
GLAVNI NAPON G2=-121.309
NAGIB PRAVCA G1 =-86.8423

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-50.3258
SMICUCI NAPON = 6.69872
GLAVNI NAPON G1= .876389
GLAVNI NAPON G2=-51.2022
NAGIB PRAVCA G1 =-82.5464

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-29.8454
SMICUCI NAPON = 6.69237
GLAVNI NAPON G1= 1.43197
GLAVNI NAPON G2=-31.2774
NAGIB PRAVCA G1 =-77.9226

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-16.5447
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 3.81470E-06
GLAVNI NAPON G2=-16.5447
NAGIB PRAVCA G1 = 90

TACKA 7
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 2.77715E-03
GLAVNI NAPON G1=-7.62939E-06
GLAVNI NAPON G2=-75.3927
NAGIB PRAVCA G1 =-90.0001

TACKA 8
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON =-2.77715E-03
GLAVNI NAPON G1=-7.62939E-06
GLAVNI NAPON G2=-75.3927
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 20
ZA SLUCAJ T* = 7800 I N =-14400

UGAO TETA = 4.29454E-04
IZVOD UGLA TETA = 3.73071E-05
BIMOMENT =-82292.
MOMENAT T-S = 4380.96
MOMENAT T-W = 3419.05

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-101.179
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 3.05176E-05
GLAVNI NAPON G2=-101.179
NAGIB PRAVCA G1 = 90

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-86.3765
SMICUCI NAPON = 23.1705
GLAVNI NAPON G1= 5.82298
GLAVNI NAPON G2=-92.1995
NAGIB PRAVCA G1 =-75.8932

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-95.3506
SMICUCI NAPON =-17.3002
GLAVNI NAPON G1= 3.04187
GLAVNI NAPON G2=-98.3925
NAGIB PRAVCA G1 = 80.0278

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-64.4089
SMICUCI NAPON = 23.1705
GLAVNI NAPON G1= 7.46922
GLAVNI NAPON G2=-71.8781
NAGIB PRAVCA G1 =-72.1329

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-55.4348
SMICUCI NAPON =-17.3002
GLAVNI NAPON G1= 4.956
GLAVNI NAPON G2=-60.3908
NAGIB PRAVCA G1 = 74.0146

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-49.6066
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1=-3.81470E-06
GLAVNI NAPON G2=-49.6066
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 7
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 17.7059
GLAVNI NAPON G1= 3.95116
GLAVNI NAPON G2=-79.3438
NAGIB PRAVCA G1 =-77.4204

TACKA 8
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON =-17.7059
GLAVNI NAPON G1= 3.95116
GLAVNI NAPON G2=-79.3438
NAGIB PRAVCA G1 = 77.4204

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 4Ø
ZA SLUCAJ T* = 78ØØ I N =-144ØØ

UGAO TETA = 1.36Ø97E-Ø3
IZVOD UGLA TETA = 5.37364E-Ø5
BIMOMENT =-3567Ø.9
MOMENAT T-S = 631Ø.24
MOMENAT T-W = 1489.76

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-86.57Ø1
SMICUCI NAPON = Ø
GLAVNI NAPON G1= 7.62939E-Ø6
GLAVNI NAPON G2=-86.57Ø1
NAGIB PRAVCA G1 = 9Ø

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-8Ø.1538
SMICUCI NAPON = 3Ø.4255
GLAVNI NAPON G1= 1Ø.24Ø8
GLAVNI NAPON G2=-9Ø.3946
NAGIB PRAVCA G1 =-71.3975

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-84.Ø438
SMICUCI NAPON =-27.8677
GLAVNI NAPON G1= 8.4ØØ3
GLAVNI NAPON G2=-92.4446
NAGIB PRAVCA G1 = 73.2245

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-7Ø.6315
SMICUCI NAPON = 3Ø.4255
GLAVNI NAPON G1= 11.2938
GLAVNI NAPON G2=-81.9384
NAGIB PRAVCA G1 =-69.6271

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-66.7416
SMICUCI NAPON =-27.8677
GLAVNI NAPON G1= 1Ø.1Ø58
GLAVNI NAPON G2=-76.8474
NAGIB PRAVCA G1 = 7Ø.Ø676

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-64.2153
SMICUCI NAPON = Ø
GLAVNI NAPON G1= Ø
GLAVNI NAPON G2=-64.2153
NAGIB PRAVCA G1 = 9Ø.ØØØ1

TACKA 7
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 25.5Ø33
GLAVNI NAPON G1= 7.81669
GLAVNI NAPON G2=-83.2Ø94
NAGIB PRAVCA G1 =-72.9599

TACKA 8
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON =-25.5Ø33
GLAVNI NAPON G1= 7.81669
GLAVNI NAPON G2=-83.2Ø94
NAGIB PRAVCA G1 = 72.9599

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 6Ø
ZA SLUCAJ T* = 78ØØ I N =-144ØØ

UGAO TETA = 2.51683E-Ø3
IZVOD UGLA TETA = 6.Ø3Ø69E-Ø5
BIMOMENT =-15394.7
MOMENAT T-S = 714Ø.53
MOMENAT T-W = 659.471

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-8Ø.2166
SMICUCI NAPON = Ø
GLAVNI NAPON G1= 3.Ø5176E-Ø5
GLAVNI NAPON G2=-8Ø.2166
NAGIB PRAVCA G1 = 9Ø

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-77.4475
SMICUCI NAPON = 33.5478
GLAVNI NAPON G1= 12.51Ø9
GLAVNI NAPON G2=-89.9583
NAGIB PRAVCA G1 =-69.5482

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-79.1263
SMICUCI NAPON =-32.4155
GLAVNI NAPON G1= 11.5838
GLAVNI NAPON G2=-9Ø.71Ø1
NAGIB PRAVCA G1 = 7Ø.3356

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-73.3379
SMICUCI NAPON = 33.5478
GLAVNI NAPON G1= 13.Ø3Ø8
GLAVNI NAPON G2=-86.3687
NAGIB PRAVCA G1 =-68.7726

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-71.6591
SMICUCI NAPON =-32.4155
GLAVNI NAPON G1= 12.4874
GLAVNI NAPON G2=-84.1465
NAGIB PRAVCA G1 = 68.9319

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-7Ø.5688
SMICUCI NAPON = Ø
GLAVNI NAPON G1=-7.62939E-Ø6
GLAVNI NAPON G2=-7Ø.5688
NAGIB PRAVCA G1 = 9Ø.ØØØ1

TACKA 7
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 28.859
GLAVNI NAPON G1= 9.77847
GLAVNI NAPON G2=-85.1711
NAGIB PRAVCA G1 =-71.2818

TACKA 8
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON =-28.859
GLAVNI NAPON G1= 9.77847
GLAVNI NAPON G2=-85.1711
NAGIB PRAVCA G1 = 71.2818

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 80
ZA SLUCAJ T* = 7800 I N =-14400

UGAO TETA = 3.76731E-03
IZVOD UGLA TETA = 6.38182E-05
BIMOMENT =-6239.93
MOMENAT T-S = 7494.14
MOMENAT T-U = 305.859

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-77.3479
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 1.52588E-05
GLAVNI NAPON G2=-77.348
NAGIB PRAVCA G1 = 90

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-76.2255
SMICUCI NAPON = 34.8775
GLAVNI NAPON G1= 13.5498
GLAVNI NAPON G2=-89.7754
NAGIB PRAVCA G1 =-68.769

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-76.906
SMICUCI NAPON =-34.3524
GLAVNI NAPON G1= 13.1098
GLAVNI NAPON G2=-90.0158
NAGIB PRAVCA G1 = 69.1119

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-74.5598
SMICUCI NAPON = 34.8775
GLAVNI NAPON G1= 13.7714
GLAVNI NAPON G2=-88.3312
NAGIB PRAVCA G1 =-68.4534

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-73.8793
SMICUCI NAPON =-34.3524
GLAVNI NAPON G1= 13.5046
GLAVNI NAPON G2=-87.384
NAGIB PRAVCA G1 = 68.5392

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-73.4374
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1=-1.52588E-05
GLAVNI NAPON G2=-73.4374
NAGIB PRAVCA G1 = 90

TACKA 7
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 30.2881
GLAVNI NAPON G1= 10.6605
GLAVNI NAPON G2=-86.0532
NAGIB PRAVCA G1 =-70.6095

TACKA 8
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON =-30.2881
GLAVNI NAPON G1= 10.6605
GLAVNI NAPON G2=-86.0532
NAGIB PRAVCA G1 = 70.6095

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 100
ZA SLUCAJ T* = 7800 I N =-14400

UGAO TETA = 5.05683E-03
IZVOD UGLA TETA = 6.49190E-05
BIMOMENT =-1667.69
MOMENAT T-S = 7623.41
MOMENAT T-W = 176.592

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-75.9152
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 7.62939E-06
GLAVNI NAPON G2=-75.9153
NAGIB PRAVCA G1 = 90

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-75.6153
SMICUCI NAPON = 35.3636
GLAVNI NAPON G1= 13.9611
GLAVNI NAPON G2=-89.5764
NAGIB PRAVCA G1 =-68.4566

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-75.7971
SMICUCI NAPON =-35.0604
GLAVNI NAPON G1= 13.7302
GLAVNI NAPON G2=-89.5274
NAGIB PRAVCA G1 = 68.6139

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-75.1701
SMICUCI NAPON = 35.3636
GLAVNI NAPON G1= 14.0214
GLAVNI NAPON G2=-89.1915
NAGIB PRAVCA G1 =-68.3721

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-74.9882
SMICUCI NAPON =-35.0604
GLAVNI NAPON G1= 13.8385
GLAVNI NAPON G2=-88.8268
NAGIB PRAVCA G1 = 68.4606

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-74.8701
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1=-1.52588E-05
GLAVNI NAPON G2=-74.8701
NAGIB PRAVCA G1 = 90

TACKA 7
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 30.8105
GLAVNI NAPON G1= 10.9894
GLAVNI NAPON G2=-86.3821
NAGIB PRAVCA G1 =-70.3699

TACKA 8
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON =-30.8105
GLAVNI NAPON G1= 10.9894
GLAVNI NAPON G2=-86.3821
NAGIB PRAVCA G1 = 70.3699

```
NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 120
ZA SLUCAJ T* = 7800     I N =-14400

UGAO TETA = 6.35683E-03
IZVOD UGLA TETA = 6.49170E-05
BIMOMENT = 1674.91
MOMENAT T-S = 7623.17
MOMENAT T-V = 176.827

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-74.8678
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 3.05176E-05
GLAVNI NAPON G2=-74.8679
NAGIB PRAVCA G1 = 90

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-75.1691
SMICUCI NAPON = 35.3628
GLAVNI NAPON G1= 14.0021
GLAVNI NAPON G2=-89.1901
NAGIB PRAVCA G1 =-68.3723

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-74.9865
SMICUCI NAPON =-35.0592
GLAVNI NAPON G1= 13.8379
GLAVNI NAPON G2=-88.8244
NAGIB PRAVCA G1 = 68.4608

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-75.6162
SMICUCI NAPON = 35.3628
GLAVNI NAPON G1= 13.9604
GLAVNI NAPON G2=-89.5766
NAGIB PRAVCA G1 =-68.4571

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-75.7989
SMICUCI NAPON =-35.0592
GLAVNI NAPON G1= 13.7292
GLAVNI NAPON G2=-89.5281
NAGIB PRAVCA G1 = 68.6147

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-75.9175
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 3.05176E-05
GLAVNI NAPON G2=-75.9175
NAGIB PRAVCA G1 = 90

TACKA 7
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 30.8096
GLAVNI NAPON G1= 10.9888
GLAVNI NAPON G2=-86.3815
NAGIB PRAVCA G1 =-70.3703

TACKA 8
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON =-30.8096
GLAVNI NAPON G1= 10.9888
GLAVNI NAPON G2=-86.3815
NAGIB PRAVCA G1 = 70.3703
```

```
NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 140
ZA SLUCAJ T* = 7800     I N =-14400

UGAO TETA = 7.64638E-03
IZVOD UGLA TETA = 6.38173E-05
BIMOMENT = 6242.5
MOMENAT T-S = 7494.04
MOMENAT T-V = 305.955

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-73.4366
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 3.05176E-05
GLAVNI NAPON G2=-73.4366
NAGIB PRAVCA G1 = 90

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-74.5595
SMICUCI NAPON = 34.8772
GLAVNI NAPON G1= 13.7712
GLAVNI NAPON G2=-88.3307
NAGIB PRAVCA G1 =-68.4536

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-73.8787
SMICUCI NAPON =-34.3519
GLAVNI NAPON G1= 13.5043
GLAVNI NAPON G2=-87.383
NAGIB PRAVCA G1 = 68.5394

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-76.2259
SMICUCI NAPON = 34.8772
GLAVNI NAPON G1= 13.5496
GLAVNI NAPON G2=-89.7755
NAGIB PRAVCA G1 =-68.7692

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-76.9066
SMICUCI NAPON =-34.3519
GLAVNI NAPON G1= 13.1094
GLAVNI NAPON G2=-90.016
NAGIB PRAVCA G1 = 69.1122

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-77.3488
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 0
GLAVNI NAPON G2=-77.3488
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 7
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 30.2877
GLAVNI NAPON G1= 10.6602
GLAVNI NAPON G2=-86.0529
NAGIB PRAVCA G1 =-70.6097

TACKA 8
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON =-30.2877
GLAVNI NAPON G1= 10.6602
GLAVNI NAPON G2=-86.0529
NAGIB PRAVCA G1 = 70.6097
```

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 160
ZA SLUCAJ T^{*} = 7800   I N =-14400

UGAO TETA = 6.89713E-03
IZVOD UGLA TETA = 6.08163E-05
BIMOMENT = 15367.6
MOMENAT T-S = 7141.63
MOMENAT T-W = 658.371

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-70.5772
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 3.05176E-05
GLAVNI NAPON G2=-70.5773
NAGIB PRAVCA G1 = 90

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-73.3415
SMICUCI NAPON = 33.5519
GLAVNI NAPON G1= 13.0331
GLAVNI NAPON G2=-86.3746
NAGIB PRAVCA G1 =-68.7716

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-71.6656
SMICUCI NAPON =-32.4215
GLAVNI NAPON G1= 12.4906
GLAVNI NAPON G2=-84.1562
NAGIB PRAVCA G1 = 68.9306

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-77.4438
SMICUĆI NAPON = 33.5519
GLAVNI NAPON G1= 12.514
GLAVNI NAPON G2=-89.9579
NAGIB PRAVCA G1 =-69.5458

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-79.1197
SMICUCI NAPON =-32.4215
GLAVNI NAPON G1= 11.5884
GLAVNI NAPON G2=-90.7081
NAGIB PRAVCA G1 = 70.3317

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-80.2081
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 0
GLAVNI NAPON G2=-80.2081
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 7
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 28.8634
GLAVNI NAPON G1= 9.78117
GLAVNI NAPON G2=-85.1738
NAGIB PRAVCA G1 =-71.2797

TACKA 8
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON =-28.8634
GLAVNI NAPON G1= 9.78117
GLAVNI NAPON G2=-85.1738
NAGIB PRAVCA G1 = 71.2797

NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 180
ZA SLUCAJ T^{*} = 7800   I N =-14400

UGAO TETA = 1.00524E-02
IZVOD UGLA TETA = 5.37229E-05
BIMOMENT = 35709.4
MOMENAT T-S = 6308.65
MOMENAT T-W = 1491.35

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-64.2032
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 0
GLAVNI NAPON G2=-64.2032
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-70.6264
SMICUCI NAPON = 30.4196
GLAVNI NAPON G1= 11.2955
GLAVNI NAPON G2=-81.9219
NAGIB PRAVCA G1 =-69.6288

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-66.7322
SMICUCI NAPON =-27.859
GLAVNI NAPON G1= 10.1014
GLAVNI NAPON G2=-76.8336
NAGIB PRAVCA G1 = 70.0699

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-80.1589
SMICUCI NAPON = 30.4196
GLAVNI NAPON G1= 10.2367
GLAVNI NAPON G2=-90.3956
NAGIB PRAVCA G1 =-71.4012

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-84.0531
SMICUCI NAPON =-27.859
GLAVNI NAPON G1= 8.39519
GLAVNI NAPON G2=-92.4483
NAGIB PRAVCA G1 = 73.2391

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-86.5822
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 7.62939E-06
GLAVNI NAPON G2=-86.5822
NAGIB PRAVCA G1 = 90

TACKA 7
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 25.4969
GLAVNI NAPON G1= 7.81303
GLAVNI NAPON G2=-83.2057
NAGIB PRAVCA G1 =-72.9634

TACKA 8
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON =-25.4969
GLAVNI NAPON G1= 7.81303
GLAVNI NAPON G2=-83.2057
NAGIB PRAVCA G1 = 72.9634

```
NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 200
ZA SLUCAJ T* = 7800     I N =-14400

UGAO TETA = 1.09856E-02
IZVOD UGLA TETA = 3.73597E-05
BIMOMENT = 82115.7
MOMENAT T-S = 4387.14
MOMENAT T-W = 3412.86

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-49.6618
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1=-3.81470E-06
GLAVNI NAPON G2=-49.6618
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-64.4324
SMICUCI NAPON = 23.1938
GLAVNI NAPON G1= 7.48059
GLAVNI NAPON G2=-71.913
NAGIB PRAVCA G1 =-72.1242

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-55.4775
SMICUCI NAPON =-17.334
GLAVNI NAPON G1= 4.97069
GLAVNI NAPON G2=-60.4482
NAGIB PRAVCA G1 = 73.9993

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-86.353
SMICUCI NAPON = 23.1928
GLAVNI NAPON G1= 5.83538
GLAVNI NAPON G2=-92.1883
NAGIB PRAVCA G1 =-75.878

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-95.3078
SMICUCI NAPON =-17.334
GLAVNI NAPON G1= 3.05474
GLAVNI NAPON G2=-98.3626
NAGIB PRAVCA G1 = 80.0055

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-101.123
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 0
GLAVNI NAPON G2=-101.123
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 7
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 17.7309
GLAVNI NAPON G1= 3.96178
GLAVNI NAPON G2=-79.3544
NAGIB PRAVCA G1 =-77.4048

TACKA 8
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON =-17.7309
GLAVNI NAPON G1= 3.96178
GLAVNI NAPON G2=-79.3544
NAGIB PRAVCA G1 = 77.4048
```

```
NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 212.5
ZA SLUCAJ T* = 7800     I N =-14400

UGAO TETA = 1.13776E-02
IZVOD UGLA TETA = 2.67540E-05
BIMOMENT = 36088.7
MOMENAT T-S = 3141.71
MOMENAT T-W =-3141.71

TACKA 1
NORMALNI NAPON =-64.0843
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 0
GLAVNI NAPON G2=-64.0843
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 2
NORMALNI NAPON =-70.5758
SMICUCI NAPON = 11.8143
GLAVNI NAPON G1= 1.92518
GLAVNI NAPON G2=-72.501
NAGIB PRAVCA G1 =-80.7448

TACKA 3
NORMALNI NAPON =-66.6402
SMICUCI NAPON =-17.2085
GLAVNI NAPON G1= 4.18137
GLAVNI NAPON G2=-70.8216
NAGIB PRAVCA G1 = 76.3428

TACKA 4
NORMALNI NAPON =-80.2096
SMICUCI NAPON = 11.8143
GLAVNI NAPON G1= 1.70396
GLAVNI NAPON G2=-81.9135
NAGIB PRAVCA G1 =-81.7929

TACKA 5
NORMALNI NAPON =-84.1451
SMICUCI NAPON =-17.2085
GLAVNI NAPON G1= 3.38328
GLAVNI NAPON G2=-87.5284
NAGIB PRAVCA G1 = 78.8772

TACKA 6
NORMALNI NAPON =-86.701
SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 0
GLAVNI NAPON G2=-86.701
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 7
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 12.6975
GLAVNI NAPON G1= 2.08104
GLAVNI NAPON G2=-77.4737
NAGIB PRAVCA G1 =-80.6924

TACKA 8
NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON =-12.6975
GLAVNI NAPON G1= 2.08104
GLAVNI NAPON G2=-77.4737
NAGIB PRAVCA G1 = 80.6924
```

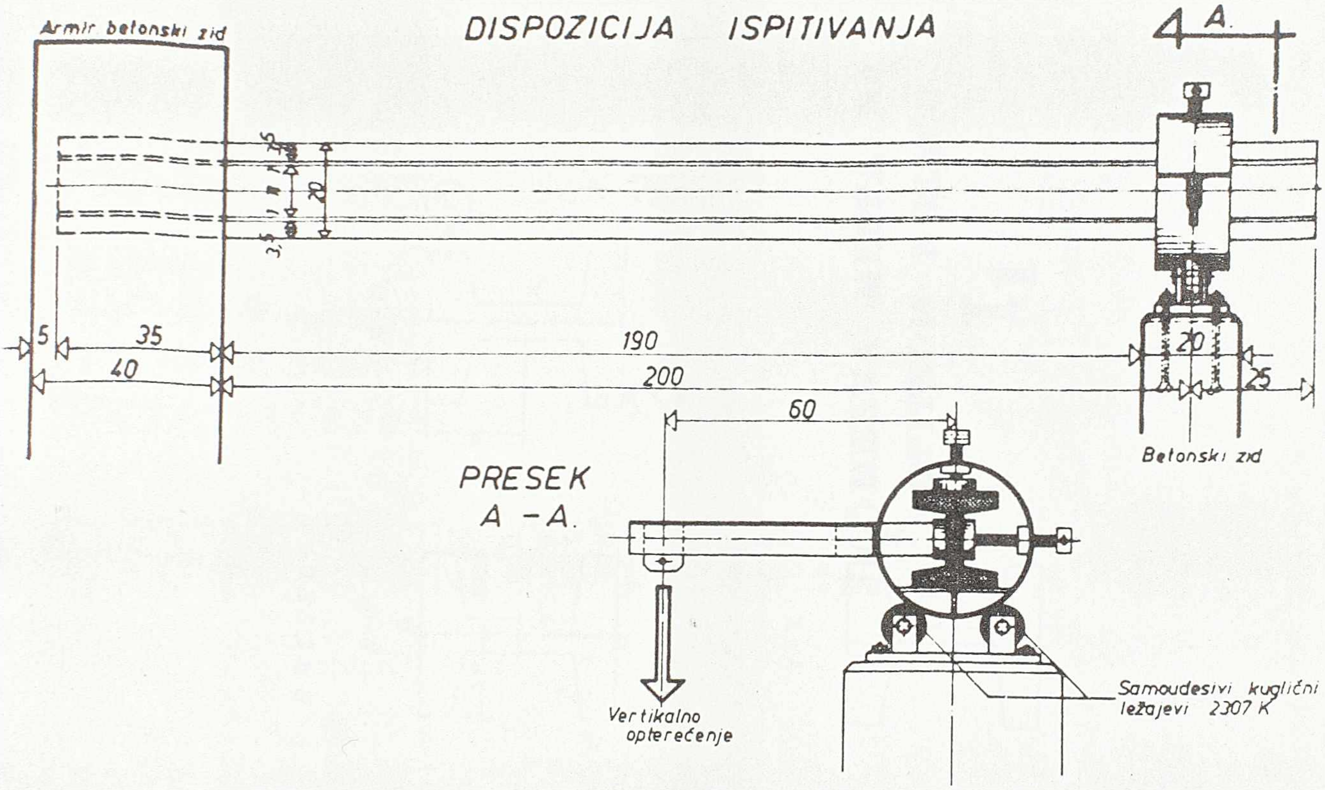
```
NAPONSKO I DEFORMACIONO STANJE U PRESEKU Z = 225
ZA SLUCAJ T* = 7800     I N =-14400

UGAO TETA = 1.16849E-02
IZVOD UGLA TETA = 2.35160E-05
BIMOMENT = 0
MOMENAT T-S = 2761.48
MOMENAT T-W =-2761.48

TACKA 1                              TACKA 5
NORMALNI NAPON =-75.3927             NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 0                    SMICUCI NAPON =-15.1258
GLAVNI NAPON G1=-7.62939E-06         GLAVNI NAPON G1= 2.92143
GLAVNI NAPON G2=-75.3927             GLAVNI NAPON G2=-78.3141
NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001            NAGIB PRAVCA G1 = 79.0684

TACKA 2                              TACKA 6
NORMALNI NAPON =-75.3927             NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 10.3844              SMICUCI NAPON = 0
GLAVNI NAPON G1= 1.40419             GLAVNI NAPON G1=-7.62939E-06
GLAVNI NAPON G2=-76.7969             GLAVNI NAPON G2=-75.3927
NAGIB PRAVCA G1 =-82.2992            NAGIB PRAVCA G1 = 90.0001

TACKA 3                              TACKA 7
NORMALNI NAPON =-75.3927             NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON =-15.1258              SMICUCI NAPON = 11.1607
GLAVNI NAPON G1= 2.92143             GLAVNI NAPON G1= 1.61749
GLAVNI NAPON G2=-78.3141             GLAVNI NAPON G2=-77.0102
NAGIB PRAVCA G1 = 79.0684            NAGIB PRAVCA G1 =-81.7537

TACKA 4                              TACKA 8
NORMALNI NAPON =-75.3927             NORMALNI NAPON =-75.3927
SMICUCI NAPON = 10.3844              SMICUCI NAPON =-11.1607
GLAVNI NAPON G1= 1.40419             GLAVNI NAPON G1= 1.61749
GLAVNI NAPON G2=-76.7969             GLAVNI NAPON G2=-77.0102
NAGIB PRAVCA G1 =-82.2992            NAGIB PRAVCA G1 = 81.7537
```

kao ilustracija poznate činjenice da normalna sila pritiska u prednapregnutim konstrukcijama bitno smanjuje kose glavne napone zatezanja i menja njihove pravce.

1.7.3. Postupak ispitivanja.

Ispitivanje nosača I_1, I_2, I_3 i I_4 obavljeno je primenom specijalno konstruisanog uređaja koji je omogućavao da se uticaj izvesnog gravitacionog opterećenja na nosače prenese isključivo u vidu koncentrisanog momenta torzije T^*. Dispozicija opita prikazana je na sl. 1.14, i kao što se vidi, svaki opitni nosač bio je jednim svojim krajem uzidan u masivan armirano-betonski zid, dok je na suprotnom kraju imao pomenuti uređaj za apliciranje torzionog opterećenja. Glavni elementi ovog uređaja su:

- čelični prsten pomoću koga se ostvaruje veza sa opitnim nosačem,
- samoudesivi kuglični ležajevi 2307K koji omogućavaju ro-

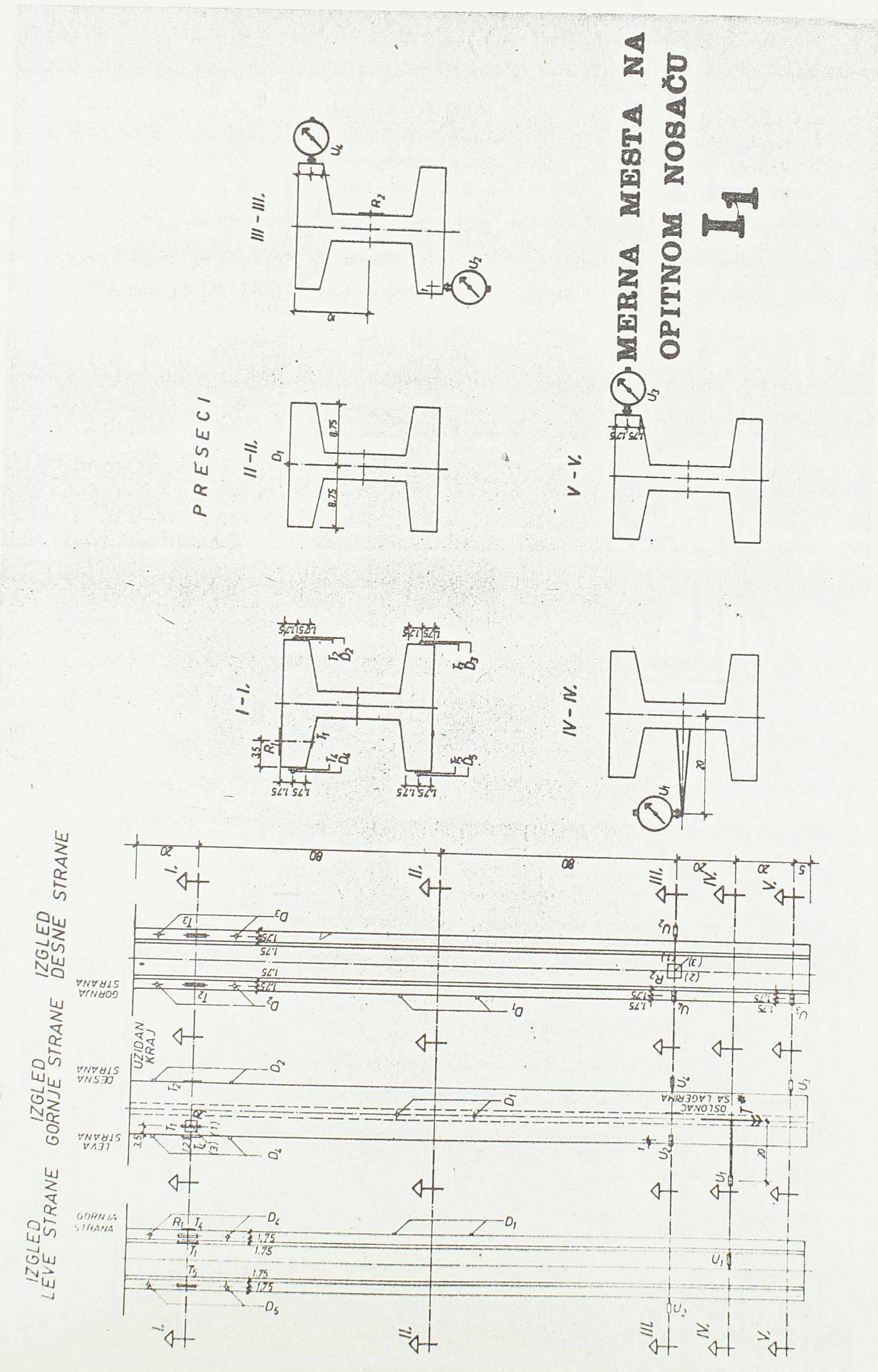


Sl. 1.14

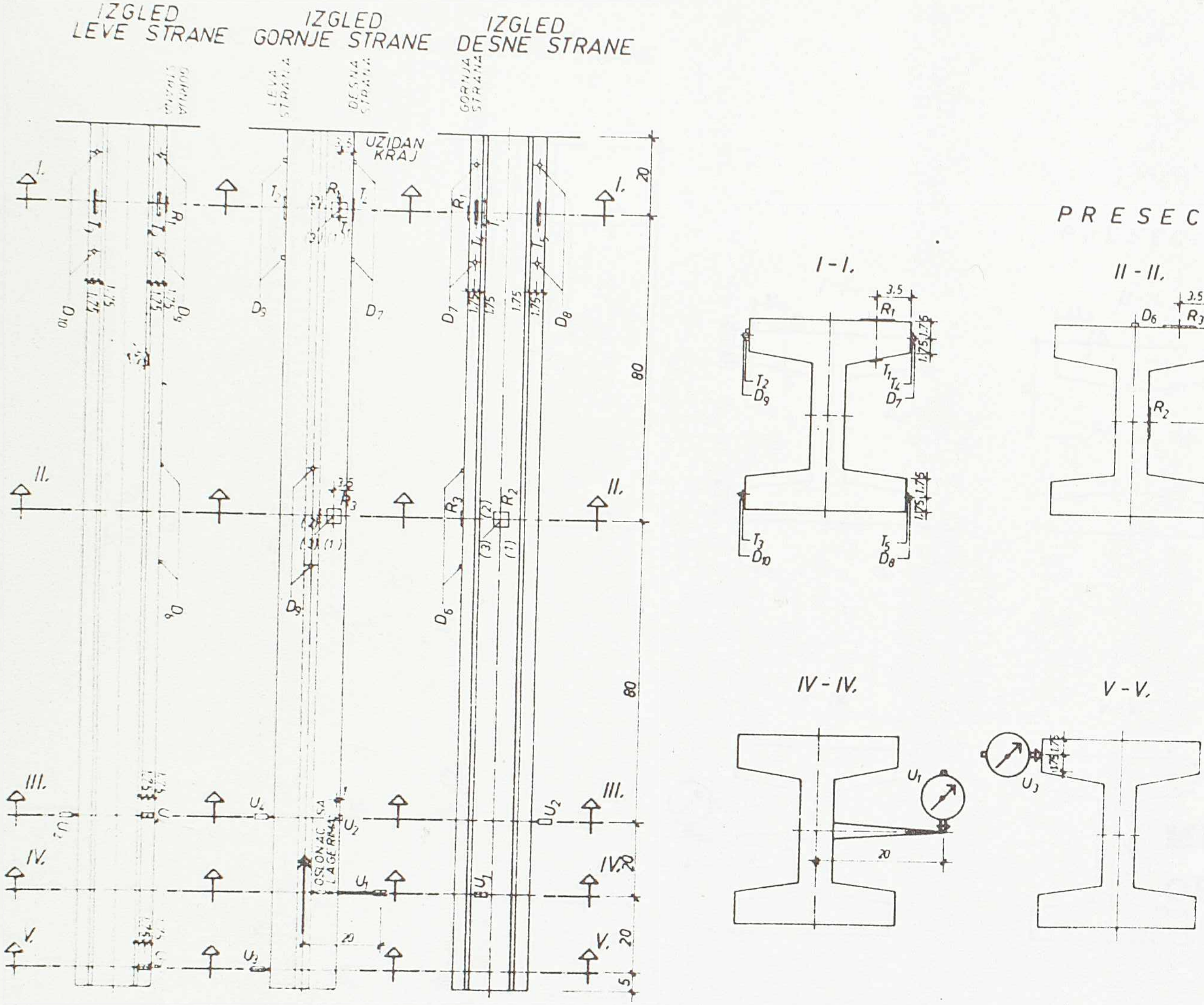
taciju prstena, odnosno nosača koji je sa njim povezan, i
- horizontalna poluga koja zajedno sa prstenom čini celinu.

Kada se na polugu aplicira izvesno vertikalno opterećenje V, na presek u kome je postavljen opisani uređaj predneće se određeni momenat torzije, pa će stoga ceo sistem pretrpeti odgovarajuću rotaciju. Preko čeličnog prstena i kugličnih ležajeva preneće se takođe i naneta vertikalna sila, ali ona u ovom slučaju, zbog "nepopustljivosti" uređaja, neće izazvati niti momente savijanja, niti transverzalne sile. Obzirom na zanemarlive sile trenja u kugličnim ležajevima i na kontaktu između ležajeva i čeličnog prstena, može se smatrati da će u preseku u kome je opisani uređaj postavljen, opitni nosač biti izložen isključivo dejstvu koncentrisanog momenta torzije $T^{*} = 60 \cdot V$ kpcm (za V u kp).

Osim što omogućava slobodno uvijanje, opisani uređaj dozvoljava i nesmetano dilatiranje nosača u pravcu podužne osovine. Ovo je posledica osobine samoudesivih kugličnih ležajeva da, osim


MERNA MESTA NA OPITNOM NOSAČU I1
PRESECI
I - I.
II - II.
III - III.
IV - IV.
V - V.
IZGLED LEVE STRANE
IZGLED GORNJE STRANE
IZGLED DESNE STRANE
GORNJA STRANA
LEVA STRANA
DESNA STRANA
UZIDAN KRAJ
OSLONAC SA LAGERIMA

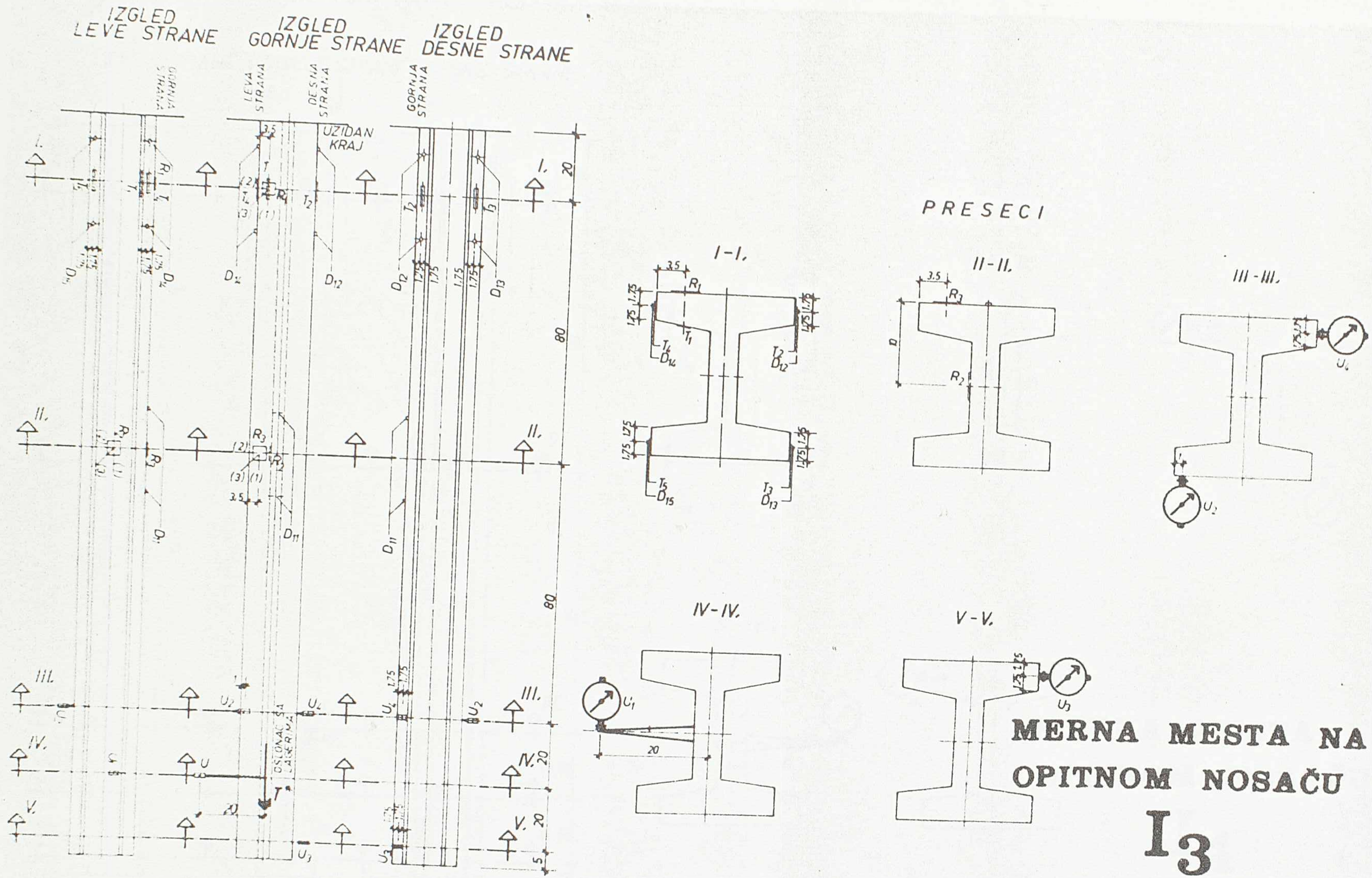
Sl. 1.15



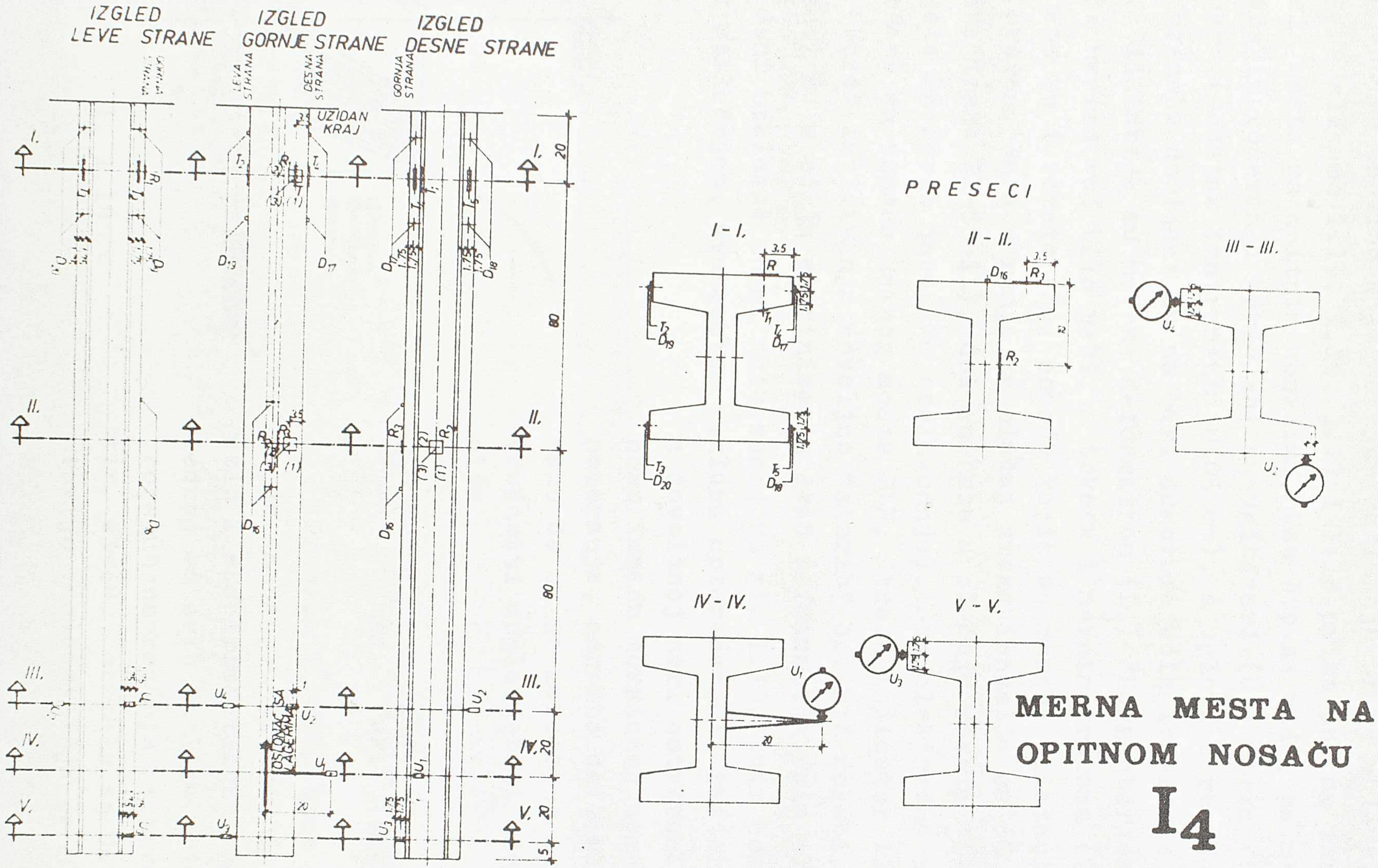
MERNA MESTA NA OPITNOM NOSAČU

I_2

Sl. 1.16


IZGLED LEVE STRANE
IZGLED GORNJE STRANE
IZGLED DESNE STRANE
GORNJA STRANA
LEVA STRANA
DESNA STRANA
GORNJA STRANA
UZIDAN KRAJ
OSLONAC SA LAKERIMA
PRESECI
I-I.
II-II.
III-III.
IV-IV.
V-V.
MERNA MESTA NA OPITNOM NOSAČU
I3

Sl. 1.17


IZGLED LEVE STRANE
IZGLED GORNJE STRANE
IZGLED DESNE STRANE
LEVA STRANA
DESNA STRANA
GORNJA STRANA
UZIDAN KRAJ
OSLONAC SA VAGE
PRESECI
I - I.
II - II.
III - III.
IV - IV.
V - V.
MERNA MESTA NA OPITNOM NOSAČU
I4

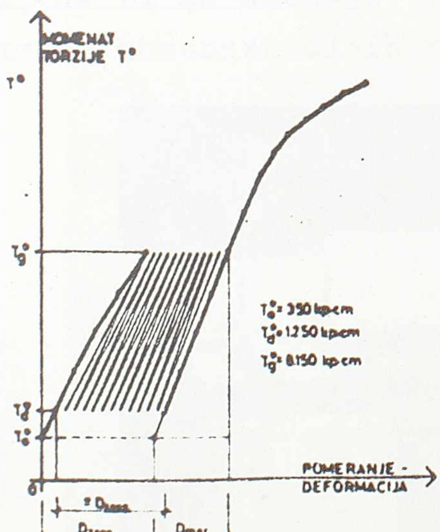
Sl. 1.18

rotacije oko svoje glavne osovine, dopuštaju i izvesne rotacije u odnosu na osovine koje sa njom zaklapaju prave uglove.

Na slikama 1.15, 1.16, 1.17 i 1.18 prikazani su rasporedi mernih mesta na opitnim nosačima. Kao što se vidi, za merenja linijskih pomeranja korišćeni su ugibomeri (U_j) marke "Huggenberger" (podatak instrumenta 0,05 mm), a uglovi obrtanja pojedinih preseka dobijani su na bazi odgovarajućih izmerenih pomeranja. Dilatacije su merene deformetrom (D_j) "Huggenberger" o kome je napred već bilo reči, a takođe i mernim trakama (T_j). Korišćene su i rozete (R_j) pomoću kojih su merene dilatacije u tri pravca. Baze merenja za slučaj traka iznosile su 60 mm (japanske trake PL-60-11), dok su baze u slučaju rozeta bile 20 mm (rozete PR-20-11 japanske proizvodnje). Sva električna merenja izvršena su pomoću mernog mosta BLH, Strain indicator 120C.

Pored ispitivanja dovoljno "starih" opitnih nosača, eksperimenti su u cilju eliminisanja svih deformacija osim elastičnih izvedeni saglasno shemi prikazanoj na sl. 1.19. Ovim postupkom je u poslednjem, dvanaestom ciklusu opterećenja i rasterećenja, u dovoljnoj meri ostvarena linearnost između torzionog momenta T^* i pomeranja, odnosno deformacija, tako da su se merodavne izmerene vrednosti mogle dobiti preko relacije

$$D_{mer.} = D_{uk.} - D_{zaos.}$$

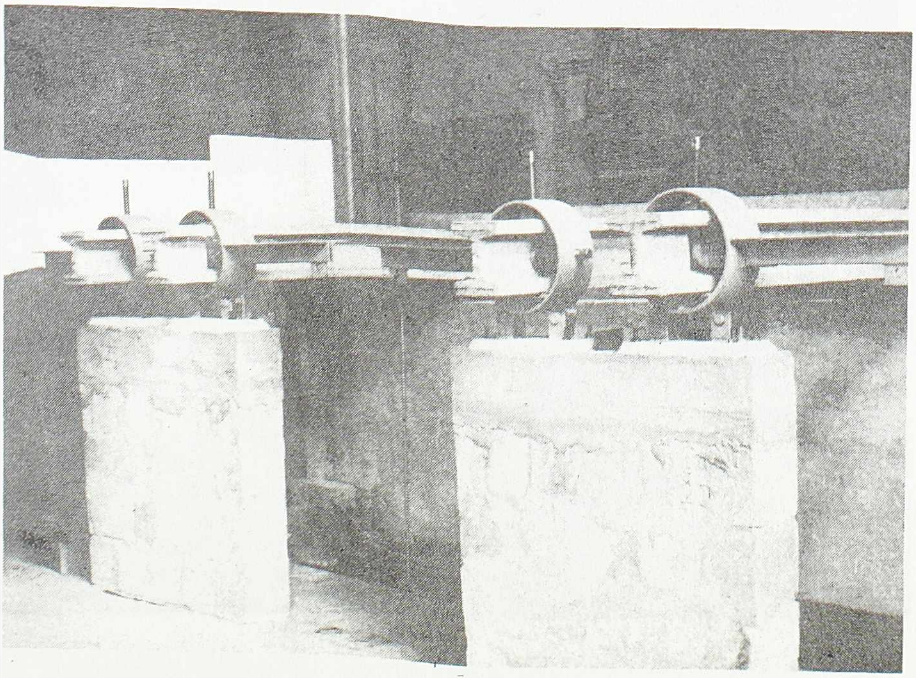


Sl. 1.19

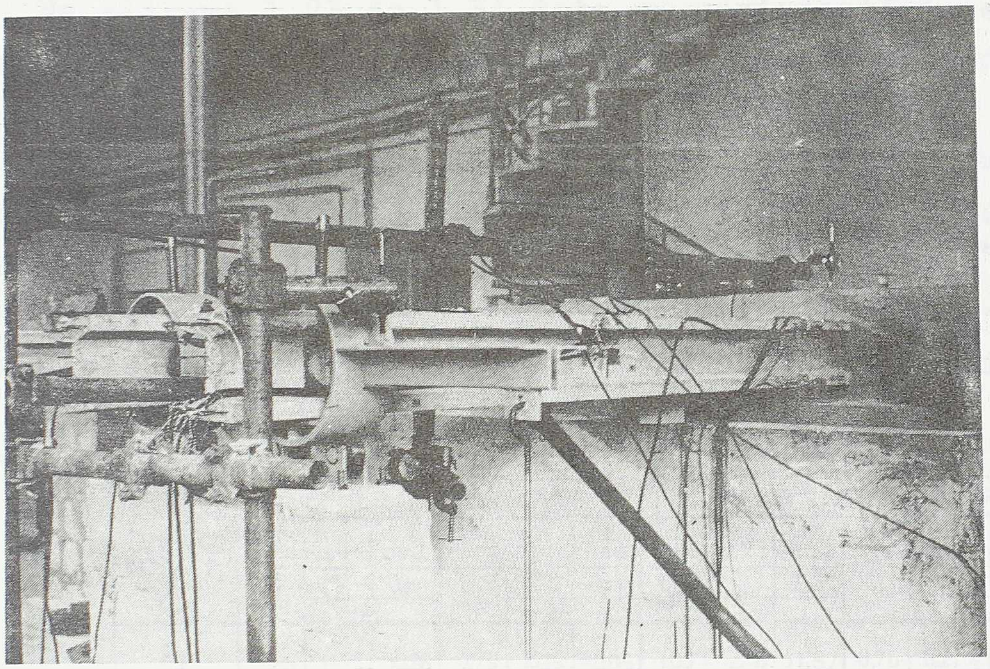
Granica T_g^*=8150 kpcm odabrana je na osnovu prethodnih teorijskih i eksperimentalnih analiza. Jednoj od ovih analiza pripada i proračun naprezanja prikazan na str. 43-49. Pokazalo se da T_g^* predstavlja vrednost koja je u proseku za 2o do 30% ispod granice do koje postoji proporcionalnost između opterećenja i deformacija. Ako za ovu granicu orijentaciono osvojimo momenat torzije intenziteta 10550 kpcm, može se pokazati da ovo spoljašnje opterećenje, u kombinaciji sa silom prednaprezanja, proizvodi u pojedinim tačkama sistema glavne napone pritiska veličine oko 160 kp/cm^2 i glavne napone zatezanja koji se kreću oko 25 kp/cm^2.

Vrednost T_o^*= 350 kpcm predstavlja torzioni momenat koji deluje u "neopterećenom" sistemu, tj. momenat koji nastaje isključivo pod uticajem sopstvene težine uređaja za apliciranje opterećenja. Imajući u vidu izloženo, proizilazi da izmerene vrednosti deformacijskih veličina u stvari odgovaraju torzionom momentu $\Delta T^* = T_g^* - T_o^* =$ 7800 kpcm, a to je ona vrednost koja figuriše u svim proračunima koje smo do sada prikazali. Treba samo napomenuti da je na tim mestima ova vrednost označena simbolom T^*, što obzirom na objašnjenja koja smo ovde dali, formalno ne stoji.

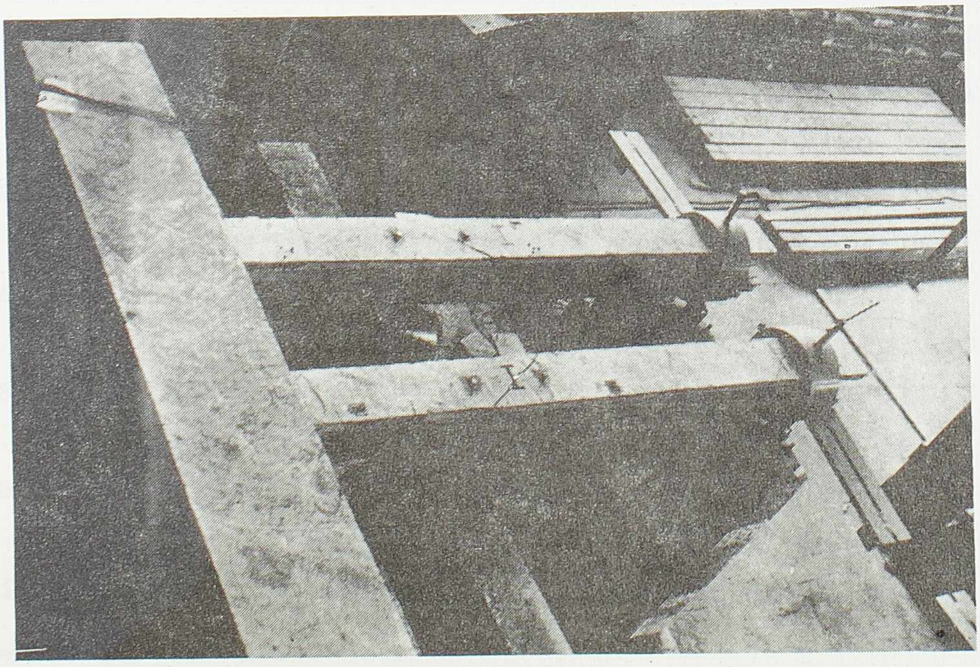
Kod poređenja teorijskih i eksperimentalnih vrednosti uglova obrtanja korišćene su vrednosti koje se dobijaju putem gotovih izraza iz literature /49/. Kod poređenja dilatacija, pak, prvo su na bazi obrazaca određivane presečne sile, odnosno naponi, da bi se docnije tražene vrednosti dobile korišćenjem veza između komponentalnih napona i komponentalnih deformacija.



Sl. 1.20



Sl. 1.21



Sl. 1.22

Na slikama 1.20, 1.21 i 1.22 prikazujemo fotografske snimke načinjene u toku ovog eksperimentalnog ispitivanja.

1.7.4. Rezultati opita i zaključci.

Na slikama 1.23 do 1.34 date su zavisnosti između momenta torzije T^* i uglova obrtanja poprečnih preseka opitnih nosača*). Kao što se vidi, ove slike sadrže grafičke prikaze rezultata merenja, kao i teorijske linije uglova obrtanja u funkciji spoljašnjeg momenta torzije. Putem ovih dijagrama određene su eksperimentalne vrednosti koje odgovaraju momentu $\Delta T^* = \pm 7800$ kpcm, a zatim su ovako dobijene veličine unete u tabelu 1-XIII gde se mogu uporediti sa odgovarajućim teorijskim vrednostima.

