



PD 7908



003073755

COBISS ◻

**UNIVERZITET U BEOGRADU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

**ŽIVOJIN B. PRAŠČEVIĆ**

**NELINEARNA TEORIJA  
ARMIRANOBETONSKOG ŠTAPA**

**– DOKTORSKA DISERTACIJA –**

**BEOGRAD  
1979**







PD 7908

UNIVERZITET U BEOGRADU  
GRADJEVINSKI FAKULTET  
1979

UNIVERZITET U BEOGRADU  
GRADJEVINSKI FAKULTET

Mr ŽIVOJIN B. PRAŠČEVIĆ, dipl.ing.gradj.

NELINEARNA TEORIJA ARMIRANOBETONSKOG ŠTAPA

DOKTORSKA DISERTACIJA



BEOGRAD, JUNA 1979.











(Cement and Concrete Association) Veliku pomoć i puno razumevanja pružio mi je šef Odeljenja za građevinske materijale Dr G. D. Pomaroy, konsultacije mi je pružio Dr V. N. Iljastanov i njegovim saradnicima Dr S. M. Puzoskova i Dr D. M. Robbins. Inženjerski rad je izvršio Dr M. I. Ilić.

U ovoj disertaciji se razmatraju neki problemi nelinearne teorije armiranobetonskog štapa, koji su bili predmet mog višegodišnjeg interesovanja i proučavanja. Značajan podsticaj, pomoć i podršku u ovom radu učinili su mi rukovodioci teze Akademik Prof. Dr h.c. Djordje Lazarević i Prof. Dr Milorad Ivković, ukazujući mi na značaj obrade pojedinih problema, na čemu im se najsrdačnije zahvaljujem. Rešenja nekih problema, kao na primer proračun visećih prethodno napregnutih konstrukcijskih sistema, proistekla su iz potrebe da se reše praktični zadaci proračuna nekoliko većih objekata, u čemu sam učestvovao kao saradnik Prof. M. Ivkovića.

Veliku zahvalnost dugujem Prof. Dobrosavu Jevtiću za dugogodišnju saradnju u rešavanju više problema iz oblasti reologije betona. Učešće u obradi eksperimentalnih rezultata koje je on dobio, konsultacije i njegove sugestije bile su mi od velike koristi. U vezi primene metode konačnih elemenata i metode integralnih jednačina, konsultovao sam se sa Akademikom Prof. Dr Nikolom Hajdinom i Prof. Dr Miodragom Sekulovićem. Njihove sugestije i podrška u izradi ovog rada bile su mi dragocene, pa im se ovom prilikom najsrdačnije zahvaljujem. Zahvaljujem se takodje Akademiku Prof. Dr Milanu Djuriću, Prof. Dr Nataliji Naerlović - Veljković i Doc. Dr Milomiru Trifunoviću na sugestijama u vezi primene algebarskih veza napona i deformacija, mogućnosti termodinamičkog pristupa u rešavanju problema reologije betona i primene i rešavanja Volterrinih integralnih jednačina.

Veliku zahvalnost dugujem Prof. Dr Bogdanu Trbojeviću i Doc. Alekseju Postnikovu, koji su za mene kao svog saradnika u jednoj drugoj oblasti, imali puno razumevanja i pružali podršku u izradi ove disertacije.

Neka od poglavlja ovog rada (uprošćenje veza između napona i deformacija betona i reološka svojstva betona) počeo sam obrađivati za vreme mog boravka, krajem 1975 god, u Centru za istraživanja i razvoj Britanskog udruženja za cement i beton



(Cement and Concrete Association). Veliku pomoć i puno razumevanja pružio mi je šef Oseka za građevinske materijala Dr C. D. Pomeroy, a konsultacije sa njime, Dr J. M. Illstonom i njihovim saradnicima Dr L. J. Parrottom i Dr D. W. Hobbsom bile su mi vrlo korisne, pa im se ovom prilikom srdačno zahvaljujem.

Želim takodje da se zahvalim Građevinskom fakultetu i Inženjerskom računskom centru na podršci, finansijskoj pomoći u tehničkoj obradi rukopisa i korišćenju elektronskog računara, a posebno dekanu Prof. Dr Savu Janjiću. U tehničkoj obradi rukopisa (daktilografisanju i crtanju skica) pomogli su mi Ljiljana Stan-  
nković, Milovan Petrović i Svetislav Janković, pa im se ovom prilikom zahvaljujem. Zahvaljujem se takodje i osoblju Biblioteke Građevinskog fakulteta, Univerzitetske biblioteke "Svetozar Marković", Biblioteke Jugoslovenskog Građevinskog centra u Beogradu i Biblioteke Britanskog udruženja za cement i beton (Cement and Concrete Library) na pomoći u prikupljanju dokumentacije i obezbedjenju velikog broja štampanih radova i monografija. Na kraju želim da se zahvalim svima koji su mi na bilo koji način pružili pomoć i podršku i izradi ove disertacije.

Živojin Praščević

1.87	.....	.....
1.88	.....	.....
1.89	.....	.....
1.90	.....	.....
1.91	.....	.....
1.92	.....	.....
1.93	.....	.....
1.94	.....	.....
1.95	.....	.....
1.96	.....	.....
1.97	.....	.....
1.98	.....	.....
1.99	.....	.....
2.00	.....	.....
2.01	.....	.....
2.02	.....	.....
2.03	.....	.....
2.04	.....	.....
2.05	.....	.....
2.06	.....	.....
2.07	.....	.....
2.08	.....	.....
2.09	.....	.....
2.10	.....	.....
2.11	.....	.....
2.12	.....	.....
2.13	.....	.....
2.14	.....	.....
2.15	.....	.....
2.16	.....	.....
2.17	.....	.....
2.18	.....	.....
2.19	.....	.....
2.20	.....	.....
2.21	.....	.....
2.22	.....	.....
2.23	.....	.....
2.24	.....	.....
2.25	.....	.....
2.26	.....	.....
2.27	.....	.....
2.28	.....	.....
2.29	.....	.....
2.30	.....	.....
2.31	.....	.....
2.32	.....	.....
2.33	.....	.....
2.34	.....	.....
2.35	.....	.....
2.36	.....	.....
2.37	.....	.....
2.38	.....	.....
2.39	.....	.....
2.40	.....	.....
2.41	.....	.....
2.42	.....	.....
2.43	.....	.....
2.44	.....	.....
2.45	.....	.....
2.46	.....	.....
2.47	.....	.....
2.48	.....	.....
2.49	.....	.....
2.50	.....	.....
2.51	.....	.....
2.52	.....	.....
2.53	.....	.....
2.54	.....	.....
2.55	.....	.....
2.56	.....	.....
2.57	.....	.....
2.58	.....	.....
2.59	.....	.....
2.60	.....	.....
2.61	.....	.....
2.62	.....	.....
2.63	.....	.....
2.64	.....	.....
2.65	.....	.....
2.66	.....	.....
2.67	.....	.....
2.68	.....	.....
2.69	.....	.....
2.70	.....	.....
2.71	.....	.....
2.72	.....	.....
2.73	.....	.....
2.74	.....	.....
2.75	.....	.....
2.76	.....	.....
2.77	.....	.....
2.78	.....	.....
2.79	.....	.....
2.80	.....	.....
2.81	.....	.....
2.82	.....	.....
2.83	.....	.....
2.84	.....	.....
2.85	.....	.....
2.86	.....	.....
2.87	.....	.....
2.88	.....	.....
2.89	.....	.....
2.90	.....	.....
2.91	.....	.....
2.92	.....	.....
2.93	.....	.....
2.94	.....	.....
2.95	.....	.....
2.96	.....	.....
2.97	.....	.....
2.98	.....	.....
2.99	.....	.....
3.00	.....	.....
3.01	.....	.....
3.02	.....	.....
3.03	.....	.....
3.04	.....	.....
3.05	.....	.....
3.06	.....	.....
3.07	.....	.....
3.08	.....	.....
3.09	.....	.....
3.10	.....	.....
3.11	.....	.....
3.12	.....	.....
3.13	.....	.....
3.14	.....	.....
3.15	.....	.....
3.16	.....	.....
3.17	.....	.....
3.18	.....	.....
3.19	.....	.....
3.20	.....	.....
3.21	.....	.....
3.22	.....	.....
3.23	.....	.....
3.24	.....	.....
3.25	.....	.....
3.26	.....	.....
3.27	.....	.....
3.28	.....	.....
3.29	.....	.....
3.30	.....	.....
3.31	.....	.....
3.32	.....	.....
3.33	.....	.....
3.34	.....	.....
3.35	.....	.....
3.36	.....	.....
3.37	.....	.....
3.38	.....	.....
3.39	.....	.....
3.40	.....	.....
3.41	.....	.....
3.42	.....	.....
3.43	.....	.....
3.44	.....	.....
3.45	.....	.....
3.46	.....	.....
3.47	.....	.....
3.48	.....	.....
3.49	.....	.....
3.50	.....	.....
3.51	.....	.....
3.52	.....	.....
3.53	.....	.....
3.54	.....	.....
3.55	.....	.....
3.56	.....	.....
3.57	.....	.....
3.58	.....	.....
3.59	.....	.....
3.60	.....	.....
3.61	.....	.....
3.62	.....	.....
3.63	.....	.....
3.64	.....	.....
3.65	.....	.....
3.66	.....	.....
3.67	.....	.....
3.68	.....	.....
3.69	.....	.....
3.70	.....	.....
3.71	.....	.....
3.72	.....	.....
3.73	.....	.....
3.74	.....	.....
3.75	.....	.....
3.76	.....	.....
3.77	.....	.....
3.78	.....	.....
3.79	.....	.....
3.80	.....	.....
3.81	.....	.....
3.82	.....	.....
3.83	.....	.....
3.84	.....	.....
3.85	.....	.....
3.86	.....	.....
3.87	.....	.....
3.88	.....	.....
3.89	.....	.....
3.90	.....	.....
3.91	.....	.....
3.92	.....	.....
3.93	.....	.....
3.94	.....	.....
3.95	.....	.....
3.96	.....	.....
3.97	.....	.....
3.98	.....	.....
3.99	.....	.....
4.00	.....	.....
4.01	.....	.....
4.02	.....	.....
4.03	.....	.....
4.04	.....	.....
4.05	.....	.....
4.06	.....	.....
4.07	.....	.....
4.08	.....	.....
4.09	.....	.....
4.10	.....	.....
4.11	.....	.....
4.12	.....	.....
4.13	.....	.....
4.14	.....	.....
4.15	.....	.....
4.16	.....	.....
4.17	.....	.....
4.18	.....	.....
4.19	.....	.....
4.20	.....	.....
4.21	.....	.....
4.22	.....	.....
4.23	.....	.....
4.24	.....	.....
4.25	.....	.....
4.26	.....	.....
4.27	.....	.....
4.28	.....	.....
4.29	.....	.....
4.30	.....	.....
4.31	.....	.....
4.32	.....	.....
4.33	.....	.....
4.34	.....	.....
4.35	.....	.....
4.36	.....	.....
4.37	.....	.....
4.38	.....	.....
4.39	.....	.....
4.40	.....	.....
4.41	.....	.....
4.42	.....	.....
4.43	.....	.....
4.44	.....	.....
4.45	.....	.....
4.46	.....	.....
4.47	.....	.....
4.48	.....	.....
4.49	.....	.....
4.50	.....	.....
4.51	.....	.....
4.52	.....	.....
4.53	.....	.....
4.54	.....	.....
4.55	.....	.....
4.56	.....	.....
4.57	.....	.....
4.58	.....	.....
4.59	.....	.....
4.60	.....	.....
4.61	.....	.....
4.62	.....	.....
4.63	.....	.....
4.64	.....	.....
4.65	.....	.....
4.66	.....	.....
4.67	.....	.....
4.68	.....	.....
4.69	.....	.....
4.70	.....	.....
4.71	.....	.....
4.72	.....	.....
4.73	.....	.....
4.74	.....	.....
4.75	.....	.....
4.76	.....	.....
4.77	.....	.....
4.78	.....	.....
4.79	.....	.....
4.80	.....	.....
4.81	.....	.....
4.82	.....	.....
4.83	.....	.....
4.84	.....	.....
4.85	.....	.....
4.86	.....	.....
4.87	.....	.....
4.88	.....	.....
4.89	.....	.....
4.90	.....	.....
4.91	.....	.....
4.92	.....	.....
4.93	.....	.....
4.94	.....	.....
4.95	.....	.....
4.96	.....	.....
4.97	.....	.....
4.98	.....	.....
4.99	.....	.....
5.00	.....	.....
5.01	.....	.....
5.02	.....	.....
5.03	.....	.....
5.04	.....	.....
5.05	.....	.....
5.06	.....	.....
5.07	.....	.....
5.08	.....	.....
5.09	.....	.....
5.10	.....	.....
5.11	.....	.....
5.12	.....	.....
5.13	.....	.....
5.14	.....	.....
5.15	.....	.....
5.16	.....	.....
5.17	.....	.....
5.18	.....	.....
5.19	.....	.....
5.20	.....	.....
5.21	.....	.....
5.22	.....	.....
5.23	.....	.....
5.24	.....	.....
5.25	.....	.....
5.26	.....	.....
5.27	.....	.....
5.28	.....	.....
5.29	.....	.....
5.30	.....	.....
5.31	.....	.....
5.32	.....	.....
5.33	.....	.....
5.34	.....	.....
5.35	.....	.....
5.36	.....	.....
5.37	.....	.....
5.38	.....	.....
5.39	.....	.....
5.40	.....	.....
5.41	.....	.....
5.42	.....	.....
5.43	.....	.....
5.44	.....	.....
5.45	.....	.....
5.46	.....	.....
5.47	.....	.....
5.48	.....	.....
5.49	.....	.....
5.50	.....	.....
5.51	.....	.....
5.52	.....	.....
5.53	.....	.....
5.54	.....	.....
5.55	.....	.....
5.56	.....	.....
5.57	.....	.....
5.58	.....	.....
5.59	.....	.....
5.60	.....	.....
5.61	.....	.....
5.62	.....	.....
5.63	.....	.....
5.64	.....	.....
5.65	.....	.....
5.66	.....	.....
5.67	.....	.....
5.68	.....	.....
5.69	.....	.....
5.70	.....	.....
5.71	.....	.....
5.72	.....	.....
5.73	.....	.....
5.74	.....	.....
5.75	.....	.....
5.76	.....	.....
5.77	.....	.....
5.78	.....	.....
5.79	.....	.....
5.80	.....	.....
5.81	.....	.....
5.82	.....	.....
5.83	.....	.....
5.84	.....	.....
5.85	.....	.....
5.86	.....	.....
5.87	.....	.....
5.88	.....	.....
5.89	.....	.....
5.90	.....	.....
5.91	.....	.....
5.92	.....	.....
5.93	.....	.....
5.94	.....	.....
5.95	.....	.....
5.96	.....	.....
5.97	.....	.....
5.98	.....	.....
5.99	.....	.....
6.00	.....	.....
6.01	.....	.....
6.02	.....	.....
6.03	.....	.....
6.04	.....	.....
6.05	.....	.....
6.06	.....	.....
6.07	.....	.....
6.08	.....	.....
6.09	.....	.....
6.10	.....	.....
6.11	.....	.....
6.12	.....	.....
6.13	.....	.....
6.14	.....	.....
6.15	.....	.....
6.16	.....	.....
6.17	.....	.....
6.18	.....	.....
6.19	.....	.....
6.20	.....	.....
6.21	.....	.....
6.22	.....	.....
6.23	.....	.....
6.24	.....	.....
6.25	.....	.....
6.26	.....	.....
6.27	.....	.....
6.28	.....	.....
6.29	.....	.....
6.30	.....	.....
6.31	.....	.....
6.32	.....	.....
6.33	.....	.....
6.34	.....	.....
6.35	.....	.....
6.36	.....	.....
6.37	.....	.....
6.38	.....	.....
6.39	.....	.....
6.40	.....	.....
6.41	.....	.....
6.42	.....	.....
6.43	.....	.....
6.44	.....	.....
6.45	.....	.....
6.46	.....	.....
6.47	.....	.....
6.48	.....	.....
6.49	.....	.....
6.50	.....	.....
6.51	.....	.....
6.52	.....	.....
6.53	.....	.....
6.54	.....	.....
6.55	.....	.....
6.56	.....	.....
6.57	.....	.....
6.58	.....	.....
6.59	.....	.....
6.60	.....	.....
6.61		



# S A D R Ž A J

UVOD.....	1
Reference .....	6
1. TERMODINAMIČKA ANALIZA REOLOŠKIH MODELA SA OSVRTOM NA SVOJSTVA BETONA .....	8
1.1 Uvodne napomene i definicije nekih pojmova .....	8
1.2 Osnovni zakoni mehanike deformabilnog tela .....	9
1.3 Unutrašnja energija. Prvi zakon termodinamike .....	11
1.4 Entropija. Drugi zakon termodinamike .....	13
1.5 Termodinamički potencijali .....	16
1.6 Elastično telo .....	17
1.7 Telo sa složenim reološkim modelom .....	20
1.71 Maxwellovo telo .....	22
1.72 Viskoelastično H-K telo .....	25
1.73 Burgersovo viskoelastično telo .....	31
1.8 Telo čija se reološka svojstva menjaju tokom vremena .	32
1.81 K-H telo sa promenljivim reološkim svojstvima ...	36
1.82 Maxwellovo telo sa promenljivim reološkim svojst- vima .....	43
1.83 Burgersovo telo sa promenljivim reološkim svojst- vima .....	44
1.84 Predlog CEB-FIP .....	50
1.85 Neki drugi predlozi za koeficijent tečenja betona	54
1.9 Skupljanje (bubrenje) betona. Bazično i tečenje (puza- nje) usled sušenja betona .....	57
1.10 Prikaz nekih eksperimentalnih rezultata koji se odnose na bubrenje betona .....	59
1.11 Slobodna energija i Gibbsov termodinamički potencijal za neki reološki model sa uticajem skupljanja (bubre- nja) betona .....	63
1.12 Veze izmedju napona i deformacija u nelinearnoj teori- ji tečenja betona .....	65
1.13 Slobodna energija i Gibbsov termodinamički potencijal za prostorno stanje napona betona .....	67
Reference .....	75



2. PREDLOZI ZA ALGEBARSKÉ VEZE IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA BETONA .....	80
2.1 Uvodne naponene .....	80
2.2 Neki dosadašnji predlozi za uprošćenje veze izmedju napona i deformacija .....	81
2.3 Neke mogućnosti uprošćenja integralne veze izmedju napona i deformacija sa funkcijom $K(t, \tau)$ .....	83
2.31 Maxwellovo telo sa promenljivim reološkim svojstvima .....	85
2.32 Burgersovo telo sa promenljivim reološkim svojstvima .....	86
2.33 Predlog CEB-FIP .....	87
2.34 Brojčani primer .....	90
2.4 Uprošćenje integralne veze izmedju napona i deformacija sa funkcijom $R(t, \tau)$ . Relaksacija napona .....	93
2.41 Maxwellovo telo sa promenljivim viskoznim svojstvima .....	96
2.42 K-H telo sa promenljivim viskoznim svojstvima ..	97
2.43 Burgersovo telo sa promenljivim viskoznim svojstvima .....	98
2.44 Brojčani primer .....	99
2.5 Potencijal $\tilde{F}^*(\epsilon, \theta)$ i algebarske veze za prostorno stanje napona i deformacija .....	102
Reference .....	106
3. NEKI VARIJACIONI PRINCIPI TEORIJE TEČENJA BETONA .....	108
3.1 Uvodne napomene .....	108
3.2 Princip virtualnih radova .....	109
3.3 Uopšćenje principa o minimumu potencijalne energije .	110
3.4 Uopšćenje Castiglianovog principa .....	112
3.5 Uopšćenje Hu-Washizuovog i Hellinger-Reissnerovog principa .....	114
3.6 Primer primene varijacionih principa za odredjivanje stanja napona i deformacija armiranobetonskog grednog nosača .....	118
Reference .....	123
4.2 Algebarske veze između napona i deformacija .....	120
Reference .....	123



4. PRIMENA METODE KONAČNIH ELEMENATA ZA REŠAVANJE NEKIH PROBLEMA REOLOGIJE BETONA .....	126
4.1 Uvodne napomene .....	126
4.2 Trodimenzionalno stanje napona i deformacija. Integralne veze između napona i deformacija .....	128
4.3 Trodimenzionalno stanje napona i deformacija. Algebarske veze između napona i deformacija betona .....	136
Reference .....	140
5. LINIJSKI ELEMENTI. METODA DEFORMACIJE .....	142
5.1 Interpolacione funkcije .....	142
5.2 Integralne veze između napona i deformacija betona ..	145
5.3 Algebarske veze između napona i deformacije betona ..	154
5.4 Nelinearna geometrijska teorija (teorija II reda).....	158
5.5 Program za elektronski računar .....	162
5.6 Brojčani primer .....	164
Reference .....	169
6. ANALIZA STANJA NAPONA I DEFORMACIJA PRETHODNO NAPREGNUTIH VISEĆIH SISTEMA SA UTICAJEM TEČENJA I SKUPLJANJA BETONA ..	171
6.1 Uvodne napomene .....	171
6.2 Diferencijalna jednačina gibke prethodno napregnute lančаницe .....	173
6.21 Odredjivanje horizontalne reakcije $H_{(i)}$ za faze u kojima opterećenje prima samo čelični kabl .....	176
6.22 Odredjivanje reakcije $H_{(i)}$ za integralne veze između napona i deformacija betona .....	178
6.23 Odredjivanje reakcije $H_{(i)}$ za algebarske veze između napona i deformacija betona .....	183
6.3 Primena metode konačnih pomeranja .....	187
6.31 Odredjivanje funkcionala $\tilde{F}_j^*(t)$ .....	191
6.32 Odredjivanje elemenata matrice $S_j^{ij}$ .....	193
6.4 Naponi u kablovima, betonu i armaturi .....	199
6.41 Integralne veze između napona i deformacija betona .....	199
6.42 Algebarske veze između napona i deformacija betona .....	200
Reference .....	203



7. PRIMENA METODE INTEGRALNIH JEDNAČINA ZA REŠAVANJE NEKIH GRANIČNIH ZADATAKA TEORIJE ARMIRANOBETONSKOG ŠTAPA .....	205
7,1 Granični zadatak definisan linarnom integro-diferencijalna jednačina .....	206
7.11 Rešavanje Fredholm-Volterrine integralne jednačine .....	208
7.12 Brojčani primer. Deformacije pritisnutog armiranobetonskog štapa .....	210
7.2 Krivi armiranobetonski štap u ravni .....	215
7.21 Uticaj tečenja betona .....	217
7.22 Brojčani primer .....	219
Reference .....	221
8. PRIMENA NELINEARNIH VEZA IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA ZA REŠAVANJE NEKIH ZADATAKA TEORIJE DRUGOG REDA I STABILNOSTI PRAVIH ŠTAPOVA .....	223
8.1 Uvodne napomene .....	223
8.2 Odredjivanje deformacijskih veličina $\epsilon_f(t)$ i $\kappa(t)$ u vreme $t=t_1$ i za kratkotrajna opterećenja .....	224
8.21 Brojčani primer .....	230
8.22 Uticaj rastojanja prslina .....	230
8.3 Dijagrami interakcije .....	233
8.4 Izvijanje idealno pravog štapa .....	234
8.41 Brojčani primer.....	241
8.5 Uticaj dugotrajnih dejstava .....	243
8.51 Odredjivanje deformacijskih veličina $\epsilon_f(t)$ i $\kappa(t)$ .....	246
8.52 Odredjivanje zamenjujućeg modula deformacija betona .....	249
8.53 Deformacije štapa sa početnom krivinom .....	249
Reference .....	251



Po svojoj strukturi i svojstvima beton pripada grupi reološki naj-  
 loženijih materijala. On je višekomponentan materijal, sastavljen  
 od agregata, čvrstih čestica (cementnog kamena), anhidratnih  
 soli, zrna cementa, vode i vazduha para i raznih dodataka. Svojstva reo-  
 loška svojstva su različitih od svojstva čvrstih komponentata nego i  
 temperaturnih oskora sredine u kojoj se nalazi, a koji se stalno me-  
 njaju. Za proučavanje ovih svojstava i određivanje njihovih  
 ta izmenjivosti napona i deformacija - reološki jedinstven stanja su:  
 konstitutivnih jednačina, primenjuju se metode i tehnike i or-  
 žanje, m a k r n i m i k r o r o l o g i j e i j e d i n s t v e n o s t  
 koj reološki materijal se tretira kao nepokretna sredina, a za od-  
 ivanje reoloških svojstava koriste se složeni reološki modeli. Pre-  
 tavljeni od prostih modela kojima se prikazuju elastična (Hookeov  
 model) viskozna (Maxwellov model) i plastična (Saint Venantov model)  
 svojstva. U mehanici se beton smatra kao homogono telo bez  
 strukture, a u mikromehanici kao veći agregatno telo sastavljeno  
 od više faza čija se svojstva proučavaju pomoću mikrorološke ana-  
 lize se zasniva na proučavanju strukture materijala koji odgovaraju

*"Najglavniji cilj svake teorije je u tome  
 da nesvodljive osnovne elemente napravi  
 što jednostavnijim i što manje brojnim,  
 ne morajući pri tome da se odrekne tačnog  
 pretstavljanja bilo kojih empirijskih sa-  
 držaja".*

A. Einstein

Promene naponskih stanja koje izazivaju promene stanja deformacije  
 - reološke procese. Neka od ovih promena nastaju odmah posle promena  
 stanja napona i nazivaju se elastičnim, dok se druge razvijaju tokom vremena i u našoj terminologiji  
 se nazivaju reološkim. U ovom slučaju reološki procesi su: elastični, viskozni i viskoelastični.



## U V O D

Po svojoj strukturi i svojstvima beton pripada grupi reološki najslabijih materijala. To je višekomponentan materijal, sastavljen od agregata, očvršle cementne paste (cementnog kamena), nehidratiranih zrna cementa, vode i vodene pare i raznih dodataka. Njegova reološka svojstva ne zavise samo od sadržaja ovih komponentata nego i temperaturnih uslova sredine u kojoj se nalazi, a koji se stalno menjaju. Za proučavanje ovih svojstava i određivanje matematičkih veza između napona i deformacija - reoloških jednačina stanja ili konstitutivnih jednačina, primenjuju se metode fenomenološke, makro i mikroreologije /10/. U fenomenološkoj reologiji materijal se tretira kao neprekidna sredina, a za opisivanje reoloških svojstava koriste se složeni reološki modeli sastavljeni od prostih modela kojima se prikazuju elastična (Hookeov model) viskozna (Newtonov model) i plastična (Saint Venantov model) svojstva. U makroreologiji se beton analizira kao homogeno telo bez strukture, a u mikroreologiji kao višekomponentno telo sastavljeno od više faza čija se svojstva posebno razmatraju. Mikroreološka analiza se zasniva na proučavanju mikroreoloških modela koji odgovaraju što je moguće više strukturi materijala. Ovi se modeli stoga razlikuju od fenomenoloških, jer u sebe uključuju geometrijske veličine - zapremine odnosno koncentracije komponentata sa njihovim posebnim svojstvima. Treba istaći da su reološki modeli analogni modelima i da služe samo za opisivanje reoloških procesa, nastalih usled promena naponskih stanja da bi se dobile matematičke veze između napona i deformacija i izvršila kvantitativna analiza.

Promene naponskih stanja betona izazivaju promene stanja deformacija - reološke procese. Neke od ovih promena nastaju odmah posle promena stanja napona i nazivaju se trenutnim deformacijama, dok se druge razvijaju tokom vremena i u našoj terminologiji su poznate kao tečenje ili pužanje betona. Pored to-



ga usled promena relativne vlažnosti sredine i sadržaja vlage u betonu nastaju deformacije s k u p l j a n j a i b u b r e n j a betona.

Pojavu povećanja deformacija materijala tokom vremena uočio je još 1835 nemački fizičar Wilhelm Weber u Göttingenu na svilenim i staklenim vlaknima o koja su bila obešena galvanometarska ogledala. R. Köptrausch i F. Köptrausch su 1863 i 1866 a kasnije J. Hopkinson 1878 su bili prvi koji su opisali zakonitost ovih pojava. Potpuniju teorijsku obradu izvršili su veliki austrijski fizičar Ludvig Boltzman i isto tako poznati italijanski matematičar Vito Volterra. L. Boltzman je 1874 formulisao teoriju naknadnog elastičnog dejstva (Elastischen Nachwirkung) /1/ i postavljao osnove linearnoj teoriji tečenja (puzanja) materijala. Ovu teoriju kasnije dopunjava V. Volterra krajem prošlog i u prvim decenijama ovog veka. Svojsvo materijala da se u njemu pod dejstvom napona pojavljuju tokom vremena povratne deformacije naziva se elastičnom naslednošću /10/. On uzima u obzir činjenicu da je deformacija takvih materijala u nekom trenutku vremena zavisna od prethodnih promena napona, odnosno istorije opterećenja a veze izmedju napona i deformacija formuliše u obliku jednog, za to vreme novog tipa jednačina, koji se po njenu nazivaju Volterrinim integralnim jednačinama. Ove matematičke formulacije i danas su vrlo aktuelne i imaju veliku primenu u linearnoj teoriji viskoelastičnosti i reologiji betona.

Ruski inženjer I. Samovič vršeći vrlo obimna eksperimentalna istraživanja uticaja sadržaja i vrste cementa i agregata na mehanička svojsva betona 1885 god. uočio je da se deformacije betonskog svoda povećavaju tokom vremena usled delovanja stalnog opterećenja /13/. Početak proučavanja tečenja (puzanja) betona obično se vezuje za radove I. H. Woolsona /12/ 1905 god. i K. H. Hatta /2/ 1907 god. u Americi. A. H. White /11/ ukazuje 1911 god. na značaj skupljanja betona u konstrukcijskoj analizi. Kasnije ove pojave postaju predmet rada i interesovanja većeg broja istraživača: F. R. McMillana, R. E. Davisa i H. E. Davisa u Americi, W. H. Glanvillea u Engleskoj, E. Freyssineta u Francuskoj i drugih. U našoj literaturi Dj. Lazarević prvi put uzima u obzir 1933 god. uticaj tečenja betona, koje naziva n a p o n s k i m s t i n j a v a n j e m, na preraspodelu napona u armiranobetnoskim stubovima i promenu statičkih uticaja statički neodredjenih armiranobetnoskih sistema /3/, /4/, /5/.



Nagli porast primena betona u građevinarstvu, naročito u posleratnom periodu, uticao je na intenzivan razvoj naučno-istraživačkog i teorijskog rada u ovoj oblasti. Vrlo smeli konstrukterski poduhvati u svetu i u nas u oblasti armirano betonskih i prethodno napregnutih konstrukcija zahtevali su potpunije poznavanje svojstava betona i realnije opisivanje stanja napona i deformacija konstrukcija i njihovih elemenata. U poslednje dve decenije istraživački i naročito teorijski rad u oblasti reologije betona u nas bio je vrlo intenzivan i pratio je tokove vrlo obilnih istraživanja u svetu, tako da ove oblasti nisu više predmet interesovanja užeg kruga specijalista, pa rezultati ovog istraživačkog i teorijskog rada nalaze sve češću primenu u praksi. Ogroman je broj radova i publikacija u svetu u kojima se tretiraju različiti problemi teorije betona i armiranobetonskih konstrukcija i on se iz godine u godinu stalno povećava, tako da ga je danas sve teže, a u potpunosti i nemoguće pratiti, a mogao bi se podeliti u sledeće grupe zadataka:

- Utvrđivanje fizičkih i fizičko-hemijskih uzroka reološkim procesima u betonu (tečenju, skupljanju i lomu) i uticaj spoljašnjih faktora (promena temperature, relativne vlažnosti, uslova ispitivanja i drugih) na ove procese.
- Kvalitativno opisivanje ponašanja betona u različitim uslovima i različitim naponskim stanjima na bazi eksperimenata u laboratorijama, merenja i opažanja na eksperimentalnim i realnim objektima i gradilištima.
- Usavršavanje metoda ispitivanja uzoraka i konstrukcija uz korišćenje najsavremenijih uređaja za merenje i obradu podataka dobijenih merenjem.
- Provera postojećih i formulisanje novih hipoteza o ponašanju konstrukcija i njihovih elemenata pri delovanju spoljašnjih sila i uticaja.
- Utvrđivanje veze između napona i deformacija betona i čelika i matematičko modeliranje različitih problema na bazi tih relacija i usvojenih pretpostavki.
- Usavršavanje metoda proračuna konstrukcija i izbor najefikasnijih numeričkih metoda i postupaka uz korišćenje savremenih računskih mašina, kako bi se dobile što vernije pretstavke o stvarnom stanju napona i deformacija.



- Formulisanje uprošćenih veza izmedju napona i deformacija i prostijih metoda proračuna, koji se mogu bez velikih grešaka uspešno koristiti u praksi za proračune velikog broja konstrukcija.
- Iznalaženje optimalnih rešenja u procesu projektovanja, proračuna i gradjenja u ekonomskom, funkcionalnom i estetskom smislu.
- Formulisanje i usvajanje nacionalnih i internacionalnih standarda, preporuka i propisa o kvalitetu materijala, metodama projektovanja, dimenzionisanja i izvršenja naponsko-deformacijske analize konstrukcija i njihovih elemenata, kao sinteze istraživačkog i teorijskog rada s jedne i tehničkih dostignuća i praktičnih iskustava s druge strane.
- Usavršavanje tehnoloških postupaka u proizvodnji materijala i metoda gradjenja radi poboljšanja kvaliteta i brzine izvodjenja radova i smanjenja nepovoljnih uticaja i pojava.
- Istraživanje u oblasti novih materijala ili novih kombinacija materijala kao što je naprimer beton sa dodatkom čeličnih staklenih ili polimernih vlakana (fibrous concrete) i nalaženje mogućnosti njihove opravdane primene.

Ovaj rad će se baviti samo nekim od ovih aspekata.

Predviđanje realnih stanja i ponašanja konstrukcija je vrlo značajno za velike i značajne objekte, velikih raspona i sa nepovoljnim opterećenjima. Za njih je potrebno izvršiti kompleksniju i tačniju analizu, primenjujući složenije reološke modele materijala i uzimajući u obzir sve faktore koji značajno utiču na njihovu stabilnost i funkcionalnost. Ovde treba, dakle, koristiti najsavremenije metode teorije konstrukcija koje najčešće zahtevaju primenu elektronskih računara. Nagli razvoj računarske tehnologije u poslednje dve decenije i proizvodnje računara velikih kapaciteta i mogućnosti doprineo je i omogućio usavršavanje i širu primenu nekih numeričkih metoda, kao naprimer metode konačnih elemenata, čije su matematičke osnove znatno ranije postavljene. Danas postoje mnogi gotovi programi za računare, koji omogućavaju širem krugu stručnjaka iz prakse uz jednostavno unošenje ulaznih podataka, brzo dobijanje gotovih rezultata do kojih se tzv. klasičnim metodama teško dolazilo ili nije moglo doći. Konstrukter se u procesu stvaranja, na taj način, oslobadja dugih i zamornih računanja skopčanih i sa pojavom grešaka, i više mu vremena ostaje, s obzirom da se rezulteti brzo dobijaju, za kreativan rad u traženju najboljih rešenja. Nema sumnje, da će za jednostavnija konstrukcijska rešenja i elemente primena prostijih me-



toda i postupaka uprošćenih veza između napona i deformacija koja omogućava jednostavnije matematičko modeliranje različitih problema biti i dalje aktuelna.

Upotreba elektronskih računara usloвила je i nove pristupe u rešavanju različitih problema teorije konstrukcija. Klasične metode koje su se razvile na radovima Maxwella, Mohra, Müller Breslaua i drugih odlikuju se, kako ističe R.K.Livesley /6/ opštošću, logikom, jednostavnošću i matematičkom elegancijom, ali je njihova praktična primena bila često skopčana sa dugim proračunima. Stoga su mnogi značajni radovi iz ove oblasti bili posvećeni uprošćavanju ovih postupaka, smanjenju obima računskih operacija, bržeg i jednostavnijeg dobijanja traženih rešenja ovih zadataka, za čije se matematičko modeliranje najviše koristi matrična algebra. Značajnije je izabrati postupak za koji se lakše može napisati program za elektronski računar nego smanjiti obim računskih operacija koje obavlja mašina. U tom pogledu, za rešavanje konstrukcijskih sistema sastavljenih od linijskih elemenata, metoda deformacije, koja je i ranije sa nekim uprošćenjima bila često korišćena u praksi, ima prednosti nad metodom sila.

Na početku ovog rada prikazuju se ukratko osnovni zakoni mehanike kontinuuma na kojima se zasniva celokupna dalja analiza. Poseban osvrt se daje na zakone termodinamike, kao osnovne zakone kretanja materije i izvode termodinamički potencijali za neke karakteristične reološke modele betona. Tretirajući materijal kao neprekidni kontinuum, iz uslova termodinamičke ravnoteže ispisuju se matematičke veze između napona i deformacija i jednačine koje definišu stanja napona i deformacija konstrukcijskih elemenata i sistema. U ovim razmatranjima daju se samo kratki osvrti na reološka svojstva i ponašanje materijala i najvažnije fakotre koji na njih utiču, pošto su ova pitanja, uključujući fizičko-hemijske uzroke tečenja i skupljanja betona autor je ranije detaljnije obradivao /8/ a u svetskoj literaturi, pa i na našem jeziku, postoji veliki broj radova i monografija iz ove oblasti, kao na primer značajna monografija A. M. Nevillea /7/.

Radi pojednostavljivanja analize stanja napona i deformacija armirano betonskih elemenata i konstrukcija, u radu se predlažu postupci za uprošćenje veza između napona i deformacija betona. Ove veze se formulišu kao algebarske jednačine u zavisnosti od toga kako se tokom vremena menjaju deformacije u konstrukcijskim elementima i sis-



temima i prikazuju mogućnosti rešavanja tzv. relaksacionih zadataka. Za rešavanje graničnih zadataka armiranobetonskih konstrukcija, uzimajući u obzir tečenje i skupljanje betona, primenjuje se metoda konačnih elemenata. Tretirajući konstrukcijski sistem, sastavljen od konačnog broja elemenata, kao termodinamički sistem, uz uslova minimuma promene slobodne energije u dugotrajnom procesu, ispisuje se sistem Volterrinih integralnih jednačina, čijim se rešavanjem dobijaju pomeranja, a zatim naponi i sile u presecima u funkciji vremena. Uporedo sa sistemima integralnih jednačina izvode se i sistemi algebarskih jednačina na osnovu algebarskih veza između napona i deformacija betona. Za konstrukcijske sisteme sastavljene od linijskih elemenata zadatak određivanja stanja napona i deformacija se rešava u okviru linearne teorije prvog i linearizovane teorije drugog reda. Za viseće prethodno napregnute sisteme, primenjuje se takođe metoda konačnih elemenata uzimajući u obzir velike deformacije. Pored metode konačnih elemenata vrši se i jedno proširenje. Metode integralnih jednačina N.Hajdina za rešavanje graničnih zadataka armiranobetonskih konstrukcija sa uticajem tečenja i skupljanja betona i problem matematički formuliše u obliku Fredholm-Volterrinih integralnih jednačina, koje se dalje rešavaju numeričkim postupcima.

Na kraju, za određivanje stanja napona i deformacija armiranobetonskih pravih štapova, uzimaju se u obzir i geometrijske i fizičke nelinearnosti odnosno nelinearne veze između napona i deformacija. Uzima se u obzir mogućnost pojave prslina i njihov uticaj na deformacije i razmatraju neki problemi stabilnosti ovih elemenata.

#### REFERENCE

- /1/ B o l t z m a n n, L., Zur Theory derelastischen Nachwirkung Wiener Berlin 1874.
- /2/ H a a t t, W.K., Notes on the effect of time element in loading reinforced concrete beams. ASTM Proc. 7, 1907, pp. 421-433.
- /3/ L a z a r e v i ć Dj., O ankerovanju armature. Tehnički list, br. 6-7 1933.
- /4/ L a z a r e v i ć, Dj., Uticaj poboljšanja kakvoće cementa u budućnosti na stubove od armiranog betona. Gradjevinski vjesnik br. 8, 1933, str. 115-117.
- /5/ L a z a r e v i ć, Dj., Naponsko stinjavanje. Gradjevinski vjesnik br. 5, 1934, str. 72-73
- /6/ L i v e s l e y, R.K., Matrix Methods of Structural Analysis. Pergaman Press, 1975.
- /7/ N e v i l l e, A.M., Creep of Concrete: Plain, Reinforced and Prestressed. North Holland Publishing Company. Amsterdam 1970.



/8/ P r a š č e v i ć, Ž., Neki problemi tehničke teorije armirano-betonskog štapa. Magistarski rad, Građevinski fakultet, Beograd 1973.

/9/ R e i n e r M., Rheology. Handbuch der Physik Sprirger-Verlag, 1963.

/10/ V o l t e r r a, V., Lesons sur les fonctions de lignes. Paris 1912.

/11/ W h i t e, A.H., Destruction of cement mortars and concrete through expansion and contraction. ASTM Proc. 11, 1911, pp. 531-555

/12/ W o o l s o n, I.H., Some remarkable tests indicating "flow" of concrete under pressure. Engineering News 54, No 18, 1905 p. 459.

/13/ С и м о в и ч, И., Составление пропорций цементных растворов и бетонов. Инженерный журнал, 7-8,9, С.-Петербург, 1890, стр. 843-873, 975-1002.





# 1. TERMODINAMIČKA ANALIZA REOLOŠKIH MODELA SA OSVRTOM NA SVOJSTVA BETONA

## 1.1 Uvodne napomene i definicije nekih pojmova

Mehanika kontinuuma se bavi proučavanjem kretanja deformabilnih tela pod dejstvom spoljašnjih sila, tretirajući ih makroskopski kao neprekidne sredine /10/, dok termodinamika proučava procese provođenja toplote i disipacije energije. U proučavanju kretanja u najopštijem smislu reči deformabilnih tela, nije moguće ove dve oblasti odvojiti, pa se i dva osnovna zakona termodinamike uključuju u osnovne zakone mehanike kontinuuma. Čvršća međuzavisnost ovih oblasti je kako ističe H. Zigler /55/, ustanovljena pre nešto više od dve decenije tako da veliki broj naučnika i istraživača u svetu, primenjuje zajednički tretman sjedinjujući obe oblasti u *t e r m o d i n a m i k u*. Treba medjutim istaći da se zakoni termodinamike primenjuju i u drugim oblastima prirodnih nauka, sem mehanike, u prvom redu hemije i fizičke hemije /28/.

Odredjena količina materije, ograničena nekom zatvorenom realnom ili zamišljenom površi obrazuje *s i s t e m* u termodinamičkom smislu. Ova površ odvađa sistem od njegove *o k o l i n e* koja se može sastojati od jednog ili više drugih sistema. Svaki sistem je sastavljen od svojih *e l e m e n a t a*, koji mogu biti na primer čestice materije ili posebni *s i s t e m i* odnosno *p o d s i s t e m i*. Ako okolina ne deluje na sistem onda je on *i z o l o v a n*, a ako nema razmene mase između sistema i okoline sistem je *z a t v o r e n*. Stanje sistema je određeno merljivim veličinama koje su neprekidne funkcije vremena a nazivaju se *p a r a m e t r i m a* ili *p r o m e n l j i v i m* stanja. Parametri mogu biti geometrijski (koordinate, površine, zapremine i sl.), fizički (temperatura), mehanički (sile), pa sistemi mogu biti hemijski, fizički, mehanički i sl. zavisno od toga kojim se parametrima opisuju njihova stanja. Parametri kojima se opisuje stanje okolina sistema koja na njega deluje nazivaju se *s p o l j a š n j i m*, dok se *u n u t r a š n j i m* parametrima opi-



suje stanje elemenata sistema. Ako se neki parametar može izraziti jednoznačno u funkciji ostalih parametara onda se takva funkcionalna zavisnost naziva *j e d n a č i n o m* stanja, a promenljiva koja se na taj način opisuje *f u n k c i j o m* stanja.

Niz stanja kroz koja sistem prolazi tokom određenog perioda vremena naziva se *p o n a š a n j e m* sistema, dok se svaka promena u sistemu koja nastaje promenom jednog ili više parametara naziva *p r o c e s o m* koji može biti prekidan ili neprekidan. Procesi pri kojima se sistem, u prostoru stanja, čiju bazu čine parametri, vraća u prvobitni položaj nazivaju se *c i k l u s i m a*. Stanje sistema koje se tokom vremena ne menja naziva se *s t a c i o n a r n i m*, a kada ta stacionarnost nije uslovljena odvijanjem bilo kojeg procesa u okolini sistema onda je to *r a v n o t e ž n o* stanje. Kada je sistem u stanju termodinamičke ravnoteže onda je on i u stanju mehaničke, hemijske i toplotne ravnoteže /37/. Ako beskonačno male promene parametara izazivaju beskonačno male promene stanja sistema ravnotežno stanje sistema je *s t a b i l n o*, a ako su promene ravnotežnog stanja konačne onda je to *n e s t a b i l n o* stanje. Proces pri kome sistem prolazi kroz niz ravnotežnih stanja naziva se *r a v n o t e ž n i m* i može biti *p o v r a t a n i* *n e p o v r a t a n*. Povratni procesi omogućavaju povratak sistema u prvobitno stanje, bez promena u okolini sistema, dok procesi koji ne ispunjavaju ove uslove i mogu se spontano odvijati samo u jednom smeru nazivaju se *nepovratnim* i prema mišljenju M. Plancka /14/ takvi su svi realni procesi u prirodi.

Procesi tokom čijeg se odvijanja vrši rad nad sistemom i prenosi toplota u sistem nazivaju se *t e r m o m e h a n i č k i m*. Kada je sistem termički izolovan od svoje okoline onda je proces *a d i j a b a t s k i*, dok je proces *i z o t e r m i č k i* ako se odvija na konstantnoj temperaturi.

## 1.2 Osnovni zakoni mehanike deformabilnog tela

U ovom odeljku razmatra se deformabilno telo zapremine  $V$  kao termodinamički sistem koji se nalazi u trodimenzionalnom Euklidovom prostoru  $R^3$ . Položaj svake tačke tela kao kontinuuma određen je vektorom položaja u Descartesovom koordinatnom sistemu čije su koordina-



te  $x^i$  funkcije vremena  $t$

$$x^i = x^i(t); \quad i=1,2,3 \quad (1.1)$$

U ovom sistemu se dalje posmatra jedan paralelepiped, čije su dužine ivica  $\Delta x^i$ , zapremina  $\Delta V$  i masa  $\Delta m$ , kao podsistem. Gustina mase  $\rho$  je neprekidna funkcija vektora položaja tačaka tela i u nekoj tački koja pripada pomenutom podsistemu je

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1.2)$$

Na površini  $A$  tela, koja ga kao sistem odvaja od njegove okoline deluju spoljašnje sile određene vektorom  $\mathbf{p}$  po jedinici površine, čije su komponente u pravcima koordinatnih osa

$$p^i = p^i(t); \quad i=1,2,3. \quad (1.3)$$

Ovaj vektor se može izraziti u funkciji napona  $\sigma^{ij}$  u posmatranoj tački sa jediničnim vektorom normale  $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$  na površi konture

$$p^i = \sigma^{ij} n_j. \quad (1.4)$$

Pored ovih, u svakoj tački tela deluje po jedinici zapremine tela, zapreminska sila čije su komponente u pravcu koordinatnih osa  $Y^i$ .

Za posmatrano telo važe sledeći fundamentalni zakoni mehanike:

### 1. Zakon balansa mase

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (1.5)$$

ili u lokalnom obliku

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v^i) = 0, \quad v^i = \dot{x}^i, \quad i=1,2,3 \quad (1.6)$$

gde je  $\frac{D}{Dt}$  tzv. materijalni izvod za kojeg važi

$$\frac{Df_i}{Dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + f_{i,j} \frac{\partial x_j}{\partial t}; \quad i=1,2,3; \quad j=1,2,3.$$

### 2. Zakon balansa količine kretanja

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i^j dV = \int_V Y^i dV + \int_A p^i dA \quad (1.7)$$

ili u lokalnom obliku

$$\rho v^i = Y^i + \sigma_{,j}^{ij} \quad i=1,2,3; \quad j=1,2,3. \quad (1.8)$$



Ako je brzina kretanja tačkaka  $v^i=0$ , onda ove jednačine definišu uslove ravnoteže.

### 3. Zakon balansa momenta količine kretanja

$$\frac{D}{Dt} \int_V \epsilon_{ijk} x^j v^k dV = \int_V \epsilon_{ijk} x^j \gamma^k dV + \int_A \epsilon_{ijk} x^j p^k dA \quad (1.9)$$

gde je  $\epsilon_{ijk}$  tenzor permutacije (tenzor Levi-Civita) sa svojstvima  $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$ ,  $\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$ , dok je za ostale  $\epsilon_{ijk} = 0$

U lokalnoj formi

$$\epsilon_{ijk} \sigma^{jk} = 0 \quad (1.10)$$

ili s obzirom na svojstva tenzora  $\epsilon_{ijk}$

$$\sigma^{jk} = \sigma^{kj} \quad (1.11)$$

### 1.3 Unutrašnja energija. Prvi zakon termodinamike

Atomi i molekuli bilo koje supstance se nalaze u stalnom kretanju i stoga poseduju određenu količinu kinetičke i potencijalne energije. Kinetička energija molekula nastaje usled njihovog translacionog i rotacionog kretanja i ona, kao i energija nastala zbog oscilovanja atoma, ima kao svoju meru temperaturu. Potencijalna energija molekula zavisi od njihovog međusobnog rastojanja i rasporeda i sve ove vrste energije sačinjavaju unutrašnju energiju. Termodinamički sistem R između dva stanja primi iz svoje okoline izvesnu količinu toplote  $\Delta Q$  i nad njim se izvrši rad  $\Delta W$ , onda je zbir promene unutrašnje energije  $U$  i kinetičke energije  $\mathcal{K}$  nastale usled kretanja sistema kao krutog tela brzinom  $v$

$$\Delta U + \Delta \mathcal{K} = \Delta Q + \Delta W \quad (1.12a)$$

Kada ova dva stanja beskonačno malo razlikuju onda je

$$dU + d\mathcal{K} = dQ + dW \quad (1.12)$$

Ovim izrazima se matematički formuliše Prvi zakon termodinamike, odnosno zakon o održavanju energije termodinamičkog sistema. U ovom radu će se razmatrati sistemi čija je brzina  $v=0$ , tako da je





$$d\mathcal{K}=0.$$

Za termodinamički podsistem R elementarne zapremine  $dV$ , koji pripada sistemu  $\mathcal{R}$ , unutrašnja energija, količina toplote i rad obeležavajuće se velikim latinskim slovima  $U$ ,  $Q$  i  $W^*$ , pa je

$$dU = dQ + dW \quad (1.13)$$

Neka se stanje podsistema R može opisati sa  $n$  parametara  $\chi_k(t)$  i temperaturom  $\theta(t)$ , koji su neprekidne funkcije vremena  $t$  i neka na podsistem deluje  $n$  generalisanih sila  $X^k(t)$  koje se nazivaju termodinamičkim pritiscima /35/, onda je

$$dW = X^k d\chi_k \quad (1.14)$$

gde je

$$d\chi_k = \chi_k(t+dt) - \chi_k(t).$$

U termodinamici se pokazuje da je slobodna energija funkcija stanja, tj. da je njena promena izmedju dva stanja nezavisna od puta po kojem je sistem u prostoru, čiju bazu čine parametri stanja, prešao iz jednog stanja u drugo. Matematički to znači da je  $U$  integrabilna funkcija, a  $dU$  njen totalni diferencijal i ona se može odrediti do na neku aditivnu konstantu. Apsolutna vrednost unutrašnje energije se ne može odrediti, mogu se samo određivati njene promene izmedju dva stanja, odnosno posmatranog i nekog referentnog stanja.

U posmatranom sistemu  $\mathcal{R}$  i podsistemu R unutrašnja energija je funkcija stanja napona  $\sigma^{ij}$  i temperature  $\theta$ , odnosno deformacija  $\gamma_{ij}$  i temperature  $\theta$  u svakoj tački sistema

$$\begin{aligned} U &= U(\sigma^{ij}, \theta), \\ U &= U(\gamma_{ij}, \theta), \end{aligned} \quad (1.15)$$

pa je stoga

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\partial U}{\partial \sigma^{ij}} d\sigma^{ij} + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta, \\ dU &= \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ij}} d\gamma_{ij} + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (1.16)$$

U ovom termodinamičkom sistemu su termodinamički pritisci  $X^k$  naponi, dok su  $\chi_k$  deformacije pa je prema (1.14)

\* Odgovarajuće veličine, koje se odnose na sistem u celini obeležavajuće se velikim pisanim latinskim slovima.



$$dW = \sigma_{ij} dx_{ij} \quad (1.17)$$

Količina toplote  $Q$  i rad  $W$  nisu funkcije stanja, jer  $dQ$  i  $dW$  nisu totalni diferencijali, pošto njihova promena u prostoru, čiju bazu čine parametri stanja, zavisi od puta po kojem je sistem prešao iz jednog stanja u drugo.

#### 1.4 Entropija. Drugi zakon termodinamike

Neka se termodinamički podsistem  $R$  nalazi u reverzibilnom procesu i neka su

$$U = U(x_k, \theta); \quad x^k = x^k(x_l, \theta); \quad k=1, 2, \dots, n; \quad l=1, 2, \dots, n$$

onda je

$$dU - X^k dx_k = dQ \quad (1.18)$$

i dalje

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x^k} - X^k\right) dx_k + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta = dQ \quad (1.18a)$$

Leva strana ovog izraza je Pfaffova linearna diferencijalna forma, koja je integrabilna ako postoji integralni delitelj  $T$

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial x^k} - X^k\right) dx_k + \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta = dS \quad (1.19)$$

tako da je

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (1.20)$$

totalni diferencijal funkcije  $S$ .

Ovu funkciju je uveo Clausius 1850 god. i nazvao je e n t r o p i j o m termodinamičkog sistema, i pošto je  $dS$  totalni diferencijal, ona je funkcija stanja u reverzibilnom procesu. Integralni delitelj  $T$  je a p s o l u t n a temperatura i meri se na Kelvinovoj temperaturnoj skali u  $^{\circ}K$ . Ako se temperatura  $\theta$  izražava u  $^{\circ}C$  onda je

$$T = 273,18 + \theta \quad (1.21)$$

Izraz (1.20) matematički definiše Drugi zakon termodinamike za reverzibilne termodinamičke procese i s obzirom na svojstva totalnog diferencijala za cikličke reverzibilne procese je



$$\oint \frac{dQ}{T} = 0.$$

Funkcija  $S$  je u ovim procesima jednoznačno određena parametrima stanja  $\chi_k$  i  $\theta$ , tj.

$$S = S(\chi_k, T)$$

pa je

$$ds = \frac{\partial s}{\partial \chi_k} d\chi_k + \frac{\partial s}{\partial T} dT \quad (1.22)$$

Upoređivanjem izraza (1.19) i (1.22) uzimajući u obzir (1.21) dobija se da je

$$\frac{\partial U}{\partial \chi_k} - X^k = T \frac{\partial S}{\partial \chi_k}, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T}.$$

U ireverzibilnom procesu unutrašnja energija  $U$  i termodinamički pritisci  $X^k$  ne mogu se jednoznačno odrediti u funkciji parametara  $\chi_k$  i  $\theta$  kao reverzibilnom procesu. Stoga je neophodno uvesti dopunske nezavisne promenljive  $\zeta_l$  ( $l=1, 2, \dots, m$ ) da bi termomehaničko stanje sistema bilo jednoznačno određeno, tj.

$$\begin{aligned} U &= U(\chi_k, \zeta_l, \theta) & k &= 1, 2, \dots, n \\ X^k &= X^k(\chi_k, \zeta_l, \theta) & l &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (1.24)$$

Ove promenljive K. Valanis /50/ naziva u n u t r a š n j i m promenljivim i ističe da integrabilnost izraza (1.18), koji definiše matematički Prvi zakon termodinamike, u ireverzibilnom procesu nije do sada ustanovljena i da je postojanje entropije za takve procese otvoreno pitanje.

Izraz (1.18) je sada

$$\frac{\partial U}{\partial \chi_k} d\chi_k + \frac{\partial U}{\partial \zeta_l} d\zeta_l + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta - X^k d\chi_k = dQ, \quad \begin{aligned} k &= 1, 2, \dots, n \\ l &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Ako se pretpostavi da su dopunske promenljive  $\zeta_l$  ( $l=1, 2, \dots, m$ ) u jednom delu procesa konstante, što znači da je taj deo procesa reverzibilan onda, kao što je već rečeno postoji funkcija stanja  $S$  i integralni delitelj  $T$  tako da je linearna diferencijalna forma



$$\frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta - X^k dx_k = T ds \neq dQ$$

i da važe i za ireverzibilne procese relacije izrazi (1.23).