Tabela 1-XIII

OZNAKA NOSAČA	UGIBOMER 1.			UGIBOMER 2.			UGIBOMER 3.			UGIBOMER 4.		
	izmerene vrednosti		rač. vred.	izmerene vrednosti		rač. vred.	izmerene vrednosti		rač. vred.	izmerene vrednosti		rač. vred.
	U_1 (mm)	φ_1 x10^3	$\theta_{d(1)}$ x10^3	U_2 (mm)	φ_2 x10^3	$\theta_{d(2)}$ x10^3	U_3 (mm)	φ_3 x10^3	$\theta_{d(3)}$ x10^3	U_4 (mm)	φ_4 x10^3	$\theta_{d(4)}$ x10^3
I_1	2,35	11,75	10,98	0,79	10,19	10,05	1,03	12,48	11,57	0,76	9,21	10,05
I_2	-2,18	-10,90	-10,98	-0,74	-9,55	-10,05	-0,93	-11,27	-11,57	-0,79	-9,58	-10,05
I_3	2,24	11,20	10,98	0,73	9,42	10,05	0,99	12,00	11,57	0,90	10,91	10,05
I_4	-2,23	-11,15	-10,98	-0,82	-10,58	-10,05	-0,89	-10,79	-11,57	-0,85	-10,30	-10,05

Zavisnosti između momenta T^* i drugih deformacijskih veličina koje su bile predmet merenja imaju potpuno analogne grafike. U odnosu na njih primenjen je isti tretman kao u slučaju uglova obrtanja, što znači da su i u ovim slučajevima iz grafičkih prikaza određivane konkretne vrednosti izmerenih deformacija koje odgovaraju momentu $\Delta T^* = \pm 7800$ kpcm.

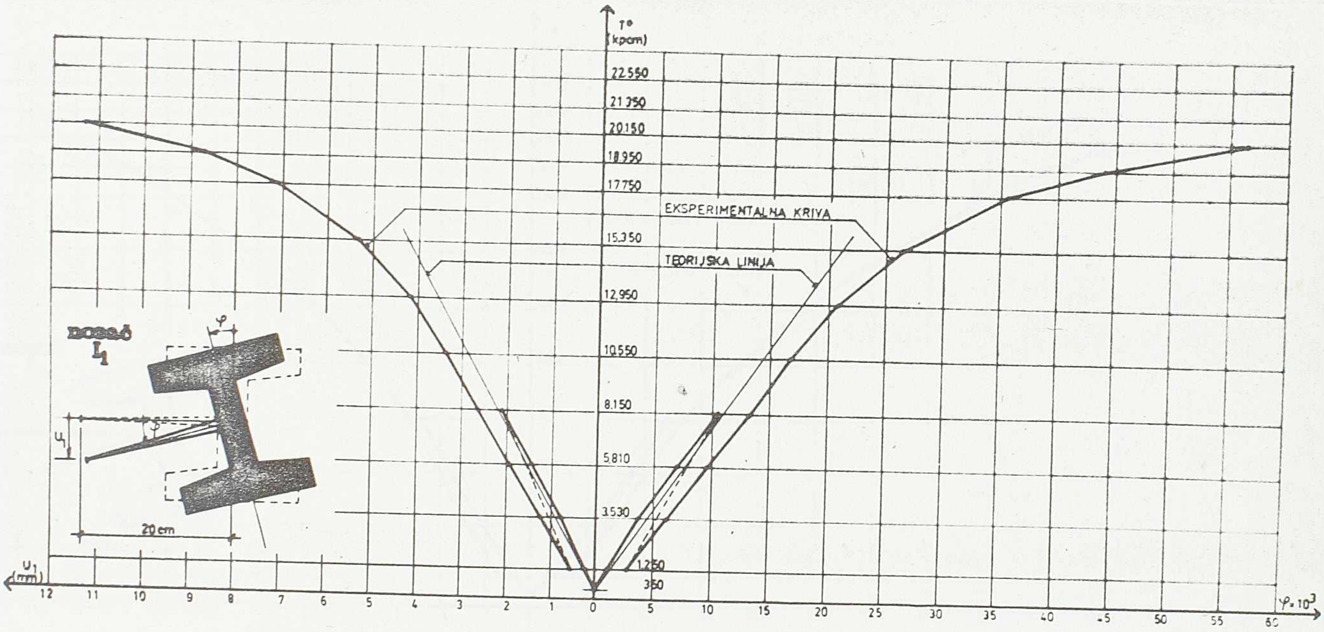
Tabela 1-XIV sadrži prikaz izmerenih i teorijskih vrednosti dilatacija u tačkama "1" i "6" preseka sa koordinatom z=20 cm, dok se u tabeli 1-XV daje pregled izmerenih i teorijskih veličina dilatacija dobijenih preko rozeta R_1, R_2 i R_3.

Pored ovih rezultata, u tabeli 1-XVI dajemo i prikaz izmerenih i teorijskih vrednosti dilatacija u pravcima osovina nosa-

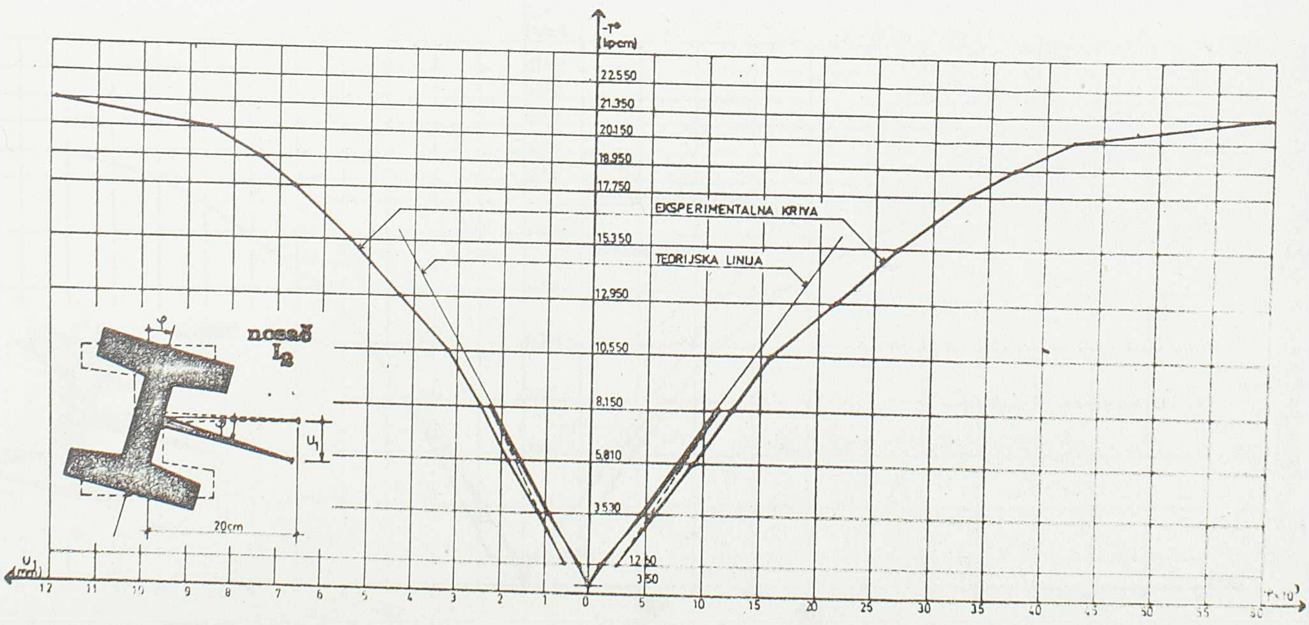
---

*) U ovom delu teksta izmerene vrednosti uglova obrtanja poprečnih preseka označene su simbolom φ .

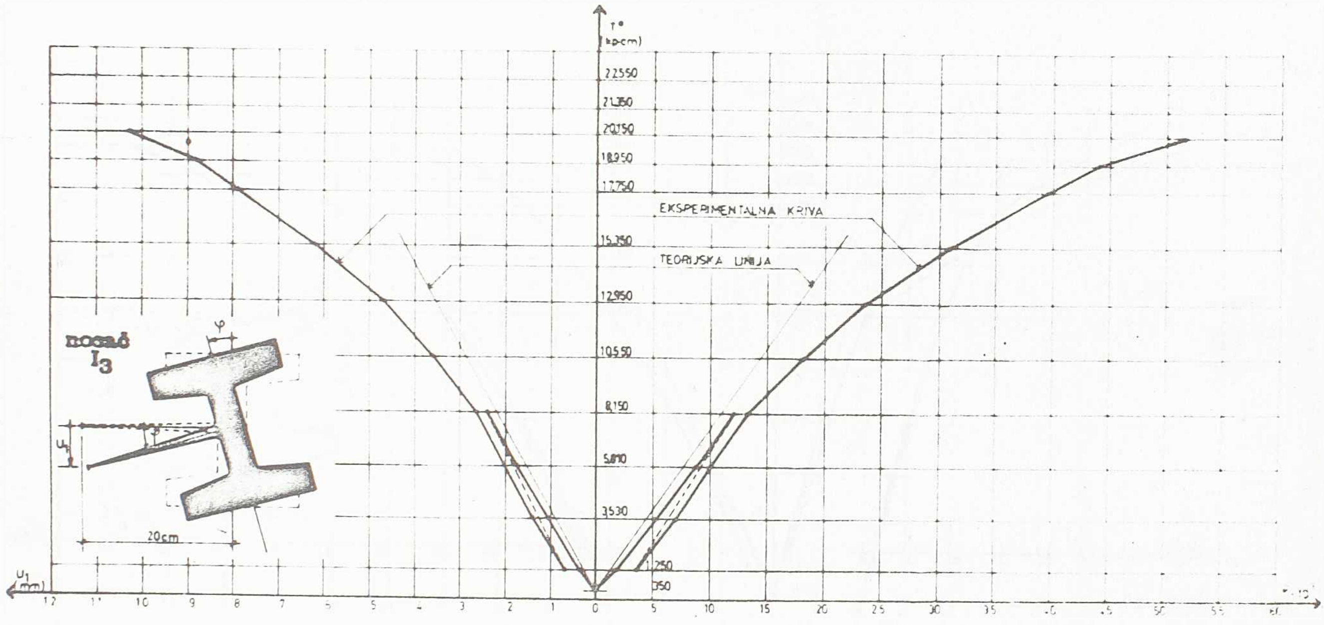
ča dobijenih preko mernih traka T_1 i pravaca (1) rozeta R_1. Kao i u svim prethodnim slučajevima, i ovde svi izmereni podaci is-



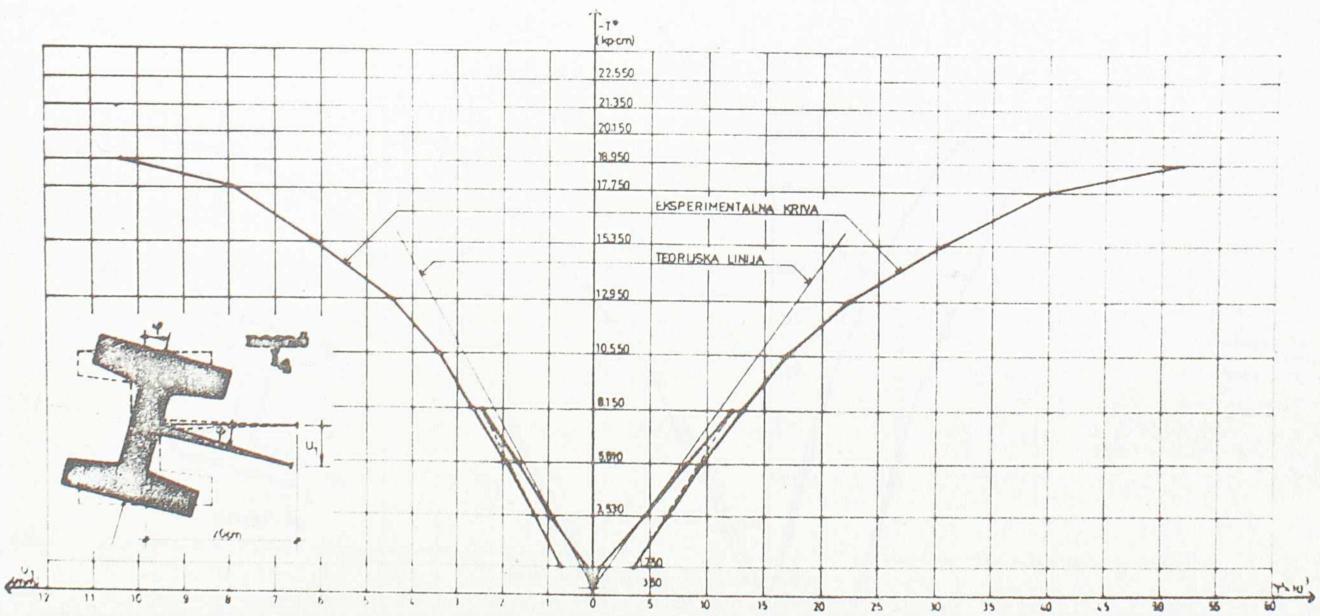
Sl. 1.23



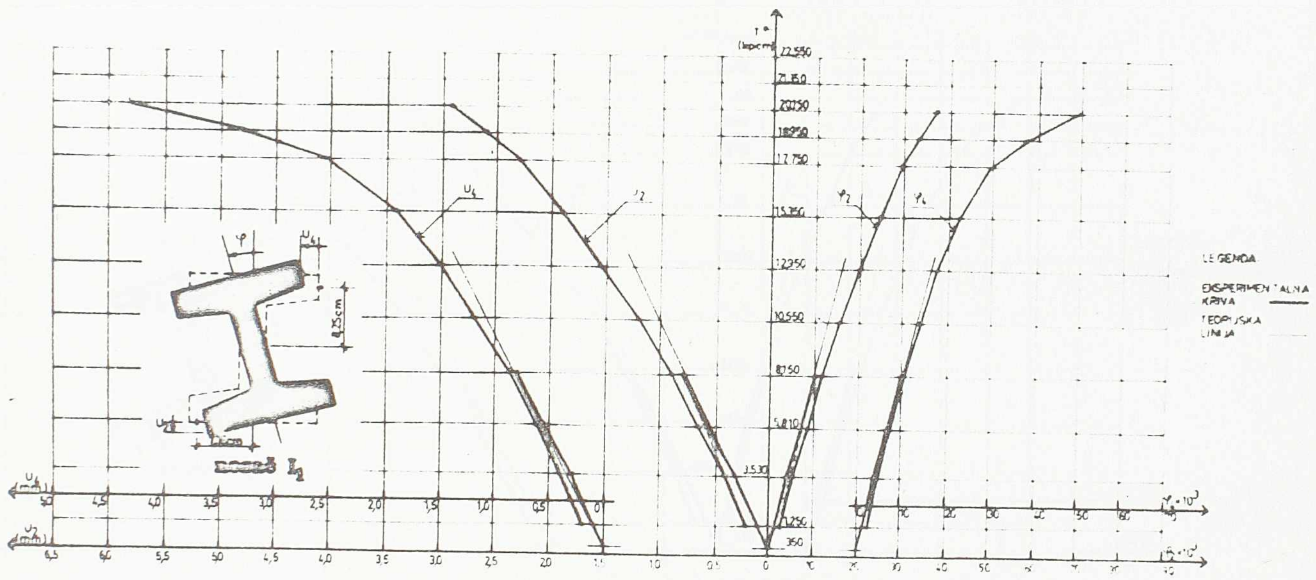
Sl. 1.24


T°
(kp·cm)
22.550
21.350
20.150
18.950
17.750
15.350
12.950
10.550
8.150
5.810
3.530
1.250
350
EKSPERIMENTALNA KRIVA
TEORIJSKA LINIJA
nosač
I_3
φ
u_1
20cm
u_1 (mm)
12
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60

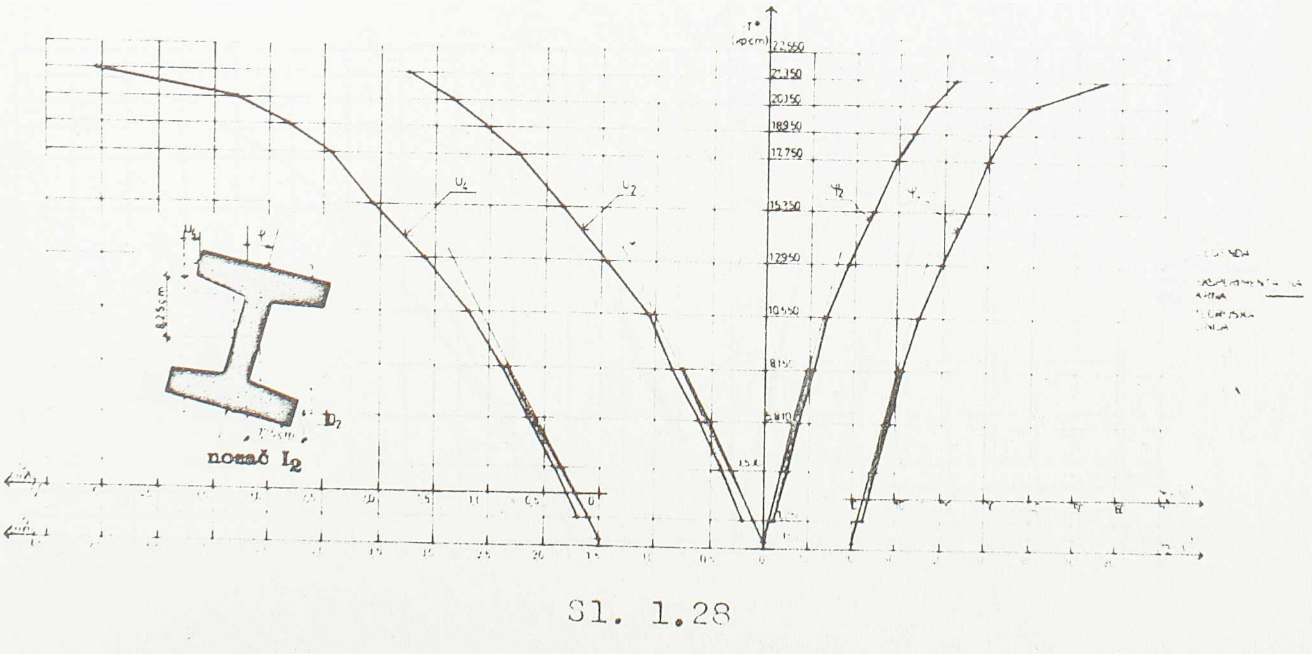
Sl. 1.25


-T°
(kp·cm)
22.550
21.350
20.150
18.950
17.750
15.350
12.950
10.550
8.150
5.810
3.530
1.250
350
EKSPERIMENTALNA KRIVA
TEORIJSKA LINIJA
nosač
I_4
φ
u_1
u_1 (mm)
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60

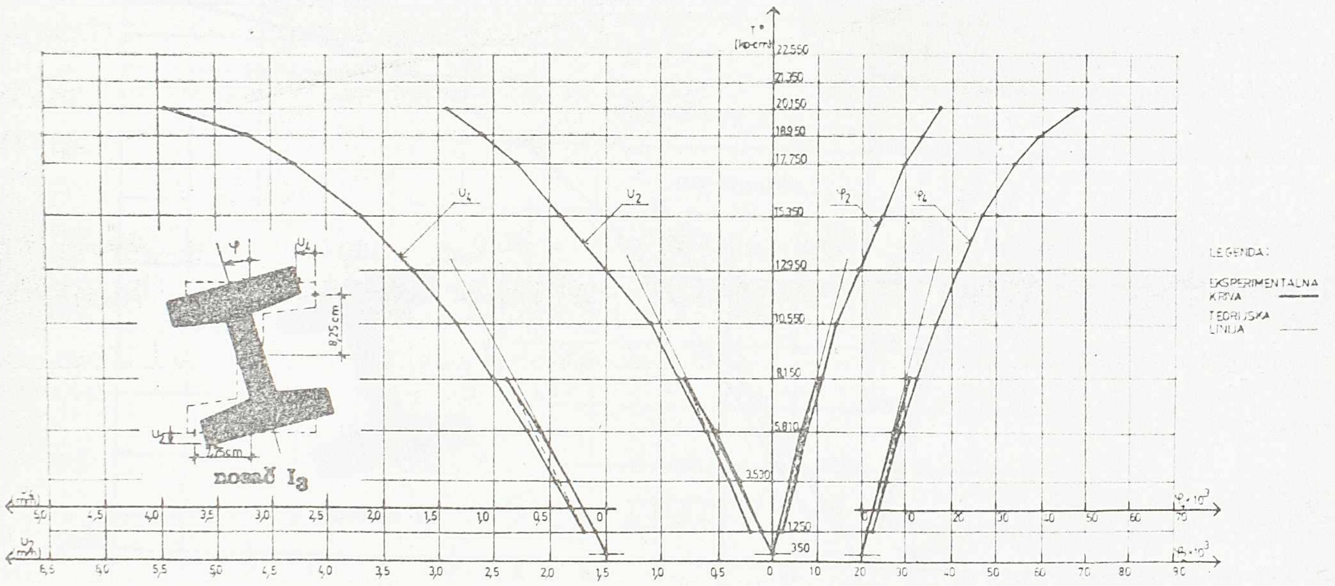
Sl. 1.26


LEGENDA
EKSPERIMENTALNA KRIVA
TEORIJSKA LINIJA
nosač I1

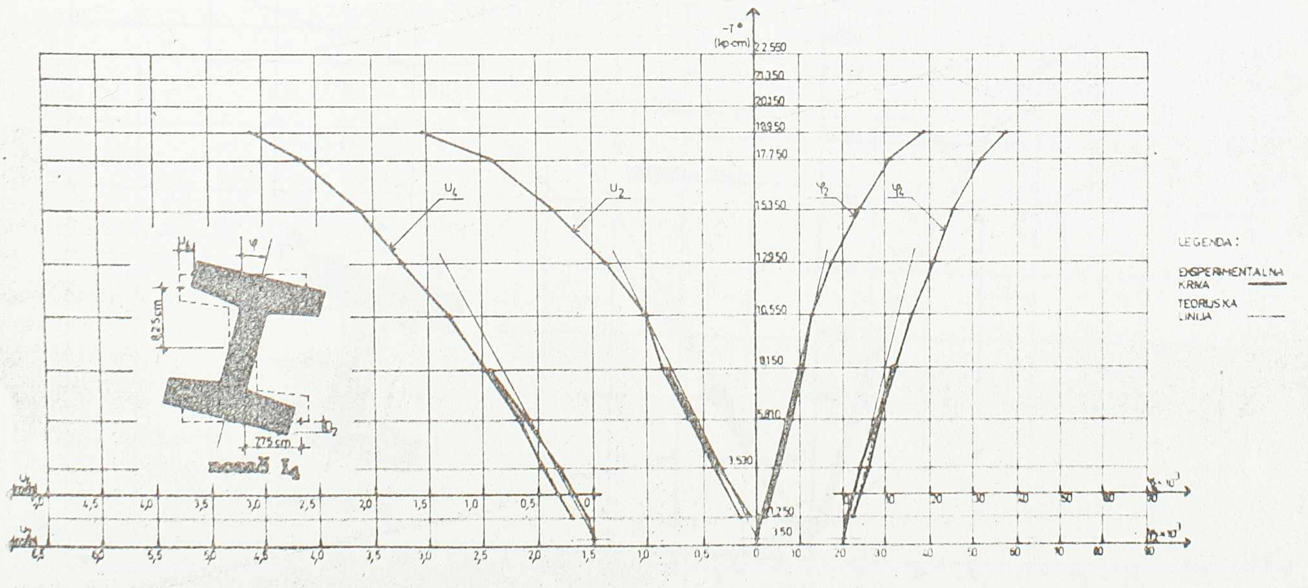
Sl. 1.27


nosač I2

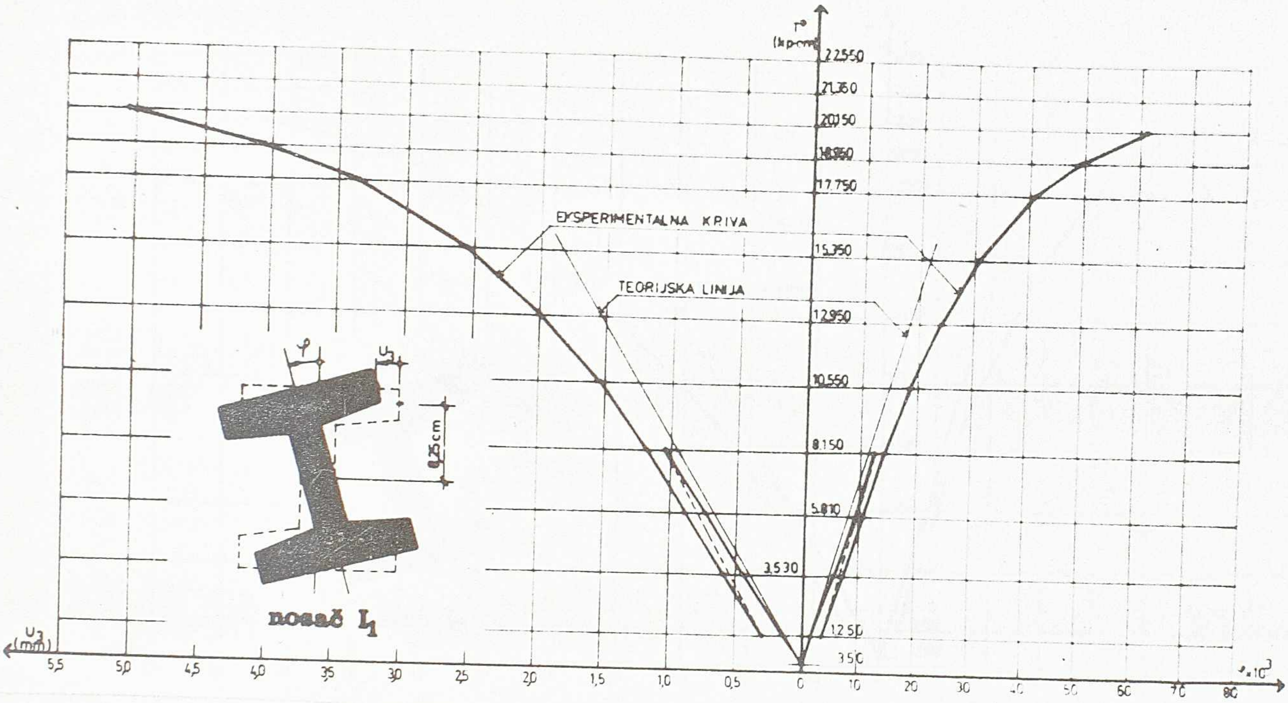
Sl. 1.28


LEGENDA:
EKSPERIMENTALNA KRIVA
TEORIJSKA LINIJA
nosač I_3

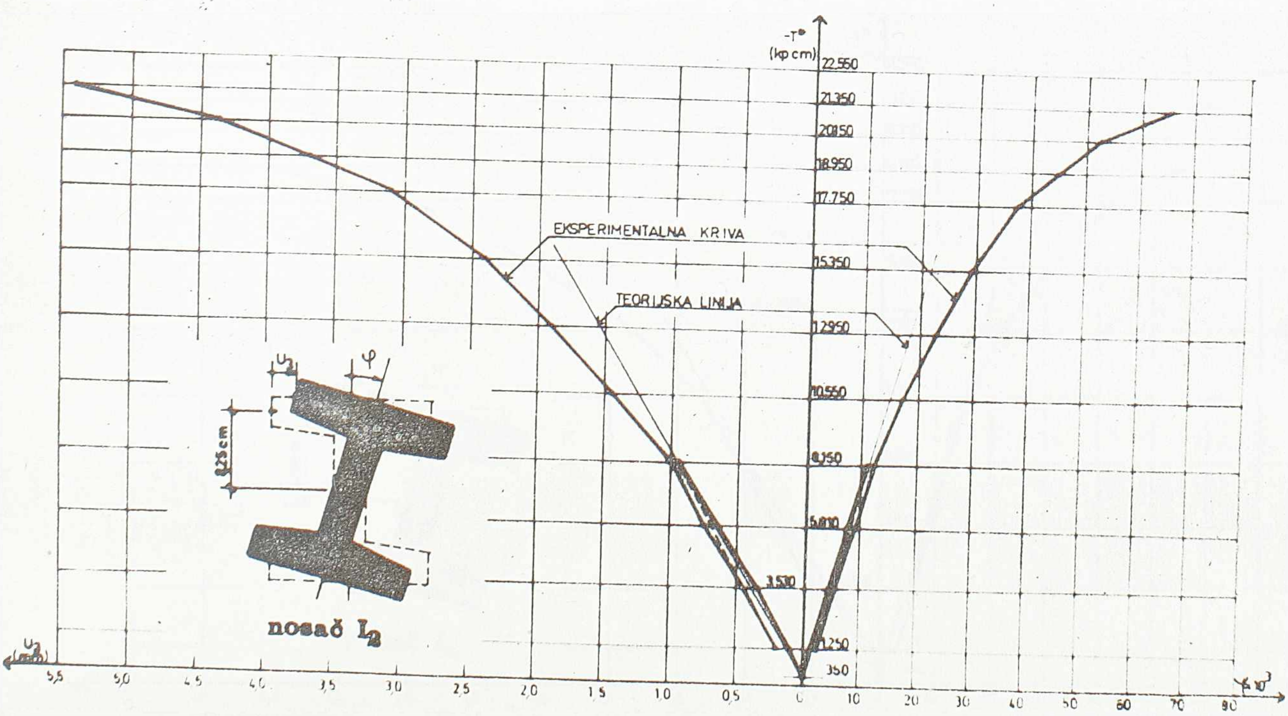
Sl. 1.29


LEGENDA:
EKSPERIMENTALNA KRIVA
TEORIJSKA LINIJA
nosač I_3

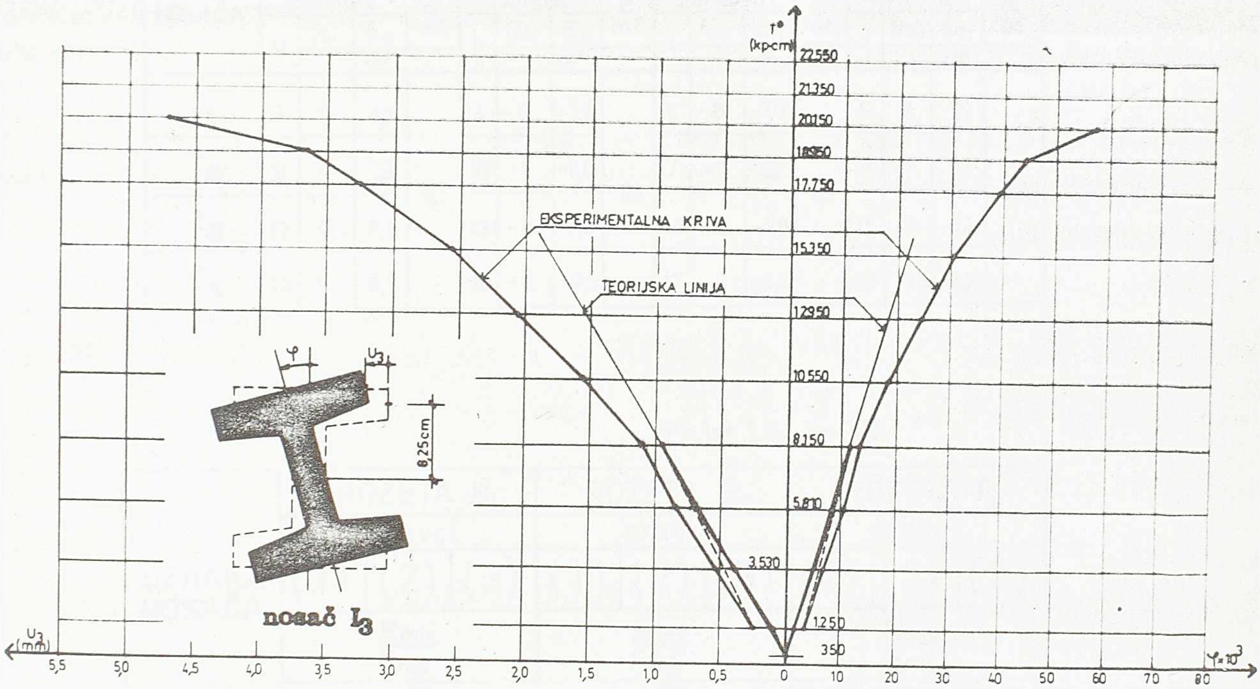
Sl. 1.30


EKSPERIMENTALNA KRIVA
TEORIJSKA LINIJA
nosač I1
8,25 cm
22.550
21.350
20.150
18.950
17.750
15.350
12.950
10.550
8.150
5.810
3.530
1.250
350
5,5
5,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
10
20
30
50
60
70
80

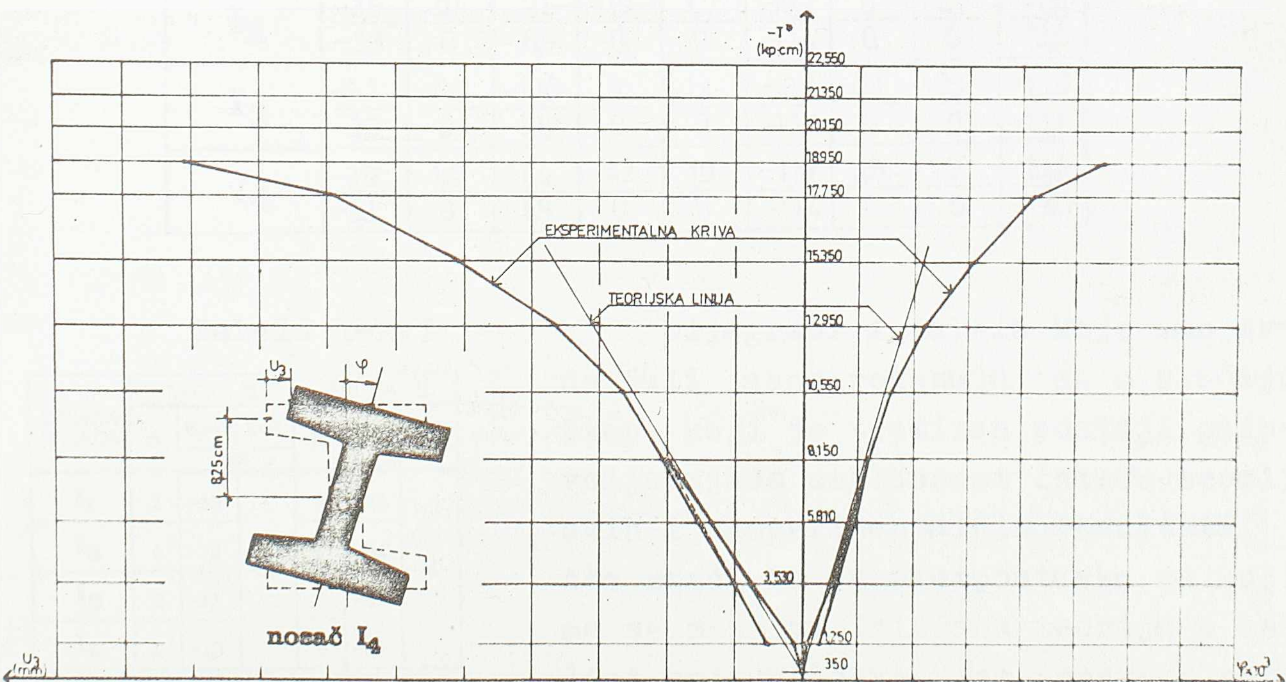
Sl. 1.31


-T°
(kp cm)
EKSPERIMENTALNA KRIVA
TEORIJSKA LINIJA
nosač I2
8,25cm
22.550
21.350
20.150
18.950
17.750
15.350
12.950
10.550
8.150
5.810
3.530
1.250
350
5,5
5,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
10
20
30
40
50
60
70
80

Sl. 1.32


T°
(kpcm)
22.550
21.350
20.150
18.950
17.750
15.350
12.950
10.550
8.150
5.810
3.530
1.250
350
EKSPERIMENTALNA KRIVA
TEORIJSKA LINIJA
φ
U_3
8,25cm
nosač I_3
U_3
(mm)
5,5
5,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
10
20
30
40
50
60
70
80
$\varphi \times 10^3$

Sl. 1.33


-T°
(kp cm)
22.550
21.350
20.150
18.950
17.750
15.350
12.950
10.550
8.150
5.810
3.530
1.250
350
EKSPERIMENTALNA KRIVA
TEORIJSKA LINIJA
U_3
φ
825cm
nosač I_4
U_3
(mm)
5,5
5,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
10
20
30
40
50
60
70
80
$\varphi \times 10^3$

Sl. 1.34

ključivo važe za slučaj $\Delta T^{*} = \pm 7800$ kpcm.

Tabela 1-XIV

OZNAKA NOSAČA	merna traka T_2 i deformetri D_a				merna traka T_3 i deformetri D_b				merna traka T_4 i deformetri D_c				merna traka T_5 i deformetri D_d			
	izmerene vrednosti			ε rač.	izmerene vrednosti			ε rač.	izmerene vrednosti			ε rač.	izmerene vrednosti			ε rač.
	a	ε_{Da}	ε_{T2}		b	ε_{Db}	ε_{T3}		c	ε_{Dc}	ε_{T4}		d	ε_{Dd}	ε_{T5}	
		$\times 10^5$				$\times 10^5$				$\times 10^5$				$\times 10^5$		
I_1	2	9	8,2	8,1	3	-9	-7,8	-8,1	4	-8	-7,9	-8,1	5	8	7,9	8,1
I_2	9	9	7,9		10	-8	-8,0		7	-9	-8,1		8	9	8,1	
I_3	12	9	8,4		13	-8	-8,0		14	-8	-7,8		15	8	7,4	
I_4	19	9	8,1		20	-8	-7,6		17	-9	-8,2		18	9	8,2	

Tabela 1-XV

OZNAKA NOSAČA	ROZETA R_1			ROZETA R_2			ROZETA R_3		
	pravci			pravci			pravci		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
	$\varepsilon_{izm.}$ / $\varepsilon_{rač.}$ $\times 10^5$			$\varepsilon_{izm.}$ / $\varepsilon_{rač.}$ $\times 10^5$			$\varepsilon_{izm.}$ / $\varepsilon_{rač.}$ $\times 10^5$		
I_1	-3,9 / -3,3	0,8 / 0	-10,1 / -10,2	1,1 / 0	-0,7 / 0	8,6 / 9,4	po	ne sto	ji
I_2	-3,5 / -3,3	1,0 / 0	7,1 / 6,9	-0,9 / 0	1,7 / 0	-10,2 / -11,4	0 / 0	0,7 / 0	11,8 / 13,0
I_3	-3,1 / -3,3	-0,2 / 0	-10,0 / -10,2	0 / 0	1,4 / 0	-13,0 / -11,4	-0,1 / 0	-0,1 / 0	-13,0 / -13,1
I_4	-3,9 / -3,3	1,4 / 0	6,4 / 6,9	-1,2 / 0	1,0 / 0	-11,9 / -11,4	0,8 / 0	0 / 0	13,6 / 13,0

Tabela 1-XVI

OZNAKA NOSAČA	TAČKA a.			TAČKA b.		
	a.	$\varepsilon_{izm.}$	$\varepsilon_{rač.}$	b.	$\varepsilon_{izm.}$	$\varepsilon_{rač.}$
		$\times 10^5$			$\times 10^5$	
I_1	2	-3,9	-3,3	3	-6,2	-6,0
I_2	4	-3,5		5	-6,4	
I_3	2	-3,1		3	-5,9	
I_4	4	-3,9		5	-6,2	

Dijagrami i tabele koje smo ovde dali jasno pokazuju da u slučaju štapa koji je tretiran postoji zadovoljavajuća saglasnost između teorijskih i eksperimentalnih rezultata, što znači da su pretpostavke na kojima se zasniva izložena teorija u celini prihvatljive. Bez ponovnog nabrajanja ovih pretpostavki navodimo sledeće zaključke koji su sa njima u neposrednoj vezi:

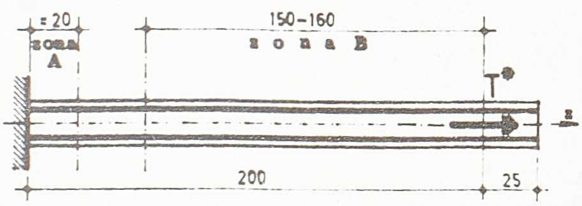
- Poprečni preseci sistema praktično se ne deformišu u svojej ravni. Ovo se može zaključiti na osnovu merenja uglova obrtanja ugibomerima U_2 i U_4;
- Pod uticajem spoljašnjeg momenta torzije, osim napona smicanja, u presecima sistema postoje i nezanemarljivi normalni naponi. Ovaj zaključak proizilazi u prvom redu na osnovu merenja dilatacija u tačkama "1" i "6" poprečnog preseka;
- U slučaju preseka kod kojih postoji odnos 1/5>d/b>1/10 nije opravdana pretpostavka o ravnomernom rasporedu napona σ_z po debljinama zidova. U ovakvim slučajevima normalni naponi nisu raspoređjeni ravnomerno, već se menjaju linearno. Ovu činjenicu u dovoljnoj meri potvrdjuju vrednosti prikazane u tabeli 1-XVI;
- Pošto rezultati merenja dilatacija u tri pravca preko rozeta R_1, R_2 i R_3 sa dovoljnom tačnošću odgovaraju računskim vrednostima, proizilazi da su, osim pretpostavki u vezi rasporeda normalnih napona, i pretpostavke vezane za karakter napona smicanja takodje na mestu.

2. TEORIJSKA I EKSPERIMENTALNA ANALIZA GRANIČNE NOSIVOSTI PREDNAPREGNUTOG TANKOZIDNOG ŠTAPA I PRESEKA

2.1. Teorijska razmatranja

Predmet ove analize biće sistem koji je sa pozicija teorije elastičnosti tretiran kako teoretski, tako i eksperimentalno, u poglavlju 1.7.

Analizom posmatranog sistema pod dejstvom nepromenljive sile prednaprezanja i torzionih momenata T^* koji su dovoljno manji od neke vrednosti T^*_L, definisane kao granična nosivost, može se zaključiti da duž osovine z, obzirom na naponska stanja preseka, postoje dve karakteristične zone (sl. 2.1). U zoni A, koja je relativno kratka (približno 20 cm), glavni naponi zatezanja su srazmerno mali, dok su naponi pritiska veliki i po pravcima i intenzitetima vrlo bliski vrednostima normalnih napona $\sigma_z = \sigma_{bo}$. Ovo je logična posledica malih veličina napona $\tau_{zs} = \tau_{sbo} + \tau_{wbo}$, pa se prilikom razmatranja granične nosivosti uticaj ovih napona slobodno može anulirati. Saglasno tome, može se smatrati da lomovi svih preseka koji pripadaju zoni A nastupaju isključivo pod dejstvom normalnih napona, što na prvom mestu važi za presek z=0 u kome su naponi σ_z najveći.



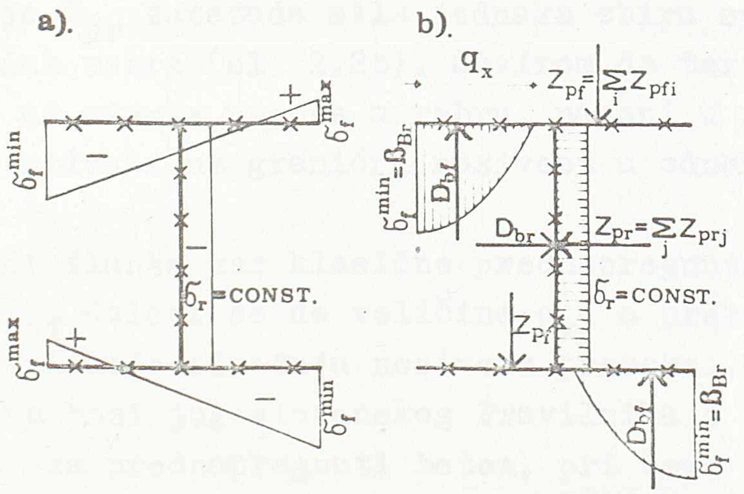
Sl. 2.1

Zona B, pak, predstavlja područje u kome se javljaju vrlo veliki kosi glavni naponi zatezanja, što je posledica značajnih napona τ_{zs}, pri čemu su naponi pritiska mnogo manji od čvrstoće betona čak i onda, kada kosi glavni naponi zatezanja dostignu granicu koja odgovara čvrstoći betona na zatezanje. Imajući ovo u vidu može se zaključiti da u zoni B lomovi preseka mogu da nastupe usled kombinovanog delovanja napona τ_{zs} i σ_z, ili, tačnije rečeno, usled odgovarajućih glavnih napona zatezanja. Kako je u posmatranom slučaju uvek $\tau_{sbo} \gg \tau_{wbo}$, i kako su u posmatranoj zoni normalni naponi usled ograničene torzije zanemarljivi, proizilazi da će eventualni lom u ovoj zoni imati sve karakteristike loma centrično prednapregnutog štapa izloženog dejstvu Saint-Venant - ovog momenta torzije.

Na osnovu izloženog proizilazi zaključak da granično stanje posmatranog sistema može načelno da se realizuje na dva osnovna načina: (1) nastankom plastičnog zgloba u preseku z=0, pri čemu do loma dolazi kada normalni naponi dostignu granične vrednosti, i (2) pojavom plastičnog zgloba u okviru zone B pod uticajem torzionog momenta T_s i centrične sile prednaprezanja.

Ako se zanemari promena normalnih napona po debljini flanše, tj. ako se vodi računa samo o naponskom stanju u nivou srednje linije, dolazi se do sledećih zaključaka.

Pod rastućim torzionim opterećenjem flanše nosača u zoni A, ili tačnije u preseku z=0, trpeće sve veće normalne napone usled ograničene torzije, pa će u jednom momentu na delu flanše koji



Sl. 2.2

pri torziji trpi napone zatezanja, zbir napona od prednaprezanja i napona od torzije imati i pozitivnu vrednost (sl. 2.2a). Kada veličine ovih napona postanu jednake čvrstoći betona na zatezanje, flanše će početi da sudeluju u prenošenju opterećenja na isti način kao i klasični armirano- betonski elementi kod kojih su zategnute zone preseka betona isključene iz rada. Daljim povećanjem torzionog opterećenja unutrašnje sile u preseku će se neprekidno menjati, ali će uvek morati da budu ispunjeni uslovi ravnoteže koje u datom slučaju možemo da prikažemo na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
N &= \int_{F_p} \sigma dF + \int_{F_b} \sigma dF = 0, \\
M_x &= \int_{F_p} \sigma x dF + \int_{F_b} \sigma x dF = 0, \\
M_y &= \int_{F_p} \sigma y dF + \int_{F_b} \sigma y dF = 0, \\
M_\Omega &= \int \sigma \Omega dF + \int \sigma \Omega dF = M_{\Omega L} .
\end{aligned} \tag{2.1.1}
$$

Na osnovu ovih relacija dobijaju se zavisnosti

$$
\begin{aligned}
D_{bf} &= Z_{pf} , \\
D_{br} &= Z_{pr} ,
\end{aligned} \tag{2.1.2}
$$

u kojima D_{bf} predstavlja silu pritiska u betonu koja odgovara flanšama preseka, Z_{pf} zatežuću silu koja je rezultanta svih sila u čeličnim elementima jedne flanše, D_{br} silu pritiska u betonu rebra, dok je Z_{pr} zatežuća sila jednaka zbiru svih sila u čeličnim elementima rebra (sl. 2.2b). Obzirom da torziono opterećenje ne utiče na stanje napona u rebru, naponi u njemu se neće menjati i neće uticati na graničnu nosivost u odnosu na momenat T^*.

Tretirajući flanše kao klasične prednapregnute elemente, iz relacije $D_{bf} = Z_{pf}$ dolazi se do veličine q_x, a preko nje i do svih ostalih vrednosti koje određuju nosivost preseka. Ovu nosivost ćemo odrediti na bazi jugoslovenskog Pravilnika o tehničkim merama i uslovima za prednapregnuti beton, pri čemu ćemo kao RD čelika usvojiti dijagram idealnog elasto-plastičnog materijala sa granicom tečenja $\sigma_{vi} = \sigma_{0,2}$, dok ćemo RD betona usvojiti saglasno odredbama Pravilnika. Pored navedenog, u daljem ćemo operisati i sa sledećim brojnim vrednostima:

$\beta_K = 0,92 \cdot 550 \cong 500$ kp/cm^2 (videti poglavlje 1.7.),
$\beta_{Br} = 0,63 \cdot 500 = 315$ kp/cm^2,
$E_p = 2000000$ kp/cm^2,
$E_b = 320000$ kp/cm^2,
$\sigma_{0,2} = 18000$ kp/cm^2,
$\sigma_{k\infty} = 10500$ kp/cm^2,
$\sigma_{b\infty} = 75,39$ kp/cm^2.

Obzirom na granicu $\varepsilon_B = 3,5‰$, kao i na vrednost

$$\varepsilon_{K0\infty} = \frac{1}{2000000}\left(10500 + \frac{2000000}{320000}\cdot 75,39\right) = 5,486\ 10^{-3},$$

može se pokazati da se u našem slučaju radi o tzv. lomu preko betona i da je pri lomu preseka $\Delta\varepsilon_k = 3,850\ 10^{-3}$, a

$$q_x = 7,50 \text{ cm}.$$

Na bazi poznatih geometrijskih karakteristika preseka, kao i korišćenjem sračunatih vrednosti, mogu se sada odrediti sile D_{bf} i Z_{pfi} (sl. 2.2b), pa se putem poslednjeg od uslova (2.1.1) dobija da je

$$M_{\Omega L} = -733769 \text{ kpcm}^2.$$

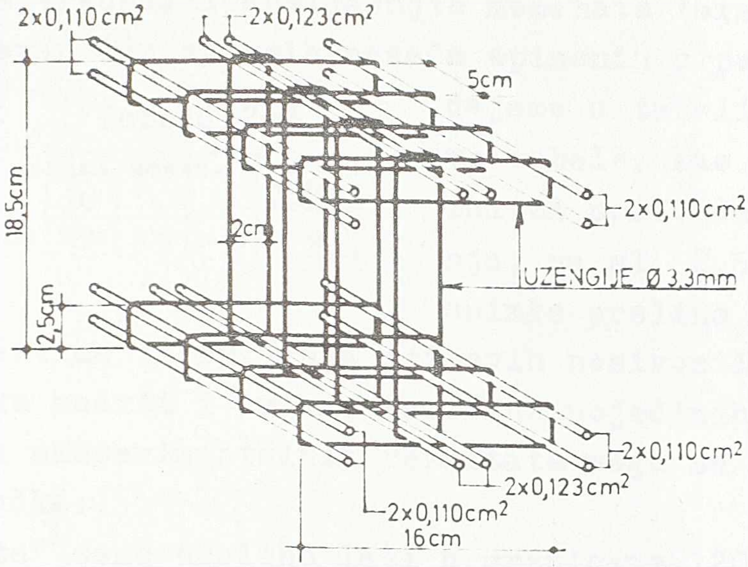
Lom sistema kao posledica pojave plastičnog zgloba u zoni B, kao što smo već rekli, može se tretirati kao lom centrično prednapregnutog štapa izloženog dejstvu Saint-Venant - ovog momenta torzije. Pošto u našem slučaju do loma dolazi pri kosim glavnim naponima zatezanja koji premašuju zateznu čvrstoću betona, proizilazi da granično stanje sistema nastupa u momentu iscrpljenja nosivosti armature. Obzirom na literaturu /56/ i /110/, granična nosivost se u ovakvim slučajevima određuje ili na bazi uslova plastičnosti u podužnoj armaturi ili na bazi uslova plastičnosti u poprečnoj armaturi - uzengijama. Ako kao fizičko - matematički model za analizu konkretnog problema usvojimo prostornu rešetku u kojoj su zategnuti elementi raspoređeni saglasno sl. 2.3, primenom izraza iz navedene literature dobija se sledeće:

- za slučaj kada naponi zatezanja u podužnoj armaturi zadovoljavaju uslov plastičnosti:

$$T_{SL}^{POD.} = 2\cdot\frac{2\cdot 2,5\cdot 16\cdot 0,440\cdot 18000}{37}\cdot tg\alpha_1 + \frac{2\cdot 2\cdot 18,5\cdot 0,492\cdot 18000}{41}\cdot tg\alpha_2 = 34249\, tg\alpha_1 + 15984\, tg\alpha_2;$$

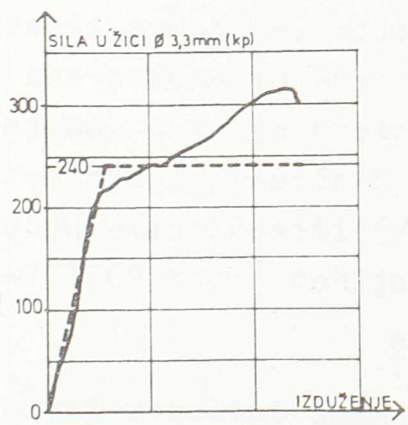
- za slučaj kada naponi zatezanja u poprečnoj armaturi zadovoljavaju uslov plastičnosti:

$$T_{SL}^{POP.} = 2\cdot\frac{2\cdot 2,5\cdot 16\cdot 240}{5\, tg\alpha_1} + \frac{2\cdot 2\cdot 18,5\cdot 240}{5\, tg\alpha_2} = \frac{7680}{tg\alpha_1} + \frac{3552}{tg\alpha_2}.$$



Sl. 2.3

Kao što se vidi, u prvom slučaju smo sile koje definišu nosivost armature određivali na bazi napona $\sigma_{0,2}$, dok su odgovarajuće sile u uzengijama dobijene eksperimentalnim putem, direktnim merenjima na epruvetama preseka Ø 3,3 mm (sl. 2.4).



Sl. 2.4

Veličine α_1 i α_2 predstavljaju uglove koje prsline u flanšama, odnosno rebru, zaklapaju sa podužnom osovinom siatema. Vrednosti ovih uglova zavise od intenziteta sile prednaprezanja i načelno njihove vrednosti su uvek manje od 45°. Orijentaciono se može uzeti da pravci prslina u ovakvim slučajevima sa osovinom sistema zaklapaju uglove koji se kreću u granicama od 30° do 40°. Imajući u vidu da je kod predmetnog sistema sila prednaprezanja na flanše i rebro raspoređena približno proporcionalno odgovarajućim površinama, može se uzeti da je $\alpha_2 \approx \alpha_1 = \alpha$, pa dobijamo sledeće:

$$T_{sL}^{pod.} = 50233 \ tg\alpha \ (kpcm),$$

$$T_{sL}^{pop.} = \frac{11232}{tg\alpha} \ (kpcm).$$

2.2. Eksperimentalni rezultati

Apsolutne vrednosti spoljašnjih momenata torzije pri kojima je registrovan lom opitnih nosača opisanih u poglavlju 1.7. dajemo u tabeli 2-I. Pored ove tabele, kao još jedan rezultat sprovedenog ispitivanja, na sl. 2.5 prikazujemo i snimke prslina na nosačima načinjene u momentima iscrpljenja njihovih nosivosti. Osim rasporeda, ova slika sadrži i prikaz veličina pojedinih prslina (u mm).

Tabela 2-I

MOMENTI LOMA	OZNAKA NOSAČA				
${}_{abs}T_L^*$	I_1	I_2	I_3	I_4	srednja vrednost
(kp-cm)	21350	22550	21350	20150	21350

Na osnovu eksperimentalnih rezultata mogu se izvesti dva osnovna zaključka:

- "težište" zone prslina leži u granicama $120<z<160$, pa se sa dovoljnom tačnošću može uzeti da je plastični zglob u konkretnom slučaju određen koordinatom $z=140$ cm;
- prosečna vrednost ugla α iznosi oko $31,5^{\circ}$.

Ovi zaključci vrlo jasno pokazuju da je lom nastupio usled kombinovanog delovanja sile prednaprezanja i torzionih momenata T_s, odnosno da je ovde reč o lomu nastalom u momentu iscrpljenja nosivosti armature, bilo podužne, bilo poprečne.

Ako pođemo od pretpostavke koja je u ovakvim slučajevima uobičajena, a to je pretpostavka da su odnosi između spoljašnjih opterećenja i presečnih sila u fazi loma sistema isti kao u području elastičnosti (/50/, /74/, /100/), na bazi vrednosti $M_{\Omega L}=-733769$ kpcm^2 dobija se da je

$$T_L^* = 30475 \text{ kpcm.} \qquad \text{(a)}$$

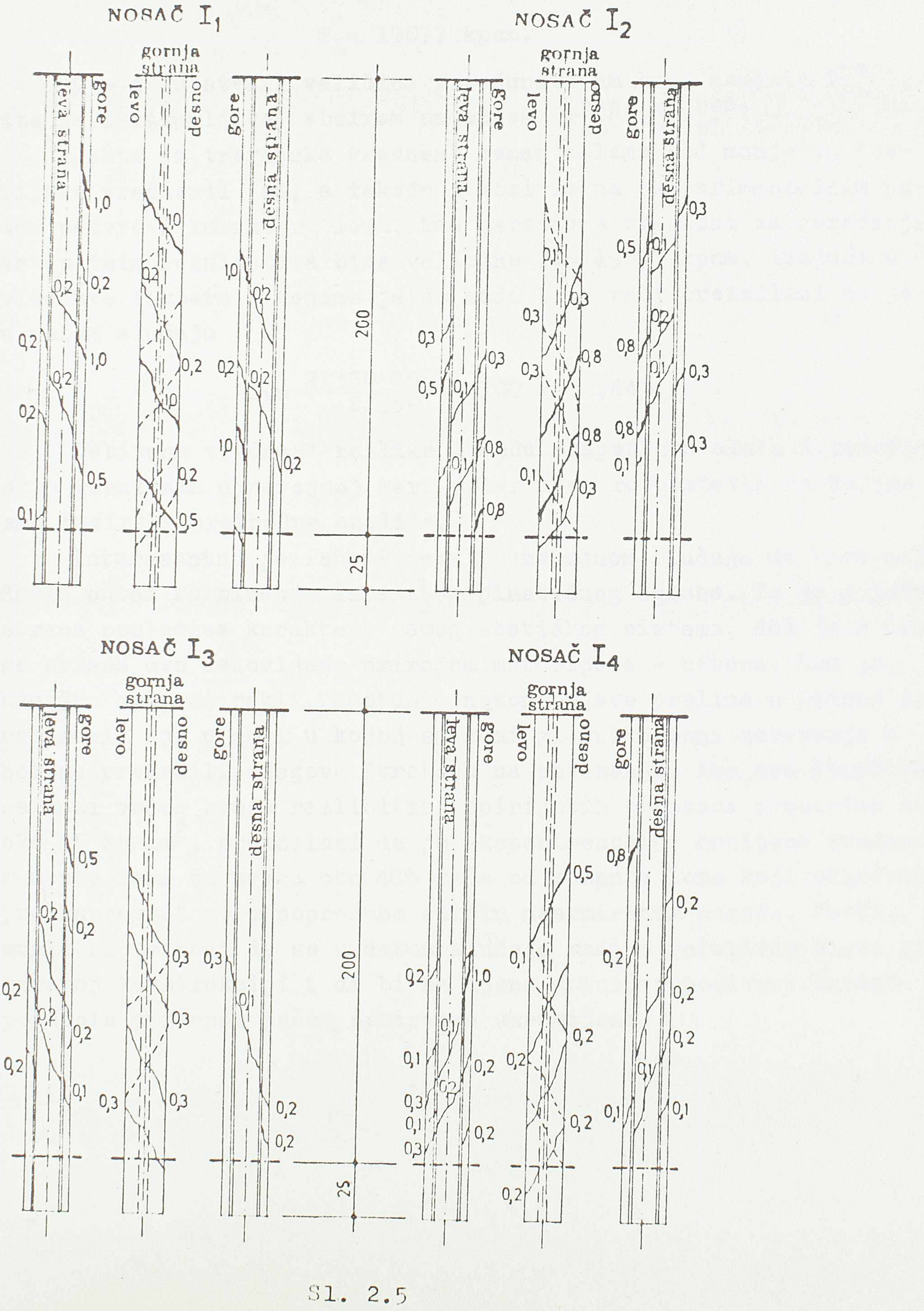
Ovaj rezultat samo potvrđuje zaključke izvedene na bazi eksperimentalnih podataka.

Ako usvojimo vrednost $\alpha=31,5^{\circ}$, možemo da napišemo sledeće:

$$T_{sL}^{pod.} = 30782 \text{ kpcm,}$$

$$T_{sL}^{pop.} = 18329 \text{ kpcm.}$$

Ukoliko sada kao koordinatu plastičnog zgloba usvojimo veličinu $z=140$ cm, korišćenjem napred formulisane pretpostavke doći ćemo do vrednosti


NOSAČ I_1
NOSAČ I_2
NOSAČ I_3
NOSAČ I_4
gornja strana
leva strana
gore
levo
desno
desna strana
200
25

Sl. 2.5

$$T_L^* = 19077 \text{ kpcm.} \qquad (b)$$

Ovo je u stvari veličina izračunata na bazi momenta $T_{sL}^{pop.}$, što je i razumljivo, obzirom na odnos $T_{sL}^{pop.} < T_{sL}^{pod.}$.

Pošto je teorijska vrednost momenta loma (b) manja od teorijske vrednosti (a), a takođe i obzirom na eksperimentalnim putem potvrđen karakter loma, kao merodavna vrednost za poređenje sa opitnim rezultatima biće veličina $T_L^* = 19077$ kpcm. Imajući u vidu sve faktore o kojima je do sada bilo reči proizilazi da je u našem slučaju

$$\triangle = \frac{21350-19077}{21350} \cdot 100 = 10,64\%.$$

Dobijena vrednost razlike između eksperimentalnih i teorijskih rezultata u dovojnoj meri potvrđuje pretpostavke na kojima smo bazirali prethodne analize.

Interesantno je istaći da u posmatranom slučaju do loma nije došlo putem formiranja izrazitog plastičnog zgloba. To je s jedne strane posledica karaktera samog statičkog sistema, dok je s druge strane ovo uslovljeno prirodom materijala - betona. Lom je, kao što smo već rekli, nastupio nakon pojave prslina u jednoj širokoj zoni, tj. u zoni u kojoj su kosi glavni naponi zatezanja u betonu premašili njegovu čvrstoću na zatezanje. Ako ovu čvrstoću na bazi većeg broja različitih empirijskih obrazaca procenimo na oko 35 kp/cm^2, proizilazi da je eksperimentalno dobijena vrednost momenta loma za svega oko 40% veća od momenta loma koji odgovara prednapregnutom, u poprečnom smislu nearmiranom nosaču. Znači, moglo bi se reći da se u datom slučaju radi o relativno slabo armiranoj konstrukciji i da bi se njena granična nosivost znatno povećala primenom jačeg armiranja uzengijama.

3. PONAŠANJE PREDNAPREGNUTIH TANKOZIDNIH ŠTAPOVA OTVORENIH PROFILA IZLOŽENIH DUGOTRAJNIM OPTEREĆENJIMA

3.1. Veze između napona i deformacija u betonu

Čak i pri srazmerno niskim nivoima naprezanja, ponašanje betona ne odgovara u potpunosti idealizovanoj shemi Hooke - ovog elastičnog tela, pošto se u slučaju dejstva dugotrajnih opterećenja kod njega, osim elastičnih deformacija, zapaža i pojava tzv. viskoznog tečenja. Ove deformacije, koje između ostalog zavise i od vremena, obično se definišu kao deformacije puženja, ili jednostavno, kao tečenje betona. Kao i elastične, i deformacije puženja se pri dovoljno malim naponima mogu tretirati kao linearne funkcije opterećenja.

Mada granica između linearnog i nelinearnog područja u dijagramu deformacija-napon još uvek nije potpuno precizno utvrđena, sa dovoljnom tačnošću se može uzeti da proporcionalnost između napona i deformacija u betonu postoji sve dok naprezanja ne prelaze granicu od $(0,3-0,5)\beta_{pr}$. Sa β_{pr} ovde je označena čvrstoća betona koja se dobija ispitivanjima na prizmatičnim uzorcima. Ovaj stav u prvom redu važi za tzv. teške betone visokih čvrstoća kod kojih u navedenom području nema bitnijih razlika između tangentnog i sekantnog modula elastičnosti.

Osim deformacija tečenja, beton ima još jednu osobinu koja ga takođe isključuje iz reda materijala koji dosledno slede Hooke-ov zakon. Reč je o svojstvu betona koje se manifestuje u vidu smanjivanja zapremina betonskih elemenata tokom vremena, nezavisno od veličina opterećenja kojima su izloženi. Ova osobina poznata je pod imenom skupljanje betona.

Problemima ponašanja betona u svetlu izloženih činjenica bavi se linearna teorija tečenja (puženja) betona. Po svom karakteru to je fenomenološka disciplina, odnosno disciplina koja se bazira na objektivnim eksperimentalnim podacima, bez dubljeg ulaženja u fizičko-hemijsku suštinu samih pojava. Razloge za ovakav pristup problemima treba tražiti na prvom mestu u tome, što još ni do danas nisu u potpunosti osvetljene prirode procesa skupljanja i puženja. Međutim, i ovako koncipirana, linearna teorija tečenja je u stanju da pruži odgovore na mnoga pitanja reološke prirode betona, pa stoga predstavlja vrlo značajnu disciplinu u sklopu njegove reologije.

Najopštija veza između napona i deformacija u betonu za slučaj jednoosnog naprezanja, a pod pretpostavkom linearne zavisnosti između napona i deformacija, je relacija

$$\varepsilon_b(t)=\frac{\sigma_b(t_o)}{E_b(t_o)}+\sigma_b(t_o)\cdot C(t,t_o)+\int_{t_o}^{t}\frac{\partial\sigma_b(\tau_t)}{\partial\tau_t}\left[\frac{1}{E_b(\tau_t)}+C(t,\tau_t)\right]d\tau_t+\varepsilon_s(t). \quad (3.1.1)$$

$\varepsilon_b(t)$, $\sigma_b(t)$ i $E_b(t)$ su respektivno dilatacija, napon i modul elastičnosti betona u vremenu t, t_o je starost betona u momentu apliciranja opterećenja, dok je $\varepsilon_s(t)$ dilatacija usled skupljanja betona. $C(t,\tau_t)$ je tzv. mera tečenja koja predstavlja deformaciju tečenja (puženja) betona u vremenu t prouzrokovanu jediničnim naponom apliciranim u vremenu τ_t. Kao što se vidi, τ_t se može shvatiti i kao proizvoljno vreme u intervalu od t_o do t.

Veza (3.1.1) može se formalno-matematički prikazati i u obliku

$$\varepsilon_b(t)=\frac{1}{E_b(t)}\left[\sigma_b(t)+\int_{t_o}^{t}\sigma_b(\tau_t)\,J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]+\varepsilon_s(t), \quad (3.1.2)$$

gde funkcija

$$J(t,\tau_t)=-\frac{\partial}{\partial\tau_t}\left[\frac{1}{E_b(\tau_t)}+C(t,\tau_t)\right]E_b(t) \quad (3.1.3)$$

predstavlja tzv. jezgro integralne jednačine (3.1.2).

Konkretna rešenja na bazi izraza (3.1.2) mogu se dobiti samo pod uslovom da su poznate funkcije $\varepsilon_s(t)$, $E_b(t)$ i $C(t,\tau_t)$. Ove funkcije se u opštem slučaju određuju eksperimentalnim putem i prikazuju matematičkim izrazima koji optimalno zadovoljavaju eksperimentalne podatke. Tako na primer, dilatacija usled skupljanja betona najčešće se predstavlja relacijom

$$\varepsilon_s(t)=\varepsilon_s(1-\beta\cdot e^{-\alpha_s t}), \quad (3.1.4)$$

dok se modul elastičnosti u najvećem broju slučajeva definiše funkcijom

$$E_b(t)=E_b(1-\beta\cdot e^{-\alpha t}). \qquad (3.1.5)$$

Praktična vrednost relacije (3.1.2) najviše zavisi od načina definisanja mere tečenja $C(t,\tau_t)$ koja figuriše u jezgru $J(t,\tau_t)$ date integralne jednačine. U zavisnosti od načina izražavanja ove funkcije, danas postoji nekoliko osnovnih varijanti linearne teorije tečenja betona, pri čemu tzv. nasledna teorija starenja, sa funkcijom $C(t,\tau_t)$ koju je predložio N. H. Arutjunjan (/4/, /5/), kao najopštija, najbolje opisuje fenomen tečenja (puženja). Međutim, ni ova teorija nije potpuno savršena, a kao njen najveći nedostatak uzima se nedovoljna saglasnost između teorijskih i eksperimentalnih vrednosti deformacija u vremenskom dijapazonu u kome se betoni definišu kao "mladi". Naime, funkcije $C(t,\tau_t)$ prema Arutjunjanu, određene izrazom

$$C(t,\tau_t)=\varphi(\tau_t)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau_t)}\right]=\left(C_0+\frac{A_1}{\tau_t}\right)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau_t)}\right], \qquad (3.1.6)$$

nemaju dovoljno strme početne delove, što je u opštem slučaju glavna karakteristika fenomena tečenja.

Imajući u vidu nedostatke Arutjunjanovog izraza za meru tečenja $C(t,\tau_t)$, čitav niz autora je dao svoje predloge za ovu funkciju (/2/, /6/, /37/). Najznačajniji u ovom smislu, po našem mišljenju, je svakako predlog S. V. Aleksandrovskog /2/ prema kome se mera tečenja izražava u obliku

$$C(t,\tau_t)=\Psi(\tau_t)-\Psi(t)\left(\frac{e^{\gamma\tau_t}-A_2}{e^{\gamma t}-A_2}\right)+\Delta(\tau_t)\left[1-e^{\alpha(t-\tau_t)}\right], \qquad (3.1.7)$$

$$\alpha \gg \gamma > 0, \quad 0 \leq A_2 \leq 1.$$

α, γ, i A_2 su konstante koje se određuju eksperimentalnim putem, dok su $\Delta(\tau_t)$ i $\Psi(\tau_t)$, odnosno $\Psi(t)$, izvesne brzoopadajuće funkcije, slične funkciji $\varphi(\tau_t)$ koja figuriše u Arutjunjanovom izrazu za meru tečenja.

Osnovni kvalitet funkcije $C(t,\tau_t)$ definisane izrazom (3.1.7) svakako leži u činjenici da u datoj relaciji figuriše dovoljan broj parametara koji omogućavaju da se skoro u svim slučajevima ostvari potrebna saglasnost između teorijskih i eksperimentalnih rezultata. Međutim, ovaj izraz dozvoljava da se u zatvorenom obliku reši samo manji broj problema. Razlozi za ovo leže u tome, što se preko izraza (3.1.7) dolazi do vrlo složenih matematičkih zavisnosti, pa se stoga kod rešavanja integro-diferencijalnih jednačina, na koje se najčešće svode svi praktični problemi, danas uglavnom koriste neke približne metode integracije. Ovo dozvoljava da se proračuni u opštem slučaju sprovode sa funkcijama koje najbolje zadovoljavaju eksperimentalne podatke, dok se potrebna tačnost ostvaruje izborom odgovarajućeg numeričkog postupka.

Postoji i mogućnost da se, zadržavajući oblik funkcije $C(t,\tau_t)$ onakav kakav se dobija eksperimentima, sama integralna veza između napona i deformacija (3.1.1) nekim pogodnim numeričkim postupkom svede na vezu algebarskog oblika. H Trost /104/ je na ovaj način uspeo da dođe do jednostavne, a istovremeno i do vrlo tačne veze između napona i deformacija u betonu. Prema radu P. Z. Bažanta i J. L. Najjara /6/, ova veza u mnogim slučajevima opisuje fenomen bolje nego neke integralne veze.

Mada integralne veze (3.1.1) i (3.1.2) važe samo za slučaj jednoosnog naponskog stanja, na osnovu njih se, korišćenjem analogije sa vezama teorije elastičnosti, mogu dobiti i veze naponi-deformacije za slučaj najsloženijeg naprezanja. Ako pretpostavimo da su u nekoj tački betonskog tela svi elementi tenzora napona i tenzora deformacije različiti od nule, i ako privremeno uzmemo da je $\varepsilon_s(t) = 0$, možemo da napišemo sledeće:

$$\varepsilon_x(t) = \frac{1}{E_b(t)}\left\{\sigma_x(t) - \nu_1(t)\left[\sigma_y(t) + \sigma_z(t)\right]\right\} -$$
$$-\int_{t_0}^{t}\left\{\sigma_x(\tau_t)\cdot\frac{\partial}{\partial\tau_t}\left[\frac{1}{E_b(\tau_t)} + C(t,\tau_t)\right] - \left[\sigma_y(\tau_t)+\sigma_z(\tau_t)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\tau_t}\left[\frac{\nu_1(\tau_t)}{E_b(\tau_t)} + \nu_2(t,\tau_t)C(t,\tau_t)\right]\right\}d\tau_t,$$

$$\varepsilon_y(t) = \frac{1}{E_b(t)}\left\{\sigma_y(t) - \nu_1(t)\left[\sigma_z(t) + \sigma_x(t)\right]\right\} - \qquad (3.1.8)$$
$$-\int_{t_0}^{t}\left\{\sigma_y(\tau_t)\cdot\frac{\partial}{\partial\tau_t}\left[\frac{1}{E_b(\tau_t)} + C(t,\tau_t)\right] - \left[\sigma_z(\tau_t)+\sigma_x(\tau_t)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\tau_t}\left[\frac{\nu_1(\tau_t)}{E_b(\tau_t)} + \nu_2(t,\tau_t)C(t,\tau_t)\right]\right\}d\tau_t,$$

$$\varepsilon_z(t) = \frac{1}{E_b(t)}\left\{\sigma_z(t) - \nu_1(t)\left[\sigma_x(t) + \sigma_y(t)\right]\right\} -$$
$$-\int_{t_0}^{t}\left\{\sigma_z(\tau_t)\cdot\frac{\partial}{\partial\tau_t}\cdot\left[\frac{\partial}{E_b(\tau_t)} + C(t,\tau_t)\right] - \left[\sigma_x(\tau_t)+\sigma_y(\tau_t)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\tau_t}\left[\frac{\nu_1(\tau_t)}{E_b(\tau_t)} + \nu_2(t,\tau_t)C(t,\tau_t)\right]\right\}d\tau_t.$$

Ovde smo iz razloga kratkoće pisanja izostavili indeks "b" (beton), koji po pravilu treba da stoji uz svaku naponsku i deformacijsku veličinu.

Pored veličina čija su nam značenja već poznata, u relacijama (3.1.8) javljaju se i dve nove funkcije. $\nu_1(t)$ je tzv. koeficijent elastične poprečne deformacije, dok je $\nu_2(t,\tau_t)$ koeficijent poprečne deformacije tečenja. Kao što se vidi, prvi je zavisan samo od vremena t (kao i modul $E_b(t)$), dok je drugi zavisan i od vremena τ_t, odnosno i od vremena u kome se beton izlaže naprezanjima (/2/, /4/, /5/).

Uz izvesne transformacije, integralne veze (3.1.8) mogu da se predstave i u obliku

$$E_b(t)\varepsilon_x(t)=\sigma_x(t)-\nu_1(t)\left[\sigma_y(t)+\sigma_z(t)\right]+\int_{t_0}^{t}\left\{\sigma_x(\tau_t)-\bar{\nu}_2(t,\tau_t)\left[\sigma_y(\tau_t)+\sigma_z(\tau_t)\right]\right\}J(t,\tau_t)\,d\tau_t,$$

$$E_b(t)\varepsilon_y(t)=\sigma_y(t)-\nu_1(t)\left[\sigma_z(t)+\sigma_x(t)\right]+\int_{t_0}^{t}\left\{\sigma_y(\tau_t)-\bar{\nu}_2(t,\tau_t)\left[\sigma_z(\tau_t)+\sigma_x(\tau_t)\right]\right\}J(t,\tau_t)\,d\tau_t, \qquad (3.1.9)$$

$$E_b(t)\cdot\varepsilon_z(t)=\sigma_z(t)-\nu_1(t)\left[\sigma_x(t)+\sigma_y(t)\right]+\int_{t_0}^{t}\left\{\sigma_z(\tau_t)-\bar{\nu}_2(t,\tau_t)\left[\sigma_x(\tau_t)+\sigma_y(\tau_t)\right]\right\}J(t,\tau_t)\,d\tau_t,$$

gde je

$$\bar{\nu}_2(t,\tau_t)=\frac{\dfrac{\partial}{\partial\tau_t}\left[\dfrac{\nu_1(\tau_t)}{E_b(\tau_t)}+\nu_2(t,\tau_t)\,C(t,\tau_t)\right]}{\dfrac{\partial}{\partial\tau_t}\left[\dfrac{1}{E_b(\tau_t)}+C(t,\tau_t)\right]}, \qquad (3.1.10)$$

dok veze između smičućih napona i odgovarajućih klizanja, prema /92/, možemo da prikažemo u obliku

$$G_b(t)\,\gamma_{xy}(t)=\tau_{xy}(t)+\int_{t_0}^{t}\tau_{xy}(\tau_t)\,J_\gamma(t,\tau_t)\,d\tau_t,$$

$$G_b(t)\,\gamma_{yz}(t)=\tau_{yz}(t)+\int_{t_0}^{t}\tau_{yz}(\tau_t)\,J_\gamma(t,\tau_t)\,d\tau_t, \qquad (3.1.11)$$

$$G_b(t)\,\gamma_{zx}(t)=\tau_{zx}(t)+\int_{t_0}^{t}\tau_{zx}(\tau_t)\,J_\gamma(t,\tau_t)\,d\tau_t.$$

Izrazi (3.1.9) i (3.1.11) čine kompletan sistem veza između napona i deformacija u betonu za slučaj troosnog naponskog stanja. Kao što se vidi, sve relacije imaju oblik integralnih jednačina u kojima figurišu funkcije $J(t,\tau_t)$ i $J_\gamma(t,\tau_t)$. Prvu finkciju smo definisali kao jezgro integralne jednačine (3.1.2) koja predstavlja vezu između napona i deformacija u betonu pri jednoosnom naprezanju, dok je funkcija $J_\gamma(t,\tau_t)$ po analogiji jezgro integralnih jednačina (3.1.11) ili tzv. nasledno jezgro za slučaj deformacije smicanja.

Može se pokazati da između funkcija $J(t,\tau_t)$ i $J_\gamma(t,\tau_t)$ postoji sledeća zavisnost

$$J_\gamma(t,\tau_t) = \frac{1-\bar{\nu}_2(t,\tau_t)}{1+\nu_1(t)} \cdot J(t,\tau_t). \tag{3.1.12}$$

Ako, pak, uzmemo u obzir izraz (3.1.10), dolazi se do sledeće vrednosti jezgra $J_\gamma(t,\tau_t)$:

$$J_\gamma(t,\tau_t) = -\frac{\partial}{\partial \tau_t}\left\{\frac{1}{G_b(\tau_t)} + 2\left[1+\nu_2(t,\tau_t)\right]C(t,\tau_t)\right\} G_b(t). \tag{3.1.13}$$

Upoređenjem relacija (3.1.3) i (3.1.13) lako se može zaključiti da je mera tečenja betona pri čistom smicanju definisana relacijom

$$\omega(t,\tau_t) = 2\left[1+\nu_2(t,\tau_t)\right] C(t,\tau_t). \tag{3.1.14}$$

Isto tako, analizom relacija (3.1.8) dolazi se do zaključka da se može definisati i mera tečenja za slučaj poprečne deformacije. Ova funkcija ima oblik

$$C'(t,\tau_t) = \nu_2(t,\tau_t) C(t,\tau_t). \tag{3.1.15}$$

3.2. Poprečne deformacije betona

I pored velikog zanačaja koji poprečne deformacije imaju u odnosu na linearnu teoriju tečenja betona u njenom najopštijem obliku, one ni do danas još nisu proučene u dovoljnoj meri. Teorijskih i eksperimentalnih radova posvećenih problemima poprečnog deformisanja betona pod uticajem kratkotrajnih i dugotrajnih opterećenja ima srazmerno malo, a rezultati ispitivanja pojedinih autora često su toliko različiti da je nemoguće formulisati neki opštiji stav. Razlozi za ovo, pored faktora uslovljenih nehomogenošću strukture betona, leže svakako i u tome što se merenja najčešće sprovode na relativno malim opitnim telima, pa se male deformacijske veličine registruju putem nedovoljno osetljivih instrumenata. Pored ovoga, veličine izmerenih podataka vrlo mnogo zavise i od usvojene metode eksperimentalnog ispitivanja, tako da je ovaj momenat često od prevashodnog značaja prilikom ocenjivanja vrednosti pojedinih rezultata.

I ako je pitanje poprečnih deformacija betona u celini još uvek nedovoljno obrađeno, ipak je veći broj onih radova koji tretiraju poprečne elastične deformacije betona, odnosno deformacije koje nastaju pod dejstvom kratkotrajnih opterećenja. Najčešće se u ovim radovima, po analogiji sa teorijom elastičnosti, funkcija $\nu_1(t)$ naziva Poisson - ovim koeficijentom betona.

Mada je promena Poisson - ovog koeficijenta u funkciji napona, a takođe i u funkciji vremena, relativno malo istraživana, postoji priličan stepen saglasnosti u pogledu zaključaka pojedinih autora. Kao prvo, može se smatrati da je potpuno dokazano da su i poprečne deformacije betona u području $0-(0,3-0,5)\beta_{pr}$ linearne u odnosu na odgovarajuće napone, što znači da je funkcija $\nu_1(t)$, kao odnos između poprečnih i podužnih deformacija, nezavisna od vrednosti napona. Ovakav zaključak proizilazi iz radova Berga, Jošide, Gelera, Bondarenka, Brandta i dr., a takođe i na osnovu rezultata istraživanja koja su sproveli autor i R. Dimitrijević /73/.

Drugo pitanje, koje je takođe od izvanredne važnosti za linearnu teoriju tečenja, je pitanje funkcionalne zavisnosti između Poisson - ovog koeficijenta i vremena. Prema R. Jones-u i E. N. Gatfield-u /39/, koji su svoja istraživanja bazirali na ultrazvučnim metodama, proizilazi da se vrednost $\nu_1(t)$ menja u toku vremena, ali da je ta promena značajna samo kod vrlo mladih betona, mlađih od tri dana. Kasnije vrednosti $\nu_1(t)$ teže konstantnoj veličini, koja je isključivo funkcija kvalitativnog i kvantitativnog sastava betona.

Slični zaključci se mogu izvući i iz radova O. J. Berga /2/, prema kome je koeficijent elestične poprečne deformacije $\nu'_1(t)$

u slučaju zrelih betona, odnosno betona koji su dovoljno stari da se mogu izložiti opterećenjima, izvesna konstanta čija veličina zavisi isključivo od karakteristika betona.

Do vrlo značajnih rezultata došao je i E. A. Kogan /17/ koji je merio poprečne deformacije na srazmerno velikim opitnim telima (cilindri prečnika 70 cm i visine 220 cm). Mada je njegove rezultate teško interpretirati nekim jednostavnim analitičkim izrazom, može se ipak uočiti da su sve eksperimentalno dobijene vrednosti funkcije $\nu_1(t)$ grupisane oko jedne prave paralelne vremenskoj osovini. Za slučaj prave $\nu_1(t)= 0,193$ najveća odstupanja iznose oko $\pm 15\%$, što znači da je u datom slučaju vrednost $\nu_1(t)$ praktično nezavisna od vremena.

Na sličan zaključak upućuju i eksperimentalni rezultati izloženi u radu /73/, pri čemu stav $\nu_1(t) = \text{const.}$ u potpunosti može da se prihvati samo za betone starije od tri dana. Za područje $t \leqslant 3$ dana još uvek nema dovoljno sigurnih podataka na osnovu kojih bi bilo moguće formulisati najopštiji zaključak.

Zavisnost Poisson - ovog koeficijenta od sastava betona, odnosno od njegovih karakteristika, nedvosmisleno potvrđuju eksperimenti O. J. Berga, M. Polivke, K. Kordine, E. A. Kogana /17/ i dr. Isto tako, u prilog ovoj tezi govore i eksperimentalni rezultati publikovani u radu /73/. U datom slučaju, za beton spravljen od cementa PC-350 20DT - Novi Popovac, vrednost $\nu_1(t)$ je iznosila oko 0,18, dok je za isti beton, ali sa cementom PC-550 - Anhovo, ova vrednost iznosila 0,22. U prvom slučaju minimalna čvrstoća betonske prizme (12x12x36 cm) dobijena pri starosti od 7 dana iznosila je 310 kp/cm^2, dok je u drugom slučaju ova čvrstoća bila 410 kp/cm^2. Ovi podaci, isto kao i podaci iz napred već pomenutog rada E. A. Kogana /17/, ukazuju da postoji određena korelacije između Poisson - ovog koeficijenta i čvrstoće betona. Nemački propisi već vode računa o ovoj činjenici na taj način što se za beton MB 225 uzima vrednost $\nu_1(t)= 0,15$, dok se za MB 600 propisuje $\nu_1(t)=0,30$.

Kao veoma značajna, ovde treba pomenuti i Lermitova ispitivanja poprečnih deformacija betona. Za razliku od većine autora, koji su Poisson - ove koeficijente određivali isključivo na bazi merenja deformacija aksijalno opterećenih probnih tela, Lermit /65/ je vrednosti $\nu_1(t)$ određivao i putem ispitivanja tri-aksijalno napregnutih cilindričnih epruveta. Pokazalo se da je u datom slučaju izmerena vrednost Poisson - ovog koeficijenta bila za oko 30% manja od vrednosti $\nu_1(t)=0,13$ dobijene na odgovarajućim aksijalno opterećenim epruvetama.

Pored koeficijenta poprečne elastične deformacije $\nu_1(t)$, za koga smo rekli da se sa dovoljnom tačnošću može uzeti da je konstanta nezavisna od vremena, za linearnu teoriju tečenja u njenom najopštijem obliku od velikog je značaja i koeficijent poprečne deformacije tečenja betona $\nu_2(t,\tau_t)$. Sve dileme vezane za veličinu i karakter ove funkcije razrešile bi se svakako mnogo lakše kada bi se raspolagalo dovoljnim brojem pouzdanih eksperimentalnih podataka. Međutim, radova koji tretiraju ovaj problem ima veoma malo, a rezultati istraživanja pojedinih autora su često toliko protivurečni, da je još uvek veoma teško formirati konačan zaključak.

A. M. Neville (/78/, /79/, /80/) ističe da do velikih neslaganja dolazi u prvom redu zbog primene različitih eksperimentalnih metoda, a takođe i zbog različitih uslova ispitivanja i merenja. Prema njegovim merenjima koeficijent $\nu_2(t,\tau_t)$ je nešto veći kod uzoraka koji su držani i ispitivani u suvoj sredini nego kod uzoraka tretiranih u vodi. Pored toga Neville tvrdi da je $\nu_2(t,\tau_t)$ manji za prostorno i ravno stanje napona, nego za stanje jednoosnog naprezanja.

Prema ispitivanjima R. H. Evans-a i R. H. Wood-a, veličina koeficijenta $\nu_2(t,\tau_t)$ varira između 0,01 i 0,17, dok je Kordina ustanovio da njegova vrednost zavisi od dužine trajanja opterećenja i od mineraloškog sastava agregata. Prema Kordini, $\nu_2(t,\tau_t)$ se smanjuje kada se povećava trajanje opterećenja, s tim što se najmanje vrednosti dobijaju ako se primeni agregat od crvenog peščara, a najveće kada se upotrebi agregat kvarcnog sastava. Isti autor takođe tvrdi da u poređenju sa betonima spravljenim od granitnog agregata, betoni sa bazaltnim agregatom daju nešto veće vrednosti koeficijenta $\nu_2(t,\tau_t)$.

Slično Neville-u, i Lermit /65/ je jedan deo svojih istraživanja poprečnih deformacija realizovao na prostorno napregnutim opitnim telima. Kao i kod njegovih ispitivanja koeficijenta $\nu_1(t)$, i ovom prilikom su primenjene cilindrične epruvete, a dobijeni rezultati su sledeći:

- na uzorcima koji su prvi put opterećeni pri starosti od t_o=175 dana dobijena je vrednost $\nu_1(t=t_o)=0{,}074$;
- nakon 50 dana dobijena je vrednost $\nu(t=225, t_o=175)=0{,}125$.

Uporedna ispitivanja na epruvetama izloženim samo aksijalnom pritisku dala su, pak, sledeće rezultate:

- $\nu_1(175)=0{,}17$;
- 50 dana nakon apliciranja opterećenja, nepromenljivog u toku trajanja eksperimenta, dobijeno je $\nu(225,175)=0{,}19$.

U ovom slučaju, prema Lermitu, $\nu(t,\tau_t)$ predstavlja tzv. globalni Poisson-ov koeficijent, tj. odnos između ukupne specifične deformacije uzorka u poprečnom pravcu i odgovarajuće podužne deformacije:

$$\nu(t,\tau_t)=\frac{\dfrac{\nu_1(\tau_t)}{E_b(\tau_t)}+\nu_2(t,\tau_t)\cdot C(t,\tau_t)}{\dfrac{1}{E_b(\tau_t)}+C(t,\tau_t)}.$$

Kao što se vidi, gornji izraz omogućava da se dođe do funkcije $\nu_2(t,\tau_t)$, koja se sada može predstaviti u obliku

$$\nu_2(t,\tau_t)=\nu(t,\tau_t)+\frac{\nu(t,\tau_t)-\nu_1(\tau_t=t)}{E_b(\tau_t)\cdot C(t,\tau_t)}.$$

Ako za analizu usvojimo vrednosti $\nu_1(t)=0{,}17$ i $\nu_2(t,\tau_t)=0{,}19$, dobićemo da je

$$\nu_2(t,\tau_t)=0{,}19+\frac{0{,}02}{E_b(\tau_t)\cdot C(t,\tau_t)},\qquad t=225,\ \tau_t=t_o=175,$$

na osnovu čega sledi zaključak da je $\nu_2(t,\tau_t)>\nu_1(t)$, odnosno da poprečno tečenje betonskih epruveta postoji. Kada Lermit u članku u kome je prikazao rezultate svojih istraživanja ne navodi podatke o funkcijama $E_b(\tau_t=t)$ i $C(t,\tau_t)$, sa dovoljnom tačnošću se može usvojiti da je

$$E_b(\tau_t)\cdot C(t,\tau_t)\approx \varphi(t),$$

pa kada se ima u vidu starost uzoraka u vreme otpočinjanja ispitivanja, može se orijentaciono uzeti da je

$$\varphi(t)=\varphi_t\approx 1{,}00.$$

Na ovaj način dobija se da je

$$\nu_2(t,\tau_t)\approx 0{,}21,\quad t=225,\ \tau_t=t_o=175.$$

Proanaliziraćemo sada uticaj funkcije $\nu_2(t,\tau_t)$ na mere tečenja $C'(t,\tau_t)$ i $\omega(t,\tau_t)$. Ako sa $\tilde{C}'(t,\tau_t)$ i $\tilde{\omega}(t,\tau_t)$ označimo približne vrednosti mera tečenja za slučaj poprečne deformacije i deformacije čistog smicanja, sračunate uz pretpostavku da je $\nu_2(t,\tau_t)\approx\nu_1(t)$, dobićemo sledeće:

$$C'(t,\tau_t)=0{,}21\cdot C(t,\tau_t),\qquad \tilde{C}'(t,\tau_t)=0{,}17\cdot C(t,\tau_t),$$

$$\omega(t,\tau_t)=2{,}42\cdot C(t,\tau_t),\qquad \tilde{\omega}(t,\tau_t)=2{,}34\cdot C(t,\tau_t).$$

Kao što se vidi, razlike između približnih i tačnih vrednosti iznose kod mere tečenja $C'(t,\tau_t)$ oko 20%, a kod mere $\omega(t,\tau_t)$ nešto preko 3%. Mada se ovde radi o veoma grubој numeričkoj analizi, koja pored toga važi isključivo za slučaj $t=225$ dana i $\tau_t=t_o=175$ dana, može se sa dovoljnom verovatnoćom pretpostaviti da približno isti odnosi postoje i pri ostalim kombinacijama vremena t_o i t.

Obzirom da je u konkretnom slučaju $\omega(t,\tau_t)\approx\tilde{\omega}(t,\tau_t)$, odnosno da je

$$2\left[1+\nu_2(t,\tau_t)\right]\cdot C(t,\tau_t)\approx 2\left[1+\nu_1(t)\right]C(t,\tau_t),$$

proizilazi da sa dovoljnom tačnošću važi i sledeća relacija:

$$J_\gamma(t,\tau_t)\approx J(t,\tau_t).$$

Među radovima koji se bave pitanjem koeficijenta $\nu_2(t,\tau_t)$, rad E. A. Kogana /17/, koji je napred već pominjan, sigurno spada u red najznačajnijih. Po našem mišljenju to je do sada najkorektnije koncipirana i realizovana studija poprečnih deformacija tečenja betona, pa ćemo se na samom radu, kao i na analizi dobijenih rezultata, zadržati nešto duže.

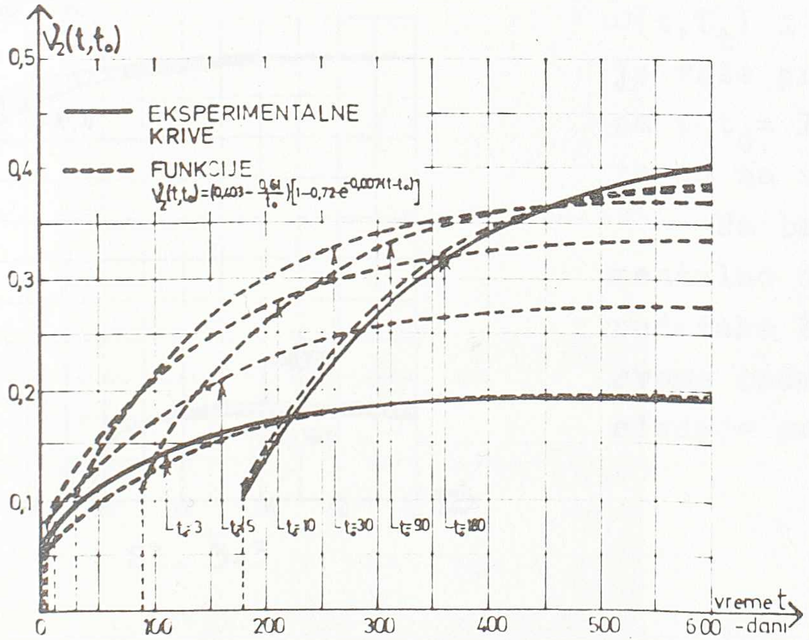
E. A. Kogan je pošao od osnovnih postavki linearne teorije tečenja betona, pa shodno tome suštinu njegovog rada predstavlja definisanje mera tečenja $C(t,\tau_t)$ i $C'(t,\tau_t)$ povezanih relacijom (3.1.15). Ove funkcije on je odredio direktnim merenjima na prizmatičnim uzorcima koji su aksijalnim pritiscima konstantnih intenziteta izlagani pri različitim starostima betona. Na taj način, eksperimentalnim putem su dobijene krive $C(t,t_o)$ i $C'(t,t_o)$, odnosno funkcija

$$\nu_2(t,t_0)=\frac{C'(t,t_0)}{C(t,t_0)}. \qquad (3.2.1)$$

Ilustracije radi, ovde, na sl. 3.1, prikazujemo Koganove krive $\nu_2(t,t_0)$ koje se mogu aproksimirati analitičkim izrazom oblika

$$\nu_2(t,t_0)=\left(0{,}403-\frac{0{,}61}{t_0}\right)\left[1-0{,}72\cdot e^{-0{,}007(t-t_0)}\right]. \qquad (3.2.2)$$

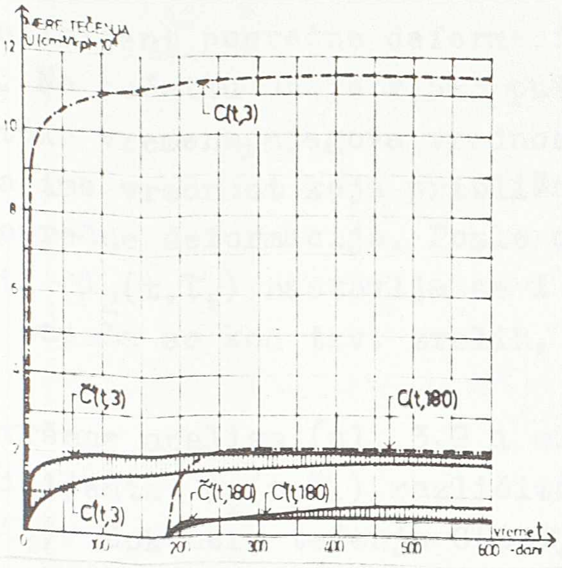
Slaganje ove funkcije sa eksperimentalno dobijenim vrednostima može se oceniti preko krivih $\nu_2(t,3)$ i $\nu_2(t,180)$.



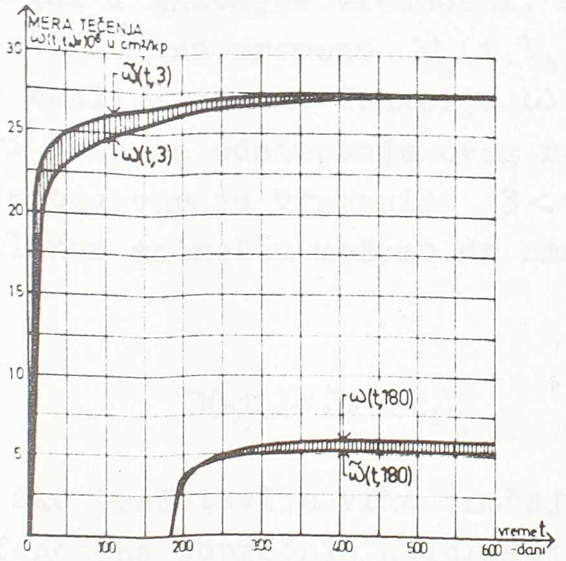
Sl. 3.1

Na sl. 3.2 prikazane su mere tečenja $C(t,3)$, $C(t,180)$, $C'(t,3)$ i $C'(t,180)$, kao i funkcije $\tilde{C}'(t,3)$ i $\tilde{C}'(t,180)$. Dve poslednje krive su približne vrednosti mera tečenja za slučaj poprečne deformacije dobijene preko izraza

$$\tilde{C}'(t,t_0)\approx \nu_1(t)\cdot C(t,t_0), \qquad (3.2.3)$$



Sl. 3.2



Sl. 3.3

pri čemu je, saglasno ranije navedenom podatku usvojena vrednost $\nu_1(t)= \nu_1= 0,193 =$ const. Pri crtanju ovog dijagrama znaci deformacija su uslovno uzeti isti, i ako podužne i poprečne deformacije imaju različite predznake.

Mere tečenja $\omega(t,\tau_t)$ i $\tilde{\omega}(t,\tau_t)$ koje važe pri $t_o= 3$ dana i $t_o= 180$ dana date su na sl. 3.3 *).

Na bazi eksperimentalno dobijenih podataka Kogan je u svome radu formulisao sledeće zaključke:

---

*) Razlog zbog koga su na sl. 3.2 i 3.3 prikazane samo funkcije koje odgovaraju vremenima $t_o= 3$ dana i $t_o= 180$ dana je isključivo tehničke prirode. Radi se, naime, o nastojanju da se putem dijagrama koji nisu opterećeni mnoštvom linija pruži mogućnost što boljeg uočavanja razlika između tačnih i približnih vrednosti predmetnih funkcija. Ovo se u prvom redu odnosi na krive $C'(t,\tau_t)$ i $\tilde{C}'(t,\tau_t)$.

Koeficijent poprečne deformacije tečenja menja se u toku vremena. Na početku on je 2,5-3 puta manji od koeficijenta $\nu_1(t)$, ali, u toku vremena, njegova vrednost raste, tako da nakon 250-300 dana ima vrednost koja približno odgovara koeficijentu elastične poprečne deformacije. Posle ovog vremena proces povećanja vrednosti $\nu_2(t,\tau_t)$ nastavlja se i dalje, a najveći intenzitet porasta zapaža se kod tzv. zrelih, odnosno dovoljno starih betona.

Izvršene analize (sl. 3.2 i sl. 3.3) pokazuju da se promena koeficijenta $\nu_2(t,\tau_t)$ različito odražava na funkcije $C'(t,\tau_t)$ i $\omega(t,\tau_t)$. Dok mera tečenja $C'(t,\tau_t)$ direktno zavisi od ovog koeficijenta, pa razlike između funkcija $C'(t,\tau_t)$ i $\tilde{C}'(t,\tau_t)$ mogu da dostignu i značajne vrednosti, mera tečenja $\omega(t,\tau_t)$ nije toliko osetljiva na promenu $\nu_2(t,\tau_t)$. Kao što pokazuje sl. 3.3, najveće razlike između funkcija $\omega(t,\tau_t)$ i $\tilde{\omega}(t,\tau_t)$ iznose oko 10%, pri čemu se odstupanja ovog reda zapažaju i kod mera tečenja koje odgovaraju vremenima $3 < t_o < 180$. Obzirom na ovo, opet sa dovoljnom tačnošću možemo da smatramo da je zadovoljena relacija

$$J(t,\tau_t) = J_\gamma(t,\tau_t). \qquad (3.2.4)$$

I ako predstavlja vrlo značajan doprinos na polju istraživanja fenomena poprečnih deformacija betona, Koganov rad ipak nije dovoljan za izvođenje generalnih zaključaka. Sam Kogan naglašava da je zbog reda veličine poprečnih deformacija u odnosu na skupljanje betona tačnost merenja ovih deformacija prilično ograničena, pa njegov rad u suštini pruža samo kvalitativni uvid u fenomen.

Na bazi izloženog može se zaključiti da pitanje poprečnih deformacija tečenja betona još uvek nije u dovoljnoj meri proučeno. Stoga, obzirom da postoji mnogo protivurečnih podataka o veličini i karakteru koeficijenta $\nu_2(t,\tau_t)$, može se smatrati da još nije nepobitno dokazana nejednakost koeficijenata $\nu_1(t)$ i $\nu_2(t,\tau_t)$, pa se, kao dovoljno tačna, može preporučiti relacija

$$\nu_2(t,\tau_t) = \nu_1(t) = \nu = \text{const.} \qquad (3.2.5)$$

Ovo se može prihvatiti utoliko pre, ako se ima u vidu da je I. E. Prokopovič dokazao da primena izraza (3.2.5) kod računanja oktaedarskih napona u betonu pri prostornom naponskom stanju uslovljava grešku od najviše 5-6%.

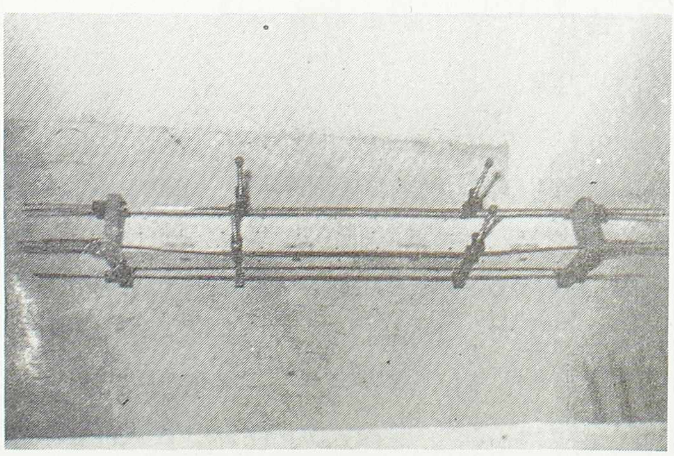
Opravdanost usvajanja jednakosti (3.2.5), naročito ako se radi o vezi između funkcija $J(t,\tau_t)$ i $J_\gamma(t,\tau_t)$, biće pokazana i u daljem, gde će se dati prikaz autorovih eksperimentalnih istraživanja poprečnih deformacija tečenja betona.

Navedena ispitivanja su sprovedena na prizmama dimenzija 12x12x36 cm, a upotrebljeni beton bio je sledećeg sastava:

agregat: moravski šljunak (0-4 mm - 30%, 4-8 mm -30%, 8-12 mm - 40%),
cement: "ANHOVO" - PC 550 (500 kg/m^3),
vodocementni faktor: V/C = 0,41.

Uzorci su posle spravljanja sedam dana negovani intenzivnim kvašenjem. Kontrolne kocke sa stranama dužine 14 cm imale su nakon tri dana prosečnu čvrstoću od 397 kp/cm^2, a čvrstoća kocki nakon 28 dana iznosila je u proseku 704 kp/cm^2. Obzirm na dobijene vrednosti, proizilazi da su ispitivanja vršena na betonu čija se marka kretala između 600 i 650.

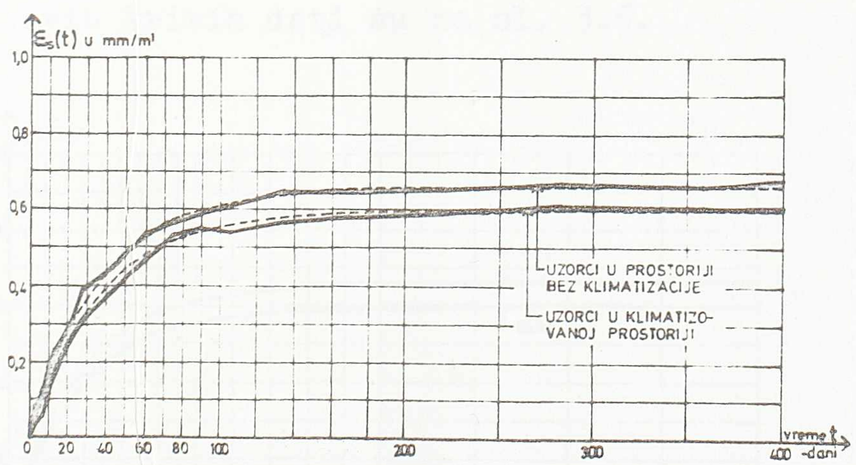
Vremenske deformacije su merene na uzorcima koji su opterećivani pri starostima od 3, 7, 14, 28 i 90 dana. U toku ispitivanja korišćeni su specijalni uređaji (sl. 3.4) pomoću kojih je u opitnim telima stalno održavan konstantan nivo naprezanja. Pošto su prvi uzorci izloženi opterećenju već pri starosti od tri dana, kao radno naprezanje svih opitnih tela usvojen je centričan pritisak intenziteta 80 kp/cm^2.



Sl. 3.4

Predmetni uzorci bili su u stvari kontrolna tela izrađena sa ciljem da se preko njih dobiju neophodni podaci za analizu ponašanja izvesnih opitnih nosača izloženih dugotrajnim opterećenjima. Obzirom, pak, na broj i dimenzije ovih nosača, nije postojala mogućnost da se oni ispituju u uslovima potpuno kondicionirane sredine, pa su merenja na njima sprovedena u prostoriji u kojoj je temperatura sezonski varirala između 15 i 25°C, dok se relativna vlažnost vazduha kretala u granicama od 60 do 80% (podrumska prostorija). U istoj prostoriji nalazile su se u toku eksperimenta i predmetne prizme na kojima je mereno tečenje betona, a takođe i prizmatični uzorci (12x12x36 cm) za merenje skupljanja betona. Međutim, skupljanje je, pored ovoga, mereno i na uzorcima čuvanim u klima-komori, što znači da je u ovom slučaju temperatura sredine bila konstana - 20°C, a vlažnost vazduha (70±5)%.

Rezultati merenja skupljanja deformetrom "Huggenberger" (baza 10", podatak 0,0001") prikazani su na sl. 3.5. Kao što se



Sl. 3.5

vidi, razlike između skupljanja uzoraka koji su se nalazili u klima-komori i uzoraka iz prostorije bez klimatizacije na prelaze veličinu od 10%, pa se ne može sa sigurnošću tvrditi da su pomenute razlike isključivo rezultat različitih termo-higrometrijskih uslova. Greške do 10% u ovakvim slučajevima pripadaju kategoriji uobičajenih disperzija rezultata merenja, pa se nesaglasnost dobijenih vrednosti može objasniti i na takav način.

Međutim, nezavisno od svega, stoji činjenica da bitnih razlika u veličinama skupljanja uzoraka nema, pa se sa dovoljnom verovatnoćom može pretpostaviti da bi se razlike istog reda dobile i kod uzoraka na kojima se meri tečenje betona. Imajući ovo u vidu, proizilazi logičan zaključak da varijacije termo-higrometrijskih uslova u našem slučaju nisu mogle da imaju bitnog uticaja na rezultate merenja.

Prosečne vrednosti skupljanja uzoraka prikazane na sl. 3.5 mogu se dovoljno tačno aproksimirati sledećim analitičkim izrazima:

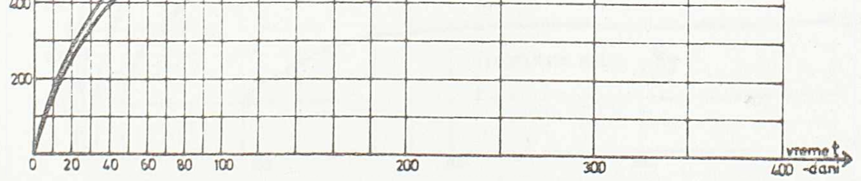
- za uzorke čuvane u prostoriji bez klimatizacije

$$\varepsilon_s(t) = 0{,}66(1-e^{-0{,}027t}), \qquad (3.2.6)$$

- za uzorke iz klima-komore

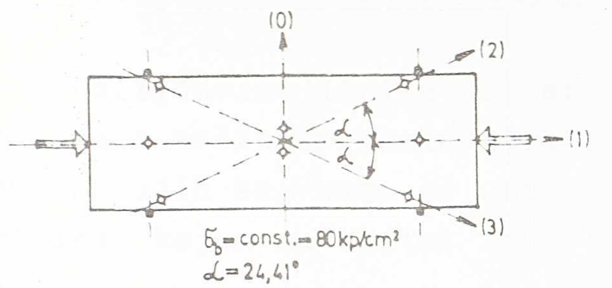
$$\varepsilon_s'(t) = 0{,}60(1-e^{-0{,}027t}). \qquad (3.2.7)$$

Oblici ovih krivih dati su na sl. 3.6.