Drugi zakon termodinamike se matematički formuliše u obliku Clausius-Duhemove nejednačine

$$T ds \geq dQ, \quad (1.25)$$

pri čemu znak jednakosti važi za reverzibilne, a nejednakosti za ireverzibilne procese.

Priraštaj entropije se isto prikazuje u obliku

$$dS = dS_{(r)} + dS_{(i)}$$

gde je

$$dS_{(r)} = \frac{dQ}{T}$$

priraštaj entropije koju sistem dobija iz svoje okoline,  $dS_{(i)}$  priraštaj entropije nastao u samom sistemu u ireverzibilnom termodinamičkom procesu. Drugi zakon termodinamike se može stoga izraziti u obliku

$$dS_{(i)} \geq 0. \quad (1.26)$$

Dok se Prvim zakonom termodinamike utvrđuje održavanje energije, dotle Drugi zakon određuje uslov reverzibilnosti odnosno ireverzibilnosti i smer odvijanja bilo kojeg termodinamičkog procesa. Termodinamički sistem u adijabatskom procesu ( $dQ=0$ ) ne može da prolazi kroz niz stanja u kojima bi se entropija smanjivala, ona ili ostaje konstantna (reverzibilni procesi) ili se povećava i maksimalnu vrednost dostiže u stanju termodinamičke ravnoteže. Što je priraštaj entropije u nekom procesu veći to je veći i stepen njegove reverzibilnosti /65/.

Entropija je funkcija stanja i može se određivati do na jednu aditivnu konstantu, te se njena apsolutna vrednost ne može naći. Može se samo odrediti njena razlika između dva stanja.



### 1.5 Termodinamički potencijali

Slobodna energija se definiše matematički

$$F = U - TS \quad (1.26a)$$

a uveo ju je 1882.god. H. Helmholtz, pa se naziva i Helmholtzova slobodna energija. Ona je funkcija stanja i u reverzibilnom procesu je

$$F = F(\chi_k, T) \quad k=1, 2, \dots, n$$

a u ireverzibilnom procesu

$$F = F(\chi_k, \zeta_l, T) \quad k=1, 2, \dots, n; \quad l=1, 2, \dots, m;$$

pa je totalni diferencijal

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \chi_k} d\chi_k + \frac{\partial F}{\partial \zeta_l} d\zeta_l + \frac{\partial F}{\partial T} dT. \quad (1.27)$$

S druge strane, ako se izvrši diferenciranje izraza (1.26) i uzmu u obzir (1.13), (1.14), (1.26) i (1.27) dobija se posle sredjivanja

$$dF = X^k d\chi_k - T ds_{(i)} - S dT \quad (1.28)$$

Uporedjivanjem (1.27) i (1.28) dobijaju se izrazi

$$X^k = \frac{\partial F}{\partial \chi_k}; \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}; \quad ds_{(i)} = -T \frac{\partial F}{\partial \zeta_l} d\zeta_l; \quad (1.29)$$

koji važe za sve termomehaničke procese.

U izotermičkom i reverzibilnom procesu ( $dT=0, \zeta_l=0$ ) priraštaj slobodne energije jednak je, prema izrazu (1.28) priraštaju rada koji su izvršile spoljašnje sile nad termomehaničkim sistemom.

Gibbsov termodinamički potencijal  $G$  se matematički definiše

$$G = F - X^k \chi_k \quad (1.30)$$

i predstavlja, kao i slobodna energija, funkciju stanja termomehaničkog sistema. On se često izražava za reverzibilne procese

$$G = G(X^k, T)$$

i ireverzibilne procese

$$G = G(X^k, \zeta_l, T)$$



tako da je totalni diferencijal

$$dG = \frac{\partial G}{\partial X^k} dX^k + \frac{\partial G}{\partial \zeta_l} d\zeta_l + \frac{\partial G}{\partial T} dT. \quad (1.31)$$

Kada se izvrši diferenciranje izraza (1.30) i uzme u obzir (1.28)

$$dG = -\chi_k dX^k - T dS_{(i)} - S dT, \quad (1.32)$$

pa se upoređivanjem izraza (1.31) i (1.32) dobija

$$\chi_k = -\frac{\partial G}{\partial X^k}, \quad S = -\frac{\partial G}{\partial T}, \quad dS_{(i)} = -T \frac{\partial G}{\partial \zeta_l} d\zeta_l \quad (1.33)$$

$$k = 1, 2, \dots, n; \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

Za termomehanički podsistem  $R$ , sastavljen od kontinuuma elementarne zapremine  $dV$ , gde generalisane sile  $X^k$  (termodinamički pritisci) predstavljaju napone  $\sigma^{ij}$ , a parametri pomeranja  $\chi_k$  deformacije  $\delta_{ij}$  je

$$F = F(\delta_{ij}, \zeta_l, T) \quad (1.34)$$

$$G = G(\sigma^{ij}, \zeta_l, T)$$

pa su prema (1.29) i (1.33)

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial F}{\partial \delta_{ij}}, \quad \chi_{ij} = -\frac{\partial G}{\partial \sigma^{ij}}, \quad i=1,2,3; \quad j=1,2,3. \quad (1.35)$$

Ovi izrazi važe za reverzibilne i ireverzibilne procese.

### 1.6 Elastično telo

Proces deformisanja elastičnog (Hookeovog) tela, čiji je reološki model dat na sk. 1.1, je termodinamički reverzibilan. Veza između napona i deformacija je



Sk. 1.1

$$\sigma = E(\epsilon - \alpha\theta) \quad (1.36)$$

$$\theta = T - T_0 \quad (1.37)$$

gde je  $E$  Youngov modul elastičnosti,  $\alpha$  koeficijent linearne temperature dilatacije,  $T$  i  $T_0$  su apsolutne temperature u posmatranom i referentnom stanju.



Slobodna energija  $F$  i entropija  $S$  su funkcije stanja

$$F = F(\varepsilon, \theta), \quad S = S(\varepsilon, \theta)$$

i  $F$  se može razložiti u Taylorov red po  $\varepsilon$  i  $\theta$  zadržavajući linearne i kvadratne članove /63/

$$F = a_0 + a_1 \theta + a_2 \varepsilon + a_{11} \varepsilon^2 + a_{12} \theta \varepsilon + a_{22} \varepsilon^2 + \bar{R}(\varepsilon, \theta)$$

gde je  $\bar{R}(\varepsilon, \theta)$  ostatak reda koji se zanemaruje.

Vrednosti koeficijenata  $a_2, a_{12}, a_{22}$  određuju se uporedjivanjem izraza za napon  $\sigma$  dobijenog parcijalnim integrisanjem

$$\sigma = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = a_2 + a_{12} \theta + 2a_{22} \varepsilon$$

sa izrazom (1.36). Pored toga  $a_0$  i  $a_1$  u izrazima za slobodnu energiju i entropiju

$$S = \frac{\partial F}{\partial \theta} = a_1 + 2a_{11} \theta + 2a_{22} \varepsilon$$

su aditivne konstante koje imaju uticaja na njihovu promenu izmedju dva stanja pa je promena slobodne energije  $F$  i entropije  $S$

$$\begin{aligned} F &= \frac{E}{2} \varepsilon^2 - \alpha \theta E \varepsilon - c \theta^2 / 2T_0, \\ S &= \alpha E \varepsilon + c \theta / T_0, \end{aligned} \quad (1.38)$$

ili

$$F = \frac{E}{2} (\varepsilon - \alpha \theta)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{c}{T_0} + E \alpha^2 \right) \theta^2, \quad (1.39)$$

gde je  $c$  zapreminski toplotni kapacitet pri konstantnoj deformaciji.

Prvi član na desnoj strani izraza (1.39) predstavlja elastični potencijal

$$F^* = \frac{E}{2} (\varepsilon - \alpha \theta)^2 \quad (1.40)$$

dok drugi član nema uticaja na promenu napona, on utiče samo na primenu entropije. Stoga je

$$\frac{\partial F^*}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \sigma \quad (1.41)$$

pa će se često koristiti radi jednostavnijeg pisanja i izvodjenja pojedinih izraza.



Gibbsov termodinamički potencijal je s obzirom na (1.30)

$$-G = \frac{\sigma^2}{2E} + \alpha\theta \frac{\sigma}{E} + \frac{\theta^2}{2} \left( \frac{c}{T_0} + \alpha^2 E \right) \quad (1.42)$$

Na slučan način se može postupiti u slučaju prostornog stanja napona /36/, za koje je

$$F(\gamma_{ij}, \theta) = \frac{1}{2} E_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} - \theta E_{ijkl} \gamma_{ij} \alpha_{kl} - \frac{c}{2T_0} \theta^2, \quad (1.42)$$

$$S(\gamma_{ij}, \theta) = -E_{ijkl} \gamma_{ij} \alpha_{kl} - \frac{c}{T_0} \theta,$$

ili

$$F(\gamma_{ij}, \theta) = \frac{1}{2} E_{ijkl} (\gamma_{ij} - \alpha_{ij}\theta)(\gamma_{kl} - \alpha_{kl}\theta) - \frac{1}{2} \left( \frac{c}{T_0} + E_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl} \right) \theta^2 \quad (1.43)$$

$$F^*(\gamma_{ij}, \theta) = \frac{1}{2} E_{ijkl} (\gamma_{ij} - \alpha_{ij}\theta)(\gamma_{kl} - \alpha_{kl}\theta) \quad (1.44)$$

Gibbsov potencijal je

$$-G(\sigma_{ij}, \theta) = \frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \theta S_{ijkl} \sigma_{kl} \beta_{kl} - \frac{c}{2T_0} \theta^2 \quad (1.45)$$

$$S_{ijkl} \cdot E_{ijkl} = 1, \quad \beta_{kl} = E_{ijkl} \alpha_{kl} \quad (1.46)$$

$\alpha_{ij}$  i  $\beta_{ij}$  su simetrični tenzori drugog reda i označavaju specifičnu deformaciju i napon koji su nastali u telu zapremine  $dV$  usled promene temperature za  $\theta=1$ .

Za izotropno elastično telo je

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad \beta_{ij} = \beta \delta_{ij}$$

(  $\delta_{ij}$  su Kroneckerovi simboli )

Slobodna energija je

$$F(\delta_{ij}, \theta) = \mu (\delta_{ij} - \alpha\theta \delta_{ij})(\delta_{ij} - \alpha\theta \delta_{ij}) + \frac{\lambda}{2} (\delta_{kk} - 3\alpha\theta \delta_{kk})(\delta_{nn} - 3\alpha\theta \delta_{nn}) - \frac{1}{2} \left( \frac{c}{T_0} + \mu \alpha^2 \delta_{ij} \delta_{ij} + \frac{9}{2} \lambda \alpha^2 \delta_{kk} \delta_{nn} \right) \theta^2, \quad (1.47)$$

$$F^*(\delta_{ij}, \theta) = \mu (\delta_{ij} - \alpha\theta \delta_{ij})(\delta_{ij} - \alpha\theta \delta_{ij}) + \frac{\lambda}{2} (\delta_{kk} - 3\alpha\theta \delta_{kk})(\delta_{nn} - 3\alpha\theta \delta_{nn}), \quad (1.48)$$



gde su  $\lambda$  i  $\mu$  Laméove konstante.

Gibbsov termodinamički potencijal je

$$-G(\sigma_{ij}, \theta) = \bar{\mu}' \sigma_{ij} \sigma_{ij} + \frac{\bar{\lambda}}{2} \sigma_{kk} \sigma_{kk} + \alpha \theta \sigma_{kk} \quad (1.49)$$

gde su

$$\bar{\mu} = \frac{1}{4\mu}, \quad \bar{\lambda} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \quad (1.50)$$

Veza između napona i deformacija dobija se prema izrazima (1.35)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu \delta_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \beta \theta \delta_{ij} \\ \delta_{ij} &= 2\bar{\mu} \sigma_{ij} + \bar{\lambda} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha \theta \delta_{ij} \\ \beta &= \alpha(2\mu + 3\lambda) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Između Laméovih konstanti  $\lambda$  i  $\mu$  i Youngovog modula elastičnosti  $E$  i Poissonovog koeficijenta postoje sledeće relacije

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

### 1.7 Tela sa složenim reološkim modelom

Da bi se neko deformabilno telo moglo analizirati kao termodinamički sistem potrebno je imati njegov reološki model. Reološka svojstva realnih materijala koji se u tehničkoj praksi upotrebljavaju su fenomenološki složena pa su i njihovi modeli sastavljeni od međjusobno povezanih prostih elemenata kojima se prikazuju elastična, viskozna i plastična svojstva. Ako reološki model takvog tela sadrži reverzibilnih (elastičnih) i ireverzibilnih (viskoznih i plastičnih) elemenata, onda je u izotermičkom i adijabatskom procesu, prema (1.28)



$$dF = \sum_{l=1}^n \sigma_{ij}^{(r)l} d\delta_{ij}^{(r)l} + \sum_{k=1}^m \sigma_{ij}^{(i)k} d\delta_{ij}^{(i)k} - TdS_{(i)}$$

gde su  $\sigma_{ij}^{(r)l}$  i  $\delta_{ij}^{(r)l}$  tenzor napona i deformacija u  $l$ -tom, reverzibilnom, a  $\sigma_{ij}^{(i)k}$  i  $\delta_{ij}^{(i)k}$  tenzor napona i deformacije u  $k$ -tom ireverzibilnom elementu.

Pošto je slobodna energija aditivna funkcija, a njena promena u ovakvim procesima jednaka priraštaju elastičnog potencijala tela, to je

$$dF = \sum_l \sigma_{ij}^{(r)l} d\delta_{ij}^{(r)l}$$

$$TdS_{(i)} = dQ' = \sum_k \sigma_{ij}^{(i)k} d\delta_{ij}^{(i)k}$$

Sav rad koji se utroši na nepovratnim deformacijama povećava entropiju sistema  $S_{(i)}$  odnosno tzv. n e k o m p e n z o v a n u toplotu  $Q'$  tela /70/. Ovaj rad se naziva i r a d o m d i s i p a c i j e, i određuje veličinu disipacije (gubitka) energije u termodinamičkom procesu, koja je uvek, s obzirom na Drugi zakon termodinamike (1.26), nenegativna veličina

$$dQ' \geq 0$$

Veličine  $U$ ,  $W$ ,  $Q$  i  $S$  koje se nazivaju konstitutivnim veličinama /35/ odnosno iz njih izvedene veličine  $F$  i  $G$  za mnoge materijale sa složenim reološkim modelima, zavise u posmatranom sadašnjem trenutku vremena  $t$ , od vrednosti koje parametri stanja  $\chi_i$  uzimaju u toku termodinamičkog procesa. Ako su  $\chi_i$  kvadratno integralne funkcije, tj. ako postoji konačna vrednost Lesbegueovog integrala

$$\int_{-\infty}^t \chi_i^2(\tau) d\tau \quad \tau \in (-\infty, t]$$

onda ove funkcije pripadaju Lesbegueovom funkcionalnom prostoru  $L_2$  /64/.

Ako vrednost parametra stanja  $\chi_i(\tau)$  materijala u nekom ranijem trenutku vremena  $\tau$  utiče na konstitutivne termodinamičke veličine u sadašnjem trenutku vremena  $t$ , tako da su

$$U = U(t-\tau), \quad S = S(t-\tau), \quad F = F(t-\tau), \quad G = G(t-\tau) \quad (1.53)$$



onda taj materijal ima svojstvo pamćenja /7/ (m a t e r i j a l s a p a m ć e n j e m). Ako su

$$U=U(t-\tau, \tau), S=S(t-\tau, \tau), F=F(t-\tau, \tau), G=G(t-\tau, \tau) \quad (1.54)$$

onda materijal pored pamćenja ima još i svojstvo s t a r e n j a. Klasi takvih materijala pripada i beton. Uticaj parametara stanja u intervalu  $(-\infty, t_1]$ , pri čemu je  $t_1$  unapred izabrana vrednost, se za najveći broj materijala zanemaruje tako da

$$\tau \in [t_1, t]$$

a za materijale koji imaju samo svojstvo pamćenja najčešće se uzima  $t_1=0$ .

Pošto poznatim parametrima stanja  $\chi_i(\tau)$ , kao funkcijama koje pripadaju linearnom prostoru  $L_2$  nad skupom realnih brojeva  $[t_1, t]$  odgovara za svako  $t$  numerička vrednost funkcija stanja  $U(t)$ ,  $S(t)$ ,  $F(t)$  i  $G(t)$ , onda su one l i n e a r n i f u n k c i o n a l i /64/.

Prilikom određivanja ovih funkcionala i veza između napona i deformacija za različite reološke modele materijala obeležavajuće se sa  $\xi$  i  $\sigma$ , ukoliko to ne bude drugačije naznačeno, ili sverni ili devijatorski deo tenzora deformacije i napona. Dobijeni izrazi biće stoga opšti i zavisno od izbora konstanta odnosiće se posebno na sverni i devijatorski deo ovih tenzora i njihovih međusobnih veza. Tako će  $E'$  označavati trostruku vrednost modula kompresije  $K$  kada se radi o svernom delu, i dvostruku vrednost modula klizanja  $\bar{G}$  kada se radi o devijatorskom delu tenzora napona i deformacija, dok će za jednoak-sialno stanje napona predstavljati Youngov modul elastičnosti  $E$ .



Sk. 1.2

### 1.71 Maxwellovo telo

Reološki model ovog tela (sk 1.2) sastoji se od redno vezanih Hookeovog (elastičnog) elementa H i Newtonovog (viskozno) elementa N. Ukupna deformacija je

$$\xi = \xi_H + \xi_N, \quad \xi_H = \frac{\sigma}{E} + \alpha \theta, \quad (1.55)$$

$$\sigma_H = \sigma_N = \sigma, \quad \sigma_N = \mu' \dot{\xi}_N \quad (1.56)$$



gde su  $\varepsilon_H$ ,  $\sigma_H$ ,  $\varepsilon_N$  i  $\sigma_N$  deformacije i naponi elastičnog i viskoznog elementa, a  $\mu'$  koeficijent viskoznosti.

Slobodna energija je

$$F(\varepsilon_H, \theta) = \frac{E'}{2} \varepsilon_H^2 - \alpha \theta E' \varepsilon_H - \frac{C}{2T_0} \theta^2$$

Da bi se moglo odrediti stanje sistema u termodinamičkom procesu koji nije u potpunosti reverzibilan zbog postojanja viskoznog elementa uvodi se dopunska unutrašnja promenljiva stanja

$$\xi = \varepsilon_N$$

tako da je slobodna energija, s obzirom na (1.55)

$$F(\varepsilon, \varepsilon_N, \theta) = \frac{E'}{2} (\varepsilon^2 - 2\varepsilon\varepsilon_N + \varepsilon_N^2) - \alpha \theta E' (\varepsilon - \varepsilon_N) - \frac{C}{2T_0} \theta^2. \quad (1.57)$$

Disipacija energije je prema (1.29) i (1.51)

$$-\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_N} d\varepsilon_N = \sigma_N d\varepsilon_N$$

odnosno uzimajući u obzir (1.56)

$$\dot{\varepsilon}_N + \omega \varepsilon_N = \omega \varepsilon - \omega \alpha \theta, \quad \omega = E'/\mu' \quad (1.58)$$

Partikularno rešenje ove diferencijalne jednačine, za početni uslov  $t=0$ ,  $\varepsilon_N=0$ , je

$$\varepsilon_N(t) = \omega \int_0^t e^{-\omega(t-\tau)} [\varepsilon(\tau) - \alpha \theta(\tau)] d\tau \quad (1.59)$$

Deformacija elastičnog elementa je prema (1.55)

$$\varepsilon_H(t) = \varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau) [\varepsilon(\tau) - \alpha \theta(\tau)] d\tau \quad (1.60)$$

gde je

$$R(t-\tau) = \omega e^{-\omega(t-\tau)} \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} F(\varepsilon, \theta) = & \frac{E'}{2} \varepsilon^2(t) - E' \varepsilon(t) \int_0^t R(t-\tau) [\varepsilon(\tau) - \alpha \theta(\tau)] d\tau - \\ & - \alpha \theta E' \varepsilon(t) + \alpha \theta E' \int_0^t R(t-\tau) [\varepsilon(\tau) - \alpha \theta(\tau)] d\tau + \\ & + \frac{E'}{2} \int_0^t \int_0^t R(t-\tau) R(t-\eta) [\varepsilon(\tau) - \alpha \theta(\tau)] [\varepsilon(\eta) - \alpha \theta(\eta)] d\tau d\eta - \\ & - \frac{C}{2T_0} \theta^2 - \alpha^2 \theta^2 E'. \end{aligned} \quad (1.61a)$$



Napon  $\sigma$  je prema (1.29) i (1.57)

$$\sigma = \frac{\partial F(\varepsilon, \varepsilon_N, \theta)}{\partial \varepsilon} = E' [\varepsilon(t) - \varepsilon_N(t)] - \alpha E' \theta$$

odnosno s obzirom na (1.59) i (1.61)

$$\sigma(t) = E' \left[ \varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau - E' \alpha \left[ \theta(t) - \int_0^t R(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \right] \right] \quad (1.62)$$

Gibbsov termodinamički potencijal je prema (1.30), (1.55) i (1.56)

$$-G(\sigma, \varepsilon_N, \theta) = \frac{\sigma^2}{2E'} + \sigma \varepsilon_N + \alpha \sigma \theta + \left( \frac{c}{T_0} + \alpha^2 E' \right) \frac{\theta^2}{2} \quad (1.63)$$

Deformacija  $\varepsilon(t)$  je s obzirom na (1.33)

$$\varepsilon(t) = - \frac{\partial G(\sigma, \varepsilon_N, \theta)}{\partial \sigma} = \frac{\sigma(t)}{E'} + \varepsilon_N(t) + \alpha \theta(t),$$

odnosno

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E'} + \frac{\omega}{E'} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau + \alpha \theta(t), \quad (1.64)$$

pošto je prema (1.56) i (1.58)

$$\varepsilon_N(t) = \frac{\omega}{E'} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau. \quad (1.65)$$

Izrazi (1.62) i (1.64), koji predstavljaju matematičke veze između napona i deformacija za telo sa Maxwellovim reološkim modelom, mogu se dobiti i na drugi način /46/ kao partikularni integrali diferencijalne jednačine

$$\dot{\sigma}(t) + \omega \sigma(t) = E' \dot{\varepsilon}(t) - E' \alpha \dot{\theta}(t).$$

Ako je reološki model nekog tela sastavljen od paralelno vezanih Maxwellovih modela, onda za svaki Maxwellov model  $i$  važi izraz (1.58)

$$\dot{\varepsilon}_{Ni} + \omega_i \varepsilon_{Ni} = \omega_i \varepsilon - \omega_i \alpha \dot{\theta}; \quad \omega_i = E_i / \mu_i.$$

(ne vrši se sumiranje po  $i$ .)

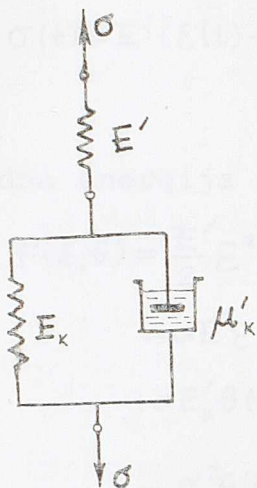
U ovom slučaju su

$$E' = \sum_i^n E'_i, \quad R(t-\tau) = \sum_i^n \frac{E'_i}{E'} \omega_i e^{-\omega_i(t-\tau)} \quad (1.66)$$



1.72 Viskoelastično H-K telo

Reološki model ovog tela (sk. 1.4) sastoji se od Hookeovog i Kelvinovog tela vezanih u red, tako da su



Sk. 1.4

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_K, \quad (1.67)$$

$$\varepsilon_H = \frac{\sigma}{E'} + \alpha\theta,$$

$$\sigma = E'_K \varepsilon_K + \mu'_K \dot{\varepsilon}_K, \quad \sigma = \sigma_{KH} + \sigma_{KN} \quad (1.68)$$

$\varepsilon_H$  i  $\varepsilon_K$  su odgovarajuće deformacije Hookeovog i Kelvinovog modela, dok su  $\sigma_{KH}$  i  $\sigma_{KN}$  naponi u elastičnom i viskoznom elementu Kelvinovog modela.

Dopunski unutrašnji parametar stanja je  $\zeta = \varepsilon_K$ , pa je slobodna energija

$$F(\varepsilon, \varepsilon_K, \theta) = \frac{E'}{2} (\varepsilon - \varepsilon_K)^2 - \alpha\theta E' (\varepsilon - \varepsilon_K) + \frac{E'_K}{2} \varepsilon_K^2 - \frac{c}{2T_0} \theta^2 \quad (1.69)$$

Disipacija energije je prema (1.29) i (1.51)

$$-\frac{\partial F(\varepsilon, \varepsilon_K, \theta)}{\partial \varepsilon_K} d\varepsilon_K = \sigma_{KN} d\varepsilon_K$$

odakle se dobija diferencijalna jednačina uzimajući u obzir (1.68)

$$\dot{\varepsilon}_K + \omega \varepsilon_K = \bar{\omega} (\varepsilon - \alpha\theta)$$

$$\omega = \frac{E' + E'_K}{\mu'_K}, \quad \bar{\omega} = \frac{E'}{\mu'_K} \quad (1.70)$$

čije je partikularno rešenje za početni uslov  $t=0$ ,  $\varepsilon_K=0$

$$\varepsilon_K(t) = \int_0^t R(t-\tau) [\varepsilon(\tau) - \alpha\theta(\tau)] d\tau, \quad (1.71)$$

$$R(t-\tau) = \bar{\omega} e^{-\omega(t-\tau)} \quad (1.72)$$

Napon  $\sigma$  je prema (1.29) i (1.69)



$$\sigma = \frac{\partial F(\varepsilon, \varepsilon_k, \theta)}{\partial \varepsilon} = E'(\varepsilon - \varepsilon_k) - \alpha \theta E'$$

Kada se u ovaj izraz uvrsti (1.71) dobija se

$$\sigma(t) = E' \left[ \varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right] - E' \left[ \alpha \theta(t) - \int_0^t R(t-\tau) \alpha \theta(\tau) d\tau \right] \quad (1.73)$$

Slobodna energija je

$$\begin{aligned} F(\varepsilon, \theta) = & \frac{E'}{2} \varepsilon^2(t) - E' \varepsilon(t) \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau - \\ & - \alpha E' \varepsilon(t) + \alpha E' \int_0^t R(t-\tau) \theta(\tau) d\tau + \\ & + \alpha E' \theta(t) \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau - \\ & - \alpha^2 \theta(t) \int_0^t R(t-\tau) \theta(\tau) d\tau + \\ & + \frac{E' + E'_k}{2} \int_0^t \int_0^t R(t-\tau) R(t-\eta) [\varepsilon(\tau) - \alpha \theta(\tau)] [\varepsilon(\eta) - \alpha \theta(\eta)] d\tau d\eta - \\ & - \frac{c}{2T_0} \theta^2(t) \end{aligned} \quad (1.74)$$

Promena entropije je prema (1.29)

$$\begin{aligned} S(\varepsilon, \theta) = & - \frac{\partial F(\varepsilon, \theta)}{\partial \theta} = \alpha E' \varepsilon(t) - \alpha E' \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau + \\ & + \alpha^2 E' \int_0^t R(t-\tau) \theta(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Gibbsov termodinamički potencijal je prema (1.30), (1.67), (1.68) i (1.69)

$$\begin{aligned} -G(\sigma, \sigma_k, \theta) = & \frac{\sigma^2}{2E'} - \sigma \varepsilon_k - \sigma \alpha \theta - \left( \alpha^2 E' + \frac{c}{T_0} \right) \frac{\theta^2}{2} + \\ & + \frac{E'_k}{2} \varepsilon_k^2 \end{aligned} \quad (1.76)$$

pa je deformacija

$$\varepsilon = - \frac{\partial G(\sigma, \varepsilon_k, \theta)}{\partial \varepsilon_k} = \frac{\sigma}{E'} + \sigma \varepsilon_k + \alpha \theta.$$

Partikularno rešenje diferencijalne jednačine (1.68) za početni uslov  $t=0$ ,  $\varepsilon_k=0$

$$\varepsilon_k(t) = \frac{1}{\mu'_k} \int_0^t e^{-\bar{\gamma}(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau, \quad \bar{\gamma} = \frac{E'_k}{\mu'_k}.$$



pa je

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E'} + \frac{1}{E'} \int_0^t k(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau + \alpha \theta(t), \quad (1.77)$$

gde je

$$k(t-\tau) = \frac{E'}{\mu'_k} e^{-\bar{\gamma}(t-\tau)} = \frac{E'}{E'_k} \bar{\gamma} e^{-\bar{\gamma}(t-\tau)} \quad (1.78)$$

Jednačine (1.73) i (1.74) su Volterrine integralne jednačine druge vrste koje definišu veze između napona i deformacija za viskoelastično telo za ovaj reološki model. Funkcija  $k(t-\tau)$  je jezgro integralne jednačine (1.78), i naziva se i jezgro naslednosti, a  $R(t-\tau)$  njegova rezolventa naziva se i jezgro mrelaksacije /51/. U teoriji integralnih jednačina se pokazuje da između ovih funkcija postoji sledeća veza

$$K(t-\tau) = R(t-\tau) + \int_{\tau}^t k(t-\eta) R(\eta-\tau) d\eta \quad (1.79)$$

Jednačina (1.77) može se formirati i primenom Boltzmanovog principa superpozicije ili rešavajući reološki jednačinu stanja za ovaj model /46/

$$\dot{\varepsilon} + \bar{\gamma} \varepsilon = \frac{\dot{\sigma}}{E'} + \frac{\omega}{E'} \sigma + \bar{\gamma} \alpha \dot{\theta} + \alpha \dot{\theta}$$

Kada se u jednačinama (1.74) i (1.78) izvrši parcijalna integracija a uvedu funkcije

$$\begin{aligned} c(t-\tau) &= \frac{1}{E'} \int_0^t k(t-\tau) d\tau \\ \Lambda(t-\tau) &= \int_0^t R(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.79a)$$

onda se veze između napona i deformacija mogu pisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(t)}{E'} &= \varepsilon(0) - \int_0^t \Lambda(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau - \alpha \theta(0) + \alpha \int_0^t \Lambda(t-\tau) \frac{d\theta(\tau)}{d\tau} d\tau, \\ \varepsilon(t) &= \frac{\sigma(0)}{E'} + \int_0^t c(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau + \alpha \theta(t). \end{aligned} \quad (1.80)$$

$C(t-\tau)$  se naziva funkcijom tečenja (puzanja) ili specifičnim tečenjem, a  $R(t-\tau)$  funkcijom relaksacije.



Funkcija

$$\varphi(t-\tau) = E' C(t-\tau) \quad (1.81)$$

naziva se k o e f i c i j e n t o m tečenja (puzanja).

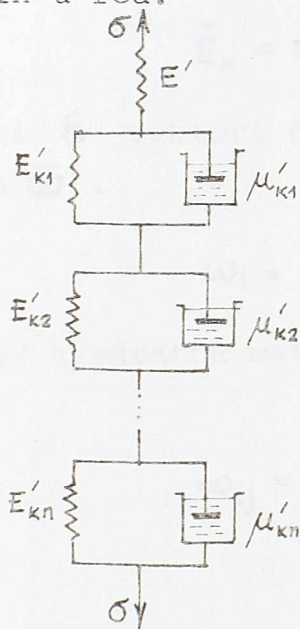
U ovom slučaju su

$$C(t-\tau) = \frac{1}{E_k} [1 - e^{-\bar{\delta}(t-\tau)}], \quad (1.82)$$

$$\varphi(t-\tau) = \frac{E_i'}{E_k} [1 - e^{-\bar{\delta}(t-\tau)}],$$

$$\Lambda(t-\tau) = \omega [1 - e^{-\omega(t-\tau)}].$$

Na sk. 1.5 je prikazan reološki model viskoelastičnog tela sastavljen od Hookeovog elastičnog elementa i  $n$  Kelvinovih elemenata vezanih u red.



Sk. 1.5

Dopunski unutrašnji parametri stanja su deformacije Kelvinovih elemenata  $\xi_i = \epsilon_{ki}$   $i = 1, 2, \dots, n$ ; tako da je

$$\epsilon = \epsilon_H + \sum_1^n \epsilon_{ki}$$

$$\epsilon_H = \frac{\sigma}{E'} + \alpha \theta \quad (1.83)$$

$$\sigma = \mu_{ki} \dot{\epsilon}_{ki} + E' \epsilon_{ki}$$

Slobodna energija je

$$F(\epsilon, \epsilon_{ki}, \theta) = \frac{E'}{2} (\epsilon - \sum_{i=1}^n \epsilon_{ki})^2 -$$

$$- \alpha \theta E' (\epsilon - \sum_{i=1}^n \epsilon_{ki}) + \sum_{i=1}^n E' \frac{\epsilon_{ki}^2}{2} -$$

$$- \frac{c \theta^2}{2 T_0} \quad (1.84)$$

dok je Gibbsov termodinamički potencijal prema (1.30) i (1.83) posle određivanja izraza

$$-G(\sigma, \epsilon_{ki}, \theta) = \frac{\sigma^2}{2E'} + \sum_{i=1}^n \sigma \epsilon_{ki} + \alpha \theta \sigma - \sum_{i=1}^n E'_{ki} \frac{\epsilon_{ki}^2}{2} +$$

$$+ (\alpha^2 E' + \frac{c}{T_0}) \frac{\theta^2}{2} \quad (1.85)$$

Deformacija je

$$\epsilon(t) = - \frac{\partial G(\sigma, \epsilon_{ki}, \theta)}{\partial \sigma} = \frac{\sigma}{E'} + \sum_{i=1}^n \sigma \epsilon_{ki} + \alpha \theta$$



$\epsilon_{ki}$  se dobija kao partikularno rešenje diferencijalne jednačine (1.81)

$$\epsilon_{ki}(t) = \frac{1}{\mu'_{ki}} \int_0^t e^{-\bar{\delta}_i(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau, \quad \bar{\delta}_i = \frac{E'_{ki}}{\mu'_{ki}}$$

pa važi integralna jednačina (1.77) čije je jezgro sada

$$K(t-\tau) = \sum_{i=1}^n \frac{E'_{ki}}{\mu'_{ki}} \bar{\delta}_i e^{-\bar{\delta}_i(t-\tau)} \quad (1.86)$$

Iz uslova (1.51) da rad na viskoznoj deformaciji predstavlja disipaciju energije Kelvinovog modela  $i$ , uzimajući u obzir (1.29), (1.83) i (1.84) dobija se sistem linearnih diferencijalnih jednačina napisan u matričnom obliku

$$\dot{\epsilon}_k = \omega \epsilon_k + (\epsilon - \alpha \theta) \bar{\omega}$$

$\dot{\epsilon}_k$  i  $\epsilon$  vektori čiji su elementi  $\dot{\epsilon}_{ki}$  i  $\epsilon_{ki}$ , dok su elementi vektora  $\bar{\omega}$ .

$$\omega_i = \frac{E'}{\mu'_{ki}} \quad (1.87)$$

$\omega$  je kvadratna matrica, čiji su elementi

$$\omega_{ij} = \begin{cases} -\frac{E' + E_{ki}}{\mu'_{ki}} & i = j \\ -\frac{E'}{\mu_{ki}} & i \neq j \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n \quad (1.88)$$

Partikularno rešenje ovog sistema linearnih diferencijalnih jednačina za početni (Cauchyev) uslov

$$t=0, \quad \epsilon_k = 0$$

napisano u matričnom obliku /68/ je

$$\epsilon_k = \int_0^t e^{\omega(t-\tau)} \bar{\omega}(\tau) d\tau, \quad (1.89a)$$

ili ako se matrična funkcija  $e^{\omega(t-\tau)}$  razvije u Taylorov red

$$\epsilon_k(t) = \int_0^t \left[ I + (t-\tau)\omega + \frac{(t-\tau)^2}{2!}\omega^2 + \dots + \frac{(t-\tau)^m}{m!}\omega^m \right] \bar{\omega}[\epsilon(\tau) - \alpha\theta(t)] d\tau \quad (1.89b)$$



gde je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica.

Deformacija Kelvinovog reološkog modela je stoga

$$\varepsilon_{ki}(t) = \int_0^t R_i(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau - \alpha \int_0^t R_i(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \quad (1.90)$$

$$R_i(t-\tau) = \bar{\omega}_i + (t-\tau) \sum_{j=1}^n [\omega_{ij} + \frac{(t-\tau)}{2!} \sum_{k_1}^n \omega_{ik_1} \omega_{k_1j}] + \dots + \frac{(t-\tau)^{m-1}}{m!} \sum_{k_1}^n \sum_{k_2}^n \dots \sum_{k_{m-1}}^n \omega_{ik_1} \omega_{k_1k_2} \dots \omega_{k_{m-2}k_{m-1}} \omega_{k_{m-1}j} \bar{\omega}_j \quad (1.91)$$

Napon  $\sigma$  je prema (1.29) i (1.82)

$$\sigma = \frac{\partial F(\varepsilon, \varepsilon_{ki}, \theta)}{\partial \varepsilon} = E' \left( \varepsilon - \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ki} \right) - E_H \alpha \theta$$

i kada se uvrsti (1.90) u ovaj izraz dobija se veza izmedju napona i deformacija u obliku Valterrine integralne jednačine (1.73), gde je sada

$$R(t-\tau) = \sum_{i=1}^n R_i(t-\tau). \quad (1.92)$$

Ako je poznato jezgro naslednosti  $K(t-\tau)$  onda se rezolventa  $R(t-\tau)$  može dobiti i na drugi način rešavanjem integralne jednačine (1.79)

Slobodna energije (1.82) za viskoelastično telo sa ovako složenim reološkim modelom je

$$F(\varepsilon, \varepsilon_{ki}, \theta) = F^*(\varepsilon, \varepsilon_{ki}, \theta) + F_0(\varepsilon_{ki}, \theta) \quad (1.93)$$

gde je

$$F^*(\varepsilon, \varepsilon_{ki}, \theta) = \frac{E'}{2} \left[ \varepsilon^2 - 2\varepsilon \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ki} \right] - \alpha \theta E' \varepsilon \quad (1.94)$$

$$F_0(\varepsilon_{ki}, \theta) = E' \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ki} \varepsilon_{kj} + \sum_{i=1}^n \frac{E' + E'_{ki}}{2} \varepsilon_{ki}^2 - \frac{c\theta^2}{2T_0}$$

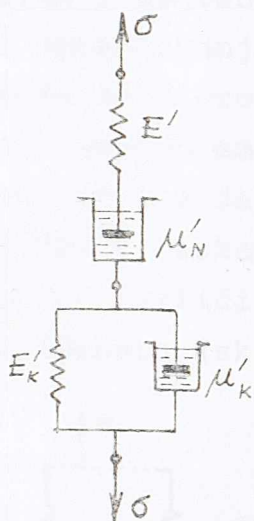
Pošto je

$$\frac{\partial F(\varepsilon, \varepsilon_{ki}, \theta)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F^*(\varepsilon, \varepsilon_{ki}, \theta)}{\partial \varepsilon} = \sigma \quad (1.95)$$

to će se funkcional  $F^*$  često koristiti dalje u ovom radu i radi kratkoće u pisanju slobodna energija uzimajući u obzir (1.90) i (1.92) prikazivati u obliku

$$F(\varepsilon, \theta) = \frac{E'}{2} \varepsilon^2(t) - E' \varepsilon(t) \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau - E' \left[ \alpha \theta(t) - \alpha \int_0^t R(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \right] + F_0 \quad (1.96)$$

### 1.73 Burgersovo viskoelastično telo



Sk. 1.6

Reološki model ovog tela (sk. 1.6) sastoji se od Hookeovog, Newtonovog i Kelvinovog reološkog modela redno vezanih. Ovaj reološki model postaje istovetan sa predhodnim reološkim modelom (sk. 1.5) ako se sa Hookovim elementom redno vežu dva Kelvinova reološka modela, tako da je

$$\begin{aligned} E_{k1}' &= 0, \quad \mu_{k1}' = \mu_N \\ E_{k2}' &= E_k', \quad \mu_{k2}' = \mu_k' \end{aligned} \quad (1.97)$$

pa ostaju u važnosti ovi izrazi izvedeni u predhodnom odeljku. Pošto je za ovaj reološki model, s obzirom na (1.84) i (1.97)

$$\bar{\gamma}_1 = 0, \quad \bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma} = \frac{E_k'}{\mu_k'} \quad (1.98)$$

onda je jezgro naslednosti, prema (1.85)

$$k(t-\tau) = \frac{E'}{\mu_N'} + \frac{E_k'}{\mu_k'} \bar{\gamma} e^{-\bar{\gamma}(t-\tau)} \quad (1.99)$$

dok je njegova rezolventa (jezgro relaksacije)

$$R(t-\tau) = \frac{1}{r_1 - r_2} \left[ r_1 (r_1 + \bar{\gamma}) e^{r_1(t-\tau)} - r_2 (r_2 + \bar{\gamma}) e^{r_2(t-\tau)} \right] \quad (1.100)$$

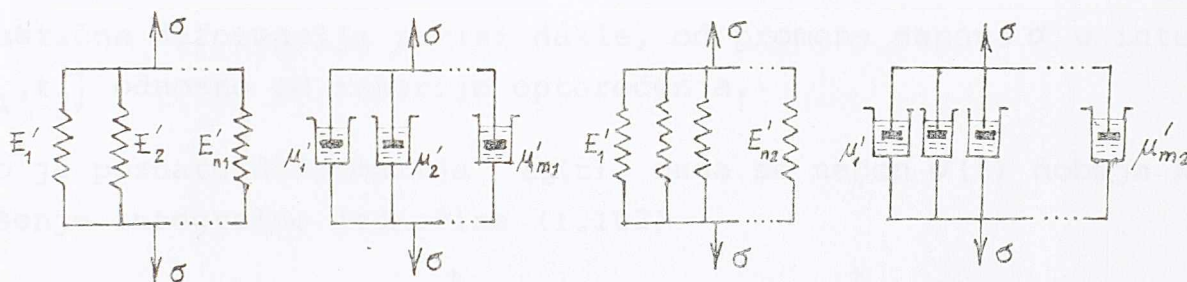
gde su

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -\frac{1}{2}(\bar{\gamma} + \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \pm \left[ \frac{1}{4}(\bar{\gamma} + \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2)^2 - \bar{\gamma}\bar{\omega}_1 \right]^{1/2} \\ \omega_1 &= E'/\mu_N', \quad \omega_2 = E'/\mu_k'. \end{aligned} \quad (1.101)$$



### 1.8 Tela čija se reološka svojstva menjaju tokom vremena

Reološka svojstva betona i nekih drugih materijala se tokom vremena menjaju, pa se Youngov modul elastičnosti, Poissonov koeficijent, i koeficijent viskoznosti ne mogu smatrati konstantama nego funkcijama vremena. Ove promene nastaju u betonu zbog toga što se u procesu hidratacije cementa stvaraju tokom vremena nove veze između čestica cementnog gela odnosno gela i zrna agregata. Ovaj proces je kontinualan i najveći deo se obavi u toku prvih 28 dana posle spravljanja i ugradjivanja betona kada se smatra da je beton postigao svojstva koja se u projektima najčešće zahtevaju. Kasnije se brzina ovih promena znatno smanjuje, pa se često radi pojednostavljivanja proračuna, smatra da se elastična svojstva betona dalje ne menjaju. Elastična i viskozna svojstva u različitim vremenima  $t_1$  i  $t_2$  mogu prikazati različitim brojem paralelno vezanih elastičnih i viskoznih elemenata (sk. 1.7).



Sk. 1.7

Iz uslova paralelnosti elastičnih odnosno viskoznih elemenata dobijaju se računске vrednosti  $E'(t_i)$  i  $\mu'(t_i)$

$$E'(t_i) = \sum_{k=1}^{n_i} E'_k$$

$$\mu'(t_i) = \sum_{k=1}^{m_i} \mu'_k$$

Pošto je  $E'(t_2) > E'(t_1)$ , to će jedan deo elastične deformacije nastale usled delovanja konstantnog napona  $\sigma$  od trenutka vremena  $t_1$ , posle rasterećenja u vremenu  $t_2$  ostati nepovratan. U termodinamičkom smislu ova nepovratnost nije nastala usled pretvaranja rada spolinih sila u toplotu odnosno povećanja unutrašnje entropije sistema. U intervalu vremena  $(t_1, t_2)$  u materijalu su nastale nove elastične veze u kojima nema nakupljene energije usled dejstva napona  $\sigma$ .

Medjutim, posle rasterećenja, jedan deo energije iz elastičnih veza koje su postojale do apliciranja napona prelazi u novostvorene veze sve dok se ne uspostavi termodinamička ravnoteža, pa zbog toga jedan deo elastične deformacije  $\varepsilon_H(t_1)$  ostaje fizički nepovratan.

Ako su  $\dot{E}(\tau)$  i  $\sigma(\tau)$  u intervalu vremena  $[t_1, t_2]$  neprekidne funkcije onda je za elastično (Hookeovo) telo

$$\varepsilon_H(t) = \frac{\sigma(t_1)}{E'(t_1)} + \int_{t_1}^t \frac{1}{E'(\tau)} \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau + \alpha\theta(t),$$

ili kada se izvrši parcijalna integracija

$$\varepsilon_H(t) = \frac{\sigma(t)}{E'(t)} + \int_{t_1}^t \frac{\sigma(\tau)}{E'(\tau)} k(\tau) d\tau + \alpha\theta(t), \quad (1.102)$$

gde je

$$k(\tau) = \frac{1}{E'(\tau)} \frac{dE'(\tau)}{d\tau} \quad (1.103)$$

Elastična deformacija zavisi dakle, od promene napona  $\sigma$  u intervalu  $[t_1, t_2]$  odnosno od istorije opterećenja.

Ako je poznata deformacija  $\varepsilon_H(t)$ , onda se napon  $\sigma(t)$  dobija kao rešenje integralne jednačine (1.102)

$$\frac{\sigma(t)}{E'(t)} = \varepsilon_H(t) - \int_{t_1}^t r(t, \tau) \varepsilon_H(\tau) d\tau - \alpha\theta(t) + \alpha \int_{t_1}^t r(t, \tau) \theta(\tau) d\tau, \quad (1.104)$$

pri čemu je slično kao u (1.79)

$$F(t, \tau) = k(\tau) - \int_{\tau}^t k(\eta) r(\eta, \tau) d\eta \quad (1.105)$$

ili

$$\frac{dr(t, \tau)}{dt} = -k(t)r(t, \tau)$$

Pošto je za  $t=\tau$   $r(t, \tau) = k(\tau)$  onda je sobzirom na (1.103)

$$r(t, \tau) = k(\tau) e^{-\int_{\tau}^t k(\tau) d\tau} = \frac{1}{E'(t)} \frac{dE'(\tau)}{d\tau} \quad (1.106)$$

Promene reoloških svojstava betona odvijaju se u normalnim uslovima kontinualno tokom vremena, pa se za rešavanje različitih problema reologije betona uvodi jedna neprekidna funkcija vremena



$$\xi_t = \xi(t) \quad (1.107)$$

koja se koristi za izražavanje elastičnih i viskoznih svojstava

$$\begin{aligned} E'(t) &= E'_t = E'(\xi_t), \\ \mu'(t) &= \mu'_t = \mu'(\xi_t). \end{aligned} \quad (1.108)$$

J.H. Argiris, K.S. Pister i K.J. Willam /3/ ovu funkciju nazivaju "efektivnim vremenom" (effective time) i za rešavanje nekih specifičnih problema, kao što je naprimer analiza stanja napona i deformacija nuklearnih reaktora, usvajaju da su reološka svojstva zavisna od temperature.

U literaturi se mogu naći različiti obrasci kojima se definiše promena modula elastičnosti tokom vremena. U najopštijem slučaju se može pisati

$$\Xi(t) = E_0 f_E(t, t_0) \quad (1.109)$$

gde je  $E_0$  veličina modula elastičnosti pri određenoj starosti betona  $t_0$ . I.I. Ulickii /71/ je predložio sledeće izraze

$$f_E(t) = 1 + k_1(\xi_t - \xi_{t_0}) \quad (1.110)$$

$$f_E(t) = \frac{1}{1 - k_2(\xi_t - \xi_{t_0})} \quad (1.110a)$$

gde su  $k_1$  i  $k_2$  konstante koje se određuju eksperimentalno.

Kada se funkcional  $F(\xi, \theta)$  za elastično telo sa promenljivim svojstvima tokom vremena razvije u Taylorov red, dobija se

$$\begin{aligned} F(\xi, \theta) &= a_0 + a_1 \left[ \theta(t) - \int_{t_1}^t r(t, \tau) \theta(\tau) d\tau \right] + a_2 \left[ \xi(t) - \int_{t_1}^t r(t, \tau) \xi(\tau) d\tau \right] + \\ &+ a_{11} \left[ -\theta^2(t) - 2\theta(t) \int_{t_1}^t r(t, \tau) \theta(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t \int_{t_1}^t r(t, \tau) r(t, \eta) \theta(\tau) \theta(\eta) d\tau d\eta \right] + \\ &+ a_{12} \left[ \theta(t) \xi(t) - \theta(t) \int_{t_1}^t r(t, \tau) \xi(\tau) d\tau - \xi(t) \int_{t_1}^t r(t, \tau) \theta(\tau) d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_{t_1}^t \int_{t_1}^t r(t, \tau) r(t, \eta) \theta(\tau) \xi(\eta) d\tau d\eta \right] + a_{22} \left[ \xi^2(t) - \right. \\ &- \left. 2\xi(t) \int_{t_1}^t r(t, \tau) \xi(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t \int_{t_1}^t r(t, \tau) r(t, \eta) \xi(\tau) \xi(\eta) d\tau d\eta \right] \end{aligned}$$

dobija se, vodeći računa o izrazu (1.104), na sličan način kao u odeljku 1.6

$$a_{22} = 0, \quad a_{22} = \frac{E'(t)}{2}, \quad a_{12} = -\alpha E'(t), \quad a_{11} = -\frac{c}{2T_0}$$

dok su  $a_0$  i  $a_1$  aditivne vrednosti koje nemaju uticaja na promenu slobodne energije i entropije, pa se radi jednostavnosti u pisanju izostavljaju  
Slobodna energija je

$$F(\varepsilon, \theta) = F^*(\varepsilon, \theta) + F^0(\varepsilon, \theta) \quad (1.111)$$

gde su

$$F^*(\varepsilon, \theta) = \frac{E'(t)}{2} \left[ \varepsilon^2(t) - 2\varepsilon(t) \int_{t_1}^t r(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right] - \alpha E'(t) \left[ \varepsilon(t) \theta(t) - \varepsilon(t) \int_{t_1}^t r(t, \tau) \theta(\tau) d\tau \right] \quad (1.112)$$

$$F^0(\varepsilon, \theta) = \frac{E'(t)}{2} \int_{t_1}^t \int_{t_1}^t r(t, \tau) r(t, \eta) \varepsilon(\tau) \varepsilon(\eta) d\tau d\eta + \alpha E'(t) \left[ \theta(t) \int_{t_1}^t r(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau - \right. \quad (1.113)$$

$$\left. - \int_{t_1}^t \int_{t_1}^t r(t, \tau) r(t, \eta) \theta(\tau) \varepsilon(\eta) d\tau d\eta \right] - \frac{c}{2T_0} [\theta^2(t) -$$

$$- 2\theta(t) \int_{t_1}^t r(t, \tau) \theta(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t \int_{t_1}^t r(t, \tau) r(t, \eta) \theta(\tau) \theta(\eta) d\tau d\eta]$$

tako da je

$$\frac{\partial F(\varepsilon, \theta)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F^*(\varepsilon, \theta)}{\partial \varepsilon} = \sigma, \quad \frac{\partial F^0(\varepsilon, \theta)}{\partial \varepsilon} = 0. \quad (1.114)$$

Kada se (1.102), (1.112) i (1.113) uvrste u (1.30) dobija se posle sredjivanja izraz za Gibbsov termodinamički potencijal

$$G(\sigma, \theta) = G^*(\sigma, \theta) + G^0(\sigma, \theta) \quad (1.116)$$

gde su

$$G^*(\sigma, \theta) = -\frac{\sigma(t)}{E'(t)} - \sigma(t) \int_{t_1}^t k(\tau) \frac{\sigma(\tau)}{E'(\tau)} d\tau - \alpha \theta(t) \sigma(t), \quad (1.117)$$

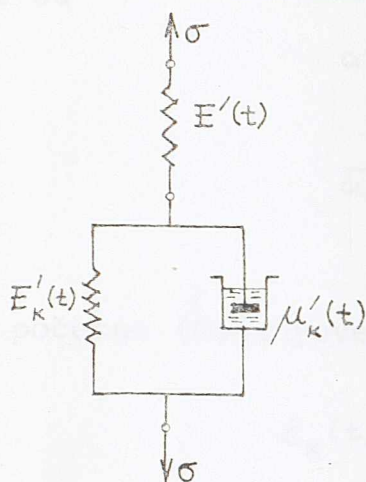
$$G^0(\sigma, \theta) = -\left[ \frac{c}{T_0} + \alpha^2 E'(t) \right] \left[ \frac{\theta^2(t)}{2} - \theta(t) \int_{t_1}^t r(t, \tau) \theta(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t \int_{t_1}^t r(t, \tau) r(t, \eta) \theta(\tau) \theta(\eta) d\tau d\eta \right] \quad (1.118)$$



Entropija je, prema (1.29)

$$S(\varepsilon, \theta) = \alpha E'(t) \left[ \varepsilon(t) - \int_{t_1}^t r(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right] + \frac{c}{T_0} \left[ \theta(t) - \int_{t_1}^t r(t, \tau) \theta(\tau) d\tau \right] \quad (1.119)$$

1.81 K-H telo sa promenljivim reološkim svojstvima



Sk. 1.8

Slobodna energija za K-H telo sa promenljivim reološkim svojstvima (sk. 1.8) je prema (1.67), (1.111) i (1.112)

$$\begin{aligned} F(\varepsilon, \varepsilon_k, \theta) = & \frac{E'(t)}{2} [\varepsilon(t) - \varepsilon_k(t)]^2 - \\ & - E'(t) [\varepsilon(t) - \varepsilon_k(t)] \int_{t_1}^t r(t, \tau) [\varepsilon(\tau) - \varepsilon_k(\tau)] d\tau - \\ & - \alpha E'(t) [\varepsilon(t) - \varepsilon_k(t)] \theta(t) + \alpha E'(t) [\varepsilon(t) - \\ & - \varepsilon_k(t)] \int_{t_1}^t r(t, \tau) \theta(\tau) d\tau + E_K(t) \frac{\varepsilon_k^2(t)}{2} - \\ & - E_K(t) \int_{t_1}^t r_k(t, \tau) \varepsilon_k(\tau) d\tau + F^0 \end{aligned} \quad (1.120)$$

gde su  $r(t, \tau)$  i  $r_k(t, \tau)$  odgovarajuće funkcije (1.106) za elastične elemente u Hookeovom i Kelvinovom reološkom modelu.

Iz uslova (1.29) i (1.51) da rad na viskoznoj deformaciji predstavlja energiju disipacije

$$\frac{\partial F(\varepsilon, \varepsilon_k, \theta)}{\partial \varepsilon_k} = -\mu_K'(t) \dot{\varepsilon}_k(t)$$

dobija se posle sredjivanja integro-diferencijalna jednačina

$$\begin{aligned} E'(t) \int_{t_1}^t r(t, \tau) \varepsilon_e(\tau) d\tau - E_K'(t) \int_{t_1}^t r_k(t, \tau) \varepsilon_k(\tau) d\tau = \\ = E'(t) \varepsilon_e(t) - E_K'(t) \varepsilon_k(t) - \mu_K'(t) \dot{\varepsilon}_k(t), \end{aligned} \quad (1.121)$$

gde je

$$\varepsilon_e(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_k(t) - \alpha \theta(t) \quad (1.122)$$

elastična deformacija Hookeovog elementa.