Sl. 3.6

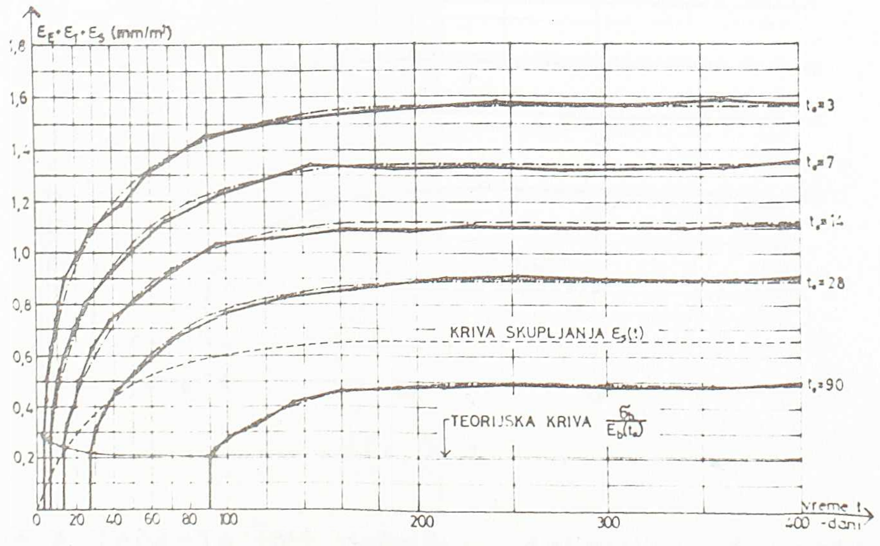
Vremenske deformacije betonskih prizmi pod dejstvom konstantnog pritiska od 80 kp/cm^2 merene su kako u podužnom, tako i u još tri pravca. Obzirom na konstrukciju upotrebljenih uređaja za merenje tečenja, podužne deformacije svake prizme merene su na tri strane površine 12x36 cm (pravci (1)), dok su na jednoj od tih strana merene i poprečne deformacije (pravac (0)),



Sl. 3.7

kao i deformacije u pravcima (2) i (3), (sl. 3.7). Za merenja u pravcima (1), (2) i (3) upotrebljen je napred već pomenut deformetar marke "Huggenberger", dok su merenja u pravcima (0) vršena pomoću tenzotasta "Huggenberger" sa bazom dužine 20 mm i podatkom od 0,001 mm. Obzirom na karakteristike upotrebljenih instrumenata, deformetrom su se mogle registrovati dilatacije ne manje od 10^{-6} (0,0001 mm/m^{1}), dok je u slučaju tenzotasta ova granica iznosila 5×10^{-6}.

Na sl. 3.8 dat je prikaz prosečnih vrednosti izmerenih podužnih deformacija prizmi. Dobijene veličine predstavljaju u stvari zbir $\varepsilon_E + \varepsilon_T + \varepsilon_S$, gde je ε_E elastična deformacija



Sl. 3.8

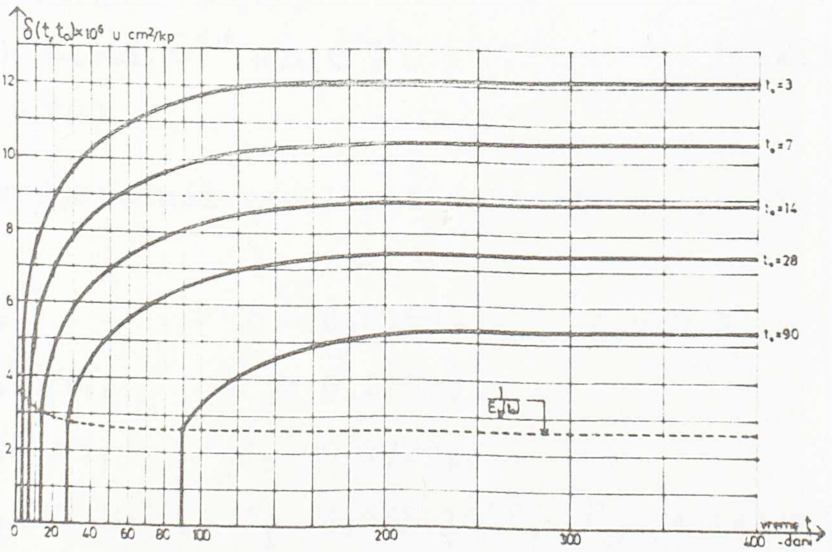
prouzrokovana naponom pritiska veličine 80 kp/cm^2, ε_T deformacija tečenja pod istim naponom, a ε_S deformacija skupljanja. Na istoj slici prikazana je i kriva skupljanja $\varepsilon_S(t)$ o kojoj je napred bilo reči, kao i teorijska kriva elastičnih deformacija $\frac{\sigma_b}{E_b(t_0)}$ dobijena na bazi poznate vrednosti napona σ_b i poznatog zakona promene modula elastičnosti u toku vremena. U konkretnom slučaju ovaj zakon je bio definisan relacijom

$$E_b(t) = 388000(1 - 0{,}308 \cdot e^{-0{,}057t}). \qquad (3.2.8)$$

Poligonalne linije prikazane na sl. 3.8 mogu se na zadovoljavajući način aproksimirati glatkim kontinualnim linijama na osnovu kojih se, kada se uzme u obzir kriva skupljanja i napon pritiska kojem su opitna tela bila izložena, mogu dobiti i krive

$$\delta(t,t_o) = \frac{1}{E_b(t_o)} + C(t,t_o). \qquad (3.2.9)$$

Ove krive date su na sl. 3.9, a na osnovu njih su u daljem dobijene i krive $C(t,t_o)$, (sl.3.10), za koje smo rekli da pred-

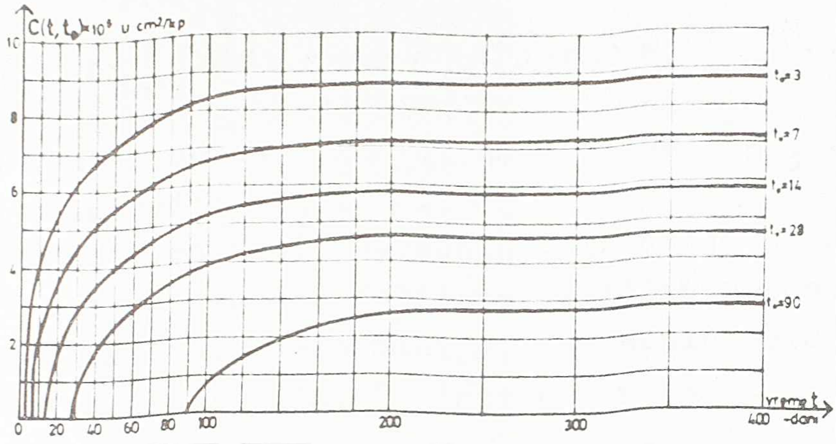


Sl. 3.9

stavljaju mere tečenja pri podužnom deformisanju opitnih tela.

Analiza ovako dobijenih funkcija $C(t,t_o)$ pokazala je da se eksperimentalno dobijene veličine najbolje mogu interpretirati putem izraza za meru tečenja koji je predložio S. V. Aleksandrovski. Ako ovu relaciju usvojimo u obliku

$$C(t,t_o) = \varphi(t_o) - \psi(t)\left(\frac{e^{\gamma t_o} - A_2}{e^{\gamma t} - A_2}\right) - \Delta(t_o)\, e^{-\alpha(t-t_o)}, \qquad (3.2.10)$$



Sl. 3.10

gde su brzoopadajuće funkcije $\varphi(t_o)$, $\psi(t)$ i $\Delta(t_o)$ definisane izrazima

$$
\begin{aligned}
\varphi(t_o) &= \varphi_o + \varphi_1 \cdot e^{-\beta_1 t_o} + \varphi_2 e^{-\beta_2 t_o}, \\
\Delta(t_o) &= \Delta_o + \Delta_1 \, e^{-\alpha_1 t_o} + \Delta_2 e^{-\alpha_2 t_o}, \\
\psi(t) &= \varphi(t) - \Delta(t),
\end{aligned}
\qquad (3.2.11)
$$

optimalno zadovoljavajući rezultati dobijaju se za sledeće vrednosti:

$\alpha = 6$, $\gamma = 0{,}0165$, $A_2 = 0{,}05$,

$\alpha_1 = 0{,}0354$, $\alpha_2 = 0{,}2159$,

$\beta_1 = 0{,}0185$, $\beta_2 = 0{,}1729$,

$\varphi_o = 1{,}848\ 10^{-6}$, $\varphi_1 = 4{,}655\ 10^{-6}$, $\varphi_2 = 4{,}145\ 10^{-6}$,

$\Delta_o = 0{,}132\ 10^{-6}$, $\Delta_1 = 1{,}065\ 10^{-6}$, $\Delta_2 = 2{,}006\ 10^{-6}$.

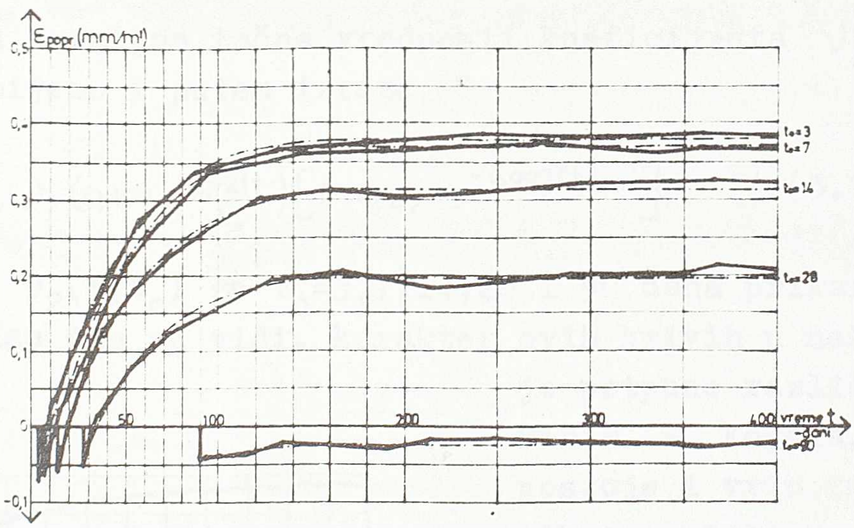
Veličine poprečnih deformacija merene su na dva načina i to: (a) neposredno pomoću tenzotasta, i (b) putem merenja dilatacija u pravcima (1), (2) i (3), preko kojih su zatim računskim postupkom određivane dilatacije u pravcu (0).

Drugi postupak u našem slučaju svakako daje rezultate veće tačnosti, što je uslovljeno većom preciznošću merenja deformacija deformetrom, o čemu je napred već bilo reči. Pošto su izmerene vrednosti dilatacija u pravcima (2) i (3) pokazivale izvanrednu saglasnost, dilatacije ε_0 određivane su preko obrasca

$$\varepsilon_0 = \frac{\bar{\varepsilon}_{2,3} - \varepsilon_1 \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 5{,}8552 \cdot \bar{\varepsilon}_{2,3} - 4{,}8552 \cdot \varepsilon_1 . \qquad (3.2.12)$$

Obzirom na odnos $\varepsilon_2 \approx \varepsilon_3$, ovde je sa $\bar{\varepsilon}_{2,3}$ označena srednja vrednost dilatacija ε_2 i ε_3.

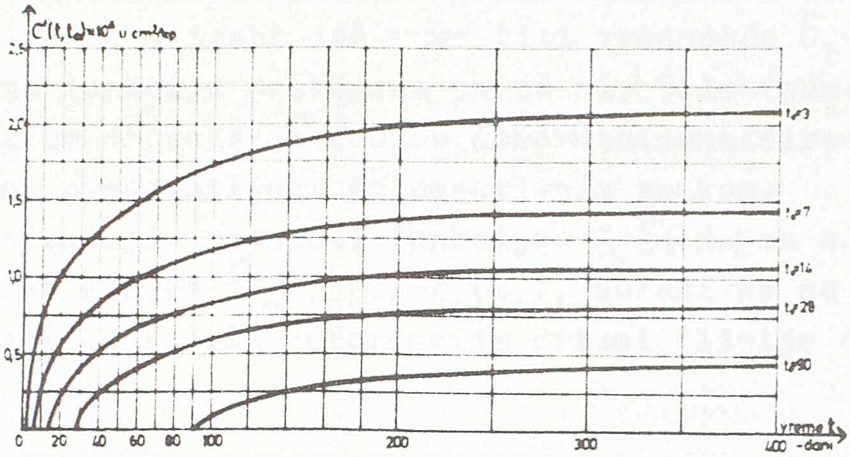
Izmerene vrednosti poprečnih dilatacija prikazane su na sl. 3.11*). I u ovom slučaju dobijene veličine predstavljaju zbir poprečnih elastičnih deformacija, poprečnih deformacija tečenja i deformacija skupljanja. Na isti način kao i kod podužnih deformacija, i u ovom slučaju je moguće eksperimentalne vrednosti aproksimirati izvesnim monotono rastućim krivim linijama, na osnovu kojih se dobijaju mere tečenja $C'(t,t_0)$, (sl. 1.12).



Sl. 3.11

Obzirom na relaciju (3.2.1), u stanju smo sada da dođemo i do vrednosti funkcije $\nu_2(t,t_0)$. Može se pokazati da u konkret-

*) Do sada su kao pozitivne dilatacije uslovno tretirane one dilatacije pri kojima dolazi do skraćivanja baza merenja. Iz tih razloga se kod poprečnih dilatacija kao negativna dilatacija uzima dilatacija pri kojoj se baza merenja povećava.

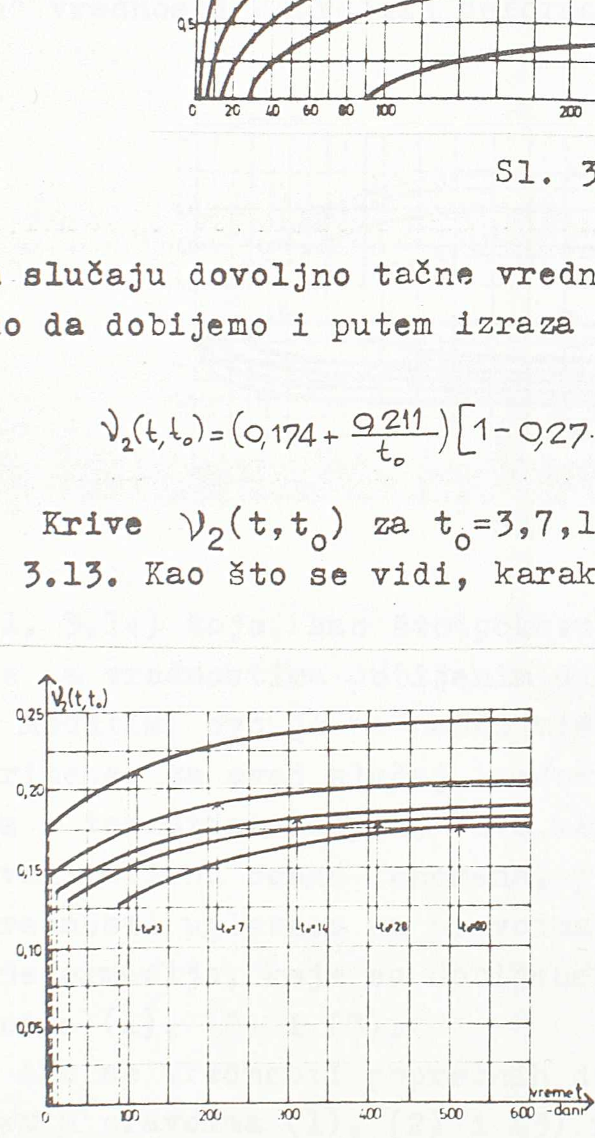


Sl. 3.12

nom slučaju dovoljno tačne vrednosti koeficijenta $\nu_2(t,t_o)$ možemo da dobijemo i putem izraza

$$\nu_2(t,t_o)=\left(0{,}174+\frac{0{,}211}{t_o}\right)\left[1-0{,}27\cdot e^{-0{,}007(t-t_o)}\right]. \qquad (3.2.13)$$

Krive $\nu_2(t,t_o)$ za t_o=3,7,14,28 i 90 dana prikazane su na sl. 3.13. Kao što se vidi, karakter ovih krivih u našem slučaju je potpuno različit od krivih E. A. Kogana, a sem toga, postoje i vrlo značajne razlike u veličinama ovog koeficijenta. O različitim karakterima predmetnih funkcija teško je bilo šta reći, dok se u odnosu na brojne vrednosti može reći da su one, verovatno, posledica ispitivanja na različitim betonima.



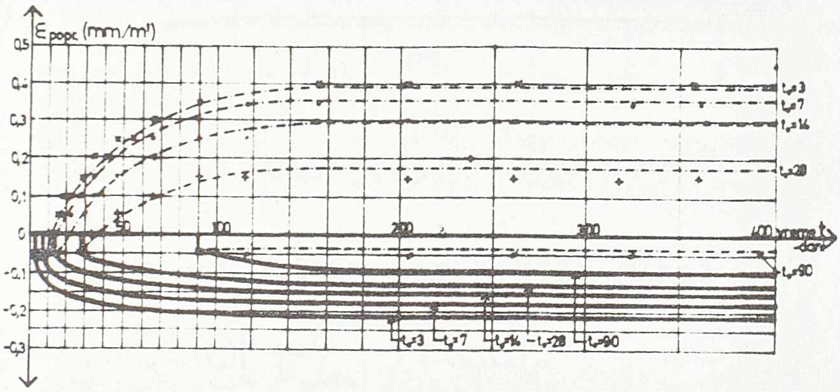
Sl. 3.13

Odredićemo sada računskim putem poprečne deformacije prizmi pretpostavljajući da je $\nu_2(t,t_o)=\nu_1(t)$. Obzirom da je u konkretnom slučaju $\nu_1(t)=$ $=0{,}22$, može se formirati funkcija

$$\tilde{\delta}'(t,t_o)=\frac{\nu_1(t_o)}{E_b(t_o)}+\tilde{C}'(t,t_o)=\nu_1(t_o)\left[\frac{1}{E_b(t_o)}+C(t,t_o)\right],$$

koju, da bi se dobile stvarne vrednosti elastičnih deformacija i deformacija tečenja, treba još pomnožiti vrednošću σ_b=80 kp/cm^2. Ovako dobijene funkcije prikazane su na sl. 3.14 (puno izvučene linije). Obzirom da se ovde radi o deformacijama širenja, predmetne krive su predstavljene sa negativnim znakom.

Superponirajući vrednosti funkcija $\sigma_b \cdot \tilde{\delta}'(t,t_o)$ sa odgovarajućim vrednostima krivih $\hat{\varepsilon}_s=\varepsilon_s(t)-\varepsilon_s(t_o)$, dolazi se do "teorijskih" vrednosti poprečnih deformacija prizmi (linije crta-tačka

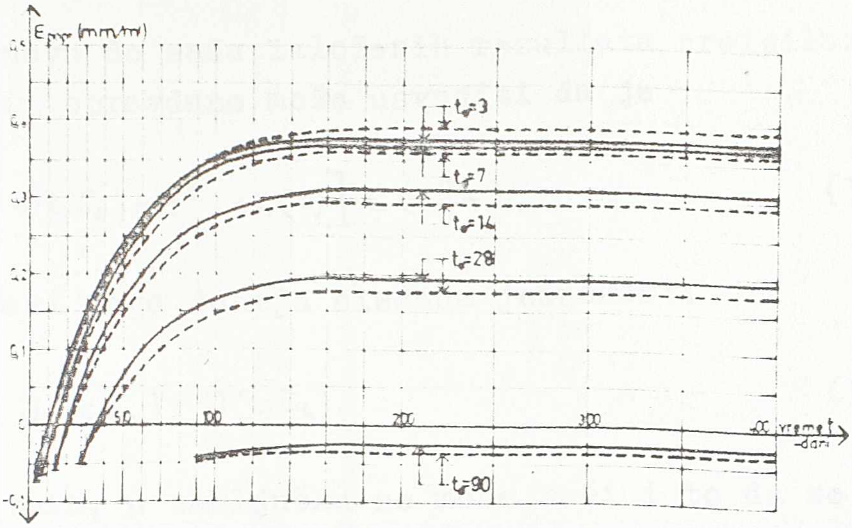


Sl. 3.14

na sl. 3.14) koje, kao što pokazuje sl. 3.14, nisu potpuno saglasne sa vrednostima dobijenim direktnim merenjima u pravcima (0). Međutim, ovo je po našem mišljenju dobrim delom i posledica primene, za ovaj slučaj nedovoljno preciznog mernog instrumenta - tenzotasta. Ipak, ovo merenje pruža dovoljno elemenata za kvalitativnu ocenu fenomena, pošto je očigledno da su izmerene vrednosti uglavnom na pravcima pružanja onih vrednosti poprečnih deformacija, koje su dobijene putem merenja dilatacija u pravcima (1), (2) i (3).

Ako se vrednosti poprečnih deformacija prizmi dobijene merenjem u pravcima (1), (2) i (3) nanesu na isti dijagram zajedno sa linijama poprečnih deformacija formiranim uz pretpostavku da je $\nu_2(t,t_o) \approx \nu_1(t)$, dobiće se dijagrami koje prikazujemo na sl. 3.15. Ova slika jasno pokazuje da je u našem slučaju praktično irelevantno da li se ukupne poprečne deformacije prizmi (pune linije) određuju preko tačne relacije

$$\varepsilon_{popr} = \hat{\varepsilon}_s - \sigma_b \left[\frac{\nu_1(t_o)}{E_b(t_o)} + C(t,t_o)\cdot \nu_2(t,t_o) \right],$$



Sl. 3.15

ili se, pak, koristi približan izraz koji glasi

$$\hat{\varepsilon}_{popr} = \hat{\varepsilon}_s - \hat{\sigma}_b \nu_1(t_o)\left[\frac{1}{E_b(t_o)} + C(t,t_o)\right].$$

Međutim, ako je reč o meri tečenja $C'(t,\tau_t)$, nije potpuno svejedno da li se računa sa tačnom vrednošću koeficijenta $\nu_2(t,\tau_t)$, ili se uzima da je $\nu_2(t,\tau_t) \approx \nu_1(t)$. Na primer, ako za analizu usvojimo vrednosti ${}_{min}\nu_2(t,t_o) = 0{,}174$, što se dobija kada $t_o \to \infty$ i $t \to \infty$, i ${}_{max}\nu_2(t,t_o) = 0{,}244$, što odgovara slučaju $t_o = 3$ i $t \to \infty$, proizilazi da u prvom slučaju postoji odnos

$$\frac{\tilde{C}'(t,t_o)}{C'(t,t_o)} = 1{,}26, \; t_o \to \infty, \; t \to \infty,$$

dok je u drugom slučaju

$$\frac{\tilde{C}'(t,t_o)}{C'(t,t_o)} = 0{,}90, \; t_o = 3, \; t \to \infty.$$

Ako opet kao ekstremne vrednosti koeficijenta $\nu_2(t,t_o)$ usvojimo veličine 0,174 i 0,244, dobićemo da je

$$\frac{\tilde{\omega}(t,t_o)}{\omega(t,t_o)} = 1{,}04, \; t_o \to \infty, \; t \to \infty,$$

dok je na isti način

$$\frac{\tilde{\omega}(t,t_o)}{\omega(t,t_o)} = 0{,}98, \; t_o = 3, \; t \to \infty.$$

Na osnovu do sada izloženih rezultata proizilazi zaključak da se sasvim opravdano može usvojiti da je

$$\omega(t,\tau_t) = 2\left[1+\nu_1(t)\right]\cdot C(t,\tau_t), \qquad (3.2.14)$$

pa se na bazi toga dobija sledeća jednakost:

$$J_\gamma(t,\tau_t) = J(t,\tau_t). \qquad (3.2.15)$$

Isto tako, u zaključku se može reći i to da se funkcija $\nu_2(t,\tau_t)$ menja u toku vremena i da se ona u opštem slučaju razlikuje od koeficijenta $\nu_1(t)=\nu_1$, ali da je ta razlika praktično bez značaja kada se računaju vrednosti funkcije $J_\gamma(t,\tau_t)$.

3.3. Deformaciono i naponsko stanje tankozidnog prednapregnutog štapa u vremenu t. Integro-diferencijalne jednačine problema

Promenljivost reoloških karakteristika betona u toku vremena nameće potrebu da se naponsko i deformaciono stanje prednapregnutih konstrukcija izloženih dugotrajnim opterećenjima izrazi i u funkciji parametra t. Smatraćemo da tankozidne konstrukcije koje su predmet ovog rada egzistiraju od nekog vremena t_o, pa će saglasno tome oblast definisanosti promenljive v r e m e biti određena relacijom

$$t_o \leq t < \infty.$$

Kao što smo već rekli, deformacije tečenja betona ne postoje u trenutku apliciranja dugotrajnih opterećenja, pa se stoga u vremenu t_o ponašanje posmatranog štapa može definisati kao elastično. Prema tome, za $t=t_o$ problem se svodi na primenu stavova elastične teorije tankozidnih štapova koju smo izložili u poglavlju 1. Ovi stavovi važe kako za uobičajena stalna opterećenja, tako i za opterećenja koja se javljaju kao posledica prednaprezanja konstrukcije.

Proizvoljno površinsko opterećenje štapa $\vec{p}=\bar{p}_x\vec{i}+\bar{p}_y\vec{j}+\bar{p}_z\vec{k}$, za koje smo pretpostavili da deluje u tačkama srednje površine, u opštem slučaju može da bude i funkcija vremena t. Ukoliko je to slučaj, od vremena će zavisiti i sva linijska opterećenja štapa, za koja smo u odeljku 1.3. rekli da predstavljaju ekvivalenat datom površinskom opterećenju, pa sledi da ova opterećenja u opštem slučaju mogu da budu funkcije dve promenljive. I ako ne postoje formalne smetnje da se naš problem reši i za najopštiji slučaj opterećenja, odnosno i za slučaj kada je štap opterećen silama koje se menjaju u toku vremena, iz čisto praktičnih razloga tretiraćemo u daljem samo štapove kod kojih su spoljašnja opterećenja nezavisna od promenljive t. Učinjena pretpostavka se može prihvatiti kao sasvim regularna, pošto se dugotrajna, odnosno stalna opterećenja realnih konstrukcija, vrlo retko menjaju u toku njihove eksploatacije.

Izlaganja u ovom poglavlju zasnivaćemo na istim pretpostavkama u vezi deformacija i naponskog stanja na kojima počiva i materija obrađena u poglavlju 1., a kao veze između napona i deformacija u betonu koristićemo relacije koje se dobijaju na bazi opštih izraza (3.1.9) i (3.1.11). Ovi izrazi važe za slučaj složeno napregnutog tela u koordinatnom sistemu xyz, ali je jasno da slični izrazi moraju da važe i za svaki drugi sistem pravouglih koordinata. Obzirom da u ovom radu primenjujemo dekartov koordinatni sistem esz, mogli bi odmah da ispišemo veze između napona i deformacija u betonu u odnosu na taj sistem. Međutim, prilikom ispisivanja ovih veza mora se uzeti u obzir i činjenica da su u konkretnom slučaju, saglasno učinjenim pretpostavkama, neke komponente tenzora napona i tenzora deformacije jednake nuli. Na taj način, pošto je $\sigma_e=\sigma_s=0$, dolazi se do sledeće relacije koja povezuje normalni napon i dilataciju u betonu:

$$\varepsilon_b(t)=\varepsilon_{zb}(t)=\frac{1}{E_b(t)}\left[\sigma_b(t)+\int_{t_0}^{t}\sigma_b(\tau_t)\cdot J(t,\tau_t)d\tau_t\right]+\varepsilon_s(t). \quad (3.3.1)$$

U ovom izrazu figuriše napon $\sigma_b(t)=\sigma_{zb}(t)$ koji je, kao i dilatacija $\varepsilon_{zb}(t)$, u opštem slučaju i funkcija koordinata e, s i z. Međutim, u daljem ćemo, radi kraćeg pisanja, isticati samo zavisnost ovih veličina od vremena.

Kod ispisivanja izraza (3.3.1) vođeno je računa i o efektu skupljanja betona, pa je relacija dobijena na bazi opštih izraza (3.1.9), saglasno vezi (3.1.2), proširena članom $\varepsilon_s(t)$.

Pošto smo pretpostavili da je od smičućih napona samo napon $\tau_{zs}(t)=\tau_{sz}(t)\neq 0$, potreban nam je i izraz koji ovaj napon povezuje sa odgovarajućim klizanjem. Kako smo pretpostavili da je $\tau_{sz}=\tau_s+\tau_w$, saglasno relacijama (3.1.11) dobija se

$$\gamma_{zsb}(t)=\gamma_{sb}(t)+\gamma_{wb}(t)=\frac{1}{G_b(t)}\left\{\tau_{sb}(t)+\tau_{wb}(t)+\int_{t_0}^{t}\left[\tau_{sb}(\tau_t)+\tau_{wb}(\tau_t)\right]\cdot J_\gamma(t,\tau_t)d\tau_t\right\}.$$

Međutim, ovako ispisana veza ispravna je samo formalno, pošto u njoj nije sadržana jedna od osnovnih pretpostavki o deformaciji predmetnog štapa. Naime, pretpostavljeno je da naponi $\tau_{wb}(t)$ ne proizvode nikakve deformacije, pa saglasno tome sledi zaključak da su u našem slučaju klizanja $\gamma_{zsb}(t)$ isključivo rezultat delovanja napona $\tau_{sb}(t)$. Imajući ovo u vidu, a pretpostavljajući istovremeno i jednakost

$$J_\gamma(t,\tau_t)=J(t,\tau_t),$$

druga veza između napona i deformacija u betonu koja će nam u daljem biti neophodna glasi:

$$\gamma_{sb}(t)=\gamma_{zsb}(t)=\frac{1}{G_b(t)}\left[\tau_{sb}(t)+\int_{t_0}^{t}\tau_{sb}(\tau_t)\cdot J(t,\tau_t)d\tau_t\right]. \qquad (3.3.2)$$

I ovom prilikom smo ispisujući simbole $\tau_{sb}(t)$ i $\gamma_{zsb}(t)$ istakli samo zavisnost predmetnih napona i deformacija od promenljive t, mada su u opštem slučaju ove veličine zavisne i od koordinata e, s i z.

Veze između dilatacija i normalnih napona u prednapregnutoj armaturi definisane su sledećim relacijama:

- za konstrukcije prednapregnute na stazi:

$$\sigma_p(t)=\sigma_{pp}+E_p\cdot\varepsilon_p(t), \qquad (3.3.3)$$

- za konstrukcije prednapregnute kablovima:

$$\sigma_p(t)=\sigma_{pp}+E_p\left[\varepsilon_p(t)-\varepsilon_p(t_0)\right]. \qquad (3.3.4)$$

Ovako ispisane veze predstavljaju izraze koji važe za svaki deo površine F_p, što znači da svi naponi i sve dilatacije koje figurišu u pomenutim relacijama u opštem slučaju zavise i od položaja tačke na kablu, odnosno od položaja tačke na zategnutoj čeličnoj žici.

Što se tiče veličine σ_{pp}, treba reći da je to u slučaju konstrukcija prednapregnutih na stazi napon u određenoj žici neposredno pre opuštanja staze, dok u slučaju konstrukcija sa kablovima ova veličina predstavlja napon u datom kablu odmah po obavljanju utezanja.

Obzirom na pretpostavke o karakteru napona τ_s i τ_w, vezu između smičućih napona i klizanja u prednapregnutoj armaturi usvojićemo u obliku

$$\gamma_{zsp}(t) = \gamma_{sp}(t) = \frac{\tau_{sp}(t)}{G_p}, \tag{3.3.5}$$

dok ćemo na bazi ranijih izlaganja kao veze između napona i deformacija u "mekoj" armaturi usvojiti sledeće relacije:

$$\varepsilon_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_a}, \tag{3.3.6}$$

$$\gamma_{zsa}(t) = \gamma_{sa}(t) = \frac{\tau_{sa}(t)}{E_a}. \tag{3.3.7}$$

Dilatacije u pravcu z osovine i klizanja u ravnima paralelnim srednjoj površini štapa u proizvoljnom vremenu t i na proizvoljnom mestu štapa, na osnovu rešenja datih u poglavlju 1., sada možemo da prikažemo na sledeći način:

$$\varepsilon_z(t) = \varepsilon(t,x,y,z) = \zeta'(t,z) - \xi''(t,z)\cdot x - \eta''(t,z)y - \theta''(t,z)\cdot\omega, \tag{3.3.8}$$

$$\gamma_{zs}(t) = \gamma_{zs}(t,x,y,z) = 2e\cdot\theta'(t,z). \tag{3.3.9}$$

Kao i ranije, i ovom prilikom ćemo pretpostaviti da je osovina z paralelna izvodnicama štapa, dok je sistem osovina x i y može biti potpuno proizvoljan sistem pravouglih koordinata. Bitno je jedino to da osovine x, y i z obrazuju dekartov sistem desne orijentacije, pošto je ta pretpostavka sadržana u izrazima za $\varepsilon_z(t)$ i $\gamma_{zs}(t)$.

Tačka P - pol može takođe da ima potpuno proizvoljan položaj u ravni poprečnog preseka, pa je stoga najcelishodnije da se ona i koordinatni početak sistema xy poklope. Što se tiče koordinatnog početka C, čini se da je najcelishodnije da se ta tačka usvoji u težištu čisto betonskog dela preseka.

Kao i u poglavlju 1., za sada ćemo ostaviti kao otvoreno pitanje tačnog definisanja pojma srednje površine štapa, ali ćemo morati da se odlučimo u pogledu ravni od koje ćemo meriti rastojanja e i u pogledu tačke $\bar{S}_o$ - nulte tačke srednje linije profila. I u ovim slučajevima možemo da sprovedemo potpuno slobodan izbor, pa je svakako najjednostavnije da za srednju liniju celokupnog profila usvojimo liniju koja debljine zidova deli na dva jednaka dela. Tačku $\bar{S}_o$ na ovoj liniji, pak, treba usvojiti tako da dijagram sektorske koordinate $\omega = \omega_p$ bude što prostiji.

Napred formulisani stavovi ne menjaju suštinski ni jednu od osnovnih pretpostavki teorije koja je izložena u prvom delu ovog rada, a na kojoj zasnivamo i izlaganja u ovom poglavlju. Naime, da smo navedene pretpostavke o potpuno slobodnom izboru sistema referencije usvojili i u odeljku 1.2., dobili bi formalno iste izraze kao što su izrazi (1.2.4) i (1.2.5). Isto važi i kada je reč o definicionim izrazima za presečne sile, a takođe i u odnosu na uslove ravnoteže (1.3.9).

Prema tome, presečne sile tankozidnog prednapregnutog štapa u proizvoljnom vremenu t možemo da predstavimo na sledeći način:

$$N(t,z) = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \sigma_{zf}(t)\,dF,$$

$$M_x(t,z) = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \sigma_{zf}(t)\cdot x\cdot dF, \qquad (3.3.10)$$

$$M_y(t,z) = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \sigma_{zf}(t)\cdot y\cdot dF,$$

$$Q_x(t,z) = -\sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \tau_{wf}(t)\sin\psi\,dF,$$

$$Q_y(t,z) = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \tau_{wf}(t)\cos\psi\,dF, \qquad (3.3.11)$$

$$M_\omega(t,z) = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \sigma_{zf}(t)\cdot\omega\cdot dF, \qquad (3.3.12)$$

$$T_S(t,z) = \sum_{f=a,p,b} 2\int_{F_f} \tau_{sf}(t)\,e\cdot dF, \qquad (3.3.13)$$

$$T_\omega(t,z) = \sum_{f=a,p,b} \int_{F_f} \tau_{wf}(t)\cdot h_p\cdot dF. \qquad (3.3.14)$$

Mada to nismo istakli posebno, podrazumeva se da su svi naponi koji figurišu u gornjim izrazima, osim od vremena t, zavisni i od položaja posmatrane tačke na štapu.

Uz pretpostavku da su spoljašnja opterećenja štapa isključivo funkcije koordinate z, uslove ravnoteže koji odgovaraju vremenu t, na osnovu ranije izvedenih relacija (1.3.9), prikazaćemo sada na sledeći način:

$$\begin{aligned} &Q'_x(t,z)+p_x(z)=0, \\ &Q'_y(t,z)+p_y(z)=0, \end{aligned} \qquad (3.3.15)$$

$$T'_p(t,z)+m_p(z)=0, \qquad (3.3.16)$$

$$N'(t,z)+p_z(z)=0, \qquad (3.3.17)$$

$$\begin{aligned} &M'_x(t,z)-Q_x(t,z)+m_x(z)=0, \\ &M'_y(t,z)-Q_y(t,z)+m_y(z)=0, \end{aligned} \qquad (3.3.18)$$

$$M'_\omega(t,z)-T_p(t,z)+T_s(t,z)+m_\omega(z)=0. \qquad (3.3.19)$$

Pretpostavka o nepromenljivosti spoljašnjih opterećenja u toku vremena, na osnovu koje smo ispisali gornje veze, podrazumeva isključivanje iz izraza za p_x, p_y, p_z, m_x, m_y, m_p i m_ω onih članova koji su u odeljku 1.3. označeni kao opterećenja nastala usled prednaprezanja konstrukcije. Ovo je razumljivo samo po sebi, pošto se zbog neprekidne promene sila prednaprezanja ni jedno od tih opterećenja ne može smatrati nezavisnim od vremena. Ovakav pristup problemu ne treba shvatiti kao isključivanje prednaprezanja iz daljeg razmatranja. O uticaju ovog faktora na naponsko i deformaciono stanje i dalje će se voditi računa, ali će on biti izražen drugačije nego do sada.

Nakon rešavanja jednačina (3.3.15) i (3.3.18), odnosno (3.3.16) i (3.3.19), uslovi ravnoteže se transformišu u sledeće izraze:

$$
\begin{aligned}
&N'(t,z) + p_z(z) = 0,\\
&M''_x(t,z) + p_x(z) + m'_x(z) = 0,\\
&M''_y(t,z) + p_y(z) + m'_y(z) = 0, \qquad\qquad (3.3.20)\\
&M''_\omega(t,z) + T'_s(t,z) + m_p(z) + m'_\omega(z) = 0.
\end{aligned}
$$

U svakom od ovih izraza izvršićemo sada zamenu vremena t vremenom τ_t, pa ćemo zatim tako dobijene relacije izmnožiti funkcijom $J(t,\tau_t)$ i integraliti u granicama od t_o do t. Na taj način dobijamo sledeće:

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_o}^{t} N'(\tau_t,z)\cdot J(t,\tau_t)\,d\tau_t + p_z(z)\int_{t_o}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t = 0,\\
&\int_{t_o}^{t} M''_x(\tau_t,z)\cdot J(t,\tau_t)\,d\tau_t + [p_x(z) + m'_x(z)]\int_{t_o}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t = 0,\\
&\int_{t_o}^{t} M''_y(\tau_t,z)\cdot J(t,\tau_t)\,d\tau_t + [p_y(z) + m'_y(z)]\int_{t_o}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t = 0, \qquad (3.3.21)\\
&\int_{t_o}^{t} M''_\omega(\tau_t,z)\cdot J(t,\tau_t)\,d\tau_t + \int_{t_o}^{t} T'_s(\tau_t,z)\cdot J(t,\tau_t)\,d\tau_t + [m_p(z) + m'_\omega(z)]\int_{t_o}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t = 0.
\end{aligned}
$$

Nakon sabiranja odgovarajućih jednačina grupa (3.3.20) i (3.3.21) i nakon unošenja u dobijene relacije izraza za presečne sile, dolazi se do sledećeg:

$$
\sum_{f=a,p,b}\frac{d}{dz}\left\{\int_{F_f}\left[\sigma_{zf}(t) + \int_{t_o}^{t}\sigma_{zf}(\tau_t)J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]dF\right\} + \left[1 + \int_{t_o}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]p_z(z) = 0,
$$

$$
\sum_{f=a,p,b}\frac{d^2}{dz^2}\left\{\int_{F_f}\left[\sigma_{zf}(t) + \int_{t_o}^{t}\sigma_{zf}(\tau_t)J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]x\,dF\right\} + \left[1 + \int_{t_o}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left[p_x(z) + m'_x(z)\right] = 0,
$$

$$
\sum_{f=a,p,b}\frac{d^2}{dz^2}\left\{\int_{F_f}\left[\sigma_{zf}(t) + \int_{t_o}^{t}\sigma_{zf}(\tau_t)J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]y\,dF\right\} + \left[1 + \int_{t_o}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left[p_y(z) + m'_y(z)\right] = 0, \qquad (3.3.22)
$$

$$
\sum_{f=a,p,b}\frac{d^2}{dz^2}\left\{\int_{F_f}\left[\sigma_{zf}(t) + \int_{t_o}^{t}\sigma_{zf}(\tau_t)J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]\omega\,dF\right\} + 2\sum_{f=a,p,b}\frac{d}{dz}\left\{\left[\tau_{sf}(t) + \int_{t_o}^{t}\tau_{sf}(\tau_t)J(t,\tau)\,d\tau_t\right]e\,dF\right\} + \left[1 + \int_{t_o}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left[m_p(z) + m'_\omega(z)\right] = 0.
$$

U jednačine (3.3.22) mogli bi odmah da uvedemo veze između napona i deformacija. Međutim, veze između normalnih napona i dilatacija u prednapregnutoj armaturi, kao i iste veze za slučaj "meke" armature, koje smo napred ispisali, ne daju odnose između napona σ_z i dilatacija ε_z. Vezama (3.3.3), (3.3.4) i (3.3.6) određene su u stvari zavisnosti između deformacija i naprezanja u pravcima pružanja prednapregnute i "meke" armature koji u opštem slučaju ne odgovaraju pravcu ose z. Međutim, ako pretpostavimo da su obe vrste čelika raspoređene duž osovine sistema po linijama koje su vrlo blago zakrivljene, može se smatrati da je $\sigma_{zp}(t)\approx\sigma_p(t)$, $\varepsilon_{zp}(t)\approx\varepsilon_p(t)$, $\sigma_{za}(t)\approx\sigma_a(t)$ i $\varepsilon_{za}(t)\approx\varepsilon_a(t)$.

Na bazi ovih pretpostavki, ranije datih veza između napona i deformacija i izraza (3.3.22), dobijaju se nakon sređivanja sledeće integro-diferencijalne jednačine problema:

$$\begin{aligned}&\left[F(t,z)\cdot\zeta'(t,z)\right]'-\left[S_x(t,z)\cdot\xi''(t,z)\right]'-\left[S_y(t,z)\cdot\eta''(t,z)\right]'-\left[S_\omega(t,z)\cdot\theta''(t,z)\right]'+\frac{\tilde{P}_z(t,z)}{E_b(t)}+\\&+\frac{E_a}{E_b(t)}\int_{t_0}^{t}\left\{\left[\zeta'(\tau_t,z)\cdot F_A(z)\right]'-\left[\xi''(\tau_t,z)\cdot S_{xA}(z)\right]'-\left[\eta''(\tau_t,z)\cdot S_{yA}(z)\right]'-\left[\theta''(\tau_t,z)\, S_{\omega A}(z)\right]'\right\}J(t,\tau_t)\,d\tau_t=0,\end{aligned}\tag{3.3.23}$$

$$\begin{aligned}&\left[S_x(t,z)\cdot\zeta'(t,z)\right]''-\left[I_{xx}(t,z)\cdot\xi''(t,z)\right]''-\left[I_{xy}(t,z)\cdot\eta''(t,z)\right]''-\left[I_{x\omega}(t,z)\cdot\theta''(t,z)\right]''+\frac{\tilde{P}_x(t,z)}{E_b(t)}+\\&\frac{E_a}{E_b(t)}\int_{t_0}^{t}\left\{\left[\zeta'(\tau_t,z)\cdot S_{xA}(z)\right]''-\left[\xi''(\tau_t,z)\cdot I_{xxA}(z)\right]''-\left[\eta''(\tau_t,z)\cdot I_{xyA}(z)\right]''-\left[\theta''(\tau_t,z)\cdot I_{x\omega A}(z)\right]''\right\}J(t,\tau_t)\,d\tau_t=0,\end{aligned}\tag{3.3.24}$$

$$\begin{aligned}&\left[S_y(t,z)\cdot\zeta'(t,z)\right]''-\left[I_{xy}(t,z)\cdot\xi''(t,z)\right]''-\left[I_{yy}(t,z)\cdot\eta''(t,z)\right]''-\left[I_{y\omega}(t,z)\cdot\theta''(t,z)\right]''+\frac{\tilde{P}_y(t,z)}{E_b(t)}+\\&\frac{E_a}{E_b(t)}\int_{t_0}^{t}\left\{\left[\zeta'(\tau_t,z)\cdot S_{yA}(z)\right]''-\left[\xi''(\tau_t,z)\cdot I_{xyA}(z)\right]''-\left[\eta''(\tau_t,z)\, I_{yyA}(z)\right]''-\left[\theta''(\tau_t,z)\cdot I_{y\omega A}(z)\right]''\right\}J(t,\tau_t)\,d\tau_t=0,\end{aligned}\tag{3.3.25}$$

$$\begin{aligned}&\left[S_\omega(t,z)\cdot\zeta'(t,z)\right]''-\left[I_{x\omega}(t,z)\cdot\xi''(t,z)\right]''-\left[I_{y\omega}(t,z)\cdot\eta''(t,z)\right]''-\left[I_{\omega\omega}(t,z)\cdot\theta''(t,z)\right]''+\frac{G_b(t)}{E_b(t)}\left[K(t,z)\cdot\theta'(t,z)\right]'+\\&+\frac{\tilde{m}_p(t,z)}{E_b(t)}+\frac{E_a}{E_b(t)}\int_{t_0}^{t}\left\{\left[\zeta'(\tau_t,z)\cdot S_{\omega A}(z)\right]''-\left[\xi''(\tau_t,z)\, I_{x\omega A}(z)\right]''-\left[\eta''(\tau_t,z)\, I_{y\omega A}(z)\right]''-\left[\theta''(\tau_t,z)\, I_{\omega\omega A}(z)\right]''+\frac{G_a}{E_a}\left[\theta'(\tau_t,z)\cdot K_A(z)\right]'\right\}J(t,\tau_t)\,d\tau_t=0.\end{aligned}\tag{3.3.26}$$

$\zeta(t,z)$, $\xi(t,z)$, i $\eta(t,z)$ su respektivno pomeranja pola P u pravcima osovina z, x i y, dok je $\theta(t,z)$ obrtanje poprečnog preseka oko pola.

U gornjim izrazima figurišu i sledeće geometrijske karakteristike preseka:

$$\begin{aligned}
F(t,z) &= \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \int_{F_f} dF = \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \cdot F_f(z), \\
S_x(t,z) &= \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \int_{F_f} x\,dF = \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \cdot S_{xf}(z), \\
S_y(t,z) &= \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \int_{F_f} y\,dF = \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \cdot S_{yf}(z), \\
I_{xx}(t,z) &= \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \int_{F_f} x^2\,dF = \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \cdot I_{xxf}(z), \\
I_{yy}(t,z) &= \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \int_{F_f} y^2\,dF = \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \cdot I_{yyf}(z), \\
I_{xy}(t,z) &= \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \int_{F_f} xy\,dF = \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \cdot I_{xyf}(z), \\
S_\omega(t,z) &= \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \int_{F_f} \omega\,dF = \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \cdot S_{\omega f}(z), \\
I_{x\omega}(t,z) &= \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \int_{F_f} x\omega\,dF = \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \cdot I_{x\omega f}(z), \\
I_{y\omega}(t,z) &= \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \int_{F_f} y\omega\,dF = \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \cdot I_{y\omega f}(z), \\
I_{\omega\omega}(t,z) &= \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \int_{F_f} \omega^2\,dF = \sum_{f=a,p,b} n_{Ef}(t) \cdot I_{\omega\omega f}(z),
\end{aligned} \qquad (3.3.27)$$

$$
\begin{aligned}
F_A(z) &= \int_{F_a} dF + \frac{E_p}{E_a}\int_{F_p} dF = F_a(z) + \frac{E_p}{E_a}F_p(z),\\
S_{xA}(z) &= \int_{F_a} x\,dF + \frac{E_p}{E_a}\int_{F_p} x\,dF = S_{xa}(z) + \frac{E_p}{E_a}S_{xp}(z),\\
S_{yA}(z) &= \int_{F_a} y\,dF + \frac{E_p}{E_a}\int_{F_p} y\,dF = S_{ya}(z) + \frac{E_p}{E_a}S_{yp}(z),\\
I_{xxA}(z) &= \int_{F_a} x^2 dF + \frac{E_p}{E_a}\int_{F_p} x^2 dF = I_{xxa}(z) + \frac{E_p}{E_a}I_{xxp}(z),\\
I_{yyA}(z) &= \int_{F_a} y^2 dF + \frac{E_p}{E_a}\int_{F_p} y^2 dF = I_{yya}(z) + \frac{E_p}{E_a}I_{yyp}(z),\\
I_{xyA}(z) &= \int_{F_a} xy\,dF + \frac{E_p}{E_a}\int_{F_p} xy\,dF = I_{xya}(z) + \frac{E_p}{E_a}I_{xyp}(z),\\
S_{\omega A}(z) &= \int_{F_a} \omega\,dF + \frac{E_p}{E_a}\int_{F_p} \omega\,dF = S_{\omega a}(z) + \frac{E_p}{E_a}S_{\omega p}(z),\\
I_{x\omega A}(z) &= \int_{F_a} x\omega\,dF + \frac{E_p}{E_a}\int_{F_p} x\omega\,dF = I_{x\omega a}(z) + \frac{E_p}{E_a}I_{x\omega p}(z),\\
I_{y\omega A}(z) &= \int_{F_a} y\omega\,dF + \frac{E_p}{E_a}\int_{F_p} y\omega\,dF = I_{y\omega a}(z) + \frac{E_p}{E_a}I_{y\omega p}(z),\\
I_{\omega\omega A}(z) &= \int_{F_a} \omega^2 dF + \frac{E_p}{E_a}\int_{F_p} \omega^2 dF = I_{\omega\omega a}(z) + \frac{E_p}{E_a}I_{\omega\omega p}(z),
\end{aligned}
\tag{3.3.28}
$$

$$
K(t,z) = 4\sum_{f=a,p,b} n_{Gf}(t)\int_{F_f} e^2 dF = \sum_{f=a,p,b} n_{Gf}(t)\cdot K_f(z), \tag{3.3.29}
$$

$$
K_A(z) = 4\left(\int_{F_a} e^2 dF + \frac{G_p}{G_a}\int_{F_p} e^2 dF\right) = K_a(z) + \frac{G_p}{G_a}K_p(z). \tag{3.3.30}
$$

Faktori $n_{Ea}(t)$, $n_{Ep}(t)$ i $n_{Eb}(t)$ koji figurišu u obrascima (3.3.27) određeni su odnosima

$$
n_{Ea}(t) = \frac{E_a}{E_b(t)}, \quad n_{Ep}(t) = \frac{E_p}{E_b(t)}, \quad n_{Eb}(t) = n_{Eb} = 1, \tag{3.3.31}
$$

dok se veličine $n_{Ga}(t)$, $n_{Gp}(t)$ i $n_{Gb}(t)$ izražavaju na sledeći način:

$$
n_{Ga}(t) = \frac{G_a}{G_b(t)}, \quad n_{Gp}(t) = \frac{G_p}{G_b(t)}, \quad n_{Gb}(t) = n_{Gb} = 1. \tag{3.3.32}
$$

Kao što se vidi, geometrijske veličine definisane izrazima (3.3.27)-(3.3.30) izvedene su pod pretpostavkom promenljivosti poprečnih preseka, pri čemu neke od njih, osim što zavise od koordinate z, zavise i od vremena t.

To se isto može reći i za funkcije $\tilde{p}_z(t,z)$, $\tilde{p}_x(t,z)$, $\tilde{p}_y(t,z)$ i $\tilde{m}_p(t,z)$ koje su određene na sledeći način:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_z(t,z) &= \left[1+\int_{t_0}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left\{p_z(z)+\frac{d}{dz}\int_{F_p}\left[\sigma_{pp}(z)-E_p\varepsilon_p(t_0,z)\right]dF\right\}-E_b(t)\varepsilon_s(t)\frac{d}{dz}\left[\int_{F_b}dF\right]=-\varepsilon_s(t)E_b(t)\cdot F_b'(z)+\\&+E_p\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left\{\frac{p_z(z)}{E_p}+\frac{1}{E_p}\left[\sigma_{pp}(z)\cdot F_p(z)\right]'-\left[F_p(z)\zeta'(t_0,z)\right]'+\left[S_{xp}(z)\,\xi''(t_0,z)\right]'+\left[S_{yp}(z)\,\eta''(t_0,z)\right]'+\left[S_{\omega p}(z)\,\theta''(t_0,z)\right]'\right\},\end{aligned}\tag{3.3.33}$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_x(t,z) &= \left[1+\int_{t_0}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left\{p_x(z)+m_x'(z)+\frac{d^2}{dz^2}\int_{F_p}\left[\sigma_{pp}(z)x-E_p\varepsilon_p(t_0,z)x\right]dF\right\}-E_b(t)\varepsilon_s(t)\frac{d^2}{dz^2}\left[\int_{F_b}x\,dF\right]=-\varepsilon_s(t)\cdot E_b(t)\cdot S_{xb}''(z)+\\&+E_p\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left\{\frac{p_x(z)+m_x'(z)}{E_p}+\frac{1}{E_p}\left[\sigma_{pp}(z)S_{xp}(z)\right]''-\left[S_{xp}(z)\,\zeta'(t_0,z)\right]''+\left[I_{xxp}(z)\,\xi''(t_0,z)\right]''+\left[I_{xyp}(z)\,\eta''(t_0,z)\right]''+\left[I_{x\omega p}(z)\,\theta''(t_0,z)\right]''\right\},\end{aligned}\tag{3.3.34}$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_y(t,z) &= \left[1+\int_{t_0}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left\{p_y(z)+m_y'(z)+\frac{d^2}{dz^2}\int_{F_p}\left[\sigma_{pp}(z)y-E_p\varepsilon_p(t_0,z)y\right]dF\right\}-E_b(t)\cdot\varepsilon_s(t)\frac{d^2}{dz^2}\left[\int_{F_b}y\,dF\right]=-\varepsilon_s(t)E_b(t)\,S_{yb}''(z)+\\&+E_p\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left\{\frac{p_y(z)+m_y'(z)}{E_p}+\frac{1}{E_p}\left[\sigma_{pp}(z)S_{yp}(z)\right]''-\left[S_{yp}(z)\cdot\zeta'(t_0,z)\right]''+\left[I_{xyp}(z)\,\xi''(t_0,z)\right]''+\left[I_{yyp}(z)\,\eta''(t_0,z)\right]''+\left[I_{y\omega p}(z)\,\theta''(t_0,z)\right]''\right\},\end{aligned}\tag{3.3.35}$$

$$\begin{aligned}\tilde{m}_p(t,z) &= \left[1+\int_{t_0}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left\{m_p(z)+m_\omega'(z)+\frac{d^2}{dz^2}\int_{F_p}\left[\sigma_{pp}(z)\omega-E_p\varepsilon_p(t_0,z)\omega\right]dF\right\}-E_b(t)\varepsilon_s(t)\frac{d^2}{dz^2}\left[\int_{F_b}\omega\,dF\right]=-\varepsilon_s(t)E_b(t)\,S_{\omega b}''(z)+\\&+E_p\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left\{\frac{m_p(z)+m_\omega'(z)}{E_p}+\frac{1}{E_p}\left[\sigma_{pp}(z)S_{\omega p}(z)\right]''-\left[S_{\omega p}(z)\cdot\zeta'(t_0,z)\right]''+\left[I_{x\omega p}(z)\,\xi''(t_0,z)\right]''+\left[I_{y\omega p}(z)\,\eta''(t_0,z)\right]''+\left[I_{\omega\omega p}(z)\,\theta''(t_0,z)\right]''\right\}.\end{aligned}\tag{3.3.36}$$

Ovi izrazi odnose se u stvari na tankozidne konstrukcije prednapregnute kablovima, što je posledica upotrebe relacija (3.3.4) prilikom izvođenja integro-diferencijalnih jednačina (3.3.23)-(3.3.26). Ukoliko se, pak, radi o konstrukcijama prednapregnutim na stazi, potrebno je samo u izraze (3.3.33)-(3.3.36) uneti vrednosti $\varepsilon_p(t_0,z)=\varepsilon_p'(t_0,z)=\varepsilon_p''(t_0,z)=0$, što proizilazi iz razmatranja veza (3.3.3) i (3.3.4).

Veze izmedu presečnih sila i pomeranja, imajući u vidu prethodna izlaganja, mogu da se predstave u vidu sledećih integro-diferencijalnih jednačina:

$$\frac{1}{E_b(t)}\left[N(t,z)+\int_{t_0}^{t}N(\tau_t,z)J(t,\tau_t)d\tau_t\right]=F(t,z)\cdot\zeta'(t,z)-S_x(t,z)\cdot\xi''(t,z)-S_y(t,z)\eta''(t,z)-S_\omega(t,z)\theta''(t,z)+\frac{\tilde{N}(t,z)}{E_b(t)}+$$
$$+\frac{E_a}{E_b(t)}\int_{t_0}^{t}\left[\zeta'(\tau_t,z)\cdot F_A(z)-\xi''(\tau_t,z)S_{xA}(z)-\eta''(\tau_t,z)S_{yA}(z)-\theta''(\tau_t,z)S_{\omega A}(z)\right]J(t,\tau_t)d\tau_t, \qquad (3.3.37)$$

$$\frac{1}{E_b(t)}\left[Q_x(t,z)+\int_{t_0}^{t}Q_x(\tau_t,z)J(t,\tau_t)d\tau_t\right]=\left[S_x(t,z)\zeta'(t,z)\right]'-\left[I_{xx}(t,z)\cdot\xi''(t,z)\right]'-\left[I_{xy}(t,z)\eta''(t,z)\right]'-\left[I_{x\omega}(t,z)\theta''(t,z)\right]'+\frac{\tilde{Q}_x(t,z)}{E_b(t)}+$$
$$+\frac{E_a}{E_b(t)}\int_{t_0}^{t}\left\{\left[\zeta'(\tau_t,z)S_{xA}(z)\right]'-\left[\xi''(\tau_t,z)I_{xxA}(z)\right]'-\left[\eta''(\tau_t,z)I_{xyA}(z)\right]'-\left[\theta''(\tau_t,z)I_{x\omega A}(z)\right]'\right\}J(t,\tau_t)d\tau_t, \qquad (3.3.38)$$

$$\frac{1}{E_b(t)}\left[Q_y(t,z)+\int_{t_0}^{t}Q_y(\tau_t,z)J(t,\tau_t)d\tau_t\right]=\left[S_y(t,z)\cdot\zeta'(t,z)\right]'-\left[I_{xy}(t,z)\xi''(t,z)\right]'-\left[I_{yy}(t,z)\eta''(t,z)\right]'-\left[I_{y\omega}(t,z)\theta''(t,z)\right]'+\frac{\tilde{Q}_y(t,z)}{E_b(t)}+$$
$$+\frac{E_a}{E_b(t)}\int_{t_0}^{t}\left\{\left[\zeta'(\tau_t,z)S_{yA}(z)\right]'-\left[\xi''(\tau_t,z)I_{xyA}(z)\right]'-\left[\eta''(\tau_t,z)I_{yyA}(z)\right]'-\left[\theta''(\tau_t,z)I_{y\omega A}(z)\right]'\right\}J(t,\tau_t)d\tau_t, \qquad (3.3.39)$$

$$\frac{1}{E_b(t)}\left[M_x(t,z)+\int_{t_0}^{t}M_x(\tau_t,z)J(t,\tau_t)d\tau_t\right]=S_x(t,z)\zeta'(t,z)-I_{xx}(t,z)\xi''(t,z)-I_{xy}(t,z)\eta''(t,z)-I_{x\omega}(t,z)\theta''(t,z)+\frac{\tilde{M}_x(t,z)}{E_b(t)}+$$
$$+\frac{E_a}{E_b(t)}\int_{t_0}^{t}\left[\zeta'(\tau_t,z)S_{xA}(z)-\xi''(\tau_t,z)I_{xxA}(z)-\eta''(\tau_t,z)I_{xyA}(z)-\theta''(\tau_t,z)I_{x\omega A}(z)\right]J(t,\tau_t)d\tau_t, \qquad (3.3.40)$$

$$\frac{1}{E_b(t)}\left[M_y(t,z)+\int_{t_0}^{t}M_y(\tau_t,z)J(t,\tau_t)d\tau_t\right]=S_y(t,z)\zeta'(t,z)-I_{xy}(t,z)\xi''(t,z)-I_{yy}(t,z)\eta''(t,z)-I_{y\omega}(t,z)\theta''(t,z)+\frac{\tilde{M}_y(t,z)}{E_b(t)}+$$
$$+\frac{E_a}{E_b(t)}\int_{t_0}^{t}\left[\zeta'(\tau_t,z)S_{yA}(z)-\xi''(\tau_t,z)I_{xyA}(z)-\eta''(\tau_t,z)I_{yyA}(z)-\theta''(\tau_t,z)I_{y\omega A}(z)\right]J(t,\tau_t)d\tau_t, \qquad (3.3.41)$$

$$\frac{1}{E_b(t)}\left[T_P(t,z)+\int_{t_0}^{t}T_P(\tau_t,z)J(t,\tau_t)d\tau_t\right]=\left[S_\omega(t,z)\zeta'(t,z)\right]'-\left[I_{x\omega}(t,z)\xi''(t,z)\right]'-\left[I_{y\omega}(t,z)\eta''(t,z)\right]'-\left[I_{\omega\omega}(t,z)\theta''(t,z)\right]'+\frac{G_b(t)}{E_b(t)}K(t,z)\theta'(t,z)+\frac{\tilde{T}_P(t,z)}{E_b(t)}+$$
$$+\frac{E_a}{E_b(t)}\int_{t_0}^{t}\left\{\left[\zeta'(\tau_t,z)S_{\omega A}(z)\right]'-\left[\xi''(\tau_t,z)I_{x\omega A}(z)\right]'-\left[\eta''(\tau_t,z)I_{y\omega A}(z)\right]'-\left[\theta''(\tau_t,z)I_{\omega\omega A}(z)\right]'+\frac{G_a}{E_a}\theta'(\tau_t,z)K_A(z)\right\}J(t,\tau_t)d\tau_t, \qquad (3.3.42)$$

$$\frac{1}{E_b(t)}\left[M_\omega(t,z)+\int_{t_0}^{t}M_\omega(\tau_t,z)J(t,\tau_t)d\tau_t\right]=S_\omega(t,z)\zeta'(t,z)-I_{x\omega}(t,z)\xi''(t,z)-I_{y\omega}(t,z)\eta''(t,z)-I_{\omega\omega}(t,z)\theta''(t,z)+\frac{\tilde{M}_\omega(t,z)}{E_b(t)}+$$
$$+\frac{E_a}{E_b(t)}\int_{t_0}^{t}\left[\zeta'(\tau_t,z)S_{\omega A}(z)-\xi''(\tau_t,z)I_{x\omega A}(z)-\eta''(\tau_t,z)I_{y\omega A}(z)-\theta''(\tau_t,z)I_{\omega\omega A}(z)\right]J(t,\tau_t)d\tau_t. \qquad (3.3.43)$$

U relacijama (3.3.37)-(3.3.43) figurišu ove funkcije:

$$\tilde{N}(t,z)=\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\int_{F_p}\left[\sigma_{pp}(z)-E_p\varepsilon_p(t_0,z)\right]dF-E_b(t)F_b(z)\varepsilon_s(t)=-E_b(t)F_b(z)\varepsilon_s(t)+$$
$$+\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\left\{\sigma_{pp}(z)F_p(z)-E_p\left[F_p(z)\zeta'(t_0,z)-S_{xp}(z)\xi''(t_0,z)-S_{yp}(z)\eta''(t_0,z)-S_{\omega p}(z)\theta''(t_0,z)\right]\right\}, \quad (3.3.44)$$

$$\tilde{Q}_x(t,z)=\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\left\{m_x(z)+\frac{d}{dz}\int_{F_p}\left[\sigma_{pp}(z)x-E_p\varepsilon_p(t_0,z)x\right]dF\right\}-E_b(t)\varepsilon_s(t)\frac{d}{dz}\int_{F_b}x\,dF=-E_b(t)\varepsilon_s(t)S'_{xb}(z)+$$
$$+E_p\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\left\{\frac{m_x(z)}{E_p}+\frac{1}{E_p}\left[S_{xp}(z)\sigma_{pp}(z)\right]'-\left[S_{xp}(z)\zeta'(t_0,z)\right]'+\left[I_{xxp}(z)\xi''(t_0,z)\right]'+\left[I_{xyp}(z)\eta''(t_0,z)\right]'+\left[I_{x\omega p}(z)\theta''(t_0,z)\right]'\right\}, \quad (3.3.45)$$

$$\tilde{Q}_y(t,z)=\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\left\{m_y(z)+\frac{d}{dz}\int_{F_p}\left[\sigma_{pp}(z)y-E_p\varepsilon_p(t_0,z)y\right]dF\right\}-E_b(t)\varepsilon_s(t)\frac{d}{dz}\int_{F_b}y\,dF=-E_b(t)\varepsilon_s(t)S'_{yb}(z)+$$
$$+E_p\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\left\{\frac{m_y(z)}{E_p}+\frac{1}{E_p}\left[S_{yp}(z)\sigma_{pp}(z)\right]'-\left[S_{yp}(z)\zeta'(t_0,z)\right]'+\left[I_{xyp}(z)\xi''(t_0,z)\right]'+\left[I_{yyp}(z)\eta''(t_0,z)\right]'+\left[I_{y\omega p}(z)\theta''(t_0,z)\right]'\right\}, \quad (3.3.46)$$

$$\tilde{M}_x(t,z)=\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\cdot\int_{F_p}\left[\sigma_{pp}(z)x-E_p\varepsilon_p(t_0,z)x\right]dF-E_b(t)\varepsilon_s(t)S_{xb}(z)=-E_b(t)\varepsilon_s(t)S_{xb}(z)+$$
$$+\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\left\{\sigma_{pp}(z)S_{xp}(z)-E_p\left[S_{xp}(z)\zeta'(t_0,z)-I_{xxp}(z)\xi''(t_0,z)-I_{xyp}(z)\eta''(t_0,z)-I_{x\omega p}(z)\theta''(t_0,z)\right]\right\}, \quad (3.3.47)$$

$$\tilde{M}_y(t,z)=\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\cdot\int_{F_p}\left[\sigma_{pp}(z)y-E_p\varepsilon_p(t_0,z)y\right]dF-E_b(t)\varepsilon_s(t)S_{yb}(z)=-E_b(t)\varepsilon_s(t)S_{yb}(z)+$$
$$+\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\left\{\sigma_{pp}(z)S_{yp}(z)-E_p\left[S_{yp}(z)\zeta'(t_0,z)-I_{xyp}(z)\xi''(t_0,z)-I_{yyp}(z)\eta''(t_0,z)-I_{y\omega p}(z)\theta''(t_0,z)\right]\right\}, \quad (3.3.48)$$

$$\tilde{T}_p(t,z)=\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\left\{m_\omega(z)+\frac{d}{dz}\int_{F_p}\left[\sigma_{pp}(z)\omega-E_p\varepsilon_p(t_0,z)\omega\right]dF\right\}-E_b(t)\varepsilon_s(t)\frac{d}{dz}\int_{F_b}\omega\,dF=-E_b(t)\varepsilon_s(t)S'_{\omega b}(t)+$$
$$+E_p\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\left\{\frac{m_\omega(z)}{E_p}+\frac{1}{E_p}\left[S_{\omega p}(z)\cdot\sigma_{pp}(z)\right]'-\left[S_{\omega p}(z)\cdot\zeta'(t_0,z)\right]'+\left[I_{x\omega p}(z)\xi''(t_0,z)\right]'+\left[I_{y\omega p}(z)\eta''(t_0,z)\right]'+\left[I_{\omega\omega p}(z)\theta''(t_0,z)\right]'\right\} \quad (3.3.49)$$

$$\tilde{M}_\omega(t,z)=\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\int_{F_p}\left[\sigma_{pp}(z)\omega-E_p\varepsilon_p(t_0,z)\omega\right]dF-E_b(t)\varepsilon_s(t)S_{\omega b}(z)=-E_b(t)\varepsilon_s(t)S_{\omega b}(z)+$$
$$+\left[1+\int_{t_0}^{t}J(t,\tau_t)d\tau_t\right]\left\{\sigma_{pp}(z)S_{\omega p}(z)-E_p\left[S_{\omega p}(z)\zeta'(t_0,z)-I_{x\omega p}(z)\xi''(t_0,z)-I_{y\omega p}(z)\eta''(t_0,z)-I_{\omega\omega p}(z)\theta''(t_0,z)\right]\right\}. \quad (3.3.50)$$

U formi u kojoj su prikazani, izrazi (3.3.44)-(3.3.50) važe samo za konstrukcije koje se prednaprežu kablovima. Međutim, sa vrednostima $\varepsilon_p(t_o,z)=\varepsilon_p'(t_o,z)=0$ navedene funkcije postaju upotrebljive i za proračun konstrukcija prednapregnutih na stazi.

Relacijama (3.3.23)-(3.3.50) problem naponskog i deformacionog stanja predmetnog tankozidnog štapa je formalno-matematički potpuno definisan. Kao što se vidi, dobijen je sistem simultanih integro-diferencijalnih jednačina, pri čemu koeficijenti ovih jednačina u opštem slučaju nisu konstante. Obzirom na red jednačina (3.3.23)-(3.3.26) proizilazi da će u njihovim rešenjima figurisati ukupno 14 integracionih konstanti. Ove konstante se načelno određuju kombinovanjem graničnih uslova po silama i graničnih uslova po pomeranjima. Za slučaj postavljanja uslova po silama treba koristiti izraze (3.3.37)-(3.3.50). Mada granični uslovi u opštem slučaju mogu da zavise i od promenljive t, mi ćemo u daljem razmatrati samo štapove kod kojih pomeranja i sile na krajevima ne zavise od vremena.

Na bazi poznatih funkcija $\zeta(t,z)$, $\xi(t,z)$, $\eta(t,z)$ i $\theta(t,z)$ možemo da odredimo i napone u pojedinim tačkama sistema. U vezi sa tim prvo treba putem izraza (3.3.8) i (3.3.9) izračunati veličine $\varepsilon(t,x,y,z)$ i $\gamma_{zs}(t,x,y,z)$, a zatim ovako dobijene vrednosti treba uneti u veze između napona i deformacija. Na taj način se vrlo lako dolazi do napona $\sigma(t,x,y,z)$ i $\tau_s(t,x,y,z)$ u čeličnim delovima preseka. Što se tiče napona $\sigma_b(t,x,y,z)$ i $\tau_{sb}(t,x,y,z)$, do njih se može doći jedino preko izraza (3.3.1) i (3.3.2), a to znači da se u ovom slučaju problem svodi na rešavanje integralnih jednačina.

Kada su poznate vrednosti napona $\sigma_a(t,x,y,z)$, $\sigma_p(t,x,y,z)$ i $\sigma_b(t,x,y,z)$ možemo da izračunamo i napone $\bar{\tau}_{wb}(t,x,y,z)$. Do njih se dolazi putem relacije (1.4.20) koja, u skladu sa pretpostavkama iznetim u ovom poglavlju, može da se prikaže u obliku

$$\bar{\tau}_{wb}(t,x,y,z)=-\frac{1}{d_K}\left[\sum_{\xi=a,p,b}\int_{\tilde{F}_\xi}\frac{\partial\sigma_\xi(t,x,y,z)}{\partial z}dF+\int_{\tilde{s}}\bar{p}_z(z)ds\right]. \qquad (3.3.51)$$

Napone $\tau_{wb}(t,x,y,z)$ i $\tau_{wA}(t,x,y,z)$, pak, dobićemo preko relacija (1.4.24). Međutim, prethodno je potrebno da odredimo rastojanje Δ_k kojim je definisan položaj one linije u ravni poprečnog preseka koju smo nazvali srednjom linijom profila. Imajući u vidu pretpostavke na osnovu kojih se dolazi do ove vrednosti, proizilazi da će u našem slučaju, saglasno izrazu (1.4.18), biti

$$\Delta_K = \frac{[n_{Ga}(t)-1]F_{aK}\bar{e}_{aK} + [n_{GP}(t)-1]F_{PK}\bar{e}_{PK}}{[n_{Ga}(t)-1]F_{aK} + [n_{GP}(t)-1]F_{PK} + d_K b_K}, \tag{3.3.52}$$

pa se dobija da je

$$\tau_{wb}(t,x,y,z) = \frac{F_{aK}[\bar{e}_{aK} - \Delta_K(t)] + F_{PK}[\bar{e}_{PK} - \Delta_K(t)]}{F_{aK}\bar{e}_{aK} + F_{PK}\bar{e}_{PK}} \bar{\tau}_{wb}(t,x,y,z), \tag{3.3.53}$$

$$\tau_{wA}(t,x,y,z) = \frac{d_K b_K \Delta_K(t)}{F_{aK}\bar{e}_{aK} + F_{PK}\bar{e}_{PK}} \bar{\tau}_{wb}(t,x,y,z). \tag{3.3.54}$$

Kao što se vidi, kod izvođenja izraza (3.3.51)-(3.3.54) primenili smo analogne obrasce elestične teorije tankozidnih štapova, što je sasvim na mestu, pošto se u konkretnom slučaju radi o izrazima izvedenim na bazi uslova ravnoteže koji kao takvi važe i u proizvoljnom vremenu t.

Sva dosadašnja izlaganja odnosila su se na štap potpuno proizvoljnog poprečnog preseka, pa smo zbog toga i dobili rešenje problema u vidu sistema od četiri simultane integro-diferencijalne jednačine. Međutim, u slučajevima specijalnih formi preseka, jednačine (3.3.23)-(3.3.50) mogu se u izvesnoj meri uprostiti. Tako na primer, ako se radi o presecima kod kojih je y osa osovina simetrije i ako se tačka P usvoji na ovoj osovini, neće se dobiti četiri simultane jednačine, već se problem svodi na dva nezavisna sistema jednačina. U prvom sistemu kao nepoznate figurišu pomeranja $\xi(t,z)$ i $\eta(t,z)$, dok su nepoznate u drugom sistemu funkcije $\zeta(t,z)$ i $\theta(t,z)$. Isto tako, i kod preseka koji su simetrični u odnosu na x osu problem se svodi na rešavanje dva sistema jednačina. Naime, ako tačku P usvojimo na osovini x, u jednom od ovih sistema javiće se nepoznata pomeranja $\xi(t,z)$ i $\zeta(t,z)$, dok će u drugom sistemu kao nepoznate figurisati funkcije $\eta(t,z)$ i $\theta(t,z)$. Najjednostavniji slučaj imamo kod sistema čiji su preseci simetrični u odnosu na dve međusobno upravne osovine - ose x i y. Ako se tačka P usvoji u težištu jednog ovakvog preseka, umesto simultanih integro-diferencijalnih jednačina dobijaju se četiri separatne jednačine. To znači da se u konkretnom slučaju sprovode potpuno nezavisni postupci određivanja pomeranja $\zeta(t,z)$, $\xi(t,z)$, $\eta(t,z)$ i $\theta(t,z)$.

Izrazi (3.3.23)-(3.3.50) mogu se iskoristiti i za rešavanje problema u vremenu $t=t_o$. Ako i na ovom mestu primenimo postupak koji odgovara postupku izloženom u poglavlju 1. ovoga rada, tj. ako uvedemo pojmove kao što su "težište idealnog preseka", "glavne težišne osovine idealnog preseka", "centar smicanja idealnog preseka", "normirana sektorska koordinata" itd., dobićemo sledeće jednačine problema:

$$
\begin{aligned}
&E_b(t_0)\left[\hat F(t_0,z)\cdot\zeta'(t_0,z)\right]' + \tilde p_z(t_0,z) = 0,\\
&E_b(t_0)\left[\hat I_{xx}(t_0,z)\,\xi''(t_0,z)\right]'' - \tilde p_x(t_0,z) = 0,\\
&E_b(t_0)\left[\hat I_{yy}(t_0,z)\,\eta''(t_0,z)\right]'' - \tilde p_y(t_0,z) = 0,\\
&E_b(t_0)\left[\hat I_{\omega\omega}(t_0,z)\,\theta''(t_0,z)\right]'' - G_b(t_0)\left[\hat K(t_0,z)\,\theta'(t_0,z)\right]' - \tilde m_p(t_0,z).
\end{aligned}
\tag{3.3.55}
$$

Funkcije $\tilde p_z(t_o,z)$, $\tilde p_x(t_o,z)$, $\tilde p_y(t_o,z)$ i $\tilde m_p(t_o,z)$ definisane su izrazima

$$
\begin{aligned}
&\tilde p_z(t_0,z) = p_z(z) + \left[\sigma_{pp}(z)F_p(z)\right]' - \varepsilon_s(t_0)E_b(t_0)F_b'(z),\\
&\tilde p_x(t_0,z) = p_x(z) + m_x'(z) + \left[\sigma_{pp}(z)S_{xp}(z)\right]'' - \varepsilon_s(t_0)E_b(t_0)S_{xb}''(z),\\
&\tilde p_y(t_0,z) = p_y(z) + m_y'(z) + \left[\sigma_{pp}(z)S_{yp}(z)\right]'' - \varepsilon_s(t_0)E_b(t_0)S_{yb}''(z),\\
&\tilde m_p(t_0,z) = m_p(z) + m_\omega'(z) + \left[\sigma_{pp}(z)S_{\omega p}(z)\right]'' - \varepsilon_s(t_0)\cdot E_b(t_0)\cdot S_{\omega b}''(z),
\end{aligned}
\tag{3.3.56}
$$

dok su geometrijske karakteristike preseka sada određene putem relacija

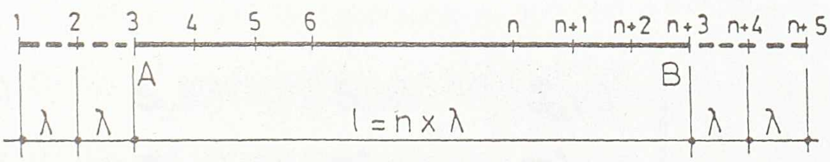
$$
\begin{aligned}
&\hat F(t_0,z) = F(t_0,z)\,\Big| - \frac{E_p}{E_b(t_0)}F_p(z),\\
&\hat I_{xx}(t_0,z) = I_{xx}(t_0,z)\,\Big| - \frac{E_p}{E_b(t_0)}I_{xxp}(z),\\
&\hat I_{yy}(t_0,z) = I_{yy}(t_0,z)\,\Big| - \frac{E_p}{E_b(t_0)}I_{yyp}(z),\\
&\hat I_{\omega\omega}(t_0,z) = I_{\omega\omega}(t_0,z)\,\Big| - \frac{E_p}{E_b(t_0)}I_{\omega\omega p}(z),\\
&\hat K(t_0,z) = K(t_0,z)\,\Big| - \frac{E_p}{E_b(t_0)}K_p(z).
\end{aligned}
\tag{3.3.57}
$$

Izrazi (3.3.57) važe kako za konstrukcije prednapregnute kablovima, tako i za konstrukcije prednapregnute na stazi, s tim što u prvom slučaju treba upotrebiti celokupne izraze, dok u drugom slučaju u proračun ulaze samo vrednosti do vertikalnih crta.

3.4. Numeričko rešavanje problema na bazi izvedenih integro-diferencijalnih jednačina i zadatih graničnih uslova

Mada izrazi (3.3.23)-(3.3.50) sa formalno-matematičkog gledišta u potpunosti definišu problem tankozidnog prednapregnutog štapa u svakom vremenu unutar intervala $[t_0,\infty)$, postavlja se pitanje praktičnog rešavanja dobijenih integro-diferencijalnih jednačina i formulisanja konkretnih graničnih uslova. Kao što se vidi, dobijene relacije nije moguće rešiti u zatvorenom obliku, a ova mogućnost ne postoji čak ni u slučajevima štapova sa dvoosnom simetrijom poprečnog preseka, ukoliko se za funkcije $E_b(t)$, $\mathcal{E}_s(t)$ i $J(t,\tau_t)$ usvoje analitički izrazi koji optimalno zadovoljavaju eksperimentalne podatke. Stoga nam se čini da ovom prilikom ne bi bilo celishodno ići na uprošćavanje dobijenih relacija uvođenjem u postupak onih pojmova koji u klasičnoj teoriji tankozidnih štapova dovode do jednostavnijih relacija (težište preseka, glavne težišne osovine, centar smicanja itd.). Ovakav stav se može prihvatiti utoliko pre, ako se uzme u obzir da je svakako veoma ograničen broj onih praktičnih problema koji se mogu rešiti bez korišćenja dovoljno moćnih elektronskih računara. Ako se pođe od pretpostavke da nam na raspoloženju stoji odgovarajuća računska tehnika, postaje irelevantno pitanje broja računskih operacija, pa se kao osnovno nameće pitanje izbora najcelishodnijeg numeričkog aparata. Imajući u vidu da se ovde radi o integro-diferencijalnim jednačinama, čini nam se da najviše opravdanja ima primena jednog kombinovanog numeričkog postupka. Radi se u stvari o kombinaciji poznate metode konačnih razlika (diferencne metode) i metode Krilova - Bogoljubova, koja se inače široko primenjuje kod rešavanja integralnih jednačina. Mada navedene metode sa matematičke tačke gledišta pripadaju kategoriji numeričkih postupaka koji daju rezultate približne tačnosti, smatramo da je u konkretnom slučaju ovakav tretman sasvim na mestu, pošto uvek postoji mogućnost da se greške rezultata svedu na željeni nivo. Pored toga, čini nam se da u konkretnom slučaju i ne treba insistirati na nekom "tačnijem" matematičkom tretmanu. Naime, na stvarnu tačnost rezultata ovde ne utiče toliko matematički aparat kojim se problem rešava, koliko utiču vrednosti fizičkih karakteristika materijala, na prvom mestu betona, koje figurišu u jednačinama problema. Drgim rečima, stepen tačnosti sa kojom se određuju reološka svojstva betona, a koja se u našem slučaju iskazuju putem funkcija $E_b(t)$, $\varepsilon_s(t)$ i $J(t,\tau_t)$, danas je mnogo manji od tačnosti koja se može ostvariti primenom metode konačnih razlika i metode Krilova - Bogoljubova.

Obzirom da se ovde razmatraju pravi tankozidni štapovi, u daljem ćemo analizirati štap AB, dužine l, izdeljen na n elemenata konačne dužine λ ~~(sl.~~ 3.16). U vezi sa primenom diferencnog



Sl. 3.16

postupka, pored ekvidistantnih tačaka na samom štapu, prinuđeni smo da usvojimo i izvestan broj tačaka van njegovih granica, što je neophodno kada se ima u vidu red izvoda koji se pojavljuju u jednačinama (3.3.23)-(3.3.26). Na osnovu ovog proizilazi da u postupak ulazi ukupno n+5 tačaka, od kojih n+1 leži na samom štapu, što znači da svakom od navedenih izraza odgovara broj od n+1 algebarskih jednačina sa n+5 nepoznatih. Korišćenjem matrične notacije ove algebarske jednačine za slučaj vremena $t=t_i$ možemo da prikažemo na sledeći način:

$$\left[\mathbf{A}(t_i)\cdot\hat{\mathbf{Q}}+\mathbf{B}(t_i)\cdot\hat{\mathbf{P}}+\mathbf{C}(t_i)\cdot\hat{\mathbf{N}}+\mathbf{D}(t_i)\cdot\hat{\mathbf{M}}\right]\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_i)+$$

$$+\frac{E_a}{E_b(t_i)}\int_{t_0}^{t_i} J(t_i,\tau_t)\left(\mathbf{A}_A\hat{\mathbf{Q}}+\mathbf{B}_A\hat{\mathbf{P}}+\mathbf{C}_A\hat{\mathbf{N}}+\mathbf{D}_A\hat{\mathbf{M}}\right)\boldsymbol{\Phi}(\tau_t)\,d\tau_t=\frac{1}{E_b(t_i)}\mathbf{S}(t_i). \qquad (3.4.1)$$

U ispisanoj matričnoj relaciji figurišu ove matrice:

$$\mathbf{A}(t_i)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{xx}(t_i) & \mathbf{I}_{xy}(t_i) & \mathbf{I}_{x\omega}(t_i) \\ 0 & \mathbf{I}_{yx}(t_i) & \mathbf{I}_{yy}(t_i) & \mathbf{I}_{y\omega}(t_i) \\ 0 & \mathbf{I}_{x\omega}(t_i) & \mathbf{I}_{y\omega}(t_i) & \mathbf{I}_{\omega\omega}(t_i) \end{Vmatrix}_{4(n+1),4(n+1)}, \qquad (3.4.2)$$

$$\mathbf{B}(t_i)=\begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{S}_x(t_i) & \mathbf{S}_y(t_i) & \mathbf{S}_\omega(t_i) \\ -\mathbf{S}_x(t_i) & 2\mathbf{I}'_{xx}(t_i) & 2\mathbf{I}'_{xy}(t_i) & 2\mathbf{I}'_{x\omega}(t_i) \\ -\mathbf{S}_y(t_i) & 2\mathbf{I}'_{yx}(t_i) & 2\mathbf{I}'_{yy}(t_i) & 2\mathbf{I}'_{y\omega}(t_i) \\ -\mathbf{S}_\omega(t_i) & 2\mathbf{I}'_{x\omega}(t_i) & 2\mathbf{I}'_{y\omega}(t_i) & 2\mathbf{I}'_{\omega\omega}(t_i) \end{Vmatrix}_{4(n+1),4(n+1)}, \qquad (3.4.3)$$

$$\mathbf{C}(t_i)=\begin{Vmatrix} -\mathbf{F}(t_i) & \mathbf{S}'_x(t_i) & \mathbf{S}'_y(t_i) & \mathbf{S}'_\omega(t_i) \\ -2\mathbf{S}'_x(t_i) & \mathbf{I}''_{xx}(t_i) & \mathbf{I}''_{xy}(t_i) & \mathbf{I}''_{x\omega}(t_i) \\ -2\mathbf{S}'_y(t_i) & \mathbf{I}''_{yx}(t_i) & \mathbf{I}''_{yy}(t_i) & \mathbf{I}''_{y\omega}(t_i) \\ -2\mathbf{S}'_\omega(t_i) & \mathbf{I}''_{x\omega}(t_i) & \mathbf{I}''_{y\omega}(t_i) & \overline{\overline{\mathbf{I}}}''_{\omega\omega}(t_i) \end{Vmatrix}_{4(n+1),4(n+1)}, \qquad (3.4.4)$$

$$\left(\overline{\overline{\mathbf{I}}}''_{\omega\omega}(t_i)=\mathbf{I}''_{\omega\omega}(t_i)-\frac{G_b(t_i)}{E_b(t_i)}\cdot\mathbf{K}(t_i)\right)$$

$$\mathbf{D}(t_i)=\begin{Vmatrix} -\mathbf{F}'(t_i) & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{S}''_x(t_i) & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{S}''_y(t_i) & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{S}''_\omega(t_i) & 0 & 0 & -\frac{G_b(t_i)}{E_b(t_i)}\cdot\mathbf{K}'(t_i) \end{Vmatrix}_{4(n+1),4(n+1)}, \qquad (3.4.5)$$

$$\mathbf{A}_A=\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{I}_{xxA} & \mathbf{I}_{xyA} & \mathbf{I}_{x\omega A}\\ 0 & \mathbf{I}_{yxA} & \mathbf{I}_{yyA} & \mathbf{I}_{y\omega A}\\ 0 & \mathbf{I}_{x\omega A} & \mathbf{I}_{y\omega A} & \mathbf{I}_{\omega\omega A}\end{matrix}\right\|_{4(n+1),4(n+1)},\quad \mathbf{B}_A=\left\|\begin{matrix} 0 & \mathbf{S}_{xA} & \mathbf{S}_{yA} & \mathbf{S}_{\omega A}\\ -\mathbf{S}_{xA} & 2\mathbf{I}'_{xxA} & 2\mathbf{I}'_{xyA} & 2\mathbf{I}'_{x\omega A}\\ -\mathbf{S}_{yA} & 2\mathbf{I}'_{yxA} & 2\mathbf{I}'_{yyA} & 2\mathbf{I}'_{y\omega A}\\ -\mathbf{S}_{\omega A} & 2\mathbf{I}'_{x\omega A} & 2\mathbf{I}'_{y\omega A} & 2\mathbf{I}'_{\omega\omega A}\end{matrix}\right\|_{4(n+1),4(n+1)},$$

$$\mathbf{C}_A=\left\|\begin{matrix} -\mathbf{F}_A & \mathbf{S}'_{xA} & \mathbf{S}'_{yA} & \mathbf{S}'_{\omega A}\\ -2\mathbf{S}'_{xA} & \mathbf{I}''_{xxA} & \mathbf{I}''_{xyA} & \mathbf{I}''_{x\omega A}\\ -2\mathbf{S}'_{yA} & \mathbf{I}''_{yxA} & \mathbf{I}''_{yyA} & \mathbf{I}''_{y\omega A}\\ -2\mathbf{S}'_{\omega A} & \mathbf{I}''_{x\omega A} & \mathbf{I}''_{y\omega A} & \bar{\bar{\mathbf{I}}}''_{\omega\omega A}\end{matrix}\right\|_{4(n+1),4(n+1)},\quad \mathbf{D}_A=\left\|\begin{matrix} -\mathbf{F}'_A & 0 & 0 & 0\\ -\mathbf{S}''_{xA} & 0 & 0 & 0\\ -\mathbf{S}''_{yA} & 0 & 0 & 0\\ -\mathbf{S}''_{\omega A} & 0 & 0 & -\frac{G_a}{E_a}\mathbf{K}'_A\end{matrix}\right\|_{4(n+1),4(n+1)}.$$

$$\left(\bar{\bar{\mathbf{I}}}''_{\omega\omega A}=\mathbf{I}''_{\omega\omega A}-\frac{G_a}{E_a}\mathbf{K}_A\right)$$

(3.4.6)

Svi elementi matrica (3.4.2)-(3.4.6) takođe su matrice. Elementi različiti od nule su kvadratne dijagonalne matrice reda n+1, dok su elementi jednaki nuli kvadratne nula-matrice reda n+1. U slučaju pomenutih dijagonalnih matrica elementi na glavnim dijagonalama određeni su konkretnim geometrijskim karakteristikama u tačkama (A)3, 4, 5, . . .(n+1), (n+2), (n+3)(B) posmatranog štapa. Na primer, elemenat matrice $\mathbf{A}(t_i)$ matrica $\mathbf{I}_{xx}(t_i)$ima oblik

$$\mathbf{I}_{xx}(t_i)=\left\|\begin{matrix} I_{xx3}(t_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & I_{xx4}(t_i) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{xx(n+2)}(t_i) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{xx(n+3)}(t_i)\end{matrix}\right\|_{(n+1),(n+1)},$$

dok matrica $\bar{\bar{I}}''_{\omega\omega A}$, koja figuriše u osnovnoj matrici C_A , može da se prikaže na sledeći način:

$$\bar{\bar{I}}'_{\omega\omega A} = \left\| \begin{matrix} \boxed{\bar{\bar{I}}''_{\omega\omega A3}} & O & O & O & O & O \\ O & \boxed{\bar{\bar{I}}''_{\omega\omega A4}} & O & O & O & O \\ O & O & \boxed{\cdot} & O & O & O \\ O & O & O & \boxed{\cdot} & O & O \\ O & O & O & O & \boxed{\bar{\bar{I}}''_{\omega\omega A(n+2)}} & O \\ O & O & O & O & O & \boxed{\bar{\bar{I}}''_{\omega\omega A(n+3)}} \end{matrix} \right\|_{(n+1),(n+1)} .$$

$$\left(\bar{\bar{I}}''_{\omega\omega A\alpha} = I''_{\omega\omega A\alpha} - \frac{G_a}{E_a} K_{A\alpha} , \quad \alpha = 3, 4, 5, \ldots (n+2), (n+3) \right)$$

Ukoliko nije poznat analitički izraz za određenu geometrijsku karakteristiku, oni elementi pojedinih matrica koji se izražavaju u vidu izvoda funkcije date geometrijske karakteristike mogu da se odrede numeričkim postupkom.

Pored već pomenutih, u izrazu (3.4.1) imamo još i sledeće matrice:

$$\hat{M} = \left\| \begin{matrix} M_D & O & O & O \\ O & M_D & O & O \\ O & O & M_D & O \\ O & O & O & M_D \end{matrix} \right\| , \quad \hat{N} = \left\| \begin{matrix} N_D & O & O & O \\ O & N_D & O & O \\ O & O & N_D & O \\ O & O & O & N_D \end{matrix} \right\| ,$$

$$\hat{P} = \left\| \begin{matrix} P_D & O & O & O \\ O & P_D & O & O \\ O & O & P_D & O \\ O & O & O & P_D \end{matrix} \right\| , \quad \hat{Q} = \left\| \begin{matrix} Q_D & O & O & O \\ O & Q_D & O & O \\ O & O & Q_D & O \\ O & O & O & Q_D \end{matrix} \right\| . \tag{3.4.7}$$

Osim nula-matrica $\mathbf{O}$ tipa (n+1),(n+5) , u izrazima (3.4.7), saglasno relacijama putem kojih se u metodi konačnih razlika definišu izvodi određene funkcije, takođe figurišu i ove matrice:

$$M_D=\frac{1}{2\lambda}\left\|\begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|_{(n+1),(n+5)}, \qquad (3.4.8)$$

$$N_D=\frac{1}{\lambda^2}\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|_{(n+1),(n+5)}, \qquad (3.5.9)$$

$$P_D=\frac{1}{2\lambda^3}\left\|\begin{matrix} -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{matrix}\right\|_{(n+1),(n+5)}, \qquad (3.4.10)$$

$$Q_D=\frac{1}{\lambda^4}\left\|\begin{matrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{matrix}\right\|_{(n+1),(n+5)}. \qquad (3.4.11)$$

Ostalo nam je da definišemo još samo matrice $\Phi(t_i)$ i $\mathbf{S}(t_i)$. Kao što pokazuje relacija (3.4.1), prva od ovih matrica je matrica čiji su članovi nepoznata pomeranja u tačkama 1, 2, 3, ... n+4, n+5. Saglasno tome, ovu matricu možemo da prikažemo u obliku

$$\Phi(t_i) = \begin{Vmatrix} \mathbf{\xi}(t_i) \\ \mathbf{\Xi}(t_i) \\ \mathbf{\eta}(t_i) \\ \mathbf{\Theta}(t_i) \end{Vmatrix}_{4(n+5),1}, \qquad (3.4.12)$$

pri čemu su njeni elementi takođe matrice i to matrice-kolone koje se definišu na sledeći način:

$$\mathbf{\xi}(t_i) = \| \xi_j(t_i) \|_{(n+5),1}, \quad \mathbf{\Xi}(t_i) = \| \Xi_j(t_i) \|_{(n+5),1},$$
$$\mathbf{\eta}(t_i) = \| \eta_j(t_i) \|_{(n+5),1}, \quad \mathbf{\Theta}(t_i) = \| \theta_j(t_i) \|_{(n+5),1}. \qquad (3.4.13)$$

Matricu $\mathbf{S}(t_i)$, pak, u opštem slučaju definišemo izrazom

$$\mathbf{S}(t_i) = \begin{Vmatrix} \widetilde{\mathbf{P}}_z(t_i) \\ \widetilde{\mathbf{P}}_x(t_i) \\ \widetilde{\mathbf{P}}_y(t_i) \\ \widetilde{\mathbf{M}}_p(t_i) \end{Vmatrix}_{4(n+1),1}, \qquad (3.4.14)$$

u kome matrice $\widetilde{\mathbf{P}}_z(t_i)$, $\widetilde{\mathbf{P}}_x(t_i)$, $\widetilde{\mathbf{P}}_y(t_i)$ i $\widetilde{\mathbf{M}}_p(t_i)$ predstavljaju matrice-kolone reda (n+1) čiji su članovi određeni vrednostima funkcija (3.3.33)-(3.3.36) u tačkama 3, 4, 5, . . . n+2, n+3. Ako uzmemo u obzir sve izraze koji ulaze u sastav ovih funkcija, matrica $\mathbf{S}(t_i)$ se može prikazati i na sledeći način:

$$\mathbf{S}(t_i) = \Big[1 + \int_{t_0}^{t_i} J(t_i, \tau_t)\, d\tau_t\Big] \cdot \Big[\mathbf{P} + \mathbf{P}_{PP} +$$
$$+ E_P(\mathbf{A}_P \hat{\mathbf{Q}} + \mathbf{B}_P \hat{\mathbf{P}} + \mathbf{C}_P \hat{\mathbf{N}} + \mathbf{D}_P \hat{\mathbf{M}}) \Phi(t_0)\Big] - \mathbf{P}_S(t_i). \qquad (3.4.15)$$

U ovoj matričnoj relaciji figurišu sledeće matrice:

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} \mathbf{P}_z \\ \mathbf{P}_x + \mathbf{M}'_x \\ \mathbf{P}_y + \mathbf{M}'_y \\ \mathbf{M}_p + \mathbf{M}'_\omega \end{Vmatrix}_{4(n+1),1}, \quad \begin{aligned} \mathbf{P}_z &= \| P_{zj} \|_{(n+1),1}, & \mathbf{P}_x + \mathbf{M}'_x &= \| P_{xj} + M'_{xj} \|_{(n+1),1}, \\ \mathbf{P}_y + \mathbf{M}'_y &= \| P_{yj} + M'_{yj} \|_{(n+1),1}, & \mathbf{M}_p + \mathbf{M}'_\omega &= \| M_{pj} + M'_{\omega j} \|_{(n+1),1}, \end{aligned} \qquad (3.4.16)$$

$$\mathbf{P}_{PP}=\mathbf{S}_{6_P}\cdot\mathbf{6}_P,\quad \mathbf{S}_{6_P}=\begin{Vmatrix} \mathbf{F}'_P & \mathbf{F}_P & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}'_{xP} & 2\mathbf{S}'_{xP} & \mathbf{S}_{xP} & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}''_{yP} & 2\mathbf{S}'_{yP} & \mathbf{S}_{yP} & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}''_{\omega P} & 2\mathbf{S}'_{\omega P} & \mathbf{S}_{\omega P} & \mathbf{0}\end{Vmatrix}_{4(n+1),4(n+1)},\quad \mathbf{6}_P=\begin{Vmatrix}\mathbf{6}_{PP}\\ \mathbf{6}'_{PP}\\ \mathbf{6}''_{PP}\\ \mathbf{0}\end{Vmatrix}_{4(n+1),1},\qquad (3.4.17)$$

$$\mathbf{P}_S(t_i)=\mathcal{E}_s(t_i)\cdot E_b(t_i)\cdot\mathbf{S}_{Sb},\quad \mathbf{S}_{Sb}=\begin{Vmatrix}\mathbf{F}'_b\\ \mathbf{S}''_{xb}\\ \mathbf{S}''_{yb}\\ \mathbf{S}''_{\omega b}\end{Vmatrix}_{4(n+1),1}.\qquad (3.4.18)$$

Sve gore ispisane matrice-kolone imaju kao elemente matrice-kolone reda (n+1), pri čemu su elementi ovih matrica brojne vrednosti predmetnih funkcija u tačkama (A)3, 4, 5, . . . (n+2), (n+3)(B). Ovo ne važi u potpunosti jedino za matricu $\mathbf{6}_P$, u kojoj figuriše i matrica $\mathbf{0}$, tj. nula-matrica-kolona reda (n+1). Što se, pak, tiče matrice $\mathbf{S}_{6_P}$, osim kvadratnih nula-matrica reda (n+1), u njen sastav ulaze i određene dijagonalne matrice reda (n+1). Za elemente ovih matrica važi sve ono što je već rečeno prilikom razmatranja strukture matrica (3.4.2)-(3.4.6). Ista objašnjenja takođe važe i za matrice $\mathbf{A}_P$, $\mathbf{B}_P$, $\mathbf{C}_P$ i $\mathbf{D}_P$. Naime, elementi ovih matrica u potpunosti odgovaraju elementima matrica $\mathbf{A}_A$, $\mathbf{B}_A$, $\mathbf{C}_A$ i $\mathbf{D}_A$ pod uslovom da se izvrši zamena indeksa; indeks "A" treba zameniti indeksom "P". Pored toga, prilikom ispisivanja matrica $\mathbf{C}_P$ i $\mathbf{D}_P$ treba u njih unositi i vrednosti $K_{Pj}=K'_{Pj}=0$ (j=3,4,5,...n+2,n+3).

Matrica $\mathbf{S}(t_i)$ definisana izrazom (3.4.15) odgovara u stvari tankozidnim konstrukcijama koje se prednaprežu kablovima. Ako se, pak, radi o konstrukcijama prednapregnutim putem athezije, u proračun ulazi matrica dobijena na bazi uslova $\mathbf{\Phi}(t_o)=\tilde{\mathbf{0}}$. Ovde je sa $\tilde{\mathbf{0}}$ označena nula-matrica-kolona reda 4(n+5).

Osim na način dat izrazom (3.4.1), jednačine problema u vremenu $t=t_1$ možemo da prikažemo i na sledeći način:

$$\left[A(t_i)\cdot\hat{Q}+B(t_i)\cdot\hat{P}+C(t_i)\cdot\hat{N}+D(t_i)\cdot\hat{M}\right]\cdot\Phi(t_i)+$$
$$+\frac{E_a}{E_b(t_i)}\sum_{r=1}^{i}\int_{t_{r-1}}^{t_r}J(t_i,\tau_t)(A_A\hat{Q}+B_A\hat{P}+C_A\hat{N}+D_A\hat{M})\Phi(\tau_t)d\tau_t=\frac{1}{E_b(t_i)}S(t_i). \qquad (3.4.19)$$

Pretpostavljajući da se funkcija $\Phi(\tau_t)$ u intervalu $[t_{r-1}, t_r]$ menja linearno, tj. da sa dovoljnom tačnošću važi odnos

$$\Phi(\tau_t)\Big|_{t_{r-1}}^{t_r}\approx\frac{1}{2}\left[\Phi(t_{r-1})+\Phi(t_r)\right], \qquad (3.4.20)$$

problem se može definisati i relacijom

$$\left[A(t_i)\cdot\hat{Q}+B(t_i)\cdot\hat{P}+C(t_i)\cdot\hat{N}+D(t_i)\cdot\hat{M}\right]\cdot\Phi(t_i)+$$
$$+\frac{E_a}{2E_b(t_i)}\cdot R_A\cdot\sum_{r=1}^{i}f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{r-1}}^{t_r}\cdot\left[\Phi(t_{r-1})+\Phi(t_r)\right]=\frac{1}{E_b(t_i)}S(t_i). \qquad (3.4.21)$$

U ovom izrazu figuriše matrica

$$R_A=A_A\hat{Q}+B_A\hat{P}+C_A\hat{N}+D_A\hat{M}, \qquad (3.4.22)$$

kao i skalarna funkcija $f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{r-1}}^{t_r}$ koja se može predstaviti u obliku:

$$f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{r-1}}^{t_r}=\int_{t_{r-1}}^{t_r}J(t_i,\tau_t)d\tau_t. \qquad (3.4.23)$$

Na bazi izloženog u stanju smo sada da ispišemo sledeće zavisnosti:

<u>- za $t = t_o$:</u>

$$\hat{R}(t_o)\cdot\Phi(t_o)=\frac{1}{E_b(t_o)}\cdot\tilde{P}(t_o), \qquad (3.4.24)$$

$$\tilde{P}(t_o)=P+P_{pp}-P_s(t_o), \qquad (3.4.25)$$

$$\hat{R}(t_o)=\hat{A}(t_o)\cdot\hat{Q}+\hat{B}(t_o)\cdot\hat{P}+\hat{C}(t_o)\cdot\hat{N}+\hat{D}(t_o)\cdot\hat{M}, \qquad (3.4.26)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{A}}(t_o) &= \mathbf{A}(t_o)\Big| - \frac{E_P}{E_b(t_o)}\mathbf{A}_P,\\
\hat{\mathbf{B}}(t_o) &= \mathbf{B}(t_o)\Big| - \frac{E_P}{E_b(t_o)}\mathbf{B}_P,\\
\hat{\mathbf{C}}(t_o) &= \mathbf{C}(t_o)\Big| - \frac{E_P}{E_b(t_o)}\mathbf{C}_P,\\
\hat{\mathbf{D}}(t_o) &= \mathbf{D}(t_o)\Big| - \frac{E_P}{E_b(t_o)}\mathbf{D}_P.
\end{aligned} \tag{3.4.27}$$

Izrazi (3.4.27) važe kako za konstrukcije prednapregnute kablovima, tako i za konstrukcije prednapregnute na stazi, s tim što u prvom slučaju treba upotrebiti celokupne relacije, dok u drugom slučaju u proračun ulaze samo vrednosti ispred vertikalnih crta.

- za $t = t_i$, $i \geq 1$:

$$\tilde{\mathbf{R}}(t_i)\cdot\mathbf{\Phi}(t_i) = \frac{1}{E_b(t_i)}\Big[\tilde{\mathbf{S}}(t_i) - \frac{E_a}{2}\mathbf{R}_A\sum_{r=1}^{i-1} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{r-1}}^{t_{r+1}}\cdot\mathbf{\Phi}(t_r)\Big], \tag{3.4.28}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}(t_i) = \tilde{\mathbf{A}}(t_i)\cdot\hat{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{B}}(t_i)\cdot\hat{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{C}}(t_i)\cdot\hat{\mathbf{N}} + \mathbf{D}(t_i)\cdot\hat{\mathbf{M}}, \tag{3.4.29}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}}(t_i) &= \mathbf{A}(t_i) + \frac{E_a}{2E_b(t_i)}\cdot f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}\cdot\mathbf{A}_A,\\
\tilde{\mathbf{B}}(t_i) &= \mathbf{B}(t_i) + \frac{E_a}{2E_b(t_i)}\cdot f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}\cdot\mathbf{B}_A,\\
\tilde{\mathbf{C}}(t_i) &= \mathbf{C}(t_i) + \frac{E_a}{2E_b(t_i)}\cdot f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}\cdot\mathbf{C}_A,\\
\tilde{\mathbf{D}}(t_i) &= \mathbf{D}(t_i) + \frac{E_a}{2E_b(t_i)}\cdot f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}\cdot\mathbf{D}_A,
\end{aligned} \tag{3.4.30}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{S}}(t_i) = {} & \Big[1 + f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_o}^{t_i}\Big]\cdot(\mathbf{P} + \mathbf{P}_{PP}) - \mathbf{P}_S(t_i) - \frac{E_a}{2}\cdot f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_o}^{t_1}\cdot\mathbf{R}_A\cdot\mathbf{\Phi}(t_o)\Big| + \\
& + E_P\Big[1 + f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_o}^{t_i}\Big]\cdot\mathbf{R}_P\cdot\mathbf{\Phi}(t_o),
\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{A}_P\cdot\hat{\mathbf{Q}} + \mathbf{B}_P\cdot\hat{\mathbf{P}} + \mathbf{C}_P\cdot\hat{\mathbf{N}} + \mathbf{D}_P\cdot\hat{\mathbf{M}} \tag{3.4.32}$$

Celokupnim izrazom (3.4.31) definisana je matrica $\tilde{\mathbf{S}}(t_i)$ koja odgovara slučaju tankozidnog štapa prednapregnutog kablovima.

Ukoliko se, pak, radi o štapu prednapregnutom putem athezije, u proračun treba uvesti samo vrednost ispred vertikalne crte.