Diferenciranjem jednačine (1.121) po vremenu  $t$ , uzimajući u obzir (1.106) i (1.122) dobija se linearna diferencijalna jednačina sa promenljivim koeficijentima

$$\frac{d^2 \varepsilon_k}{dt^2} + \omega(t) \frac{d\varepsilon_k}{dt} = \bar{\omega}(t) \frac{d}{dt} [\varepsilon(t) - \alpha \theta(t)], \quad (1.123)$$

gde su

$$\omega(t) = \frac{E'(t) + E'_k(t) + \mu'_k(t)}{\mu'_k(t)}, \quad (1.124)$$

$$\bar{\omega}(t) = \frac{E'(t)}{\mu'(t)}.$$

Za početne (Coushyeve) uslove  $t = t_1$

$$\varepsilon_k(t_1) = 0, \quad \dot{\varepsilon}_k(t_1) = \dot{\varepsilon}(t_1)$$

rešenje diferencijalne jednačine se može prikazati u obliku /13/

$$\varepsilon_k(t) = \int_{t_1}^t R_1(t, \tau) [\varepsilon(\tau) - \alpha \theta(\tau)] d\tau. \quad (1.125)$$

U najopštijem slučaju promene reoloških svojstava betona, nije moguće odrediti eksplicitno izraz za funkciju  $R_1(t, \tau)$ .

Kada se (1.125) uvrsti u (1.120) dobija se posle sredjivanja

$$F(\varepsilon, \theta) = F^*(\varepsilon, \theta) + F^0$$

$$F^*(\varepsilon, \theta) = \frac{E'(t)}{2} \varepsilon^2(t) - E'(t) \varepsilon(t) \int_{t_1}^t R(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau - E'(t) \varepsilon(t) \alpha \theta(t) + E'(t) \varepsilon(t) \alpha \int_{t_1}^t R(t, \tau) \theta(\tau) d\tau. \quad (1.126)$$

gde je

$$\frac{\partial F(\varepsilon, \theta)}{\partial \varepsilon(t)} = \frac{\partial F^*(\varepsilon, \theta)}{\partial \varepsilon(t)} = \sigma(t), \quad \frac{\partial F^0}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (1.127)$$

$$R(t, \tau) = R_1(t, \tau) + \int_{\tau}^t r(\eta, \tau) d\eta + r(t, \tau) \quad (1.127a)$$



Za Kelvinov reološki model, s obzirom na (1.104) je veza između ukupnog napona  $\sigma(t)$  i deformacije  $\varepsilon(t)$

$$\sigma(t) = E_k(t) \left[ \varepsilon_k(t) - \int_{t_1}^t r_k(t, \tau) \varepsilon_k(\tau) d\tau \right] + \mu_k(t) \dot{\varepsilon}_k(t) \quad (1.128)$$

odnosno posle diferenciranja po vremenu  $t$

$$\ddot{\varepsilon}_k + \omega_k(t) \dot{\varepsilon}_k = \frac{\dot{\sigma}}{\mu_k(t)} \quad (1.129)$$

$$\omega_k(t) = \frac{E_k(t) + \dot{\mu}_k(t)}{\mu_k(t)} \quad (1.129a)$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine, s obzirom na početne uslove

$$t=t_1, \quad \varepsilon_k=0, \quad \dot{\varepsilon}_k = \sigma(t_1)/\mu_k(t_1),$$

može se pisati /67/

$$\varepsilon_k(t) = \int_{t_1}^t K_k(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau,$$

ili

$$\varepsilon_k(t) = \int_{t_1}^t K_1(t, \tau) \frac{\sigma(\tau)}{E'(\tau)} d\tau, \quad (1.130)$$

gde je

$$K_1(t, \tau) = E'(\tau) K_k(t, \tau). \quad (1.131)$$

Funkcije  $K_k(t, \tau)$  odnosno  $K_1(t, \tau)$  ne mogu se eksplicitno izraziti za najopštiji slučaj promene reoloških svojstava.

Kada se (1.120) uvrsti u (1.30) uzimajući u obzir (1.104), (1.116), (1.117) i (1.130) dobija se izraz za Gibbsov termodinamički potencijal

$$G(\sigma, \varepsilon_k, \theta) = G^*(\sigma, \theta) + \bar{G}^\circ(\varepsilon_k, \theta) \quad (1.132)$$

gde su

$$\begin{aligned}
 -G^*(\sigma, \theta) &= \frac{\sigma^2(t)}{2E'(t)} + \sigma(t) \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\sigma(\tau)}{E'(\tau)} d\tau + \sigma(t) \alpha \theta(t), \\
 -\bar{G}^0(\varepsilon_k, \theta) &= G^0(\theta) + \frac{E'_k(t)}{2} \left[ \varepsilon_k^2(t) - 2\varepsilon_k(t) \int_{t_1}^t r_k(t, \tau) \varepsilon_k(\tau) d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_1}^t \int_{t_1}^t r_k(t, \tau) r_k(t, \eta) \varepsilon_k(\tau) \varepsilon_k(\eta) d\tau d\eta \right] \quad (1.133)
 \end{aligned}$$

$$K(t, \tau) = k(\tau) + K_1(t, \tau). \quad (1.134)$$

$G^0(\theta)$  je odgovarajući deo Gibbsovog termodinamičkog potencijala dat izrazom (1.118). S obzirom na (1.130) parcijalni izvod je

$$\frac{\partial G^*(\sigma, \theta)}{\partial \sigma} = \frac{\partial G(\sigma, \varepsilon_k, \theta)}{\partial \sigma} = \varepsilon(t), \quad \frac{\partial \bar{G}^0(\varepsilon_k, \theta)}{\partial \sigma} = 0. \quad (1.135)$$

Veza između napona i deformacija u obliku Volterrinih integralnih jednačina, dobijaju se kao i za viskoelastično telo, parcijalnom integracijom izraza (1.126) po  $\varepsilon(t)$  i izraza (1.133) po  $\sigma(t)$ , a u skladu sa (1.35)

$$\begin{aligned}
 \sigma(t) &= E'(t) \left[ \varepsilon(t) - \int_{t_1}^t R(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right] - E'(t) \alpha \left[ \theta(t) - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{t_1}^t R(t, \tau) \theta(\tau) d\tau \right] \quad (1.136) \\
 \varepsilon(t) &= \frac{\sigma(t)}{E'(t)} + \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\sigma(\tau)}{E'(\tau)} d\tau + \alpha \theta(t).
 \end{aligned}$$

Između funkcije  $K(t, \tau)$  - jezgra naslednosti i njegove rezolvente  $R(t, \tau)$  važi kao i za viskoelastično telo izraz

$$K(t, \tau) = R(t, \tau) - \int_{\tau}^t K(t, \eta) R(\eta, \tau) d\eta. \quad (1.137)$$

Za reološki model sastavljen od Hookovog i više Kelvinovih tela vezanih u red, čija se reološka svojstva tokom vremena menjaju, dobijaju se uz znatno komplikovaniju matematičku proceduru, kako je to pokazano u odeljku 1.72, po obliku isti izrazi za slobodnu energiju (1.126), Gibbsov termodinamički potencijal (1.133) i veze između napona i deformacija (1.136).

U slučaju kada je napon  $\sigma(t)=1$  onda se, prema izrazima (1.103), (1.131) i (1.134) dobijaju funkcije



$$C(t, \tau) = \int_{t_1}^t \frac{K_1(t, \tau)}{E'(\tau)} d\tau,$$

$$C^*(t, \tau) = \int_{t_1}^t \frac{K(t, \tau)}{E'(\tau)} d\tau = \frac{1}{E(t_1)} - \frac{1}{E(t)} + C(t, t_1) \quad (1.138)$$

$$\varphi(t, t_1) = E_0 C(t, t_1) \quad (1.138a)$$

Funkcija  $C^*(t, t_1)$  se naziva specifičnim tečenjem ili merom tečenja (puzanja) /56/, dok se  $\varphi(t, t_1)$  naziva koeficijentom tečenja (puzanja) betona.  $E_0$  je modul elastičnosti betona pri nekoj određenoj starosti betona koju prema Propisima Evro-internacionalnog Komiteta za beton CEB-FIP/8/ iznosi 28 dana.

Kada se u integralima (1.138)  $t_1$  zameni sa  $\tau$  i izvrši diferenciranje, dobija se

$$\begin{aligned} K_1(t, \tau) &= -E'(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) \\ K(t, \tau) &= -E(\tau) \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right) \right] \end{aligned} \quad (1.139)$$

Ako se za K-H telo izabere neka funkcija  $\xi_t$  (efektivno vreme) prema izrazu (1.107) tako da za

$$t \in [0, \infty), \quad \xi_t \in [0, \xi_{t\infty}] , \quad (1.140)$$

gde je  $\xi_{t\infty}$  neki konačan broj i pretpostavi da su

$$\mu'_k(t) = \frac{\mu^*}{\xi_t}, \quad E'_k(t) = E'_k \quad (1.141)$$

onda jednačine (1.121) i (1.128) posle diferenciranja po  $t$  i deljenja sa  $\xi_t$  uzimajući u obzir (1.106) dobijaju oblik

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varepsilon_k}{d\xi_t^2} + \omega_t \frac{d\varepsilon_k}{d\xi_t} &= \bar{\omega} \frac{d}{d\xi_t} [\varepsilon - \alpha\theta(t)] \\ \frac{d\varepsilon_k}{d\xi_t} + \bar{\gamma} \varepsilon_k &= \frac{\sigma}{\mu^*} \end{aligned} \quad (1.142)$$

Ovde su sada

$$\omega_t = \frac{E'_k + E'(t)}{\mu^*}, \quad \bar{\omega} = \frac{E'(t)}{\mu^*}, \quad \bar{\gamma} = \frac{E'_k}{\mu^*}, \quad (1.143)$$

dok je  $\mu^*$  neka konstanta koja dimenzionalno odgovara naponu, a indeksi  $t$  i  $\tau$  označavaju, radi kratkoće u pisanju, vremenske argumente funkcija.

Partikularno rešenje druge od jednačina (1.142) za početni uslov  $t=t_1$ ,  $\varepsilon_k(t_1)=0$ , je

$$\varepsilon_k = \frac{1}{\mu^*} \int_{\xi_{t_1}}^{\xi_t} e^{-\bar{\gamma}(\xi_t - \xi_\tau)} \sigma_\tau d\xi_\tau$$

pa su s obzirom na (1.130), (1.131), (1.134), (1.138) i (1.139)

$$\begin{aligned} K_1(t, \tau) &= K_1(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{E'_t}{\mu^*} e^{-\bar{\gamma}(\xi_t - \xi_\tau)} \\ C(t, \tau) &= \frac{1}{E'_k} [1 - e^{-\bar{\gamma}(\xi_t - \xi_\tau)}] \\ \varphi(t, \tau) &= \varphi(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{E'_0}{E'_k} [1 - e^{-\bar{\gamma}(\xi_t - \xi_\tau)}] \end{aligned} \quad (1.144)$$

Kada se u jednačinama (1.142) izvrši eliminacija  $\varepsilon_k$ , dobija se reološka jednačina stanja za K-H telo sa promenljivim reološkim svojstvima

$$\frac{d^2(\varepsilon - \alpha\theta)}{d\xi_t^2} + \bar{\gamma} \frac{d(\varepsilon - \alpha\theta)}{d\xi_t} = \frac{1}{E'_t} \left[ \frac{d^2\sigma}{d\xi_t^2} + \left( \omega_t - \frac{1}{E'_t} \frac{dE'_t}{d\xi_t} \right) \frac{d\sigma}{d\xi_t} \right] \quad (1.145)$$

Ova diferencijalna jednačina za zadate početne uslove može se, kada je poznato  $\varepsilon_t$ , svesti na prvu od jednačina (1.136). Funkcija  $R(t, \tau)$  je međjutim, vrlo komplikovana čak i za neke jednostavnije izraze koji definišu promenu  $E'_t$  tokom vremena. Ako se izvrši uprošćenje tako da se u integro-diferencijalnoj jednačini (1.121) pretpostavi da je

$$r(t, \tau) = 0, \quad (1.146)$$

dobija se reološka jednačina stanja.

$$\frac{d(\varepsilon - \alpha\theta)}{d\xi_t} + \bar{\gamma}(\varepsilon - \alpha\theta) = \frac{1}{E'_t} \left[ \frac{d\sigma}{d\xi_t} + \left( \omega_t - \frac{1}{E'_t} \frac{dE'_t}{d\xi_t} \right) \sigma \right] \quad (1.147)$$

Partikularno rešenje ove diferencijalne jednačine, kada je poznata funkcija  $\varepsilon(t)$  i početni uslov



$$t=t_1, \quad \xi_t = \xi_{t1}, \quad \sigma_{t1} = E'_{t1} \varepsilon_{t1}, \quad (1.147a)$$

je

$$\sigma_t = E'_t (\varepsilon_t - \alpha \theta_t) + E'_t \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} R(\xi_t, \xi_\tau) (\varepsilon_\tau - \alpha \theta_\tau) d\xi_\tau, \quad (1.148)$$

gde su

$$R(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{E'_\tau}{\mu^* E'_t} e^{-(\psi_t - \psi_\tau)}, \quad (1.149)$$

$$\psi_t - \psi_\tau = \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} \left[ \omega_\tau - \frac{1}{E'_\tau} \frac{dE'_\tau}{d\xi_\tau} \right] d\xi_\tau. \quad (1.150)$$

Ako je poznata funkcija  $\sigma(t)$ , onda je partikularno rešenje

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E'_t} + \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} K(\xi_t, \xi_\tau) \frac{\sigma_\tau}{E'_\tau} d\xi_\tau + \alpha \theta_t, \quad (1.151)$$

gde je s obzirom na (1.103), (1.134) i (1.144)

$$K(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{1}{E'_\tau} \frac{dE'_\tau}{d\xi_\tau} + \frac{E'_\tau}{\mu^*} e^{-\bar{\psi}(\xi_t - \xi_\tau)} \quad (1.152)$$

Ako se  $E'_t$  menja prema izrazima (1.109) i (1.110) onda je s obzirom na (1.143) posle izvršenog integraljenja

$$\begin{aligned} \psi_t - \psi_\tau &= \frac{E_0 [1 - k_1 \xi_{t0}] + E_k}{\mu^*} (\xi_t - \xi_\tau) + \\ &+ \frac{E_0 k_1 (\xi_t^2 - \xi_\tau^2)}{2\mu^*} - \ln \frac{1 + k_1 (\xi_t - \xi_\tau)}{1 + k_1 (\xi_t - \xi_{t0})} \end{aligned} \quad (1.153)$$

$$\begin{aligned} K(\xi_t, \xi_\tau) &= \frac{k_1}{1 + k_1 (\xi_\tau - \xi_{t0})} + \frac{E_0}{\mu^*} [1 + k_1 (\xi_\tau - \xi_{t0})] e^{-\bar{\psi}(\xi_t - \xi_\tau)} \\ R(\xi_t, \xi_\tau) &= \frac{E'_0 [1 + k_1 (\xi_\tau - \xi_{t0})]^2}{\mu^* [1 + k_1 (\xi_t - \xi_{t0})]} e^{-(\psi_t - \psi_\tau)} \end{aligned} \quad (1.154)$$

Kada se pretpostavi da je  $E'_t$  nezavisno od vremena, onda je  $k_1 = 0$ , pa se dobijaju znatno jednostavniji izrazi za funkcije  $K(\xi_t, \xi_\tau)$ ,  $R(\xi_t, \xi_\tau)$  i  $\varphi(\xi_t, \xi_\tau)$  koji važe za reološki model betona kojeg je predložio M. Ivković /22/.

$$\begin{aligned}
 K(\xi_t, \xi_\tau) &= \bar{\gamma} e^{-\bar{\gamma}(\xi_t - \xi_\tau)} \\
 R(\xi_t, \xi_\tau) &= \bar{\gamma} \bar{\varphi} e^{-\bar{\gamma}(1+\bar{\varphi})(\xi_t - \xi_\tau)} \\
 \bar{\varphi} &= \frac{E'}{E_K}
 \end{aligned}
 \tag{1.154a}$$

Funkcije i koeficijenti koji ulaze u ove izraze biraju se tako da se dobije najbolja aproksimacija eksperimentalnih rezultata.

### 1.82 Maxwellovo telo sa promenljivim reološkim svojstvima

Svi izvedeni izrazi i jednačine za K-H telo važe i za Maxwellovo telo sa promenljivim reološkim svojstvima ako se stavi da je  $E_K = 0$ . Međutim, za ovo telo nije potrebno vršiti uprošćenje (1.146) i kada se pretpostavi da je

$$u'(t) = \frac{\dot{E}_0}{\xi_t} \tag{1.155}$$

dobijaju se prema (1.121) i (1.128)

$$\frac{E_0}{E'} \frac{d^2 \varepsilon_K}{d\xi_t^2} + \frac{d\varepsilon_K}{d\xi_t} = \frac{d(\varepsilon - \alpha\theta)}{d\xi_t}$$

$$\frac{d\varepsilon_K}{d\xi_t} = \frac{\sigma}{E_0}$$

i dalje eliminacijom  $\varepsilon_K$  reološka jednačina stanja

$$\frac{d(\varepsilon - \alpha\theta)}{d\xi_t} = \frac{1}{E'} \frac{d\sigma}{d\xi_t} + \frac{\sigma}{E_0} \tag{1.156}$$

Ovo je Dischingerova jednačina i na njoj se zasniva tzv. Teorija starenja betona, u kojoj se polazi od pretpostavke da su deformacije tečenja (puzanja) betona, koje su u ovom slučaju prikazane Newtonovim elementom sa promenljivim koeficijentom viskoznosti, nepovratne. Rešenja ove diferencijalne jednačine za početne uslove (1.147a) se mogu prikazati u obliku (1.148) i (1.151), gde su sada



$$K(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{E'_\tau}{E_0} + \frac{1}{E_\tau} \frac{dE'_\tau}{d\xi_\tau} \quad (1.157)$$

$$R(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{1}{E'_t} \left[ \frac{dE'_\tau}{d\xi_\tau} + \frac{E'^2_\tau}{E_0} \right] e^{-(\psi_t - \psi_\tau)} \quad (1.158)$$

$$\psi_t - \psi_\tau = \int_{\xi_\tau}^{\xi_t} \frac{E'_\tau}{E_0} d\xi_\tau \quad (1.159)$$

$$K_1(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{E'_\tau}{E_0} \quad (1.160)$$

$$\varphi(\xi_t, \xi_\tau) = \xi_t - \xi_\tau.$$

Ako se  $E'_t$  menja tokom vremena prema izrazu (1.109) i (1.110) onda su

$$\psi_t - \psi_\tau = (1 - k_1 \xi_{t0}) (\xi_t - \xi_\tau) + \frac{k_1}{2} (\xi_t^2 - \xi_\tau^2)$$

$$K(\xi_t, \xi_\tau) = 1 + k_1 (\xi_t - \xi_{t0}) + \frac{k_1}{1 + k_1 (\xi_t - \xi_{t0})} \quad (1.161)$$

$$R(\xi_t, \xi_\tau) = \left[ \frac{k_1}{1 + k_1 (\xi_t - \xi_{t0})} + \frac{[1 + k_1 (\xi_\tau - \xi_{t0})]^2}{1 + k_1 (\xi_t - \xi_{t0})} \right] e^{-(\psi_t - \psi_\tau)}$$

Ako se  $E'_t$  tokom vremena ne menja, tada je  $k_1 = 0$ , pa ovi izrazi postaju znatno jednostavniji

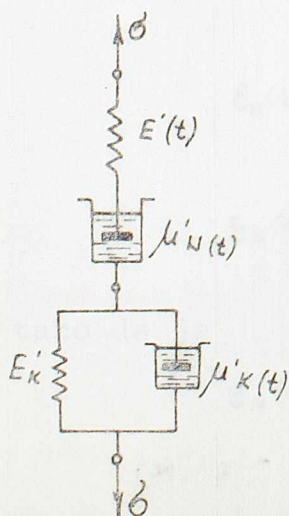
$$\psi_t - \psi_\tau = \xi_t - \xi_\tau$$

$$K(\xi_t, \xi_\tau) = 1$$

$$R(\xi_t, \xi_\tau) = e^{-(\xi_t - \xi_\tau)}$$

(1.162)

### 1.83 Burgersovo telo sa promenljivim reološkim svojstvima



Reološki model ovog tela čija se reološka svojstva menjaju tokom vremena, izuzev  $E'_k$  dat je na sk. 1.9.

Dopunske unutrašnje promenljive stanja su deformacije Newtonovog i Kelvinovog elementa  $\epsilon_N$  i  $\epsilon_K$ , pa je slobodna energija prema (1.111) i (1.112)

Sk. 1.9

$$F(\varepsilon, \varepsilon_N, \varepsilon_K, \theta) = \frac{E'(t)}{2} [\varepsilon(t) - \varepsilon_N(t) - \varepsilon_K(t) - \alpha\theta(t)]^2 + E'_K \frac{\varepsilon_K^2(t)}{2} - \\ - E'(t) [\varepsilon(t) - \varepsilon_N(t) - \varepsilon_K(t) - \alpha\theta(t)] \int_{t_1}^t r(t, \tau) [\varepsilon(\tau) - \varepsilon_N(\tau) - \varepsilon_K(\tau) - \alpha\theta(\tau)] d\tau - \\ - \alpha E'(t) [\varepsilon(t) - \varepsilon_N(t) - \varepsilon_K(t) - \alpha\theta(t)] [\theta(t) - \int_{t_1}^t r(t, \tau) \theta(\tau) d\tau] + F_0 \quad (1.163)$$

Pošto rad na viskoznoj deformaciji predstavlja disipaciju energije, dobija se iz uslova (1.51) sistem integro-diferencijalnih jednačina

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_N} \equiv -E'(t) [\varepsilon(t) - \varepsilon_N(t) - \varepsilon_K(t) - \alpha\theta(t)] - E'(t) \int_{t_1}^t r(t, \tau) [\varepsilon(\tau) - \varepsilon_N(\tau) - \varepsilon_K(\tau) - \alpha\theta(\tau)] d\tau = \\ = -\mu'_N(t) \frac{d\varepsilon_N}{dt} \\ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_K} \equiv -E'(t) [\varepsilon(t) - \varepsilon_N(t) - \varepsilon_K(t) - \alpha\theta(t)] - E'(t) \int_{t_1}^t r(t, \tau) [\varepsilon(\tau) - \varepsilon_N(\tau) - \varepsilon_K(\tau) - \alpha\theta(\tau)] d\tau + \\ + E'_K \varepsilon_K(t) = -\mu'_K(t) \frac{d\varepsilon_K}{dt},$$

koje se posle diferenciranja po  $t$ , uzimajući u obzir (1.106), svode na sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa promenljivim koeficijentima

$$\frac{d^2 \varepsilon_N}{dt^2} + \omega_N(t) \frac{d\varepsilon_N}{dt} + \bar{\omega}_N(t) \frac{d\varepsilon_K}{dt} = \omega_N(t) \frac{d(\varepsilon - \alpha\theta)}{dt} \quad (1.164)$$

$$\frac{d^2 \varepsilon_K}{dt^2} + \bar{\omega}_K(t) \frac{d\varepsilon_N}{dt} + \omega_K(t) \frac{d\varepsilon_K}{dt} = \bar{\omega}_K(t) \frac{d(\varepsilon - \alpha\theta)}{dt}$$

gde su

$$\omega_N(t) = \frac{E'(t) + \dot{\mu}'_N(t)}{\mu'_N(t)}, \quad \omega_K(t) = \frac{E'(t) + E'_K + \dot{\mu}'_K(t)}{\mu'_K(t)} \\ \bar{\omega}_N(t) = E'(t) / \mu'_N(t), \quad \bar{\omega}_K(t) = E'(t) / \mu'_K(t). \quad (1.164a)$$

Rešenja ovog sistema nehomogenih diferencijalnih jednačina sa promenljivim koeficijentima, može se prikazati kao i za sistem sa konstantnim koeficijentima, u obliku /57/, s obzirom na početne Cauchyve uslove

$$t = t_1, \quad \varepsilon_N(t_1) = 0, \quad \varepsilon_K(t_1) = 0,$$

$$\varepsilon_N(t) = \int_{t_1}^t R_N(t, \tau) [\varepsilon(\tau) - \alpha\theta(\tau)] d\tau,$$

$$\varepsilon_K(t) = \int_{t_1}^t R_K(t, \tau) [\varepsilon(\tau) - \alpha\theta(\tau)] d\tau,$$

tako da je

$$\varepsilon_N(t) + \varepsilon_K(t) = \int_{t_1}^t R_1(t, \tau) [\varepsilon(\tau) - \alpha\theta(\tau)] d\tau,$$



gde je

$$R_1(t, \tau) = R_N(t, \tau) + R_K(t, \tau). \quad (1.165)$$

Kada se ovi izrazi uvrste u jednačine (1.164) dobija se slobodna energija

$$F(\varepsilon, \theta) = F^*(\varepsilon, \theta) + \bar{F}_0$$

gde je

$$F^*(\varepsilon, \theta) = E'(t) \frac{\varepsilon^2(t)}{2} - E'(t) \alpha \theta(t) - E'(t) \varepsilon(t) \int_{t_0}^t R(t, \tau) [\varepsilon(\tau) - \alpha \theta(\tau)] d\tau \quad (1.165a)$$

$$R(t, \tau) = R_1(t, \tau) - \int_{\tau}^t R_1(t, \eta) r(\eta, \tau) d\eta + r(t, \tau) \quad (1.165b)$$

Izraz za  $\bar{F}_0$  je vrlo složen i u njemu se  $\varepsilon(t)$  ne pojavljuje ispred znaka integrala tako da kao i za K-H telo važe izrazi (1.127a).

Napon u Newtonovom i Kelvinovom elementu je prema (1.128)

$$\begin{aligned} \sigma &= \mu'_N(t) \frac{d\varepsilon_N}{dt} \\ \sigma &= E'_K \varepsilon_K + \mu'_K(t) \frac{d\varepsilon_K}{dt} \end{aligned} \quad (1.166)$$

Eliminacijom  $\varepsilon_N$  i  $\varepsilon_K$  iz sistema diferencijalnih jednačina (1.164a) i (1.164) dobija se reološka jednačina stanja za Burgersov model sa promenljivim reološkim svojstvima

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dt^2} + p(t) \frac{d\sigma}{dt} + q(t)\sigma &= E'(t) \frac{d^2(\varepsilon - \alpha\theta)}{dt^2} + \\ &+ E'(t) [\omega_K(t) - \bar{\omega}_K(t)] \frac{d(\varepsilon - \alpha\theta)}{dt}, \end{aligned} \quad (1.167)$$

gde su

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{(\omega_N + \omega_K) \bar{\omega}_N - \dot{\omega}_N - 2\dot{\mu}'_N}{\bar{\omega}_N} \\ q(t) &= \omega_K \omega_N + \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_K}{\omega_N} \right) - \bar{\omega}_K \bar{\omega}_N - \frac{\omega_N (\omega_N + \omega_K) - \dot{\omega}_N}{\bar{\omega}_N \mu'_N} \dot{\mu}'_N + \\ &+ \frac{2\dot{\mu}'_N{}^2 - \ddot{\mu}'_N \mu'_N}{\mu'^2_N} \end{aligned} \quad (1.168)$$

Rešenja ove diferencijalne jednačine mogu se prikazati u obliku (1.136), zavisno od toga da li su poznate  $(\varepsilon(t) - \alpha\theta(t))$  ili  $\sigma(t)$ . Funkcija  $K(t, \tau)$  se može jednostavnije odrediti integraljenjem jednačina (1.166).

$$\varepsilon_N(t) + \varepsilon_K(t) = \int_{t_1}^t \left[ \frac{1}{\mu'_N(\tau)} - \frac{1}{\mu'_K(\tau)} e^{-(\psi_t - \psi_\tau)} \right] d\tau$$

tako da je s obzirom na (1.131)

$$K_1(t, \tau) = \frac{\Xi'(\tau)}{\mu'_N(\tau)} + \frac{\Xi'(\tau)}{\mu'_K(\tau)} e^{-(\psi_t - \psi_\tau)}$$

$$K(t, \tau) = \frac{1}{\Xi'(\tau)} \frac{d\Xi'(\tau)}{d\tau} + \frac{\Xi'^2(\tau)}{\mu'_N(\tau)} + \frac{\Xi'^2(\tau)}{\mu'_K(\tau)} e^{-(\psi_t - \psi_\tau)} \quad (1.169)$$

$$\psi_t - \psi_\tau = \int_{\tau}^t \frac{\Xi'_K}{\mu'_K} d\tau.$$

Gibbsov termodinamički potencijal je

$$G(\sigma, \theta) = G^*(\sigma, \theta) + \bar{G}^0$$

$$G^*(\sigma, \theta) = -\frac{\sigma^2(t)}{2\Xi'(t)} - \sigma(t) \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\sigma(\tau)}{\Xi'(\tau)} d\tau$$

U funkciji  $\bar{G}^0$  se  $\sigma$  ne pojavljuje ispred znaka integrala, tako da važe izrazi (1.135)

Rešenje ove diferencijalne jednačine (1.167) za zadato  $\xi(t) - \alpha\theta(t)$  ne može se naći u zatvorenom obliku u najopštijem slučaju promene reoloških svojstava, pa se stoga ne može napisati u eksplicitnom obliku izraz za  $R(t, \tau)$ .

Ako se pretpostavi da se  $\mu'_N(t)$  i  $\mu'_K(t)$  mogu izraziti, slično kao i za Maxwellovo i Kelvinovo telo, u obliku

$$\mu'_N(t) = \frac{\Xi_0}{\dot{\xi}_t}, \quad \mu'_K(t) = \frac{\mu^*}{\dot{\xi}_t} \quad (1.170)$$

onda diferencijalne jednačine (1.164) dobijaju oblik

$$\frac{d^2 \varepsilon_N}{d\dot{\xi}_t^2} + \omega_{Nt} \frac{d\varepsilon_N}{d\dot{\xi}_t} + \bar{\omega}_{Nt} \frac{d\varepsilon_K}{d\dot{\xi}_t} = \bar{\omega}_{Nt} \frac{d(\varepsilon - \alpha\theta)}{d\dot{\xi}_t}$$

$$\frac{d^2 \varepsilon_K}{d\dot{\xi}_t^2} + \bar{\omega}_{Kt} \frac{d\varepsilon_N}{d\dot{\xi}_t} + \omega_{Kt} \frac{d\varepsilon_K}{d\dot{\xi}_t} = \bar{\omega}_{Kt} \frac{d(\varepsilon - \alpha\theta)}{d\dot{\xi}_t} \quad (1.171)$$

gde su



$$\bar{\omega}_{Nt} = \frac{E'_t}{E_0}, \quad \omega_k = \frac{E'_t + E'_k}{\mu^*}, \quad \bar{\omega}_k = \frac{E'_t}{\mu^*} \quad (1.172)$$

Jednačine (1.166) su sada

$$\sigma = E_0 \frac{d\varepsilon_N}{d\xi_t} \quad (1.173)$$

$$\sigma = E_k \varepsilon_k + \mu^* \frac{d\varepsilon_k}{d\xi_t}$$

i kada se u (1.171) i (1.173) izvrši eliminacija  $\varepsilon_N$  i  $\varepsilon_k$  dobija se reološka jednačine stanja

$$\frac{d^2(\varepsilon - \alpha\theta)}{d\xi_t^2} + \bar{\gamma} \frac{d(\varepsilon - \alpha\theta)}{d\xi_t} = \frac{1}{E'_t} \frac{d^2\sigma}{d\xi_t^2} + \left[ \frac{1 + \bar{\gamma}(\bar{\varphi}_d + \frac{E_0}{E'_t})}{E_0} - \frac{1}{E'_t} \frac{dE'_t}{d\xi_t} \right] \frac{d\sigma}{d\xi_t} + \frac{\bar{\gamma}}{E_0} \sigma \quad (1.174)$$

gde su

$$\bar{\gamma} = \frac{E'_k}{\mu^*}, \quad \bar{\varphi}_d = \frac{E_0}{E'_k} \quad (1.175)$$

Iz jednačina (1.173) dobija se za početni uslov

$$t = t_1, \quad \xi_t = \xi_{t1}, \quad \varepsilon_{Nt} = 0, \quad \varepsilon_{kt} = 0,$$

partikularno rešenje

$$\varepsilon_N + \varepsilon_k = \frac{1}{E_0} \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} \sigma_\tau d\xi_\tau + \frac{\bar{\gamma} \bar{\varphi}_d}{E_0} \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} e^{-\bar{\gamma}(\xi_t - \xi_\tau)} \sigma_\tau d\xi_\tau,$$

pa je s obzirom na (1.102) i (1.163)

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E'_t} + \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} K(\xi_t, \xi_\tau) \frac{\sigma_\tau}{E'_\tau} d\xi_\tau, \quad (1.176)$$

gde je

$$K(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{1}{E'_\tau} \frac{dE'_t}{d\xi_\tau} + \frac{E'_t}{E_0} \left[ 1 + \bar{\gamma} \bar{\varphi}_d e^{-\bar{\gamma}(\xi_t - \xi_\tau)} \right] \quad (1.177)$$

i dalje prema (1.134), (1.138) i (1.139)

$$K_1(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{E'_t}{E_0} \left[ 1 + \bar{\gamma} \bar{\varphi}_d e^{-\bar{\gamma}(\xi_t - \xi_\tau)} \right], \quad (1.178)$$

$$C(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{E_0 - E_{t0}}{E_0} + \frac{\bar{\varphi}_d}{E_0} \left[ 1 - e^{-\bar{\gamma}(\xi_t - \xi_\tau)} \right],$$

$$\varphi(\xi_t, \xi_\tau) = \xi_t - \xi_\tau + \bar{\varphi}_d \left[ 1 - e^{-\bar{\gamma}(\xi_t - \xi_\tau)} \right].$$

Ovaj izraz za koeficijent tečenja (puzanja) betona predložili su J.M. Illston i I.J. Jordaan /19/, /20/ (Rate of flow method) na osnovu svojih eksperimentalnih rezultata. Prva dva člana u izrazu za koeficijent tečenja  $\varphi(\xi_t, \xi_\tau)$  određuju nepovratno tečenje (flow)

$$\varphi_f(t, \tau) = \varphi_f(\xi_t, \xi_\tau) = \xi_t - \xi_\tau, \quad (1.179)$$

a treći tzv. usporenu elastičnost (delayed elasticity)

$$\varphi_d(t, \tau) = \varphi_d(\xi_t, \xi_\tau) = \bar{\varphi}_d \left[ 1 - e^{-\bar{\delta}(\xi_t - \xi_\tau)} \right] \quad (1.180)$$

Deformacija kojoj odgovara koeficijent tečenja  $\bar{\varphi}_d(t, \tau)$  nije u potpunosti povratna, jer je za iste vremenske razlike

$$t_i - \tau_i = t_j - \tau_j \quad (1.186)$$

različita razlika funkcija

$$\xi_{ti} - \xi_{\tau i} \neq \xi_{tj} - \xi_{\tau j}.$$

Za zadato  $(\varepsilon_t - \alpha\theta_t)$ , sa promenljivim  $E'_t$  u najopštijem slučaju, ne može se odrediti tačno rešenje diferencijalne jednačine (1.174), pa se ne može ni napisati izraz za  $R(\xi_t, \xi_\tau)$  u zatvorenom obliku. Ako se pretpostavi da se  $E'$  ne menja tokom vremena, dobija se linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$\frac{d^2(\varepsilon - \alpha\theta)}{d\xi_t^2} + \bar{\delta} \frac{d(\varepsilon - \alpha\theta)}{d\xi_t} = \frac{1}{E'} \frac{d^2\sigma}{d\xi_t^2} + \frac{1 + \bar{\delta}(1 + \bar{\varphi}_d)}{E'} \frac{d\sigma}{d\xi_t} + \frac{\bar{\delta}}{E'} \sigma. \quad (1.181)$$

U ovom slučaju je /42/

$$R(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{r_1(r_1 + \bar{\delta})}{r_1 - r_2} e^{r_1(\xi_t - \xi_\tau)} - \frac{r_2(r_2 + \bar{\delta})}{r_1 - r_2} e^{r_2(\xi_t - \xi_\tau)} \quad (1.182)$$

gde su  $r_1$  i  $r_2$  rešenja karakteristične jednačine za homogeni deo diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2\sigma}{d\xi_t^2} + [1 + \bar{\delta}(1 + \bar{\varphi}_d)] \frac{d\sigma}{d\xi_t} + \bar{\delta}\sigma = 0, \quad (1.183)$$

$$r_{1,2} = -\frac{1 + \bar{\delta}(1 + \bar{\varphi}_d)}{2} \pm \left[ \frac{(1 + \bar{\delta}(1 + \bar{\varphi}_d))^2}{4} - \bar{\delta} \right]^{1/2}.$$



Kada se (1.164) uvrsti u (1.30) dobija se posle sredjivanja uzimajući u obzir (1.112), (1.113), (1.102), (1.105), (1.130) i (1.136), izraz za Gibbsov termodinamički potencijal

$$G(\sigma, \theta) = G^*(\sigma, \theta) + \bar{G}^0 \quad (1.184)$$

gde su

$$-G^*(\sigma, \theta) = \frac{\sigma_t}{E_t} + \sigma_t \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} K(\xi_t, \xi_\tau) \frac{\sigma_\tau}{E_\tau} d\tau + \sigma_t \alpha \theta_t, \quad (1.185)$$

$$\begin{aligned} -G^0(\sigma, \theta) = & -\alpha E_t' \theta_t \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} R(\xi_\tau) \frac{\sigma_\tau}{E_\tau} d\xi_\tau + \\ & + \alpha E_t' \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} R(\xi_\tau) \frac{\sigma_\tau}{E_\tau} \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} r(\xi_t, \xi_\tau) \theta_\tau d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{C}{2T_0} + E_t' \alpha^2 \right) (\theta_t^2 - 2\theta_t \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} r(\xi_t, \xi_\tau) \theta_\tau d\tau + \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} r(\xi_t, \xi_\tau) r(\xi_\tau, \xi_\eta) \theta_\tau \theta_\eta d\xi_\tau d\xi_\eta - \\ & - \frac{E_k'}{2} \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} \int_{\xi_{t1}}^{\xi_t} K_k(\xi_t, \xi_\tau) K_k(\xi_t, \xi_\eta) \sigma_\tau \sigma_\eta) \end{aligned} \quad (1.186)$$

Funkcija  $K_k(t, \tau)$  dobija se rešavanjem diferencijalne jednačine (1.129). Slobodna energija i Gibbsov termodinamički potencijal imaju isti oblik kao i za K-H telo, a razlika je samo u izrazima za funkcije  $K(t, \tau)$  i  $R(t, \tau)$ . Ako se promene reoloških svojstava izražavaju u zavisnosti od  $t$ , onda se u svim izrazima za ove termodinamičke potencijale umesto  $\xi_t$  piše  $t$ .

#### 1.84 Predlog CEB-FIP

U Propisima Evro-internacionalnog komiteta za beton (CEB) i Međunarodnog udruženja za prednaprezanje (FIP) /3/ predložen je sledeći izraz za koeficijent tečenja (puzanja) betona

$$\varphi(t, t_1) = \beta_a(t_1) + \bar{\varphi}_d \beta_d(t - t_1) + \bar{\varphi}_f [\beta_f(t) - \beta_f(t_1)] \quad (1.187)$$

Prvi član u ovom izrazu  $\beta_a(t_1)$  označava nepovratnu deformaciju, koja nastoje nekoliko dana posle nanošenja opterećenja a zavisi od količnika čvrstoće pri opterećivanju  $f_c(t_1)$  i konačne čvrstoće betona  $f_c(\infty)$  kada  $t \rightarrow \infty$ , čija je promena u funkciji vremena data grafički.

$$\beta_a(t_1) = 0.8 \left[ 1 - \frac{f_c(t_1)}{f_c(\infty)} \right] \quad (1.188)$$

$\bar{\varphi}_d$  označava konačnu vrednost koeficijenta povratne deformacije tečenja (delayed elasticity) i prema ovom dredlogu je  $\bar{\varphi}_d = 0.4$ , a  $\bar{\varphi}_f$  konačnu vrednost koeficijenta nepovratnog tečenja (flow) kada  $t \rightarrow \infty$ , dobija se prema izrazu

$$\bar{\varphi}_f = \varphi_{f1} \cdot \varphi_{f2} \quad (1.189)$$

$\varphi_{f1}$  zavisi od relativne vlažnosti ambijenta, a  $\varphi_{f2}$  zavisi od tzv. "fiktivne debljine" preseka

$$h_o = \lambda \frac{2A_c}{C_c} \quad (1.190)$$

gde je  $\lambda$  koeficijent koji zavisi od relativne vlažnosti ambijenta,  $A_c$  je površina, a  $C_c$  obim poprečnog preseka betonskog elementa koji je u dodiru sa atmosferom. Funkcije  $\beta_d(t-t_1)$  i  $\beta_f(t)$  određuju promenu povratnog i nepovratnog tečenja betona tokom vremena. Funkcija  $\beta_f(t)$  zavisi od fiktivne debljine "poprečnog preseka i njene vrednosti kao i vrednosti  $\beta_d(t-t_1)$  date su Propisima CEB-FIP u grafikonima, dok su brojčane vrednosti date u monografiji H. Rüscha i D. Jungwirtha /45/ koji su predložili izraz (1.187) za koeficijent tečenja, ali bez člana  $\beta_a(t_1)$ . Funkcije  $\beta_d(t-t_1)$  i  $\beta_f(t)$  se mogu uspešno aproksimirati konačnim sumama /23/

$$\beta_d(t-\tau) = 1 - \sum_{i=1}^4 A_i e^{-\bar{\alpha}_i(t-t_1)} \quad , \quad \sum_{i=1}^4 A_i = 1 \quad (1.191)$$

$$\beta_f(t) = 1 - \sum_{i=1}^4 B_i e^{-\bar{\beta}_i t} \quad \sum_{i=1}^4 B_i = 1$$

Koeficijenti  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $\bar{\alpha}_i$  i  $\bar{\beta}_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) određuju se tako da se dobije najbolja aproksimacija datih numeričkih vrednosti funkcija  $\beta_d(t-t_1)$  i  $\beta_f(t)$  sa vrednostima prema ovim izrazima.

Ukupna specifična deformacija betona, za konstantan napon  $\sigma = 1$ , je

$$\phi(t, t_1) = \frac{1}{E(t_1)} + \frac{\beta_a(t_1)}{E_o} + \frac{\bar{\varphi}_d}{E_o} \beta_f(t-t_1) + \frac{\bar{\varphi}_f}{E_o} [\beta_f(t) - \beta_f(t_1)], \quad (1.192)$$

gde su  $E(t_1)$  i  $E_o$  Youngovi moduli elastičnosti betona pri starosti  $t_1$  i 28 dana. Vrednost modula elastičnosti zavisi od čvrstoće betonske kocke  $f_{ck}$  pri starosti od 28 dana.



Ako se uvede zamenjujući modul elastičnosti  $E^*(t_1)$

$$E^*(t_1) = \frac{E_0 E(t_1)}{E_0 + \beta_d(t_1) E(t_1)} \quad (1.193)$$

i funkcija

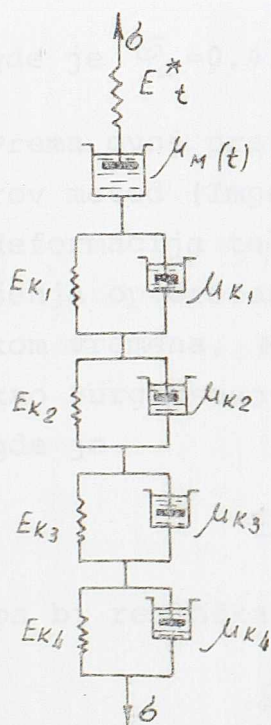
$$\xi(t) = \bar{\varphi}_f \beta_f(t), \quad (1.193a)$$

a  $\beta_d(t-t_1)$  prikaže izrazom (1.191), onda je

$$\phi(t, t_1) = \frac{1}{E^*(t_1)} + C(t, t_1) \quad (1.194)$$

$$C(t, t_1) = \frac{1}{E_0} [\bar{\varphi}_d \beta_d(t-t_1) + \xi(t) - \xi(t_1)]$$

Ovom izrazu odgovara reološki model sastavljen od Maxwellovog tela sa promenljivim reološkim svojstvima i četiri Kelvinova tela sa konstantnim reološkim svojstvima koji su redno vezani (sk. 1.10)



SK. 1.10

U ovom slučaju su

$$\mu_M(t) = \frac{E_0}{\xi t} \quad (1.195)$$

$$E_{K_i} = \frac{1}{\bar{\varphi}_d A_i}$$

$$\mu_{K_i} = \frac{\bar{\alpha}_i}{A_i \bar{\varphi}_d}$$

I za ovaj model važe veze između napona i deformacija gde se funkcije

$K_i(t, \tau)$  i  $K(t, \tau)$  određuju prema (1.139)

$$K(t, \tau) = -\frac{E(\tau)}{E_0} \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} \quad (1.196)$$

$$K(t, \tau) = -\frac{E(\tau)}{E_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{E_0}{E_\tau} + \varphi(t, \tau) \right]$$

ili ako se upotrebljava izraz (1.194)

$$K(t, \tau) = -E^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E^*(\tau)} + C(t, \tau) \right] \quad (1.197)$$



Izraz za rezolventu  $R(t, \tau)$  ne može se eksplicitno napisati, kao za  $K(t, \tau)$ , čak ni ako se pretpostavi da je modul elastičnosti konstanta i usvoji jednostavniji reološki model sa samo jednim Kelvinovim telom /9/.

Prilikom rešavanja različitih problema Teorije betonskih konstrukcija na osnovu predloga za koeficijent tečenja betona (1.192), dobijaju se integralne, integro-diferencijalne ili diferencijalne jednačine, odnosno njihovi sistemi, koji se ne mogu rešiti u zatvorenom obliku, pa je upotreba ovog izraza neprikladna za praktične proračune. Stoga se u Propisima CEB-FIP predlaže više uporišćenja za vezu između napona i deformacija betona, koje će biti više razmotrene u drugom poglavlju. Ako je starost betona pri opterećenju veća od tri meseca H. Riisch i D. Jungwirth /45/ su predložili izraz koeficijent tečenja, koji se takodje preporučuje u ovim propisima.

$$\varphi(t, t_1) = \frac{1}{E_0} \left\{ 1 + \bar{\varphi}_d + \bar{\varphi}_f [\beta_f(t) - \beta_f(t_1)] \right\}, \quad (1.198)$$

gde je  $\bar{\varphi}_d = 0.4$ .

Prema ovoj pretpostavci, na kojoj bazira tzv. Poboljšani Dischingero-rov metod (Impouved Dischinger Method) smatra se da ukupna povratna deformacija tečenja (delayed elasticity) nastaje odmah posle nanošenja opterećenja i dalje se kao i modul elastičnosti ne menja tokom vremena. Prema ovom predlogu beton bi se reološki tretirao kao Burgersovo telo, čiji je reološki model prikazan na sk. 1.9, gde je

$$E' = E_0, \quad \bar{\varphi}_d = E_0/E_K, \quad \mu_K \rightarrow 0, \quad \xi_t = \bar{\varphi}_f \beta_f(t), \quad (1.198a)$$

pa bi reološka jednačina stanja bila

$$\frac{d\xi}{d\xi_t} = \frac{1 + \bar{\varphi}_d}{E_0} \frac{d\sigma}{d\xi_t} + \frac{\sigma}{E_0}. \quad (1.199)$$

Veze između napona i deformacija mogu se prikazati u obliku Volter-rinih integralnih jednačina (1.148) i (1.151) gde su

$$E_t = \frac{E_0}{1 + \bar{\varphi}_d}, \quad K(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{1}{1 + \bar{\varphi}_d}, \quad (1.200)$$

$$R(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{1}{1 + \bar{\varphi}_d} e^{-\frac{\xi_t - \xi_\tau}{1 + \bar{\varphi}_d}}.$$



D. Jevtić i Ž. Praščević /23/ su predložili jednu mogućnost aproksimacije reverzibilnog dela deformacije tečenja u Predlogu evropskog komiteta za beton (1.187)

$$\bar{\varphi}_d \beta_d(t^* - t_1) = \bar{\varphi}_d \left[ 1 - e^{-\gamma(\xi_{t^*} - \xi_{t_1})} \right] \quad (1.201)$$

Na ovaj način se predlog CEB-FIP svodi na predlog Illstona i Jordana, kojem odgovara Burgersov reološki model prikazan na sk. 1.9, a koji ima prednosti nad predlogom CEB-FIP-a u matematičkom rešavanju problema Teorije betonskih konstrukcija.

Aproksimacija (1.201) se vrši tako što se izabere neko vreme  $t=t^*$  za koje se nalaze vrednosti  $\beta_d(t^* - t_1)$  i  $\xi_{t^*}$  i  $\xi_{t_1}$  prema (1.198a) iz Propisa CEB-FIP, a zatim se rešavanjem jednačine (1.201) dobija

$$\bar{\gamma} = - \frac{1}{\xi_{t^*} - \xi_{t_1}} \ln \left[ 1 - \beta_d(t^* - t_1) \right]. \quad (1.202)$$

Preporučuje se izbor  $t^*$  tako da  $(t^* - t_1) \leq 30$  dana. Analiza nekih eksperimentalnih rezultata D. Jevtića, pokazuje da ovakva aproksimacija ima puno opravdanja, naročito za beton čija je starost pri opterećivanju  $t_1$  manje od 90 dana. Ako je  $t_1$  veće od 90 dana, uticaj člana za nepovratno tečenje  $\bar{\varphi}_f (\beta_f(t) - \beta_f(t_1))$  u predlogu CEB-FIP (1.187) je manje dominantan, pa se prema (1.202) dobijaju velike vrednosti koeficijenta  $\bar{\gamma}$ . Dakle, ako je starost betona pri opterećenju velika, beton se prema predlogu CEB-FIP ponaša kao visko-elastično telo, što mnogobrojni eksperimentalni rezultati ne potvrđuju pa nema potrebe vršiti pomenutu aproksimaciju.

### 1.85 Neki drugi predlozi za koeficijent tečenja betona

Pored pomenutih predloga i reoloških modela mnogi autori su predložili različite izraze za specifično tečenje, odnosno koeficijent tečenja betona, radi određivanja promene naponskih i deformacijskih stanja armiranobetonskih spregnutih i prethodno napregnutih



konstrukcija. Svi ti predlozi se manje ili više slažu sa eksperimentalnim rezultatima u različitim u različitim uslovima okoline konstrukcije, promena opterećenja i starosti betona pri opterećenju. Jedan takav opšti reološki model koji bi što realnije opisao ponašanje betona u svim mogućim uslovima i promenama opterećenja, a da se pri tome ne komplikuje matematička analiza problema nije moguće komponovati. Stoga treba koristiti onaj reološki model koji datim uslovima najviše odgovara. Ovde se samo navode neki predlozi za specifičnu deformaciju betona bez detaljnije analize, pošto su oni razmatrani u mnogim radovima i monografijama.

Jedan od najopštijih predloga za funkciju  $C(t, \tau)$  potiče od D.Mc. Henrya /29/

$$C(t, \tau) = C_0 \left[ 1 - e^{-\bar{\delta}_1(t-\tau)} \right] + A e^{-\bar{\delta}_2 \tau} - A e^{-\bar{\delta}_3 t + (\bar{\delta}_2 - \bar{\delta}_3) \tau} \quad (1.203)$$

gde su  $A$ ,  $C_0$ ,  $\bar{\delta}_1$ ,  $\bar{\delta}_2$  i  $\bar{\delta}_3$  neke konstante.

Ako je  $\bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_3$  onda se dobija izraz koji su predložili I.E. Prokopenko i I.I. Ulicki /71/ kojem odgovara Burgersov reološki model (sk. 1.9) sa konstantnim  $\mu_k$  i promenljivim  $\mu'_N$ .

$$\mu'_N(t) = \frac{1}{A \bar{\delta}_2 e^{-\bar{\delta}_2 t}}$$

tako da ovaj predlog, slično predlogu CEB-FIP odnosno Rüscha-Jungwirtha, predstavlja sintezu Teorije starenja i Teorije viskoelastičnog tela.

Predlog N.H. Arutjunjana /58/

$$\begin{aligned} C(t, \tau) &= \Psi(\tau) f(t - \tau) \\ \Psi(\tau) &= C_0 + \frac{A_1}{\tau} \\ f(t - \tau) &= 1 - e^{-\bar{\delta}(t - \tau)} \end{aligned} \quad (1.204)$$

predstavlja osnovu tzv. Nasledne teorije starenja betona, koju je još ranije zasnovao G.N. Maslov /66/, a koja je naišla na veliku primenu, naročito u sovjetskoj literaturi, a bila je prihvaćena u ranijim preporukama CEB-FIP 1963. i 1970 god, na kojima bazira u nas još važeći Pravilnik o tehničkim merama i uslovima za beton i armirani beton /44/. Prema Preporukama CEB-FIP iz 1970 god. funkcija



$\Psi(\tau)$  je zavisila od starosti betona pri opterećenju  $\tau$ , relativne vlažnosti ambijenta, sadržaja i vrste cementa i fiktivne debljine dok je funkcija  $f(t-\tau)$  zavisila pored vremena delovanja opterećenja i od "fiktivne debljine" elementa. Modul elastičnosti betona je prema N.H.Arutjunjanu takodje funkcija  $\tau$

$$E(\tau) = E_{\infty} (1 - \beta_1 e^{-\alpha_1 \tau}) \quad (1.205)$$

gde je  $E_{\infty}$  krajnja vrednost modula elastičnosti kada  $t \rightarrow \infty$ , a  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  su neke konstante koje se odredjuju na osnovu eksperimentalnih rezultata.

Ako je u Mc Henryjevom izrazu (1.203)  $\gamma_1 = \gamma_3$ , onda on postaje identičan prvom od izraza (1.204) gde je sada

$$\Psi(\tau) = C_0 + A e^{-\bar{\delta}_2 \tau}$$

A.V. Jašin /73/ je predložio izraz

$$\begin{aligned} C(t, \tau) &= \Psi(\tau) f(t-\tau) + F_1(t) - F_1(\tau), \\ \Psi(\tau) &= \left(1 + \frac{k}{\tau}\right) \sum_{i=1}^2 B_i \left[1 - e^{-\bar{\delta}_i (t-\tau)}\right], \\ F_1(t) &= A_1 e^{-\alpha_1 t}, \end{aligned} \quad (1.206)$$

gde su  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $k$ ,  $\alpha_1$  i  $\bar{\delta}_i$  konstante. Ovaj izraz prestavlja sintezu izraza na kojima baziraju nasledna teorija starenja i Deschingerova teorija starenja betona.

Prema S.V. Aleksandrovsom /56/ je

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) - F_1(t) (e^{-\bar{\delta}_1 t} - A) - \Delta(\tau) e^{-\alpha_1 (t-\tau)}, \quad (1.207)$$

$$F_1(t) = \frac{\varphi(\tau) - \Delta(\tau)}{e^{-\bar{\delta}_1 t} - A_2},$$

$$\varphi(\tau) = a_1 + b_1 e^{-\bar{\xi}_1 \tau} + c_2 e^{-\bar{\eta}_1 \tau}, \quad (1.208)$$

$$\Delta(\tau) = a_2 + b_2 e^{-\bar{\xi}_2 \tau} + c_2 e^{-\bar{\eta}_2 \tau},$$

gde su  $A$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\bar{\delta}_1$ ,  $\bar{\xi}_1$ ,  $\bar{\xi}_2$ ,  $\bar{\eta}_1$ ,  $\bar{\eta}_2$  konstante koje se odredjuju na osnovu eksperimentalnih rezultata. Ovaj izraz prema S.V. Aleksandrovsom, se dobro slaže sa eksperimentalnim rezultatima, čak i za periodično promenljiva opterećenja /57/. Upotrebom ovog izraza znatno se komplikuje matematičko rešavanje razli-



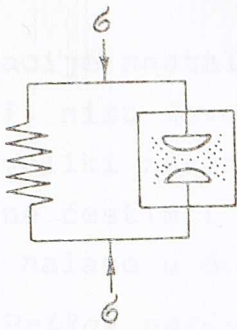
čitih problema, a osim toga on sadrži veliki broj konstanti koje treba odredjivati eksperimentalnim putem, zbog čega je otežala nje-  
gova praktična primena.