I ako je to već samo po sebi jasno, ovde ipak napominjemo da u slučaju vremena t_1 desnu stranu izraza (3.4.28) predstavlja samo matrica $\widehat{\mathbf{S}}(t_i)$. Isto tako, očigledno je da je u opštem slučaju funkcija $f(t_i,\tau_t)_{t_a}^{t_b}$ određena putem sledećeg izraza:

$$f(t_i,\tau_t)_{t_a}^{t_b}=\int_{t_a}^{t_b} J(t_i,\tau_t)\,d\tau_t\,. \tag{3.4.33}$$

Kao što smo već rekli, slobodni članovi matričnih jednačina (3.4.24) i (3.4.28), kao i funkcije $\mathbf{\Phi}(t_i)$ (i=0,1,2,3,...), su matrice kolone reda 4(n+1), odnosno 4(n+5), dok su matrice $\widehat{\mathbf{R}}(t_o)$ i $\widetilde{\mathbf{R}}(t_i)$ (i=1,2,3,...) pravougaone matrice tipa 4(n+1),4(n+5). Imajući u vidu da svaka od navedenih relacija predstavlja jedan sistem algebarskih jednačina, proizilazi da se u datom slučaju za svako t_i (i=0,1,2,3,...) dobijaju sistemi od po 4(n+1) jednačina sa po 4(n+5) nepoznatih. Nepoznate u ovim jednačinama, pak, predstavljaju pomeranja tačaka posmatranog štapa, odnosno, $\zeta_1(t_i)$, $\zeta_2(t_i)$,...$\zeta_{n+5}(t_i)$, $\xi_1(t_i)$, $\xi_2(t_i)$,...$\xi_{n+5}(t_i)$, $\eta_1(t_i)$, $\eta_2(t_i)$,...$\eta_{n+5}(t_i)$ i $\theta_1(t_i)$, $\theta_2(t_i)$,...$\theta_{n+5}(t_i)$, (i=0,1,2,3,...). Prirodno, problem se pod ovakvim okolnostima ne može rešiti. Međutim, ako svaki od pomenutih sistema dopunimo konkretnim graničnim uslovima štapa, što se svodi na formulisanje još 16 jednačina sa nepoznatim pomeranjima, dobiće se u svakom vremenu t_i (i=0,1,2,3...) sistem od 4(n+5) jednačina sa isto tolikim brojem nepoznatih. Ove jednačine, obzirom na izraze (3.4.24) i (3.4.28), formalno-matematički možemo da prikažemo u obliku

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbf{U}}(t_o)\cdot\mathbf{\Phi}(t_o)=\frac{1}{E_b(t_o)}\cdot\widehat{\mathbf{W}}(t_o),\\&\widetilde{\mathbf{U}}(t_i)\cdot\mathbf{\Phi}(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\cdot\widetilde{\mathbf{W}}(t_i),\quad i=1,2,3,\ldots..\end{aligned} \tag{3.4.34}$$

U matricama $\widehat{\mathbf{U}}(t_o)$, $\widetilde{\mathbf{U}}(t_i)$, $\widehat{\mathbf{W}}(t_o)$ i $\widetilde{\mathbf{W}}(t_i)$ (i=1,2,3,...) sadržani su sada, osim elemenata matrica $\widehat{\mathbf{R}}(t_o)$, $\widetilde{\mathbf{R}}(t_i)$, $\widehat{\mathbf{P}}(t_o)$ i $\left[\widetilde{\mathbf{S}}(t_i)-\frac{E_a}{2}\mathbf{R}_A\cdot\sum_{r=1}^{i-1} f(t_i,\tau_t)_{t_{r-1}}^{t_{r+1}}\cdot\mathbf{\Phi}(t_r)\right]$ (i=1,2,3,...) još i elementi koji proističu iz graničnih uslova problema.

$$
\begin{aligned}
&\hat{\Psi}_{\mathcal{S},\alpha}\cdot\Phi(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\cdot\varrho_{\mathcal{S},\alpha}(t_i),\\
&\hat{\Psi}_{\zeta,\alpha}\cdot\Phi(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\cdot\varrho_{\zeta,\alpha}(t_i),\\
&\hat{\Psi}_{\zeta',\alpha}\cdot\Phi(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\cdot\varrho_{\zeta',\alpha}(t_i),\\
&\hat{\Psi}_{\eta,\alpha}\cdot\Phi(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\cdot\varrho_{\eta,\alpha}(t_i),\\
&\hat{\Psi}_{\eta',\alpha}\cdot\Phi(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\cdot\varrho_{\eta',\alpha}(t_i),\\
&\hat{\Psi}_{\theta,\alpha}\cdot\Phi(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\cdot\varrho_{\theta,\alpha}(t_i),\\
&\hat{\Psi}_{\theta',\alpha}\cdot\Phi(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\cdot\varrho_{\theta',\alpha}(t_i),\\
&i=0,1,2,3,\ldots\ldots
\end{aligned}
\qquad (3.4.37)
$$

Indeks α može imati vrednosti 3 i (n+3), već prema tome na koji se kraj štapa odnosi konkretan granični uslov.

U stvari, granični uslovi po pomeranjima su samo izrazi (3.4.37), dok relacije (3.4.36) proističu iz usvojenog načina obeležavanja tačaka na štapu. Naime, imajući u vidu red izvoda funkcije $\mathcal{S}(t,z)$ u integro-diferencijalnoj jednačini (3.3.23), proizilazi da u svakom slučaju moraju biti ispunjeni uslovi

$$\mathcal{S}_1(t_i)=0,\quad \mathcal{S}_{n+5}(t_i)=0,\quad i=0,1,2,3,\ldots,$$

a izrazi (3.4.36) predstavljaju vid matričnog izražavanja ovih uslova. Ove relacije, prema tome, treba pridodati svakom od izraza (3.4.24) i (3.4.28), što znači da je prilikom rešavanja određenog zadatka potrebno formulisati u opštem slučaju još ukupno 14 stvarnih graničnih uslova.

U graničnim uslovima (3.4.36) i (3.4.37) figurišu sledeće matrice o kojima do sada još nije bilo reči:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\Psi}_{\zeta',\alpha}=\hat{\Psi}^{*}_{\zeta,\alpha}\cdot\hat{M},\\
&\hat{\Psi}_{\eta',\alpha}=\hat{\Psi}^{*}_{\eta,\alpha}\cdot\hat{M},\\
&\hat{\Psi}_{\theta',\alpha}=\hat{\Psi}^{*}_{\theta,\alpha}\cdot\hat{M},
\end{aligned}
\qquad (3.4.38)
$$

Obzirom da su matrice koje množe sa leve strane funkcije $\Phi(t_i)$ $(i=0,1,2,3,\ldots)$ u izrazima (3.4.34) kvadratne matrice reda $4(n+5)$, rešenja problema možemo da prikažemo u sledećem obliku:

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{E_b(t_0)}\cdot\hat{U}^{-1}(t_0)\cdot\hat{W}(t_0),$$
$$\Phi(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\cdot\tilde{U}^{-1}(t_i)\cdot\tilde{W}(t_i),\quad i=1,2,3,\ldots \tag{3.4.35}$$

Matrice $\hat{U}^{-1}(t_0)$ i $\tilde{U}^{-1}(t_i)$ su inverzne matrice matrica $\hat{U}(t_0)$ i $\tilde{U}(t_i)$ $(i=1,2,3,\ldots)$.

Pošto na osnovu izraza (3.4.28) u matricama $\tilde{W}(t_i)$ $(i=1,2,3,\ldots)$ figurišu i matrice $\Phi(t_r)$ $(r=0,1,2,3,\ldots i-1)$, proizilazi da je postupkom sukcesivnog izračunavanja matrica $\Phi(t_0)$, $\Phi(t_1)$, $\Phi(t_2)$, $\Phi(t_3)$, ... mogućе doći i do rešenja problema u potpuno proizvoljnom vremenu t_i. Naravno, na opisani način dobijaju se približne vrednosti pomeranja tačaka posmatranog štapa, ali, ukoliko pođemo od dovoljno gustog niza ekvidistantnih tačaka na razmaku λ, i ako pored toga u postupku sukcesivnog računanja usvajamo optimalne veličine vremenskih intervala t_{r-1}, t_r i t_r, t_{r+1}, uvek se može doći do rezultata zadovoljavajuće tačnosti. U suštini, ovde je reč o primeni poznatog postupka Krilova-Bogoljubova, pri čemu se još, saglasno uslovima problema, u postupak uvodi i metoda konačnih razlika.

Ostalo nam je još da u okviru ovog izlaganja kažemo nešto više o graničnim uslovima problema. Ukoliko je reč o graničnim uslovima po pomeranjima, oni se mogu formulisati na bazi sledećeg razmatranja.

Pretpostavićemo, kao što je to već rečeno, da pomeranja na krajevima štapa ne zavise od vremena. Svako od ovih pomeranja u tom slučaju možemo da prikažemo i u matričnoj formi i to u obliku

$$\Psi_{s,1}\cdot\Phi(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\cdot S_{s,1}=\|0\|_{1,1},$$
$$\Psi_{s,n+5}\cdot\Phi(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\cdot S_{s,n+5}=\|0\|_{1,1}, \tag{3.4.36}$$
$$i=0,1,2,3,\ldots\ ,$$

$$\hat{\Psi}_{\xi,1}=\Vert \overbrace{1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0}^{n+5} \,\vdots\, \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0\ 0}^{n+5} \,\vdots\, \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0\ 0}^{n+5} \,\vdots\, \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0\ 0}^{n+5}\Vert,$$

$$\hat{\Psi}_{\xi,n+5}=\Vert 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ 1 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\Vert,$$

$$\hat{\Psi}_{\xi,3}=\Vert 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\Vert,$$

$$\hat{\Psi}_{\xi,n+3}=\Vert 0\ \ldots\ 0\ 1\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\Vert,$$

$$\hat{\Psi}_{\zeta,3}=\Vert 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\Vert,$$

$$\hat{\Psi}_{\zeta,n+3}=\Vert 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ \ldots\ 0\ 1\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\Vert,$$

$$\hat{\Psi}_{\eta,3}=\Vert 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\Vert,$$

$$\hat{\Psi}_{\eta,n+3}=\Vert 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ \ldots\ 0\ 1\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\Vert,$$

$$\hat{\Psi}_{\theta,3}=\Vert 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\Vert,$$

$$\hat{\Psi}_{\theta,n+3}=\Vert 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0 \,\vdots\, 0\ \ldots\ 0\ 1\ 0\ 0\Vert, \qquad (3.4.39)$$

$$\hat{\Psi}^{*}_{\zeta,3}=\Vert \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}^{n+1} \,\vdots\, \overbrace{1\ 0\ 0\ \ldots\ 0}^{n+1} \,\vdots\, \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}^{n+1} \,\vdots\, \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}^{n+1}\Vert,$$

$$\hat{\Psi}^{*}_{\zeta,n+3}=\Vert 0\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 1 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\Vert,$$

$$\hat{\Psi}^{*}_{\eta,3}=\Vert 0\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 1\ 0\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\Vert,$$

$$\hat{\Psi}^{*}_{\eta,n+3}=\Vert 0\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 1 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\Vert,$$

$$\hat{\Psi}^{*}_{\theta,3}=\Vert 0\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\Vert,$$

$$\hat{\Psi}^{*}_{\theta,n+3}=\Vert 0\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ \ldots\ 0\ 1\Vert, \qquad (3.4.40)$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{\zeta,\alpha}(t_i) = \left\| E_b(t_i) \cdot \zeta^{*}_{\alpha} \right\|_{1,1}, \\
&\mathcal{S}_{\xi,\alpha}(t_i) = \left\| E_b(t_i) \cdot \xi^{*}_{\alpha} \right\|_{1,1}, \\
&\mathcal{S}_{\xi',\alpha}(t_i) = \left\| E_b(t_i) \cdot \xi^{*'}_{\alpha} \right\|_{1,1}, \\
&\mathcal{S}_{\eta,\alpha}(t_i) = \left\| E_b(t_i) \cdot \eta^{*}_{\alpha} \right\|_{1,1}, \\
&\mathcal{S}_{\eta',\alpha}(t_i) = \left\| E_b(t_i) \cdot \eta^{*'}_{\alpha} \right\|_{1,1}, \qquad (3.4.41) \\
&\mathcal{S}_{\theta,\alpha}(t_i) = \left\| E_b(t_i) \cdot \theta^{*}_{\alpha} \right\|_{1,1}, \\
&\mathcal{S}_{\theta',\alpha}(t_i) = \left\| E_b(t_i) \cdot \theta^{*'}_{\alpha} \right\|_{1,1}, \\
&i = 0, 1, 2, 3, \ldots .
\end{aligned}
$$

Kao što se vidi, elementi matrica (3.4.41) su zadata pomeranja na krajevima štapa (za levi kraj je $\alpha=3$, a za desni je $\alpha=n+3$) umnožena funkcijom $E_b(t_i)$.

Definisanje graničnih uslova po silama sprovodi se na bazi relacija (3.3.37)-(3.3.50) kojima su određene veze između presečnih sila i pomeranja štapa. I ove granične uslove možemo da predstavimo u vidu matričnih jednačina tako da svakom od ovih uslova odgovara po jedna posebna jednačina. Obzirom na napred navedene relacije, proizilazi da se ukupno može ispisati 2x7=14 graničnih uslova po silama, s tim što se jedna polovina ovih uslova može upotrebiti za definisanje stanja na levom, a druga polovina za definisanje stanja na desnom kraju štapa. Kao i do sada, kraj štapa na koji se odnosi određeni uslov biće određen parametrom α . U slučaju $\alpha=3$ dobija se uslov koji važi za levi kraj, dok u slučaju $\alpha=n+3$ dolazimo do graničnog uslova koji odgovara desnom kraju štapa.

Usvajajući matričnu notaciju, izraze (3.3.37)-(3.3.43) zajedno sa funkcijama (3.3.44)-(3.3.50) možemo da prikažemo na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{d}_{N\alpha}(t_i) \cdot \boldsymbol{\Phi}(t_i) + \frac{E_a}{E_b(t_i)} \cdot \int_{t_0}^{t_i} J(t_i,\tau_t)_A \, \mathbf{d}_{N\alpha} \cdot \boldsymbol{\Phi}(\tau_t)\, d\tau_t = \\
&= \frac{1}{E_b(t_i)} \left\| \left[1 + \int_{t_0}^{t_i} J(t_i,\tau_t)\, d\tau_t \right] \cdot \left[N^{*}_{\alpha} - \sigma_{pp\alpha} F_{p\alpha} + E_{pp} \mathbf{d}_{N\alpha} \cdot \boldsymbol{\Phi}(t_0) \right] + E_b(t_i)\, F_{b\alpha}\, \varepsilon_s(t_i) \right\|,
\end{aligned}
$$

(3.4.42)

$$\alpha_{Q_x\alpha}(t_i)\cdot\Phi(t_i)+\frac{E_a}{E_b(t_i)}\cdot\int_{t_0}^{t_i}J(t_i,\tau_t)\cdot{}_A\alpha_{Q_x\alpha}\cdot\Phi(\tau_t)\,d\tau_t=$$
$$=\frac{1}{E_b(t_i)}\left\|\left[1+\int_{t_0}^{t_i}J(t_i,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left[Q^*_{x\alpha}-(M_{x\alpha}+S'_{xp\alpha}\sigma_{pp\alpha}+S_{xp\alpha}\sigma'_{pp\alpha})+E_p\cdot{}_p\alpha_{Q_x\alpha}\cdot\Phi(t_0)\right]+E_b(t_i)S'_{xb\alpha}\varepsilon_s(t_i)\right\|,$$

(3.4.43)

$$\alpha_{Q_y\alpha}(t_i)\cdot\Phi(t_i)+\frac{E_a}{E_b(t_i)}\cdot\int_{t_0}^{t_i}J(t_i,\tau_t)\cdot{}_A\alpha_{Q_y\alpha}\cdot\Phi(\tau_t)\,d\tau_t=$$
$$=\frac{1}{E_b(t_i)}\left\|\left[1+\int_{t_0}^{t_i}J(t_i,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left[Q^*_{y\alpha}-(M_{y\alpha}+S'_{yp\alpha}\sigma_{pp\alpha}+S_{yp\alpha}\sigma'_{pp\alpha})+E_p\cdot{}_p\alpha_{Q_y\alpha}\cdot\Phi(t_0)\right]+E_b(t_i)S'_{yb\alpha}\varepsilon_s(t_i)\right\|,$$

(3.4.44)

$$\alpha_{M_x\alpha}(t_i)\cdot\Phi(t_i)+\frac{E_a}{E_b(t_i)}\cdot\int_{t_0}^{t_i}J(t_i,\tau_t)\cdot{}_A\alpha_{M_x\alpha}\cdot\Phi(\tau_t)\,d\tau_t=$$
$$=\frac{1}{E_b(t_i)}\left\|\left[1+\int_{t_0}^{t_i}J(t_i,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left[M^*_{x\alpha}-\sigma_{pp\alpha}S_{xp\alpha}+E_p\cdot{}_p\alpha_{M_x\alpha}\cdot\Phi(t_0)\right]+E_b(t_i)\cdot S_{xb\alpha}\cdot\varepsilon_s(t_i)\right\|,$$

(3.4.45)

$$\alpha_{M_y\alpha}(t_i)\cdot\Phi(t_i)+\frac{E_a}{E_b(t_i)}\cdot\int_{t_0}^{t_i}J(t_i,\tau_t)\cdot{}_A\alpha_{M_y\alpha}\cdot\Phi(\tau_t)\,d\tau_t=$$
$$=\frac{1}{E_b(t_i)}\left\|\left[1+\int_{t_0}^{t_i}J(t_i,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left[M^*_{y\alpha}-\sigma_{pp\alpha}S_{yp\alpha}+E_p\cdot{}_p\alpha_{M_y\alpha}\cdot\Phi(t_0)\right]+E_b(t_i)\cdot S_{yb\alpha}\cdot\varepsilon_s(t_i)\right\|,$$

(3.4.46)

$$\alpha_{T_p\alpha}(t_i)\cdot\Phi(t_i)+\frac{E_a}{E_b(t_i)}\cdot\int_{t_0}^{t_i}J(t_i,\tau_t)\cdot{}_A\alpha_{T_p\alpha}\cdot\Phi(\tau_t)\,d\tau_t=$$
$$=\frac{1}{E_b(t_i)}\left\|\left[1+\int_{t_0}^{t_i}J(t_i,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left[T^*_{p\alpha}-(M_{\omega\alpha}+S'_{\omega p\alpha}\sigma_{pp\alpha}+S_{\omega p\alpha}\sigma'_{pp\alpha})+E_p\cdot{}_p\alpha_{T_p\alpha}\cdot\Phi(t_0)\right]+E_b(t_i)S'_{\omega b\alpha}\varepsilon_s(t_i)\right\|,$$

(3.4.47)

$$\alpha_{M_\omega\alpha}(t_i)\cdot\Phi(t_i)+\frac{E_a}{E_b(t_i)}\cdot\int_{t_0}^{t_i}J(t_i,\tau_t)\cdot{}_A\alpha_{M_\omega\alpha}\cdot\Phi(\tau_t)\,d\tau_t=$$
$$=\frac{1}{E_b(t_i)}\left\|\left[1+\int_{t_0}^{t_i}J(t_i,\tau_t)\,d\tau_t\right]\left[M^*_{\omega\alpha}-\sigma_{pp\alpha}S_{\omega p\alpha}+E_p\cdot{}_p\alpha_{M_\omega\alpha}\cdot\Phi(t_0)\right]+E_b(t_i)\cdot S_{\omega b\alpha}\cdot\varepsilon_s(t_i)\right\|.$$

(3.4.48)

U ovim relacijama figurišu vrednosti N^*_{α}, $Q^*_{x\alpha}$, $Q^*_{y\alpha}$, $M^*_{x\alpha}$, $M^*_{y\alpha}$, $T^*_{p\alpha}$ i $M^*_{\omega\alpha}$ koje predstavljaju presečne sile na krajevima štapa. Pored toga, u izrazima (3.4.42)-(3.4.48) imamo i sledeće matrice sa kojima se do sada nismo sretali:

$$\boldsymbol{\alpha}_{N\alpha}(t_i) = F_{\alpha}(t_i)\cdot\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha}\cdot\hat{M} - \left[S_{x\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + S_{y\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + S_{\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right]\hat{N},$$

$$_A\boldsymbol{\alpha}_{N\alpha} = F_{A\alpha}\cdot\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha}\cdot\hat{M} - \left(S_{xA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + S_{yA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + S_{\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{Q_x\alpha}(t_i) = {} & S'_{x\alpha}(t_i)\cdot\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha}\cdot\hat{M} + \left[S_{x\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha} - I'_{xx\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} - I'_{xy\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} - I'_{x\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right]\hat{N} - \\ & - \left[I_{xx\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{xy\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{x\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right]\hat{P},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}_A\boldsymbol{\alpha}_{Q_x\alpha} = {} & S'_{xA\alpha}\cdot\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha}\cdot\hat{M} + \left(S_{xA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha} - I'_{xxA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} - I'_{xyA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} - I'_{x\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N} - \\ & - \left(I_{xxA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{xyA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{x\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{P},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{Q_y\alpha}(t_i) = {} & S'_{y\alpha}(t_i)\cdot\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha}\cdot\hat{M} + \left[S_{y\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha} - I'_{xy\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} - I'_{yy\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^* - I'_{y\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right]\hat{N} - \\ & - \left[I_{xy\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{yy\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{y\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right]\hat{P},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}_A\boldsymbol{\alpha}_{Q_y\alpha} = {} & S'_{yA\alpha}\cdot\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha}\cdot\hat{M} + \left(S_{yA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha} - I'_{xyA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} - I'_{yyA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} - I'_{y\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N} - \\ & - \left(I_{xyA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{yyA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{y\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{P},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{M_x\alpha}(t_i) = S_{x\alpha}(t_i)\cdot\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha}\cdot\hat{M} - \left[I_{xx\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{xy\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{x\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right]\hat{N},$$

$$_A\boldsymbol{\alpha}_{M_x\alpha} = S_{xA\alpha}\cdot\hat{\Psi}_{\varsigma,\alpha}\cdot\hat{M} - \left(I_{xxA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{xyA}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{x\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{M_y\alpha}(t_i) = S_{y\alpha}(t_i)\cdot\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha}\cdot\hat{M} - \left[I_{xy\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{yy\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{y\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right]\hat{N},$$

$$_A\boldsymbol{\alpha}_{M_y\alpha} = S_{yA\alpha}\cdot\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha}\cdot\hat{M} - \left(I_{xyA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{yyA\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{y\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{T_p\alpha}(t_i) = {} & \left[S'_{\omega\alpha}(t_i)\cdot\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha} + \frac{G_b(t_i)}{E_b(t_i)}K_{\alpha}(t_i)\cdot\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right]\hat{M} + \left[S_{\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha} - I'_{x\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} - I'_{y\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} - \right. \\ & \left. - I'_{\omega\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right]\hat{N} - \left[I_{x\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{y\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{\omega\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right]\hat{P},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}_A\boldsymbol{\alpha}_{T_p\alpha} = {} & \left(S'_{\omega A\alpha}\cdot\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha} + \frac{G_a}{E_a}K_{A\alpha}\cdot\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{M} + \left(S_{\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\varsigma,\alpha} - I'_{x\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} - I'_{y\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} - \right. \\ & \left. - I'_{\omega\omega A\alpha}\cdot\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N} - \left(I_{x\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{y\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{\omega\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{P},\end{aligned}$$

$$\alpha_{H\omega\alpha}(t_i) = S_{\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\xi,\alpha}\hat{M} - \left[I_{x\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{y\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{\omega\omega\alpha}(t_i)\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right]\hat{N},$$

$${}_A\alpha_{H\omega\alpha} = S_{\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\xi,\alpha}\hat{M} - \left(I_{x\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{y\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{\omega\omega A\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N},$$

(3.4.49)

$${}_P\alpha_{N\alpha} = F_{P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\xi,\alpha}\hat{M} - \left(S_{xP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + S_{yP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + S_{\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N},$$

$${}_P\alpha_{Q_x\alpha} = S'_{xP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\xi,\alpha}\hat{M} + \left(S_{xP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\xi,\alpha} - I'_{xxP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} - I'_{xyP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} - I'_{x\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N} -$$
$$-\left(I_{xxP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{xyP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{x\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{P},$$

$${}_P\alpha_{Q_y\alpha} = S'_{yP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\xi,\alpha}\hat{M} + \left(S_{yP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\xi,\alpha} - I'_{xyP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} - I'_{yyP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} - I'_{y\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N} -$$
$$-\left(I_{xyP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{yyP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{y\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{P},$$

$${}_P\alpha_{H_x\alpha} = S_{xP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\xi,\alpha}\hat{M} - \left(I_{xxP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{xyP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{x\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N},$$

$${}_P\alpha_{H_y\alpha} = S_{yP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\xi,\alpha}\hat{M} - \left(I_{xyP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{yyP\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{y\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N},$$

$${}_P\alpha_{T_P\alpha} = S'_{\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\xi,\alpha}\hat{M} + \left(S_{\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\xi,\alpha} - I'_{x\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} - I'_{y\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} - I'_{\omega\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N} -$$
$$-\left(I_{x\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{y\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{\omega\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{P},$$

$${}_P\alpha_{H\omega\alpha} = S_{\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\xi,\alpha}\hat{M} - \left(I_{x\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\zeta,\alpha} + I_{y\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\eta,\alpha} + I_{\omega\omega P\alpha}\hat{\Psi}^*_{\theta,\alpha}\right)\hat{N},$$

(3.4.50)

$$\hat{\Psi}^*_{\xi,3} = \| \overbrace{1\ 0\ 0\ .\ .\ 0}^{n+1} \,\vdots\, \overbrace{0\ 0\ 0\ .\ .\ 0}^{n+1} \,\vdots\, \overbrace{0\ 0\ 0\ .\ .\ 0}^{n+1} \,\vdots\, \overbrace{0\ 0\ 0\ .\ .\ 0}^{n+1} \|,$$

$$\hat{\Psi}^*_{\xi,n+3} = \| 0\ 0\ .\ .\ 0\ 1 \,\vdots\, 0\ 0\ 0\ .\ .\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ 0\ .\ .\ 0 \,\vdots\, 0\ 0\ 0\ .\ .\ 0 \|.$$

(3.4.51)

Obzirom na dosadašnja izlaganja, a pod pretpostavkom da presečne sile na krajevima posmatranog štapa nisu zavisne od vremena, granične uslove po silama možemo da prikažemo na sledeći način:

- za $t = t_0$:

$$\hat{\alpha}_{N\alpha}(t_0)\cdot\Phi(t_0) = \frac{1}{E_b(t_0)}\left\| N_\alpha^* - \sigma_{pp\alpha}F_{p\alpha} + F_{b\alpha}\cdot E_b(t_0)\cdot\varepsilon_s(t_0)\right\|,$$

$$\hat{\alpha}_{Q_x\alpha}(t_0)\cdot\Phi(t_0) = \frac{1}{E_b(t_0)}\left\| Q_{x\alpha}^* - (m_{x\alpha} + S'_{xp\alpha}\sigma_{pp\alpha} + S_{xp\alpha}\sigma'_{pp\alpha}) + S'_{xb\alpha}E_b(t_0)\varepsilon_s(t_0)\right\|,$$

$$\hat{\alpha}_{Q_y\alpha}(t_0)\cdot\Phi(t_0) = \frac{1}{E_b(t_0)}\left\| Q_{y\alpha}^* - (m_{y\alpha} + S'_{yp\alpha}\sigma_{pp\alpha} + S_{yp\alpha}\sigma'_{pp\alpha}) + S'_{yb\alpha}E_b(t_0)\varepsilon_s(t_0)\right\|,$$

$$\hat{\alpha}_{M_x\alpha}(t_0)\cdot\Phi(t_0) = \frac{1}{E_b(t_0)}\left\| M_{x\alpha}^* - \sigma_{pp\alpha}S_{xp\alpha} + S_{xb\alpha}\cdot E_b(t_0)\cdot\varepsilon_s(t_0)\right\|,$$

$$\hat{\alpha}_{M_y\alpha}(t_0)\cdot\Phi(t_0) = \frac{1}{E_b(t_0)}\left\| M_{y\alpha}^* - \sigma_{pp\alpha}S_{yp\alpha} + S_{yb\alpha}\cdot E_b(t_0)\cdot\varepsilon_s(t_0)\right\|,$$

$$\hat{\alpha}_{T_p\alpha}(t_0)\cdot\Phi(t_0) = \frac{1}{E_b(t_0)}\left\| T_{p\alpha}^* - (m_{\omega\alpha} + S'_{\omega p\alpha}\sigma_{pp\alpha} + S_{\omega p\alpha}\sigma'_{pp\alpha}) + S'_{\omega b\alpha}E_b(t_0)\varepsilon_s(t_0)\right\|,$$

$$\hat{\alpha}_{M_\omega\alpha}(t_0)\cdot\Phi(t_0) = \frac{1}{E_b(t_0)}\left\| M_{\omega\alpha}^* - \sigma_{pp\alpha}S_{\omega p\alpha} + S_{\omega b\alpha}\cdot E_b(t_0)\cdot\varepsilon_s(t_0)\right\|,$$

(3.4.52)

$$\hat{\alpha}_{N\alpha}(t_0) = \alpha_{N\alpha}(t_0)\Big| - \frac{E_p}{E_b(t_0)}\cdot p\,\alpha_{N\alpha},$$

$$\hat{\alpha}_{Q_x\alpha}(t_0) = \alpha_{Q_x\alpha}(t_0)\Big| - \frac{E_p}{E_b(t_0)}\cdot p\,\alpha_{Q_x\alpha},$$

$$\hat{\alpha}_{Q_y\alpha}(t_0) = \alpha_{Q_y\alpha}(t_0)\Big| - \frac{E_p}{E_b(t_0)}\cdot p\,\alpha_{Q_y\alpha},$$

$$\hat{\alpha}_{M_x\alpha}(t_0) = \alpha_{M_x\alpha}(t_0)\Big| - \frac{E_p}{E_b(t_0)}\cdot p\,\alpha_{M_x\alpha}, \qquad (3.4.53)$$

$$\hat{\alpha}_{M_y\alpha}(t_0) = \alpha_{M_y\alpha}(t_0)\Big| - \frac{E_p}{E_b(t_0)}\cdot p\,\alpha_{M_y\alpha},$$

$$\hat{\alpha}_{T_p\alpha}(t_0) = \alpha_{T_p\alpha}(t_0)\Big| - \frac{E_p}{E_b(t_0)}\cdot p\,\alpha_{T_p\alpha},$$

$$\hat{\alpha}_{M_\omega\alpha}(t_0) = \alpha_{M_\omega\alpha}(t_0)\Big| - \frac{E_p}{E_b(t_0)}\cdot p\,\alpha_{M_\omega\alpha}.$$

U odnosu na izraze (3.4.53) važi sledeća napomena: celokupni izrazi odgovaraju konstrukcijama koje se prednaprežu kablovima, dok se za proračun konstrukcija prednapregnutih na stazi treba upotrebiti samo prve članove datih relacija, odnosno samo one vrednosti koje su ispred vertikalnih crta.

- za $t = t_i$, $i \geq 1$:

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{N\alpha}(t_i)\,\boldsymbol{\Phi}(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\left[\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{N\alpha}(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{N\alpha}\cdot\sum_{r=1}^{i-1} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{r-1}}^{t_{r+1}}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_r)\right],$$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{Qx\alpha}(t_i)\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\left[\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{Qx\alpha}(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{Qx\alpha}\cdot\sum_{r=1}^{i-1} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{r-1}}^{t_{r+1}}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_r)\right],$$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{Qy\alpha}(t_i)\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\left[\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{Qy\alpha}(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{Qy\alpha}\cdot\sum_{r=1}^{i-1} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{r-1}}^{t_{r+1}}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_r)\right],$$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{Mx\alpha}(t_i)\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\left[\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{Mx\alpha}(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{Mx\alpha}\cdot\sum_{r=1}^{i-1} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{r-1}}^{t_{r+1}}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_r)\right], \qquad (3.4.54)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{My\alpha}(t_i)\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\left[\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{My\alpha}(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{My\alpha}\cdot\sum_{r=1}^{i-1} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{r-1}}^{t_{r+1}}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_r)\right],$$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{Tp\alpha}(t_i)\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\left[\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{Tp\alpha}(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{Tp\alpha}\cdot\sum_{r=1}^{i-1} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{r-1}}^{t_{r+1}}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_r)\right],$$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{M\omega\alpha}(t_i)\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_i)=\frac{1}{E_b(t_i)}\left[\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{M\omega\alpha}(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{M\omega\alpha}\cdot\sum_{r=1}^{i-1} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{r-1}}^{t_{r+1}}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_r)\right],$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{N\alpha}(t_i)=\Big\|&\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big](N^*_\alpha-\sigma_{pp\alpha}F_{p\alpha})+F_{b\alpha}E_b(t_i)\varepsilon_s(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_1}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{N\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big|+\\&+E_p\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big]\cdot{}_p\boldsymbol{\alpha}_{N\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{Qx\alpha}(t_i)=\Big\|&\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big]\Big[Q^*_{x\alpha}-(M_{x\alpha}+S'_{xp\alpha}\cdot\sigma_{pp\alpha}+S_{xp\alpha}\cdot\sigma'_{pp\alpha})\Big]+S'_{xb\alpha}E_b(t_i)\varepsilon_s(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_1}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{Qx\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big|+\\&+E_p\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big]\cdot{}_p\boldsymbol{\alpha}_{Qx\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{Qy\alpha}(t_i)=\Big\|&\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big]\Big[Q^*_{y\alpha}-(M_{y\alpha}+S'_{yp\alpha}\cdot\sigma_{pp\alpha}+S_{yp\alpha}\cdot\sigma'_{pp\alpha})\Big]+S'_{yb\alpha}E_b(t_i)\varepsilon_s(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_1}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{Qy\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big|+\\&+E_p\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big]\cdot{}_p\boldsymbol{\alpha}_{Qy\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{Mx\alpha}(t_i)=\Big\|&\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big](M^*_{x\alpha}-\sigma_{pp\alpha}S_{xp\alpha})+S_{xb\alpha}E_b(t_i)\varepsilon_s(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_1}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{Mx\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big|+\\&+E_p\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big]\cdot{}_p\boldsymbol{\alpha}_{Mx\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{My\alpha}(t_i)=\Big\|&\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big](M^*_{y\alpha}-\sigma_{pp\alpha}S_{yp\alpha})+S_{yb\alpha}E_b(t_i)\varepsilon_s(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_1}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{My\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big|+\\&+E_p\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big]\cdot{}_p\boldsymbol{\alpha}_{My\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{Tp\alpha}(t_i)=\Big\|&\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big]\Big[T^*_{p\alpha}-(M_{\omega\alpha}+S'_{\omega p\alpha}\sigma_{pp\alpha}+S_{\omega p\alpha}\sigma'_{pp\alpha})\Big]+S'_{\omega b\alpha}E_b(t_i)\varepsilon_s(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_1}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{Tp\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big|+\\&+E_p\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big]\cdot{}_p\boldsymbol{\alpha}_{Tp\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{M\omega\alpha}(t_i)=\Big\|&\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big](M^*_{\omega\alpha}-\sigma_{pp\alpha}S_{\omega p\alpha})+S_{\omega b\alpha}E_b(t_i)\varepsilon_s(t_i)-\frac{E_a}{2}\cdot f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_1}\cdot{}_A\boldsymbol{\alpha}_{M\omega\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big|+\\&+E_p\Big[1+f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_0}^{t_i}\Big]\cdot{}_p\boldsymbol{\alpha}_{M\omega\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_0)\Big\|,\end{aligned}$$

(3.4.55)

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\alpha}_{N\alpha}(t_i) = \alpha_{N\alpha}(t_i) + \frac{E_a}{2E_b(t_i)} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \cdot {}_A\alpha_{N\alpha}\,, \\
&\tilde{\alpha}_{Q_x\alpha}(t_i) = \alpha_{Q_x\alpha}(t_i) + \frac{E_a}{2E_b(t_i)} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \cdot {}_A\alpha_{Q_x\alpha}\,, \\
&\tilde{\alpha}_{Q_y\alpha}(t_i) = \alpha_{Q_y\alpha}(t_i) + \frac{E_a}{2E_b(t_i)} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \cdot {}_A\alpha_{Q_y\alpha}\,, \\
&\tilde{\alpha}_{M_x\alpha}(t_i) = \alpha_{M_x\alpha}(t_i) + \frac{E_a}{2E_b(t_i)} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \cdot {}_A\alpha_{M_x\alpha}\,, \qquad (3.4.56) \\
&\tilde{\alpha}_{M_y\alpha}(t_i) = \alpha_{M_y\alpha}(t_i) + \frac{E_a}{2E_b(t_i)} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \cdot {}_A\alpha_{M_y\alpha}\,, \\
&\tilde{\alpha}_{T_p\alpha}(t_i) = \alpha_{T_p\alpha}(t_i) + \frac{E_a}{2E_b(t_i)} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \cdot {}_A\alpha_{T_p\alpha}\,, \\
&\tilde{\alpha}_{M_\omega\alpha}(t_i) = \alpha_{M_\omega\alpha}(t_i) + \frac{E_a}{2E_b(t_i)} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \cdot {}_A\alpha_{M_\omega\alpha}\,.
\end{aligned}
$$

Kao i do sada, celokupni izrazi (3.4.55) odnose se na konstrukcije prednapregnute kablovima, dok u slučaju konstrukcija prednapregnutih putem athezije važe samo vrednosti ovih izraza koje se nalaze levo od vertikalnih crta.

Konkretan slučaj nekog prednapregnutog tankozidnog štapa u vremenu t_i $(i=0,1,2,3,\ldots)$, kao što je već rečeno, možemo da rešimo korišćenjem matričnih jednačina (3.4.34), odnosno (3.4.35). Na bazi do sada izloženog, koeficijente i slobodne članove ovih jednačina izrazićemo putem sledećih matrica:

$$
\hat{U}(t_0) = \left\| \begin{matrix} \hat{R}(t_0) \\ \Psi_{\xi,1} \\ \Psi_{\xi,n+5} \\ \hat{G}(t_0) \end{matrix} \right\|, \qquad \underset{i=1,2,3,\ldots}{\tilde{U}(t_i)} = \left\| \begin{matrix} \tilde{R}(t_i) \\ \Psi_{\xi,1} \\ \Psi_{\xi,n+5} \\ \tilde{G}(t_i) \end{matrix} \right\|, \qquad (3.4.57)
$$

$$
\hat{W}(t_0) = \left\| \begin{matrix} \tilde{P}(t_0) \\ \varrho_{\xi,1} \\ \varrho_{\xi,n+5} \\ \hat{G}^*(t_0) \end{matrix} \right\|, \qquad \underset{i=1,2,3,\ldots}{\tilde{W}(t_i)} = \left\| \begin{matrix} \tilde{S}(t_i) - \frac{E_a}{2} R_A \sum\limits_{r=1}^{i-1} f(t_i,\tau_t)\Big|_{t_{r-1}}^{t_{r+1}} \cdot \Phi(t_r) \\ \varrho_{\xi,1} \\ \varrho_{\xi,n+5} \\ \tilde{G}^*(t_i) \end{matrix} \right\|. \qquad (3.4.58)
$$

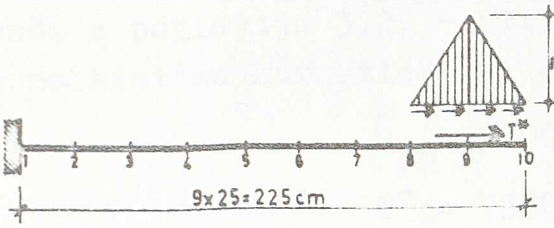
Osim matrica čija su nam značenja poznata od ranije, u izrazima (3.4.57) i (3.4.58) figurišu i matrice $\hat{G}(t_o)$, $\hat{G}(t_i)$, $\hat{G}^*(t_o)$ i $\tilde{G}^*(t_i)$ (i=1,2,3,....). To su u stvari matrice koje se formiraju na bazi konkretnih graničnih uslova. Matrice $\hat{G}(t_o)$ i $\tilde{G}(t_i)$ (i=1,2,3,....) su pravougaone matrice u čiji sastav ulazi po 14 vrsta. Ovi elementi su takođe matrice i to matrice iz skupa onih matrica koje sa leve strane množe matričnu funkciju $\Phi(t_i)$ (i=0,1,2,3,....) u izrazima (3.4.37), (3.4.52) i (3.4.54). Koje će se od navedenih matrica-koeficijenata upotrebiti zavisi od konkretnih graničnih uslova. U opštem slučaju dolazi u obzir korišćenje mešovitih graničnih uslova, pri čemu je potpuno irelevantan red upisivanja elemenata. Na osnovu izloženog proizilazi zaključak da su matrice $\hat{G}(t_o)$ i $\tilde{G}(t_i)$ (i=1,2,3,....) pravougaone matrice tipa 14,4(n+5).

$\hat{G}^*(t_o)$ i $\tilde{G}^*(t_i)$ (i=1,2,3,....) su matrice- kolone, pri čemu svaka od ovih matrica ima po 14 elemenata. Pošto kao elementi navedenih matrica figurišu slobodni članovi jednačina (3.4.37), (3.4.52) i (3.4.54) pomnoženi faktorom $E_b(t_i)$, formalno se može smatrati da se i u ovom slučaju radi o matricama koje se formiraju od elemenata u vidu matrica. Kao i u prethodnom slučaju, i ovde se elemanti matrica definišu na bazi konkretnih graničnih uslova problema, pri čemu mora postojati saglasnost položaja elemenata ovih matrica u odnosu na odgovarajuće članove matrica $\hat{G}(t_o)$ i $\tilde{G}(t_i)$ (i=1,2,3,....). Imajući u vidu do sada izloženo, proizilazi da su matrice $\hat{G}^*(t_o)$ i $\tilde{G}^*(t_i)$ (i=1,2,3,....) matrice-kolone reda 14.

3.5. Brojni primer

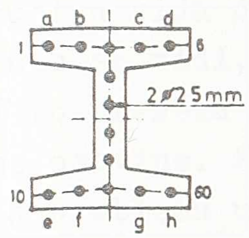
Prikazaćemo sada na jednom konkretnom slučaju tankozidne konstrukcije primenu izloženog numeričkog postupka. Razmatraćemo centrično prednapregnut štap I preseka dat na sl. 3.17, pri čemu ćemo pretpostaviti da je njegov profil identičan profilu sistema koji je bio analiziran u poglavlju 1.7.

Obzirom da u jednačinama problema figurišu linijska opterećenja štapa, koncentrisani momenat torzije T^* aproksimiraćemo parcijalnim torzionim opterećenjem u vidu ravnokrakog trougla.



Intenzitet ovog opterećenja u tački "9" može da se odredi iz relacije

$$m_{P,9} = \frac{T^*}{\lambda} .$$



Sl. 3.17

Geometrijske karakteristike preseka koje će nam u daljem biti potrebne su sledeće:

$F_a = 0,00$,
$F_p = 1,374 \text{ cm}^2$,
$F_b = 182,0 \text{ cm}^2$,

$I_{\omega\omega a} = 0,00$,
$I_{\omega\omega p} = 1399 \text{ cm}^6$,
$I_{\omega\omega b} = 204182 \text{ cm}^6$,

$\omega_1 = -\omega_6 = -\omega_{10} = \omega_{60} = 66,72 \text{ cm}^2$,
$\omega_a = -\omega_d = -\omega_e = \omega_h = 53,38$ -"-,
$\omega_b = -\omega_c = -\omega_f = \omega_g = 26,69$ -"-,

$K_a = K_p = 0,00$,
$K_b = 866 \text{ cm}^4$.

Sektorske koordinate svih tačaka na osovini vertikalnog rebra jednake su nuli.

Ako kao fizičke konstante čeličnih delova preseka uzmemo vrednosti

$E_a = E_p = 2000000 \text{ kp/cm}^2$,
$G_a = G_p = 770000$ -"- ,

(za slučaj da je Poisson-ov koeficijent čelika jednak 0,3), dobićemo da je

$$F_A = F_a + \frac{E_p}{E_a} \cdot F_p = F_p,$$

$$I_{\omega\omega A} = I_{\omega\omega a} + \frac{E_p}{E_a} \cdot I_{\omega\omega p} = I_{\omega\omega p},$$

$$K_A = K_a + \frac{G_p}{G_a} \cdot K_p = 0.$$

Usvojićemo da je predmetni štap izrađen od betona čije karakteristike (modul elastičnosti, Poisson-ov koeficijent, tečenje, skupljanje) u potpunosti odgovaraju betonu o kome je bilo reči u poglavlju 3.2. - str. 88-98. Pored navedenog, kod proračuna sistema koristićemo i ove vrednosti:

$$\sigma_{pp} = 13000 \text{ kp/cm}^2,$$

$$T^* = 7500 \text{ kp}\cdot\text{cm}.$$

Imajući u vidu da je $\lambda = 25$ cm, dobija se $m_{p,9} = 300$ kpcm/cm.

Kao što se vidi, ovde se radi o štapu konstantnog poprečnog preseka i to preseka koji je simetričan u odnosu na dve međusobno upravne osovine. Kod štapova ove vrste, kao što je rečeno, do rešenja problema u opštem slučaju dolazi se rešavanjem nezavisnih jednačina, odnosno rešavanjem četiri matrične jednačine, pri čemu u svakoj od ovih jednačina figuriše samo po jedna nepoznata matrica. Ovde je reč o matricama $\boldsymbol{\xi}(t_i)$, $\boldsymbol{\zeta}(t_i)$, $\boldsymbol{\eta}(t_i)$ i $\boldsymbol{\theta}(t_i)$ koje u stvari određuju veličine pomeranja pojedinih tačaka štapa u proizvoljnim vremenima t_i $(i=0,1,2,3,\ldots.)$. Međutim, obzirom na konkretno opterećenje štapa prikazanog na sl. 3.17, matrične jednačine u kojima kao nepoznate figurišu veličine $\boldsymbol{\eta}(t_i)$ i $\boldsymbol{\theta}(t_i)$ biće identički zadovoljene za vrednosti $\eta_j(t_i)= =0$ i $\theta_j(t_i)=0$, pa nam kao nepoznate ostaju samo matrice $\boldsymbol{\xi}(t_i)$ i $\boldsymbol{\theta}(t_i)$, odnosno samo pomeranja $\xi_j(t_i)$ i $\theta_j(t_i)$.

Matrične jednačine koje u ovom slučaju definišu problem svode se na dva sistema od po n+5 jednačina sa isto tolikim brojem nepoznatih. Kako je u našem slučaju n=9, u svakom od navedenih sistema imaćemo po 14 nepoznatih pomeranja. Obzirom na relativno velik broj jednačina, a u prvom redu zbog potrebe da se problem rešava sukcesivno, korak po korak, računski postupak je programiran za elektronski računar HEWLETT PACKARD 2116 C. Pošto se u stvari radi o potpuno nezavisnim postupcima računanja nepoznatih $\xi_j(t_i)$ i $\theta_j(t_i)$ izrađena su dva posebna programa na programskom jeziku HP BASYC. Mada ovi programi u prvom redu služe za rešavanje konkretnog tankozidnog štapa, oni se uz neznatne adaptacije mogu upotrebiti i za rešavanje drugih, sličnih problema, pod pretpostavkom da su zadovoljeni uslovi dvoosne simetrije.

Osim karakteristika sistema o kojima je već bilo reči, ulazni podaci za proračun po programu koji daje uticaje u sistemu pod dejstvom sile prednaprezanja su i fizičke konstante putem kojih se definišu reološka svojstva betona. Kao što smo napred već rekli, razmatramo štap prednapregnut putem athezije izrađen od betona koji u svemu odgovara slučaju tretiranom u poglavlju 3.2, pa saglasno tome proizilazi da će mera tečenja betona biti definisana na način koji je predložio S. V. Aleksandrovski. Kao rezultati proračuna po navedenom programu dobijaju se vrednosti pomeranja $\zeta_j(t_i)$ (u cm) i odgovarajuće dilatacije.

U tabeli 3-I dajemo prikaz rezultata koji se odnose na slučaj $t_0 = T(\emptyset) = 3$ dana. Pored pomeranja $\zeta_j(t_i)$ i dilatacija koje odgovaraju vremenu $t_i = t_0$, ove veličine su izračunate još i u sledećim vremenima $t_i = T(I)$: 7 dana, 14 dana, 28 dana, 90 dana, 400 dana, 1000 dana i 2000 dana.

U programu za proračun predmetnog sistema pod dejstvom torzionog momenta T^* primenjena je takođe mera tečenja betona prema Aleksandrovskom, pri čemu, logično, svi rezultati odgovaraju određenom vremenu $t_0 = T(\emptyset)$ i konkretnoj vrednosti vremena $t_i = T(I)$. Kao rezultati proračuna, pak, dobijaju se obrtanja poprečnih preseka $\theta_j(t_i)$, kao i izvodi $\theta'_j(t_i)$ i $\theta''_j(t_i)$, na osnovu kojih se putem izraza (3.3.8) i (3.3.9) mo-

Tabela 3-I

Proračun pomeranja i dilatacija centrično prednapregnutog tankozidnog štapa

VREME T(Ø)= 3 VREME T(I)= 3

PRESEK	POM. ZETA	DILATACIJA
1	Ø	-3.73357E-Ø4
2	-9.33393E-Ø3	-3.73357E-Ø4
3	-1.86679E-Ø2	-3.73357E-Ø4
4	-2.8ØØ18E-Ø2	-3.73357E-Ø4
5	-3.73357E-Ø2	-3.73357E-Ø4
6	-4.66697E-Ø2	-3.73357E-Ø4
7	-5.6ØØ36E-Ø2	-3.73357E-Ø4
8	-6.53375E-Ø2	-3.73357E-Ø4
9	-7.46715E-Ø2	-3.73357E-Ø4
1Ø	-8.4ØØ54E-Ø2	-3.73357E-Ø4

VREME T(Ø)= 3 VREME T(I)= 7

PRESEK	POM. ZETA	DILATACIJA
1	Ø	-7.18171E-Ø4
2	-1.79543E-Ø2	-7.18171E-Ø4
3	-3.59Ø86E-Ø2	-7.18171E-Ø4
4	-5.38628E-Ø2	-7.18171E-Ø4
5	-7.18171E-Ø2	-7.18171E-Ø4
6	-8.97714E-Ø2	-7.1817ØE-Ø4
7	-.1Ø7725	-7.1817ØE-Ø4
8	-.12568	-7.18171E-Ø4
9	-.143634	-7.1817ØE-Ø4
1Ø	-.161588	-7.1817ØE-Ø4

VREME T(Ø)= 3 VREME T(I)= 14

PRESEK	POM. ZETA	DILATACIJA
1	Ø	-9.091ØØE-Ø4
2	-2.27275E-Ø2	-9.091ØØE-Ø4
3	-4.5455ØE-Ø2	-9.091ØØE-Ø4
4	-6.81825E-Ø2	-9.091Ø1E-Ø4
5	-9.091ØØE-Ø2	-9.091Ø1E-Ø4
6	-.113638	-9.091Ø1E-Ø4
7	-.136365	-9.091Ø1E-Ø4
8	-.159Ø93	-9.091ØØE-Ø4
9	-.18182	-9.091ØØE-Ø4
1Ø	-.2Ø4548	-9.091ØØE-Ø4

Tabela 3-I (nastavak)

VREME T(0)= 3 VREME T(I)= 28

PRESEK	POM. ZETA	DILATACIJA
1	0	-1.15193E-03
2	-2.87981E-02	-1.15193E-03
3	-5.75963E-02	-1.15193E-03
4	-8.63944E-02	-1.15193E-03
5	-.115193	-1.15193E-03
6	-.143991	-1.15193E-03
7	-.172789	-1.15193E-03
8	-.201587	-1.15192E-03
9	-.230385	-1.15193E-03
10	-.259183	-1.15193E-03

VREME T(0)= 3 VREME T(I)= 90

PRESEK	POM. ZETA	DILATACIJA
1	0	-1.54135E-03
2	-3.85338E-02	-1.54135E-03
3	-7.70675E-02	-1.54135E-03
4	-.115601	-1.54135E-03
5	-.154135	-1.54135E-03
6	-.192669	-1.54135E-03
7	-.231202	-1.54135E-03
8	-.269736	-1.54135E-03
9	-.30827	-1.54135E-03
10	-.346804	-1.54135E-03

VREME T(0)= 3 VREME T(I)= 400

PRESEK	POM. ZETA	DILATACIJA
1	0	-1.62950E-03
2	-4.07375E-02	-1.62950E-03
3	-8.14751E-02	-1.62950E-03
4	-.122213	-1.62950E-03
5	-.16295	-1.62950E-03
6	-.203638	-1.62950E-03
7	-.244425	-1.62950E-03
8	-.285163	-1.62950E-03
9	-.3259	-1.62950E-03
10	-.366638	-1.62950E-03

VREME T(0)= 3 VREME T(I)= 1000

PRESEK	POM. ZETA	DILATACIJA
1	0	-1.62848E-03
2	-4.07119E-02	-1.62848E-03
3	-8.14239E-02	-1.62848E-03
4	-.122136	-1.62848E-03
5	-.162848	-1.62848E-03
6	-.20356	-1.62848E-03
7	-.244272	-1.62848E-03
8	-.284984	-1.62848E-03
9	-.325696	-1.62848E-03
10	-.366407	-1.62848E-03

VREME T(0)= 3 VREME T(I)= 2000

PRESEK	POM. ZETA	DILATACIJA
1	0	-1.62849E-03
2	-4.07122E-02	-1.62849E-03
3	-8.14244E-02	-1.62849E-03
4	-.122137	-1.62849E-03
5	-.162849	-1.62849E-03
6	-.203561	-1.62849E-03
7	-.244273	-1.62849E-03
8	-.284986	-1.62849E-03
9	-.325698	-1.62849E-03
10	-.36641	-1.62849E-03

gu dobiti veličine dilatacija i klizanja u svim tačkama zadatog poprečnog preseka.

U tabeli 3-II dajemo rezultate proračuna zadatog sistema pod pretpostavkom apliciranja momenata T^* u sledećim vremenima $t_o = T(\emptyset)$: 7 dana, 14 dana, 28 dana i 90 dana.

Radi neposrednijeg uvida u ponašanje predmetnog sistema pod dejstvom torzionog momenta $T^* =$ 7500 kpcm, na sl. 3.18 prikazujemo promene funkcija $\theta(t_i)$, $\theta'(t_i)$ i $\theta''(t_i)$ kako duž osovine sistema, tako i u toku vremena. Konkretno je prikazano ponašanje sistema pri $t_o = 7$ dana, a kao tekuća vremena uzete su sledeće vrednosti: 14 dana, 28 dana, 90 dana i 400 dana.

Na sl. 3.19, pak, prikazana je promena funkcije $\theta'(t_i)$ u preseku "5" posmatranog štapa. Množenjem datih veličina faktorom 2e dobijaju se zakoni promene klizanja $\gamma_{sz}(t_i)$ u određenim tačkama konkretnog preseka.