### 1.9 Skupljanje (bubrenje) betona . Bazično i tečenje (puzanje) usled sušenja

Pored deformacija nastalih zbog delovanja napona i temperaturnih promena, usled promene relativne vlažnosti ambijenta beton se skuplja ili bubri. Fizičko-hemijski uzroci tečenja (puzanja) i skupljanja betona su od Freyssinetovih radova /11/ tridesetih godina ovog veka do danas, predmet interesovanja i rada mnogih istraživača i naučnika u ovoj oblasti u svetu. Neki autori, kao na primer T.C. Powers /40/, /41/ i S.V. Aleksandrovski /56/, smatraju da promene u sadržaju vlage u cementnom gelu najviše utiču na zapreminske promene betona. T.C. Powers ističe da adsorbirana voda u porama manjim od 30Å (load bearing water) ima primarni značaj u ovom procesu. Promene relativne vlažnosti ambijenta i pritiska u porama usled delovanja spoljašnjih sila (opterećenja) izazivaju promene u sadržaju slobodne energije u adsorbiranoj vodi i poremećaja termodinamike ravnoteže cementnog gela kao polifaznog sistema. Povećanje pritiska u ovim porama i isparivanje vode iz okolnih krupnijih pora i šupljina izaziva porast slobodne energije u adsorbiranoj vodi, zbog čega dolazi do migracije molekula vode iz više napregnutih u manje napregnute delove "filma" adsorbirane vode ili kapilare ispunjene vodom. Intenzitet ovog kretanja, koje se odvija sve dok se ne uspostavi termodinamička ravnoteža i izjednače se pritisci u svim delovima sistema, je utoliko veći ukoliko je manja relativna vlažnost ambijenta. Pored toga pri smanjenju relativne vlažnosti u vodi većih kapilara povećava se hidrostatičko zatezanje /15/. Zbog svega ovoga raste napon pritiska u čvrstoj strukturi gela i elastičnim vezama čestica te strukture pa se stoga smanjuje ukupna zapremina uzorka. Ukoliko uzrok nije opterećen spoljašnjim silama, onda ovaj proces predstavlja skupljanje betona. Prema T.C. Powersu /40/ tečenju i skupljanju betona odgovara isti mikrorološki model (sk. 1.11), sastavljen od sorpcionog elementa i elastične opruge. Sorpcioni element se sastoji od dve pločice izmedju kojih se nalaze slojevi adsor-

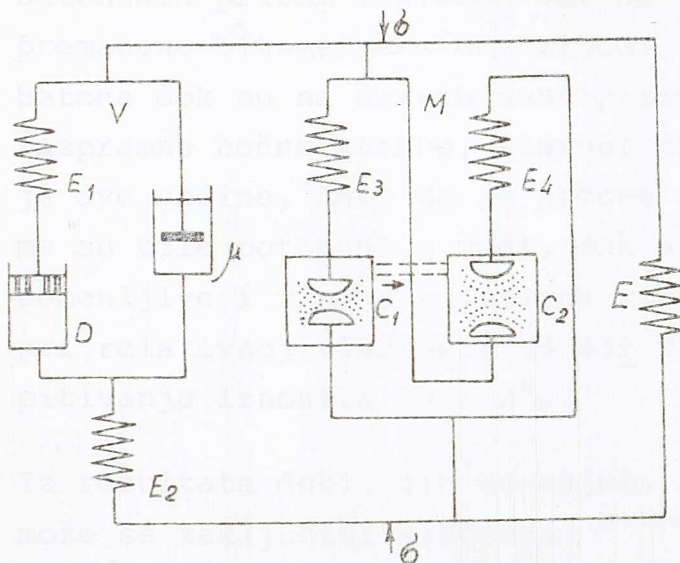


bovane vode, dok opruga prestavlja elastične veze između čvrstih čestica cementnog gela.



Sk. 1.11

Prilikom povećanja relativne vlažnosti ili potapanja uzorka u vodu dešava se obrnut proces, koji dovodi do smanjenja pritiska u elastičnim vezama, povećanja pora i zapremine uzorka. Ovaj proces, u odsustvu, spoljašnjeg opterećenja, se naziva bubrenjem betona.



Sk. 1.12

A.M. Neville, K.S. Gopalakrishnan i A. Ghali /31/ predlažu jedan složeniji i

potpuniji mikrorološki model (sk. 1.12) koji se sastoji od tri elementa  $V$ ,  $M$  i  $E$ . Element  $V$  prikazuje viskoelastoplastične deformacije skeleta gela, dok element  $E$  zamenjuje uticaj nehidratiranih zrna cementa, koji se tokom vremena smanjuje. Element  $M$  ima dve Powersove sorbcione ćelije  $C_1$  i  $C_2$ , tako postavljene da je pri opterećenju napon u njima suprotnog zakona. Na ovaj način opisuju se bočne deformacije uzroka, a količnik  $E_3/E_4$

jednak je Poissonovom koeficijentu tečenja, dok se oprugom  $E_2$  prikazuju trenutne elastične deformacije.

Zapreminske promene nastale usled promena u sadržaju kapilarne i adsorbovane vode u cementnom gelu nazivaju se često u literaturi, naročito anglo-saksonskoj, tečenjem (puzanjem) usled sušenja (drying creep) /1/ i skupljanjem usled sušenja (drying shrinkage) /34/. Ovi procesi se odvijaju simultano i nisu nezavisni jedan od drugog, mada se u izrazima za ukupne deformacije betona tečenje i skupljanje prikazuju najčešće kao međusobno nezavisne i aditivne funkcije vremena. Prema ispitivanjima S.V. Aleksandrovskeg /56/, I. Alia i K. Keslera /1/ skupljanje opterećenih, uzoraka je bilo veće od skupljanja neopterećenih uzoraka. R.L. Hermite /16/, I. Ali i K. Kesler /1/,



Witmann i Lukas /53/, B.R. Gamble i L.J. Parrott /12/ i drugi autori su predložili različito izraze deformacije betona u kojima tečnije izražava u funkciji skupljanja.

Deformacije nastale usled bubrenja betona, kako ističe S.V. Aleksandrovski, nisu dovoljno proučavane teorijski i eksperimentalno, a imaju veliki značaj za hidrotehničke i druge konstrukcije koje su izložene čestim i velikim promenama relativne vlažnosti ili se povremeno nalaze u dodiru sa vodom.

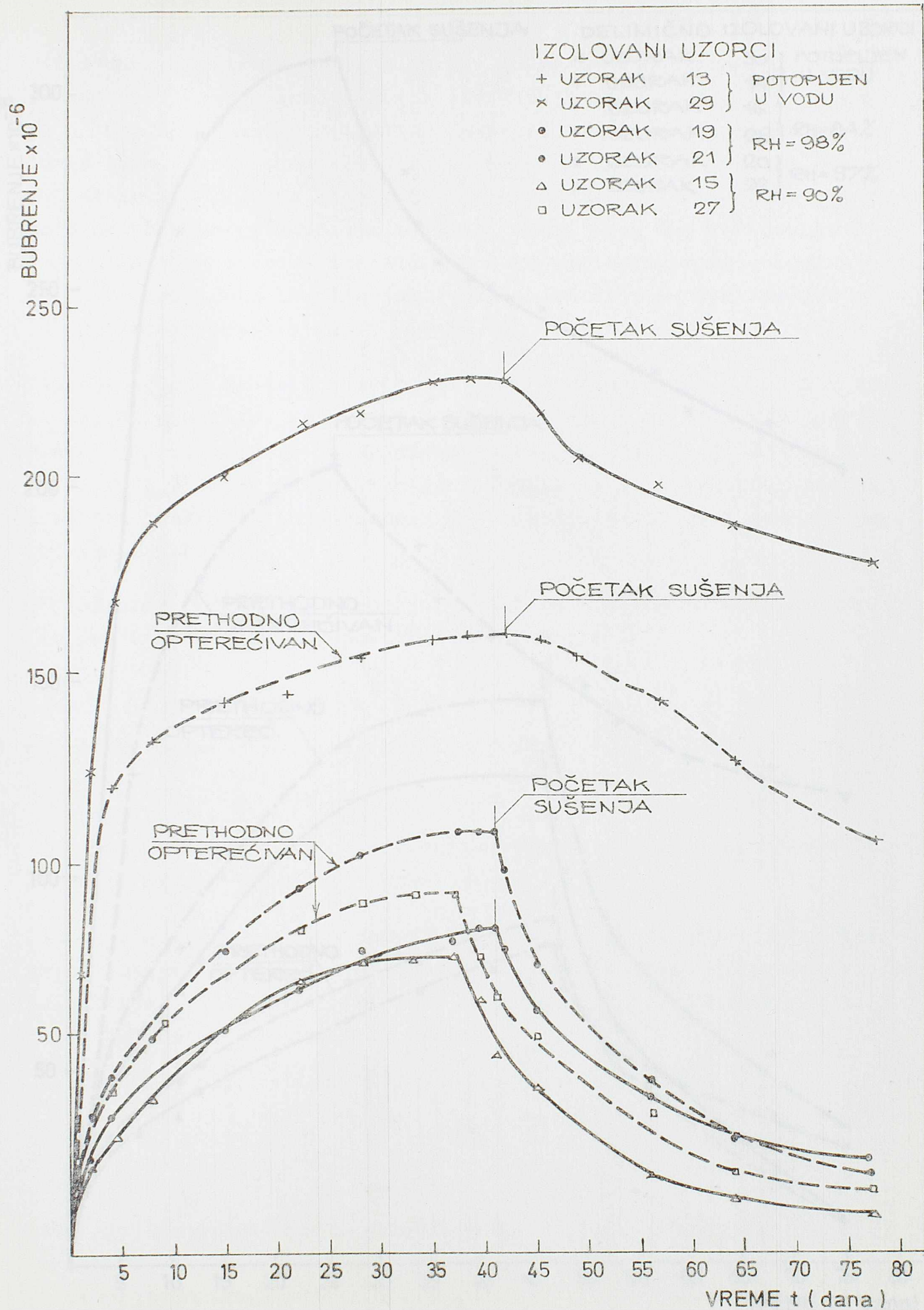
#### 1.10 Prikaz nekih eksperimentalnih rezultata koji se odnose na bubrenje betona

Autor ovog rada je u laboratoriji Britanskog udruženja za cement i beton (Cement and Concrete Association) merno deformacije bubrenja betonskih prizmi 10x10x50 sm. Na šest prizmi su bočne strane bile premazane bitumenskom emulzijom, kako bi se otežao gubitak vode iz betona dok su na drugih šest prizmi bile premazane emulzijom dve naspramne bočne strane. Starost betona na početku merenja iznosila je dve godine, tako da je proces skupljanja bio završen. Četiri prizme su bile potapane u vodi, dok su preostale držane u uslovima nepromenljive i visoke relativne vlažnosti, a zatim izložene sušenju pri relativnoj vlažnosti od  $63 \pm 3\%$ . Temperatura je za svo vreme ispitivanja iznosila  $18 \pm 2^{\circ}\text{C}$ .

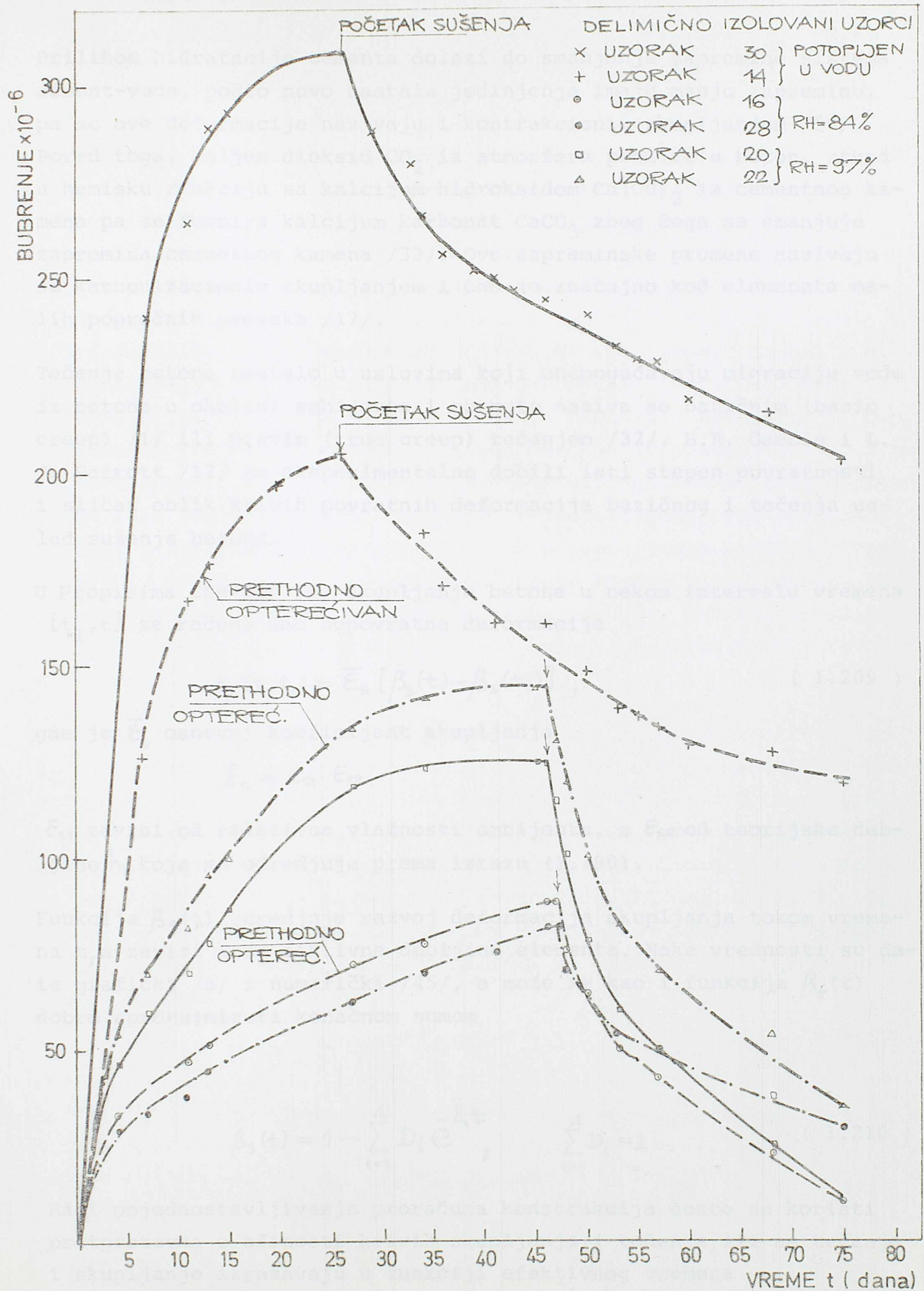
Iz rezultata dobijenih merenjem, koji su dati na sk. 1.13 i 1.14 može se zaključiti sledeće:

- deformacije bubrenja u vodi potopljenih prizmi bile su više od dva puta veće od deformacija prizmi držanih u uslovima relativne vlažnosti od 97%;
- sprečavanje prodiranja vode u kapilare i najsitnije pore izolovanjem bočnih ivica otežava pojavu sorpcionih i kapilarnih efekata i znatno smanjuje bubrenje betona,
- gubitak vode iz velikih šupljina direktno ne utiče na zapreminske promene. Veliki gubici vode na početku sušenja nisu praćeni velikim promenama deformacije,
- deformacije nastale zbog promena relativne vlažnosti mogu biti značajne, čak i pri većim starostima betona, naročito ako su elementi konstrukcija u povremenom dodiru sa vodom, pa ih treba uzimati u obzir pri analizi stanja napona i deformacija.
- deformacije bubrenja betona veće starosti su uglavnom povratne





Sk. 1.13



Sk. 1.14



Prilikom hidratacije cementa dolazi do smanjenja zapremine sistema cement-voda, pošto novo nastala jedinjenja imaju manju zapreminu, pa se ove deformacije nazivaju i kontrakcionim skupljanjem /56/. Pored toga, ugljen dioksid  $\text{CO}_2$  iz atmosfere prodire u beton, stupa u hemisku reakciju sa kalcijum hidroksidom  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  iz cementnog kamena pa se formira kalcijum karbonat  $\text{CaCO}_3$  zbog čega se smanjuje zapremina cementnog kamena /33/. Ove zapreminske promene nazivaju se karbonizacionim skupljanjem i ono je značajno kod elemenata malih poprečnih preseka /17/.

Tečenje betona nastalo u uslovima koji onemogućavaju migraciju vode iz betona u okolini ambijenta i obrnuto naziva se bazičnim (basic creep) /1/ ili pravim (true creep) tečenjem /32/. B.R. Gamble i L. J. Parrott /12/ su eksperimentalno dobili isti stepen povratnosti i sličan oblik krivih povratnih deformacija bazičnog i tečenja usled sušenja betona.

U Propisima CEB-FIP /8/ skupljanje betona u nekom intervalu vremena  $[t_1, t]$  se računa kao nepovratna deformacija

$$\epsilon_s(t, t_1) = \bar{\epsilon}_s [\beta_s(t) - \beta_s(t_1)] , \quad ( 1.209 )$$

gde je  $\bar{\epsilon}_s$  osnovni koeficijent skupljanja

$$\bar{\epsilon}_s = \epsilon_{s1} \cdot \epsilon_{s2}$$

$\epsilon_{s1}$  zavisi od relativne vlažnosti ambijenta, a  $\epsilon_{s2}$  od teorijske debljine  $h_0$ , koja se određuje prema izrazu (1.190).

Funkcija  $\beta_s(t)$  određuje razvoj deformacija skupljanja tokom vremena  $t$ , a zavisi i od fiktivne debljine elementa. Neke vrednosti su date grafički /8/ i numerički /45/, a može se kao i funkcija  $\beta_f(t)$  dobro aproksimirati konačnom sumom

$$\beta_s(t) = 1 - \sum_{i=1}^A D_i e^{-\bar{\delta}_i t} , \quad \sum_{i=1}^A D_i = 1 \quad ( 1.210 )$$

Radi pojednostavljivanja proračuna konstrukcija često se koristi pretpostavka o afinosti krivih skupljanja i tečenja ili se tečenje i skupljanje izražavaju u funkciji efektivnog vremena .



1.11 Slobodna energija i Gibbsov termodinamički potencijal za neki reološki model sa uticajem skupljanja (bubrenja) betona

Na osnovu ovih kraćih razmatranja pojava tečenja i skupljanja betona može se zaključiti da one imaju mehanički i fizičko-hemijski karakter. Odredjivanje promena slobodne energije, smatrajući beton kao polifazni sistem u kojem se odvijaju hemijski i fizičko-hemijski procesi, je vrlo složeno. Ovakav mikrореološki pristup primenjuje se za kvalitativno opisivanje ovih pojava i njihovih uzroka i nepodesan je za neposredno odredjivanje veza između napona i deformacija za praktičnu upotrebu. Mikro-reološki modeli se često koriste za odredjivanje promene osnovnih reoloških svojstava i koeficijenata (Youngovog modula, Poissonovog koeficijenta, koeficijenta viskoznosti) u zavisnosti od sadržaja odnosno koncentracije pojedinih faza (agregata, hidratisanog i nehidratisanog cementa, adsorbovanje i isparivanje vode) i njihovih promena tokom vremena. Ovako dobijeni podaci, za koje se daje od strane autora koji predlaže neki mikrореološki model i eksperimentalna potvrda, koriste se dalje u odgovarajućem makrореološkom modelu betona za formulisanje reoloških jednačina stanja.

Pošto se u ovom radu uglavnom primenjuje makrореološki pristup, koji je od neposrednog interesa za odredjivanje stanja napona i deformacija konstrukcija i njihovih elemenata, to će se za dati reološki model betona uticaj skupljanja ili bubrenja na promenu slobodne energije i Gibbsovog termodinamičkog potencijala tretirati slično uticaju temperature. U tom slučaju, da bi se ispunili uslovi (1.35), odnosno (1.127a) i (1.135) iz kojih se parcijalnom integracijom dobijaju veze između napona i deformacija, su promene ovih termodinamičkih potencijala

$$F(\varepsilon, \theta) = F^*(\varepsilon, \theta) + F^0 \quad (1.211)$$

$$F^*(\varepsilon, \theta) = \frac{E'(t)}{2} \varepsilon(t) [\varepsilon(t) - \varepsilon^s(t) - \alpha\theta(t)] - E'(t) \varepsilon(t) \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\varepsilon(\tau) - \varepsilon^s(\tau) - \alpha\theta(\tau)] d\tau \quad (1.211a)$$

$$G(\varepsilon, \theta) = G^*(\varepsilon, \theta) + G^0 \quad (1.212)$$

$$-G^*(\sigma, \varepsilon^s, \theta) = \frac{\sigma^2(t)}{2E'(t)} + \sigma(t) \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\sigma(\tau)}{E'(\tau)} d\tau + \sigma(t) [\varepsilon_s(t) + \alpha\theta(t)] \quad (1.212a)$$



gde je  $\varepsilon_s(t)$  deformacija skupljanja odnosno bubrenja betona.

Prema izrazima (1.35), odnosno (1.127a) i (1.135) dobijaju se Volter-ine integralne jednačine kao reološke jednačine stanja.

$$\sigma(t) = E'(t) [\varepsilon(t) - \varepsilon_s(t) - \alpha\theta(t)] - E'(t) \int_{t_1}^t R(t,\tau) [\varepsilon(\tau) - \varepsilon_s(\tau) - \alpha\theta(\tau)] d\tau, \quad (1.213)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E'(t)} + \int_{t_1}^t K(t,\tau) \frac{\sigma(\tau)}{E'(\tau)} d\tau + \varepsilon_s(t) + \alpha\theta(t). \quad (1.214)$$

Ove jednačine se mogu dobiti i neposredno primenom Boltzmannovog principa superpozicije uticaja /4/ i definišu tzv. fizičku linear-  
nost veze između napona i deformacija, odnosno bazu L i n e a r n e  
t e o r i j e t e č e n j a (puzanja) b e t o n a. Eksperimentalni  
rezultati A.D. Rossa /34/, B. Breslera /5/, A.V. Jašina /73/ A.A.  
Gvozdeva /62/ i drugih istraživača pokazuju da primena Boltzman-  
vog principa nije sasvim opravdana. Ovi autori su dobili razlike  
između eksperimentalnih i teorijskih rezultata prema Boltzmannovom  
principu super-pozicije za stepenasto promenljiva opterećenja tokom  
vremena i ostupanja su bila veća u slučaju smanjenja intenziteta na-  
pona nego u slučaju porasta. Pored toga, deformacije tečenja (pu-  
zanja) betona zavise od toga da li je uzrok opterećen na pritisak  
ili zatezanje. Medjutim prema rezultatima nekih autora tečenje be-  
tona usled zatezanja jednako je tečenju usled pritiska, dok su opet  
drugi autori dobili manje deformacije tečenja usled zatezanja. Pre-  
ma eksperimentalnim rezultatima J.M. Illstona /18/ početna brzina  
tečenja je veća pri zatezanju i smanjuje se sa povećanjem starosti  
betona. Veličina konačne povratne deformacije tečenja (delayed  
elasticity) je ista pri zatezanju i pritisku u uslovima velike re-  
lativne vlažnosti, dok je uslovima niske relativne vlažnosti veća  
deformacija usled pri zatezanju. A.M. Neville i J.J. Brooks /6/ su  
dobili eksperimentalne rezultate po kojima je za manju starost te-  
čenje betona (28 dana) pri zatezanju veće od tečenja pri pritisku,  
dok je za beton opterećen 56 dana posle spravljanja bilo manje te-  
čenje pri zatezanju. Oni ističu, kao i S.V. Aleksandrovski da gene-  
ralizacije eksperimentalnih rezultata nisu moguće pri različitim  
starostima nisu moguće i da ti rezultati zavise od uslova u kojima  
se eksperimenti izvode.



Razlike u eksperimentalnim i računskim vrednostima dobijene prema izrazima (1.213) i (1.214) nastaju zbog toga što se usvojenim makroreološkim modelom ne mogu prikazati svi procesi (mehanički, hemijski i fizičko-hemijski) koji se dešavaju u betonu, a koji imaju uticaja na njegovo ponašanje u različitim uslovima i pri različitim promenama opterećenja. Stoga termodinamičke potencijale treba u ovom slučaju shvatiti kao veličine koje odgovaraju datom reološkom modelu i one su aproksimativne u odnosu na stvarne vrednosti u materijalu u onoj meri u kojoj model može realno da prikaže stvarno ponašanje materijala.

Medjutim i pored pomenutih odstupanja od eksperimentalnih rezultata opravdanost primene Boltzmanovog principa naišla je na svoju potvrdu u teoriji i praksi. Predlozi nekih autora /62/ nisu šire prihvaćeni jer nisu imali značajnijeg uticaja na konačne rezultate, a mnogo komplikuju i onako složene proračune i analize stanja napona i deformacija betonskih konstrukcija.

Linearna teorija tečenja (puzanja) betona ima ograničenu primenu i za jednoosna stanja napona važi ako napon pritiska ne prelazi 50-60% čvrstoće betona, tako da su za veće napone reološke jednačine stanja nelinearne. Medjutim, pošto se najveći broj konstrukcija projektuje tako da maksimalni naponi ne prelaze ovu granicu, to je primena linearne teorije vrlo široka i značajna. Pri proračunu nekih posebnih konstrukcija ili njihovih elemenata i rešavanju nekih za praksu značajnih zadataka, kao što su problemi stabilnosti, uticaj tečenja (puzanja) betona na stanja granične ravnoteže i koeficijenta sigurnosti i drugo, moraju se uzeti u obzir nelinearne veze između napona i deformacija.

### 1.12 Veze između napona i deformacija u nelinearnoj teoriji tečenja betona

U nelinearnoj teoriji tečenja (puzanja) betona za neki konstantan napon koji deluje od trenutka vremena  $t_1$ , je

$$\varepsilon(t) = \frac{f_1(\sigma)}{E(t_1)} + f_2(\sigma)C(t, t_1) + \varepsilon_s(t) + \alpha\theta(t) \quad (1.215)$$



Prvi član u ovom izrazu određuje trenutnu deformaciju koja nastaje odmah posle nanošenja opterećenja, drugi deformaciju tečenja, a treći skupljanje betona.

Ako se napon tokom vremena menja, dobija se primenjujući princip superpozicije uticaja posle parcijalne integracije nelinearna Volterina integralna jednačina druge vrste

$$\varepsilon(t) = \frac{f_1[\sigma(t)]}{E(t)} + \int_{t_1}^t \frac{f_1[\sigma(\tau)]}{E(\tau)} k(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t \frac{f_2[\sigma(\tau)]}{E(\tau)} K_1(t, \tau) d\tau + \varepsilon_s(t) + \alpha \theta(t), \quad (1.216)$$

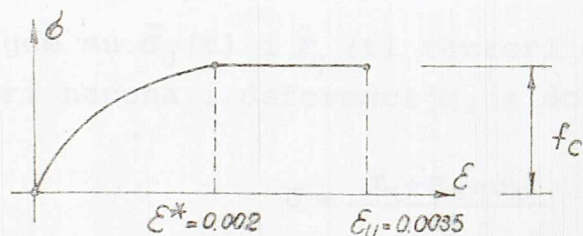
gde su, kao i u linearnoj teoriji

$$k(\tau) = -E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right], \quad K_1(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau).$$

Prema Propisima CEB-FIP /8/ funkcija  $f_1(\sigma)$ , koja definiše trenutnu deformaciju, bila bi (sk. 1.13) za jednoosno stanje napona

$$f_1(\sigma) = 2f_c \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma}{f_c}} \right), \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^* \quad (1.217)$$

Za  $\varepsilon^* \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u$ , smatra se da je beton idealno plastičan materijal, pa je trenutna deformacija nezavisna od napona  $\sigma$ . U ovom izrazu je  $f_c$  karakteristična čvrstoća betonskog cilindra prečnika 30 cm, a modul elastičnosti



Sk. 1.13

$$E(t) = E_0 = \frac{2f_c}{\varepsilon^*} \quad (1.217a)$$

Ovi se izrazi predlažu i u našem Pravilniku o tehničkim merama i uslovima za beton i armirani beton /44/, s tim što važe za sve vrednosti  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u$ ) i umesto  $f_c$  treba uneti čvrstoću betonske prizme  $f_p$ .

N.H. Arutjunjan /58/ je predložio sledeće izraze

$$f_1(\sigma) = \sigma$$

$$f_2(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \sigma \leq \bar{\eta} f_p \\ \sigma + \bar{\beta} \sigma & \sigma > \bar{\eta} f_p \end{cases} \quad (1.218)$$

Koeficijent  $\bar{\eta}$  određuje granicu važenja linearne i nelinearne teorije i on se, kako je već rečeno, kreće 0.5-0.6, dok se  $\bar{\beta}$  određuje eksperimentalno. I.I. Ulicki /71/ je predložio izraze za ove koeficijente

$$\bar{\eta} = \frac{t_1}{30+t_1}, \quad \bar{\beta} = \bar{\nu} \left[ \frac{\sigma(t)}{f_p} - \bar{\eta} \right]^2, \quad (1.219)$$

gde se  $\bar{\nu}$  određuje eksperimentalno.

V.M. Bondarenko /60/ smatra da se izraz  $f_p(\sigma) = \sigma$  može koristiti čak i kada je  $\bar{\eta} = 0.8$ .

### 1.13 Slobodna energija i Gibbsov termodinamički potencijal za prostorno stanje napona betona

Tenzor napona  $\sigma_{ij}$  i tenzor deformacije  $\gamma_{ij}$  se često prikazuju u obliku

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= \sigma(t)\delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}(t), \\ \gamma_{ij}(t) &= \gamma(t)\delta_{ij} + \tilde{\gamma}_{ij}(t), \end{aligned} \quad (1.220)$$

gde su  $\tilde{\sigma}_{ij}(t)$  i  $\tilde{\gamma}_{ij}(t)$  tenzori devijatori, a  $\sigma(t)$  i  $\gamma(t)$  sferni tenzori napona i deformacije, a dobijaju se prema izrazima

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}, \quad \gamma = \frac{\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}}{3}. \quad (1.221)$$

Veze između  $\tilde{\sigma}_{ij}(t)$  i  $\tilde{\gamma}_{ij}(t)$  odnosno  $\sigma(t)$  i  $\gamma(t)$ , vrednosti termodinamičkih potencijala  $F$  i  $G$  određuju se prema istom reološkom modelu, pri čemu  $E'(t)$ ,  $E'_k$ ,  $\mu'(t)$  imaju različita značenja za sverni i devijatorski deo. Stoga u svim izrazima i jednačinama u odeljcima 1.7 i 1.8 treba zameniti

- za sverni tenzor

$$E'(t) = 3K(t), \quad \varepsilon(t) = \gamma(t), \quad \sigma(t) = \sigma(t),$$



- za devijatorski tenzor

$$\bar{E}'(t) = 2\bar{G}(t), \quad \varepsilon(t) = \tilde{\gamma}_{ij}(t), \quad \sigma(t) = \tilde{\sigma}_{ij}(t); \quad (1.222)$$

- za jednoosno stanje napona

$$\bar{E}'(t) = E(t), \quad \varepsilon(t) = \varepsilon(t), \quad \sigma(t) = \sigma(t).$$

$K(t)$  je modul kompresije, a  $\bar{G}(t)$  modul klizanja materijala i izražavaju se u funkciji Youngovog modula elastičnosti  $E(t)$  i Poissonovog koeficijenta  $\nu(t)$

$$K(t) = \frac{E(t)}{3[1-2\nu(t)]}, \quad (1.223)$$

$$\bar{G}(t) = \frac{E(t)}{2[1+\nu(t)]}.$$

Funkcije  $C(t, \tau)$ ,  $K(t, \tau)$  i  $R(t, \tau)$  imaju, isto tako, različite vrednosti

$$\begin{aligned} C(t, \tau) &= C_s(t, \tau) \\ R(t, \tau) &= R_s(t, \tau) \quad \text{za sverni tenzor,} \\ K(t, \tau) &= K_s(t, \tau) \end{aligned} \quad (1.224)$$

$$\begin{aligned} C(t, \tau) &= C_D(t, \tau) \\ R(t, \tau) &= R_D(t, \tau) \quad \text{za tenzor devijator.} \\ K(t, \tau) &= K_D(t, \tau) \end{aligned} \quad (1.225)$$

Tenzor devijator deformacije određuje promenu oblika, a sverni tenzor deformacije promenu zapremine, pa se tenzor deformacije skupljanja  $\gamma_{ij}^s(t)$  takodje može prikazati u obliku

$$\gamma_{ij}^s(t) = \gamma^s(t)\delta_{ij} + \tilde{\gamma}_{ij}^s(t) \quad (1.226)$$

U ovom radu se smatra da promena temperature ne izaziva promenu oblika, pa je kao i za izotropno elastično telo

$$\gamma_{ij}^\theta(t) = \alpha\theta(t)\delta_{ij}. \quad (1.227)$$

Slobodna energija i Gibbsov potencijal, koji nastaju usled promene oblika  $F_D(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}^s)$ ,  $G_D(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}^s)$  i promene zapremine  $F_s(\gamma, \gamma^s, \theta)$  i  $G_s(\sigma, \sigma^s, \theta)$  su prema (1.211) i (1.212)

$$\begin{aligned} F_D(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}^s) &= F_D^*(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}^s) + F_D^0, & F_s(\gamma, \gamma^s, \theta) &= F_s^*(\gamma, \gamma^s, \theta) + F_s^0, \\ G_D(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}^s) &= G_D^*(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}^s) + G_D^0, & G_s(\sigma, \sigma^s, \theta) &= G_s^*(\sigma, \sigma^s, \theta) + G_s^0. \end{aligned} \quad (1.228)$$

gde su s obzirom na (1.211a), (1.212a), (1.222), (1.224) i (1.225)

$$\begin{aligned}
 F_D^*(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}^s) &= \tilde{\gamma}_{ij}(t) \bar{G}(t) [\tilde{\gamma}_{ij}(t) - 2\tilde{\gamma}_{ij}^s(t)] - \\
 &\quad - 2\tilde{\gamma}_{ij}(t) \bar{G}(t) \int_{t_1}^t R_D(t, \tau) [\tilde{\gamma}_{ij}(\tau) - \tilde{\gamma}_{ij}^s(\tau)] d\tau \\
 F_S^*(\gamma, \gamma^s, \theta) &= 9\gamma(t) K(t) \left[ \frac{\gamma(t)}{2} - \gamma^s(t) - \alpha\theta(t) \right] - \\
 &\quad - 9\gamma(t) K(t) \int_{t_1}^t R_S(t, \tau) [\tilde{\gamma}_{ij}(\tau) - \tilde{\gamma}_{ij}^s(\tau)] d\tau
 \end{aligned} \tag{1.229}$$

$$\begin{aligned}
 -G^*(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}^s) &= \frac{1}{4G(t)} \sigma_{ij}^2(t) + \tilde{\sigma}_{ij}(t) \int_{t_1}^t K_D(t, \tau) \frac{\tilde{\sigma}_{ij}(\tau)}{2\bar{G}(\tau)} d\tau + \tilde{\sigma}_{ij}(t) \tilde{\gamma}_{ij}^s(t) \\
 -G^*(\sigma, \gamma^s, \theta) &= \frac{\sigma^2(t)}{2K(t)} + \sigma(t) \int_{t_1}^t K_S(t, \tau) \frac{\sigma(\tau)}{K(\tau)} d\tau + 3\sigma(t) [\gamma^s(t) + \alpha\theta(t)]
 \end{aligned} \tag{1.230}$$

Parcijalnim diferenciranjem  $F^*$  i  $G^*$  dobijaju se veze izmedju  $\tilde{\sigma}_{ij}(t)$  i  $\tilde{\gamma}_{ij}(t)$  odnosno  $\sigma(t)$  i  $\gamma(t)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_D(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}^s, \theta)}{\partial \tilde{\gamma}_{ij}} &\equiv \tilde{\sigma}_{ij}(t) = 2\bar{G}(t) [\tilde{\gamma}_{ij}(t) - \tilde{\gamma}_{ij}^s(t)] - 2\bar{G}(t) \int_{t_1}^t R_D(t, \tau) [\tilde{\gamma}_{ij}(\tau) - \tilde{\gamma}_{ij}^s(\tau)] d\tau, \\
 \frac{\partial F_S(\gamma, \gamma^s, \theta)}{\partial \gamma} &\equiv 3\sigma(t) = 9K(t) [\gamma(t) - \gamma^s(t) - \alpha\theta(t)] - \\
 &\quad - 9K(t) \int_{t_1}^t R_S(t, \tau) [\gamma(\tau) - \gamma^s(\tau) - \alpha\theta(\tau)] d\tau
 \end{aligned} \tag{1.231}$$

$$\frac{\partial G(\tilde{\sigma}_{ij}, \sigma, \theta)}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \equiv \tilde{\gamma}_{ij}(t) = \frac{\tilde{\sigma}_{ij}(t)}{2\bar{G}(t)} + \int_{t_1}^t K_D(t, \tau) \frac{\tilde{\sigma}_{ij}(\tau)}{\bar{G}(\tau)} d\tau + \tilde{\gamma}_{ij}^s(t) \tag{1.232}$$

$$\frac{\partial G(\tilde{\sigma}_{ij}, \sigma, \theta)}{\partial \sigma} \equiv \gamma(t) = \frac{\sigma(t)}{3K(t)} + \int_{t_1}^t K_S(t, \tau) \frac{\sigma(\tau)}{3K(\tau)} d\tau + \gamma^s(t) + \alpha\theta(t)$$

Ukupna slobodna energija je

$$F(\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta) = F^*(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}^s, \theta) + F^0 \tag{1.233}$$

gde su prema (1.228)

$$F^*(\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta) = F_D^*(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}^s) + F_S^*(\gamma, \gamma^s, \theta) \tag{1.234}$$

Kada se u (1.234) uvrsti (1.229) i (1.230) dobija se



$$\begin{aligned}
F^*(\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta) = & \mu(t) \gamma_{ij}(t) [\gamma_{ij}(t) - 2\gamma_{ij}^s(t)] - 2\mu(t) \gamma_{ij}(t) \int_{t_1}^t R_D(t, \tau) [\gamma_{ij}(\tau) - \gamma_{ij}^s(\tau)] d\tau + \\
& + \frac{9}{2} \gamma(t) \lambda(t) [\gamma(t) - 2\gamma^s(t)] - 9\gamma(t) \lambda(t) \int_{t_1}^t R_\lambda(t, \tau) [\gamma(\tau) - \gamma^s(\tau)] d\tau - \\
& - 3\gamma(t) [3\lambda(t) + 2\mu(t)] \alpha [\theta(t) - \int_{t_1}^t R_S(t, \tau) \theta(\tau) d\tau]
\end{aligned} \quad (1.235)$$

gde su  $\mu(t)$  i  $\lambda(t)$  Laméove konstante

$$\mu(t) = \bar{G}(t), \quad \lambda(t) = K(t) - \frac{2}{3} \bar{G}(t), \quad (1.236)$$

$$R_\lambda(t, \tau) = \left[1 + \frac{2}{3} \frac{\mu(t)}{\lambda(t)}\right] R_S(t, \tau) - \frac{2}{3} \frac{\mu(t)}{\lambda(t)} R_D(t, \tau), \quad (1.237)$$

ili s obzirom na (1.50)

$$R_\lambda(t, \tau) = \frac{1+\nu(t)}{3\nu(t)} R_S(t, \tau) - \frac{1-2\nu(t)}{3\nu(t)} R_D(t, \tau) \quad (1.238)$$

Isto tako se dobija kada se (1.220) uvrsti u (1.231)

$$\begin{aligned}
-G^*(\sigma_{ij}, \theta, \gamma_{ij}^s) = & \bar{\mu}(t) \sigma_{ij}(t) \sigma_{ij}(t) + 2\sigma_{ij}(t) \int_{t_1}^t K_D(t, \tau) \bar{\mu}(\tau) \sigma_{ij}(\tau) d\tau - \\
& - \frac{9}{2} \bar{\lambda}(t) \sigma^2(t) - 9\sigma(t) \int_{t_1}^t K_\lambda(t, \tau) \bar{\lambda}(\tau) \sigma(\tau) d\tau + \\
& + \sigma_{ij}(t) \gamma_{ij}^s(t) + 3\alpha \sigma(t) \theta(t),
\end{aligned} \quad (1.239)$$

gde su

$$K_\lambda(t, \tau) = \frac{3\lambda(t) + 2\mu(t)}{3\lambda(t)} K_D(t, \tau) - \frac{2\mu(t)}{3\lambda(t)} K_S(t, \tau); \quad (1.240)$$

ili

$$K_\lambda(t, \tau) = \frac{1+\nu(t)}{3\nu(t)} K_D(t, \tau) - \frac{1-2\nu(t)}{3\nu(t)} K_S(t, \tau), \quad (1.240a)$$

$$\bar{\mu}(t) = \frac{1}{4\mu(t)}, \quad \bar{\lambda}(t) = \frac{\lambda(t)}{2\mu(t)[2\mu(t)+3\lambda(t)}; \quad (1.241)$$

odnosno

$$\bar{\mu}(t) = \frac{1+\nu(t)}{2E(t)}, \quad \bar{\lambda}(t) = \frac{\nu(t)}{E(t)} \quad (1.241a)$$

Pošto je  $\frac{\partial F^0}{\partial \gamma_{ij}} = 0$ ,  $\frac{\partial F^0}{\partial \theta} = 0$ ,  $\frac{\partial G^0}{\partial \sigma_{ij}} = 0$ , to će se dalje u ovom radu upotrebljavati funkcionali  $G^*(\sigma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta)$  i  $F^*(\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta)$  čijim se parcijalnim diferencijaljenjem dobijaju veze između napona i deformacija betona

$$\frac{\partial F^*(\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta)}{\partial \gamma_{ij}} \equiv \sigma_{ij}(t) = 2\mu(t) [\gamma_{ij}(t) - \gamma_{ij}^s(t)] - 2\mu(t) \int_{t_1}^t R_D(t, \tau) [\gamma_{ij}(\tau) - \gamma_{ij}^s(\tau)] d\tau +$$

$$+ 3\lambda(t) [\gamma(t) - \gamma^s(t)] \delta_{ij} + 3\lambda(t) \delta_{ij} \int_{t_1}^t R_\lambda(t, \tau) [\gamma(\tau) - \gamma^s(\tau)] d\tau -$$

$$- \alpha [3\lambda(t) + 2\mu(t)] \left[ \theta(t) - \int_{t_1}^t R_S(t, \tau) \theta(\tau) d\tau \right] \delta_{ij} \quad (1.242)$$

$$- \frac{\partial G^*(\sigma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta)}{\partial \sigma_{ij}} \equiv \gamma_{ij}(t) = 2\bar{\mu}(t) \sigma_{ij}(t) + 2 \int_{t_1}^t K_D(t, \tau) \bar{\mu}(\tau) \sigma_{ij}(\tau) d\tau -$$

$$- \left[ \bar{\lambda}(t) \sigma(t) - \int_{t_1}^t K_\lambda(t, \tau) \bar{\lambda}(\tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \delta_{ij} + \gamma_{ij}^s(t) +$$

$$+ \alpha \theta(t) \delta_{ij}. \quad (1.243)$$

Merenjem deformacija jednoosno opterećenih uzoraka dobijaju se eksperimentalne vrednosti Youngovog modula  $E(t)$ , mere podužne deformacije tečenja  $C(t, \tau)$ , Poissonovog koeficijenta trenutne deformacije  $\nu(t)$  i mere poprečne deformacije  $C_p(t, \tau)$ . Količnik poprečne i podužne deformacije naziva se Poissonovim koeficijentom tečenja  $\nu_c(t, \tau)$

$$\nu_c(t, \tau) = \frac{C_p(t, \tau)}{C(t, \tau)},$$

dok se mera tečenja pri čistom smicanju  $\tilde{C}(t, \tau)$  određuje prema izrazu /58/

$$\tilde{C}(t, \tau) = 2 [1 + \nu_c(t, \tau)] C(t, \tau).$$

Dovoljno je između funkcija  $C(t, \tau)$ ,  $C_p(t, \tau)$ ,  $\tilde{C}(t, \tau)$  i  $\nu_c(t, \tau)$  da budu na osnovu eksperimentalnih ili drugih podataka unapred poznata dve od njih, a ostale se određuju prema prethodnim izrazima. U ovom slučaju  $K_D(t, \tau)$ ,  $K_S(t, \tau)$  i  $K_\lambda(t, \tau)$  se izražavaju u zavisnosti od  $C(t, \tau)$  i  $\nu_c(t, \tau)$  i veličina koje se odnose na trenutnu deformaciju  $E(t)$  i  $\nu(t)$  /58/

$$K_D(t, \tau) = - \frac{E(t)}{1 + \nu(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1 + \nu(\tau)}{E(\tau)} + C(t, \tau) (1 + \nu_c(t, \tau)) \right]$$

$$K_\lambda(t, \tau) = - \frac{E(t)}{\nu(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\nu(\tau)}{E(\tau)} + \nu_c(t, \tau) C(t, \tau) \right] \quad (1.244)$$

$$K_S(t, \tau) = - \frac{E(t)}{1 - 2\nu(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1 - 2\nu(\tau)}{E(\tau)} + (1 - 2\nu_c(t, \tau)) C(t, \tau) \right]$$

Odgovarajuće rezolvente ovih jezgra  $R_D(t, \tau)$ ,  $R_\lambda(t, \tau)$  i  $R_S(t, \tau)$  određuju se rešavanjem integralne jednačine (1.137) kojom se definiše veza između funkcija  $K(t, \tau)$  i  $R(t, \tau)$ .



N.H. Arutjunjan /58/ je uveo pretpostavku prema kojoj su Poissonovi koeficijenti deformacije i trenutne deformacije jednaki i nezavisni od vremena

$$\nu_c(t, \tau) = \nu(t) = \nu \quad (1.245)$$

i u tom slučaju su

$$\begin{aligned} K_D(t, \tau) &= K_\lambda(t, \tau) = K_S(t, \tau) = K(t, \tau), \\ R_D(t, \tau) &= R_\lambda(t, \tau) = R_S(t, \tau) = R(t, \tau), \\ K(t, \tau) &= -E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] \end{aligned} \quad (1.246)$$

pa veze između napona i deformacija (1.242) i (1.243) dobijaju jednostavniji oblik. Koristeći ovu pretpostavku on je pokazao da se naponsko stanje  $\sigma_{ij}(t)$  betona kao tela sa promenljivim reološkim svojstvima tokom vremena, poklapa sa naponskim stanjem  $\sigma_{ij}^e(t)$  betona kao elastičnog materijala za zadate spoljašnje sile

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^e(t). \quad (1.247)$$

Ako je naponsko stanje u telu izazvano temperaturnim promenama pomeranjem oslonaca i slično onda se uz pretpostavku (1.245) naponi  $\sigma_{ij}(t)$  određuju rešavanjem sistema nezavisnih Volterrinih integralnih jednačina

$$\frac{\sigma_{ij}(t)}{E(t)} + \int_{t_1}^t \frac{\sigma_{ij}(\tau)}{E(\tau)} k(t, \tau) d\tau = \frac{\sigma_{ij}^e(t)}{E(t)}. \quad (1.248)$$

Na ovaj način, on je pokazao da se Volterrin princip može primeniti i na tela, kakav je i beton, koja pored elastične naslednosti imaju svojstvo starenja.

U literaturi postoji veliki broj podataka dobijenih na bazi eksperimenata za vrednosti Poissonovog koeficijenta trenutne deformacije  $\nu(t)$ . M. Polivka, D. Pirtz i R.F. Adams /39/ su ustanovili da on zavisi od sadržaja cementne paste u betonu i za sadržaj od 12.6% je iznosio 0.200 dok je za sadržaj od 15% iznosio 0.149. J. Timusk i J.W. H. King /48/ su dobili vrednost 0.154 i nisu našli neku značajniju razliku između uzoraka izloženih jednoosnom i dvoosnom stanju napona. Prema ispitivanjima A.M. Nevillea, K.S. Gopalakrishnana i A. Ghallia /31/ vrednost ovog koeficijenta je iznosila 0,18-0,19, dok L.J. Parrott /38/ dobio za beton, držan u vlažnoj sredini i spravljan od



agregata krečnjačkog i doleritskog sastava, 0.22-0.25 i ustanovio da se držanjem betona u suvoj sredini smanjuje do 0.19. M. Anson i K. Newman /2/ ističu da sadržaj i vrsta agregata, relativna vlažnost i temperatura ambijenta, i metoda ispitivanja utiču na veličinu Poissonovog koeficijenta. Za agregat šljunkovitog sastava pri koncentraciji 60-75% vrednost ovog koeficijenta, prema njihovim ispitivanjima, iznosi 0.12 do 0.16 i smanjuje se sa povećanjem koncentracije odnosno specifične zapremine agregata u betonu.

J.C. Marechal /27/ je proučavao uticaj temperature na Poissonov koeficijent i ustanovio na osnovu eksperimenata da se pri porastu temperature betona do 50°C neznatno povećava. Dalje povećavanje temperature izaziva smanjenje ovog koeficijenta, tako da na temperaturi od 300°C iznosi polovinu vrednosti koju je beton imao u normalnim uslovima. S druge strane, kada se zagrejan beton hladi promena ovog koeficijenta je neznatna ukoliko u betonu ima još isparljive vode.

O uticaju starosti betona na  $\nu(t)$  nema mnogo eksperimentalnih podataka. M. Anson i K. Newman /2/ smatraju da u toku prvih šest časova po spravljanju betona ovaj koeficijent pada sa vrednosti 0.5 na 0 a zatim se povećava u toku prvih deset dana kada dostiže najveći deo svoje vrednosti. Prema ispitivanjima Kaplana /30/ vrednost ovog koeficijenta za beton stariji od tri dana je praktično nepromenljiva. Sličan rezultat dobio je i M. Muravljov /30/.

Razlike u vrednostima Poissonovog koeficijenta tečenja  $\nu_c$  koje su dobili pojedini istraživači su mnogo veće nego za koeficijent trenutne deformacije  $\nu$ . A.M. Neville /33/ ističe da one nastaju najčešće usled različitih metoda ispitivanja i merenja. Prema njegovim istraživanjima /31/ vrednost ovog koeficijenta 0.17-0.23 za uzroke držane u suvoj sredini 0.17 do 0.23, a za uzroke držane u uslovima potpune vlažnosti 0.17 do 0.18. Pored toga manje vrednosti su dobijene za prostorno nego za jednoosno stanje napona i veći je u pravcu napona zatezanja (0.15-0.17) nego pritiska (0.09-0.17). J. Timusk i J.W. King /48/ su dobili veće vrednosti Poissonovog koeficijenta  $\nu_c$  uzoraka iz kojih je bilo sprečeno isparavanje vode (0.15 posle 100 dana) nego za uzorke gde isparavanje vode nije bilo sprečeno (0.08 posle 100 dana) za jednoosno stanje napona. Za dvoosno stanje napona ove vrednosti su znatno manje.



Prema ispitivanjima K. Kordine /25/ zavisi od mineraloškog sastava agregata, dok je A.A. Gvozdjev /61/ našao da je  $v_c$  u početku veće od  $v$ , i da se ta razlika tokom vremena smanjuje. E.A. Kaplan i M. Murovljov /30/ su predložili različite izraze za određivanje ovog koeficijenta u zavisnosti od starosti betona pri opterećenju i dužine vremenskog intervala u kojem opterećenje deluje.

Zbog značajnih ostupanja u vrednostima koje su dobili pojedini istraživači, tako da je prema jednim  $v_c$  veće od  $v$ , a prema drugima obrnuto, to ima puno opravdanja korišćenje uprošćenja N.H. Arutjunjana (1.245), jer se na taj način znatno olakšava rešavanje različitih problema reologije betona. I.E. Prokopovič /69/ je pokazao da greška u veličini oktaedarskih napona, koja nastaje usled ovakve pretpostavke ne prelazi 5-6%.

- Wiener Ber., 1874, Bd. 70, S. 275
- /5/ B r e s l e r, B., Some factors in the time-dependent creep and shrinkage behaviour of reinforced concrete. Portland Cement Association, Laboratory, Note No. LC/150/88, 1947, 17 pp.
- /6/ B r o k o s, J. V. and N e v i l, J. C., The dependence of creep and shrinkage on the strength of concrete. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, Vol. 68, Pt. 2, 1971, pp. 131-141.
- /7/ C o l e m a n, B., Thermodynamics of materials. Butterworths, London, 1971. Interscience for Mechanical Engineers, London, No. 13, Butterworths, London - New York 1971.
- /8/ C o m i t e e d e l' I n t e r n a t i o n a l e p o u r l' E t a b l i s s e m e n t d' u n C o d e C E B - F I P M o d e l C o d e f o r C o n c r e t e S t r u c t u r e s. International System of Unified Standard Codes of Practice for Concreting, Vol. II, 1978, pp. 331-342.
- /9/ C o n w e y, J. J. and C o u t e r, J. J., Direct methods of analysing the structure of concrete. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, Vol. 71, Pt. 2, 1974, pp. 395-402.
- /10/ E r i c s s o n, O., Mechanics of Concreting. McGraw-Hill, New York, 1971.
- /11/ F r a y s a i n e, P., Les propriétés des bétons armés. L. Eyrolles, Paris, 1971.

## REFERENCE

- /1/ A l i, I. and Kesler, K., Mechanisms of creep in concrete. Symposium on creep of concrete, ACI Special publication, No 9, 1963.
- /2/ A n s o n, M, and N e w m a n, K., The effect of mix proportions and method of curing on Poissons ratio for mortar and concretes. Magazine of Concrete Research: Vol 18, No 56, 1966, pp 115-130.
- /3/ A r g i r i s, J.H, P i s t e r, K.S. and W i l l a m, K.J., Thermomechanical creep of Aggencing Concrete. Publications IABSE, 36-I, 1976, pp. 23-59.
- /4/ B o l t z m a n, L., Zur Theory der elastischen Nachwirkung. Wiener Ber., 1874, Bd. 70, S.275.
- /5/ B r e s l e r, B., Some factors in the investigation of long term behaviour of reinforced concrete structures. Road Research Laboratory, Note No LN/150/BB, 1962, 19pp.
- /6/ B r o o k s, J.J. and N e v i l l e, M., A comparison of creep elasticity and strength of concrete in tension and in compression. Magazine of Concrete Research: Vol 29, No 100, 1977, pp. 131-141
- /7/ C o l e m a n, B., Thermodynamics of materials with memory. Intern. Centre for Mechanical Sciences, Udine, No 73, Springer - Verlag Wien - New York 1971
- /8/ C o m i t e E u r o - I n t e r n a t i o n a l d u B é t o n, CEB-FIP Model Code for Concrete Structures. International System of Unified Standard Codes of Practice for Structures. Vol II, 1978, pp. 331-342
- /9/ C o n s t a n t i n e s c u, D.R., I l l s t o n, J.M., Direct methods of analysing the structural effects of linear creep of aggencing concrete. Materials and Structures, Vol. 7, No 42, 1974, pp. 395-402.
- /10/ E r i n g e n, C.A., Mechanics of Continua. John Wiley, New York, 1971.
- /11/ F r e y s s i n e t, E., Une révolution dans les techniques du béton. L. Eyrolles, Paris 1936.



- /12/ G a m b l e, B.R. and P a r r o t t, L.J., Creep of concrete in compression during drying and wetting. Magazine of concrete Research, Vol. 30: No 104, 1978, pp. 129-139.
- /13/ G r e e n, C.D., Integral Equations Methods. Nelson, 1969
- /14/ G u g g e n h e i m, E.A., Thermodynamics, Clasical and Statistical. Enciclopedia of Phisics. Vol. III/2, Springer Verlag, Berlin Gotingen, Heidelberg. pp. 118
- /15/ H a n s e n, T.C., Drying shrinkage of concrete due to Capillary action. Materials and Structures, No 7, 1969.
- /16/ H e r m i t e, R., Idées actuelles sur la technologie du béton. Documentation Technique du Batiment et des Travaux Publics, Paris, 1955.
- /17/ H o b b s, D.W., and P a r r o t t, L.J., Predicition of drying shrinkage. Concrete, Vol.13: No 2, 1979, pp. 19-25.
- /18/ I l l s t o n, J.M., The creep of concrete under axial tension. Magazine of Concrete Research: Vol.17, N<sub>0</sub> 51, pp.77-85
- /19/ I l l s t o n, J.M., Componets of Creep in Mature Concrete. ACI Journal, March 1968, pp. 219-228.
- /20/ I l l s t o n, J.M., and J o r d a a n, I.J., Creep Prediction for Concrete Under Multiaxial Stress. ACI Journal, March 1972, pp. 158-165.
- /21/ I v a n o v i ć, D., V u č i ć, V., Fizika I, Termodinamika. Naučna knjiga, Beograd 1970.
- /22/ I v k o v i ć, M., Jedan nov predlog za veze tenzora napona i deformacija za beton. XIV Kongres Jugoslovenskog društva za racionalnu i primenjenu mehaniku, 1978, Sv C-4.
- /23/ J e v t i ć, D., P r a š č e v i ć, Ž., Quelques procedes de la determination de l effet du fluage dans les ouvrages en béton bases sur les essais. Collocue Internat. sur les essais in situ des structures en beton. Budapest 1977, pp. 86-100.
- /24/ J e v t i ć, D., Uticaj dugotrajnih dejstava na ponašanje konstrukcija od prednapregnutog betona. Biro za gradjevinarstvo, Beograd 1976.
- /25/ K o r d i n a, K., Experiments of the influence of the mineralogical character of aggregates on the creep of concrete.



- /26/ L a z a r e v i ć, Dj., I v k o v i ć, M., Nelinearne deformacije betona. V Kongres Jugoslovenskog društva građevinskih konstruktora, Sv. A-1, str 1-47, Budva 1974.
- /27/ M a r e c h a l, J.C., Variation in the modulus of elasticity and Poissons ratio with temperature. Concrete for Nuclear Reactors, paper SP 34-27, pp. 495-503.
- /28/ M o o r e, W., Fizička hemija. (prevod sa engleskog), Naučna knjiga, Beograd 1968.
- /29/ M c H e n r y, D., A new aspect of creep in concrete and its application to design. ASTM, Proc. 43, 1943, pp. 1069-1084.
- /30/ M u r a v l j o v, M., Ponašanje tankozidnih štapova otvorenih profila od prednapregnutog betona pri ograničenoj torziji sa uticajima tečenja betona. Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd 1975.
- /31/ N e v i l l e, A.M., G o p a l a k r i s h n a n, K.S. G h a l y, A., A hypothesis on mechanism of creep of concrete with reference to multiaxial compression. ACI Journal, Proc. 67, 1970, pp. 29-35.
- /32/ N e v i l l e, A.M., Theories of creep in concrete. Journal ACI, 52 1955, pp. 47-60.
- /33/ N e v i l l e, A.M., Properties of Concrete. Pitman 1975.
- /34/ N e v i l l e, A.M., Creep of Concrete: Plain, Reinforced and Prestressed. North-Holland Publ. Company Amsterdam 1970.
- /35/ N a e r l o v i ć - V e l j k o v i ć, N., Uvod u termoelastičnost. Naučna knjiga, Beograd 1977.
- /36/ N o w a c k i, W., Theorie du fluage. Eyrolles, Paris 1965.
- /37/ N o w a c k i, W., Teoria sprezistosci. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1970.
- /38/ P a r r o t t, L.J., Lateral strains in hardened cement paste under Short-and long-term loading. Magazine of Concrete research, Vol 26, No 89, 1974.
- /39/ P o l i v k a, M., P i r t z, D., A d a m s, R.F., Studies of creep in mass concrete.
- /40/ P o w e r s, T.C., Some observations on the interpretation of creep data. RILEM Bulletin, No 33, December 1966, pp. 522-534.
- /41/ P o w e r s, T.C., The thermodynamics of volume change and creep. Materials and Structures, No 1, 1968, pp. 487-507.



- /42/ P r a š č e v i ć, Ž., A contribution to the solution of stress relaxation problems in reinforced and prestressed concrete. RILEM Coloquium, Leeds 1978.
- /43/ P r a š č e v i ć, Ž., Neki problemi tehničke teorije armiranobetonskog štapa. Magistarski rad, Građevinski fakultet Beograd, 1973.
- /44/ P r a v i l n i k t e h n i č k i m m e r a m a i u s l o v i m a z a b e t o n i a r m i r a n i b e t o n. Službeni list SFRJ, br. 51, 1971.
- /45/ R u s c h, H., J u n g w i r t h, D., Stahlbeton-Spanbeton, Band 2. Wener-Verlag, Dusseldorf, 1976.
- /46/ R ž a n i c i n, A.R., Teorija puženja materijala (prevod sa ruskog). Građevinska knjiga, Beograd 1974.
- /47/ S e k u l o v i ć, M., Nelinearna teorija elastičnosti. Građevinski fakultet, Beograd 1975.
- /48/ T i m u s k, J., and K i n g, J.W.H., Creep Poissons ratio under uniaxial and biaxial compression. RILEM Coloquium Creep of concrete, Leeds 1978.
- /49/ T r u s d e l, C., A first course in rational confinuum mechanics. John Hopkins University, Baltimore 1972.
- /50/ V a l a n i s, K.C., Irreversible Thermodynamics of Continuous Media. Internal variable theory. Internat. Centre Mechan. Sciences, Udine No 77, Springer-Verlag, Wien-New York, 1971.
- /51/ V o l t e r r a, V., Sur les equations integro-differentiales et leurs applications. Theoric mathematique de elasticité en ayant égard a hérédite. Acta Mathematica t. 35, 1912.
- /52/ V o l t e r r a, V., Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations. Dover Publ.Inc., New York, 1959.
- /53/ W i t t m a n n, F.H. and Lucas, J., The application of rate theory to time-depedent deformation of concrete. Magazine of Concrete Research. Vol. 26, No 89, 1974. pp. 191-198.
- /54/ Z i g l e r, H., An Introduction to Thermomechanics. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977.
- /55/ Z i g l e r, H., Some Extremum Principles in Irreversible Thermodynamics with Applications to Continuum Mechanics. Progres in Soil Mechanics. Vol.IV. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963, pp. 91-193.



- /56/ Александровский, С. В., Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести. Стройиздат, Москва 1973.
- /57/ Александровский, С. В., Багрий, В. Я., Ползучесть бетона при периодических воздействиях. Стройиздат, Москва 1970.
- /58/ Арутюнян, Н. Х., Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, Москва 1952.
- /59/ Берг, О. Я., Высокопрочный бетон. Стройиздат, Москва 1971.
- /60/ Бондаренко, В. М., Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. Издательство Харьковского университета Харьков, 1968.
- /61/ Гвоздев, А. А., Ползучесть бетона. Механика твердого тела, 1966, стр. 77 - 84.
- /62/ Гвоздев, А. А., Галустов, К. З., Яшин, А. В., Об уточнении теории линейной ползучести бетона. Механика твердого тела, Инженерный журнал No. 6, 1967.
- /63/ Илюшин, А. А., Победря, Б. Е., Основы математической теории термовязко-упругости. Наука, Москва 1970.
- /64/ Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа. Наука, Москва 1976.
- /65/ Ландау, Л. Д., Ахиезер, А. И., Лифшиц, Е. М., Курс общей физики. Наука, Москва 1969.
- /66/ Маслов, Г. Н., Термическое напряженное состояние бетонных массивов при учете ползучести бетона. Известия НИИГ, том 28, Госэнергоиздат, Москва 1941.
- /67/ Матвеев, Н. М., Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Высшая школа, Москва 1967.
- /68/ Мишкис, А. Д., Математика. Специальные курсы. Наука, Москва 1971.
- /69/ Прокопович, И. Е., Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояния сооружений. Гостстройиздат, Москва 1963.
- /70/ Седов, Л. И., Механика сплошной среды, том I, Наука, Москва 1970.
- /71/ Улицкий, И. И., Расчет стержневых железобетонных систем с учетом длительных процессов. Бидивельник, Киев 1967.
- /72/ Улицкий, И. И., Определение величин ползучести и усадки бетонов. Гостстройиздат, Москва 1963.
- /73/ Яшин, А. В., Ползучесть бетона в раннем возрасте. Исследование бетона и железобетона. Труды НИИЖБ, вып. 4, Гостстройиздат, Москва 1959.



## 2. PREDLOZI ZA ALGEBARSKE VEZE IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA BETONA

### 2.1 Uvodne napomene

Veze izmedju napona i deformacija betona formulišu se, kako je to pokazano u prvom poglavlju, u obliku Volterrinih integralnih jednačina (1.213) i (1.214) odnosno (1.242) i (1.243). Kada se one upotrebe za rešavanje različitih problema teorije armiranobetonskih, spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija dobijaju se integralne ili integro-diferencijalne jednačine, odnosno njihovi sistemi koji se za neke reološke modele betona ne mogu egzaktno rešiti, pa treba primeniti metode numeričke integracije koje najčešće zahtevaju primenu elektronskog računara. Da bi se uticaji tečenja i skupljanja betona mogli lakše uzeti u obzir pri proračunu konstrukcija u praksi, dati su različiti predlozi u algebarskom obliku kao uprošćenja ovih veza. Najčešće se, pri tome, smatra da se modul elastičnosti betona  $E$  tokom vremena ne menja, što ima opravdanja radi pojednostavljivanja proračuna, naročito ako je starost betona u uslovima normalne nege veća od 28 dana.

Ova uprošćenja su vršena tako što su za jednoosno stanje napona određivane približne vrednosti integrala  $\int_{t_1}^t k(t, \tau) \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} d\tau$  u jednačini (1.214) koja daju dobre rezultate kada proces deformisanja nije sprečen nekim spoljnim uticajima tokom vremena. U ovom radu se vrše uprošćenja ovog integrala za neke aktuelne reološke modele betona izražavajući napone i deformacije u funkciji "efektivnog vremena"  $\xi(t)$ . Pored toga prikazuje se i mogućnost određivanja približne vrednosti integrala  $\int_{t_1}^t R(t, \tau) \epsilon(\tau) d\tau$  u jednačini (1.213), koje daje dobre rezultate u slučaju kada su deformacije sprečene nekim spoljnim uticajima. Na početku se daju, polazeći od poznatog reološkog modela, opšti izrazi koji važe za sverni i devijatorski deo tenzora napona kao i za jednoosno stanje napona. Ovako dobijene veze se dalje uopštavaju, slično kao i prvom poglavlju, na prostrano stanje napona i određuju

ju funkcionali koji bi odgovarali termodinamičkim potencijalima tela.

## 2.2 Neki dosadašnji predlozi za uprošćenje veze izmedju napona i deformacija

Jedno od najjednostavnijih uprošćenja veze izmedju napona i deformacija betona izvršio je B. Fritz /6/ prema kome je:

$$\xi(t) = \frac{\sigma(t)}{E_{\varphi}(t, t_1)} \quad (2.1)$$

gde je

$$E_{\varphi}(t, t_1) = \frac{E}{1 + \varphi(t, t_1)} \quad (2.2)$$

"idealni" modul elastičnosti, a

$$\varphi(t, t_1) = E C(t, t_1) \quad (2.3)$$

koeficijent tečenja betona.

M. Djurić /5/ je za Maxwellov reološki model betona sa promenljivim viskoznim svojstvima (sk. 1.3) izvršio uprošćenje izraza (1.214) i prikazao ga u algebarskom obliku

$$E_{\varphi}(t, t_1) \xi(t) = \sigma(t) + \varrho(t, t_1) \sigma(t_1) + E_{\varphi}(t, t_1) \xi^0(t, t_1) \quad (2.4)$$

gde su

$$E_{\varphi}(t, t_1) = \frac{2E'}{2 + \varphi(t, t_1)}, \quad \varrho(t, t_1) = \frac{\varphi(t, t_1)}{2 + \varphi(t, t_1)} \quad (2.5)$$

$\xi^0(t, t_1)$  deformacija usled skupljanja i temperaturnih promena.

Na osnovu ovakve algebarske veze on je formulisao vrlo praktičnu teoriju proračuna spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija.

I.I. Ulicki /20/ je takodje izvršio slično uprošćenje za isti reološki model betona sa promenljivim elastičnim i viskoznim svojstvima, tako da se  $E(t)$  određuje prema izrazima (1.109) i (1.110).



$$E(t) = E_0 [1 + k_1 \varphi(t, t_1)]$$

on je, kao i M. Djurić, pošao od pretpostavke da je veza  $\sigma$ - $\varepsilon$  linearna u intervalu vremena  $[t_1, t]$  i dobio izraz

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) \left[ \frac{1}{2E(t)} + \frac{1 + \varphi(t, t_1)}{2E_0} \right] + \sigma(t_1) \left[ \frac{1 + \varphi(t, t_1)}{2E_0} - \frac{1}{2E(t)} \right] + \varepsilon_s(t, t_1) \quad (2.6)$$

Ovaj izraz se može prikazati u obliku (2.4), uvodeći

$$E_\varphi(t, t_1) = \frac{2E(t)E_0}{E_0 + E(t)[1 + \varphi(t, t_1)]}, \quad \vartheta(t, t_1) = \frac{E(t)[1 + \varphi(t, t_1)] - E_0}{E_0 + E(t)[1 + \varphi(t, t_1)]} \quad (2.7)$$

Z.P. Bažant uvodi tzv. efektivni modul

$$E''(t, t_1) = \frac{E(t)}{1 + \chi(t, t_1)} \quad (2.8)$$

gde je funkcija  $\chi(t, t_1)$  zavisi od istorije napona i njene vrednosti su date tabelarno u radu /2/, pa vezu izmedju napona i deformacija prikazuje u obliku

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_1) \left[ \frac{1}{E(t_1)} + \phi(t, t_1) \right] + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_1)}{E(t_1)} [1 + \chi(t, t_1)] + \varepsilon^o(t, t_1) \quad (2.9)$$

gde je  $\phi(t, t_1)$  ukupna specifična deformacija betona usled delovanja jediničnog napona  $\sigma=1$  od trenutka vremena  $t_1$ .

U Propisima CEB-FIP /3/ preporučuje se korišćenje svih ovih algebarskih veza izmedju napona i deformacija sa koeficijentima tečenja

$\varphi(t, t_1)$  i ukupnom specifičnom deformacijom  $\phi(t, t_1)$  koji se određuju prema izrazima (1.187) i (1.192). Kada se napon vrlo malo menja tokom vremena u ovim propisima se preporučuje upotreba izraza (2.1) i (2.2) s tim da se računa sa modulom elastičnosti za starost betona od 28 dana. Ako promena napona u betonu ne prelazi 30% od početne vrednosti u intervalu vremena  $[t_1, t]$  a modul elastičnosti se menja tokom vremena onda treba koristiti izraz (2.6), a ako se računa sa nepromenljivim modulom elastičnosti koji odgovara starosti betona od 28 dana, onda treba koristiti izraz koji je identičan izrazu M. Djurića (2.4). Ako je varijacija napona veća od 30% interval  $[t_1, t]$  treba podeliti na podintervale i unutar podintervala izvršiti linearizacije, odnosno računati sa srednjim vrednostima napona. Na ovaj način se problem svodi, kako je to autor pokazao u

radu /16/, na numeričko rešavanje Volterrine integralne jednačine (1.214) metodom Krilova-Bogoljubova.

J.D. Livšic /19/ polazi od pretpostavke da je veza između napona  $\sigma(\tau)$  i koeficijenta tečenja  $\varphi(t, \tau)$

$$\sigma(t) - \sigma(\tau) = \frac{\sigma(t_1) - \sigma(t)}{\varphi^2(t, t_1)} \varphi(\tau, t_1) [2\varphi(t, t_1) - \varphi(\tau, t_1)]$$

i dobio izraz

$$E(t) = [\sigma(t_1) k_1(t, t_1) + \sigma(t) k_2(t, t_1)] / E_0 \quad (2.10)$$

$$k_1(t, t_1) = 1 - \alpha_0 + k_0 \frac{\varphi(t, t_1)}{3},$$

$$k_2(t, t_1) = 1 + (2 - \alpha_0 - k_0) \frac{\varphi(t, t_1)}{3},$$

gde su  $\alpha_0$  i  $k_0$  koeficijenti koji se određuju iz eksperimentalnih rezultata.

G.B. Kizirija i još neki sovjetski istraživači zavisnost između  $\sigma(\tau)$  i  $\varphi(t, t_1)$  su izrazili u obliku

$$\sigma(t_1) - \sigma(\tau) = [\sigma(t_1) - \sigma(t)] \frac{1 - e^{-\varphi(\tau, t_1)}}{1 - e^{-\varphi(t, t_1)}}$$

Međutim, kako navodi J.D. Livšic upotreba ovog izraza svodi matematički problem na rešavanje sistema transcendentnih jednačina i korišćenje specijalnih tablica i grafikona zbog čega su ovakva uprošćenja nepodesna za praktičnu upotrebu.

H. Trost /18/ je za rešavanje relaksacionih zadataka izveo izraz

$$E E(t) = \sigma(t_1) [1 + \varphi(t, t_1)] + [\sigma(t) - \sigma(t_1)] [1 + \varrho_T(t, t_1)] + E E_S(t, t_1) \quad (2.11)$$

gde je  $\varrho_T$  koeficijent koji zavisi od  $t_1$ , relativne vlažnosti, dimenzija poprečnog preseka i dr. a njegove vrednosti su u radu /18/ date grafički. Ako se u ovom izrazu pretpostavi da je  $\varrho_T = 0,5$  onda on postaje identičan sa izrazom (2.4) M. Djurića /7/.

### 2.3 Neke mogućnosti uprošćenja integralne veze između napona i deformacija sa funkcijom $K(t, \tau)$

U odeljku 1.8 su izvedene reološke jednačine stanja (1.176) za neke reološke modele betona čija se reološka svojstva menjaju tokom vre-



mena u funkciji "efektivnog vremena"  $\xi_t$

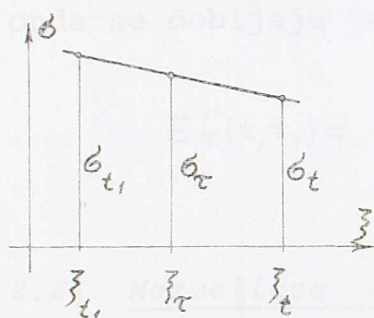
$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_t} + \int_{\xi_{t_1}}^{\xi_t} K(\xi_t, \xi_\tau) \frac{\sigma_\tau}{E'_\tau} d\xi_\tau + \varepsilon_t^0, \quad (2.12)$$

gde je prema (1.138a) i (1.139)

$$K(\xi_t, \xi_\tau) = \frac{1}{E'_\tau} \frac{dE'_t}{d\xi_\tau} - \frac{1}{E'_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(t, \tau) \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_t^0 = \varepsilon_t^s + \alpha \theta_t \quad (2.14)$$

Ako se pretpostavi, radi uprošćenja izraza (2.12), da je napon  $\sigma(\tau)$  u intervalu  $[t_1, t]$  odnosno  $[\xi_{t_1}, \xi_t]$  linearno zavisan od  $\xi_\tau$ , kako je to pokazano na sk. 2.1,



Sk. 2.1

$$\sigma_\tau = \sigma_{t_1} + \frac{\sigma_t - \sigma_{t_1}}{\xi_t - \xi_{t_1}} (\xi_t - \xi_{t_1}), \quad (2.15)$$

$$\tau \in [t_1, t], \xi_\tau \in [\xi_{t_1}, \xi_t]$$

i uvrsti u (2.12) dobija se posle izvršenih integracija, s obzirom na (2.13)

$$\begin{aligned} \varepsilon_t = & \frac{\sigma_t}{E_t} + \sigma_{t_1} \left( \frac{1}{E'_{t_1}} - \frac{1}{E'_t} \right) + \frac{\sigma_t - \sigma_{t_1}}{\xi_t - \xi_{t_1}} \int_{\xi_{t_1}}^{\xi_t} \frac{\xi_\tau - \xi_{t_1}}{E'_\tau} \frac{dE'_t}{d\xi_\tau} d\xi_\tau + \\ & + \frac{\sigma_{t_1}}{E'_0} \varphi(t, t_1) - \frac{\sigma_t - \sigma_{t_1}}{E'_0} \int_{\xi_{t_1}}^{\xi_t} \frac{\xi_\tau - \xi_{t_1}}{\xi_t - \xi_{t_1}} \frac{\partial}{\partial \xi_\tau} \varphi(t, \tau) d\xi_\tau + \varepsilon_t^0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Kada se zanemari uticaj trećeg člana na desnoj strani ovog izraza i uvede funkcija

$$\varphi^*(t, \tau) = - \int_{\xi_{t_1}}^{\xi_t} \frac{\xi_\tau - \xi_{t_1}}{\xi_t - \xi_{t_1}} \frac{\partial}{\partial \xi_\tau} \varphi(t, \tau) d\xi_\tau \quad (2.16)$$

dobija se

$$\varepsilon_t = \sigma_t \left[ \frac{1}{E_t} + \frac{\varphi^*(t, t_1)}{E'_0} \right] + \sigma_{t_1} \left[ \frac{1}{E'_{t_1}} - \frac{1}{E'_t} + \frac{1}{E'_0} (\varphi(t, t_1) - \varphi^*(t, t_1)) \right] + \varepsilon_t^0 \quad (2.17)$$

Ako se dalje uvedu oznake

$$\begin{aligned} E'_\varphi(t, t_1) &= \frac{E_0 f_E(t, t_0)}{1 + f_E(t, t_0) \varphi^*(t, t_1)}, \\ g'(t, t_1) &= \frac{f_E(t, t_0) - f_E(t_1, t_0) + f_E(t_1, t_0) f_E(t, t_0) [\varphi(t, t_1) - \varphi^*(t, t_1)]}{f_E(t_1, t_0) + f_E(t, t_0) f_E(t_1, t_0) \varphi^*(t, t_1)}, \quad (2.18) \end{aligned}$$

gde je prema (1.109)

$$f_E(t, t_0) = \frac{E'(t)}{E'_0}, \quad E'_0 = E'(t_0), \quad (2.19)$$

onda se veza izmedju napona i deformacija može prikazati u obliku (2.4).

Ako se elastična svojstva tokom vremena ne menjaju

$$E'(t) = E'_0, \quad f_E(t, t_0) = 1,$$

onda se dobijaju jednostavniji izrazi

$$E'_\varphi(t, t_1) = \frac{E'_0}{1 + \varphi^*(t, t_1)}, \quad g'(t, t_1) = \frac{\varphi(t, t_1) - \varphi^*(t, t_1)}{1 + \varphi^*(t, t_1)}. \quad (2.20)$$

### 2.31 Maxwellovo telo sa promenljivim reološkim svojstvima

Za Maxwellov reološki model sa promenljivim reološkim svojstvima, tokom vremena, kojem odgovara Dischingerova veza izmedju napona i deformacija (1.156), na kojoj se zasniva teorija starenja betona, je prema (1.160)

$$\varphi(t, t_1) = \xi_t - \xi_{t_1}, \quad \xi_t = \bar{\varphi} \beta_f(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \beta_f(t) = 1 \quad (2.21)$$

pa je posle izvršenog integraljenja

$$\varphi^*(t, t_1) = \frac{1}{2} \varphi(t, t_1). \quad (2.22)$$

Kada se ovaj izraz uvrsti u (2.17) dobija se

$$\varepsilon_t = \sigma_t \left[ \frac{1}{E'_t} + \frac{\varphi(t, t_1)}{2E'_0} \right] + \sigma_{t_1} \left[ \frac{1}{E'_{t_1}} - \frac{1}{E'_t} + \frac{\varphi(t, t_1)}{2E'_0} \right] + \varepsilon_t^0 \quad (2.23)$$

koji je identičan sa uprošćenom vezom izmedju napona i deformacija u Propisima CEB-FIP /3/ za jednoosno stanje napona. Znači, da to uprošćenje CEB-FIP odgovara teoriji starenja, u kojoj su sve deformacije tečenja nepovratne, bez obzira kakav je usvojen stvarni reo-



loški model betona. Stoga ovde predloženi postupak ima prednosti nad uprošćenjima CEB-FIP jer vodi računa o povratnoj deformaciji tečenja betona i više odgovara usvojenom reološkom modelu.

Kada se (2.22) uvrsti u (2.18) dobija se

$$E_{\varphi}(t, t_1) = \frac{2E'_t}{2 + f_E(t, t_0)\varphi(t, t_1)} \quad (2.24)$$

$$g'(t, t_1) = \frac{2[f_E(t, t_0) - f_E(t_1, t_0)] + f_E(t, t_0)f_E(t_1, t_0)\varphi(t, t_1)}{2f_E(t_1, t_0) + f_E(t, t_0)\varphi(t, t_1)}$$

Kada je  $E'(t) = E$ ,  $f(t, t_0) = 1$  izrazi (2.24) postaju identični izrazima (2.5).

### 2.32 Burgersovo telo sa promenljivim reološkim svojstvima

Za Burgersov reološki model sa promenljivim reološkim svojstvima (sk. 1.9) važi Illston-Jordaanov izraz (.178)

$$\varphi(t, t_1) = \bar{\varphi}_d [1 - e^{-\bar{\delta}(\xi_t - \xi_{t_1})}] + \xi_t - \xi_{t_1} \quad (2.25)$$

Zamenom ovog izraza u (2.16) dobija se posle izvršenog integraljenja

$$\varphi^*(t, t_1) = \bar{\varphi}_d - \frac{\varphi_d(t, t_1)}{\bar{\delta}(\xi_t - \xi_{t_1})} + \frac{\xi_t - \xi_{t_1}}{2} \quad (2.26)$$

gde je

$$\varphi_d(t, t_1) = \bar{\varphi}_d [1 - e^{-\bar{\delta}(\xi_t - \xi_{t_1})}]$$

Granična vrednost funkcije  $\varphi^*(t, t_1)$  je

$$\lim_{\xi_t \rightarrow \xi_{t_1}} \varphi(t, t_1) = 0$$

Kada se (2.26) uvrste u (2.18) dobijaju se izrazi za  $E'_{\varphi}(t, t_1)$  i  $g'(t, t_1)$  koji odgovaraju ovom reološkom modelu, odnosno Illston-Jordaanovom predlogu za koeficijent tečenja betona /7/.

Ako je u Burgersovom reološkom modelu  $\mu'_N \rightarrow \infty$ , dobija se Kelvinov reološki model sa promenljivim reološkim svojstvima (sk. 1.8) sa koeficijentom tečenja koji je za beton predložio M. Ivković /8/

$$\varphi(t, t_1) = \bar{\varphi} [1 - e^{-\bar{\xi}_t - \bar{\xi}_{t_1}}] , \quad \bar{\xi}_t = \bar{\rho} \bar{\xi}_t \quad (2.27)$$

funkcija  $\bar{\xi}_t$  i  $\bar{\varphi}$  se biraju tako da dobro aproksimiraju neke krive tečenja betona date u propisima ili dobijene eksperimentalno /10/.

U ovom slučaju je prema (2.16) i (2.18)

$$\varphi^*(t, t_1) = \bar{\varphi} - \frac{\varphi(t, t_1)}{\bar{\xi}_t - \bar{\xi}_{t_1}} \quad (2.28)$$

$$E'_\varphi(t, t_1) = \frac{E'_t(\bar{\xi}_t - \bar{\xi}_{t_1})}{\bar{\xi}_t - \bar{\xi}_{t_1} + f_E(t, t_0) [\bar{\varphi}(\bar{\xi}_t - \bar{\xi}_{t_1}) - \varphi(t, t_1)]} \quad (2.29)$$

$$g'(t, t_1) = \frac{(\bar{\xi}_t - \bar{\xi}_{t_1}) [f_E(t, t_0) - f_E(t_1, t_0)] + f_E(t, t_0) f_E(t_1, t_0) [\varphi(t, t_0) (\bar{\xi}_t - \bar{\xi}_{t_1} + 1) - \bar{\varphi}(\bar{\xi}_t - \bar{\xi}_{t_1})]}{f_E(t, t_0) (\bar{\xi}_t - \bar{\xi}_{t_1}) + f_E(t, t_0) f_E(t_1, t_0) [\bar{\varphi}(\bar{\xi}_t - \bar{\xi}_{t_1}) - \varphi(t, t_1)]}$$

### 2.33 Predlog CEB-FIP

Prema Propisima CEB-FIP /3/, kako je to pokazano u odeljku 1.84, koeficijent tečenja betona je

$$\varphi(t, t_1) = \bar{\varphi}_d \beta_d(t - t_1) + \bar{\varphi}_f [\beta_f(t) - \beta_f(t_1)] \quad (2.30)$$

pošto je  $\beta_d(t_1)$  uključeno u izraz (1.193) za  $E^*(t_1)$ . Kada se funkcije  $\beta_d(t - t_1)$  i  $\beta_f(t)$  prikažu u obliku konačnih suma /11/ (1.191) i stavi da je

$$\bar{\xi}_t = t \quad (2.31)$$

dobija se prema (2.16)

$$\varphi^*(t, t_1) = \bar{\varphi}_d \sum_{i=1}^4 A_i \left[ 1 - \frac{1 - e^{-\bar{\alpha}_i(t-t_1)}}{\bar{\alpha}_i(t-t_1)} \right] + \bar{\varphi}_f \sum_{i=1}^4 B_i \left[ \frac{e^{-\bar{\beta}_i t_1} - e^{-\bar{\beta}_i t}}{\bar{\beta}_i(t-t_1)} - e^{-\bar{\beta}_i t} \right] \quad (2.32)$$

gde je

$$\sum_{i=1}^4 A_i = 1 , \quad \sum_{i=1}^4 B_i = 1 ,$$

pa su granične vrednosti

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \varphi^*(t, t_1) = 0 , \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^*(t, t_1) = \bar{\varphi}_d .$$

U tom slučaju su za  $t \rightarrow \infty$  prema (2.18)



$$E'_{\varphi}(\infty, t_1) = \frac{E_0}{1 + f_E(t, t_0) \bar{\varphi}_d}, \quad (2.33)$$

$$g'(\infty, t_1) = \frac{f_E(\infty, t_0) - f_E(t_1, t_0) + f_E(\infty, t) f_E(t_1, t_0) \varphi_f(\infty, t_0)}{f_E(\infty, t_0) + f_E(\infty, t_0) f_E(t, t_0) \bar{\varphi}_d}$$

gde je  $\bar{\varphi}_d$  veličina povratnog tečenja (delayed elasticity) kada  $t \rightarrow \infty$ , a  $\varphi_f(t, t_1)$  nepovratno tečenje (flow)

$$\varphi_f(t, t_1) = \bar{\varphi}_f [\beta_f(t) - \beta_f(t_1)].$$

Ako se pretpostavi da se beton ponaša kao visko-elastičan materijal, što mnogobrojni eksperimenti ne potvrđuju, i da se elastična svojstva ne menjaju tokom vremena, onda je sva deformacija nastala usled delovanja napona povratna

$$\varphi(t, t_1) = \varphi_d(t - t_1), \quad \varphi_f(t, t_1) = 0, \quad f_E(t, t_0) = 1;$$

pa je stoga

$$E'_{\varphi}(\infty, t_1) = \frac{E'}{1 + \varphi(\infty, t_1)}, \quad g'(\infty, t_1) = 0. \quad (2.34)$$

Ovaj izraz je identičan sa izrazom (2.2) kada  $t \rightarrow \infty$  za Fritsov "idealni modul", odnosno "totalni modul elastičnosti" kako se to navodu u Propisima CEB-FIP. Znači, ako se beton tretira kao viskoelastičan materijal čije su sve deformacije nastale usled delovanja napona povratne važila bi Fritzova algebarska veza (2.1) kada  $t$ . Ako se pretpostavi da su deformacije tečenja betona nepovratne (Teorija starenja betona), onda važe izrazi M. Djurića (2.4) i (2.5) i I.I. Ulickog (2.6). Upoređivanjem ovih izraza lako se može zaključiti da se za isto  $\xi(t)$  i isti koeficijent tečenja dobijaju veći napon  $\sigma_F(t)$  po Fritzovom izrazu koji odgovara Teoriji viskoelastičnosti nego napon  $\sigma_D(t)$  koji odgovara Teoriji starenja betona. Ukoliko su deformacije tečenja betona delimično povratne, onda je veličina napona  $\sigma(t)$

$$\sigma_D(t) < \sigma(t) < \sigma_F(t). \quad (2.35)$$

Izrazi za  $E'_{\varphi}(t)$  i  $g'(t)$  dobijeni prema (2.31) i (2.32) ne daju dobar rezultat, sem kada se napon linearno ili vrlo malo menja tokom vremena, naročito u slučajevima kada su starosti betona pri opterećenju manje jer je tada  $\varphi_f(\infty, t_1)$  znatno veće od  $\varphi_d(\infty, t_1)$ . Stoga se pri izvodjenju algeraske veze između napona i deformacija prema Propisima CEB-FIP može postupiti na dva načina.

Pri uprošćenju integrala (2.12) funkciju  $K(t, \tau)$  prikazati, s obzirom na (2.13) i (2.30) u obliku

$$K(t, \tau) = k(\tau) + K_d(t, \tau) + K_f(t, \tau)$$

gde su

$$k(\tau) = -E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right], \quad K_d(t, \tau) = -E(\tau) \varphi_d [\beta_d(t - \tau)],$$

$$K_f(t, \tau) = -E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\beta_f(t) - \beta_f(\tau)];$$

pa je onda

$$\xi(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{t_1}^t \frac{k(\tau)}{E(\tau)} \sigma(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t K_d(t, \tau) \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} d\tau + \int_{t_1}^t K_f(t, \tau) \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} d\tau + \varepsilon^0(t).$$

Ako se pri uprošćenju trećeg člana na desnoj strani ovog izraza usvoji kao efektivno vreme

$$\xi_t = t,$$

a pri uprošćenju četvrtog člana

$$\xi_t = \beta_f(t) \bar{\varphi}_f$$

onda se dobija prema (2.16)

$$\varphi^*(t, t_1) = \varphi_d^*(t - t_1) + \varphi_f^*(t, t_1), \quad (2.36)$$

gde su

$$\varphi_d^*(t - t_1) = - \int_{t_1}^t \frac{\tau - t_1}{t - t_1} \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_d(t - \tau) d\tau,$$

$$\varphi_f^*(t, t_1) = - \int_{t_1}^t \bar{\varphi}_f \frac{\beta_f(\tau) - \beta_f(t_1)}{\beta_f(t) - \beta_f(t_1)} d\beta_f(\tau)$$

i dalje s obzirom na (1.191)

$$\varphi_d^*(t - t_1) = \bar{\varphi}_d \sum_{i=1}^4 A_i \left[ 1 - \frac{1 - e^{-\bar{\alpha}_i(t - t_1)}}{\bar{\alpha}_i(t - t_1)} \right] \quad (2.37)$$

$$\varphi_f^*(t, t_1) = \frac{\bar{\varphi}_f}{2} [\beta_f(t) - \beta_f(t_1)]$$

Oblik funkcije  $\varphi^*(t, t_1)$  prema (2.36) i (2.37) je jednostavniji i lakši za praktičnu upotrebu od oblika (2.32) i daje bolje rezultate jer korektnije uvodi uticaj nepovratnog tečenja  $\varphi_f(t, t_1)$ . Može se izvršiti i još jedno uprošćenje, ako se povratni deo deformacije tečenja prikaže samo sa jednim eksponencijalnim članom



$$\beta_d(t-\tau) = 1 - e^{-\bar{\alpha}(t-t_1)}, \quad (2.38)$$

pa je u tom slučaju

$$\varphi_d^*(t-t_1) = \bar{\varphi}_d - \frac{\varphi_d(t-t_1)}{\bar{\alpha}(t-t_1)}. \quad (2.39)$$

Unošenjem (2.36) i (2.37) odnosno (2.39) u (2.18) dobijaju se izrazi za  $E_\varphi(t, t_1)$  i  $\vartheta(t, t_1)$  koji odgovaraju reološkom modelu odnosno predlogu za koeficijent tečenja  $\varphi(t, t_1)$  iz Propisa CEB-FIP

Druga mogućnost se sastoji u tome da se povratni deo deformacije tečenja (delayed elasticity) aproksimira izrazom I. Illstona i Jordana (2.25), kako je to pokazano u odeljku 1.84, gde je

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{\xi_t - \xi_{t_1}} \ln [1 - \beta_d(t_0 - t_1)] \quad (2.40)$$

gde je  $t_0$  neko izabrano vreme za koje  $\varphi_d(t_0 - t_1)$  prema CEB-FIP ima istu vrednost kao i prema Illston-Jordanovom predlogu. Ovakva aproksimacija je naročito podesna za manje starosti betona pri opterećenju, dok se za veće  $t_1$  dobijaju veće vrednosti koeficijenata  $\bar{\gamma}$ , pa je bolje koristiti izraze (2.36) i (2.37).

### 2.34 Brojčani primer

Zadat je centrično pritisnuti armiranobetonski štap sa procentom armiranja  $\varrho_a = 0,02$ . Moduli elastičnosti betona i armature su

$$E_b(t) = E = 3 \times 10^5 \text{ kp/cm}^2, \quad E_a = 2,1 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

Starost betona pri opterećenju je  $t_1 = 14$  dana

Vrednosti koeficijenata tečenja uzete su prema Propisima CEB-FIP /3/ za relativnu vlažnost 75% i fiktivnu debljinu elemenata  $h_0 = 20$  cm  
 $\bar{\varphi}_d = 3,5$ ,  $\varphi_d = 0,4$ ,  $\bar{\xi}_s = 30 \times 10^{-5}$

Koeficijent promene napona u betonu

$$H_b(t) = \sigma_b(t) / \sigma_b(t_1), \quad \sigma_b(t_1) = 100 \text{ kp/cm}^2, \quad (2.41)$$

za integralne veze izmedju napona i deformacija, pri jednoosnom naponskom stanju dobija se, kako je to pokazao autor u radu /16/ rešavanjem Volterrine integralne jednačine



Tabela 2.1

$$H_b(t) + k_s \int_{t_1}^t K(t, \tau) H_b(\tau) + k_s \frac{E_b E_s(t, t_1)}{\sigma_b(t_1)} = 1 \quad (2.42)$$

gde su

$$k_s = \frac{n \rho_a}{1 + \rho_a} = 0,122, \quad n = \frac{E_a}{E_b} = 7,$$

Za algebarsku vezu izmedju napona i deformacija betona je koeficijent promene napona  $\tilde{H}(t)$

$$\tilde{H}_b(t) = \frac{1 + n \rho_a}{1 + n_{\varphi}(t) \rho_a} - \frac{n_{\varphi}(t) \rho_a}{1 + n_{\varphi}(t) \rho_a} \varphi(t, t_1) - \frac{n_{\varphi}(t) \rho_a}{1 + n_{\varphi}(t) \rho_a} \frac{E_b E_s(t, t_1)}{\sigma_b(t_1)} \quad (2.43)$$

gde su

$$n_{\varphi}(t) = \frac{E_a}{E_{b\varphi}(t, t_1)}, \quad E_s(t, t_1) = \bar{E}_s [\beta_s(t) - \beta_s(t_1)].$$

Funkcija  $\beta_s(t)$  uzeta je iz Propisa CEB-FIP

Koeficijent promene napona u armaturi za integralne veze izmedju napona u armaturi za integralne veze izmedju napona i deformacija

$$H_a(t) = \frac{1 + n \rho_a - H_b(t)}{n \rho_a} \quad (2.44)$$

a za algebarske

$$\tilde{H}_a(t) = \frac{1 + n \rho_a - \tilde{H}_b(t)}{n \rho_a} \quad (2.45)$$

Proračun je izvršen prema Popisima CEB-FIP Teoriji starenja betona i Illston-Jordaanovom predlogu za koeficijent tečenja  $\varphi(t, t_1)$ , koji je radi uporedjenja raznih predloga izabran tako da ima istu krajnju vrednost kada  $t \rightarrow \infty$ . Za integraciju integralne jednačine (2.42) primenjen je metod Krilova-Bogoljubova, pošto je prethodno interval vremena  $[t-t_1]=3650$  dana podeljen na devet podintervala. Ovako dobijena rešenja, uz korišćenje elektronskog računara, mogu se smatrati egzaktnim kako je to autor pokazao u radu /16/. Određene su vrednosti  $E_{b\varphi}(t)$  i  $\varphi(t)$  prema izrazima (2.5), (2.18), (2.26), (2.36) i (2.37) u Illston-Jordaanovom izrazu (2.25) za koeficijent tečenja uzeto je  $\bar{\varphi}_a = 0.4$ ,  $\bar{\gamma} = 60$ , dok je funkcija nepovratnog tečenja  $\xi(t)$  uzeta kao i u Popisima SEV-FIP.

$$\xi(t) = \bar{\varphi}_f \beta_f(t)$$

Rezultati proračuna dati su u tabeli 2.1

ovakav predlog koeficijenta tečenja CEB-FIP za najvise izložen beton



Tabela 2.1

## PREMA NOVIM PROPISIMA CEB-FIP

VREME $t-t_1$	$\varphi(t, t_1)$	$E_{\varphi}(t, t_1)$	$\varrho(t, t_1)$	$H_b(t)$	$\tilde{H}_b(t)$	$H_a(t)$	$\tilde{H}_a(t)$
0.	0.0000	3.0000	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.	0.1362	2.7793	0.0527	0.9821	0.9822	1.1276	1.1274
2.	0.1990	2.5687	0.0666	0.9735	0.9735	1.1893	1.1895
4.	0.2852	2.5386	0.0876	0.9612	0.9611	1.2773	1.2779
14.	0.5995	2.2135	0.1802	0.9155	0.9165	1.5956	1.5964
28.	0.8897	1.9884	0.2525	0.8772	0.8767	1.8773	1.8807
90.	1.5004	1.6384	0.3656	0.7937	0.7976	2.4381	2.4457
180.	1.8680	1.4772	0.4122	0.7554	0.7531	2.7471	2.7635
365.	2.1341	1.3705	0.4317	0.7258	0.7226	2.9588	2.9816
3650.	2.4793	1.2362	0.4337	0.6878	0.6850	3.2299	3.2496

## PREMA TEORIJI STARENJA BETONA

VREME $t-t_1$	$\varphi(t, t_1)$	$E_{\varphi}(t, t_1)$	$\varrho(t, t_1)$	$H_b(t)$	$\tilde{H}_b(t)$	$H_a(t)$	$\tilde{H}_a(t)$
0.	0.0000	3.0000	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.	0.1362	2.8087	0.0638	0.9821	0.9821	1.1276	1.1276
2.	0.1990	2.7285	0.0905	0.9734	0.9734	1.1901	1.1901
4.	0.2852	2.6255	0.1248	0.9609	0.9609	1.2793	1.2792
14.	0.5995	2.3081	0.2306	0.9159	0.9160	1.6006	1.6003
28.	0.8897	2.0763	0.3079	0.8758	0.8758	1.8875	1.8873
90.	1.5004	1.7141	0.4286	0.7950	0.7958	2.4570	2.4588
180.	1.8680	1.5512	0.4829	0.7511	0.7505	2.7775	2.7823
365.	2.1341	1.4513	0.5162	0.7200	0.7189	3.0000	3.0078
3650.	2.4793	1.3395	0.5535	0.6805	0.6788	3.2821	3.2945

## PREMA ILLSTONU I JORDAANU

VREME $t-t_1$	$\varphi(t, t_1)$	$E_{\varphi}(t, t_1)$	$\varrho(t, t_1)$	$H_b(t)$	$\tilde{H}_b(t)$	$H_a(t)$	$\tilde{H}_a(t)$
0.	0.0000	3.0000	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.	0.4057	2.3611	0.1063	0.9501	0.9505	1.3562	1.3533
2.	0.4756	2.2125	0.0882	0.9420	0.9417	1.4144	1.4168
4.	0.5501	2.0969	0.0835	0.9317	0.9313	1.4877	1.4905
14.	0.8279	1.8769	0.1436	0.8930	0.8927	1.7640	1.7654
28.	1.0886	1.7295	0.2041	0.8586	0.8574	2.0103	2.0184
90.	1.6283	1.4935	0.3085	0.7894	0.7876	2.5040	2.5175
180.	1.9434	1.3842	0.3580	0.7523	0.7486	2.7694	2.7955
365.	2.1683	1.3156	0.3894	0.7253	0.7216	2.9549	2.9882
3650.	2.4793	1.2313	0.4280	0.6909	0.6854	3.2076	3.2474

Iz priložene tabele se može zaključiti da uprošćenja veze između napona i deformacija izvršeno na osnovu linearne zavisnosti i nekog efektivnog vremena  $\xi_t$  daje rezultate velike tačnosti. Maksimalna vrednost relativne greške između algeraskog i rešenja integralne jednačine, prema predlogu CEB-FIP iznosi u ovom slučaju 0,4%. Za ovakav predlog koeficijenta tečenja CEB-FIP za najveći broj proble-



ma nije moguće naći egzaktna matematička rešenja, a numerički postupci rešavanja integralnih jednačina zahtevaju upotrebu elektronskog računara. Ovde predložena uprošćenja algebarske veze daju bolje rezultate od ranije predloženih postupaka, koji su dati i u Propisima CEB-FIP, a u kojima se pri odredjivanju približne vrednosti integrala u jednačini (2.12) pretpostavlja

$$\sigma(\tau) = \frac{\sigma(t_1) + \sigma(t)}{2}$$

Ovakvo uprošćenje odgovara Maxwellovom modelu odnosno teoriji starjenja betona dok za neke složenije reološke modele za koje pored nepovratne postoji i povratna deformacija tečenja više odgovara ovde predloženo uprošćenje (2.15).

#### 2.4 Uprošćenje integralne veze između napona i deformacija sa funkcijom $R(t, \tau)$ . Relaksacija napona

Kada se deformacija  $\xi(t)$  tokom vremena ne menja, usled tečenja betona smanjuje se napon, pa se ova pojava naziva relaksacijom napona. Pored toga, ako dodje do pomeranja oslonaca neke konstrukcije, stvaraju se dopunske sile veze (reakcije) i sile u poprečnim presecima, koje se, ako je sprečeno dalje pomeranje oslonaca, zbog tečenja i skupljanja betona tokom vremena smanjuju - pa se onda govori o relaksaciji sile. Ovi problemi su bili predmet većeg broja teorijskih i eksperimentalnih radova u svetu pa i u nas. Tako su u nas Dj. Lazarević i M. Ivković /13/ vršili ispitivanja na seriji armirano-betonskih okvira prateći proces relaksacije horizontalne reakcije oslonca, dok je D. Jevtić /12/ vršio ispitivanja na serijama prethodno napregnutih greda. Sva ova istraživanja vršena su u jednom dužem vremenskom periodu - preko 10 godina.

Matematički se i ovi problemi formulišu u obliku Volterrinih integralnih jednačina ili njihovih sistema, za koje najčešće nije moguće naći rešenja u zatvorenom obliku. Medjutim, ako se za rešavanje ovakvih zadataka upotrebe algebarske veze između napona i deformacija nastale uprošćivanjem integralne jednačine (1.214) sa funkcijom  $K(t, \tau)$ , dobiće se pogrešni rezultati, naročito u slučaju kada koeficijenti tečenja betona imaju veće vrednosti.



Stoga je u ovakvim slučajevima kada je deformacija  $\varepsilon(t)$  tokom vremena konstantna ili se vrlo malo menja bolje uprostiti integralnu jednačinu (1.213) sa funkcijom  $R(t, \tau)$

$$\sigma(t) = E'(t) \left\{ \varepsilon(t) - \varepsilon^0(t) - \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\varepsilon(\tau) - \varepsilon^0(\tau)] d\tau \right\}, \quad (2.47)$$

pretpostavljajući da je

$$\varepsilon(t) \approx \frac{\varepsilon(t) + \varepsilon(t_1)}{2}, \quad (2.48)$$

tako da se dobija

$$\sigma(t) = E'(t) \left[ \varepsilon(t) \frac{2 - r^*(t, t_1)}{2} - \frac{\varepsilon(t_1)}{2} r^*(t, t_1) - \tilde{\varepsilon}^0(t, t_1) \right]; \quad (2.49)$$

gde su

$$r^*(t, t_1) = \int_{t_1}^t R(t, \tau) d\tau, \quad (2.50)$$

$$\tilde{\varepsilon}^0(t, t_1) = \varepsilon^0(t, t_1) - \int_{t_1}^t R(t, \tau) \varepsilon^0(\tau, t_1) d\tau. \quad (2.51)$$

Kada se uvedu oznake

$$E'_\varphi(t, t_1) = E'(t) \frac{2 - r^*(t, t_1)}{2}, \quad (2.52)$$

$$g(t, t_1) = \frac{E'(t)}{2E'(t_1)} r(t, t_1),$$

$$\varepsilon^{0*}(t, t_1) = \frac{2\tilde{\varepsilon}^0(t, t_1)}{2 - r^*(t, t_1)}, \quad (2.53)$$

izraz (2.53), s obzirom da je

$$\varepsilon(t_1) = \sigma(t_1) / E'(t_1)$$

dobija oblik

$$E_\varphi(t, t_1) \varepsilon(t) = \sigma(t) + g(t, t_1) \sigma(t_1) + E_\varphi(t, t_1) \varepsilon^{0*}(t, t_1), \quad (2.54)$$

koji je sličan izrazu (2.4).

Dok se izraz za jezgro  $K(t, \tau)$  integralne jednačine (1.214) može lako dobiti prema (1.196) i (1.197) diferencijaljenjem ukupne specifične deformacije

$$K(t, \tau) = -E'(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right]$$

odnosno

$$K(t, \tau) = - \frac{E'(\tau)}{E_0'} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{E_0'}{E(\tau)} + \varphi(t, t_1) \right], \quad (2.55)$$

dotle za neke reološke modele betona sa promenljivim elastičnim svojstvima ne može odrediti, kako je to pokazano u odeljku 1.8, izraz za rezolventu  $R(t, \tau)$ .

Pošto izmedju jezgra  $K(t, \tau)$  i njegove rezolvente  $R(t, \tau)$  postoji veza (1.137) koja se može prikazati i u operatorskom obliku

$$\text{ili je } R = K - KR$$

$$\text{Numeričke vrednosti } I - R = (I+K)^{-1} \quad (2.56)$$

gde je  $I$  jedinični operator koji svaku funkciju  $f(t)$  u Lesbegueovom funkcionalnom prostoru  $L_2$  preslikava u samu sebe

U postupku numeričke integracije Volterrinih integralnih jednačina integralni operatori  $K$  i  $R$  se zamenjuju matricama. Da bi se odredili elementi matrice jezgra  $K$  može se primeniti metod Krilova-Bogoljubova i metod linearizacije u podintervalu koji je autor dao u radu /16/ a čijom se primenom dobijaju rezultati velike matematičke tačnosti.

U postupku Krilova-Bogoljubova interval vremena  $t_1, t_n$  deli se na  $n-1$  podintervala različite dužine i elementi matrice  $K$  su /16/

$$\begin{aligned} k_{11} &= 0; \quad k_{ii} = \frac{1}{2}(\bar{k}_{i1} - \bar{k}_{i2}), \quad i=2, 3, \dots, n; \\ k_{ij} &= \frac{1}{2}(\bar{k}_{i,j-1} - \bar{k}_{i,j}), \quad i=3, 4, \dots, n; \quad j=2, 3, \dots, i-1; \\ k_{ii} &= \frac{1}{2} \bar{k}_{i,i-1}, \quad i=2, 3, \dots, n; \\ k_{ij} &= 0, \quad j > i \end{aligned} \quad (2.57)$$

gde je

$$\bar{k}_{ij} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t_i, \tau) d\tau$$

Kada se u ovaj izraz uvrsti (2.53) i izvrši integraljenje dobija se



$$\bar{k}_{ij} = \varphi(t_i, t_j) - \varphi(t_i, t_{j+1}) + \frac{1}{E'_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[ \frac{E'_0}{E(\tau)} + \varphi(t, \tau) \right] \frac{dE'(\tau)}{d\tau} d\tau; \quad (2.58)$$

$$\bar{k}_{ij} = 0, \quad j > i;$$

Uticaj poslednjeg člana u izrazu (2.58) može se često zanemariti, naročito kada su promene modula elastičnosti tokom vremena male.

Elementi  $r_{ij}$  matrice rezalvente  $R$  se dobijaju prema (2.56)

$$R = I - (I+K)^{-1} \quad (2.59)$$

gde je  $I$  jednačina matrice.

Numeričke vrednosti funkcija  $r^*(t_i, t_1)$  i  $\bar{\varepsilon}^o(t_i, t_1)$  su s obzirom na (2.50) i (2.51)

$$r^*(t_i, t_1) = \sum_{j=1}^i r_{ij},$$

$$\bar{\varepsilon}^o(t_i, t_1) = \varepsilon_o(t_i, t_1) - \sum_{j=1}^n r_{ij} \varepsilon^o(t_j, t_1) \quad (2.60)$$

Kada su poznate vrednosti ovih funkcija, koje mogu biti za određeni reološki model i starost pri opterećenju  $t_1$  biti i tabelarno date,  $E'_\varphi(t, t_1)$ ,  $\varrho(t, t_1)$  i  $\varepsilon^{o*}(t, t_1)$  se dobijaju prema obrazcima (2.52) i (2.53).

Izrazi za ove funkcije se dalje izvode za neke karakteristične reološke modele betona sa konstantnim elastičnim svojstvima.

Ako se izuzme uticaj skupljanja i temperaturnih promena  $\theta(t)$  onda je za konstantnu deformaciju prema (2.49) koeficijent relaksacije napona

$$H(t) = \frac{\sigma(t)}{\sigma(t_1)} = 1 - r(t, t_1). \quad (2.61)$$

#### 2.41 Maxwellovo telo sa promenljivim viskoznim svojstvima

Funkcija  $R(t, \tau)$  za ovo telo je prema (1.161)

$$R(t, \tau) = e^{-\varphi(t, t_1)}, \quad \varphi(t, t_1) = \int_{t_1}^t \xi_t - \xi_{t_1} \quad (2.62)$$

pa su s obzirom na (2.50) i (2.52)

$$r(t, t_1) = 1 - e^{-\varphi(t, t_1)}; \quad \varphi(t, t_1) = \xi_t - \xi_{t_1} \quad (2.63)$$

$$E_\varphi(t, t_1) = \frac{E'}{2} [1 + e^{-\varphi(t, t_1)}]$$

$$g'(t, t_1) = \frac{1 - e^{-\varphi(t, t_1)}}{2}$$

Ako se pretpostavi da je skupljanje betona

$$\varepsilon_s(t, t_1) = \frac{\bar{\varepsilon}_s}{\bar{\varphi}} \varphi(t, t_1) \quad (2.64)$$

gde su  $\bar{\varepsilon}_s$  i  $\bar{\varphi}$  maksimalne vrednosti skupljanja i koeficijenta tečenja betona kada  $t \rightarrow \infty$ , onda je prema (2.51)

$$\bar{\varepsilon}_s(t, t_1) = \frac{\bar{\varepsilon}_s}{\bar{\varphi}} [1 - e^{-\varphi(t, t_1)}] \quad (2.65)$$

$$\varepsilon_s^*(t, t_1) = 2 \frac{\bar{\varepsilon}_s}{\bar{\varphi}} \frac{1 - e^{-\varphi(t, t_1)}}{1 + e^{-\varphi(t, t_1)}}$$

#### 2.42 K-H telo sa promenljivim viskozanim svojstvima

Za K-H telo sa promenljivim viskozanim svojstvima (predlog M. Ivkovića za beton) je prema (1.154a)

$$R(t, \tau) = \bar{\gamma} \bar{\varphi} e^{-\bar{\gamma}(1+\bar{\varphi})(\xi_t - \xi_\tau)} \quad (2.66)$$

pa su

$$r(t, t_1) = \frac{\bar{\varphi}}{1+\bar{\varphi}} [1 - e^{-\bar{\gamma}(1+\bar{\varphi})(\xi_t - \xi_{t_1})}] ,$$

$$E_\varphi(t, t_1) = \frac{E'}{2} \left[ 2 - \frac{\bar{\varphi}}{1+\bar{\varphi}} (1 - e^{-\bar{\gamma}(1+\bar{\varphi})(\xi_t - \xi_{t_1})}) \right], \quad (2.67)$$

$$g(t, t_1) = \frac{\bar{\varphi}}{2(1+\bar{\varphi})} [1 - e^{-\bar{\gamma}(1+\bar{\varphi})(\xi_t - \xi_{t_1})}] .$$

Ako se pretpostavi da je skupljanje

$$\varepsilon_s(t, t_1) = -\frac{\bar{\varepsilon}_s}{\bar{\varphi}} [1 - e^{-\bar{\gamma}(\xi_t - \xi_{t_1})}] , \quad (2.68)$$

onda je



$$\varepsilon_s(t, t_1) = \frac{\bar{\varepsilon}_s}{1 + \bar{\varphi}} \left[ 1 - e^{-\bar{\delta}(1 + \bar{\varphi})(\xi_t - \xi_{t_1})} \right] \quad (2.69)$$

Kada se viskozna svojstva tokom vremena ne menjaju, onda je to K-H viskoelastično telo (sk. 1.4) za koje je  $\bar{\varphi}$  maksimalna vrednost koeficijenta tečenja kada  $t \rightarrow \infty$  i za koje važe svi ovi izrazi samo umesto "efektivnog" vremena  $\xi_t$  treba uneti stvarno vreme  $t$ .