Promena funkcija $\theta''(t_i)$ u presecima "1" i "2" prikazana je na sl. 3.20. Tu-

Tabela 3-II

PRORACUN UGLOVA OBRTANJA I NJIHOVIH IZVODA ZA SLUCAJ TAN-KOZIDNOG STAPA DUPLO-TE PRESEKA NAPREGNUTOG NA OGRANICENU TORZIJU

VREME T(0)= 7 VREME T(I)= 7

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	-6.06087E-09	2.52257E-06
2	7.88151E-04	4.33474E-05	9.45708E-07
3	2.16737E-03	5.95696E-05	3.52070E-07
4	3.76663E-03	6.55411E-05	1.25650E-07
5	5.44443E-03	6.74667E-05	2.83962E-08
6	7.13997E-03	6.73515E-05	-3.76131E-08
7	8.81200E-03	6.50812E-05	-1.44017E-07
8	1.03940E-02	5.82858E-05	-3.99617E-07
9	1.17263E-02	3.99030E-05	-1.07101E-06
10	1.23892E-02	2.65128E-05	-2.07365E-10

VREME T(0)= 7 VREME T(I)= 14

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	5.04951E-09	4.64701E-06
2	1.45232E-03	8.01367E-05	1.76352E-06
3	4.00683E-03	1.10489E-04	6.64648E-07
4	6.97676E-03	1.21792E-04	2.39630E-07
5	1.00964E-02	1.25483E-04	5.55920E-08
6	1.32509E-02	1.25290E-04	-7.09770E-08
7	1.63610E-02	1.21030E-04	-2.69865E-07
8	1.93024E-02	1.08379E-04	-7.42191E-07
9	2.17799E-02	7.45383E-05	-1.96508E-06
10	2.30293E-02	4.99699E-05	-3.92902E-10

VREME T(0)= 7 VREME T(I)= 28

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	3.52884E-09	5.76093E-06
2	1.80038E-03	9.95287E-05	2.20109E-06
3	4.97644E-03	1.37485E-04	8.35373E-07
4	8.67460E-03	1.51701E-04	3.01970E-07
5	1.25615E-02	1.56373E-04	7.17955E-08
6	1.64933E-02	1.56150E-04	-8.96762E-08
7	2.03690E-02	1.50809E-04	-3.37575E-07
8	2.40337E-02	1.35040E-04	-9.23974E-07
9	2.71210E-02	9.31083E-05	-2.43056E-06
10	2.86892E-02	6.27210E-05	-4.36557E-10

VREME T(0)= 7 VREME T(I)= 90

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	-7.58155E-09	7.42145E-06
2	2.31901E-03	1.28499E-04	2.85910E-06
3	6.42497E-03	1.77903E-04	1.09321E-06
4	1.12142E-02	1.96563E-04	3.99617E-07
5	1.62531E-02	2.02745E-04	9.48712E-08
6	2.13514E-02	2.02476E-04	-1.16386E-07
7	2.63769E-02	1.95517E-04	-4.40356E-07
8	3.11272E-02	1.75059E-04	-1.19624E-06
9	3.51299E-02	1.21078E-04	-3.12232E-06
10	3.71811E-02	8.20379E-05	-8.73115E-10

Tabela 3-II (nastavak)

VREME T(Ø)= 7 VREME T(I)= 400

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	Ø	-1.67420E-08	7.86992E-06
2	2.45893E-03	1.36391E-04	3.04268E-06
3	6.81954E-03	1.89018E-04	1.16747E-06
4	1.19098E-02	2.08952E-04	4.27259E-07
5	1.72671E-02	2.15574E-04	1.02533E-07
6	2.26885E-02	2.15308E-04	-1.23786E-07
7	2.80325E-02	2.07896E-04	-4.69234E-07
8	3.30833E-02	1.86140E-04	-1.27122E-06
9	3.73395E-02	1.28923E-04	-3.30611E-06
1Ø	3.95295E-02	8.76021E-05	4.07454E-10

VREME T(Ø)= 7 VREME T(I)= 1000

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	Ø	1.17871E-09	7.86924E-06
2	2.45917E-03	1.36405E-04	3.04308E-06
3	6.82026E-03	1.89049E-04	1.16840E-06
4	1.19116E-02	2.08999E-04	4.27652E-07
5	1.72702E-02	2.15619E-04	1.01929E-07
6	2.26926E-02	2.15351E-04	-1.23415E-07
7	2.80377E-02	2.07935E-04	-4.69830E-07
8	3.30893E-02	1.86165E-04	-1.27181E-06
9	3.73460E-02	1.28930E-04	-3.30692E-06
1Ø	3.95358E-02	8.75569E-05	-2.96859E-09

VREME T(Ø)= 7 VREME T(I)= 2000

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	Ø	6.21367E-09	7.86873E-06
2	2.45913E-03	1.36400E-04	3.04278E-06
3	6.82000E-03	1.89043E-04	1.16862E-06
4	1.19113E-02	2.08989E-04	4.27121E-07
5	1.72695E-02	2.15617E-04	1.03100E-07
6	2.26921E-02	2.15357E-04	-1.23960E-07
7	2.80373E-02	2.07939E-04	-4.69430E-07
8	3.30891E-02	1.86187E-04	-1.27073E-06
9	3.73467E-02	1.28994E-04	-3.30470E-06
1Ø	3.95388E-02	8.77271E-05	3.28873E-09

PRORACUN UGLOVA OBRTANJA I NJIHOVIH IZVODA ZA SLUCAJ TANKOZIDNOG STAPA DUPLO-TE PRESEKA NAPREGNUTOG NA OGRANICENU TORZIJU

VREME T(Ø)= 14 VREME T(I)= 14

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	Ø	-4.41651E-09	2.32639E-06
2	7.26885E-04	3.99634E-05	8.71041E-07
3	1.99817E-03	5.48958E-05	3.23551E-07
4	3.47168E-03	6.03803E-05	1.15206E-07
5	5.01718E-03	6.21507E-05	2.64245E-08
6	6.57921E-03	6.20444E-05	-3.49282E-08
7	8.11941E-03	5.99537E-05	-1.32331E-07
8	9.57690E-03	5.36963E-05	-3.63269E-07
9	1.08042E-02	3.67395E-05	-9.88268E-07
1Ø	1.14139E-02	2.43838E-05	-1.92813E-10

Tabela 3-II (nastavak)

VREME T(0)= 14 VREME T(I)= 28

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	2.60115E-09	4.27762E-06
2	1.33682E-03	7.37156E-05	1.61942E-06
3	3.68578E-03	1.01573E-04	6.09149E-07
4	6.41546E-03	1.11917E-04	2.18353E-07
5	9.28161E-03	1.15287E-04	5.12919E-08
6	1.21798E-02	1.15107E-04	-6.56873E-08
7	1.50370E-02	1.11194E-04	-2.47339E-07
8	1.77395E-02	9.95764E-05	-6.82099E-07
9	2.00158E-02	6.84197E-05	-1.81044E-06
10	2.11605E-02	4.57850E-05	-3.4197[illegible]E-10

VREME T(0)= 14 VREME T(I)= 98

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	-6.27915E-09	6.17152E-06
2	1.92844E-03	1.06651E-04	2.36108E-06
3	5.33256E-03	1.47374E-04	8.96718E-07
4	9.29713E-03	1.62654E-04	3.25741E-07
5	1.34653E-02	1.67684E-04	7.66086E-08
6	1.76813E-02	1.67444E-04	-9.57953E-08
7	2.18375E-02	1.61715E-04	-3.62554E-07
8	2.57671E-02	1.44803E-04	-9.90418E-07
9	2.90776E-02	9.98892E-05	-2.60266E-06
10	3.07615E-02	6.73489E-05	-5.52973E-10

VREME T(0)= 14 VREME T(I)= 400

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	-1.41663E-08	6.68302E-06
2	2.08809E-03	1.15623E-04	2.56796E-06
3	5.78116E-03	1.59966E-04	9.79466E-07
4	1.00864E-02	1.76665E-04	3.56475E-07
5	1.46144E-02	1.82182E-04	8.48304E-08
6	1.91955E-02	1.81940E-04	-1.04184E-07
7	2.37114E-02	1.75700E-04	-3.95004E-07
8	2.79804E-02	1.57318E-04	-1.07553E-06
9	3.15773E-02	1.08701E-04	-2.81381E-06
10	3.34155E-02	7.35240E-05	-3.71074E-10

VREME T(0)= 14 VREME T(I)= 1000

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	9.96806E-10	6.68236E-06
2	2.08826E-03	1.15637E-04	2.56853E-06
3	5.78185E-03	1.59999E-04	9.80443E-07
4	1.00882E-02	1.76716E-04	3.56911E-07
5	1.46177E-02	1.82232E-04	8.43793E-08
6	1.91998E-02	1.81989E-04	-1.03872E-07
7	2.37171E-02	1.75747E-04	-3.95441E-07
8	2.79872E-02	1.57358E-04	-1.07571E-06
9	3.15850E-02	1.08741E-04	-2.81361E-06
10	3.34243E-02	7.35583E-05	-1.04046E-09

VREME T(0)= 14 VREME T(I)= 2000

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	5.22414E-09	6.68192E-06
2	2.08823E-03	1.15633E-04	2.56827E-06
3	5.78163E-03	1.59994E-04	9.80624E-07
4	1.00879E-02	1.76707E-04	3.56453E-07
5	1.46170E-02	1.82230E-04	8.53470E-08
6	1.91994E-02	1.81992E-04	-1.04395E-07
7	2.37166E-02	1.75745E-04	-3.95332E-07
8	2.79867E-02	1.57362E-04	-1.07536E-06
9	3.15847E-02	1.08755E-04	-2.81314E-06
10	3.34244E-02	7.35953E-05	3.41970E-10

Tabela 3-II (nastavak)

PRORACUN UGLOVA OBRTANJA I NJIHOVIH IZVODA ZA SLUCAJ TANKOZIDNOG STAPA DUPLO-TE PRESEKA NAPREGNUTOG NA OGRANICENU TORZIJU

VREME T(0)= 28 VREME T(I)= 28

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	9.74978E-10	2.13985E-06
2	6.68726E-04	3.67473E-05	7.99856E-07
3	1.83736E-03	5.04588E-05	2.97070E-07
4	3.19167E-03	5.54898E-05	1.05407E-07
5	4.61185E-03	5.71079E-05	2.40398E-08
6	6.04706E-03	5.70088E-05	-3.19706E-08
7	7.46229E-03	5.50900E-05	-1.21529E-07
8	8.80156E-03	4.93407E-05	-3.38416E-07
9	9.92933E-03	3.37416E-05	-9.09513E-07
10	1.04886E-02	2.23705E-05	-1.81899E-10

VREME T(0)= 28 VREME T(I)= 90

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	-5.05679E-09	4.99383E-06
2	1.56045E-03	8.61141E-05	1.89570E-06
3	4.30570E-03	1.18742E-04	7.14537E-07
4	7.49755E-03	1.30895E-04	2.57725E-07
5	1.08505E-02	1.34867E-04	6.00012E-08
6	1.42409E-02	1.34659E-04	-7.66413E-08
7	1.75834E-02	1.30075E-04	-2.90056E-07
8	2.07447E-02	1.16481E-04	-7.97496E-07
9	2.34075E-02	8.01167E-05	-2.11164E-06
10	2.47505E-02	5.37161E-05	-4.14730E-10

VREME T(0)= 28 VREME T(I)= 400

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	-1.19180E-08	5.65030E-06
2	1.76542E-03	9.75952E-05	2.15827E-06
3	4.87976E-03	1.34805E-04	8.18472E-07
4	8.50565E-03	1.48739E-04	2.96248E-07
5	1.23167E-02	1.53317E-04	6.99838E-08
6	1.61715E-02	1.53099E-04	-8.73551E-08
7	1.99717E-02	1.47869E-04	-3.31122E-07
8	2.35649E-02	1.32405E-04	-9.05988E-07
9	2.65919E-02	9.12800E-05	-2.38400E-06
10	2.81289E-02	6.14740E-05	-4.80213E-10

VREME T(0)= 28 VREME T(I)= 1000

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	8.44011E-10	5.64958E-06
2	1.76551E-03	9.76099E-05	2.15915E-06
3	4.88050E-03	1.34844E-04	8.19617E-07
4	8.50774E-03	1.48800E-04	2.96801E-07
5	1.23205E-02	1.53380E-04	6.96637E-08
6	1.61768E-02	1.53163E-04	-8.70859E-08
7	1.99786E-02	1.47930E-04	-3.31558E-07
8	2.35732E-02	1.32458E-04	-9.06162E-07
9	2.66015E-02	9.13398E-05	-2.38332E-06
10	2.81402E-02	6.15423E-05	-4.80213E-10

VREME T(0)= 28 VREME T(I)= 2000

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	4.40923E-09	5.64921E-06
2	1.76549E-03	9.76061E-05	2.15893E-06
3	4.88031E-03	1.34840E-04	8.19760E-07
4	8.50748E-03	1.48792E-04	2.96426E-07
5	1.23199E-02	1.53378E-04	7.04640E-08
6	1.61764E-02	1.53165E-04	-8.75589E-08
7	1.99781E-02	1.47926E-04	-3.31522E-07
8	2.35727E-02	1.32457E-04	-9.05995E-07
9	2.66010E-02	9.13402E-05	-2.38336E-06
10	2.81397E-02	6.15433E-05	-3.85626E-10

Tabela 3-II (nastavak)

PRORACUN UGLOVA OBRTANJA I NJIHOVIH IZVODA ZA SLUCAJ TANKOZIDNOG STAPA DUPLO-TE PRESEKA NAPREGNUTOG NA OGRANICENU TORZIJU

VREME T(0)= 90 VREME T(I)= 90

PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	8.29459E-10	2.01152E-06
2	6.28621E-04	3.45318E-05	7.50954E-07
3	1.72659E-03	4.74061E-05	2.78989E-07
4	2.99892E-03	5.21286E-05	9.88166E-08
5	4.33302E-03	5.36433E-05	2.23554E-08
6	5.68109E-03	5.35497E-05	-2.98460E-08
7	7.01050E-03	5.17499E-05	-1.14134E-07
8	8.26859E-03	4.63495E-05	-3.17399E-07
9	9.32798E-03	3.16844E-05	-8.55311E-07
10	9.85281E-03	2.09911E-05	-1.56433E-10

VREME T(0)= 90 VREME T(I)= 400

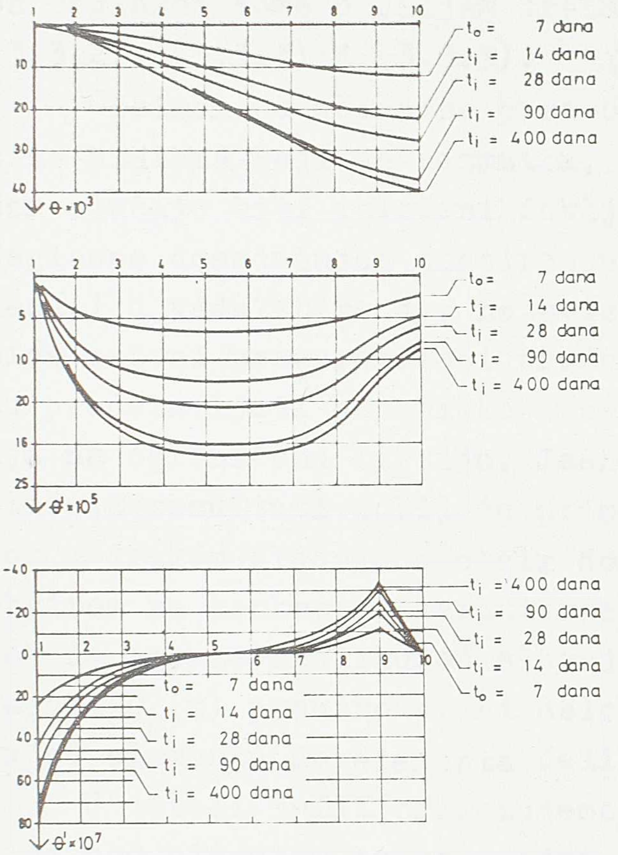
PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	-8.54561E-09	4.08643E-06
2	1.27680E-03	7.03768E-05	1.54439E-06
3	3.51884E-03	9.69269E-05	5.79619E-07
4	6.12314E-03	1.06769E-04	2.07774E-07
5	8.85730E-03	1.09971E-04	4.83960E-08
6	1.16217E-02	1.09799E-04	-6.21985E-08
7	1.43473E-02	1.06074E-04	-2.35781E-07
8	1.69254E-02	9.49916E-05	-6.50834E-07
9	1.90968E-02	6.52259E-05	-1.73042E-06
10	2.01867E-02	4.35914E-05	-3.41970E-10

VREME T(0)= 90 VREME T(I)= 1000

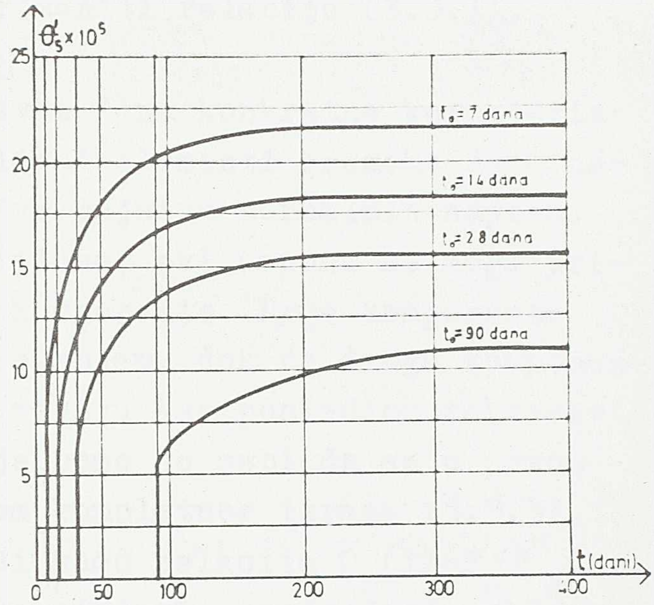
PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	6.03904E-10	4.08405E-06
2	1.27628E-03	7.03963E-05	1.54761E-06
3	3.51981E-03	9.70242E-05	5.82620E-07
4	6.12749E-03	1.06924E-04	2.09353E-07
5	8.86601E-03	1.10148E-04	4.85743E-08
6	1.16349E-02	1.09978E-04	-6.21731E-08
7	1.43649E-02	1.06242E-04	-2.36723E-07
8	1.69470E-02	9.51383E-05	-6.51569E-07
9	1.91218E-02	6.53950E-05	-1.72791E-06
10	2.02167E-02	4.37922E-05	-3.20142E-10

VREME T(0)= 90 VREME T(I)= 2000

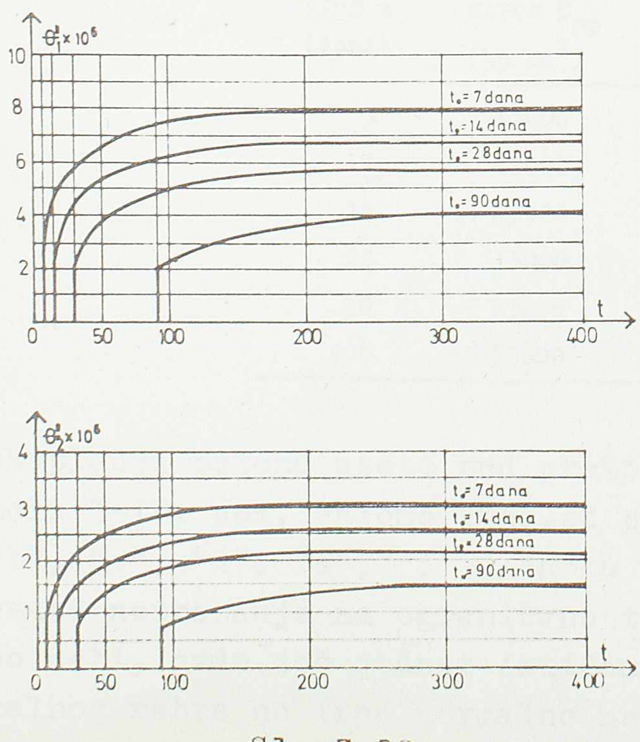
PRESEK	UGAO TETA	TETA PRIM	TETA SEKUND
1	0	3.15777E-09	4.08381E-06
2	1.27627E-03	7.03937E-05	1.54744E-06
3	3.51969E-03	9.70208E-05	5.82724E-07
4	6.12731E-03	1.06918E-04	2.09071E-07
5	8.86560E-03	1.10146E-04	4.91600E-08
6	1.16346E-02	1.09979E-04	-6.25187E-08
7	1.43646E-02	1.06239E-04	-2.36687E-07
8	1.69466E-02	9.51373E-05	-6.51460E-07
9	1.91214E-02	6.53946E-05	-1.72796E-06
10	2.02163E-02	4.37905E-05	-3.71074E-10



Sl. 3.18



Sl. 3.19



Sl. 3.20

tem datih grafika, odnosno množenjem faktorima $-\omega$, dolazi se i do zakona promene dilatacija $\varepsilon_z(t_i)$ u proizvoljnim tačkama ovih preseka.

Na bazi dijagrama $\varepsilon_z(t_i)$ i $\gamma_{sz}(t_i)$, odnosno na bazi odgovarajućih brojnih vrednosti dobijenih preko ranije prikazanih rezultata, mogu se korišćenjem veza između napona i deformacija izračunati i naponi u svim tačkama tretiranih poprečnih preseka. Ovi naponi se mogu izračunati kako u betonskom, tako i u čeličnim delovima konkretnog preseka, pri čemu se moraju koristiti fizički zakoni koji odgovaraju pojedinim materijalima. U našem slučaju, osim betona, u sastav poprečnog preseka ulazi još samo čelična žica za prednaprezanje, pa saglasno tome u daljem treba primeniti relacije (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) i (3.3.5).

Obzirom na učinjene pretpostavke i na konkretne karakteristike sistema koji se razmatra, čelični elementi preseka će u našem slučaju biti izloženi isključivo dejstvu normalnih napona. Saglasno dosadašnjem tretiranju sistema, ovi naponi se mogu prikazati u vidu zbira dve nezavisne komponente. Prva komponenta biće naponi prouzrokovani prednaprezanjem, dok će drugu komponentu predstavljati naponi koji se javljaju kao posledica naprezanja na ograničenu torziju. Jasno je samo po sebi da se u prvom slučaju rezultati dobijaju primenom kompletnog izraza (3.3.3), dok u drugom slučaju u obzir dolazi samo relacija $\sigma_p(t)=E_p\cdot\varepsilon_p(t)$. Obzirom na konkretne karakteristike sistema, proizilazi zaključak da se, za razliku od slučaja dejstva sile prednaprezanja, naponi $\sigma_p(t)$ prouzrokovani delovanjem torzionog momenta T^* menjaju od elementa do elementa čelika.

U tabeli 3-III prikazujemo promenu napona u prednapregnutoj žici pod uticajem samog prednaprezanja, pri čemu je tečenje i

Tabela 3-III

VREME t (dani)	NAPON σ_{pp} (kp/cm^2)	$E_p\cdot\varepsilon_p(t)$ (kp/cm^2)	$\sigma_p(t)$ (kp/cm^2)
3	13000	-746	12254
7	13000	-1436	11564
14	13000	-1818	11182
28	13000	-2304	10696
90	13000	-3082	9918
400	13000	-3260	9740

skuplanje betona uzeto pod pretpostavkom da je t_o= 3 dana. U tabeli 3-IV, pak, dajemo pregled napona u čeličnim elementima "a", "b", "c", "d", "e", "f" i "g" u funkciji vremena, isključivo usled naprezanja na ograničenu torziju. I ako je to jasno samo po sebi, ovde još jednom ističemo da elementi na osovini vertikalnog rebra ne trpe normalne napone usled dejstva momenta T^*.

Tabela 3-IV

VREME t (dani)		$\sigma_a=\sigma_h=-\sigma_d=-\sigma_e$ (kp/cm^2)	$\sigma_b=\sigma_g=-\sigma_c=-\sigma_f$ (kp/cm^2)
$t_o=7$	7	-268	-134
	14	-496	-248
	28	-614	-307
	90	-792	-396
	400	-840	-420
$t_o=14$	14	-248	-124
	28	-456	-228
	90	-658	-329
	400	-712	-356
$t_o=28$	28	-228	-114
	90	-532	-266
	400	-604	-302
$t_o=90$	90	-214	-107
	400	-436	-218

Određivanje napona u pojedinim tačkama betonskog dela preseka zahteva rešavanje integralnih jednačina koje definišu zavisnosti između napona i deformacija u betonu. Imajući u vidu složenost ovog postupka obzirom na usvojene funkcije $E_b(t)$, $G_b(t)$, $\varepsilon_s(t)$ i $J(t,\tau_t)$, kao i obzirom na mogućnost izračunavanja dilatacija i klizanja na bazi dobijenih vrednosti funkcija $\delta'(t_i)$, $\theta'(t_i)$ i $\theta''(t_i)$, i ovde ćemo kod izračunavanja napona $\sigma_b(t_i)$ i $\tau_{sb}(t_i)$ primeniti postupak numeričkog rešavanja relacija (3.3.1) i (3.3.2). Ovaj postupak, koji u suštini opet predstavlja primenu metode Krilova-Bogoljubova, programiran je takođe za elektronski računar HP 2116 C, a ulazni podaci za proračun po ovom programu su, između ostalog, dilatacije $\varepsilon_b(t_i)$ i klizanja $\gamma_{sb}(t_i)$, odnosno funkcije $\delta'(t_i)$, $-\omega\theta''(t_i)$ i $2e\cdot\theta'(t_i)$.

Prikaz rezultata proračuna promene normalnih napona u sistemu pod uticajem sile prednaprezanja dat je u tabeli 3-V. Kao i

Tabela 3-V

PRORACUN PROMENE NORMALNIH NAPONA U FUNKCIJI VREMENA NA OSNOVU IZRACUNATIH VREDNOSTI DILATACIJA (POSTUPAK KRILOVA-BOGOLJUBOVA)

VREME	DEFORMACIJA	NAPON
3	-3.73400E-04	-92.5178
7	-7.18200E-04	-87.3009
14	-9.09100E-04	-84.4126
28	-1.15190E-03	-80.7423
90	-1.54140E-03	-74.8841
400	-1.62950E-03	-73.5312
1000	-1.62850E-03	-73.5601
2000	-1.62850E-03	-73.5525

Tabela 3-VI

PRESEK 5 – tačka sa kordinatom e=2 cm

VREME (d a n i)		DEFORMACIJA (klizanje)	NAPON (kp/cm^2)
t_e= 7 dana	7	2.69867E-04	34.0446
	14	5.01932E-04	33.9782
	28	6.25492E-04	33.9464
	90	8.10980E-04	33.8873
	400	8.62296E-04	33.8723
	1000	8.62476E-04	33.8732
	2000	8.62468E-04	33.872
t_e= 14 dana	14	2.48603E-04	34.05
	28	4.61148E-04	33.9928
	90	6.70736E-04	33.9283
	400	7.28728E-04	33.9115
	1000	7.28928E-04	33.9121
	2000	7.28920E-04	33.911
t_e= 28 dana	28	2.28432E-04	34.0565
	90	5.39468E-04	33.9675
	400	6.13268E-04	33.9452
	1000	6.13520E-04	33.9459
	2000	6.13512E-04	33.9447
t_e= 90 dana	90	2.14573E-04	34.0585
	400	4.39884E-04	33.9955
	1000	4.40592E-04	33.9959
	2000	4.40584E-04	33.9948

PRESEK 1 – tačka "1"

VREME (d a n i)		DEFORMACIJA (dilatacija)	NAPON (kp/cm^2)
t_e= 7 dana	7	-1.68306E-04	-51.8069
	14	-3.10048E-04	-51.0452
	28	-3.84369E-04	-50.6603
	90	-4.95159E-04	-50.0744
	400	-5.25081E-04	-49.9304
	1000	-5.25036E-04	-49.9207
	2000	-5.25002E-04	-49.9136
t_e= 14 dana	14	-1.55217E-04	-51.8728
	28	-2.85403E-04	-51.1795
	90	-4.11764E-04	-50.5111
	400	-4.45891E-04	-50.342
	1000	-4.45847E-04	-50.3344
	2000	-4.45818E-04	-50.328
t_e= 28 dana	28	-1.42771E-04	-51.9366
	90	-3.33188E-04	-50.9245
	400	-3.76988E-04	-50.702
	1000	-3.76940E-04	-50.6961
	2000	-3.76915E-04	-50.6906
t_e= 90 dana	90	-1.34209E-04	-51.978
	400	-2.72647E-04	-51.2507
	1000	-2.72488E-04	-51.2471
	2000	-2.72472E-04	-51.2434

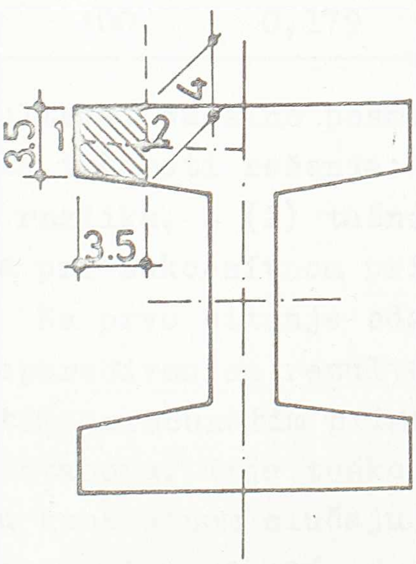
do sada, i ovom prilikom je pretpostavljeno da je sila prednaprezanja aplicirana na sistem u vremenu $t_o=3$ dana.

U tabeli 3-VI prikazujemo rezultate proračuna smičućih napona $\tau_{sb}(t_i)$ u preseku "5", u tački gornje flanše sa koordinatom e=2 cm, kao i normalnih napona u tački "1" preseka "1". Date vrednosti napona odgovaraju sistemu opterećenom torzionim momentom T^*.

Ostaje nam još samo da obradimo postupak određivanja napona $\tau_w(t_i)$. Kao što smo ranije već rekli, ovi naponi se dobijaju preko izraza (3.3.51), (3.3.53) i (3.3.54). Kako su u našem slučaju rastojanja $\Delta_k(t_i)$ uvek jednaka nuli, imaćemo da je $\tau_{wA}(t_i,x,y,z)=0$, pa se naponi $\tau_{wb}(t_i,x,y,z)$ mogu definisati izrazom

$$\tau_{wb}(t_i,x,y,z)=\overline{\tau}_{wb}(t_i,x,y,z)=\tau_{wb}(t_i)=-\frac{1}{d_k}\sum_{j=p,b}\int_{\tilde{F}_j}\frac{\partial\sigma_j(t_i,x,y,z)}{\partial z}dF=-\frac{1}{d_k}\int_{F_b}\frac{\partial\sigma_b(t_i,x,y,z)}{\partial z}dF.$$

Prikazaćemo ovde postupak izračunavanja napona $\tau_{wb}(t_i)$ u tačkama "1" i "2" (sl. 3.21) preseka "5". I ako su u ovom preseku vrednosti napona $\tau_{wb}(t_i)$ vrlo male u poređenju sa naponima $\tau_{sb}(t_i)$, presek "5" smo odabrali iz razloga što se u njemu na očigledan način može pratiti promena i jednih i drugih napona, pri čemu se može pokazati da uvek ostaje u važnosti relacija



Sl. 3.21

$$T^*=T_s(t_i)+T_w(t_i)=2\int_{F_b}\tau_{sb}(t_i)e\,dF+\int_{F_b}\tau_{wb}(t_i)h_p\,dF, \qquad (x)$$

koja u stvari predstavlja jedan vid izražavanja uslova ravnoteže.

Obzirom da smo u mogućnosti da izračunamo normalne napone u proizvoljnoj tački štapa, možemo da izračunamo i napone $\sigma_{"1"}$ i $\sigma_{"2"}$ u tačkama "1" i "2" preseka "4" i "6". Na taj način moći ćemo numeričkim putem da dođemo do vrednosti izvoda $\frac{d\sigma_{"1"}}{dz}$ i $\frac{d\sigma_{"2"}}{dz}$ u preseku "5", a zatim, saglasno definicionom izrazu za napon $\tau_{wb}(t_i)$, možemo da napišemo da je

$$|\tau_{wb"2"}(t_i)|\cong\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma_{"1"}}{dz}-\frac{d\sigma_{"2"}}{dz}\right)\frac{3,5+4,0}{2}\,3,5=1,64\left(\frac{d\sigma_{"1"}}{dz}-\frac{d\sigma_{"2"}}{dz}\right). \qquad (xx)$$

Tabela 3-VII

VREME t_i (dani)		NAPON $\lvert\tau_{wb"2"}\rvert$ (kp/cm^2)
$t_o=7$	7	0,176
	14	0,181
	28	0,183
	90	0,188
	400	0,188
$t_o=14$	14	0,176
	28	0,180
	90	0,184
	400	0,184
$t_o=28$	28	0,176
	90	0,182
	400	0,183
$t_o=90$	90	0,175
	400	0,179

U tabeli 3-VII prikazujemo napone $\lvert\tau_{wb"2"}\rvert$ u funkciji vremena izračunate pomoću relacije (xx).

Kao što se vidi, za razliku od napona $\tau_{sb}(t_i)$ koji se u toku vremena smanjuju, naponi $\tau_{wb}(t_i)$ prouzrokovani delovanjem momenta torzije T^* po apsolutnoj vrednosti rastu. Ovakva promena smičućih napona ima potpuno logično objašnjenje kada se imaju u vidu smerovi dejstava ovih napona, pošto u svakom vremenskom trenutku moraju biti zadovoljeni uslovi ravnoteže, a u našem slučaju ovaj uslov ima oblik označen simbolom (x).

Obzirom da su sve do sada prikazane vrednosti dobijene primenom izvesnih numeričkih postupaka, može se postaviti pitanje tačnosti rezultata. Načelno posmatrano, u našem slučaju postoje dva aspekta tačnosti rešenja: (1) tačnost u vezi primene metode konačnih razlika, i (2) tačnost obzirom na veličine vremenskih intervala pri sukcesivnom približavanju određenom vremenu t_i.

Na prvo pitanje odgovor se dobija relativno jednostavno i to upoređivanjem rezultata koji odgovaraju vremenima t_o sa vrednostima sračunatim primenom relacija elastične teorije tankozidnih štapova. Nije teško pokazati da primena diferencnog postupka u konkretnom slučaju uslovljava greške koje uglavnom ne prelaze granicu od $\pm 3\%$.

Tačnost proračuna obzirom na primenu metode Krilova-Bogoljubova može da se proceni isključivo na bazi rešenja sa većim, odnosno manjim brojem vremenskih koraka, ili, pak, poređenjem rezultata dobijenih rešavanjem izvesnih elementarnih problema za koje postoje egzaktna rešenja. Postoji, pored toga, i mogućnost analize nekih matematičkih modela uz pretpostavku da odabran model u dovoljnoj meri zadovoljava uslove sličnosti. Na primer, može se sprovesti analiza brojnih vrednosti izraza $\int_{t_o}^{t_i} Y(\tau_t) \cdot J(t_i,\tau_t) d\tau_t$ koji je karakterističan za naš problem, pri čemu funkciju $Y(\tau_t)$ treba odabrati tako da optimalno odgovara funkcijama koje figurišu u jednačinama koje se rešavaju. Isto tako, dobar model za ocenu tačnosti rešenja može da bude i postupak sukcesivnog izračunavanja brojnih vrednosti funkcije $Y(\tau_t=t_r)$ na bazi poznate vrednosti $Y(t_{r-1})$ i neke prosečne vrednosti izvoda $Y'(\tau_t)$ u intervalu od t_{r-1} do t_r.

Primenom navedenih postupaka mogu se izvesti sledeći zaključci.

Tačnost rešenja je načelno funkcija broja, odnosno veličina koraka koji se primenjuju u toku sukcesivnog napredovanja od početne vrednosti t_o do zadate vrednosti t_i. Međutim, može se pokazati da se veoma tačni rezultati dobijaju i pri srazmerno malom broju koraka, ali uz uslov da se veličine koraka prilagođavaju karakteru krivih koje figurišu u izrazu $\int_{t_o}^{t_i} Y(\tau_t) \cdot J(t_i,\tau_t) d\tau_t$. To drugim rečima znači da u našem slučaju treba usvajati srazmerno male početne korake, dok se u daljem toku proračuna veličine koraka mogu, bez opasnosti od veće greške, i povećavati. Na primer, u našem slučaju se za t_o=7 dana i t_i=2000 dana sve funkcije mogu vrlo dobro opisati ako se usvoje sledeći koraci: (t_o=7+)2+5+6+ +8+22+40+110+200+600+1000(=2000=t_i). Na ovaj način su i izračunate funkcije $\theta(t_i)$, $\theta'(t_i)$ i $\theta''(t_i)$ prikazane u tabeli 3-II, a na bazi procene tačnosti i putem analize analognih problema izveden je zaključak da apsolutna vrednost razlike između približnih i tačnih rezultata, uzimajući u obzir zbir grešaka koje uslovljava primena dva numerička postupka, nigde ne prelazi granicu od 5%. Međutim, ovu vrednost ne bi trebalo prihvatiti kao potpuno merodavnu, pošto odstupanja tog reda imamo samo kod pojedinih uticaja i u pojedinim presecima sistema. Naime, navedene greške se javljaju uglavnom samo tamo gde su apsolutne vrednosti uticaja srazmerno male i gde razlike između približnih i tačnih rezultata mogu da budu relativno velike. Navedena odstupanja se iz tih razloga moraju prihvatiti sasvim uslovno, pogotovu stoga što nije teško pokazati da se prosečna tačnost izloženog postupka u našem slučaju kreće u granicama od $\pm(2-3)\%$. Međutim, tačnost proračuna se može i povećati ukoliko se elementi λ "usitne", odnosno ukoliko se poveća tačnost u odnosu na metodu konačnih razlika.

Pokazaćemo u daljem da se kod konkretnog problema potpuno zadovoljavajuća tačnost proračuna ostvaruje i u slučaju kada se od vremena t_o do vremena t_i upotrebi samo jedan korak integracije. Doduše, i ovom prilikom se u pojedinim presecima sistema mogu dobiti znatnija odstupanja između približnih i tačnih vrednosti, ali se i ovde sve veće razlike javljaju isključivo oko nultih tačaka funkcija koje definišu predmetni uticaj. Stoga ćemo, da bi izveli dovoljno pouzdan sud o tačnosti primenjenog postupka, analizirati samo one preseke sistema u kojima se javljaju ekstremne vrednosti pojedinih uticaja.

Kao prvo, analiziraćemo uticaje od sile prednaprezanja za slučaj kada je t_o=3 dana, a t_i=2000 dana. Ako uzmemo da je

$$V_1 = \frac{S_{10}(t_i)}{S_{10}(t_o)}, \quad a \quad V_2 = \frac{\varepsilon_z(t_i)}{\varepsilon_z(t_o)},$$

dobićemo da su „tačne" vrednosti ovih odnosa (računate korak po korak po shemi (t_o=3+)2+2+2+5+6+8+22+40+110+200+600+1000(=2000=t_i)),

$$V_1 \approx V_2 \approx V \approx \frac{-0,3664}{-0,0840} \approx \frac{-1,628\cdot 10^{-3}}{-0,373\cdot 10^{-3}} \approx 4,363,$$

dok su približne vrednosti, koje se dobijaju putem jednog jedinog koraka integracije,

$$V_{1pr.} \approx V_{2pr.} \approx V_{pr.} \approx 4,410.$$

Kao što se vidi, razlika između približnih i „tačnih" rezultata iznosi oko 1%.

Što se tiče odnosa napona u betonu, dobija se sledeće:

$$V_{\sigma_b} = \frac{\sigma_b(t_i)}{\sigma_b(t_o)} = \frac{-73,55}{-92,52} = 0,7950, \quad V_{\sigma_b pr.} = 0,7919.$$

U ovom slučaju razlika između približnih i „tačnih" vrednosti iznosi oko 0,5%.

Ostaje nam još da vidimo kolike su razlike između sila u prednapregnutim čeličnim žicama. Ako uzmemo da je

$$D_{\sigma p} = \frac{\text{promena (pad) napona u čeliku za } t_i\text{=2000 dana}}{\text{početni napon u čeliku } (\sigma_{pp} = 13000 \text{ kp/cm}^2)},$$

dobija se

$$D_{\sigma_p}=\frac{3257}{13000}=0{,}2505, \quad D_{\sigma_p\,pr.}=0{,}2533.$$

Razlika između približnih i „tačnih" rezultata u ovom slučaju je oko 1%.

Ako kao uslovno tačne vrednosti usvojimo veličine deformacija i napona date u tabelama 3-II, 3-III, 3-IV i 3-VI, moći ćemo da dođemo do odstupanja između približnih i "tačnih" rezultata i za slučaj delovanja torzionog momenta T^*. Uzimajući za analizu vremena t_o=7 dana i t_i=2000 dana dobijaju se sledeći odnosi:

$$W=\frac{\theta_{10}(t_i)}{\theta_{10}(t_o)}=3{,}191, \qquad W_{pr.}=3{,}194,$$

$$W'=\frac{\theta'_5(t_i)}{\theta'_5(t_o)}=3{,}196, \qquad W'_{pr.}=3{,}198,$$

$$W''=\frac{\theta''_1(t_i)}{\theta''_1(t_o)}=3{,}119, \qquad W''_{pr.}=3{,}134,$$

$$W_{\sigma_b}=\frac{\sigma_{b1}(t_i)}{\sigma_{b1}(t_o)}=0{,}9634, \qquad W_{\sigma_b\,pr.}=0{,}9631,$$

$$W_{\tau_b}=W_{\tau_{sb}}=\frac{\tau_{sb5}(t_i)}{\tau_{sb5}(t_o)}=0{,}9949, \quad W_{\tau_b\,pr.}=0{,}9949,$$

$$D_{\sigma_p}=\pm 0{,}0646, \qquad D_{\sigma_p\,pr.}=\pm 0{,}0649.$$

Treba naglasiti da se vrednosti W_{σ_b} odnose na presek 1 i na tačke "1", "6", "10" i "60" (sl. 3.17), dok se izrazi W_{τ_b} odnose na presek 5 i na tačke sa koordinatama e=±2 cm. Vrednosti D_{σ_p}, pak, odgovaraju preseku 1 i armaturi označenoj sa "a", "d", "e" i "h", pri čemu se u pojedinim žicama napon usled torzije u toku vremena povećava, a u pojedinim smanjuje.

Na tačnost rezultata kod primene integracije u vidu jednog koraka svakako utiče i odnos između površine čelika i površine betona unutar idealnog preseka štapa. Stoga ćemo sada sprovesti analizu posmatranog štapa varirajući površinu čeličnih žica, uz napomenu da je kod preseka sa kojim su izvršene sve prethodne analize tzv. procenat armiranja iznosio $\mu(\%)=0,755$.

Usvajajući i ovom prilikom napred uvedene oznake, dolazi se do odnosa između "tačnih" i približnih rešenja koje dajemo u tabeli 3-VIII. Kao što se vidi, dobijeni rezultati odgovaraju štapu izloženom isključivo sili prednaprezanja i to za slučaj kada je $t_o=3$ dana, a $t_i=2000$ dana.

Tabela 3-VIII

$\mu(\%)$	$\frac{V}{V_{pr.}}$	$\frac{V\sigma_b}{V\sigma_{b\,pr.}}$	$\frac{D\sigma_p}{D\sigma_{p\,pr.}}$
0,5	$\frac{4,965}{4,999}$	$\frac{0,8293}{0,8279}$	$\frac{0,2049}{0,2063}$
1,0	$\frac{4,009}{4,070}$	$\frac{0,7649}{0,7601}$	$\frac{0,2905}{0,2949}$
1,5	$\frac{3,561}{3,645}$	$\frac{0,7100}{0,7006}$	$\frac{0,3622}{0,3708}$
2,0	$\frac{3,273}{3,375}$	$\frac{0,6629}{0,6478}$	$\frac{0,4228}{0,4358}$
2,5	$\frac{3,061}{3,177}$	$\frac{0,6220}{0,6007}$	$\frac{0,4743}{0,4924}$
3,0	$\frac{2,893}{3,021}$	$\frac{0,5864}{0,5585}$	$\frac{0,5188}{0,5417}$

U tabeli 3-IX prikazujemo odnose W, W', i W'', dok u tabeli 3-X dajemo „tačne" i približne vrednosti odnosa $W_{\sigma b}$, $W_{\tau b}$ i $D_{\sigma p}$. U oba slučaja radi se o štapu izloženom uticaju momenta torzije T^*, pri čemu je analizirano stanje koje odgovara vremenima $t_o=7$ dana i $t_i=2000$ dana. Procenat armiranja $\mu(\%)$ predstavlja odnos između ukupne površine čelika u preseku i površine betona, dok je $\mu^o(\%)$ odnos između one površine čelika koja je od uticaja na naponsko i deformaciono stanje pri ograničenoj torziji i betona. Drugim rečima, obzirom da u ovom slučaju igra ulogu samo čelik označen sa "a", "b", "c", "d", "e", "f", "g" i "h" (sl. 3.17), važi sledeći odnos:

Tabela 3-IX

$\mu(\%)$	$\mu^o(\%)$	$\frac{W}{W_{pr.}}$	$\frac{W'}{W'_{pr.}}$	$\frac{W''}{W''_{pr.}}$
0,5	0,286	$\frac{3,196}{3,199}$	$\frac{3,200}{3,202}$	$\frac{3,920}{3,933}$
1,0	0,571	$\frac{3,186}{3,190}$	$\frac{3,192}{3,195}$	$\frac{3,094}{3,113}$
1,5	0,857	$\frac{3,176}{3,181}$	$\frac{3,184}{3,188}$	$\frac{3,043}{3,070}$
2,0	1,143	$\frac{3,166}{3,173}$	$\frac{3,175}{3,181}$	$\frac{2,997}{3,030}$
2,5	1,428	$\frac{3,156}{3,165}$	$\frac{3,166}{3,174}$	$\frac{2,954}{2,994}$
3,0	1,714	$\frac{3,146}{3,157}$	$\frac{3,158}{3,166}$	$\frac{2,913}{2,958}$
3,5	2,000	$\frac{3,139}{3,150}$	$\frac{3,149}{3,159}$	$\frac{2,874}{2,926}$
4,0	2,286	$\frac{3,130}{3,142}$	$\frac{3,140}{3,152}$	$\frac{2,840}{2,896}$
4,5	2,571	$\frac{3,120}{3,135}$	$\frac{3,131}{3,144}$	$\frac{2,807}{2,868}$
5,0	2,857	$\frac{3,113}{3,128}$	$\frac{3,122}{3,137}$	$\frac{2,776}{2,839}$
5,5	3,143	$\frac{3,105}{3,122}$	$\frac{3,113}{3,130}$	$\frac{2,747}{2,814}$
6,0	3,428	$\frac{3,098}{3,115}$	$\frac{3,104}{3,122}$	$\frac{2,719}{2,789}$

$$\mu^o = \frac{8}{14}\mu = \frac{8}{14}\frac{F_P}{F_b}.$$

Na osnovu dobijenih vrednosti može se zaključiti da postoji vrlo dobra saglasnost između veličina

Tabela 3-X

$\mu(\%)$	$\mu^{o}(\%)$	$\frac{W\sigma_b}{W\sigma_{b}\,pr.}$	$\frac{W\tau_b}{W\tau_{b}\,pr.}$	$\pm\frac{D\sigma_p}{D\sigma_{p}\,pr.}$
0,5	0,286	$\frac{0,9754}{0,9752}$	$\frac{0,9968}{0,9967}$	$\frac{0,0656}{0,0658}$
1,0	0,571	$\frac{0,9533}{0,9524}$	$\frac{0,9933}{0,9932}$	$\frac{0,0638}{0,0642}$
1,5	0,857	$\frac{0,9324}{0,9313}$	$\frac{0,9898}{0,9900}$	$\frac{0,0620}{0,0625}$
2,0	1,143	$\frac{0,9139}{0,9112}$	$\frac{0,9864}{0,9864}$	$\frac{0,0604}{0,0612}$
2,5	1,428	$\frac{0,8966}{0,8930}$	$\frac{0,9828}{0,9828}$	$\frac{0,0588}{0,0597}$
3,0	1,714	$\frac{0,8802}{0,8753}$	$\frac{0,9792}{0,9792}$	$\frac{0,0575}{0,0583}$
3,5	2,000	$\frac{0,8647}{0,8590}$	$\frac{0,9754}{0,9755}$	$\frac{0,0562}{0,0571}$
4,0	2,286	$\frac{0,8512}{0,8439}$	$\frac{0,9719}{0,9719}$	$\frac{0,0549}{0,0560}$
4,5	2,571	$\frac{0,8383}{0,8298}$	$\frac{0,9680}{0,9681}$	$\frac{0,0538}{0,0549}$
5,0	2,857	$\frac{0,8262}{0,8158}$	$\frac{0,9644}{0,9645}$	$\frac{0,0527}{0,0539}$
5,5	3,143	$\frac{0,8147}{0,8031}$	$\frac{0,9607}{0,9609}$	$\frac{0,0515}{0,0529}$
6,0	3,428	$\frac{0,8044}{0,7905}$	$\frac{0,9573}{0,9571}$	$\frac{0,0507}{0,0519}$

koje smo usvojili kao uslovno tačne i približnih rešenja. Može se uočiti da se tačnost rezultata smanjuje sa povećanjem procenta armiranja, ali se u okviru onih procenata koji su uobičajeni kod većine prednapregnutih konstrukcija sva približna rešenja mogu prihvatiti kao zadovoljavajuće tačna. U slučaju uticaja koji se javljaju pod dejstvom sile prednaprezanja najveća odstupanja su reda (4-5)%, dok u slučaju uticaja izazvanih momentom torzije ove razlike ne prelaze granicu od oko 2,5%. Interesantno je istaći da praktično nema razlika između približnih i "tačnih" vrednosti smičućih napona τ_{sb}, dok su razlike između napona σ_b manje od 2%.

Proračun koji se sastoji u rešavanju integro-diferencijalnih jednačina problema putem jednog koraka integracije odgovara u suštini sledećoj formi linearizacije izraza (3.3.1) i (3.3.2) koji definišu veze između napona i deformacija u betonu:

$$\varepsilon_b(t) \cong \frac{1}{E_b(t)}\left\{\sigma_b(t)+\frac{1}{2}\left[\sigma_b(t_o)+\sigma_b(t)\right]\int_{t_o}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right\}+\varepsilon_s(t),$$

$$\gamma_{sb}(t) \cong \frac{1}{G_b(t)}\left\{\tau_{sb}(t)+\frac{1}{2}\left[\tau_{sb}(t_o)+\tau_{sb}(t)\right]\int_{t_o}^{t} J(t,\tau_t)\,d\tau_t\right\}.$$

Ovo je u principu isti prilaz problemu kao i postupak o kome se govori u literaturi /50/, a sprovedene analize u dovoljnoj meri potvrđuju njegovu opravdanost u slučaju tretiranja prednapregnutih konstrukcija.

Ako se u našem slučaju gornje veze usvoje kao osnova za rešavanje problema, doći će se do sistema diferencijalnih jednačina, pa načelno otpada potreba za primenom metode konačnih razlika, koja već sama po sebi uslovljava određeni nivo netačnosti.

Prikazaćemo na ovom mestu još i neke rezultate proračuna predmetnog sistema na ograničenu torziju koji se dobijaju primenom postupka izloženog u knjizi C. F. Kollbrunnera i N. Hajdina /50/. Analizu ćemo sprovesti sa vezom između napona i deformacija u betonu prema predlogu H. Trosta /104/. Parametre koji figurišu u ovoj vezi odredićemo na bazi eksperimentalno dobijenih vrednosti funkcije $C(t,\tau_t)$ koju, kao što je napred pokazano, možemo da aproksimiramo izrazom S. V. Aleksandrovskog (3.1.7), odnosno (3.2.10).

Ako uvedemo pretpostavku da je $E_b(t) \cong E_b(t_o) = E_b = \text{const.}$, vezu (3.1.1) i Trostov izraz koji definiše zavisnost između napona i deformacija možemo da prikažemo na sledeći način:

$$E_b \varepsilon_b(t) = \sigma_b(t_o)\left[1+E_b C(t,t_o)\right] + \int_{t_o}^{t} \frac{\partial \sigma_b(\tau_t)}{\partial \tau_t}\left[1+E_b C(t,\tau_t)\right] d\tau_t + E_b \varepsilon_s(t),$$

$$E_b \varepsilon_b(t) = \sigma_b(t_o)\left[1+K(t_o)\cdot\varphi_N\cdot f(t-t_o)\right] + \int_{t_o}^{t} \frac{\partial \sigma_b(\tau_t)}{\partial \tau_t}\left[1+K(\tau_t)\cdot\varphi_N\cdot f(t-\tau_t)\right] d\tau_t + E_b \varepsilon_s(t).$$

Jednostavnim poređenjem ispisanih izraza, a vodeći računa o značenjima pojedinih veličina koje u njima figurišu dolazi se do sledećih zavisnosti:

$$E_b C(t,\tau_t) = K(\tau_t)\cdot\varphi_N\cdot f(t-\tau_t), \qquad t_o \le \tau_t \le t,$$

$$E_b \varphi(\tau_t) = K(\tau_t)\cdot\varphi_N,$$

$$\varphi_\infty = K(t_o)\cdot\varphi_N = E_b \varphi(t_o).$$

Osim napred ispisane vrednosti φ_∞, u daljem će nam biti potrebna i veličina ρ_T koja je za slučaj kada $t \to \infty$ definisana relacijom

$$\rho_T = \int_{t_o}^{\infty} \frac{\partial F(\tau_t)}{\partial \tau_t}\cdot\frac{K(\tau_t)}{K(t_o)}\cdot d\tau_t .$$

Funkcija $F(\tau_t)$, pak, određena je preko približnog obrasca

$$F(\tau_t) \approx \frac{1+K(t_o)\cdot\varphi_N}{1+K(t_o)\cdot\varphi_N\cdot f(\tau_t-t_o)}\cdot f(\tau_t-t_o).$$

Imajući u vidu da je u našem slučaju

$$f(\tau_t-t_o) = \frac{C(\tau_t,t_o)}{\varphi(t_o)},$$

sledi da je

$$F(\tau_t) \approx \frac{1+E_b\cdot\varphi(t_o)}{1+E_b\cdot C(\tau_t,t_o)}\cdot\frac{C(\tau_t,t_o)}{\varphi(t_o)},$$

pa se dobija sledeći izraz za funkciju ρ_T, odnosno tzv. koeficijent relaksacije:

$$\rho_T = \frac{1+E_b\cdot\varphi(t_o)}{\varphi(t_o)^2}\int_{t_o}^{\infty}\varphi(\tau_t)\cdot\frac{\partial}{\partial\tau_t}\left[\frac{C(\tau_t,t_o)}{1+E_b\cdot C(\tau_t,t_o)}\right]d\tau_t .$$

Ako izvršimo parcijalnu integraciju ovako formirane relacije, parametar ρ_T možemo da predstavimo i u obliku

$$\rho_T = \frac{\varphi(\tau_t\to\infty)}{\varphi(t_o)} - \frac{1+E_b\cdot\varphi(t_o)}{\varphi(t_o)^2}\int_{t_o}^{\infty}\frac{C(\tau_t,t_o)}{1+E_b\cdot C(\tau_t,t_o)}\cdot\frac{\partial\varphi(\tau_t)}{\partial\tau_t}\,d\tau_t .$$

Putem ovog izraza, a na bazi konkretnih vrednosti funkcija $\varphi(t_o)$ i $C(\tau_t,t_o)$ koje odgovaraju vremenima t_o= 7,14,28 i 90 dana, sračunate su postupkom numeričke integracije odgovarajuće vrednosti $\varphi_\infty = \Phi$ i ρ_T preko kojih se definišu Trostovi parametri

$$\mu = \frac{\Phi(1-\rho_T)}{1+\rho_T\Phi} \quad \text{i} \quad E_{b\Phi} = \frac{E_b}{1+\rho_T\Phi}.$$

Ove veličine, kao i sve ostale vrednosti fizičkog karaktera koje će nam u daljem biti potrebne, prikazujemo u narednoj tabeli.

Tabela A

t_o (dani)	E_b (kp/cm^2)	G_b (kp/cm^2)	Φ	ρ_T	μ	$E_{b\phi}/E_b = G_{b\phi}/G_b$
7	307814	126153	2,208	0,847	0,118	0,348
14	334196	136966	1,941	0,854	0,106	0,376
28	363776	149088	1,693	0,862	0,095	0,406
90	387293	158727	1,057	0,898	0,055	0,513

Na bazi veličina E_b, $E_{b\phi}/E_b$, G_b i $G_{b\phi}/G_b$ mogu se izračunati potrebne geometrijske karakteristike poprečnog preseka sistema koje odgovaraju slučaju $t\to\infty$. Ove karakteristike date su u tabeli B.