Ako se uzme ista granična vrednost koeficijenta tečenja, kada  $t \rightarrow \infty$ , za Maxwellovo telo sa promenljivim viskozanim svojstvima, čija je deformacija tečenja nepovratna i viskoelastično K-H telo čija je sva deformacija tečenja povratna, onda se prema izrazu (2.61) dobija izuzimajući uticaj skupljanja

$$\text{za Maxwellovo telo } H_m(t) = 1 - e^{-\bar{\varphi}},$$

$$\text{za K-H telo } H_k(t) = \frac{1}{1 + \bar{\varphi}}.$$

Upoređivanjem ovih izraza lako se dolazi do zaključka da se dobija veća vrednost koeficijenta relaksacije smatrajući beton, kao viskoelastično telo, nego po teoriji starenja za istu vrednost koeficijenta tečenja

$$H_k(t) > H_m(t)$$

Ako je usvojen reološki model, prema kojem je jedan deo deformacije tečenja povratan, onda će se koeficijent relaksacije napona  $H(t)$  pri istom koeficijentu tečenja  $\bar{\varphi}$  biti

$$H_k(t) > H(t) > H_m(t).$$

#### 2.43 Burgersovo telo sa promenljivim viskozanim svojstvima

Za reološki model ovog tela (sk. 1.9) kojem odgovara Illston-Jordaanov predlog za koeficijent tečenja (2.25) je funkcija  $R(t, \tau)$  prema (1.182)

$$R(t, \tau) = \frac{r_1(r_1 + \bar{\delta})}{r_1 - r_2} e^{r_1(\xi_t - \xi_\tau)} - \frac{r_2(r_2 + \bar{\delta})}{r_1 - r_2} e^{r_2(\xi_t - \xi_\tau)} \quad (2.70)$$

gde su

$$r_{1,2} = -\frac{1 + \bar{\delta}(1 + \bar{\varphi}_p)}{2} \pm \left[ \frac{(1 + \bar{\delta}(1 + \bar{\varphi}_p))^2}{4} - \bar{\delta} \right]^{1/2},$$

$$r(t, t_1) = 1 + \frac{r_1 + \bar{\delta}}{r_1 - r_2} e^{r_1(\xi_t - \xi_{t_1})} - \frac{r_2 + \bar{\delta}}{r_1 - r_2} e^{r_2(\xi_t - \xi_{t_1})} \quad (2.71)$$



Da bi se odredila funkcija  $\tilde{\epsilon}_s(t, t_1)$  ovde se pretpostavlja da je skupljanje

$$\epsilon_s(t, t_1) = \frac{\bar{\epsilon}_s}{\bar{\varphi}_f} (\xi_t - \xi_{t_1}),$$

pa je onda prema (2.51)

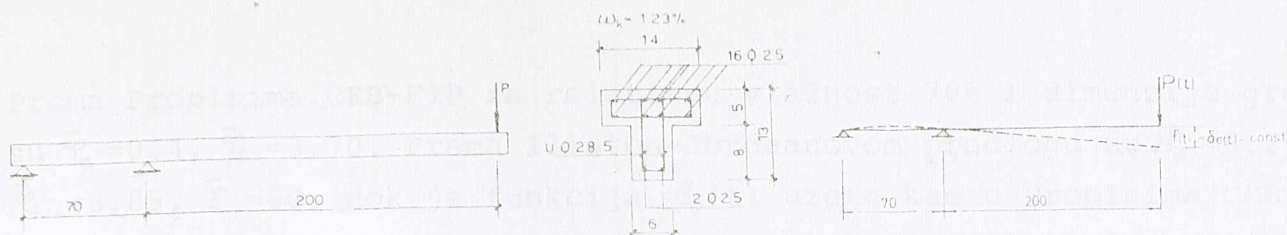
$$\epsilon_s(t, t_1) = \frac{\bar{\epsilon}_s}{\bar{\varphi}_f} \left\{ \frac{\gamma_1 + \beta}{\gamma_2 - \gamma_1} \left[ \frac{1}{\gamma_1} - e^{\gamma_1(\xi_t - \xi_{t_1})} \right] - \frac{\gamma_2 + \beta}{\gamma_2 - \gamma_1} \left[ \frac{1}{\gamma_2} - e^{\gamma_2(\xi_t - \xi_{t_1})} \right] \right\} \quad (2.72)$$

Funkcije  $\epsilon'_\varphi(t, t_1)$ ,  $g'(t, t_1)$  i  $\epsilon^{s*}(t, t_1)$  se sračunavaju prema izrazima (2.52) i (2.53)

#### 2.44 Brojčani primer

Na sk. 2.2 prikazan je izgled i poprečni presek jedne iz serije prethodno napregnutih grednih nosača koje je ispitivao D. Jevtić, a u čijoj je obradi eksperimentalnih rezultata učestvovao i autor ovog rada. Grede su prethodno napregnute adhezijom na stazi, a otpuštane su 8 dana posle ugradjivanja betona. Pri starosti  $t_1 = 40$  dana grede su opterećivane na slobodnom kraju silom  $P(t_1) = 207 \text{ kp}$ , što je iznosilo 42% sile loma  $P_u$ . Ova sila je postupno smanjivana kako bi se održavao konstantan ugib  $\delta_c$ . Čvrstoća betona pri starosti od 28 dana  $f_p = 500 - 600 \text{ kp/cm}^2$ , maksimalna veličina skupljanja betona posle 730 dana  $\bar{\epsilon}_s = 60 \times 10^{-5}$ , modul elastičnosti  $E_b = 4 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2$  /12/. Sila predhodnog naprezanja u gornjim žicama je bila  $N_{k1}(t_1) = 8200 \text{ kp}$  a u donjim žicama  $N_{k2}(t_1) = 1160 \text{ kp}$ . Modul elastičnosti čelika  $E_a = 2 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2$ . Površina poprečnog preseka betona  $A_b = 118 \text{ cm}^2$ , statički moment površine u odnosu na težišnu osu  $S_b = 7 \text{ cm}^3$ , moment inercije betona  $I_b = 1605,3 \text{ cm}^4$ , moment inercije idealizovanog poprečnog preseka  $I_{id} = 1656 \text{ cm}^4$





Sk. 2.2

Za integralnu vezu izmedju napona i deformacija (2.12) koeficijent relaksacije sile  $H(t)$  odredjuje se, kako je to pokazano u radu /12/, prema izrazu

$$H(t) = 1 - \bar{k}(1 + \bar{\alpha}) \int_{t_1}^t R(t, \tau) d\tau + \int_{t_1}^t R(t, \tau) \bar{\beta}_s(\tau) d\tau \quad (2.73)$$

gde je

$$H(t) = \frac{H(t_1)}{H(t)}$$

Koeficijenti  $\bar{k}$ ,  $\bar{\alpha}$  i  $\bar{\beta}_s$  sračunavaju se po obrascima

$$\bar{\alpha} = \frac{\delta_k + \delta_g}{\delta_p}, \quad \bar{\beta}_s(t) = \frac{\delta_s(t)}{\delta_p}, \quad \bar{k} = \frac{I_b}{I_{id}}$$

gde su  $\delta_k$ ,  $\delta_g$ ,  $\delta_p$  pomeranja slobodnog kraja grede u vremenu  $t_1$ , usled delova sila predhodnog naprezanja, sopstvene težine grede  $g = 29,5$  kp/m, i sile  $P$ . Veličine ovih pomeranja su

$$\delta_k = -0.561 \text{ cm}, \quad \delta_g = 0.129 \text{ cm}, \quad \delta_p = 1.128 \text{ cm}, \quad \bar{k} = -0.382.$$

$\delta_s(t)$  je pomeranje slobodnog kraja usled skupljanja betona za  $t \rightarrow \infty$  0,0015 cm, tako da se u ovom slučaju njegov uticaj može zanemariti.

Za algebarsku vezu izmedju napona i deformacija (2.54) koeficijent relaksacije sile se odredjuje prema izrazu

$$\tilde{H}(t) = \frac{E_\varphi(t, t_1) I_{i\varphi}(t, t_1)}{E_b I_{id}} (1 + \bar{\alpha}) - \bar{\alpha} - g(t, t_1) \frac{I_b}{I_{id}} (1 + \bar{\alpha}) - \bar{\beta}_s(t) \quad (2.74)$$

gde je

$$I_{i\varphi}(t, t_1) = I_b + \frac{E_a}{E_\varphi(t, t_1)} I_k.$$

Proračun je sproveden za koeficijente tečenja prema Propisima CEB-FIP (2.30) i Illston-Jordanovom predlogu (2.25).

Prema Propisima CEB-FIP za relativnu vlažnost 70% i dimenzije greda su  $\bar{\varphi}_a = 0.4$ ,  $\bar{\varphi}_f = 3.70$ . Prema Illston-Jordaanovom predlogu su  $\bar{\varphi}_a = 0.25$ ,  $\bar{\varphi}_f = 3.85$ ,  $\bar{\gamma} = 60$ , dok je funkcija  $\beta_f(t)$  uzeta kao u Propisima CEB-FIP, pa se stoga vrednosti koeficijenta tečenja vrlo malo razlikuju.

Funkcije  $E_p(t, t_1)$ ,  $\varrho(t, t_1)$ ,  $\varepsilon_s^*(t, t_1)$  su za Illston-Jordaanov predlog određene su prema izrazima (2.52), (2.53), (2.71) i (2.72). Za predlog CEB-FIP nije moguće odrediti izraz za rezolventu  $R(t, \tau)$ ,  $\bar{F}(t, t_1)$  i  $\varepsilon_s^*(t, t_1)$  pa su ovde određene njihove numeričke vrednosti prema izrazima (2.57) - (2.60). Dobijeni rezultati su prikazani u tabeli 2.2.

Tabela 2.2

Prema Propisima CEB-FIP

$t-t_1$	$\varrho(t, t_1)$	$\varrho(t, t_1)$	$\tilde{H}(t)$	$H(t)$
0.	0.0000	0.0000	1.0000	1.0000
1.	0.1789	0.0821	0.9016	0.9016
2.	0.2520	0.1063	0.8726	0.8726
6.	0.3467	0.1337	0.8397	0.8397
14.	0.4570	0.1649	0.8022	0.8022
30.	0.6287	0.2092	0.7490	0.7490
90.	1.0108	0.2894	0.6526	0.6526
365.	1.4895	0.3560	0.5727	0.5727
730.	1.6356	0.3666	0.5599	0.5599
7300.	1.8164	0.3853	0.5374	0.5374

Prema Illston-Jordaanovom predlogu

$t-t_1$	$\varrho(t, t_1)$	$\varrho(t, t_1)$	$\tilde{H}(t)$	$H(t)$
0.	0.0000	0.0000	1.0000	1.0000
1.	0.1123	0.0083	0.9901	0.9901
2.	0.1528	0.0162	0.9806	0.9806
6.	0.2381	0.0447	0.9463	0.9463
14.	0.3705	0.0903	0.8916	0.8916
30.	0.5684	0.1527	0.8166	0.8166
90.	1.0032	0.2604	0.6872	0.6872
365.	1.5570	0.3500	0.5796	0.5796
730.	1.7196	0.3697	0.5560	0.5560
7300.	1.9054	0.3905	0.5310	0.5310



Iz dobijenih rezultata se može zaključiti da su vrednosti koeficijenta relaksacije  $\tilde{\#}(t)$  dobijene prema algebarskim vezama (2.52) - (2.54) iste kao i vrednosti  $\#(t)$  dobijene prema integralnim vezama izmedju napona i deformacija. Znači da ovde predloženi postupak omogućava, u okviru usvojenih pretpostavki o reološkim svojstvima materijala, dobijanje rezultata velike tačnosti u odnosu na egzakt-na matematička rešenja. Ostupanja izmedju eksperimentalnih i teorijski odredjenih vrednosti koeficijenta relaksacije sile nastala su zbog toga što su vrednosti koeficijenti tečenja u ovom slučaju sračunati prema Propisima CEB-FIP nešto veći od njihovih stvarnih (eksperimentalnih) vrednosti. Cilj ovog primera nije bio da se vrši uporedjenje i opravdanost primene pojedinih teorija, jer je to već uradjeno u radu /12/, nego da se ustanovi kolika se greška čini korišćenjem algebarske veze izmedju napona i deformacija za neka unapred izabrana reološka svojstva materijala.

## 2.5 Potencijal $\tilde{F}^*(\varepsilon, \theta)$ i algebarske veze za prostorno stanje napona i deformacija

U prvom poglavlju ovog rada su izvedeni izrazi za promenu slobodne energije  $F(\varepsilon, \theta)$  i njenog dela  $F^*(\varepsilon, \theta)$  u termodinamičkom procesu deformacije tela iz kojih se dobijaju parcijalnim diferenciranjem integralne veze izmedju napona i deformacija. Kako je to već istaknuto, za rešavanje zadataka u okviru ovog rada i zbog jednostavnije matematičke formulacije u ovom radu će se koristiti potencijal  $F^*(\varepsilon, \theta)$  - koji se odnosi na integralne veze izmedju napona i deformacija. Na sličan način, kao u izrazima (1.211a) formira se potencijal  $\tilde{F}^*(\varepsilon, \theta)$  čijim se parcijalnim diferenciranjem dobija algebarska veza izmedju napona i deformacija (2.4).

$$\tilde{F}^*(\varepsilon, \theta) = \varepsilon(t) E'_\varphi(t, t_1) \left[ \frac{\varepsilon(t)^2}{2} + \varepsilon^s(t) - \alpha \theta(t) \right] - \varepsilon(t) \varrho(t, t_1) \sigma(t_1). \quad (2.75)$$

Pomenuta uprošćenja integralnih veza izmedju napona i deformacija, mogu se primeniti posebno za sverni i devijatorski deo tenzora napona, kao i za jednoosno stanje napona. Razlika je samo u značenju pojedinih funkcija koje određuju reološka svojstva i one se definišu slično kao u odeljku 1.12.

Za sverni tenzor napona

$$\Xi_{\varphi}'(t, t_1) = 3K_{\varphi}(t, t_1), \quad \varepsilon(t) = \delta(t),$$

$$\varphi(t, t_1) = \varphi_s(t, t_1), \quad \sigma(t) = \sigma(t).$$

Za devijatorski tenzor

$$\Xi_{\varphi}'(t, t_1) = 2\mu_{\varphi}(t, t_1) = 2\bar{G}_{\varphi}(t, t_1), \quad (2.76.)$$

$$\varphi(t, t_1) = \varphi_D(t, t_1), \quad \sigma(t) = \sigma(t).$$

Za jednoosno stanje napona

$$\Xi_{\varphi}'(t) = E_{\varphi}(t), \quad \varepsilon(t) = E(t),$$

$$\varphi(t, t_1) = \varphi(t, t_1), \quad \sigma(t) = \sigma(t).$$

Koeficijenti tečenja za sverni  $\varphi_s(t, t_1)$  i devijatorski  $\varphi_D(t, t_1)$  deo deformacije mogu se izraziti u funkciji koeficijenta tečenja za podužnu deformaciju  $\varphi(t, t_1)$ , odnosno meru tečenja pri jednoosnom stanju napona

$$\varphi_s(t, t_1) = 3K_0(1 - 2\nu_c(t, t_1))C(t, t_1) = \frac{3K_0}{E_0}(1 - 2\nu_c(t, t_1))\varphi(t, t_1) \quad (2.77.)$$

$$\varphi_D(t, t_1) = 2\bar{G}_0(1 + 2\nu_c(t, t_1))C(t, t_1) = \frac{2\bar{G}_0}{E_0}(1 + 2\nu_c(t, t_1))\varphi(t, t_1)$$

gde su  $K_0$ ,  $\bar{G}_0$  i  $E_0$  vrednosti modula kompresije, smicanja i elastičnosti pri nekoj unapred određenoj starosti betona  $t_0$ .

Ako su  $\nu(t) = \nu(t, t_1) = \nu$ , onda je s obzirom na (1.223)

$$\varphi_s(t, t_1) = \varphi(t, t_1)$$

$$\varphi_D(t, t_1) = \varphi(t, t_1)$$

(2.78.)

Potencijali  $\tilde{F}_s^*(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}^s, \theta)$  za sverni i  $\tilde{F}_D^*(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}^s)$  za devijatorski deo deformacije su



$$\begin{aligned} \tilde{F}_s^*(\delta, \delta^s, \theta) &= 3K_\varphi(t, t_1) \left| \frac{\delta^2(t)}{2} - \delta(t)\delta^s(t) - \delta(t)\alpha\theta(t) \right| - 3\delta(t)g_s(t, t_1)\sigma(t_1) \\ \tilde{F}_D^*(\delta_{ij}, \delta_{ij}^s) &= 2\bar{G}_\varphi(t, t_1) \left[ \frac{\delta_{ij}(t)\delta_{ij}^s(t)}{2} - \delta_{ij}(t)\delta_{ij}^s(t) \right] - g_D(t, t_1)\delta_{ij}(t)\sigma_{ij}(t_1) \end{aligned} \quad (2.79)$$

tako da se parcijalnim diferenciranjem dobijaju

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}_s^*}{\partial \delta} &\equiv 3K_\varphi(t, t_1) [\delta(t) - \delta^s(t) - \alpha\theta(t)] - g_s(t, t_1)\sigma(t_1) = \sigma(t), \\ \frac{\partial \tilde{F}_D^*}{\partial \delta_{ij}} &\equiv 2\bar{G}_\varphi(t, t_1) [\delta_{ij}(t) - \delta_{ij}^s(t)] - g_D(t, t_1)\tilde{\sigma}_{ij}(t_1) = \tilde{\sigma}_{ij}(t). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Kada se uprošćava veza napona i deformacija sa funkcijom  $k(t, \tau)$  (2.12)  $K_\varphi(t)$ ,  $\bar{G}_\varphi(t)$ ,  $g_s(t)$  i  $g_D(t)$  određuju se prema izrazima (2.16) i (2.18), tako što se  $E'_\varphi(t)$ ,  $g'(t)$  i  $\varphi(t, t_1)$  zamenjuju odgovarajućim funkcijama prema (2.76) zavisno od toga da li se razmatra sverni ili devijatorski deo tenzora napona i deformacije.

Prilikom uprošćavanja integralne veze između napona i deformacija sa funkcijom  $R(t, \tau)$  (2.47), onda će biti prema (2.50)

$$\bar{F}_s(t, t_1) = \int_{t_1}^t R_s(t, \tau) d\tau, \quad \bar{F}_D(t, t_1) = \int_{t_1}^t R_D(t, \tau) d\tau, \quad (2.81)$$

gde su  $R_s(t, \tau)$  i  $R_D(t, \tau)$  odgovarajuće rezolvente jezgara  $K_s(t, \tau)$  i  $K_D(t, \tau)$  Volterrinih integralnih jednačina (1.233). One mogu biti zadate analitički (Maxwellov i Burgersov reološki model sa nepromenljivim reološkim svojstvima) ili se mogu odrediti numerički, kako je to pokazano u odeljku 2.4, koristeći obrasce (1.244). Kada se odrede  $\bar{F}_s(t, t_1)$  onda treba u izrazima (2.52) i (2.53) zameniti  $E'_\varphi(t)$  i  $g'(t)$  sa  $3K_\varphi(t)$  i  $g_s(t)$  za sverni tenzor, odnosno sa  $2\bar{G}_\varphi(t)$  i  $g_D(t)$  za tenzor devijator.

Ako su  $\nu(t) = \nu_C(t, t_1) = \nu$  onda su prema (1.246), (2.16), (2.50) i (2.78)

$$\begin{aligned} \bar{F}_s(t, t_1) &= \bar{F}_D(t, t_1) = r(t, t_1), \\ g_s(t, t_1) &= g_D(t, t_1) = g(t, t_1), \end{aligned} \quad (2.82)$$

i određuju se prema  $E(t)$  i  $\varphi(t, t_1)$  za jednoosno stanje napona, kako je to pokazano u odeljcima 2.3 i 2.4.

Ukupan potencijal  $\tilde{F}^*(\delta_{ij}, \delta_{ij}^s, \theta)$  za prostorno stanje napona i deformacija je



Kada se u ove izraze uvrste (2.79) uzimajući u obzir (1.220) dobija se posle sredjivanja

$$\begin{aligned} \tilde{F}^*(\delta_{ij}, \delta_{ij}^s, \theta) = & \mu_\varphi(t, t_1) \delta_{ij}(t) [\delta_{ij}(t) - 2\delta_{ij}^s(t)] + \\ & + \frac{\varrho}{2} \lambda_\varphi(t, t_1) \delta(t) [\delta(t) - 2\delta^s(t)] - \\ & - 3\alpha [3\lambda_\varphi(t, t_1) + 2\mu_\varphi(t, t_1)] \delta(t) \theta(t) - \\ & - \delta_{ij}(t) \varrho_D(t, t_1) \sigma_{ij}(t_1) - 3\delta(t) \varrho_S(t, t_1) \sigma(t_1), \end{aligned} \quad (2.83)$$

gde su

$$\mu_\varphi(t, t_1) = 2\bar{G}_\varphi(t, t_1), \quad \lambda_\varphi(t, t_1) = 3K_\varphi(t, t_1) - \frac{2}{3}\bar{G}_\varphi(t, t_1), \quad (2.84)$$

funkcije koje odgovaraju Laméovim konstantama u teoriji elastičnosti.

Potencijalnim diferenciranjem se dobija

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}^*(\delta_{ij}, \delta_{ij}^s, \theta)}{\partial \delta_{ij}} = & \sigma_{ij}(t) = 2\mu_\varphi(t, t_1) [\delta_{ij}(t) - \delta_{ij}^s(t)] + 3\lambda_\varphi(t, t_1) [\delta(t) - \delta^s(t)] \delta_{ij} - \\ & - \alpha [3\lambda_\varphi(t, t_1) + 2\mu_\varphi(t, t_1)] \theta(t) - \varrho_D(t, t_1) \tilde{\sigma}_{ij}(t_1) - \varrho_S(t, t_1) \sigma(t_1). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Pošto je za  $t=t_1$ ,  $\varepsilon_S(t_1, t_1) = 0$ , onda je

$$\begin{aligned} \sigma(t_1) = 3K(t_1) \delta(t_1) = 3 \left[ \lambda(t_1) + \frac{2}{3} \mu(t_1) \right] [\delta(t_1) - \alpha \theta(t_1)] \\ \sigma_{ij}(t_1) = 2\mu(t_1) [\delta_{ij}(t_1) - \delta(t_1) \delta_{ij}] \end{aligned}$$

pa je stoga

$$\begin{aligned} F^*(\delta_{ij}, \delta_{ij}^s, \theta) = & \delta_{ij}(t) \mu_\varphi(t, t_1) \left[ \frac{\delta_{ij}(t) \delta_{ij}(t)}{2} - 2\delta_{ij}^s(t) \right] + \\ & + \frac{\varrho}{2} \delta(t) \lambda_\varphi(t, t_1) [\delta(t) - 2\delta^s(t)] - 3\delta(t) [3\lambda_\varphi(t, t_1) + 2\mu_\varphi(t, t_1)] \theta(t) - \\ & - 2\delta_{ij}(t) [\varrho_D(t, t_1) \delta_{ij}(t_1) - (\varrho_D(t, t_1) - \varrho_S(t, t_1)) \delta(t_1) \delta_{ij}] + \\ & + 3\delta(t) \varrho_S(t, t_1) [3\lambda(t_1) + 2\mu(t_1)] \theta(t_1) - \\ & - \varrho \delta(t) \varrho_S(t, t_1) \lambda(t_1) \delta(t_1), \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) = & 2\mu_\varphi(t, t_1) [\delta_{ij}(t) - \delta_{ij}^s(t)] + 3\lambda_\varphi(t, t_1) [\delta(t) - \delta^s(t)] \delta_{ij} - \\ & - [3\lambda_\varphi(t, t_1) + 2\mu_\varphi(t, t_1)] \theta(t) - 2\mu(t_1) [\varrho_D(t, t_1) \delta_{ij}(t_1) - \\ & - (\varrho_D(t_1) - \varrho_S(t_1)) \delta(t_1) \delta_{ij}] - \varrho_S(t, t_1) \lambda(t_1) \delta(t_1) \delta_{ij} + \\ & + \varrho_S(t, t_1) [3\lambda(t_1) + 2\mu(t_1)] \theta(t_1) \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.87)$$



## REFERENCE

- /1/ A r g y r i s, J.H., P i s t e r, K.S., W i l l i a m, K., Termomechanical Creep of Aging Concrete. Memories IABSE 36-I, pp. 23-59.
- /2/ B a ž a n t, Z.P., Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method. Jurnal ACI, Vol. 69, April 1972, pp. 21-217.
- /3/ C o m i t e E u r o - I n t e r n a t i o n a l d u B é t o n, Code Modèle CEB-FIP, Vol.II, 3 édition, 1978.
- /4/ D i s c h i n g e r, F., Untersuchungen über die Knicksicherheit die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken. Der Bauingenieur, 33/34, 35/36, 39/40, 1937.
- /5/ D j u r i ć, M., Teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija. SANU, knj. CCCLXIV, Beograd, 1963.
- /6/ F r i t z, B., Der Verbundtreger. Springer-Verlag, 1961.
- /7/ H a j d i n, N., Der Einfluss des Kriechen und Schwinders des Betons in dünnwandigen Trägern mit gekrümmter Acshe. Symposium IABSE. Design of Concrete Structures for creep, Shrinkage and temperature changes. Madrid 1970.
- /8/ I l l s t o n, J.M., J o r d a a n, I.J., Creep prediction for concrete under multiaxial stress. JACI, Vol 3, 1972.
- /9/ I v k o v i ć, M., Jedan tačniji postupak proračuna armiranobetonskih štapova pri dugotrajnom opterećenju. XIII Kongres Jugoslovenskog društva za mehaniku, Sv c4-2, 1976.
- /10/ I v k o v i ć, M., Jedan nov predlog za veze tenzora napona i deformacija za beton. XIV Kongres Jugoslovenskog društva za mehaniku, Sv C-4-5, 1978.
- /11/ J e v t i ć, D., P r a š č e v i ć, Ž., Quelques procédés de la détermination de l effet du fluage dans les ouvrages en béton basés sur les essais. Colloq. International sur les essais in situ des structures en béton. Vol. I, RILEM, 1977, Budapest.
- /12/ J e v t i ć, D., P r a š č e v i ć, Ž., L'influence du chargement et dechargement sur les déformations du béton et sur les poutres en béton précontraint. RILEM Colloquium, Leeds 1978.
- /13/ L a z a r e v i ć, Dj., I v k o v i ć, M., Nelinearne deformacije betona. V Kongres Jugoslovenskog društva konstruktera, Sv. A-1, str.1-47, udva 1974.
- /14/ N e v i l l e, A.M., Creep of Concrete: Plain, Reinforced, and Prestressed. North-Holand Publ. Co, Amsterdam 1970.
- /15/ P r a š č e v i ć, Ž., A contribution to the solution of stress relaxations problems in reinforced and prestressed concrete-RILEM Colloquium, Leeds 1978.
- /16/ P r a š č e v i ć, Ž., Neki problemi tehničke teorije armiranobetonskog štapa. Magistarski rad, Građevinski fakultet, Beograd 1973.

- /17/ R ü s c h, H., J u n g w i r t h, D., Stahlbeton-Spanbeton, Band 2. Werner Verlag, Düsseldorf, 1976.
- /18/ T r o s t, H., Auswirkungen des Superpozitionprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spanbeton. Beton und Stahlbetonbau 10,11, 1967.
- /19/ Л и в ш и ц, Я. Д., Расчет железобетонных конструкций с учетом влияния усадки и ползучести бетона. Высшая школа, Киев, 1976.
- /20/ У л и ц к и й, И. И., Теория и расчет железобетонных конструкций с учетом влияния усадки и ползучести бетона. Будивельник, Киев, 1967.

### 3.1 Усадка и ползучесть

Varijacioni principi i metode varijacionog računa imaju veliku primenu u rešavanju različitih problema mehanike kontinuuma, naročito graničnih zadataka teorije elastičnosti /1/. Ovi čine matematičku osnovu metode konačnih elemenata, koja se mnogo primenjuje za rešavanje ovih problema i koja će biti razmatrana u narednim poglavljima. Principi koji se ovde prikazuju predstavljaju opštavanja poznatih varijacionih principa teorije elastičnosti. Ova opštavanja u oblasti linearnih viskoelastičnosti data su u radovima M.F. Curtina /2/, B. Sternberga /3/, R.S. Christensena /4/, J.N. Rabotnova /12/ i drugih.

U ovim ovim radovima za neko viskoelastično telo zapremine  $V$ , variraju se razne vrednosti vremena  $t$  (npr. napon  $\sigma_j(t)$ , deformacija  $\epsilon_j(t)$  i pomeranje  $u_j(t)$ ) kao funkcije vektora položaja nekog tačke tela i vremena  $t$ . J.N. Rabotnov /12/ je pokušao da se do istih rezultata u pristupu za rešavanje različitih problema teorije viskoelastičnosti može doći ako se varijacioni principi formulišu na nešto jednostavniji način tako da se variraju trenutne vrednosti pomeranja, razmatrajući vreme  $t$  kao parametar, pa se veza između varijacije napona  $\sigma_j$  i deformacije  $\epsilon_j$  definiše Hookovim zakonom

$$\sigma_j = 2\mu \delta \epsilon_j + 3\lambda \delta \epsilon_j$$

U ovom radu biće primenjivan ovaj pristup u formulisanju varijacionih principa i funkcionala pri rešavanju nekih zadataka teorije betona tretirajući ga kao materijal sa svojsvima elastičnosti i nasleđenosti. Za neke reološke modele betona čija se viskoznost svojstva izražavaju u funkciji efektivnog vremena  $\bar{t}$ , a elastična svojstva se tokom vremena ne menjaju, veza između napona i deformacije se formuliše kao je to pokazano



### 3. NEKI VARIJACIONI PRINCIPII TEORIJE TEČENJA BETONA

#### 3.1 Uvodne napomene

Varijacioni principi i metode varijacionog računa imaju veliku primenu u rešavanju različitih problema mehanike kontinuuma, naročito graničnih zadataka teorije elastičnosti /11/. Oni čine matematičku osnovu metode konačnih elemenata, koja se mnogo primenjuje za rešavanje ovih problema i koja će biti razmatrana u narednim poglavljima. Principi koji se ovde prikazuju predstavljaju uopštavanja poznatih varijacionih principa teorije elastičnosti. Ova uopštavanja u oblasti linearne viskoelastičnosti data su u radovima M.E. Gurtina /2/, E.Sternberga /3/, R.M.Christensena /1/, J.N.Rabotnova /12/ i drugih.

U svim ovim radovima za neko viskoelastično telo zapremine  $V$ , variraju se za sve vrednosti vremena  $t \in [0, \infty)$  napon  $\sigma_{ij}(x, t)$ , deformacija  $\gamma_{ij}(x, t)$  i pomeranje  $u_i(x, t)$  kao funkcije vektora položaja neke tačke tela i vremena  $t$ . J.N.Rabornov /12/ je pokazao da se do istih rezultata u primeni za rešavanje različitih problema teorije viskoelastičnosti može doći ako se varijacioni principi formulišu na nešto jednostavniji način, tako da se variraju trenutne vrednosti pomenutih funkcija, smatrajući vreme  $t$  kao parametar, pa se veza izmedju varijacija napona  $\delta\sigma_{ij}$  i deformacija  $\delta\gamma_{ij}$  definiše Hookeovim zakonom

$$\delta\sigma_{ij} = 2\mu\delta\gamma_{ij} + 3\lambda\delta\gamma\delta\gamma_{ij} \quad (3.1)$$

U ovom radu biće primenjivan ovaj pristup u formulisanju varijacionih principa i funkcionala pri rešavanju nekih zadataka teorije betona tretirajući ga kao materijal sa svojstvima starenja i naslednosti. Za neke reološke modele betona čija se viskozna svojstva izražavaju u funkciji efektivnog vremena  $\xi_t$ , a elastična svojstva se tokom vremena ne menjaju, veza izmedju napona i deformacija se formulišu, kako je to pokazano

u prvom poglavlju, u obliku Volterrinih integralnih jednačina konvolutivnog tipa. Za te reološke modele mogu se neposredno koristiti varijacioni principi linearne viskoelastičnosti dati u pomenutim radovima /1/, /2/ i /12/.

### 3.2 Princip virtualnih radova

Posmatra se telo, čija je zapremina  $V$  i površina konture  $A$  i koje se nalazi pod dejstvom zapreminskih sila  $Y_i$  i površinskih sila  $p_i$  kako je to prikazano u odeljku 1.2. Površinske sile deluju na delu konture čija je površina  $A_\sigma$ , dok su na preostalom delu konture  $A_u$  propisana neka pomeranja  $\bar{u}_i(x, t)$ , tako da su

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i(x, t), \quad x \in A_u \quad (3.2)$$

$$A = A_\sigma + A_u \quad (3.3)$$

Zbog tečenja (puzanja) materijala, temperaturnih promena, skupljanja i drugih uticaja tačke tela, izuzev onih čija su pomeranja unapred propisana, pod dejstvom zapreminskih i površinskih sila kao statičkog opterećenja zauzimaju neki drugi ravnotežni položaj. Telo dakle prolazi u intervalu vremena  $t \in [0, \infty)$  kroz niz ravnotežnih stanja za koja moraju biti zadovoljeni uslovi (1.8)

$$\sigma_{ij,j} + Y_i = 0, \quad i=1,2,3; \quad j=1,2,3; \quad (3.4)$$

gde je

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, t), \quad x \in V$$

koji se nazivaju i kvazistatičkim uslovima ravnoteže. Pored toga na konturi  $A_\sigma$  moraju biti ispunjeni uslovi (1.4)

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad x \in A_\sigma \quad (3.5)$$

Između komponenti pomeranja  $u_i(x, t)$  i tenzora deformacije  $\gamma_{ij}(x, t)$  tačka čije je vektor položaja  $x$  postoji u geometrijski nelinearnoj teoriji veza

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (3.6)$$



ili kada se izvrši geometrijska linearizacija

$$\delta_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.7)$$

gde su

$$u_i = u_i(x, t) \quad x \in V$$

Ako se pomeranjima tačkaka  $u_i(x, t)$  u nekom trenutku vremena  $t$  zadaju virtualni priraštaji  $\delta u_i(x)$  koji su neprekidne funkcije  $x$ , a na delu konture  $A_u$  gde su pomeranja propisana

$$\delta u_i(x) = 0, \quad x \in A_u \quad (3.8)$$

onda se na isti način kao i u teoriji elastičnosti /5/ dobija veza između virtualnih pomeranja  $\delta u_i(x)$  i njima odgovarajućih virtualnih deformacija  $\delta \gamma_{ij}(x)$

$$\int_V \gamma_i \delta u_i dV + \int_{A_\sigma} p_i \delta u_i dA = \int_V \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij} dV \quad (3.9)$$

Ovo je matematička definicija principa virtualnih radova, prema kome je virtualni rad unutrašnjih sila tela, koje se nalazi u stanju kvazistatičke ravnoteže, jednak radu zapreminskih i površinskih sila na virtualnim pomeranjima u nekom trenutku vremena  $t$ .

### 3.3 Uopštenje principa o minimumu potencijalne energije

Promena dela slobodne energije  $F^*(\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta)$  tela elementarne zapremine  $dV$  sa svojstvima naslednosti i starenja, kakav je naprimer beton, u termomehaničkom procesu između dva termomehanička stanja u trenucima vremena  $t_1$  i  $t$ , kako je to pokazano u odeljku 1.12, je data izrazom (1.235), tako da je

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{\partial F^*(\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta)}{\partial \gamma_{ij}} \quad (3.10a)$$

pa se izraz (3.9) koji definiše princip virtualnih radova može pisati

$$\int_V \gamma_i \delta u_i dV + \int_{A_\sigma} p_i \delta u_i dV = \int_V \frac{\partial F^*}{\partial \gamma_{ij}} \delta \gamma_{ij} dV.$$

Pošto se površinske i zapreminske sile, kao i deformacije  $\gamma_{ij}^s$  i temperaturne promene  $\theta$ , u posmatranom trenutku vremena ne variraju, dobija se sledeći princip

$$\delta \left[ \mathcal{F}^*(t) - \int_V \gamma_i u_i dV - \int_{A_\sigma} p_i u_i dA \right],$$

ili

$$\delta \pi_r^*(t) = 0, \quad (3.10)$$

gde su

$$\pi_r^*(t) = \mathcal{F}^*(t) - \int_V \gamma_i u_i dV - \int_{A_\sigma} p_i u_i dA, \quad (3.11)$$

$$\mathcal{F}^*(t) = \int_V \mathcal{F}^*(\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta). \quad (3.12)$$

Može se pokazati da funkcional  $\pi_r^*(t)$  dostiže minimum. Neka je za polje pomeranja  $u_i(x, t)$  i deformaciju  $\gamma_{ij}(x, t)$  u nekom trenutku vremena  $t$  vrednost ovog funkcionala  $\pi_r^*(t)$ , a za neko polje pomeranja  $u_i(x, t) + \delta u_i(x)$  i deformaciju  $\gamma_{ij}(x, t) + \delta \gamma_{ij}(x)$  vrednost  $\pi_r'^*(t)$ . Onda je razlika

$$\begin{aligned} \pi_r'^*(t) - \pi_r^*(t) &= \int_V \mathcal{F}^*(\gamma_{ij} + \delta \gamma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta) dV - \int_V \mathcal{F}^*(\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta) dV - \\ &\quad - \int_V \gamma_i u_i dV - \int_{A_\sigma} p_i u_i dA \end{aligned}$$

Kada se  $\mathcal{F}^*(\gamma_{ij} + \delta \gamma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta)$  razloži u Taylorov red po  $\delta \gamma_{ij}$  zadržavajući prva tri člana i uzimajući u obzir princip virtualnih radova (3.9) dobija se

$$\begin{aligned} \pi_r'^*(t) - \pi_r^*(t) &= \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial^2 \mathcal{F}^*(\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta)}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \delta \gamma_{ij} \delta \gamma_{kl} dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \gamma_{kl}} \delta \gamma_{ij} \delta \gamma_{kl} dV. \end{aligned}$$

Kada se u ovaj izraz uvrsti (1.242) dobija se posle parcijalnog integriranja

$$\begin{aligned} \pi_r'^*(t) - \pi_r^*(t) &= \frac{1}{2} \int_V [2\mu(t) \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda(t) \delta_{ij} \delta_{kl}] \delta \gamma_{ij} \delta \gamma_{kl} dV = \\ &= \int_V [\mu(t) \delta \gamma_{ij} \delta \gamma_{ij} + \frac{\lambda}{2} \delta \gamma \delta \gamma] dV \end{aligned}$$

Pošto su  $\mu(t) > 0$ ,  $\lambda(t) > 0$ , mora biti

$$\pi_r'^*(t) - \pi_r^*(t) \geq 0. \quad (3.13)$$

što znači da funkcional  $\pi_r^*(t)$  dostiže minimum, pa se može formulisati sledeći princip



Od svih mogućih pomeranja koja zadovoljavaju granične uslove (3.2) kvaziravnotežnom stanju odgovaraju ona za koja funkcional  $\Pi_y^*(t)$  u posmatranom trenutku vremena  $t \in [t_1, \infty)$  i dostiže absolutni minimum.

Ako je telo elastično, onda su funkcije  $R_d(t, \tau) = 0$  i  $R_\lambda(t, \tau) = 0$ , a funkcional  $\Pi_y^*(t)$  je potencijalna energija, pa ovaj princip predstavlja uopštenje poznatog principa teorije elastičnosti o minimumu potencijalne energije.

### 3.4 Uopštenje Casiglianovog principa

Ako se u telu zapremine  $V$ , opisanom u prethodnom odeljku, naponima  $\sigma_{ij}(x, t)$ , koji zadovoljavaju konturne uslove (3.5) i površinskim silama  $p_i(x, t)$  daju u nekom trenutku vremena  $t \in [t_1, \infty)$  daju varijacije  $\delta\sigma_{ij}(x)$  i  $\delta p_i(x)$  tako da ponovo budu zadovoljeni uslovi ravnoteže (3.4) i granični uslovi (3.5)

$$\sigma_{ij,j} + \delta\sigma_{ij,j} + Y_i = 0, \quad x \in V$$

$$p_i + \delta p_i = (\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij})n_j, \quad x \in A_\sigma$$

Oдавде se neposredno dobija, s obzirom na (3.4) i (3.5)

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{ij,j} &= 0, \\ \delta p_i &= \delta\sigma_{ij}n_j. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pošto je na delu konture  $A_\sigma$  gde su zadate spoljašnje sile

$$\delta p_i(x) = 0, \quad x \in A_\sigma, \quad (3.15)$$

onda je

$$\delta\sigma_{ij}(x) = 0 \quad x \in A_\sigma, \quad (3.16)$$

dok na preostalnom delu konture  $A_u$   $\delta p_i(x)$  i  $\delta\sigma_{ij}(x)$  mogu imati proizvoljne vrednosti.

Deo promene Gibbsovog termodinamičkog potencijala  $G^*(\sigma_{ij}, \chi_{ij}^s, \theta)$  između dva stanja u termomehaničkom procesu u trenucima vremena  $t_1$  i  $t$  je dat izrazom (1.239) tako da je prema (1.243)

$$\gamma_{ij}(t) = \frac{\partial G^*(\sigma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta)}{\partial \sigma_{ij}}$$

Kada se  $G^*(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta)$  razloži u Taylorov red i zadrže prva tri člana tog reda, dobija se

$$\begin{aligned} \delta G^*(\sigma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta) &= G^*(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta) - G^*(\sigma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta) = \\ &= \frac{\partial G^*(\sigma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta)}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G^*(\sigma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta)}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \delta\sigma_{ij} \delta\sigma_{kl} = \\ &= \gamma_{ij} \delta\sigma_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \delta\sigma_{ij} \delta\sigma_{kl} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Za ukupnu zapreminu  $V$  je varijacija funkcionala

$$\delta \mathcal{G}^*(t) = \int_V \gamma_{ij} \delta\sigma_{ij} dV + R_0(t)$$

gde su

$$\mathcal{G}^*(t) = \int_V G^*(\sigma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta) dV \quad (3.18)$$

$$R_0(t) = \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \delta\sigma_{ij} \delta\sigma_{kl} dV \quad (3.19)$$

Kada se dalje  $\gamma_{ij}$  izrazi u funkciji  $\sigma_{ij}$  prema (1.243) i izvrši parcijalno integraljenje dobija se posle sredjivanja

$$R_0(t) = \int_V [\bar{\mu}(t) \delta\sigma_{ij} \delta\sigma_{ij} + \frac{\theta}{2} \bar{\lambda}(t) \delta\sigma \delta\sigma] dV > 0, \quad (3.20)$$

pošto su  $\bar{\mu}(t) > 0$ ,  $\bar{\lambda}(t) > 0$

Pošto je /5/

$$\delta_{ij} \delta\sigma_{ij} = u_{i,j} \delta\sigma_{ij},$$

onda je

$$\delta \mathcal{G}^*(t) = \int_V u_{i,j} \delta\sigma_{ij} dV + R_0(t) = \int_V (u_{i,j} \delta\sigma_{ij})_{,j} dV - \int_V \delta\sigma_{ij,j} u_i dV + R_0(t).$$

Pošto je prema (3.14)  $\delta\sigma_{ij,j} = 0$  i kada se u prvom integralu izvrši Gaussova transformacija i prikaže kako površinski integral, dobija se uz zanemarenje člana  $R_0(t)$

$$\delta \mathcal{G}^*(t) - \int_{A_u} \delta p_i u_i dA = 0,$$



Kada se funkcional  $\Pi_{\gamma}^*(t)$  dat izrazom (3.11), proširi uzimajući u obzir odgovarajuće uslove ograničenja (3.2) i (3.7), dobija se ili s obzirom na (3.8), pošto se pomeranja površini  $A_u$  ne variraju

$$\delta \mathcal{G}^*(t) - \delta \int_{A_u} p_i u_i dV = 0,$$

odnosno

$$\delta \Pi_{\sigma}^*(t) = 0, \quad (3.21)$$

$$\Pi_{\sigma}^*(t) = \mathcal{G}^*(t) - \int_{A_u} p_i u_i dA. \quad (3.22)$$

Može se pokazati da funkcional  $\Pi_{\sigma}^*(t)$  dostiže minimum na sličan način kao i u prethodnom odeljku. Neka je za neko moguće polje deformacija  $\delta_{ij}(\mathbf{x}, t) + \delta \delta_{ij}(\mathbf{x})$  i napona  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) + \delta \sigma_{ij}(\mathbf{x})$  vrednost ovog funkcionala  $\Pi_{\sigma}^*/(t)$  pa je razlika s obzirom na (3.17) i (3.20)

$$\Pi_{\sigma}^{*'}(t) - \Pi_{\sigma}^*(t) = \int_V G^*(\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}, \delta_{ij}^s, \theta) dV - \int_V G^*(\sigma_{ij}, \delta_{ij}^s, \theta) dV,$$

odnosno posle razlaganja u Taylorov red, vodeći računa o (3.17) i (3.20)

$$\Pi_{\sigma}^{*'}(t) - \Pi_{\sigma}^*(t) = R_0(t) > 0 \quad (3.23)$$

što znači da funkcional dostiže minimum i može se formulisati uopšteni Castiglianov princip.

Funkcional  $\Pi_{\sigma}^*(t)$  dostiže apsolutni minimum u bilo kojem izabranom trenutku vremena  $t \in [t, \infty)$  ako tenzor napona  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$  zadovoljava kvazistatičke uslove ravnoteže (3.4) a njegova varijacija  $\delta \sigma_{ij}(\mathbf{x})$  uslove (3.14) i (3.16).

### 3.14 Uopštenje Hu-Washizuovog i Hellinger-Reissnerovog principa

Rešavanje različitih problema uz primenu pomenutih varijacionih principa svodi se na određivanje apsolutnog minimuma funkcionala  $\Pi_{\gamma}^*(t)$  i  $\Pi_{\sigma}^*(t)$  u nekom izabranom trenutku vremena  $t$  uz zadovoljavanje uslova ograničenja (3.2), (3.4), (3.5), (3.6) i (3.7). Ovo su dakle problemi optimizacije sa ograničenjima i mogu se svesti, kao što je poznato na ekstremalne zadatke bez ograničenja primenjujući Lagrangeove multiplikatore.

Kada se funkcional  $\tilde{\pi}_w^*(t)$  dat izrazom (3.11), proširi uzimajući u obzir odgovarajuće uslove ograničenja (3.2) i (3.7), dobija se

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_w^*(t) = & \mathcal{F} - \int_V \gamma_i u_i dV - \int_{A_\sigma} p_i u_i dV - \int_{A_u} a_i (u_i - \bar{u}_i) dA - \\ & - \int_V b_{ij} \left[ \delta_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV \end{aligned} \quad (3.24)$$

gde su  $a_i$  i  $b_{ij}$  Lagrangeovi multiplikatori i funkcije su vektora položaja  $x$  tačaka tela i vremena  $t$  kao parametra.

$$\begin{aligned} a_i &= a_i(x, t), & x &\in A_u, \\ b_{ij} &= b_{ij}(x, t), & x &\in V. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Prva varijacija ovog funkcionala je

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\pi}_w^*(t) = & \int_V \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial \delta_{ij}} \delta \delta_{ij} dV - \int_V \gamma_i \delta u_i dV - \int_{A_\sigma} p_i \delta u_i dA - \\ & - \int_{A_u} \delta a_i (u_i - \bar{u}_i) dA - \int_{A_u} a_i (\delta u_i - \delta \bar{u}_i) dA - \\ & - \int_V \left\{ \delta b_{ij} \left[ \delta_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] - b_{ij} \left[ \delta \delta_{ij} - \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \right] \right\} dV. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Pošto je  $\delta \bar{u}_i = 0$  i

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V b_{ij} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) dV &= \int_V [(b_{ij} \delta u_i)_{,j} - b_{ij,j} \delta u_i] dV = \\ &= \int_{A_\sigma} b_{ij} n_j \delta u_i dA - \int_V b_{ij,j} \delta u_i dV. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Izraz za  $\delta \tilde{\pi}_w^*(t)$  posle sredjivanja dobija oblik

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\pi}_w^*(t) = & \int_V \left[ \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial \delta_{ij}} - b_{ij} \right] \delta \delta_{ij} dV - \int_V [b_{ij,j} + \gamma_i] \delta u_i dV + \\ & + \int_{A_\sigma} (b_{ij} n_j - p_i) \delta u_i dA + \int_{A_u} (u_i - \bar{u}_i) \delta u_i dA - \\ & - \int_{A_\sigma} (a_i - b_{ij} n_j) \delta u_i dA. \end{aligned}$$

Funkcional  $\tilde{\pi}_w^*(t)$  ima stacionarnu vrednost u posmatranom trenutku vremena  $t$  ako je



$$\delta \pi_w^*(t) = 0, \quad (3.27)$$

odnosno kada su

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial \gamma_{ij}} - b_{ij} &= 0, \quad b_{ij,j} + Y_i = 0, & x \in V, \\ \gamma_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) &= 0, & x \in V; \\ b_{ij} n_j - p_i &= 0, & x \in A_\sigma, \\ u_i - \bar{u}_i &= 0, & x \in A_u, \\ a_i - b_{ij} n_j &= 0, & x \in A_\sigma. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Uporedjivanje izraza (3.28) sa (3.4), (3.5) i (3.10a) može se odmah zaključiti da su

$$(3.29)$$

i da izrazi (3.26) matematički definišu uslove na konturi, pa je funkcional

$$\begin{aligned} a_i &= p_i, \\ b_{ij} &= \sigma_{ij}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Prema (3.27), (3.28) i (3.29) može se formulirati Hu-Washizuov /9/, /10/ princip.

Prva varijacija funkcionala  $\pi_w^*(t)$  jednaka je nuli ( $\delta \pi_w^*(t) = 0$ ) u nekom izabranom trenutku vremena  $t \in [t_1, \infty)$  tada i samo tada kada su zadovoljeni uslovi (3.4) i (3.7) i konturni uslovi (3.2) i (3.5).

Pošto je prema (1.30), (1.235), (1.239), (1.242) i (1.243)

$$G(\sigma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta) = F^*(\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta) - \sigma_{ij} n_j,$$

to se može uzimajući u obzir (3.29) formulirati uopšteni funkcional Hellingera-Reissnera /4/, /7/

$$\pi_R^*(t) = \int_V \left[ G^*(t) - Y_i u_i + \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV -$$

$$- \int_{A_\sigma} p_i u_i dA - \int_{A_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) dA \quad (3.31)$$

Iz uslova stacionarnosti ovog funkcionala u nekom trenutku vremena  $t$ , uzimajući u obzir (3.7), (3.26) i (3.29)

$$\delta \pi_R^*(t) = \int_V \left( \frac{\partial G^*}{\partial \sigma_{ij}} + \delta_{ij} \right) \delta \sigma_{ij} dV - \int_V (\sigma_{ij,j} + Y_i) \delta u_i dV +$$

$$+ \int_{A_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - p_i) \delta u_i dA - \int_{A_u} \delta \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) dA = 0,$$

dobijaju se već izvedeni izrazi za vezu izmedju napona i deformacija (3.10a)

$$\delta_{ij} = - \frac{\partial G^*(\sigma_{ij}, \delta_{ij}, \theta)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad x \in V,$$

uslovi ravnoteže (3.4)

$$\sigma_{ij,j} + Y_i = 0, \quad x \in V,$$

i konturni uslovi (3.2) i (3.5)

$$u_i = \bar{u}_i, \quad x \in A_u,$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i, \quad x \in A_\sigma.$$

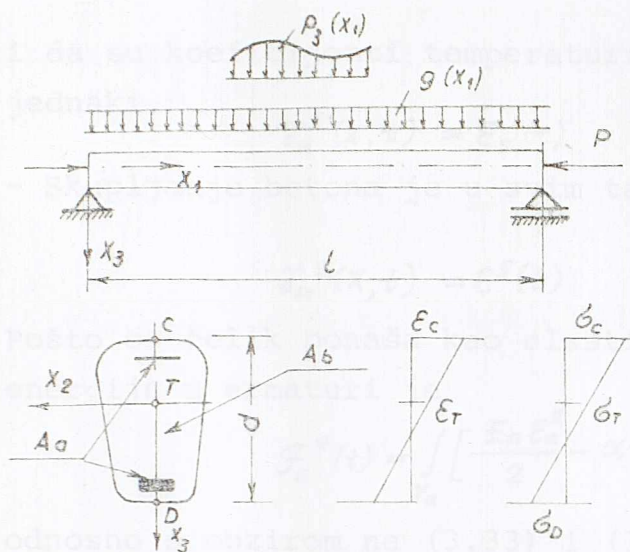
Na osnovu izraza (3.31) i (3.32) može se formulisati Hellinger-Reissnerov princip.

Prva varijacija funkcionala  $\pi_R^*(t)$  jednaka je nuli ( $\delta \pi_R^*(t) = 0$ ) u nekom trenutku vremena  $t \in [t_0, \infty)$  tada i samo tada ako su ispunjeni uslovi ravnoteže (3.4) i konturni uslovi (3.2) i (3.5).



### 3.5 Primer primene varijacionih principa za odredjivanje stanja napona i deformacija armiranobetonskog grednog nosača

Na sk. 3.1 je prikazana armiranobetonska prizmatična greda, opterećena spoljnim opterećenjem  $p_2(x_1)$  i silom  $P$  na kraju, tako da se u gredi održava stanje malog ekscentriciteta i ne stvaraju prsline u betonu. Polazi se od sledećih pretpostavki



Sk. 3.1

- Važi Bernoulieva hipoteza prema kojoj je

$$\delta_{11}(x, t) = \epsilon_T(x_1, t) + \mathcal{H}(x_1, t)x_3. \quad (3.33)$$

$\epsilon_T(x_1, t)$  je deformacija u težištu  $T$  poprečnog preseka,  $\mathcal{H}(x_1, t)$  je krivina ose štapa u posmatranom poprečnom preseku nastala usled deformacije.

- Uticaj transverzalnih sila na deformaciju se zanemaruje.

- Usvajaju se linearne veze između napona i deformacija betona i čelika.
- Naponi u betonu se linearno menjaju po visini poprečnog preseka.

$$\sigma_{11}^b(x, t) = \sigma^b(x_1, x_3, t) = \sigma_T^b(x_1, t) + \Delta\sigma^b(x_1, t) \frac{x_3}{d} \quad (3.34)$$

$\sigma_T^b$  je napon u betonu u tačkama poprečnog preseka za koje je  $x_3=0$ , dok je

$$\Delta\sigma^b(x_1, t) = \sigma_D^b(x_1, t) - \sigma_C^b(x_1, t) \quad (3.35)$$

- Pomeranja  $u_3$  u pravcu ose  $x_3$  su ista u svim tačkama posmatranog poprečnog preseka

$$u_3(x, t) = u_3(x_1, t). \quad (3.36)$$

Sopstvena težina  $g(x_1)$  se smatra kao jednako podeljeno opterećenje duž ose nosača nastalo usled delovanja zapreminskih sila. Spoljne sile  $p_2(x_1)$  su zadate kao neko opterećenje koje deluje u ravni  $\sigma, x_1, x_3$

- Temperatura se menja linearno po visini poprečnog preseka

$$\theta(x, t) = \theta_T(t) + \frac{\Delta\theta(t)}{d} x_3,$$

$$\theta(x, t) = \theta_T(t) + \frac{\Delta\theta(t)}{d} x_3. \quad (3.37)$$

$\theta_T(t)$  je temperatura u tačkama za koje je  $x_3=0$ , a

$$\Delta\theta(t) = \theta_D(t) - \theta_C(t) \quad (3.37a)$$

i da su koeficijenti temperaturne dilatacije  $\alpha$  za beton i armaturu jednaki.

$$\gamma_{II}^S(x, t) = \varepsilon_S(t)$$

- Skupljanje betona je u svim tačkama isto

$$\gamma_{II}^S(x, t) = \varepsilon^S(t) \quad (3.38)$$

Pošto se čelik ponaša kao elastičan materijal, promena dela slobodne energije u armaturi je

$$\mathcal{F}_a^*(t) = \int_{V_a} \left[ \frac{E_a \varepsilon_a^2}{2} - \alpha \theta(t) E_a \varepsilon_a \right] dV$$

odnosno s obzirom na (3.33) i (3.37)

$$\mathcal{F}_a^*(t) = E_a \int_0^l \int_{A_a} \left\{ \frac{1}{2} [\varepsilon_T(x_1, t) + \varkappa(x_1, t) x_3]^2 - \alpha \left[ \theta(t) + \frac{\Delta\theta(t)}{d} x_3 \right] [\varepsilon_T(x_1, t) + \varkappa(x_1, t) x_3] \right\} dA dx_1,$$

ili posle sredjivanja,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_a^*(t) = & E_a \int_0^l \left[ \frac{\varepsilon_T^2(x_1, t)}{2} - \alpha \theta_T(t) \varepsilon_T(x_1, t) \right] A_a(x_1) dx_1 + \\ & + E_a \int_0^l \left[ \varepsilon_T(x_1, t) \varkappa(x_1, t) - \alpha \theta(t) \varkappa(x_1, t) - \alpha \frac{\Delta\theta(t)}{d} \varepsilon_T(x_1, t) \right] S_a(x_1) dx_1 + \\ & + E_a \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \varkappa^2(x_1, t) - \alpha \frac{\Delta\theta(t)}{d} \varkappa(x_1, t) \right] I_a(x_1) dx_1; \end{aligned} \quad (3.39)$$

gde su

$$A_a(x_1) = \int_{A_a(x_1)} dA, \quad S_a(x_1) = \int_{A_a(x_1)} x_3 dA, \quad I_a(x_1) = \int_{A_a(x_1)} x_3^2 dA \quad (3.40)$$

površina poprečnog preseka armature, njen statički i moment inercije u odnosu na težišnu osu  $x_2$ .