Tabela B

t_o (dani)	$\hat{F}$ (cm^2)	$\hat{K}$ (cm^4)	$\hat{I}_{\omega\omega}$(cm^6)
7	11,12	49,37	12335
14	12,81	57,92	14228
28	14,81	68,08	16477
90	19,45	91,58	21683

Za proračun će nam takođe biti potrebni i faktori S_{44} i K_b^r/K^o. Obzirom na izraze kojima su ove vrednosti definisane, u našem slučaju se dobija sledeće:

$$S_{44}=0,96372,$$

$$K_b^r/K^o=1,000.$$

Ove veličine, isto kao i vrednosti prikazane u tabeli B, dobijene su na bazi pretpostavke da je $E_c=E_p=2000000$ kp/cm^2, a $G_c=G_p=770000$ kp/cm^2.

Presečne sile M_ω^o i T_s^o u konkretnom slučaju izračunavaju se putem sledećih izraza:

$$\frac{M_\omega^o}{T^*}=\begin{cases}\frac{1}{k}\cdot\frac{-\mathrm{Ch}\,k\ell\,\mathrm{Sh}\,k(\zeta-z)+(\mathrm{Ch}\,k\zeta-1)\mathrm{Sh}\,k(\ell-z)}{\mathrm{Ch}\,k\ell}, & 0\le z\le\zeta,\\ \frac{1}{k}\cdot\frac{(\mathrm{Ch}\,k\zeta-1)\cdot\mathrm{Sh}\,k(\ell-z)}{\mathrm{Ch}\,k\ell}, & \zeta\le z\le\ell,\end{cases}$$

$$\frac{T_s^o}{T^*}=\begin{cases}1-\frac{\mathrm{Ch}\,k\ell\,\mathrm{Ch}\,k(\zeta-z)-(\mathrm{Ch}\,k\zeta-1)\mathrm{Ch}\,k(\ell-z)}{\mathrm{Ch}\,k\ell}, & 0\le z\le\zeta,\\ \frac{(\mathrm{Ch}\,k\zeta-1)\cdot\mathrm{Ch}\,k(\ell-z)}{\mathrm{Ch}\,k\ell}, & \zeta\le z\le\ell,\end{cases}$$

$$T^*=7500\ \text{kp}\cdot\text{cm},\quad \ell=225\ \text{cm},\quad \zeta=200\ \text{cm},\quad k=0,040956\ 1/\text{cm}.$$

Imajući u vidu prednje veličine, podeljeno torziono opterećenje sistema $\mathcal{M}_\phi$ koje odgovara slučaju $t\to\infty$ možemo sada da izračunamo preko relacije

$$\mathcal{M}_\phi=\mathcal{M}_D-\mu\left[S_{44}\,M_\omega^{o''}+(K_b^r/K^o)\,T_s^{o'}\right].$$

Vrednosti $\mathcal{M}_\phi$ sračunate u tačkama 1 - 10 zadatog sistema izražene u kp·cm/cm prikazujemo u tabeli C.

Kao što se vidi, kod proračuna podeljenog momenta torzije koncentrisani momenat T^* je zamenjen podeljenim momentom $m_{p,9}$. Ovo je učinjeno stoga, što ćemo u daljem problem rešavati diferencnim postupkom kako bi se stvorila mogućnost adekvatnijeg upoređivanja konkretnog rezultata sa odgovarajućom tačnom veličinom. Pri ovome ćemo, naravno, kao uslovno tačne vrednosti tretirati veličine dobijene rešavanjem integro-diferencijalnih jednačina postupkom "korak po korak".

Ako sa $\tilde{\theta}_\varphi(t)$, $\tilde{\theta}_5'(t)$ i $\tilde{\theta}_1''(t)$ označimo veličine koje se u posmatranom

Tabela C

Presek	Vreme t_o (dani)			
	7	14	28	90
1	-1,31	-1,18	-1,06	-0,61
2	-0,47	-0,42	-0,38	-0,22
3	-0,17	-0,15	-0,14	-0,08
4	-0,06	-0,05	-0,05	-0,03
5	-0,01	-0,01	-0,01	-0,00
6	0,02	0,02	0,02	0,01
7	0,07	0,06	0,06	0,03
8	0,20	0,18	0,16	0,10
9	300,57	300,51	300,46	300,27
10	0,00	0,00	0,00	0,00

slučaju dobijaju primenom diferencnog postupka, a sa $\Theta_{10}(t)$, $\Theta_5'(t)$ i $\Theta_1''(t)$ odgovarajuće uslovno tačne vrednosti, onda postoji mogućnost izračunavanja sledećih odnosa:

$$P_{\Theta}(\%) = \frac{\tilde{\Theta}_{10}(t)-\Theta_{10}(t)}{\Theta_{10}(t)}100,$$

$$P_{\Theta'}(\%) = \frac{\tilde{\Theta}_5'(t)-\Theta_5'(t)}{\Theta_5'(t)}100,$$

$$P_{\Theta''}(\%) = \frac{\tilde{\Theta}_1''(t)-\tilde{\Theta}_1''(t)}{\Theta_1''(t)}100,$$

$t \to \infty$.

Tabela D

t_o (dani)	$P_{\Theta}(\%)$	$P_{\Theta'}(\%)$	$P_{\Theta''}(\%)$
7	-10,2	-10,1	-10,5
14	-9,3	-9,3	-9,6
28	-8,3	-8,3	-8,5
90	-5,0	-5,0	-5,1

Tabela E

t_o (dani)	$P_{\sigma_b}(\%)$	$P_{\sigma_p}(\%)$	$P_{\tau_b}(\%)$
7	-11,4	-10,4	-11,2
14	-10,3	-9,6	-9,1
28	-9,3	-8,6	-8,8
90	-5,2	-5,0	-5,3

Na identičan način mogu se obrazovati i odnosi

$$P_{\sigma_b}(\%)_{t\to\infty} = \frac{\tilde{\sigma}_{b1}(t)-\sigma_{b1}(t)}{\sigma_{b1}(t)}100, \quad P_{\sigma_p}(\%)_{t\to\infty} = \frac{\tilde{\sigma}_{pa}(t)-\sigma_{pa}(t)}{\sigma_{pa}(t)}100, \quad P_{\tau_b}(\%)_{t\to\infty} = \frac{\tilde{\tau}_{sbs}(t)-\tau_{sbs}(t)}{\tau_{sbs}(t)}100,$$

koji određuju odstupanja između približnih vrednosti napona i odgovarajućih "tačnih" veličina datih u tabelama 3-VI i 3-IV.

Odnose P_{Θ}, $P_{\Theta'}$ i $P_{\Theta''}$ prikazujemo u tabeli D, dok u tabeli E dajemo pregled odnosa P_{σ_b}, P_{σ_p} i P_{τ_b}. U oba slučaja ovi odnosi su izraženi u procentima.

Kao što se vidi, postupak koji je na ovom mestu primenjen daje rezultate koji su manji od tačnih veličina. Odstupanja se smanjuju sa starošću betona, pri čemu uglavnom, sa izuzetkom sasvim mladih betona, ne prelaze granicu od 10%.

3.6. Eksperimentalno ispitivanje prednapregnutih nosača I preseka izloženih delovanju dugotrajnih momenata torzije

U ovom poglavlju daćemo prikaz ispitivanja koja su sprovedena sa ciljem da se utvrdi stepen saglasnosti eksperimentalnih rezultata i računskih vrednosti dobijenih na bazi primene teorijskih stavova izloženih u poglavljima 3.3. i 3.4. Eksperimentalno su tretirani tankozidni prednapregnuti štapovi I preseka koji po geometrijskim karakteristikama i statičkoj shemi potpuno odgovaraju nosačima na kojima su proveravane osnovne pretpostavke elastične teorije tankozidnih štapova. Kao i tom prilikom, i u ovom slučaju su korišćeni već opisani uređaji za apliciranje torzionih momenata T^*(videti poglavlje 1.7.).

Na stazi za prednaprezanje izrađeno je ukupno 10 opitnih nosača. Svaki od ovih nosača izložen je sili prednaprezanja pri starosti od 3 dana, dok su torzioni momenti $\pm T^*$ na opitna tela nanošeni nakon 7, 14, 28 i 90 dana. Svakoj od navedenih starosti betona odgovarala su po dva opitna tela, što znači da je na torziju tretirano ukupno 8 nosača. Preostala dva nosača, pak, nisu izlagana delovanju momenata torzije, već su u toku celog eksperimenta bila izložena isključivo centričnoj sili prednaprezanja.

Intenzitet torzionih momenata $\pm T^*$ iznosio je u svim slučajevima 7500 kpcm, dok je početni napon u žicama na stazi za prednaprezanje bio 130 kp/mm^2. Ova vrednost je izmerena neposredno pre početka betoniranja nosača.

U opitne nosače ugrađen je beton sledećeg sastava:

agregat:	moravski šljunak (0-4 mm - 30%, 4-8 mm - 30%, 8-12 mm - 40%),
cement:	PC 550 - ANHOVO (500 kg/m^3),
vodocementni faktor:	V/C = 0,41.

Negovanje izbetoniranih elemenata ostvareno je intenzivnim kvašenjem u periodu od 7 dana. Prilikom ugrađivanja betona upotrebljeni su odgovarajući vibratori.

Pored opitnih nosača, načinjen je istovremeno i određen broj kontrolnih opitnih tela - kocki 14x14x14 cm i prizmi 12x12x x36 cm. Na ovim uzorcima mereno je sledeće:

- čvrstoća betona (na kockama i prizmama),
- modul elastičnosti (na prizmama),
- Poisson-ov koeficijent (na prizmama),
- tečenje (puženje) betona (na prizmama - podužno i poprečno),
- skupljanje betona (na prizmama).

U tabeli 3-XI dat je pregled rezultata ispitivanja čvrstoća pri različitim starostima betona. Ove vrednosti predstavljaju prosečne veličine koje su u slučaju kocki dobijene na tri uzorka, a u slučaju prizmi na serijama od po šest uzoraka. Treba naglasiti da su prikazane čvrstoće prizmi dobijene na uzorcima na kojima su prethodno sprovedena merenja modula elastičnosti i Poisson-ovog koeficijenta betona. Rezultate ovih ispitivanja prikazali smo već ranije, u poglavlju 3.2., pa stoga nema potrebe da ih ovde još jednom navodimo.

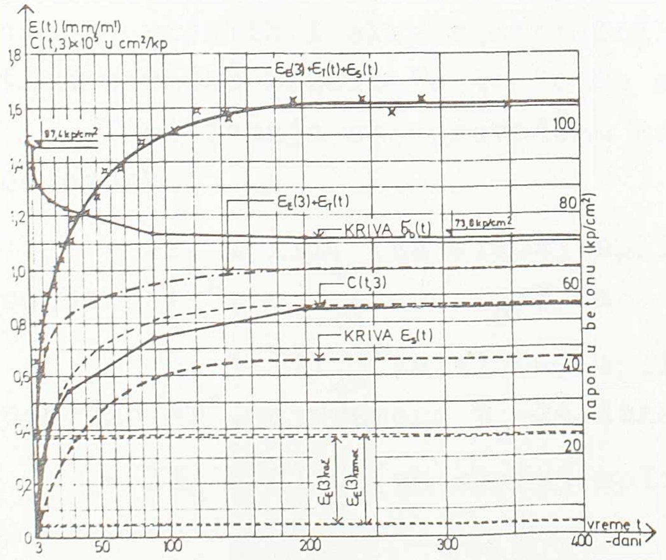
Tabela 3-XI

STAROST BETONA U VREME ISPITIVANJA (dani)	ČVRSTOĆA KOCKE 14x14x14 cm (kp/cm^2)	ČVRSTOĆA PRIZME 12x12x36 cm (kp/cm^2)
3	397	-
7	-	410
10	596	-
14	617	466
28	704	541
90	-	592

Rezultate merenja tečenja i skupljanja betona koji je ugrađen u opitne nosače takođe smo već ranije prezentirali. Naime, o tome je bilo reči prilikom razmatranja pitanja koeficijenta poprečne deformacije tečenja betona $\nu_2(t,\tau_t)$, (videti poglavlje 3.2.), tako da se u daljem može smatrati da je upotrebljeni beton i sa aspekta vremenskih deformacija potpuno definisan.

Kao što smo ranije već rekli, uzorci na kojima su sprovedena merenja skupljanja i tečenja nisu čuvani u uslovima potpuno kondicionirane sredine, ali i pored toga dobijene vrednosti reoloških parametara su potpuno prihvatljive za analizu ponašanja opitnih nosača. Ovo važi zato, što su se i predmetni nosači i kontrolni uzorci tokom celog eksperimenta nalazili pod istovetnim termohigrometrijskim uslovima. Naime, i jedni i drugi su bili čitavo vreme u istoj prostoriji u kojoj je, kao što smo svojevremeno rekli, temperatura sezonski varirala od 15-25%, dok se relativna vlažnost vazduha kretala od 60-80%.

Osim na način o kome je bilo govora u poglavlju 3.2., mera tečenja upotrebljenog betona za slučaj $t_o = 3$ dana određena je i putem merenja deformacija na opitnim nosačima koji nisu izlagani dejstvu momenata torzije. Ovde se radi o jednom kontrolnom merenju koje je, kao i u većini slučajeva do sada, sprovedeno pomoću deformetra "Huggenberger" sa bazom od 10". Merna mesta su se nalazila oko sredina opitnih nosača, odnosno u osovinama njihovih gornjih flanši. Deformacije su merene od momenta betoniranja nosača, što znači da izmerene vrednosti predstavljaju zbir svih deformacija uzoraka.



Sl. 3.22

Na sl. 3.7 prikazujemo krivu $\varepsilon_E(3)+\varepsilon_T(t)+\varepsilon_S(t)$ koja reprezentuje prosečne vrednosti izmerenih deformacija. Uzimajući u obzir krivu skupljanja $\varepsilon_S(t)$, koja je takođe prikazana na sl. 3.22, može se dobiti i kriva $\varepsilon_E(3)+\varepsilon_T(t)$. To je u stvari kriva u kojoj su sadržane deformacije tečenja betona prouzrokovane silom prednaprezanja koja se u toku vremena neprekidno menja. Kako je mera tečenja betona definisana kao deformacija koja se razvija u uslovima konstantnog, jediničnog napona u betonu, potrebno je prvo da na bazi relacije

$$\sigma_b(t) \cdot F_b = F_p \left\{ 13000 - E_p \left[\varepsilon_E(3) + \varepsilon_T(t) + \varepsilon_S(t) \right] \right\} ,$$

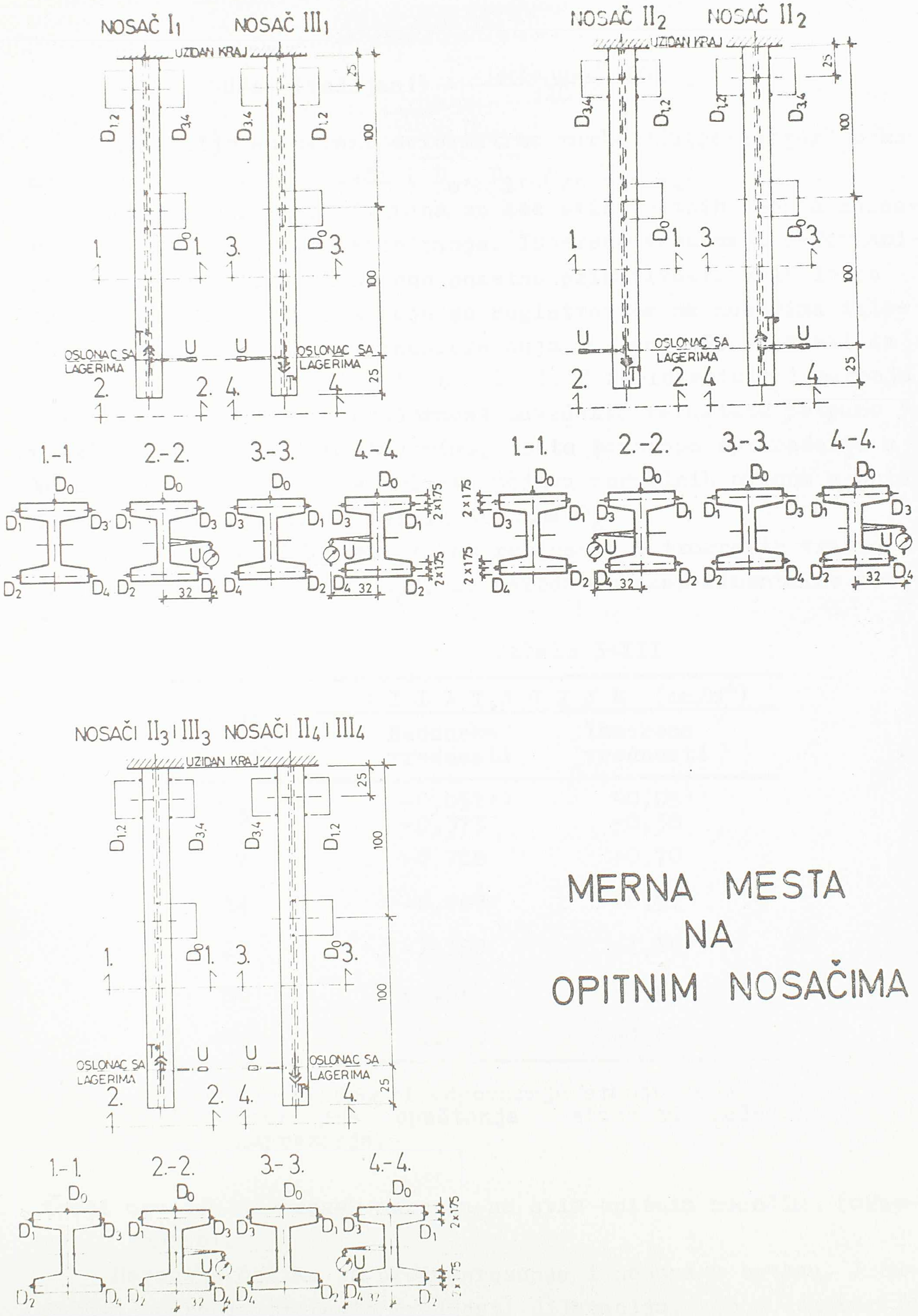
odnosno uslova ravnoteže, izračunamo napone $\sigma_b(t)$, a zatim da formiramo funkciju $\frac{\varepsilon_T(t)}{\sigma_b(t)}$ koja predstavlja dovoljno tačnu vrednost za $C(t,3)$. Ceo postupak koji je ovde opisan interpretiran je grafički na sl. 3.22, pri čemu su krive $\sigma_b(t)$ i $C(t,3)$ nacrtane na bazi niza tačaka u kojima su izvršene pomenute računske operacije. Kao što pokazuju dobijeni rezultati, postoji dobra saglasnost između računskih i izmerenih vrednosti elastičnih deformacija koje se javljaju u momentu opuštanja staze za prednaprezanje, a takođe i između krivih $C(t,3)$ dobijenih na dva različita načina. Naime, pored mere tečenja dobijene opisanim postupkom, na sl. 3.22 prikazana je i funkcija $C(t,3)$ (isprekidana linija) do koje se došlo putem ispitivanja prizmi u specijalnim uređajima za merenje tečenja.

Uzimajući u obzir sve što je do sada u okviru ovog poglavlja rečeno o opitnim nosačima koji su bili izloženi dugotrajnim torzionim dejstvima, proizilazi da ovi nosači u svemu odgovaraju konstrukciji koja je obrađena u poglavlju 3.5. kao brojni primer. Imajući u vidu ovu činjenicu, u daljem ćemo kod upoređivanja teorijskih i eksperimentalnih vrednosti deformacija koristiti numeričke rezultate do kojih se došlo u navedenom poglavlju.

Ispitivanja su sprovedena na nosačima koji su nosili sledeće oznake:

- II_1 i III_1 (za slučaj apliciranja torzionih momenata $-T^*$, odnosno $+T^*$, u vremenu $t_o=7$ dana),
- II_2 i III_2 (za slučaj apliciranja torzionih momenata $+T^*$, odnosno $-T^*$, u vremenu $t_o=14$ dana),
- II_3 i III_3 (za slučaj apliciranja torzionih momenata $-T^*$ u vremenu $t_o=28$ dana),
- II_4 i III_4 (za slučaj apliciranja torzionih momenata $+T^*$ u vremenu $t_o=90$ dana).

Dispozicije opitnih nosača zajedno sa rasporedima mernih mesta prikazane su na sl. 3.23. Kao što se vidi, za merenja linijskih pomeranja korišćeni su ugibomeri (U) marke "Huggenberger" (podatak instrumenta 0,05mm), a uglovi obrtanja preseka određivani su na osnovu izmerenih pomeranja putem relacije


NOSAČ I_1
NOSAČ III_1
NOSAČ II_2
NOSAČ II_2
NOSAČI II_3 I III_3
NOSAČI II_4 I III_4
UZIDAN KRAJ
OSLONAC SA LAGERIMA
$D_{1,2}$
$D_{3,4}$
D_0
D_1
D_2
D_3
D_4
U
T
1.-1.
2.-2.
3.-3.
4.-4.
25
100
32
2 x 17.5
MERNA MESTA
NA
OPITNIM NOSAČIMA

Sl. 3.23

$$\text{UGAO (radijani)} = \frac{\text{POMERANJE (mm)}}{320} .$$

Dilatacije su merene deformetrom marke "Huggenberger" o kome je napred već bilo reči (D_o, D_1, D_2, D_3, D_4).

Merna mesta D_o aktivirana su kod svih opitnih nosača neposredno nakon završetka betoniranja. Izmerene vrednosti deformacija, koje ovom prilikom nećemo posebno prikazivati, vrlo dobro odgovaraju deformacijama koje su registrovane na nosačima izloženim isključivo silama prednaprezanja, pa se može smatrati da kriva $\varepsilon_E(3)+\varepsilon_T(t)+\varepsilon_S(t)$ data na sl. 3.22 reprezentuje i merenja o kojima je ovde reč. Podudarnost navedenih rezultata potpuno je u skladu sa teorijskim stavovima, pošto torziono opterećenje u konkretnom slučaju ne uslovljava pojavu normalnih napona u onim tačkama koje odgovaraju mernim mestima D_o.

U tabeli 3-XII dajemo prikaz računskih i izmerenih vrednosti dilatacija u tačkama "D_o". Za merodavne eksperimentalne vrednosti usvojen je prosek merenja na svim opitnim nosačima (ukupno 10 komada).

Tabela 3-XII

VREME (dani)	DILATACIJE (mm/m^1) Računske vrednosti	Izmerene vrednosti
3	-0,051*) -0,373	-0,05*) -0,38
7	-0,718	-0,70
14	-0,909	-0,92
28	-1,152	-1,10
90	-1,541	-1,48
400	-1,630	-1,61

*) Ove vrednosti odgovaraju stanju neposredno pre opuštanja staze za prednaprezanje.

Naponi u čeliku za prednaprezanje i naponi u betonu, izračunati na bazi izmerenih vrednosti dilatacija, kao i odgovarajuće računske vrednosti iz primera obrađenog u poglavlju 3.5., dati su u tabl. 3-XIII i 3-XIV. Ovde se u stvari radi o prikazu pro-

Tabela 3-XIII

VREME (dani)	NAPONI U ČELIKU ZA PREDNAPREZANJE (kp/cm^2)	
	Računske vrednosti	Vrednosti dobijene na osnovu rezultata merenja
3	– *)	12900 *)
	12254	12240
7	11564	11600
14	11182	11160
28	10696	10800
90	9918	10040
400	9740	9780

Tabela 3-XIV

VREME (dani)	N A P O N I U B E T O N U (kp/cm^2)	
	Računske vrednosti	Vrednosti dobijene na osnovu rezultata merenja
3	– *)	-97,4 *)
	-92,52	-92,4
7	-87,30	-87,6
14	-84,41	-84,2
28	-80,74	-81,5
90	-74,88	-75,8
400	-73,53	-73,8

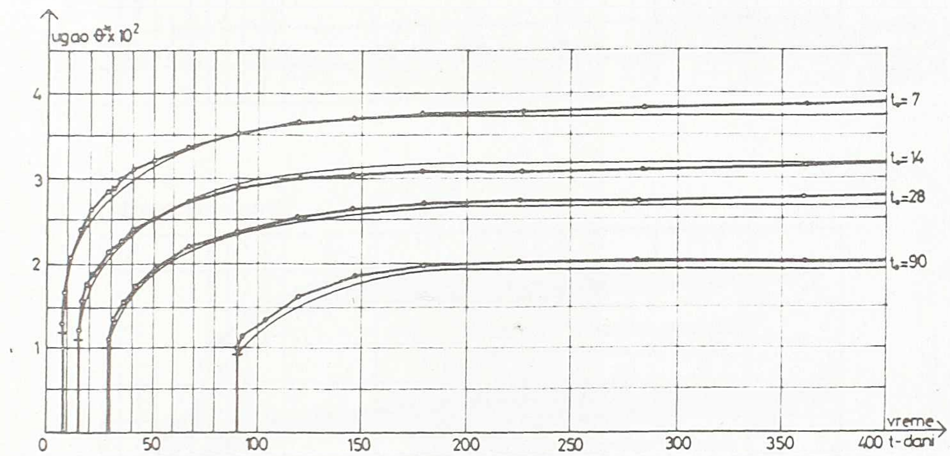
*) Ove veličine odnose se na stanje nosača neposredno pre opuštanja staze za prednaprezanje.

mene predmetnih napona u funkciji vremena, pri čemu su eksperimentalne veličine dobijene putem relacije

$$\sigma_p(t) = 13000 - E_p\left[\varepsilon_E(3) + \varepsilon_T(t) + \varepsilon_S(t)\right],$$

odnosno putem uslova ravnoteže koje smo napred već ispisali.

Rezultate merenja uglova obrtanja putem ugibomera U, kao i odgovarajuće teorijske vrednosti (videti poglavlje 3.5.), prikazujemo grafički na sl. 3.24. Kao što se vidi, ovom prilikom nis-



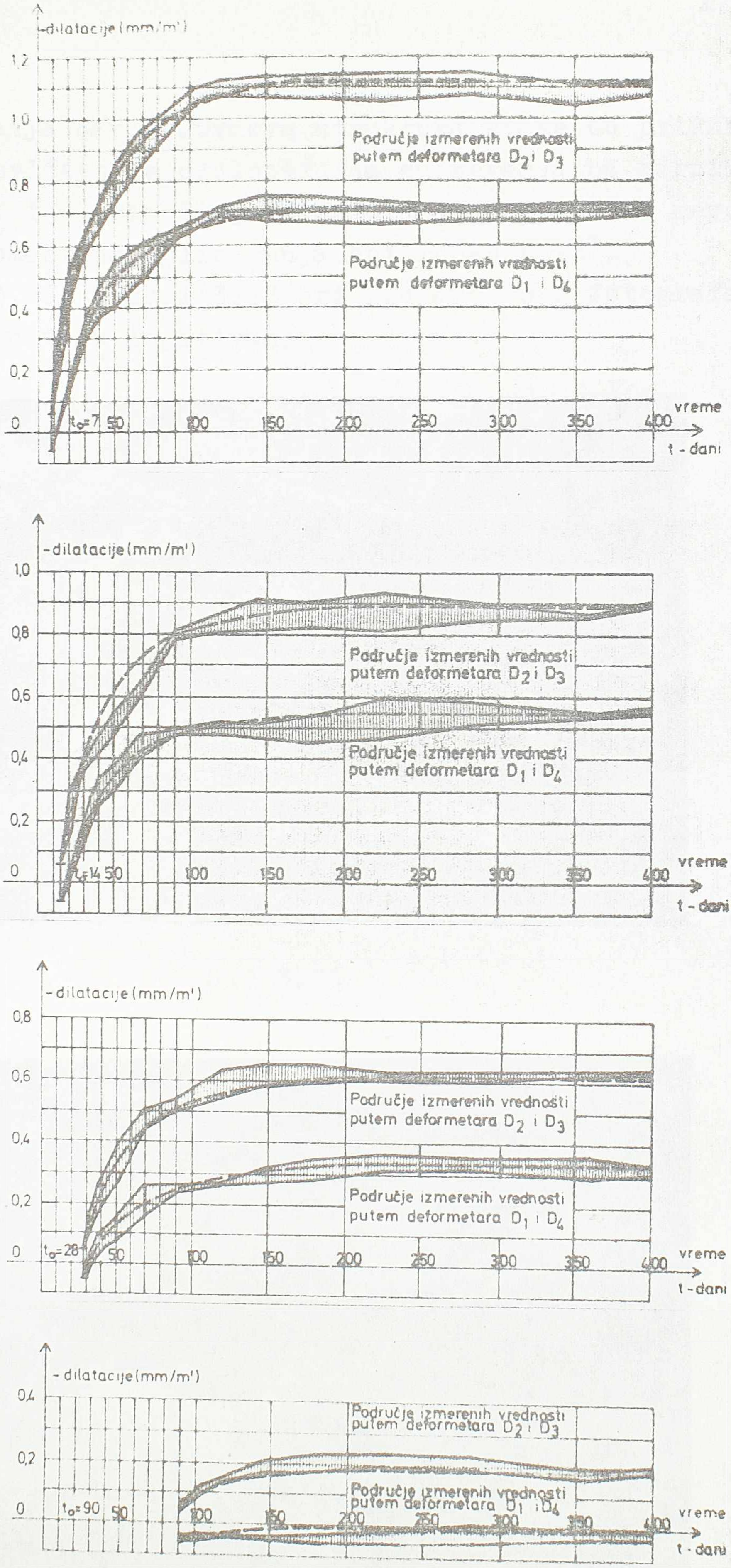
Sl. 3.24

mo vodili računa o znacima pojedinih uglova, već smo ih u svim slučajevima uzimali kao pozitivne. Prikazane vrednosti izmerenih uglova θ^* predstavljaju u stvari srednje vrednosti koje su u svim slučajevima dobijene na bazi dva eksperimentalna rezultata. Ovo je jasno samo po sebi, pošto smo napred već rekli da su uvek po dva opitna nosača istovremeno izlagana dejstvu momenata $\pm T^*$.

Izmerene vrednosti dilatacija svih nosača u tačkama koje odgovaraju mernim mestima D_1, D_2, D_3 i D_4, kao i odgovarajuće teorijske veličine, prikazane su grafički na sl. 3.25. Kao što se vidi, i izmerene i teorijske vrednosti (isprekidane krive linije) odnose se na vremenska područja definisana relacijama $t \geq t_0$, pa sledi da se svaka od navedenih veličina može prikazati u vidu zbira

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{T*}(t) + \left[\varepsilon_{P*}(t) - \varepsilon_{P*}(t_0)\right], \quad t \geq t_0 .$$

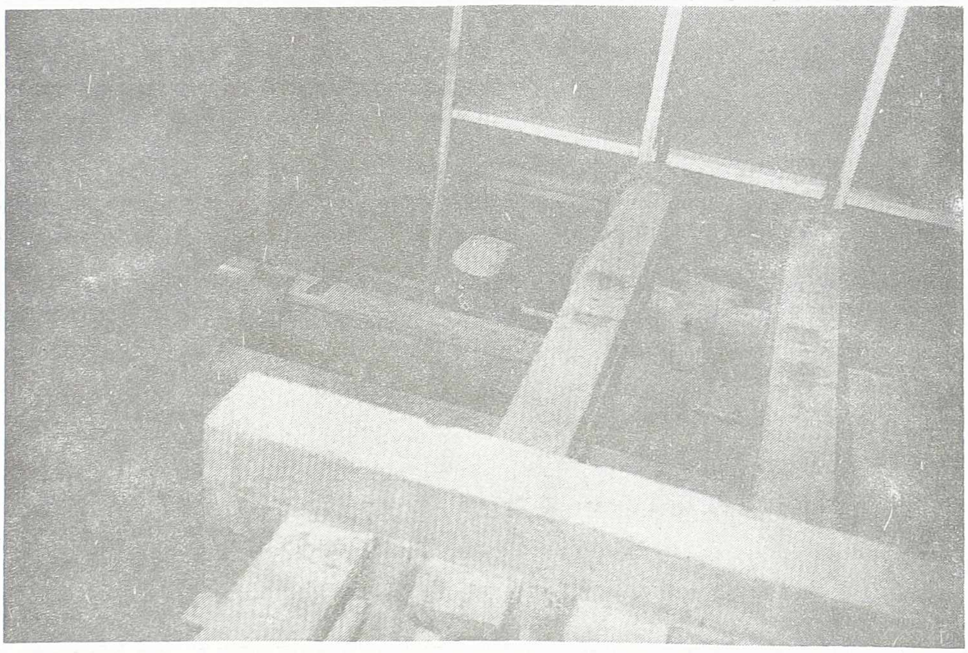
Funkcija $\varepsilon_{T*}(t)$ predstavlja dilataciju usled delovanja torzionih momenata $\pm T^*$, dok su $\varepsilon_{P*}(t)$ i $\varepsilon_{P*}(t_0)$ dilatacije prouzrokovane prednaprezanjem, u okviru koga su uzeti u obzir i uticaji


-dilatacije (mm/m')
Područje izmerenih vrednosti putem deformetara D_2 i D_3
Područje izmerenih vrednosti putem deformetara D_1 i D_4
t_o=7
t_o=14
t_o=28
t_o=90
vreme
t - dani

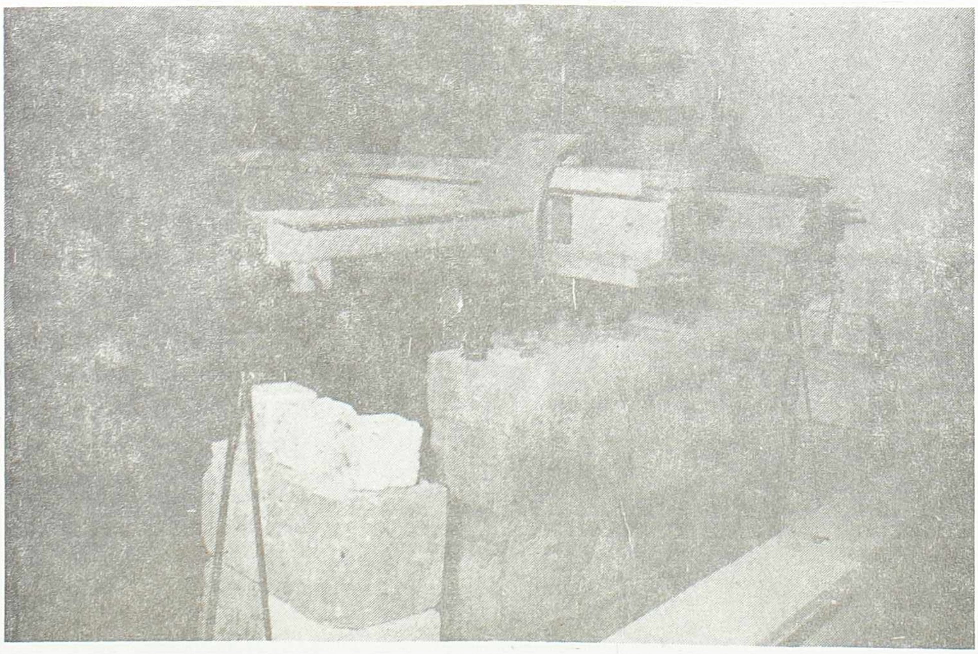
Sl. 3.25

usled skupljanja betona. Ovakva struktura svake od prikazanih dilatacija uslovljena je okolnošću da su merenja na mernim mestima D_1, D_2, D_3 i D_4 započinjana od trenutaka koji su neposredno prethodili momentima apliciranja opterećenja $\pm T^*$.

Na sl. 3.26, 3.27 i 3.28 prikazujemo neke fotografske snimke načinjene u toku ispitivanja.



Sl. 3.26



Sl. 3.27

Sl. 3.28

U zaključku ovog izlaganja može se reći sledeće: sve izmerene deformacijske veličine vrlo dobro odgovaraju teorijskim, pa se potpuno osnovano može tvrditi da sve pretpostavke na kojima počiva teorija izložena u prethodnim poglavljima imaju realnu podlogu.

L I T E R A T U R A

/1/ Ahverdov, I, N., Mehanizm usadki i polzučesti betona v svete sovremennyh pretstavlenij reologii i fiziki tvërdogo tela. Beton i železobeton 10/1970.

/2/ Aleksandrovskij, S. V., Rasčët betonnyh i železobetonnyh konstrukcij na izmenenija temperatury i vlažnosti s učëtom polzučesti. Strojizdat, Moskva 1973.

/3/ Ali, I., Kesler, C. E., Mechanisms of creep in concrete. Symp. on creep of concrete, ACI Special publication No 9, 1964.

/4/ Arutjunjan, N. H., Nekotorye voprosy teorii polzučesti. Gosttehteoretizdat, Moskva 1952.

/5/ Arutiunian, N. Kh., Application de la theorie du fluage. Edition Eyrolles, Paris 1957.

/6/ Bažant, P. Z., Najjar, J. L., Comparasion of Approximate Linear Methods for Concrete Creep. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99 No. ST9. Sept. 1973.

/7/ Bezuhov, N. I., Osnovy teorii uprugosti, plastičnosti i polzučesti. Visšaja škola, Moskva 1968.

/8/ Bishara, A., Jong-Chering Peir, Reinforced Concrete Rectangular Columns in Torsion. Journal of the Structural Division,ASCE, Vol. 94 No. ST12. Dec. 1968.

/9/ Bondarenko, M. B., Nekotorye voprosy nelinejnoj teorii železobetona. Izdatel'stvo Har'kovskogo Universiteta, Har'kov 1968.

/10/ Cilosani, Z. N., Kvicaridze, O. I., O prirode vzaimosvjazi meždu harakterom dlitel'nyh deformacij obyčnogo i prednaprjažennogo železobetona i temperaturno-vlažnostnym režimom sredy. Paper presented at the VII International Congress of the Fédération Internationale de la Précontrainte, New York, May 26-June 1, 1974.

/11/ Conception and Design of Prestressed concrete, République Francaise. Provisionnal Instruction of the 13th August 1973.

/12/ Cramer, H., Teorija plasticiteta armiranog betona. Naučna gradjevinska biblioteka, Beograd 1949.

/13/ Cywinski, Z., Torsion des dünnwandigen Stabes mit veränderlichem einfach symetrischem, offenem Querschnitt. Der Stahlbau 10/1964.

/14/ Dabrovski, R., Gekrümmte dünnwandige Träger. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1968.

/15/ Dimitrijević, D., Analiza veze napona i deformacija u betonu sa učešćem puženja. Naše građevinarstvo 5/1971.

/16/ Dimitrijević, D., Ponašanje armiranobetonskih i spregnutih štapova sa učešćem deformacija puzanja betona pri dinamičkom opterećenju, doktorska disertacija. Građevinski fakultet, Beograd 1973.

/17/ Dlitel'nye deformativnye processy v betonnyh i železobetonnyh konstrukcijah. Materijaly konferencii molodyh specialistov (u redakciji S.V.Aleksandrovskog), Moskva, 1970.

/18/ Dziewolski, R., Torsion non uniforme des barres a parois minces et a profil ouvert et programmation du problème sur le calculateur électronique. Annales de l'I.T.B.T.P., février 1966, No 218.

/19/ Đurić, M., Teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija. SANU, Odelenje tehničkih nauka, Posebna izdanja, knj. 6, Naučno delo, Beograd 1963.

/20/ Evick, R. D., Heins, P. C. Jr., Torsion of Nonprismatic Beams of Open Section. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98 No. ST12. Dec. 1972.

/21/ Fewves, J. S., Perrone, N., Robinson, R. A., Schnobrich, C. W., Numerical and Computer Mhetods in Structural Mechanics. Academic Press New York and London 1973.

/22/ Ganga Rao, H. V. S., Zia, P., Rectangular Prestressed Beams in Torsion and Bending. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99 No. ST1. Jan. 1973.

/23/ Gansen, K. T., Polzučest' i relaksacija naprjaženij v betone. Gosudarstvennoe izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu, arhitekture i stroitel'nym materijalam, Moskva 1963.

/24/ Gvozdev, A, A., Polzučest' betona i puti eë isledovanija. Sbornik "Pročnost', uprugost' i polzučest' betona". Gostrojizdat, Moskva 1955.

/25/ Hajdin, N., Der Einfluss des Kriechens und Schwindens des Betons in dünnwandigen Trägern mit gekrümmter Achse. Symp. design of concrete structures for creep, shrinkage and temp. changes, Madrid 1970.

/26/ Hajdin, N., Diferencijalne jednačine tankosidnog štapa sa kružnom osovinom. Zbornik radova posvećen preminulom akademiku Jakovu M. Hlitčijevu. Srpska akademija nauka i umetnosti, 1970.

/27/ Heidebrecht, C. A., Smith, S. B., Approximate Analysis of Open-Section Shear Walls Subject to Torsional Loading. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99 No. ST12. Dec. 1973.

/28/ Heilig, R., Der Verbundträger mit beliebiger offener Profilform. Der Stahlbau 10/1952.

/29/ Hill, R., The Mathematical Theory of Plasticiti. The Oxford engineering science series, Oxford.

/30/ Iliouchine, A. A., Plasticiteté. Éditions EYROLLES, Paris 1956.

/31/ International recommendations for the design and construction of concrete structures - Comite Europeen du beton-Federation internationale de la precontrainte. June 1970: FIP Sixth Congress, Prague.

/32/ Isledovanie pročnosti, plastičnosti i polzučesti stroitel'nyh materijalov. Central'nyj naučno-isledovatel'skij institut promišlennyh sooruženij (CNIPS), Moskva 1955.

/33/ Ivković, M., Ponašanje betona u oblasti granične ravnoteže, doktorska disertacija. Beograd 1962.

/34/ Jevtić, D., Ćertić, D., Priručnik o primeni pravilnika za prednapregnuti beton. SJL, Beograd 1973.

/35/ Jevtić, D., Određivanje napona u betonu i čeliku jednostruko armiranih preseka usled dugotrajnih opterećenja sa uticajem tečenja betona, korišćenjem dijagrama i tablica. Saopštenja Instituta za ispitivanje materijala SR Srbije, No 30/1971.

/36/ Jevtić, D., Osobine očvrslog betona. Izgradnja 4/1971.

/37/ Jevtić, D., Praščević, Ž., Uticaj dugotrajnih dejstava na nosače od prednapregnutog betona sa efektima tečenja betona, V Kongers jugoslovenskog društva građevinskih konstruktera, Budva 1974.

/38/ Jevtić, D., Savremeni problemi teorije prethodno napregnutog betona, I i II deo. Građevinski fakultet, Beograd.

/39/ Jones, R., Gatfield, E. N., Testing Concrete by an Ultrasonic Pulse Technique. Department of scientific and industrial research, Road research laboratory, Road Research Technical Paper No. 34, London 1955.

/40/ Kačanov, M. L., Osnovy teorii plastičnosti. Gosudarstvenoe izdatel'stvo tehniko-teoretičeskoj literatury, Moskva 1956.

/41/ Khachaturian, N., Gurfinkel, G., Prestressed Concrete. McGraw-Hill Book Company, New York, St.Louis, San Francisco, London, Sydney, Toronto, Mexico, Panama.

/42/ Kizirija, V. G., Deformacii betonnogo èlementa pri različnyh zakonah izmenenija vnešnih nagruzok s učëtom peremennogo modulja uprugosti i polzučesti betona. Sbornik "Rasčet i ispytanie železobetonnyh konstrukcij", Izdatelśtvo "Mecniereba", Tbilisi 1966.

/43/ Knott, F. J., Fundamentals of Fracture Mechanics. Butterworths, London.

/44/ Kollbrunner, C. F., Basler, K., Sektorielle Groβen und Spannungen bei offenen, dünnwandigen Querschnitten. Mitteilungen der Teschnischen Kommission der Schweizer Stahlbau-Vereinigung, Heft 28. Verlag Schweizer Stahlbau-Vereinigung, Zürich.

/45/ Kollbrunner, C. F., Basler, K., Statik der Wölbtorsion und der gemischten Torsion. Mitteilungen der Technischen Kommission der Schweizer Stahlbau-Vereinigung, Heft 31. Verlag Schweicer Stahlbau-Vereinigung, Zürich.

/46/ Kollbrunner, C. F., Basler, K., Torsion. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York

/47/ Kollbrunner, C. F., Basler, K., Torsionsmomente und Stabverdrehung bei St.-Venantscher Torsion. Mitteilungen der Technischen Kommission der Schweizer Stahlbau-Vereinigung, Heft 27. Verlag Schweizer Stahlbau-Vereinigung, Zürich.

/48/ Kollbrunner, C. F., Hajdin, N., Die St.-Venantsche Torsion. Mitteilungen der Technischen Kommission der Schweizer Stahlbau-Vereinigung, Heft 26. Verlag Schweizer Stahlbau-Vereinigung, Zürich.

/49/ Kollbrunner, C. F., Hajdin, N., Dünnwandige Stäbe, Band 1. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972.

/50/ Kollbrunner, C. F., Hajdin, N., Dünnwandige Stäbe, Band 2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. (U štampi).

/51/ Kollbrunner, C. F., Hajdin, N., Dünnwandige Stäbe mit in Ebenen deformierbaren Querschnitten. Theorie der Faltwerke nach der Verschiebungsmethode. Institut für bauwissenschaftliche Forschung, Zürich, Januar 1968.

/52/ Kollbrunner, C. F., Hajdin, N., Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit offenem Profil, Teil I, Teil II. Mitteilungen der Technischen Kommission der Schweizer Stahlbau-Vereinigung, Heft 29, Heft 30. Verlag Schweizer Stahlbau-Vereinigung, Zürich.

/53/ Komendant, E. A., Predvaritel'no naprjažennye železobetonnye konstrukcii. Gosudarstvennoe izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu, arhitekture i stroitel'nym materialam, Moskva 1959.

/54/ Kordina, K., Experiments on the influence of the mineralogical character of aggregates on the creep of concrete. RILEM Bulletin No 6, 1960.

/55/ Lampert, P., Thürlimann, B., Torsions-Biege-Versuche an Stahlbetonbalken. Institut für Baustatik ETH Zürich, Bericht Nr. 6506-3, Januar 1969.

/56/ Lampret, P., Thürlimann, B., Torsionsversuche an Stahlbetonbalken. Institut für Baustatik ETH Zürich, Bericht Nr. 6506-2, Juni 1968.

/57/ Lampert, P., Thürlimann, B., Versuchsanlage für Balken unter Torsion-Biegung-Querkraft. Institut für Baustatik ETH Zürich, Bericht Nr. 12, Juni 1967.

/58/ Lawrence, H. M., Wainwright, J. P., Torsion and Bending of Prestressed Concrete Beams. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99 No. ST11. Nov. 1973.

/59/ Lazarević, Đ., Granična nosivost linijskih nosača. Građevinska knjiga, Beograd 1971.

/60/ Lazarević, Đ., Ivković, M., Aćić, M., Praščević, Ž., Vremenska raspodela uticaja pod dejstvom naponskog stinjavanja betona. Simpozijum o primeni savremenih dostignuća u oblasti materijala i konstrukcija, II deo, Beograd 1972.

/61/ Lazarević, Đ., Ivković, M., Nelinearne deformacije betona. V Kongres jugoslovenskog društva građevinskih konstruktera, Budva 1974.

/62/ Lazić, J., Primena linearne viskoelastičnosti u teoriji konstrukcija, doktorska disertacija. Građevinski fakultet, Beograd 1973.

/63/ Lazić, D. J., Proračun spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija. V Kongres jugoslovenskog društva građevinskih konstruktera, Budva 1974.

/64/ Leonhardt, F., Prednapregnuti beton u praksi. Građevinska knjiga, Beograd 1968.

/65/ L'Hermite, R., Mamillan, M., Simmonnet, J., Recherches nouvelles concernant la technologie du béton. Annales de l'I.T.B.T.P., sept.-oct. 1973, No 309-310.

/66/ Malinin, N. N., Prikladanaja teorija plastičnosti i polzučesti. Izdatel'stvo "Mašinostroenie", Moskva 1968.

/67/ McManus, F. P., Culver, G. C., Nonuniform Torsion of Composite Beams. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95 No. ST6. June 1969.

/68/ Mehmel, A., Vorgespannter Beton. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

/69/ Michálek, V., Volume Changes of Concrete Specimens Stored in the Real Environment. Paper presented at the VIIth Congress of the FIP, New York, 26 May-1 June 1974.

/70/ Mihajlov, V. V., Predvaritel'no naprjažennye konstrukcii. Gosudarstvennoe izdatel'stvo literatury po striotel'stvu, arhitekture i stroitel'nym materijalam, Moskva, 1963.

/71/ Mitrinović, D. S., Kečkić, D. J., Jednačine matematičke fizike. Građevinska knjiga, Beograd 1972.

/72/ Mukherjee, R. P., Warwaruk, J., Torsion, Bending, and Shear in Prestressed Concrete. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97 No. ST4. Apr. 1971.

/73/ Muravljov, M., Dimitrijević, R., Prilog istraživanju zavisnosti između Poissonovog koeficijenta i starosti betona. Naše građevinarstvo 1/1974.

/74/ Muravljov, M., Granično stanje tankozidnog štapa I-preseka napregnutog na ograničenu torziju. Naše građevinarstvo 9/1971.

/75/ Muravljov, M., Ograničena torzija kontinualnih, viljuškasto oslonjenih nosača u krivini (konstrukcije sa tankozidnim, otvorenim poprečnim presecima). Naše građevinarstvo 5/1969.

/76/ Muravljov, M., Primena štapa sa tankim zidovima i otvorenim profilom u slučaju aksijalno opterećenog štapa Z-preseka. Saopštenja Instituta za ispitivanje materijala SR Srbije, Beograd, 29/1970.

/77/ Muravljov, M., Torzija armirano-betonskog štapa kružnog preseka na bazi pretpostavke o viskoelastičnom ponašanju betona. Materijali i konstrukcije 4/1971.

/78/ Neville, A. M., Creep of concrete: plain, reinforced and prestressed. North-Holand publishing company, Amsterdam 1970.

/79/ Neville, A. M., Gopalakrisonan, Ghali, A., A hipotesiss on mechanism of creep of concrete with reference to multiaxal compression. ACI Journal, Proc. 67/1970.

/80/ Neville, A. M., Ward, M. A., Kwei, G. C., Basic and drying creep of concrete. Materials and structures No 8, 1968.

/81/ Pandit, S. G., Mawal, B. M., Tests of Concrete Columns in Torsion. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99 No. ST7. July 1973.

/82/ Popadić, M., Integralne i parcijalne diferencijalne jednačine (predavanja), Građevinski fakultet, Beograd 1970.

/83/ Prager, W., Probleme der plastizitätstheorie. Birkhäuser verlag Basel und Stuttgart, 1955.

/84/ Prager, W., Hodge, G. PH. Jr., Theory of Perfectly Plastic Solids. New York. John Wiley and Sons, INC.

/85/ Praščević, Ž., Neki problemi tehničke teorije armiranobetonskog štapa. Magistarski rad, Građevinski fak., Beograd.

/86/ Praščević, Ž., Preraspodela napona u štapovima od armiranog i prethodno napregnutog betona. V Kongres jugoslovenskog društva građevinskih konstruktera, Budva 1974.

/87/ Praščević, Ž., Prilog rešavanju statički neodređenih armiranobetonskih sistema. Izgradnja 10/1974.

/88/ Priručnik o primeni pravilnika za beton i armirani beton. SJL, Beograd 1974.

/89/ Proceedings of the Sixth Congress - Fédération Internationale de la Précontrainte. Prague 1970.

/90/ Proceedings of a Symposium on the Strength of Concrete Structures. Cement and Concrete Association, London, May 1956.

/91/ Rajagopalan, K. S., Behera, U., Ferguson, M. P., Total Interaction Method for Torsion Design. Journal of the Structural Division, Vol. 98.No. ST9 Sept. 1972.

/92/ Ržanicin, R. A., Teorija polzučesti. Izdate'lstvo literatury po stroité'lstvu, Moskva 1968.

/93/ Sackman, L. J., Nickell, E. R., Creep of a Cracked Reinforced Beam. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94 No. ST1. Jan. 1968.

/94/ Sadètov, Ja. S., Rasčet tonkostennyh steržnej otkrytogo profilja. Rosvuzizdat 1963.

/95/ Sattler, K., Theorie der Verbundkonstruktionen. Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1959.

/96/ Sekulović, M., Linearna teorija tankozidnog prostorno krivog štapa. Naše građevinarstvo 7-8/1974.

/97/ Sekulović, M., Numeričko rešenje diferencijalnih jednačina linearne teorije tankozidnog štapa. Naše građevinarstvo 7-8/1974.

/98/ Simonović, S., Primena linearne teorije tečenja kod prednapregnutih konstrukcija, I, II. Naše građevinarstvo 5/1969, 7/1969.

/99/ Stipanić, E., Uvod u matrični račun. Građevinski fakultet u Beogradu, 1964, Beograd.

/100/ Strel′bickaja, A. I., Predelńoe sostojanie ram iz tonkostennyh steržnej pri izgibe s kručeniem. Naukova dumka, Kiev 1964.

/101/ Struktura, pročnost′ i deformacii betonov. Sbornik, Izdatel′stvo literatury po stroitel′stvu, Moskva 1966.

/102/ Szalai, J., Kriechen und Schwinden ohne Affinität bei vorgespannten Verbundträgern. FIP Ungarische Gruppe, 1970.

/103/ Triotsky S. M., Azad, K. A., Bending and Torsion in Ortotropic Deck Box Girder. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98 No. ST9.Sept. 1972.

/104/ Trost, H., Auswirkungen des Superpositionprinzips auf Kriech-und Relaxationsprobleme bei Beton und Spanbeton. Beton und Stahlbetonbau 10/1967, 11/1967.

/105/ Trost, H., Mainz, B., Wolff, H. J., Zur berechnung von Spannbetontragwerken im Gebrauchszustand unter Berücksichtigung des zeitabhängigen Betonverhaltens. Beton und Stahlbetonbau, 9/1971.

/106/ Ulickij, I. I., Teorija i rasčet železobetonnyh steržnevyh konstrukcij s učetom dlitel′nyh processov. Izdatel′stvo "Budivel′nik", Kiev - 1967.

/107/ Umanskij, A. A., Prostranstvennye sistemy. Strojizdat 1948.

/108/ Vlassov, B. Z., Pièces longues en voiles minces. Èditions eyrolles, Paris 1962.

/109/ Vukotić, R., Nosivost armirano-betonskih nosača na čistu torziju. Izgradnja 9/1974.

/110/ Vukotić, Radoje, Nosivost na torziju prethodno napregnutih armirano betonskih nosača. V Kongres jugoslovenskog društva građevinskih konstruktera, Budva 1974.

/111/ Vukotić, Radoje, Nosivost na torziju prethodno napregnutih betonskih nosača. V Kongres jugoslovenskog društva građevinskih konstruktera, Budva 1974.

/112/ Zel'dovič, Ja. B., Myškis, A. D., Èlementy prikladnoj matematiki. Izdatel'stvo "Nauka", Moskva 1967.

/113/ Zerna, W., Trost, H., Rheologische Beschreibungen des Werkstoffes Beton. Beton und Stahlbetonbau 7/1967.

/114/ Zurmühl, R., Matrizen und ihre technischen Anwendungen. Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1964.