Promena dela slobodne energije betona u termomehaničkom procesu od trenutka  $t_1$  do  $t$  je prema (1.211a) i (3.12)



$$F_b^*(t) = \int_{V_b} \left\{ \frac{\varepsilon_b^2(x, t)}{2} - \varepsilon_b(x, t) \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\varepsilon_b(x, \tau) - \varepsilon_s(\tau) - \alpha \theta(x, \tau)] d\tau - \right. \\ \left. - \varepsilon_b(x, t) [\alpha \theta(x, t) + \varepsilon_s(t)] \right\} dV$$

Kada se u ovaj izraz uvrste (3.33) i (3.37) dobija se posle sredji-

$$F_b^*(t) = E_b(t) \int_0^l \left\{ \frac{\varepsilon_T^2(x_1, t)}{2} - \varepsilon_T(x_1, t) \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\varepsilon_T(x_1, \tau) - \alpha \theta_T(\tau) - \varepsilon_s(\tau)] d\tau - \right. \\ \left. - \varepsilon_T(x_1, t) [\alpha \theta_T(t) + \varepsilon_s(t)] \right\} A_b(x_1) dx_1 + E_b(t) \int_0^l \left\{ \varepsilon_T(x_1, t) \varkappa(x_1, t) - \right. \\ \left. - \varepsilon_T(x_1, t) \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\varkappa(x_1, \tau) - \alpha \frac{\Delta \theta(\tau)}{d}] d\tau - \right. \\ \left. - \varkappa(x_1, t) \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\varepsilon_T(x_1, \tau) - \alpha \theta_T(\tau) - \varepsilon_s(\tau)] d\tau - \right. \\ \left. - \varkappa(x_1, t) [\alpha \theta_T(t) + \varepsilon_s(t)] \right\} S_b(x_1) dx_1 + E_b(t) \int_0^l \left\{ \frac{\varkappa^2(x_1, t)}{2} - \right. \\ \left. - \varkappa(x_1, t) \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\varkappa(x_1, \tau) - \alpha \frac{\Delta \theta(\tau)}{d}] d\tau - \right. \\ \left. - \alpha \varkappa(x_1, t) \frac{\Delta \theta(t)}{d} \right\} I_b(x_1) dx_1 \quad (3.41)$$

gde su

$$A_b(x_1) = \int_{A_b(x_1)} dA, \quad S_b(x_1) = \int_{A_b(x_1)} x_3 dA, \quad I_b = \int_{A_b(x_1)} x_3^2 dA, \quad (3.42)$$

površina poprečnog preseka betona, njegov statički momenat i momenat inercije za težišnu osu  $x_2$ .

Vrednost integrala

$$W(t) = \int_V \gamma_i u_i dV + \int_{A_\sigma} p_i u_i dA$$

je

$$W(t) = \int_0^l q(x_1, t) u_3(x_1, t) dx_1 - P(t) \int_0^l \varepsilon_T(x_1, t) dx_1, \\ q(x_1, t) = q(x_1, t) + p_3(x_1, t).$$

Podeljeno opterećenje se izražava u funkciji momenta savijanja u poprečnom preseku

$$q(x_1, t) = - \frac{\partial^2 M(x_1, t)}{\partial x_1^2},$$

pa se posle dve parcijalne integracije, za granične uslove

$$x_1=0, \quad x_1=l; \quad M(x_1, t)=0, \quad u_3(x_1, t)=0;$$

dobija

$$\int_0^l q(x_1, t) u_3(x_1, t) dx_1 = \int_0^l M(x_1, t) \chi(x_1, t) dx_1,$$

pošto je

$$\chi(x_1, t) = - \frac{\partial^2 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^2},$$

normalna sila u poprečnom preseku je

$$N(x_1, t) = -P(x_1, t),$$

pa je stoga:

$$W(t) = \int_0^l [M(x_1, t) \chi(x_1, t) + N(x_1, t) \epsilon_T(t, \tau)] dx_1. \quad (3.43)$$

Prema izrazu (3.11) je funkcional

$$\pi_y^*(t) = \mathcal{F}_a^*(t) + \mathcal{F}_b^*(t) - W(t).$$

Kada se u ovaj izraz uvrste (3.39), (3.41) i (3.43) dobija se posle sredjivanja

$$\begin{aligned} \pi_y^*(t) = & E_b(t) \int_0^l \left\{ A_{id}(x_1) \frac{\epsilon_T^2(x_1, t)}{2} - A_b(x_1) \epsilon_T(x_1, t) \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\epsilon_T(x_1, \tau) - \alpha \theta_T(\tau) - \epsilon_S(\tau)] d\tau - \right. \\ & - A_{id}(x_1) \epsilon_T(x_1, t) \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\chi(x_1, \tau) - \alpha \frac{\Delta \theta(\tau)}{d}] d\tau - \\ & - S_b(x_1) \chi(x_1, t) \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\epsilon_T(x_1, \tau) - \alpha \theta(\tau) - \epsilon_S(\tau)] d\tau - \\ & - S_b(x_1) \epsilon_T(x_1, t) \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\chi(x_1, \tau) - \alpha \frac{\Delta \theta(\tau)}{d}] d\tau + \\ & + I_{id} \left[ \frac{\chi^2(x_1, t)}{2} - \chi(x_1, t) \alpha \frac{\Delta \theta(\tau)}{d} \right] - I_b \chi(x_1, t) \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\chi(x_1, \tau) - \alpha \frac{\Delta \theta(\tau)}{d}] d\tau - \\ & \left. - M(x_1, t) \chi(x_1, t) - N(x_1, t) \epsilon_T(x_1, t) \right\} dx_1, \end{aligned} \quad (3.44)$$



gde su

$$A_{id} = A_b + \frac{F_a}{E_b(t)} A_a, \quad I_{id} = I_b + \frac{F_a}{E_b(t)} I_a, \quad (3.45)$$

površina i moment inercije tzv. idealizovanog poprečnog preseka armiranobetonskog nosača.

Izjednačavanjem sa nulom prvih varijacija funkcionala (3.44) po nezavisnim funkcionalnim argumentima  $\varepsilon_T(x_1, t)$  i  $\varkappa(x_1, t)$  prema (3.10)

$$\delta \pi_{\varepsilon, \varepsilon}^* = 0, \quad \delta \pi_{\varepsilon, \varkappa}^* = 0 \quad (3.46)$$

dobija se sistem Volterrinih integralnih jednačina

$$A_{id} [\varepsilon_T(x_1, t) - \alpha \theta(t) - \varepsilon_s(t)] - A_b \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\varepsilon_T(x_1, \tau) - \alpha \theta(\tau) - \varepsilon_s(\tau)] d\tau - \\ - S_b \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\varkappa(x_1, \tau) - \alpha \frac{\Delta \theta(\tau)}{d}] d\tau - N(x_1, t) = 0, \quad (3.47)$$

$$- S_b \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\varepsilon_T(x_1, \tau) - \alpha \theta(\tau) - \varepsilon_s(\tau)] d\tau - I_b \int_{t_1}^t R(t, \tau) [\varkappa(x_1, \tau) - \alpha \frac{\Delta \theta(\tau)}{d}] d\tau + \\ + I_{id} [\varkappa(x_1, t) - \alpha \frac{\Delta \theta(t)}{d}] - M(x_1, t) = 0.$$

Rešavanjem ovog sistema, koji se može formirati i neposredno iz uslova ravnoteže - kako je to pokazao autor u radu /6/, dobijaju se vrednosti funkcija  $\varepsilon_T(x_1, t)$  i  $\varkappa(x_1, t)$  koje određuju stanje deformacije u bilo kojoj tački izabranog poprečnog preseka.

Hellinger-Reissnerov funkcional  $\pi_R^*(t)$  (3.31) je

$$\pi_R^*(t) = \int_{V_a} \frac{\sigma_a^2(x, t)}{2E_a} dV_a + \int_{V_b} \frac{\sigma_b^2(x, t)}{2E_b} dV_b - \int_0^l [M(x_1, t) \varkappa(x_1, t) + N(x_1, t) \varepsilon_T(x_1, t)] dx, \quad (3.48)$$

pošto su

$$G^*(\sigma_{ij}, \gamma_{ij}^s, \theta) + \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{ij} + u_{ji}) = G^*(\sigma_{ij}, \delta_{ij}^s, \theta) + \sigma_{ij} \delta_{ij}$$

i dalje s obzirom na (1.212a) i (1.214) za čelik i beton

$$G_a^*(\sigma_a, \theta) + \sigma_a \varepsilon_a = \frac{\sigma_a^2}{2E_a} \quad ,$$

$$G_b^*(\sigma_b, \theta) + \sigma_b \varepsilon_b = \frac{\sigma_b^2}{2E_b} \quad .$$

Pošto su deformacije betona i čelika jednake na mestima njihovog spoja

$$\varepsilon_a(t) = \varepsilon_b(t),$$

to je s obzirom na (3.34) i (3.37)

$$\begin{aligned} \sigma_a(t) = E_a \left[ \frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)} + \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\sigma_T^b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + \frac{\Delta\sigma_b(t)}{E_b(t)d} x_3 + \right. \\ \left. + \frac{x_3}{d} \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\Delta\sigma_b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + \varepsilon_s(t, t_1) \right] \end{aligned} \quad (3.49)$$

Kada se (3.49) i (3.34) uvrste u (3.48) dobija se posle sredjivanja

$$\begin{aligned} \pi_R^*(t) = \int_0^l \left\{ A_{ia}(x_1) \frac{\sigma_T^b(t)^2}{2E_b(t)} + n(t) A_a(x_1) \sigma_T^b(t) \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\sigma_T^b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + \right. \\ \left. + n(t) S_a \sigma_T^b(t) \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\Delta\sigma_T^b(\tau)}{E_b(\tau)d} d\tau + n(t) S_a \frac{\Delta\sigma_T^b(t)}{d} \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\sigma_T^b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + \right. \\ \left. + n(t) I_a \frac{\Delta\sigma_T^b(t)}{d^2} \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\Delta\sigma_T^b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + I_{ia} \frac{\Delta\sigma_b^2(t)}{2E_b(t)d^2} + \right. \\ \left. + n(t) \sigma_T^b(t) A_a \varepsilon_s(t, t_1) + n(t) S_a \frac{\Delta\sigma_b(t)}{d} \varepsilon_s(t, t_1) + \frac{E_a \varepsilon_s^2(t, t_1) A_a}{2} \right\} dx_1 + \quad (3.50) \\ + \pi_{RO}^*(t) - \int_0^l M(x_1, t) \left\{ \frac{\Delta\sigma_b(t)}{E_b(t)d} + \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\Delta\sigma_b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + \alpha \frac{\Delta\theta(t)}{d} \right\} dx_1 - \\ - \int_0^l N(x_1, t) \left\{ \frac{\sigma_b^b(t)}{E_b(t)} + \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\sigma_T^b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + \alpha \theta_T(\tau) + \varepsilon_s(t, t_1) \right\} dx_1 . \end{aligned}$$



pošto su prema (1.214), (3.33) i (3.34)

$$\begin{aligned} \varkappa(x_1, t) &= \frac{\Delta\sigma_b^b(t)}{E_b(t)} + \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\Delta\sigma_b^b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + \alpha \frac{\Delta\theta(\tau)}{d}, \\ \varepsilon_T(x_1, t) &= \frac{\sigma_T^b(t)}{E_b(t)} + \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\sigma_T^b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + \alpha\theta(t) + \varepsilon_S(t, t_1), \\ n(t) &= \bar{E}_a / E_b(t) \end{aligned} \quad (3.51)$$

u članu  $\mathcal{N}_{R^0}^*(t)$  nezavisni funkcionali argumenti  $\varepsilon_T(x_1, t)$  i  $\varkappa(x_1, t)$  ulaze pod znak integrala po vremenu tako da nemaju uticaja na varijaciju funkcionala  $\mathcal{N}_{R^0}^*(t)$ .

Kada se prve varijacije ovog funkcionala po ovim funkcionalnim argumentima izjednače sa nulom dobija se sistem Volterrinih integralnih jednačina

$$\begin{aligned} A_{1d} \frac{\sigma_T^b(t)}{E_b(t)} + n(t) A_{1a} \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\sigma_T^b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + \\ + n(t) \frac{S_a}{d} \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\Delta\sigma_b^b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + n(t) A_{1a} \varepsilon_S(t, t_1) = N(t) \\ n(t) \frac{S_a}{d} \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\Delta\sigma_b^b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + n(t) \frac{I_a}{d^2} \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{\Delta\sigma_b^b(\tau)}{E_b(\tau)} d\tau + \\ + I_{1d} \frac{\Delta\sigma_b^b(t)}{E_b(t)} + n(t) \frac{S_a}{d} \varepsilon_S(t, t_1) = M(t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ako su poznate vrednosti normalne sile  $N(x_1, t)$  i momenta  $M(x_1, t)$  u nekom preseku, rešavanjem ovog sistema Volterrinih integralnih jednačina, koje se mogu izvesti i neposredno iz ravnotežnih uslova /6/, dobijaju se funkcije  $\sigma_T^b(x_1, t)$  i  $\Delta\sigma_b^b(x_1, t)$  koje odredjuju stanje napona u bilo kojoj tački poprečnog preseka.

#### REFERENCE

- /1/ Christensen, R.M., Theory of viscoelasticity. An Introduction. Academic Press, New York and London 1971.
- /2/ Gurtin, M.E., Variational principles in the linear theory of viscoelasticity. Archiv for Rational Mechanics and Analysis Vol. 13, No3, 1963, pp. 179-191.

- /3/ G u r t i n, M.E., S t e r n b e r g, E., On the linear theory of viskoelasticity, *Arciv for Rational Mechanics and Analysis*, Vol.11, No4, 1962, p.291.
- /4/ H e l l i n g e r, E., Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, 4, Teile 4, 1914.
- /5/ N o w a c k i, W., *Teoria sprężystości Państwowe Wydawnictwo Naukowe*, Warszawa 1970.
- /6/ P r a š č e v i ć, Ž., *Neki problemi tehničke teorije armirano-betonskog štapa*. Magistarski rad, Građevinski fakultet, Beograd 1973.
- /7/ R e i s s n e r, E., On a variational theorem in elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, Vol.32, No23, 1953.
- /8/ S e k u l o v i ć, M., *Nelinearna teorija elastičnosti*. Građevinski fakultet, Beograd 1975.
- /9/ W a s h i z u, K., *On the Variational Principles Applied to Dynamics Problems of Elastic Bodies Problems*. Massachusetts Institut of Technology, March 1957.
- /10/ W a s h i z u, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* 2<sup>nd</sup> edition Pergomon - Press 1975.
- /11/ К а н т о р о в и ч, Л. В., К р ы л о в, В. И., *Приближенные методы высшего анализа. Вариационные методы*. Гостехиздат, Москва-Ленинград 1950.
- /12/ Р а б о т н о в, Ю. Н., *Элементы наследной теории механики твердых тел*. Наука, Москва 1977.



## 4. PRIMENA METODE KONAČNIH ELEMENATA ZA REŠAVANJE NEKIH PROBLEMA REOLOGIJE BETONA

### 4.1 Uvodne napomene

Rešavanje različitih graničnih zadataka mehanike kontinuuma često se svodi na određivanje funkcija koje zadovoljavaju granične uslove i za koje neki funkcional, formulisan na osnovu izabranog varijacionog principa, dostiže ekstremalnu vrednost. Nalaženje ovih funkcija, koje predstavljaju matematička rešenja problema najčešće nije moguće, pa se primenjuju približne metode varijacionog računa /13/ od kojih su najpoznatije metoda Rayleigh-Ritza /6/, /7/, B.G.Galerkina /11/, E.Treffftza /9/, i L.V.Kantoroviča /12/. Metoda konačnih elemenata, koja je nastala i razvila najviše zbog potrebe rešavanja inženjerskih zadataka, bazira na ovim približnim metodama varijacionog računa. Posmatrani kontinuum se deli na elemente konačnih dimenzija, čija se stanja napona ili deformacija svakog elementa opisuje podesno izabranim funkcijama koje uključuju nepoznate parametre, za koje se najčešće biraju pomeranja unapred izabranih tačaka (čvorova) na konturi i spojevima elemenata. Zatim se, koristeći veze između napona i deformacija odnosno deformacija i pomeranja, vodeći računa o kompatibilnosti pomeranja u izabranim tačkama, formira izraz za približnu vrednost funkcionala graničnog problema. Iz uslova stacionarnosti ovog funkcionala dobijaju se, za linearne veze između napona i deformacija, sistemi linearnih algebarskih jednačina čijim se rešavanjem određuju nepoznati parametri, a zatim ostale trežene deformacijske i naponske veličine u svakom elementu. Razlika između ovako dobijenih približnih i matematički egzaktnih rešenja zavisi od načina podele, vrste i broja elemenata i čvorova, izbora funkcija oblika i dr. /3/. Pored ovakvog postupka formiranja sistema jednačina za određivanje nepoznatih parametara, koji se naziva i varijacionim i najčešće se koristi, postoje i drugi postupci: direktni, me-



toda reziduuma - koja se zasniva na Golerkinovoj metodi, i metoda energetskog balansa /3/.

Metoda konačnih elemenata se naročito razvila u toku poslednje dve decenije - a njena šira primena u praksi je uslovljena upotrebom elektronskih računara. U početku se najčešće primenjivala za rešavanje različitih problema teorije elastičnosti, ali se ubrzo proširila na sve oblasti mehanike kontinuuma, pa je u svetu publikovano vrlo mnogo radova i više značajnih monografija.

Primena ove metode za analizu stanja napona betonskih konstrukcija i njihovih elemenata znatno je teža nego kod drugih materijala, koji se primenjuju u građevinarstvu zbog složenih reoloških svojstava betona i drugih procesa koji nastaju u ovom materijalu tokom vremena (skupljanja, bubrenje, pojava prslina). U ovim konstrukcijama ostvaruje se sprega sa čelikom, koji se u oblasti tzv. radnih napona ponaša kao elastičan materijal - pa se pri formiranju konačnih elemenata moraju uzeti u obzir različita reološka svojstva ovih materijala. Pored toga u domenu velikih napona i granične ravnoteže, ponašanje betona je različito za jednoosno, ravno i prostorno stanje napona /11/, /12/. Zbog svega ovoga istraživanja mogućnosti šire primene ove metode za analizu stanja napona i deformacija betonskih konstrukcija ostaju i dalje aktuelna.

U ovom i narednim poglavljljima biće pokazana mogućnost primene metode konačnih elemenata za određivanje stanja napona i deformacija konstrukcijskih sistema sastavljenih od zapreminskih i linijskih elemenata, uzimajući u obzir tečenje (puzanje) i skupljanje betona kao i temperaturne promene. Iz uslova stacionarnosti funkcionala, prikazanih u prethodnom poglavlju, formiraće se sistemi algebarskih jednačina za određivanje pomeranja čvorova elemenata uzimajući u obzir uporedo integralne i algebarske veze između napona i deformacija betona. Pored toga za linijske sisteme uzeće se u obzir geometrijske nelinearnosti.



4.2 Trodimensionalno stanje napona i deformacija.  
Integralne veze izmedju napona i deformacija.

Ako se telo zapremine  $V$ , na čijem delu konture  $A_\sigma$  deluju spoljašnje sile  $p_i$ , dok su na preokonture  $A_u$  propisana neka pomeranja  $\bar{u}_i$ , podeli na  $n$  delova-konačnih elemenata, onda je pod pretpostavkom da su reološka svojstva pojedinih elemenata različita, s obzirom na (1.235) i (3.11) funkcional

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{F}}(t) = & \sum_{k=1}^n \int_{V_k} \left\{ \delta_{ij}(t) \mu(t) [\delta_{ij}(t) - 2\delta_{ij}^s(t)] - \right. \\ & \left. - 2\delta_{ij}(t) \mu(t) \int_{t_1}^t R_D^k(t, \tau) [\delta_{ij}(\tau) - \delta_{ij}^s(\tau)] + \right. \\ & \left. + \frac{\theta}{2} \delta_{ij} \delta(t) \lambda(t) [\delta(t) - 2\delta^s(t)] - \theta \delta(t) \lambda(t) \int_{t_1}^t R_\lambda^k(t, \tau) [\delta(\tau) - \delta^s(\tau)] d\tau \delta_{ij} \right. \\ & \left. - 3\delta(t) [3\lambda(t) + 2\mu(t)] \alpha \left[ \theta(t) - \int_{t_1}^t R_S^k(t, \tau) \theta(\tau) d\tau \right] \delta_{ij} - \right. \\ & \left. - \gamma_i^k u_i^k \right\} dV_k - \sum_{k=1}^n \int_{A_\sigma^k} p_i^k u_i^k dA_k \end{aligned} \quad (4.1)$$

gde je

$$\delta(t) = (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33})/3$$

$V_k$  je zapremina a  $A_\sigma^k$  je površina konačnog elementa  $k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) na koju deluje spoljašnje opterećenje.

Pošto su tenzori napona  $\sigma_{ij}(t)$  i deformacije  $\delta_{ij}(t)$ ,  $\delta_{ij}^s(t)$  simetrični, tako da su od devet komponenata šest međusobno različite, pa će nadalje biti prikazivane u nekom Descartesovom koordinatnom sistemu  $(0, X_1, X_2, X_3)$  u obliku uredjenog niza - vektora funkcije u posmatranoj tački tela

$$\delta(t) = \begin{Bmatrix} \delta_{11}(t) \\ \delta_{22}(t) \\ \delta_{33}(t) \\ \delta_{12}(t) \\ \delta_{23}(t) \\ \delta_{31}(t) \end{Bmatrix}, \quad \delta^s(t) = \begin{Bmatrix} \delta_{11}^s(t) \\ \delta_{22}^s(t) \\ \delta_{33}^s(t) \\ \delta_{12}^s(t) \\ \delta_{23}^s(t) \\ \delta_{31}^s(t) \end{Bmatrix}, \quad \delta^0(t) = \alpha \theta(t) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \sigma(t) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}(t) \\ \sigma_{22}(t) \\ \sigma_{33}(t) \\ \sigma_{12}(t) \\ \sigma_{23}(t) \\ \sigma_{31}(t) \end{Bmatrix}. \quad (4.2)$$

Kada se formiraju matrice  $\mu(t)$  i  $\lambda(t)$  čiji su elementi

$$\begin{aligned} \mu_{ij}(t) &= \mu(t) \delta_{ij}, \\ \lambda_{ij}(t) &= \lambda(t) \delta_{ij}, \quad i \leq l \\ \lambda_{ij}(t) &= 0, \quad i > l, j > l \end{aligned} \quad (4.3)$$

gde je  $l$  dimenzija prostora, i uvedu vektore zapreminskih  $\mathbf{y}$  i površinskih  $\mathbf{p}$  sila i vektor pomeranja bilo koje tačke elementa  $u$

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

onda se funkcional (4.1) može pisati u matricnom obliku

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{R}}(t) = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{V_k} [\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\mu} (\boldsymbol{\sigma} - 2\boldsymbol{\sigma}^s) - 2\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\mu} R_D^k (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^s) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\lambda} (\boldsymbol{\sigma} - 2\boldsymbol{\sigma}^s) - \right. \\ \left. - \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\lambda} R_{\lambda}^k (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^s) - \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\sigma}^0 - R_S^k \boldsymbol{\sigma}^0) - \mathbf{y} \mathbf{u}^T] dV_k - \int_{A_0^k} \mathbf{p} \mathbf{u}^T dA \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

gde je matrica

$$\boldsymbol{\beta} = 3\boldsymbol{\lambda} + 2\boldsymbol{\mu} \quad (4.6)$$

a  $R_D^k$ ,  $R_{\lambda}^k$  i  $R_S^k$  Volterrini operatori

$$\begin{aligned} R_D^k (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^s) &= \int_{t_1}^t R_D^k(t, \tau) [\boldsymbol{\sigma}(\tau) - \boldsymbol{\sigma}^s(\tau)] d\tau, \\ R_{\lambda}^k (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^s) &= \int_{t_1}^t R_{\lambda}^k(t, \tau) [\boldsymbol{\sigma}(\tau) - \boldsymbol{\sigma}^s(\tau)] d\tau, \\ R_S^k \boldsymbol{\sigma}^0 &= \int_{t_1}^t R_S^k(t, \tau) \boldsymbol{\sigma}^0(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Indeks T označava da su vektor ili matrica pisani u transponovanom obliku.

U svakom elementu bira se unapred  $m_k$  tačaka - čvorova  $(i, j, \dots, m)$  u kojima moraju biti zadovoljeni uslovi jednakosti pomeranja sa njemu susednim elementima (uslovi kompatibilnosti deformacija) ta se pomeranja za element  $k$  prikazuju u nekom likalnom koordinatnom sistemu  $(0, x_1, x_2, x_3)$  vezanom za element  $k$

$$\mathbf{u}_k^T = \{ u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)}; \dots, u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)}; \dots, u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, u_3^{(m)} \}$$

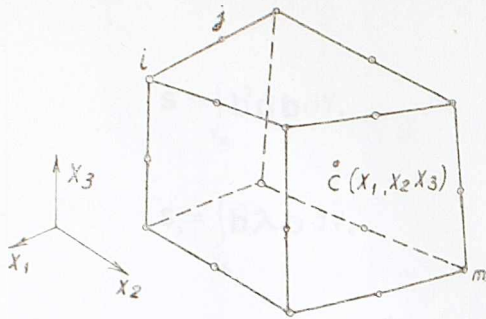
ili

$$\mathbf{u}_k^T = \{ \mathbf{u}^{(i)T}, \dots, \mathbf{u}^{(j)T}, \dots, \mathbf{u}^{(m)T} \}, \quad \mathbf{u}^{(i)T} = \{ u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)} \}. \quad (4.8)$$

Gornji indeks u zagradi označava čvor, a donji komponentu pomeranja u pravcu odgovarajuće koordinatne ose,

Vektor pomeranja  $\mathbf{u}(t)$  bilo koje tačke C čiji je vektor položaja  $\mathbf{x}$  u lokalnom koordinatnom sistemu





Sk. 4.1

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

može se izraziti pomoću vektora pomeranja čvorova  $\delta(t)$  koristeći interpolacione funkcije koje se nazivaju i funkcijama oblika (shape functions), od kojih se zahteva da zavise od prirode

problema obezbede različite stepene kontinuiteta  $C^i$  ( $i=0,1,2,\dots$ ). Ovdje  $i$  označava da je obezbedjen kontinuitet funkcije i njenog izvoda do  $i$ -tog reda [3]. Kao interpolacione funkcije koriste se Lagrangeovi i Hermitovi polinomi i tzv. Serendipity elementi [10].

Kada se formira matrica interpolacionih funkcija  $\mathbf{n}$  koje su zavisne samo od koordinata tačaka, onda je

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} \delta \quad (4.10)$$

Vektor  $\mathbf{u}$  je reda  $l$ ,  $\delta$  reda  $l \cdot m_k$ , a matrica  $\mathbf{n}$  tipa  $(l, l \cdot m_k)$ , gde  $l$  označava ukupan broj generalisanih koordinata (dimenziju prostora) a  $m_k$  broj čvorova elementa  $k$ .

Veza između deformacije  $\gamma_{ij}(t)$  i pomeranja  $u_i(t)$  u oblasti tzv. geometrijski linearne teorije je

$$\gamma_{ij}(t) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.11)$$

odnosno

$$\gamma^T = \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \right\}, \quad (4.11a)$$

ili s obzirom na (4.10)

$$\gamma = \mathbf{b} \delta \quad (4.12)$$

gde je matrica  $\mathbf{b}$  tipa  $(2l, l \cdot m_k)$ .

Kada se (4.10) i (4.12) uvrste u (4.5) i izvrši integraljenje po zapremini  $V_k$  površi  $A_\sigma^k$ , dobija se za svaki element ( $k=1,2,\dots,n$ )

$$\Pi_\delta^k(t) = \delta^T \left( \frac{1}{2} S \delta - s_p R_p \delta - s_\lambda R_\lambda^k \delta - q_p^s + R_p^k q_p^s - q_\lambda^s + R_\lambda^k q_\lambda^s - \right. \\ \left. - q^o + R_s^k q^o - q^v - q^A \right)$$

gde su

$$s = \int_{V_k} b^T db dV, \quad s_D = 2 \int_{V_k} b^T \mu b dV, \quad (4.14)$$

$$s_\lambda = \int_{V_k} b^T \lambda b dV, \quad d = 2\mu + \lambda;$$

$$q_D^s = 2 \int_{V_k} b^T \mu \gamma^s dV, \quad R_D^k q_D^s = 2 \int_{V_k} b^T \mu \int_{t_1}^t R_D^k(t, \tau) \gamma^s(\tau) d\tau,$$

$$q_\lambda^s = \int_{V_k} b^T \lambda \gamma^s dV, \quad R_\lambda^k q_\lambda^s = \int_{V_k} b^T \lambda \int_{t_1}^t R_\lambda^k(t, \tau) \gamma^s(\tau) d\tau, \quad (4.15)$$

$$q^\theta = \int_{V_k} b^T \beta \gamma^\theta dV, \quad R_S^k q^\theta = \int_{V_k} b^T \beta \int_{t_1}^t R_S^k(t, \tau) \gamma^\theta(\tau) d\tau.$$

$$q^V = \int_{V_k} n^T y dV, \quad q^A = \int_{A_\sigma^k} n^T p dV. \quad (4.16)$$

Matrice  $s$ ,  $s_D$ , i  $s_\lambda$  su kvadratne matrice krutosti elementa  $k$  tipa  $(l \cdot m_k, l \cdot m_k)$  i s obzirom na (4.14) su

$$s = s_D + s_\lambda$$

pošto je prema (4.3) matrica  $d$  simetrična to su s obzirom na (4.14) ove matrice simetrične.

Matrica  $s$  se formira na isti način kao i u teoriji elastičnosti i razlika je samo u tome što je ona, zbog promene elastičnih svojstava betona, sada funkcija vremena. Vektori (4.15) su reda  $(l \cdot m_k)$ , i predstavljaju fiktivne sile koje deluju u čvorovima elementa i kojima se u račun uvodi uticaj skupljanja (bubrenja) betona i promene temperature. Vektori (4.16), su takodje reda  $(l \cdot m_k)$ , i određuju sile koje deluju u čvorovima elementa, kojima se zamenjuje uticaj zapreminskog i površinskog opterećenja  $y$  i  $p$ .

Ako se zadrži Arutjunjanova pretpostavka o jednakosti Poissonovih koeficijenata  $\nu(t) = \nu_c(t, t_1) = \nu$ , onda su prema (1.246)

$$R_\lambda^k(t, \tau) = R_D^k(t, \tau) = R_S^k(t, \tau) = R^k(t, \tau), \quad (4.18)$$

pa izraz (4.13) dobija nešto jednostavniji oblik





rednost funkcionala  $\pi_{\gamma}^k(t)$  za element  $k$  je izražena u funkciji vektora pomeranja  $\delta$  datog u lokalnom koordinatnom sistemu. Taj sistem je vezan za elemenat  $k$  i bira se tako da se što lakše odrede submatrice krutosti  $s_{pr}$ , i vektori  $q_p$ . Pošto su pomeranja čvorova koji povezuju dva ili više elemenata jednaka, a do sada su određivana u odnosu na različite lokalne koordinatne sisteme, da bi se mogla odrediti vrednost funkcionala  $\pi_{\gamma}(t)$  za čitavo telo neophodno je vektore pomeranja  $\delta_p$  izraziti u jednom globalnom koordinatnom sistemu  $(0, x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  zajedničkom za sve elemente. Vektor pomeranja čvora  $p$  koji pripada elementu  $k$  je sada  $\delta_p^*$  i veza između njegovih lokalnih i globalnih koordinata

$$\delta_p = t \delta_p^* \quad (4.26)$$

gde je  $t$  matrica transformacije tipa  $(l, l)$  koordinata iz globalnog u lokalni sistem koji je vezan za elemenat  $k$ . Kada se (39) uvrsti u (38) dobija se posle sredjivanja

$$\begin{aligned} \pi_{\gamma}^k(t) = \sum_p \delta_p^{*T} \left( \frac{1}{2} \sum_r s_{pr}^* \delta_r^* - \sum_r s_{D,pr}^* R_D^k \delta_r^* - \sum_r s_{\lambda,pr}^* R_{\lambda}^k \delta_r^* - q_{D,p}^* \right. \\ \left. + R_D^k q_{D,p}^{S*} - q_{\lambda,p}^{S*} + R_{\lambda}^k q_{\lambda,p}^{S*} - q_{\lambda,p}^{\theta*} + R_{\theta}^k q_p^{\theta*} - q_p^V - q_p^A \right) \\ p = i, j, \dots, m; \quad r = i, j, \dots, m; \end{aligned} \quad (4.27)$$

gde su

$$\begin{aligned} s_{pr}^* &= t^T s'_{pr} t, & s_{q,pr}^* &= t^T s_{q,pr} t & q &= s, \lambda \\ q_p^* &= t^T q_{q,p} & q &= \theta, s, A, V \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ako se izrazi (40) formiraju za sve elemente i izvrši sumiranje po svim elementima  $k$ , čiji je broj  $n$

$$\pi_{\gamma}(t) = \sum_{k=1}^n \pi_{\gamma}^k(t)$$

dobija se

$$\begin{aligned} \pi_{\gamma}(t) = \Delta^{*T} \left( \frac{1}{2} S^* \Delta^* - S_D^* R_D^k \Delta^* - S_{\lambda}^* R_{\lambda}^k \Delta^* - Q_D^{S*} \right. \\ \left. + R_D^k Q_D^{S*} - Q_{\lambda}^{S*} + R_{\lambda}^k Q_{\lambda}^{S*} - Q^{\theta*} + R_{\theta}^k Q^{\theta*} - Q^V - Q^A \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$\Delta^*$  je vektor pomeranja reda  $(l, M)$  svih čvorova, čiji je broj  $M$ , tela zapremine  $V$

$$\Delta^{*T} = \{ \delta_1^{*T}, \delta_2^{*T}, \dots, \delta_i^{*T}, \dots, \delta_M^{*T} \} \quad (4.30)$$



$S^*$  je kvadratna matrica krutosti čitavog tela tipa  $(M, M)$  sastavljena od submatrica  $S_{ij}^{k*}$  koje predstavljaju zbir matrica krutosti  $s_{ij}^{k*}$  svih elemenata  $k$  koje povezuju čvorovi  $i$  i  $j$

$$S^* = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & \dots & S_{1i}^* & \dots & S_{1M}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{i1}^* & S_{i2}^* & \dots & S_{ii}^* & \dots & S_{iM}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{M1}^* & S_{M2}^* & \dots & S_{Mi}^* & \dots & S_{MM}^* \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$S^* = \sum_k S_{ij}^{k*}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, M; \\ j = 1, 2, \dots, M. \end{matrix} \quad (4.32)$$

Matrice  $S_D^* R_D$  i  $S_\lambda^* R_\lambda$  sadrže Volterrine integralne operatore i sastavljene su od submatrica  $S_{D,ij}^* R_{D,ij}$  i  $S_{\lambda,ij}^* R_{\lambda,ij}$

$$S_p R_p = \begin{bmatrix} S_{p,11}^* R_{p,11} & S_{p,1i}^* R_{p,1i} & S_{p,M}^* R_{p,1M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{p,i1}^* R_{p,i1} & S_{p,i2}^* R_{p,i2} & S_{p,iM}^* R_{p,iM} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{p,M1}^* R_{p,M1} & S_{p,Mi}^* R_{p,Mi} & S_{p,MM}^* R_{p,MM} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$p = D, \lambda$$

$$S_{p,ij}^* R_{p,ij} = \sum_k S_{p,ij}^{k*} R_p^k, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, M; \\ j = 1, 2, \dots, M. \end{matrix} \quad (4.34)$$

Ako bilo koja dva čvora  $i$  i  $j$  ( $i \neq j$ ) nisu međusobno povezana bar jednim elementom, onda su submatrice

$$S_{p,ij}^* = 0, \quad S_{p,ij}^* R_{p,ij} = 0. \quad (4.35)$$

Vektori  $Q^v(t)$ ,  $Q^A(t)$ ,  $Q^\theta(t)$ ,  $Q^s(t)$  su reda  $(1 \cdot M)$  i određuju trenutni uticaj u vremenu  $t$  zapreminskih i površinskih sila, temperaturnih promena i skupljanja betona u čvorovima kao koncentrisanih sila i mogu se prikazati

$$Q^{p \times T} = \{ q_1^{p \times T}, q_i^{p \times T}, q_M^{p \times T} \}, \quad p = v, A, \theta, s. \quad (4.36)$$

Vektor sila u čvoru  $i$   $q_i^{p*}$  dobija se kao zbir svih vektora  $q_{i,k}^{p*}$ , elemenata kojima čvor pripada, tj.

$$q_i^{p*} = \sum_k q_{i,k}^{p*}, \quad p = \theta, s, v, A; \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (4.37)$$

Isto tako i funkcionala  $\Pi_f(t)$  po nezavisnom funkcionalnom argumentu

$$R_q Q_q^{p*T} = \{ R_q q_{q,1}^{p*T}, \dots, R_q q_{q,i}^{p*T}, \dots, q_{q,M}^{p*T} \} \quad (4.38)$$

$$R_q q_{q,i}^{p*T} = \sum_k R_{q,k} q_{q,i,k}^{p*}, \quad p = \theta, s; \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad q = D, \lambda, s \quad (4.39)$$

Vektor  $\Delta^*(t)$  ima ukupno  $(l \cdot M)$  funkcija  $\delta_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, M; j=1, \dots, M$ ) kao koordinata. Neke od ovih funkcija pomeranja mogu biti unapred propisane kao neke funkcije vremena. U praksi se to najčešće ostvaruje na mestima oslonaca. Ako je ukupan broj takvih poznatih funkcija  $P$ , onda je broj nepoznatih funkcija  $N$

$$N = l \cdot M - P. \quad (4.40)$$

Matrice i vektori dati u izrazu (4.29) se mogu dekomponovati / 5 /

$$S^* = \begin{bmatrix} S_{NN}^* & S_{NP}^* \\ S_{PN}^* & S_{PP}^* \end{bmatrix} \quad S_i R_i = \begin{bmatrix} S_{i,NN}^* R_i & S_{i,NP}^* R_i \\ S_{i,PN}^* R_i & S_{i,PP}^* R_i \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\Delta^* = \begin{Bmatrix} \Delta_N^* \\ \Delta_P^* \end{Bmatrix} \quad Q^* = \begin{Bmatrix} Q_N^* \\ Q_P^* \end{Bmatrix} \quad i = \lambda, D, s$$

gde indeksi označavaju tip submatrice i subvektora. Vektor  $\Delta_P^*$  sadrži sve one poznate, odnosno unapred zadate funkcije  $\delta_i^{*j}(t)$  ( $i=N+1, N+2, \dots, N+P, j=1, \dots, l$ ). Pored toga je uveden vektor

$$Q^* = Q_D^* - R_D Q_D^* + Q_\lambda^* - R_\lambda Q_\lambda^* + Q_s^* - R_s Q_s^* + Q_\theta^* + Q^* \quad (4.42)$$

Kada se (4.41) uvrsti u (4.29) dobija se posle množenja

$$\begin{aligned} \Pi_f(t) = & \frac{1}{2} \Delta_N^{*T} S_{NN}^* \Delta_N^* + \frac{1}{2} \Delta_P^{*T} S_{PN}^* \Delta_N^* + \frac{1}{2} \Delta_N^{*T} S_{NP}^* \Delta_P^* + \frac{1}{2} \Delta_P^{*T} S_{PP}^* \Delta_P^* - \\ & - \Delta_N^{*T} S_{D,NN}^* R_D \Delta_N^* - \Delta_N^{*T} S_{\lambda,NN}^* R_\lambda \Delta_N^* - \Delta_P^{*T} S_{D,PN}^* R_D \Delta_N^* - \Delta_P^{*T} S_{\lambda,PN}^* R_\lambda \Delta_N^* - \\ & - \Delta_P^{*T} S_{D,PP}^* R_D \Delta_P^* - \Delta_P^{*T} S_{\lambda,PP}^* R_\lambda \Delta_P^* - \Delta_N^{*T} Q_N^* - \Delta_P^{*T} Q_P^* \end{aligned} \quad (4.43)$$

Pošto je zbog simetričnosti matrice  $S^*$

$$\Delta_P^{*T} S_{PN}^* \Delta_N^* = \Delta_N^{*T} S_{NP}^* \Delta_P^*,$$



varijacija funkcionala  $\Pi_{\gamma}(t)$  po nezavisnom funkcionalnom argumentu  $\Delta_N$  je

$$\delta \Pi_{\gamma}(t) = \delta \Delta_N^{*T} [S_{NN}^* \Delta_N^* + S_{NP}^* \Delta_P^* - \sum_{i=\lambda, D} (S_{i, NN}^* R_i \Delta_N^* + S_{i, NP}^* R_i \Delta_P^*)]$$

jer je varijacija po propisanim pomeranjima

$$\delta \Delta_P = 0,$$

to se iz uslova stacionarnosti dobija sistem od N Volterrinih linearnih integralnih jednačina

$$S_{NN}^* \Delta_N^* - S_{\lambda, NN}^* R_{\lambda} \Delta_N^* - S_{D, NN}^* R_D \Delta_N^* = \bar{Q}_N^* \quad (4.44)$$

gde je

$$\bar{Q}_N^* = O_N^* + S_{NP}^* \Delta_P^* + S_{\lambda, NP}^* R_{\lambda} \Delta_P^* + S_{D, NP}^* R_D \Delta_P^* \quad (4.45)$$

Rešavanjem sistema Volterrinih integralnih jednačina (4.44) dobijaju se u izabranim trenucima vremena  $t$  komponente vektora pomeranja  $\Delta_N(t)$  koji se sastoji od vektora pomeranja pojedinih čvorova  $\delta^{i*}(t)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) u globalnom koordinatnom sistemu. Transformacijom koordinata (4.26) ova se pomeranja za svaki element  $k$  izražavaju u lokalnom koordinatnom sistemu vektorom  $\delta$ , a zatim prema (4.12) dobijaju komponente tenzora deformacije  $\gamma(t)$  u bilo kojoj tački elementa  $k$ . Komponente tenzora napona, za poznato  $\gamma(t)$ , određuju se prema (1.242)

$$\sigma(t) = d[\gamma(t) - \gamma^s(t)] - 2\mu(t) \int_{t_1}^t R_D^k(t, \tau) [\gamma(\tau) - \gamma^s(\tau)] d\tau - \\ - \lambda(t) \int_{t_1}^t R_{\lambda}^k(t, \tau) [\gamma(\tau) - \gamma^s(\tau)] d\tau - \beta(t) [\gamma^{\theta}(t) - \int_{t_1}^t R_S^k(t, \tau) \gamma^{\theta}(\tau) d\tau] \quad (4.46)$$

Kada se odrede  $\gamma(t)$  i  $\sigma(t)$  mogu se dalje naći i pravci i veličine glavnih napona za izabrane tačke svakog elementa  $k$ , čime se završava postupak određivanja stanja napona i deformacija.

#### 4.3 Trodimenzionalno stanje napona i deformacija Algebarske veze između napona i deformacija betona

Za algebarsku vezu između napona i deformacija betona (2.87) koja se može pisati, s obzirom na (4.2), u obliku

$$\sigma = d_{\varphi}(\gamma - \gamma^s) - g_D^k \bar{d} \gamma_{(1)} - \beta_{\varphi} \gamma^{\theta} + g_S^k \beta_{(1)} \gamma_{(1)}^{\theta} \quad (4.47)$$

gde su

$$d_{\varphi} = 2\mu_{\varphi}(t) + \lambda_{\varphi}(t), \quad \beta_{\varphi} = 2\mu_{\varphi}(t) + 3\lambda_{\varphi}(t), \quad \beta_{(1)} = 2\mu(t_1) + 3\lambda(t_1), \quad (4.48)$$

dok su  $\gamma_{(1)}$  i  $\gamma_{(1)}^0$  ukupna deformacija i deformacija usled temperaturnih promena u vreme  $t=t_1$ .

Elementi matrica  $\mu_{\varphi}$  i  $\lambda_{\varphi}$  odgovaraju Lamevim konstantama u teoriji elastičnosti

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi,ij} &= \mu_{\varphi}(t) \delta_{ij}; \\ \lambda_{\varphi,ij} &= \lambda_{\varphi}(t) \quad i \leq l, \quad j \leq l, \\ \lambda_{\varphi,ij} &= 0 \quad i > l, \quad j > l. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Izrazi za  $\mu_{\varphi}(t)$ ,  $\lambda_{\varphi}(t)$ ,  $g_s(t)$  i  $g_p(t)$  zavise od usvojenog postupka uprošćavanja integralne veze između napona i deformacija. Elementi matrice, uzimajući u obzir (2.87), su

$$\bar{d} = g_D^k \begin{bmatrix} (2\mu_1 + \lambda_1)k_g & 2\mu_1(k_g - 1) + \lambda_1 k_g & 2\mu_1(k_g - 1) + \lambda_1 k_g & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu_1(k_g - 1) + \lambda_1 k_g & (2\mu_1 + \lambda_1)k_g & 2\mu_1(k_g - 1) + \lambda_1 k_g & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu_1(k_g - 1) + \lambda_1 k_g & 2\mu_1(k_g - 1) + \lambda_1 k_g & (2\mu_1 + \lambda_1)k_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\mu_1 = \mu(t_1), \quad \lambda_1 = \lambda(t_1), \quad k_g = \frac{g_s^k(t, t_1)}{g_D^k(t, t_1)} \quad (4.51)$$

Ako su Poissonovi koeficijenti jednaki  $\nu(t) = \nu_c(t, t_1) = \nu$ , onda su prema (2.82)

$$g_D^k(t, t_1) = g_s^k(t, t_1) = g^k(t, t_1), \quad (4.52)$$

pa elementi matrice  $\bar{d}$  dobijaju nešto jednostavniji oblik i tada je

$$\bar{d} = g^k (2\mu_1 + \lambda_1) = d_{(1)} \quad (4.53)$$

gde su elementi matrica  $\mu_1$  i  $\lambda_1$  jednaki elementima matrica  $\mu_{\varphi}$  i  $\lambda_{\varphi}$  u vremenu  $t=t_1$ .

Funkcional  $\tilde{\Pi}_{\gamma}(t)$ , prema (2.86) i (3.11) je za telo sastavljeno od  $n$  konačnih elemenata je

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\gamma}(t) &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{V_k} \left[ \frac{1}{2} d_{\varphi} (\gamma - 2\gamma^s) - g_D^k \bar{d} \gamma_{(1)} - \beta_{\varphi} \gamma^{\theta} + g_s^k \beta_1 \gamma_{(1)}^{\theta} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - u^T y \right] dV - \int_{A_{\sigma}^k} u^T p dA \right\} \end{aligned} \quad (4.54)$$



Kada se pomeranja  $u(t)$  i deformacije  $\gamma(t)$  izraze u funkciji pomeranja  $\delta$  čvorova elementa  $k$ , pošto su interpolacione funkcije nezavisne od vremena, dobija se prema (4.10) i (4.12) za  $t=t_1$

$$\begin{aligned} \gamma_{(k)}(t_1) &= b\delta_1(t_1), \\ \gamma(t) &= b\delta(t), \\ u(t) &= n\delta(t). \end{aligned} \quad (4.55)$$

$\delta_1(t_1)$  su pomeranja čvorova u vremenu  $t=t_1$ .

Kada se (4.55) unesu u (4.54) dobija se vrednost funkcionala za jedan konačni element

$$\tilde{\pi}_r^k(t) = \delta^T \left( \frac{1}{2} s_\varphi \delta - s_D \bar{s} \delta_1 - q^s - q^\theta + s_s^k q_{(1)}^\theta - q^v - q^A \right), \quad (4.56)$$

gde su, slično kao u prethodnom odeljku

$$s_\varphi = \int_{V_k} b^T d b dV, \quad \bar{s} = \int_{V_k} b^T d b dV; \quad (4.57)$$

$$q_\varphi^s = \int_{V_k} b^T d r dV, \quad q^\theta = \int_{V_k} b^T \beta r dV, \quad q_{(1)}^\theta = \int_{V_k} b^T \beta r dV; \quad (4.58)$$

$$q^v = \int_{V_k} n^T y dV, \quad q^A = \int_{A_k^*} n^T p dA. \quad (4.59)$$

Matrice krutosti  $s$  i  $\bar{s}$  i vektori  $q_\varphi^s, q^\theta, q_{(1)}^\theta, q^v, q^A$  se mogu dekomponovati, kao i u prethodnom odeljku, tako da kada se izvrši transformacija koordinata (4.26) i elementa matrica i vektora (4.28) dobija se

$$\tilde{\pi}_r^k(t) = \sum_p \delta^* \left( \frac{1}{2} \sum_r s_{\varphi,pr}^* \delta_r^* - \sum_r s_{D,pr}^k \bar{s}_{pr}^* \delta_{1,r}^* - q_p^{s*} - q_p^{\theta*} + s_s^k q_{1,p}^{\theta*} - q_p^{v*} - q^{A*} \right) \quad (4.60)$$

Kada se izvrši sabiranje po svim elementima  $k$  vodeći računa o uslovima kompatibilnosti deformacija u čvorovima dobija se

$$\tilde{\pi}_r(t) = \Delta^* \left( \frac{1}{2} S_\varphi^* \Delta^* - S_D^* \bar{\Delta}_1^* - Q^{s*} - Q^{\theta*} + Q_{(1)}^{\theta*} - Q^{A*} - Q^{v*} \right) \quad (4.61)$$

Vektor  $\Delta^*$  je određen izrazom (4.30) dok su matrice krutosti sistema  $S_\varphi^*$  i  $S_D^*$  sastavljene od submatrica, slično kao u (4.32)

$$\begin{aligned} S_{\varphi,ij}^* &= \sum_k s_{\varphi,ij}^k, \\ S_{D,ij}^* &= \sum_k s_{D,ij}^k \bar{s}_{ij}^k, \end{aligned} \quad i=1,2,\dots,M; j=1,2,\dots,M. \quad (4.62)$$

Vektori  $Q^*$  mogu se prikazati kao u izrazu (4.36) gde su sile u nekom čvoru



$$q^{p*i} = \sum_k q_k^{p*i} \quad p = \theta, s, v, A; \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (4.63)$$

jednake zbiru sila odgovarajućih elemenata koji se u čvoru susstičuž  
Na sličan način se definiše i vektor

$$Q_{(i)S}^{\theta*iT} = \{ q_{(i)S}^{\theta*1T}, q_{(i)S}^{\theta*2T}, \dots, q_{(i)S}^{\theta*MT} \}$$

gde je

$$q_{(i)S}^{\theta*i} = \sum_k s_s^k q_{(i)k}^{\theta*i} \quad (4.63a)$$

Od ukupnog broja mogućih pomeranja čvorova sistema, unapred je propisano P, dok preostatak N pomeranja kao i u prethodnom odeljku treba odrediti. Stoga se matrice  $S^*$ ,  $S_S^*$  i vektori  $Q^*$  mogu dekomponovati kao i u prethodnom odeljku, tako da se dobija

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_\theta(t) = & \frac{1}{2} \Delta_N^{*T} S_{\varphi,NN}^* \Delta_N^* + \frac{1}{2} \Delta_P^{*T} S_{\varphi,PN}^* \Delta_N^* + \frac{1}{2} \Delta_N^{*T} S_{\varphi,PN}^* \Delta_P + \frac{1}{2} \Delta_P^{*T} S_{\varphi,PP}^* \Delta_P - \\ & - \Delta_N^{*T} S_{S,NN}^* \Delta_{1,N}^* - \Delta_P^{*T} S_{S,PN}^* \Delta_{1,N}^* - \Delta_N^{*T} S_{S,NP}^* \Delta_{1,P}^* - \Delta_P^{*T} S_{S,PP}^* \Delta_{1,P}^* - \\ & - \Delta_N^{*T} Q_N^* - \Delta_P^* Q_P^* \end{aligned} \quad (4.64)$$

gde je

$$Q^* = Q^{S*} + Q^{\theta*} - Q_{(i)S}^{\theta*} + Q^{V*} + Q^{A*} \quad (4.65)$$

Iz uslova stacionarnosti funkcionala (4.64) smatrajući  $\Delta_N^*$  kao nezavisni funkcionalni argumenat dobija se sistem od N linearnih algebarskih jednačina

$$S_{\varphi,NN}^* \Delta_N^* = S_{S,NN}^* \Delta_{1,N}^* + S_{S,NP}^* \Delta_{1,P}^* + Q_N^* - S_{\varphi,NP}^* \Delta_P^*. \quad (4.66)$$

Da bi se odredila pomeranja  $\Delta_N^*(t)$  u vremenu t, mora se prvo naći rešenje  $\Delta_{1,N}^*$  zadatka u vremenu  $t=t_1$  početka delovanja napona  $\sigma$  na osnovu teorije elastičnosti, rešavajući sistem algebarskih jednačina, pošto je  $S_{S,NN}^* = 0$

$$S_{NN}^* \Delta_{1,N}^* = Q_{1,N}^* - S_{NP}^* \Delta_{1,P}^*. \quad (4.67)$$

Elementi matrice  $S_{NN}^*$  sračunavaju se na isti način kao i elementi matrice  $S_{\varphi,NN}$  samo je sada za svaki konačni element k,  $E_{\varphi}^k(t, t_1) = E^k$ ,  $g^k(t, t_1) = 0$  i  $\varepsilon_s^k(t, t_1) = 0$  vektor  $Q_{1,N}^*$  je

$$Q_{1,N}^* = Q_{1,N}^{V*} + Q_{1,N}^{A*} + Q_{1,N}^{\theta*}. \quad (4.68)$$



Kada se odrede vrednosti vektora  $\Delta$  može se za proizvoljno  $t$  zavisno od reološkog modela betona, odnosno odgovarajućih prepisa, usvojiti koeficijent tečenja  $\varphi(t, t_1)$  i prema nekom od predloga uprošćenja veze između napona i deformacija naći  $\Xi_\varphi(t)$  i  $\xi^k(t)$ . U daljem postupku se određuju koeficijenti matrice krutosti  $S_\varphi^*$ , na isti način kao i za elastično telo, ali sada sa drugim vrednostima modula elastičnosti, a zatim koeficijenti matrice  $S_\xi^*$  i vektori  $Q^*$ . Za konačne elemente koji pripadaju armaturi je za svako  $t$   $\varphi(t, t_1)=0$ ,  $\xi(t, t_1)=0$  i  $\xi_s(t)=0$ .

U rešavanju ovog zadatka određivanja stanja napona i deformacija konstrukcijskog sistema, mogu se koristiti uz izvesne manje adaptacije postojeći programi za elektronske računare u metodi konačnih elemenata. Dopuna bi se sastojala u tome da se uvede dopunsko opterećenje u čvorovima, prema (4.66).

$$Q_N^{d*} = S_{\varphi,NN}^* \Delta_{1,N}^* + S_{\xi,NN}^* \Delta_{1,P}^* + Q_{\varphi,N}^{0*} + Q_N^{s*} \quad (4.69)$$

koje je posledica dugotrajnih procesa u betonu i dalje u određivanju pomeranja postupa kao da je materijal elastičan.

Kada se odredi vektor pomeranja  $\Delta^*(t)$ , formiraju se vektori pomeranja  $\delta^k$  ( $k=1,2,\dots,n_k$ ) i dalje prema izrazu (4.55) deformacije  $\delta(t)$  u tačkama elementa a potom naponi  $\sigma$  prema izrazu (4.47). Celokupna analiza izvršeno je tako da se, kao i u slučaju integralnih veza između napona i deformacija, mogu za svaki elemenat uneti posebna reološka svojstva.

#### REFERENCE

- /1/ B r e b i a, C.A., Fundamentals Finite Element Techniques. Butterworth, London 1973.
- /2/ C h e u n g, Y.K., Finite Strip Method in Structural Analysis. Pergamon Press, Oxford, 1976.
- /3/ H a j d i n, N., S e k u l o v i ć, M., Metod konačnih elemenata i njegova primena u mehanici čvrstog deformabilnog tela. XIV Jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, SvK-3, str. 19-40.
- /4/ G a l l a g h e r, R.H., Finite Element Analysis. Prentice Hall, Inc., New Jersey 1975.

- /5/ P i a n, T.H.H. and T o n g, P., Basis fo Finite Element Methods for Solid Continua. Intern. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol I, 1968, pp.3-28.
- /6/ S t r u t t, J.W. (Lord Rayleigh), On the Theory of Resonance. Trans. Royal Society, London 1870, A161., pp. 77-118.
- /7/ R i t z, W., Über eine Methode zur Lösung tischen Phisik. Journal Reine and Angew. Mathematik, Bd.135, 1909, s. 1-61.
- /8/ S t r a n g, G., Fix, G.J., An analysis of Finite Element method. Prentice Hall, Inc. New Jersey, 1973.
- /9/ T r e f f t z, E., Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. 2<sup>nd</sup> Congress Applied Mechanics, Zürich, 1926.
- /10/ Z i e n k i e w i c z, O.C., The Finite Element Method in Engineering Science. Mc Graw-Hill, London 1974.
- /11/ К а н т о р о в и ч, Л. В., Сдин прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла. Известия Академии наук СССР, 5, стр. 647-652, 1933.
- /14/ Г а л е р к и н, Б. Г., К вопросу о исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле. Доклады Академии наук СССР, 1930. (Опубл. в Сборнике сочинений Б. Г. Галеркина, Том 1, стр. 318-321, Москва 1953).



## 5. LINIJSKI ELEMENTI. METODA DEFORMACIJE

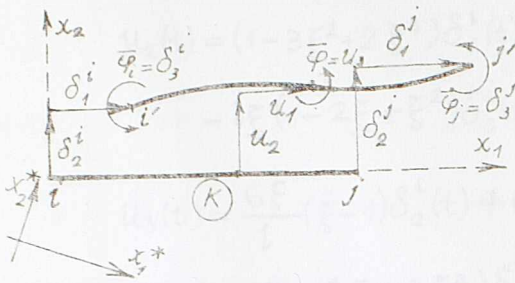
U predhodnom poglavlju izvedeni su sistemi jednačine za određivanje pomeranja čvorova konstrukcija sastavljenih od tzv. površinskih i zapreminskih elemenata. Slične jednačine će biti izvedene i za armirano betonske konstrukcijske sisteme sastavljene od linijskih elemenata - štapova, uzimajući u obzir uticaje tečenja i skupljanja betona. Iz oblasti primene metode konačnih elemenata za određivanje pomeranja čvorova linijskih sistema od elastičnog materijala, poznate kao metode pomeranja ili deformacija, postoji veliki broj radova i monografija /2/, /7/, /8/ i dr. Konačni element je ovde štap ili deo štapa, čije dimenzije (dužina i poprečni presek) dopuštaju da se on može prikazati linijom koja prestavlja njegovu osu i na koji se mogu primeniti sve pretpostavke tehničke teorije savijanja štapa /5/. Pošto se dva linijska elementa mogu povezati samo u čvoru, to su ovde uslovi kompatibilnosti deformacija u potpunosti zadovoljeni na mestu spoja dva elementa, što nije slučaj sa površinskim i zapreminskim elementima u kojih su ti uslovi ispunjeni samo u nekoliko unapred izabranih tačaka.

### 5.1 Interpolacione funkcije

Na sk. 5.1 je prikazan linijski armiranobetonski elemenat k čiji su čvorovi na krajevima obeleženi sa  $i$  i  $j$ , koji je pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja, temperaturnih promena i skupljanja betona prešao u nekom trenutku vremena ( $t$ ) iz prvobitnog nedeformisanog položaja  $(i, j)$  u nov položaj  $(i', j')$ .

Pošto se u ovom odeljku razmatraju konstrukcijski sistemi u ravni, to će generalisani vektor pomeranja  $u(t)$  bilo koje tačke štapa imati tri komponente (dva pomeranja u pravcu koordinatnih osa i jedan





Sk. 5.1

ugao obrtanja  $\bar{\varphi}$  čiji su pozitivni smerovi prikazani na sk.1)

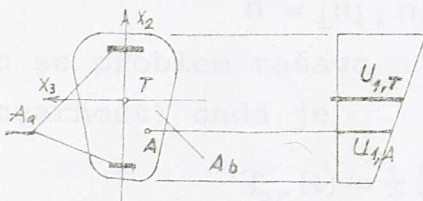
$$u(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix} \quad u_3(t) = \bar{\varphi}(t) \quad (5.1)$$

Lokalni Descartesov koordinatni sistem o  $x_1, x_2$  bira se tako da se koordinatni početak nalazi u čvoru  $i$  (prvi čvor) a osa  $x_1$  se poklapa sa osom elementa  $k$ . Prema tome, za svaki element mora se unapred ustanoviti koji je čvor prvi ( $i$ ), a koji drugi ( $j$ ) što se u literaturi često označava strelicom, i tako ceo konstrukcijski sistem prikazuje kao jednostrano orijentisan graf.

Vektor pomeranja čvorova elementa je stoga

$$\delta(t) = \begin{Bmatrix} \delta^i(t) \\ \delta^j(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1^i(t) \\ \delta_2^i(t) \\ \delta_3^i(t) \\ \delta_1^j(t) \\ \delta_2^j(t) \\ \delta_3^j(t) \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Pomeranje bilo koje tačke poprečnog preseka  $A(x_1, x_2, x_3)$  armiranobetonskog elementa (sk.5.2) je s obzirom na važenje Bernoullijeve hipoteze, kao jedne od osnovnih pretpostavki tehničke teorije armiranobetonskog štapa



Sk. 5.2

hipoteze, kao jedne od osnovnih pretpostavki tehničke teorije armiranobetonskog štapa

$$u_1(t) = u_{1,T}(t) - \frac{\partial u_{2,T}(t)}{\partial x_1} x_2,$$

$$u_2(t) = u_{2,T}(t), \quad u_3(t) = u_{3,T}(t) = \bar{\varphi}(t), \quad (5.3)$$

$$u_{3,T}(t) = \frac{\partial u_{2,T}(t)}{\partial x_1}$$

$u_{1,T}(t), u_{2,T}(t), u_{3,T}(t)$  su generalisana pomeranja tačke  $T$  koja se nalazi u preseku ose štapa i posmatranog poprečnog preseka.

Ova pomeranja mogu se, kao što je to prikazano i u prethodnom odeljku, izraziti u funkciji pomeranja čvorova  $i, j$  odnosno vektora  $\delta(t)$  koristeći Hermiteove polinome /1/, /11/.



$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= (1-\xi)\delta_1^i(t) + \xi\delta_1^j(t), \\
 u_2(t) &= (1-3\xi^2+2\xi^3)\delta_2^i(t) + (3\xi^2-2\xi^3)\delta_2^j(t) - \\
 &\quad -1\xi(1-2\xi+\xi^2)\delta_3^i(t) + 1\xi^2(\xi-1)\delta_3^j, \\
 u_3(t) &= \frac{6\xi}{l}(\xi-1)\delta_2^i(t) + \frac{6\xi}{l}(1-\xi)\delta_2^j(t) + \\
 &\quad + (1-4\xi+3\xi^2)\delta_3^i(t) + \xi(3\xi-2)\delta_3^j(t)
 \end{aligned}
 \quad \xi = \frac{x_1}{l} \quad (5.4)$$

gde je  $l$  dužina elementa.

Kada se ovi izrazi uvrste u (3) dobijaju se veze između vektora pomeranja  $u(t)$  bilo koje tačke elementa i vektora pomeranja čvorova  $\delta$  ( $i, j$ ) u matricnom obliku

$$u = n\delta \quad (5.5)$$

gde su elementi matrice  $n$

$$n = \left[ \begin{array}{ccc|cc}
 (1-\xi) & \frac{6\xi}{l}x_2(1-\xi) & -x_2(1-4\xi+3\xi^2) & \xi & -\frac{6}{l}x_2(1-\xi) & -x_2\xi(3\xi-2) \\
 0 & (1-3\xi^2+2\xi^3) & 1\xi(1-2\xi+\xi^2) & 0 & \xi^2(3-2\xi) & 1\xi^2(\xi-1) \\
 0 & \frac{6\xi}{l}(\xi-1) & (1-4\xi+3\xi^2) & 0 & -\frac{6\xi}{l}(1-\xi) & \xi(3\xi-2)
 \end{array} \right] \quad (5.6)$$

Ova matrica se, kako je to naznačeno isprekidanom linijom, može podeliti u dve submatrice prema pripadajućim čvorovima  $i, j$

$$n = [n_i, n_j] \quad (5.7)$$

Ako se problem rešava u oblasti tzv. malih deformacija (geometrijska linearnost) onda je

$$\gamma_{pr}(t) = \frac{1}{2} (u_{p,r}(t) + u_{r,p}(t)), \quad p=1,2; \quad r=1,2. \quad (5.7)$$

Pošto se u linijskim elementima često rad napona  $\tau_{pr}$  na deformaciji  $\gamma_{pr}$  zanemaruje (ne uzima se u obzir uticaj transverzalnih sila) i kako je napon  $\sigma_{22}=0$ , preostaje da na promenu sadržaja slobodne energije elementa utiče samo napon  $\sigma_{11}(t)$ , pa treba odrediti  $\delta_{11}(t)$ , koje je s obzirom na (5.3) i (5.7) u bilo kojoj tački poprečnog preseka

$$\delta_{11}(t) = \epsilon(t) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

i dalje prema (5.5) i (5.6)

$$\varepsilon(t) = \mathbf{b}\delta \quad (5.8)$$

gde je vektor

$$\mathbf{b} = \left\{ -\frac{1}{l}, \frac{6}{l^2}(1-2\xi)x_2, \frac{4-6\xi}{l}x_2, \frac{1}{l}, -\frac{6}{l^2}(1-2\xi)x_2, \frac{2-6\xi}{l}x_2 \right\}$$

Ako se vektor  $\mathbf{b}$  prikaže u obliku

$$\mathbf{b} = \{ \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \},$$

gde su

$$\mathbf{b}_i = \left\{ -\frac{1}{l}, \frac{6}{l^2}(1-2\xi)x_2, \frac{4-6\xi}{l}x_2 \right\}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{b}_j = \left\{ \frac{1}{l}, -\frac{6}{l^2}(1-2\xi)x_2, \frac{2-6\xi}{l}x_2 \right\};$$

onda je prema (5.8)

$$\varepsilon(t) = \{ \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}. \quad (5.10)$$

## 5.2 Integralne veze izmedju napona i deformacija betona

Funkcional  $\Pi_{\delta}^{*k}(t)$  koji predstavlja deo promene slobodne energije armiranobetonskog elementa  $k$  jednak je zbiru funkcionala za beton  $\Pi_{\delta,b}^{*k}(t)$  i armaturu  $\Pi_{\delta,a}^{*k}(t)$

$$\Pi_{\delta}^{*k}(t) = \Pi_{\delta,b}^{*k} + \Pi_{\delta,a}^{*k}. \quad (5.11)$$

Reološka svojstva ova dva materijala su različita: čelik se ponaša kao elastičan materijal, dok se beton tokom vremena skuplja i teče. Stoga je s obzirom na iznetu pretpostavku o zanemarenju uticaja smičućih napona na promenu slobodne energije

$$\begin{aligned} \Pi_{\delta,b}^{*k}(t) = & \int_{V_{k,b}} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_b(t) \varepsilon_b(t) \varepsilon_b(t) - \varepsilon_b(t) \varepsilon_b(t) \int_{t_1}^t R^k(t,\tau) \varepsilon_b(\tau) d\tau - \varepsilon_b(t) \varepsilon_b(t) [\varepsilon_b^{\theta}(t) + \varepsilon_b^s(t)] + \right. \\ & \left. + \varepsilon_b(t) \varepsilon_b(t) \int_{t_1}^t R^k(t,\tau) [\varepsilon_b^{\theta}(\tau) + \varepsilon_b^s(\tau)] d\tau \right\} dV - \int_0^l \{ [g_1 + p_1(t)] u_1 + [g_2 + p_2(t)] u_2 + m u_3 \} dx_1, \quad (5.12) \end{aligned}$$

$$\Pi_{\delta,a}^{*k}(t) = \int_{V_{k,a}} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_a(t) \varepsilon_a(t) \varepsilon_a(t) - \varepsilon_a(t) \varepsilon_a(t) \varepsilon_a^{\theta}(t) \right\} dV.$$

$g_1, g_2, p_1(t), p_2(t)$  su komponente zapreminskih sila i spoljašnjeg opterećenja u pravcu koordinatnih osa  $x_1$  i  $x_2$  dok je  $m$  moment od spoljašnjih sila. Sve ove veličine računaju se po jedinici dužine ose ele-



menta ako su podeljena opterećenja, ali mogu biti zadate i kao koncentrisane sile odnosno momenti.

Kada se (5.8) uvrsti u (5.12) dobija se s obzirom da vektor  $\mathbf{b}$  ne zavisi od vremena

$$\pi_{\delta, \mathbf{b}}^{*k}(t) = \frac{1}{2} \delta^T \mathbf{s}_b \delta - \delta^T \mathbf{s}_b R^k \delta - \delta^T \mathbf{q}_b^s + \delta^T R^k \mathbf{q}_b^s - \delta^T \mathbf{q}_b^\theta + \delta^T R^k \mathbf{q}_b^\theta - \delta^T \mathbf{q}^P, \quad (5.13)$$

$$\pi_{\delta, \mathbf{a}}^{*k} = \frac{1}{2} \delta^T \mathbf{s}_a \delta - \delta^T \mathbf{q}_a^\theta;$$

gde su

$$\mathbf{s}_b = \int_{V_{b,k}} \mathbf{b} E_b \mathbf{b} dV, \quad \mathbf{s}_a = \int_{V_{a,k}} \mathbf{b} E_a \mathbf{b} dV, \quad (5.14)$$

matrice koje odredjuju doprinos betona i armature krutosti elementa  $k$ .

Vektor  $\mathbf{q}^P$  odredjuje uticaj spoljašnjeg opterećenja i zapreminskih sila i on je prema (5.5) i (5.12)

$$\mathbf{q}^P = \int_0 \mathbf{n}^T (\mathbf{g} + \mathbf{p} + \mathbf{m}) d\alpha_1, \quad (5.15)$$

gde su vektori zapreminskih sila i spoljašnjeg opterećenja

$$\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m(t) \end{Bmatrix}. \quad (5.16)$$

Uticaji promene temperature i skupljanja betona izražavaju se vektorima  $\mathbf{q}_b^\theta$  i  $\mathbf{q}_b^s$  u vidu nekog zamenjujućeg spoljašnjeg opterećenja.

$$\mathbf{q}_b^\theta = \int_{V_{b,k}} \mathbf{b} E_b \varepsilon_b^\theta dV, \quad \mathbf{q}_a^\theta = \int_{V_{a,k}} \mathbf{b} E_a \varepsilon_a^\theta dV$$

$$R^k \mathbf{q}_b^\theta = \int_{V_{b,k}} \mathbf{b} E_b(t) \int_{t_1}^{t_1} R^k(t, \tau) \varepsilon_b^\theta(\tau) d\tau, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{q}_b^s = \int_{V_{b,k}} \mathbf{b} E_b \varepsilon_b^s dV, \quad R^k \mathbf{q}_b^s = \int_{V_{b,k}} \mathbf{b} E_b(t) \int_{t_1}^{t_1} R^k(t, \tau) \varepsilon_b^s(\tau) d\tau.$$

Matrice  $\mathbf{s}_b$  i  $\mathbf{s}_a$  dobijaju se integracijom izraza (5.14) uzimajući u obzir (5.9) i činjenicu da je štap prizamatičan i njihovi elementi su

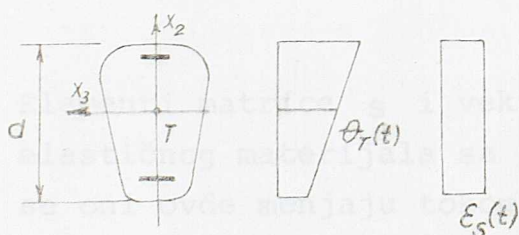
$$S_{b(a)} = E_{b(a)} \begin{bmatrix} \frac{A_b(a)}{l} & 0 & -\frac{S_b(a)}{l} & -\frac{A_b(a)}{l} & 0 & \frac{S_b(a)}{l} \\ 0 & \frac{12I_b(a)}{l^3} & \frac{6I_b(a)}{l^2} & 0 & -\frac{12I_b(a)}{l^3} & \frac{6I_b(a)}{l^2} \\ -\frac{S_b(a)}{l} & \frac{6I_b(a)}{l^2} & \frac{4I_b(a)}{l} & \frac{S_b(a)}{l} & -\frac{6I_b(a)}{l^2} & \frac{2I_b(a)}{l} \\ -\frac{A_b(a)}{l} & 0 & \frac{S_b(a)}{l} & \frac{A_b(a)}{l} & 0 & -\frac{S_b(a)}{l} \\ 0 & -\frac{12I_b(a)}{l^3} & -\frac{6I_b(a)}{l^2} & 0 & \frac{12I_b(a)}{l^3} & -\frac{6I_b(a)}{l^2} \\ \frac{S_b(a)}{l} & \frac{6I_b(a)}{l^2} & \frac{2I_b(a)}{l} & -\frac{S_b(a)}{l} & -\frac{6I_b(a)}{l^2} & \frac{4I_b(a)}{l} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

gde su  $A_{b(a)}$  - površina poprečnog preseka betona (armature)\*

$S_{b(a)}$  - statički moment površine poprečnog preseka betona (armature) u odnosu na osu  $X_3$ ,

$I_{b(a)}$  - moment inercije površine poprečnog preseka betona (armature) u odnosu na osu  $X_3$ .

Vektori  $q_b^{\theta}(t)$ ,  $q_b^{\epsilon}(t)$  i  $q_b^s(t)$  mogu se odrediti prema izrazima (5.17) uz pretpostavke, koje se obično čine pri proračunima linijskih sistema, da se temperatura  $\theta(t)$  linearno menja po visini preseka i da je skupljanje betona u svim tačkama isto, tj.



Sk. 5.3

$$\theta(x_1, x_2, x_3; t) = \theta_T(t) + \frac{\Delta\theta(t)}{d} x_2, \quad (5.19)$$

$$\epsilon_s(x_1, x_2, x_3; t) = \epsilon_s(t),$$

gde je  $\theta(t)$  promena temperature u osovini elementa, a  $\Delta\theta(t)$  razlika u promeni temperature na gornjoj i donjoj ivici preseka (sk. 5.3)

Ukupna vrednost funkcionala  $\Pi_r^{**k}(t)$  za elementat  $k$  je

\*indeks u zagradi označava da isti izrazi važe i za beton i za armaturu.



$$\pi_{\gamma}^{*k}(t) = \frac{1}{2} \delta^T s \delta - \delta^T s_b R^k \delta - \delta^T (q_b^s - R^k q_b^s) - \delta^T (q_a^s - R^k q_a^s) - \delta^T q \quad (5.20)$$

gde su

$$s = s_b + s_a \quad q^{\dagger} = q_b^{\dagger} + q_a^{\dagger}$$

Kada se uvede tzv. "idealizovani" poprečni presek, čija je površina  $A_{id}$  i moment inercije  $I_{id}$

$$A_{id} = A_b + \frac{E_a}{E_b(t)} A_a, \quad I_{id} = I_b + \frac{E_a}{E_b(t)} I_a; \quad (5.21)$$

dok je statički moment, s obzirom da osa štapa prolazi kroz težište površine  $A_{id}$ .

$$S_{id} = S_b + \frac{E_a}{E_b(t)} S_a = 0, \quad (5.21a)$$

elementi matrica  $s$  i vektora  $q^{\dagger}$  su

$$s = E_b(t) \begin{bmatrix} \frac{A_{id}}{l} & 0 & 0 & -\frac{A_{id}}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_{id}}{l^3} & \frac{6I_{id}}{l^2} & 0 & -\frac{12I_{id}}{l^3} & \frac{6I_{id}}{l^2} \\ 0 & \frac{6I_{id}}{l^2} & \frac{4I_{id}}{l} & 0 & -\frac{6I_{id}}{l^2} & \frac{2I_{id}}{l} \\ -\frac{A_{id}}{l} & 0 & 0 & \frac{A_{id}}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I_{id}}{l^3} & -\frac{6I_{id}}{l^2} & 0 & \frac{12I_{id}}{l^3} & -\frac{6I_{id}}{l^2} \\ 0 & \frac{6I_{id}}{l^2} & \frac{2I_{id}}{l} & 0 & -\frac{6I_{id}}{l^2} & \frac{4I_{id}}{l} \end{bmatrix}, \quad q^{\dagger} = \alpha E_b(t) \begin{Bmatrix} -A_{id} \theta_r(t) \\ 0 \\ -\frac{\Delta \theta(t)}{d} I_{id} \\ A_{id} \theta_r(t) \\ 0 \\ \frac{\Delta \theta(t)}{d} I_{id} \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

Elementi matrice  $s$  i vektora  $q$  su isti kao i za homogen štap od elastičnog materijala sa idealizovanim poprečnim presekom, s tim što se oni ovde menjaju tokom vremena zbog promene modula elastičnosti betona  $E_b(t)$ . Usled ove promene menja se tokom vremena i položaj težišta površine  $A_{id}$ , odnosno osa štapa. Medjutim ove promene, naročito kod "starijeg" betona, nisu značajne i ne uzimaju se u obzir.

Za simetrične i simetrično armirane preseke je  $S_b = 0$ ,  $S_a = 0$ , a i kod nesimetričnih armiranobetonskih preseka može se takođe zanemariti uticaj  $s_b$  i  $s_a$  na krutost štapa i time određivanje elemenata matrica krutosti  $s_b$ ,  $s_a$  i vektora  $q^{\dagger}$  pojednostaviti. Ovakva uprošćenja nisu

opravdana za spregnute konstrukcije u kojima je površina čeličnog dela preseka znatno veća nego u običnih armiranobetonskih konstrukcija.

Kada se (5.19) uvrsti u (5.17) dobija se, uzimajući u obzir (5.9) posle integracije

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_b^s &= \alpha E_b(t) \begin{Bmatrix} -A_b(a) \theta_T(t) + \frac{\Delta\theta(t)}{d} S_b(a) \\ 0 \\ \frac{S_b(a) \theta_T(t) - \frac{\Delta\theta(t)}{d} I_b(a)}{A_b(a) \theta_T(t) - \frac{\Delta\theta(t)}{d} I_b(a)} \\ 0 \\ -S_b(a) \theta_T(t) + \frac{\Delta\theta(t)}{d} I_b(a) \end{Bmatrix} & \mathbf{q}_b^s &= E_b(t) \begin{Bmatrix} -A_b E_s(t) \\ 0 \\ \frac{S_b E_s(t)}{A_b E_s(t)} \\ 0 \\ -S_b E_s(t) \end{Bmatrix} & (5.23) \\
 \\
 \mathbf{R}^k \mathbf{q}_b^s &= \alpha E_b(t) \int_{t_1}^t \mathbf{R}^k(t, \tau) \begin{Bmatrix} -A_b \theta(\tau) + \frac{\Delta\theta(\tau)}{d} S_b \\ 0 \\ \frac{S_b \theta(\tau) - \frac{\Delta\theta(\tau)}{d} I_b}{A_b \theta(\tau) - \frac{\Delta\theta(\tau)}{d} I_b} \\ 0 \\ -S_b \theta(\tau) + \frac{\Delta\theta(\tau)}{d} I_b \end{Bmatrix} d\tau & \mathbf{R}^k \mathbf{q}_b^s &= E_b(t) \int_{t_1}^t \mathbf{R}^k(t, \tau) \begin{Bmatrix} -A_b E_s(\tau) \\ 0 \\ \frac{S_b E_s(\tau)}{A_b E_s(\tau)} \\ 0 \\ -S_b E_s(\tau) \end{Bmatrix} d\tau
 \end{aligned}$$

### Matrica krutosti konstrukcijskog sistema

Radi lakšeg izvodjenja matrice krutosti čitavog konstrukcijskog sistema neophodno je, kao i u slučaju zapreminskih elemenata, izvršiti particiju matrica krutosti i vektora opterećenja pojedinih elemenata prema pripadajućim čvorovima. Matrice krutosti  $S_b$  i  $S_a$  su sastavljene od četiri submatrice tipa (3,3)

$$\mathbf{S}_b = \begin{bmatrix} S_{b,ii} & S_{b,ij} \\ S_{b,ji} & S_{b,jj} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_a = \begin{bmatrix} S_{a,ii} & S_{a,ij} \\ S_{a,ji} & S_{a,jj} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

gde su

$$\begin{aligned}
 S_{b,pr} &= E_b(t) \int_{V_{b,k}} \mathbf{b}_p^T \mathbf{b}_r dV & p &= i, j \\
 & & r &= i, j \\
 S_{a,pr} &= E_a \int_{V_{a,k}} \mathbf{b}_p^T \mathbf{b}_r dV & &
 \end{aligned} \quad (5.25)$$



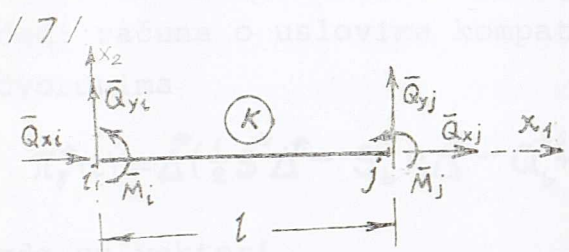
Vektori  $q$ ,  $q^\theta$  i  $q^s$  se mogu prikazati u obliku

$$q = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} \quad q_b^\theta = \begin{Bmatrix} q_{b,i}^\theta \\ q_{b,j}^\theta \end{Bmatrix} \quad q_b^s = \begin{Bmatrix} q_{b,i}^s \\ q_{b,j}^s \end{Bmatrix}$$

gde su prema (5.6a), (5.9), (5.15) i (5.17)

$$\begin{aligned} q_p &= \int_0^l n_p^T (g + p + m) dx_1, \\ q_{b,p}^\theta &= \alpha E_b(t) \int_{V_{b,p}} b_p^T \varepsilon^\theta(t) dV, \\ q_{a,p}^\theta &= \alpha E_a \int_{V_{a,p}} b_p^T \varepsilon^\theta(t) dV, \\ q_{b,p}^s &= E_b(t) \int_{V_{b,p}} b_p^T \varepsilon^s(t) dV. \end{aligned} \quad p = i, j \quad (5.27)$$

Ovi vektori sastoje se od po tri komponente - dve sile u pravcu koordinatnih osa lokalnog koordinatnog sistema i jednog momenta koje deluju na krajevima štapa i predstavljaju tzv. ekvivalentno opterećenje



$$q_p = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{xp} \\ \bar{Q}_{yp} \\ \bar{M}_p \end{Bmatrix} \quad p = i, j \quad (5.28)$$

Sk. 5.4

Za spoljašnje opterećenje, ove komponente odgovaraju reaktivnim generalisanim silama (uzetim sa suprotnim znakom) ukleštene grede (ako je elemenat kruto vezan na oba kraja) raspona  $l$  od ovog opterećenja.

Vektori pomeranja  $u_p$ , opterećenja  $q_p$  i matrice krutosti  $s_{pr}$  ( $p=i, j, r=i, j$ ) su izražavani u lokalnom Descartesovom koordinatnom sistemu ( $ox_1x_2$ ) koji je vezan sa svaki elemenat i neophodno je, kao i kod zapreminskih elemenata, sve ove veličine izraziti u globalnom Descartesovom koordinatnom sistemu ( $ox_1^*x_2^*$ ). Pošto se ovde razmatraju konstrukcijski sistemi u ravni, prve dve komponente ovih vektora, koje predstavljaju pomeranja odnosno sile u ravni  $ox_1x_2$ , zavise od izabranog lokalnog koordinatnog sistema, dok treća komponenta predstavlja obrtanje preseka, odnosno momente na krajevima elementa oko ose  $x_3$ , koja ima isti smer i pravac za sve lokalne i globalni sistem. Matrica transvornacije je stoga

$$t = \begin{bmatrix} \cos\beta_k & -\sin\beta_k & 0 \\ \sin\beta_k & \cos\beta_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

gde je  $\beta_k$  ugao kojeg zaklapaju ose  $x_1$  i  $x_2^*$  lokalnog i globalnog koordinatnog sistema.

Transformisane vrednosti elemenata matrica krutosti i vektora opterećenja dobijaju se kao i za zapreminske elemente

$$u_p^* = t^T u_p \quad (5.30)$$

$$s_{pr}^* = t^T s_{pr} t \quad \begin{matrix} p = i, j \\ r = i, j \end{matrix}$$

$$q_p^* = t^T q_p, \quad q_p^{*s} = t^T q_p^s, \quad q^{*\theta} = t^T q^\theta$$

Ukupna promena funkcionala  $\Pi_g^*(t)$  za ceo konstrukcijski sistem, vodeći računa o uslovima kompatibilnosti generalisanih pomeranja u čvorovima

$$\Pi_g^*(t) = \Delta^* \left( \frac{1}{2} S^* \Delta^* - S_b^* R \Delta^* - Q_b^{*s} + R Q_b^{*s} - Q^{*\theta} + R Q_b^{*\theta} - Q^{*p} \right) \quad (5.31)$$

gde su vektori

$$\Delta^* = \begin{Bmatrix} \delta_1^* \\ \delta_2^* \\ \vdots \\ \delta_M^* \end{Bmatrix}, \quad Q^{*r} = \begin{Bmatrix} \sum_k q_1^{*rk} \\ \sum_k q_2^{*rk} \\ \vdots \\ \sum_k q_M^{*rk} \end{Bmatrix}, \quad R Q_b^{*r} = \begin{Bmatrix} \sum_k R^k q_b^{*rk} \\ \sum_k R^k q_b^{*rk} \\ \vdots \\ \sum_k R^k q_b^{*rk} \end{Bmatrix} \quad r = p, \theta, s \quad (5.32)$$

a  $M$  ukupan broj čvorova u konstrukcijskom sistemu.

Matrice  $S^*$  i  $R S^{*r}$  ( $r = s, \theta$ ) su sastavljene od submatrica  $S_{ij}^*$  i  $S_{ij}^{*r} R_{ij}$

$$S_{ij}^* = \sum_k s_{ij}^{*k}, \quad S_{ij}^{*r} R_{ij} = \sum_k s_{ij}^{*rk} R^k, \quad (5.33)$$

$$r = s, \theta; \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, M;$$

i ukoliko dva čvora  $i, j$  ( $i \neq j$ ) nisu povezana jednim elementom onda su, kako je to već pokazano, elementi ovih submatrica nule.



Od ukupnog broja  $3 \times M$  pomeranja čvorova,  $P$  pomeranja je unapred propisano na mestima oslonaca, tako da ostaje da se odredi  $N$  nepoznatih pomeranja čvorova. Znači da je konstrukcijski sistem  $N$ -puta deformacijski neodređen, pa se u daljem izvodjenju sistema Volterrinih integralnih jednačina za određivanje generalisanih pomeranja čvorova postupa na isti način kao i za konstrukcijske sisteme sastavljene od zapreminskih elemenata.

$$S_{NN}^* \Delta_N^* - S_{b,NN}^* R \Delta_N^* = \bar{Q}_N^* \quad (5.34)$$

gde je

$$\bar{Q}_N^* = Q_N^{p*} + Q_N^{d*} - R Q_N^{d*} + Q_N^{s*} - R Q_N^{s*} - S_{NP}^* \Delta_P^* \quad (5.35)$$

$\Delta_P^{*T}$  je vektor propisanih pomeranja na mestima oslonaca i neke ili sve njegove komponente su jednake nuli, dok neke mogu biti funkcije vremena.

Sistem jednačina (5.34) i matrice krutosti (5.33) su ispisani za najopštiji slučaj, kada su reološka svojstva betona različita u pojedinim elementima. Strogo uzev, ovo je u praksi redovna pojava, jer su dimenzije poprečnih preseka elemenata konstrukcije različite, a ponekad je zahtevan i različit kvalitet betona u pojedinim elementima. Pored toga kod velikih konstrukcijskih sistema, koji se izvode tokom jednog dužeg vremenskog perioda, starost betona pri opterećenju je različita - a uslovi sredine su ponekad različiti - što sve ima uticaja na tok i konačne veličine deformacija tečenja i skupljanja betona. Međutim, za konstrukcijske sisteme u kojih pomenute razlike nisu toliko izražene, može se radi pojednostavljivanja analize smatrati da su reološka svojstva betona ista u svim elementima. U tom slučaju je izrazima (5.33) operator  $R_{ij} = R$ .

U armiranobetonskim elementima se pojavljuju prsline usled prekoracenja čvrstoće na zatezanje u betonu koje smanjuju aktivnu površinu preseka, koja se tokom vremena menja. Raspored i uticaj prsline na aktivnu površinu a i sadržaj armature nisu isti duž elementa, zbog čega on ne može biti, strogo uzev, prizmatičan. Sem toga, u armiranobetonskim elementima u presecima sa prslinom, zbog pomeranja neutralne ose usled tečenja i skupljanja betona ne važi Navierova pretpostavka, kako je to uočio Ž. Perišić /9/, o raspodeli napona u poprečnom preseku. Uzeti u obzir sve ove faktore vrlo je komplikovano i složeno - čak i kada se koriste računari, a za praktične proračune, sem u nekim specijalnim slučajevima, nije neophodno. Ukoliko se ipak



želi sprovesti što tačnija analiza stanja napona i deformacija u konstrukcijskom sistemu, onda se pojedini štapovi mogu rastaviti na više konačnih elemenata, duž kojih se može smatrati da je površina aktivnog preseka ista. Zbog ovoga se, povećava deformacijska neodređenost konstrukcijskog sistema.

Radi smanjenja deformacijske neodređenosti elastičnih sistema, što je podjednako ako se ne može koristiti, elektronski računar, uticaji normalnih sila na deformacije se zanemaruju. Ovaj postupak određivanja pomeranja i sila u presecima, pri čemu se za određivanje matrice krutosti štapa ne koriste funkcije oblika (5.6), nego se njihovi elementi dobijaju kao reakcije oslonaca uklještenog štapa (i,j) usled jediničnih pomeranja u pravcu mogućih generalisanih pomeranja dat je u radu M. Djurića /4/. Međutim, isti rezultat se dobija na oba načina, što znači da se ovakvim izborom funkcija oblika obezbeđuje tačno rešenje problema primenom metode konačnih elemenata.

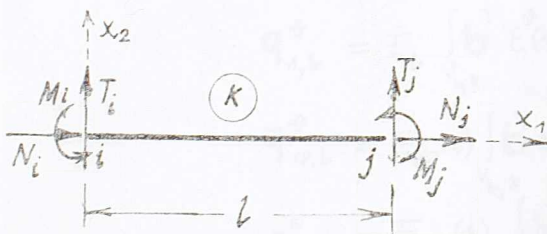
Sile u presecima na krajevima elementa k (normalna N, transverzalna sila T i moment savijanja M) date su vektorom  $\mathbf{T}$  u lokalnom koordinatnom sistemu i prikazane na Sk. 5.5

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} \quad T_i = \begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \end{Bmatrix} \quad T_j = \begin{Bmatrix} N_j \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

Kada se odrede komponente vektora

odnosno komponente generalisanih

pomeranja čvorova rešavanjem sistema linearnih Volterrinih integralnih jednačina (34), određuju se komponente vektora sila u presecima i, j na krajevima elementa k, koristeći matrice krutosti elementa



Sk. 5.5

$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{ii} & s_{ij} \\ s_{ji} & s_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{b,ii} & s_{b,ij} \\ s_{b,ji} & s_{b,jj} \end{bmatrix} \int_{t_i}^{t_k} R(t,\tau) \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} d\tau - \begin{Bmatrix} q_{i,i}^{\theta} + q_{b,i}^s \\ q_{j,i}^{\theta} + q_{b,j}^s \end{Bmatrix} + \int_{t_i}^{t_k} R(t,\tau) \begin{Bmatrix} q_{b,i}^{\theta} + q_{b,i}^s \\ q_{b,i}^{\theta} + q_{b,i}^s \end{Bmatrix} d\tau \quad (5.37)$$

Komponente vektora  $\delta_i$  i  $\delta_j$  dobijaju se iz komponenta vektora  $\delta_i^*$  i  $\delta_j^*$  inverznom transformacijom

$$\delta_i = t^{-1} \delta_i^* \quad , \quad \delta_j = t^{-1} \delta_j^* \quad (5.38)$$



### 5.3 Algebarske veze izmedju napona i deformacija betona

Ako se podje od algebarske veze izmedju, napona i deformacija (2.4) pri jednoosnom stanju napona

$$E_{b\varphi}(t, t_1) \varepsilon_b(t) = \sigma_b(t) + \varrho(t, t_1) \sigma_b(t_1) + E_{b\varphi}(t, t_1) [\varepsilon_b^\theta(t) + \varepsilon_s(t, t_1)]$$

pri čemu je za  $t=t_1$

$$\sigma_b(t_1) = E_b(t_1) [\varepsilon_b(t_1) - \varepsilon_b^\theta(t_1)]$$

onda je funkcional  $\pi_{\delta, b}^{*k}(t)$  za elementat  $k$

$$\begin{aligned} \pi_{\delta, b}^{*k}(t) = & \int_{V_{b,k}} \left[ \frac{1}{2} \varepsilon_b^2(t) E_{b\varphi}(t, t_1) - \varrho^k(t, t_1) E_b \varepsilon_b(t_1) + \right. \\ & + \varrho^k(t, t_1) \varepsilon_b(t) E_b \varepsilon_b^\theta(t_1) - \varepsilon_b(t) E_{b\varphi}(t, t_1) \varepsilon_b^\theta(t) - \\ & \left. - \varepsilon_b(t) E_{b\varphi}(t, t_1) \varepsilon_s(t, t_1) \right] dv - \int_0^1 \{ [q_1 + p_1(t)] u_1 + [q_2 + p_2(t)] u_2 + m(t) u_3 \} dx_1 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Pošto su funkcije oblika nezavisne od vremena  $t$ , to matrica  $n$  i vektor  $b$  ostaju isti kao i u predhodnom slučaju kada su korišćene integralne veze izmedju napona i deformacija betona. Stoga je

$$\pi_{\delta, b}^{*k} = \frac{1}{2} \delta^T s_{\varphi, b} \delta - \varrho^k \delta^T s_b \delta_1 + \varrho^k \delta^T q_{1, b}^\theta - \delta^T q_{\varphi, b}^\theta - \delta^T q_{\varphi, b}^s - \delta^T q^p \quad (5.40)$$

gde su

$$\begin{aligned} s_{\varphi, b} &= E_{b\varphi}(t) \int_{t_1}^t b^T b \, dv, \\ q_{1, b}^\theta &= E_b \int_{V_{b,k}} b^T \varepsilon_b^\theta(t_1) \, dv, \\ q_{\varphi, b}^\theta &= E_{b\varphi}(t) \int_{V_{b,k}} b^T \varepsilon_b^\theta(t) \, dv, \\ q_{\varphi, b}^s &= E_{b\varphi}(t) \int_{V_{b,k}} b^T \varepsilon_s(t) \, dv \end{aligned} \quad (5.41)$$

Prema tome, elementi matrice  $s_{\varphi, b}$  su formalno isti kao i elementi matrice  $s_b$  (5.18), s tim što se sada svi oni množe sa  $E_{b\varphi}(t)$ . Isto tako se i elementi vektora  $q_{\varphi, b}^\theta$  i  $q_{\varphi, b}^s$  razlikuju od ogovarajućih izraza (5.23) za  $q_b^\theta$  i  $q_b^s$  u tome što se elementi vektora množe sa  $E_{b\varphi}(t)$ . Vektori  $\delta_1$  i  $q_1^\theta$  jednaki su elementima vektora  $\delta$  i  $q^\theta$  za  $t=t_1$ , dok se elementi vektora  $q$  koji određuju uticaj spoljašnjeg opterećenja i zapreminskih sila dobijaju prema izrazima (5.15).

Pošto se čelik ponaša kao elastičan materijal to se  $\pi_{\delta, a}^{*k}(t)$  određuje prema drugom od izraza (5.37)

Ukupna vrednost funkcionala  $\Pi_{\delta}^{*k}(t)$  za ceo elemenat je sada

$$\Pi_{\delta}^{*k}(t) = \frac{1}{2} \delta^T s_{\varphi} \delta - \delta^k \delta^T (s_b \delta_1 - q_{1,b}^{\varphi}) - \delta^T (q_{\varphi}^{\varphi} + q_{\varphi,b}^s + q_{\varphi}^p) \quad (5.42)$$

gde - su

$$s_{\varphi} = s_{\varphi,b} + s_a \quad (5.43)$$

$$q_{\varphi}^{\varphi} = q_{\varphi,b}^{\varphi} + q_a^{\varphi}$$

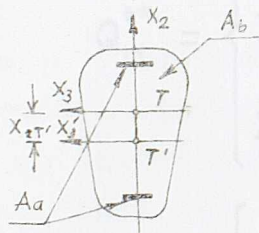
Dalje je potrebno uvesti, oznake za površinu  $A_{i\varphi}(t)$  njen statički moment  $S_{i\varphi}(t)$  i moment inercije  $I_{i\varphi}(t)$  idealizovanog poprečnog preseka

$$A_{i\varphi}(t) = A_b + \frac{E_a}{E_{b\varphi}(t, t_1)} A_a,$$

$$S_{i\varphi}(t) = S_b + \frac{E_a}{E_{b\varphi}(t, t_1)} S_a, \quad (5.44)$$

$$I_{i\varphi}(t) = I_b + \frac{E_a}{E_{b\varphi}(t, t_1)} I_a.$$

Radi pojednostavljivanja odredjivanja sila u presecima spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija, M. Djurić /5/ predlaže da se umesto ose štapa  $X_1$ , koja poprečne preseke seče u težištima površine  $A_{id}$  dobijene prema (5.21), uzme osa  $X_1'$  štapa koja prolazi kroz težište  $T'$  površine  $A_{i\varphi}(t)$  za koju je  $S_{i\varphi}(t) = 0$ .



Sk. 5.6

Znači da bi se položaj ose elementa  $X_1'$  tokom vremena menjao, pa bi na kraju dobijene veličine momenta savijanja  $M'(X_1')$  za osu  $X_1'$  trebalo redukovati u odnosu na tačku T i tako dobiti momente savijanja  $M(X_1)$  za stvarnu osu  $X_1$  elementa

$$M(X_1) = M'(X_1') + N X_{2T'} \quad (5.45)$$

Znatna ostupanja položaja T u odnosu na T dobijaju se za spregnute i nesimetrične armiranobetonske elemente sa velikim procentima armiranja, dok su za preseke sa malim procentima armiranja ova ostupanja neznatna, a za simetrične i simetrično armirane elemente u odnosu na osu  $X_3$  ove tačke se poklapaju.

Ako se ne koristi osa  $X_1(t)$  elementi matrice krutosti štapa  $S_{\varphi}$  i vektor  $q^{\varphi}$  su



$$S = E_{b\varphi}(t) \begin{bmatrix} \frac{A_{i\varphi}}{l} & 0 & -\frac{S_{i\varphi}}{l} & -\frac{A_{i\varphi}}{l} & 0 & \frac{S_{i\varphi}}{l} \\ 0 & \frac{12I_{i\varphi}}{l^3} & \frac{6I_{i\varphi}}{l^2} & 0 & -\frac{12I_{i\varphi}}{l^3} & \frac{6I_{i\varphi}}{l^2} \\ -\frac{S_{i\varphi}}{l} & \frac{6I_{i\varphi}}{l^2} & \frac{4I_{i\varphi}}{l} & \frac{S_{i\varphi}}{l} & -\frac{6I_{i\varphi}}{l^2} & \frac{2I_{i\varphi}}{l} \\ -\frac{A_{i\varphi}}{l} & 0 & \frac{S_{i\varphi}}{l} & \frac{A_{i\varphi}}{l} & 0 & -\frac{S_{i\varphi}}{l} \\ 0 & -\frac{12I_{i\varphi}}{l^3} & -\frac{6I_{i\varphi}}{l^2} & 0 & \frac{12I_{i\varphi}}{l^3} & -\frac{6I_{i\varphi}}{l^2} \\ \frac{S_{i\varphi}}{l} & \frac{6I_{i\varphi}}{l^2} & \frac{2I_{i\varphi}}{l} & -\frac{S_{i\varphi}}{l} & -\frac{6I_{i\varphi}}{l^2} & \frac{4I_{i\varphi}}{l} \end{bmatrix}, \quad q_{\varphi}^{\theta} = \alpha E_{b\varphi}(t) \begin{Bmatrix} -A_{i\varphi}\theta_T + \frac{\Delta\theta}{d}S_{i\varphi} \\ 0 \\ -S_{i\varphi}\theta_T - \frac{\Delta\theta}{d}I_{i\varphi} \\ A_{i\varphi}\theta_T - \frac{\Delta\theta}{d}S_{i\varphi} \\ 0 \\ -S_{i\varphi}\theta_T + \frac{\Delta\theta}{d}I_{i\varphi} \end{Bmatrix} \quad (5.46)$$

Matrice krutosti čitavog sistema, izvode se na isti način kao i u slučaju algebarskih veza između napona i deformacija tako da se dobija

$$S_{\varphi}^* \Delta^* = S_g^* \Delta_1^* - Q_{b,g}^{\theta*} + Q_{\varphi}^{\theta*} + Q_b^{s*} + Q^{p*} \quad (5.47)$$

gde su matrice  $S_{\varphi}^*$  i  $S_{g,b}^*$  sastavljene od submatrica

$$S_{\varphi,ij}^* = \sum_k S_{\varphi,ij}^{s*k} \quad S_g^* = \sum_k S_g^k S_{\varphi b,ij}^{s*k}; \quad i=1,2,\dots,M; \quad j=1,2,\dots,M; \quad (5.48)$$

i vektori

$$Q_{b,g}^{\theta*} = \begin{Bmatrix} \sum_k S_g^k q_{1b,1}^{\theta**k} \\ \sum_k S_g^k q_{1b,i}^{\theta**k} \\ \sum_k S_g^k q_{1b,M}^{\theta**k} \end{Bmatrix} \quad Q_{\varphi}^{\theta*} = \begin{Bmatrix} \sum_k q_{\varphi,1}^{\theta**k} \\ \sum_k q_{\varphi,i}^{\theta**k} \\ \sum_k q_{\varphi,M}^{\theta**k} \end{Bmatrix} \quad (5.49)$$

$$Q_b^{s*} = \begin{Bmatrix} \sum_k q_{b,1}^{s**k} \\ \sum_k q_b^{s**k} \\ \sum_k q_{b,M}^{s**k} \end{Bmatrix} \quad Q^{p*} = \begin{Bmatrix} \sum_k q^{p**k} \\ \sum_k q^{p**k} \\ \sum_k q^{p**k} \end{Bmatrix}$$

Pošto je P generalisanih pomeranja na mestima oslonaca unapred propisano, dok je preostalih N generalisanih pomeranja nepoznato, onda se na isti način kao i za zapreminske elemente dobija sistem linearnih algebarskih jednačina

$$S_{\varphi_{NN}}^* \Delta_N^* = Q_N^* + Q_N^{d*} \quad (5.50)$$

gde su

$$\begin{aligned} Q_N^* &= Q_{\varphi_N}^{\theta*} + Q_{P_N}^* - S_{\varphi_N P}^* \Delta_P^* \\ Q_N^{d*} &= S_{\varphi_N N}^* \Delta_{1,N}^* - Q_{\varphi_N}^{\theta*} + S_{\varphi_N P}^* \Delta_P^* + Q_{b,N}^{S*} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Ako su reološka svojstva betona u svim elementima ista onda je vrednost  $g^k(t)$  jednaka za sve elemente, pa su stoga

$$\begin{aligned} S_{\varphi_N N}^* &= g S_{b\varphi_N N}^*, & S_{b\varphi_N ij}^* &= \sum_K S_{b\varphi_N ij}^{*K}, \\ Q_{\varphi_N}^{\theta*} &= g Q_{1,N}^{\theta*}, & Q_{1,N}^{\theta*} &= Q_N^{\theta*}(t_1). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Da bi se dobio vektor generalisanih pomeranja u nekom vremenu  $t$ , treba prvo rešiti zadatak za  $t=t_1$ . Tada je

$$g^k(t_1, t_1) = 0, \quad \varepsilon_s(t_1, t_1) = 0, \quad \varepsilon_{b\varphi}(t_1, t_1) = \varepsilon_b, \quad Q_N^{d*} = 0,$$

tako da se vektor generalisanih pomeranja  $\Delta_1$  određuje kao za konstrukcijski sistem od elastičnog materijala. Za neko kasnije posmatrano vreme  $t$  određuju se u zavisnosti od usvojenog reološkog modela betona  $\varepsilon_{b\varphi}^k(t, t_1)$  i  $g^k(t, t_1)$  ( $k=1, 2, \dots, n_k$ ) i nove geometrijske karakteristike preseka  $A_{i\varphi}(t)$ ,  $I_{i\varphi}(t)$  i  $S_{i\varphi}(t)$  i korigovane vrednosti matrice krutosti  $S_{\varphi_N N}^*$ , a potom vektori  $Q_N^*(t)$  i  $Q_N^{d*}(t)$  i tako dobija nov sistem algebarskih jednačina (50) čijim se rešavanjem dobija vektor generalisanih pomeranja  $\Delta_N^*(t)$ .

Može se odmah uočiti, kao i u slučaju zapreminskih elemenata, da se problem formalno rešava na isti način kao za elastične sisteme, ako se vektor opterećenja  $Q_N^{d*}(t)$  shvati kao vektor nekog dodatnog opterećenja koji se dobija prema izrazu (5.51), pošto se prethodno izvrši korekcija modula elastičnosti betona i nadju korigovane geometrijske karakteristike preseka.

Zbog svega ovoga je moguće koristiti i gotove programe za elektronske računare (na primer STRESS) radjene za određivanje pomeranja čvorova i sila u presecima konstrukcijskih sistema od elastičnog materijala.

Kada je poznat vektor generalisanih pomeranja  $\Delta^*(t)$  sile u presecima na krajevima elemenata određuju se na sličan način kao i za integralne veze izmedju napona i deformacija betona (5.37), pošto se prethodno izvrši inverzna transformacija (5.38) vektora pomeranja čvorova  $\delta_i^*$



$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{\varphi,ii} & s_{\varphi,ij} \\ s_{\varphi,ji} & s_{\varphi,jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} - s^{\kappa} \begin{bmatrix} s_{b\varphi,ii} & s_{b\varphi,ij} \\ s_{b\varphi,ji} & s_{b\varphi,jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{\varphi,i} \\ \delta_{\varphi,j} \end{Bmatrix} + s^{\kappa} \begin{Bmatrix} q_{\varphi,i}^{\theta} \\ q_{\varphi,j}^{\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q_{\varphi,i}^{\theta} \\ q_{\varphi,j}^{\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q_{b,i}^s \\ q_{b,j}^s \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

#### 5.4 Nelinearna geometrijska teorija (teorija II reda)

U prethodnim odeljcima prikazan je postupak odredjivanja matrice krutosti konstrukcijskog sistema i njegovih elemenata u oblasti geometrijski linearne teorije, u kojoj se tenzor deformacije  $\gamma_{ij}(t)$  prikazuje u funkciji komponenata pomeranja  $u_i(t)$  izrazom (5.7). Međutim, pri rešavanju velikog broja značajnih problema teorije konstrukcija neophodno je poći od potpunije nelinearne veze ovih geometrijskih veličina

$$\gamma_{ij}(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(t)}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k(t)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k(t)}{\partial x_j} \right]^* \quad (5.54)$$

na kojoj bazira teorija velikih deformacija. Za konstrukcijske sisteme sastavljene od linijskih elemenata koji se, kao i opterećenje koje na njih deluje nalaze u jednoj ravni (o X Y), sa komponentama pomeranja  $u_1$  i  $u_2$  je od značaja deformacija u pravcu ose napona

$$\gamma_{11}(t) = \varepsilon(t) = \varepsilon^l(t) + \varepsilon^n(t) \quad (5.55)$$

gde su  $\varepsilon^l(t)$  i  $\varepsilon^n(t)$  linearni i nelinearni deo tenzora deformacije

$$\varepsilon^l(t) = \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_1} \quad (5.56)$$

$$\varepsilon^n(t) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2(t)}{\partial x_2} \right)^2 \right] \quad (5.57)$$

Za betonski deo elementa  $k$ , uzimajući u obzir integralnu vezu između napona i deformacija betona je, prema (5.12) funkcional

$$\begin{aligned} \Pi_{\delta,b}^{*k}(t) = & \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_b(t) \varepsilon_b^{l,2}(t) - \varepsilon_b^l(t) [\varepsilon_b^{\theta}(t) + \varepsilon_b^s(t)] - \varepsilon_b^l(t) E_b(t) \int_{t_1}^t R^k(t,\tau) [\varepsilon_b^l(\tau) - \varepsilon_b^{\theta}(\tau) - \varepsilon_b^s(\tau)] d\tau + \right. \\ & - \varepsilon_b^n(t) E_b(t) \int_{t_1}^t R^k(t,\tau) [\varepsilon_b^l(\tau) - \varepsilon_b^{\theta}(\tau) - \varepsilon_b^s(\tau)] d\tau + \varepsilon_b^n(t) E_b(t) [\varepsilon_b(t) - \varepsilon_b^{\theta}(t) - \varepsilon_b^s(t)] \\ & - \varepsilon_b^l(t) E_b(t) \int_{t_1}^t R^k(t,\tau) \varepsilon_b^n(\tau) d\tau - \left. \frac{1}{2} \varepsilon_b^n(t) E_b(t) \varepsilon_b^n(t) \right\} dA dx_1 - \\ & - \int_0^t \{ [q_{\delta_1,b} + p_1(t)] u_1(t) + [q_{\delta_2,b} + p_2(t)] u_2(t) + m(t) u_3(t) \} dx_1. \end{aligned}$$

\* Ponovljeni indeks  $k$  označava sumiranje po  $k$

Za armaturu elementa je

$$\begin{aligned} \pi_{\gamma, a}^{*k}(t) = & \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_a^l(t) E_a \varepsilon_a^l(t) - \varepsilon_a^l(t) E_a \varepsilon_a^\theta(t) + \varepsilon_a^n(t) E_a [\varepsilon_a(t) - \varepsilon_a^\theta(t)] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \varepsilon_a^n(t) E_a \varepsilon_a^n(t) \right\} dA dx_1 - \int_0^l [g_{1,a} u_1(t) + g_{2,a} u_2(t)] dx_1. \end{aligned}$$

Ukupna vrednost funkcionala  $\pi_{\gamma}^{*k}(t)$ , kada se zanemari uticaj članova,

$$\int_0^l \left\{ \int_{A_{b,k}} [\varepsilon_b^l(t) E_b(t) \int_{t_1}^t R(t, \tau) \varepsilon_b^n(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \varepsilon_b^n(t) E_b(t) \varepsilon_b^n(t)] dA + \frac{1}{2} \int_{A_{a,k}} \varepsilon_a^n(t) E_a \varepsilon_a^n(t) dA \right\} dx_1$$

je linearni dio deformacije je prema (5.57)

$$\pi_{\gamma}^{*k}(t) = \pi_{\gamma}^{*l,k}(t) + \pi_{\gamma}^{*n,k}(t) \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \pi_{\gamma}^{*l,k}(t) = & \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_b^l(t) E_b(t) [\varepsilon_b^l(t) - 2\varepsilon_b^\theta(t) - 2\varepsilon_b^s(t)] - \right. \\ & \left. - \varepsilon_b^l(t) E_b(t) \int_{t_1}^t R^k(t, \tau) [\varepsilon_b^l(\tau) - \varepsilon_b^\theta(\tau) - \varepsilon_b^s(\tau)] d\tau \right\} dA dx_1 + \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} & + \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_a^l(t) E_a \varepsilon_a^l(t) dA - [g_1 + p_1(t)] u_1(t) + \right. \\ & \left. + [g_2 + p_2(t)] u_2(t) + m(t) u_3(t) \right\} dA dx_1 \\ \pi_{\gamma}^{*n,k}(t) = & \int_0^l \left\{ \varepsilon_b^n(t) E_b(t) [\varepsilon_b(t) - \varepsilon_b^\theta(t) - \varepsilon_b^s(t)] - \right. \\ & \left. - \varepsilon_b^n(t) \int_{t_1}^t R^k(t, \tau) E_b(\tau) [\varepsilon_b(\tau) - \varepsilon_b^\theta(\tau) - \varepsilon_b^s(\tau)] d\tau \right\} dA dx_1 + \end{aligned} \quad (5.60)$$

član  $\pi_{\gamma}^{*l,k}(t)$  izražava uticaj linearnog dela dok član  $\pi_{\gamma}^{*n,k}(t)$  prikazuje uticaj nelinearnog dela tenzora deformacije i može se, s obzirom na (3.47) izraziti u funkciji momenta savijanja  $M(t)$  i normalne sile  $N(t)$

$$\pi_{\gamma}^{*n,k}(t) \approx \int_0^l \varepsilon^n(t) \left[ \frac{N(t)}{A_{id}} + \frac{M(t)}{I_{id}} x_2 \right] dA dx_1. \quad (5.61)$$

Za interpolacione funkcije, prikazane matricom (5.6) i vezu izmedju



$\xi^l$  i vektora pomeranja  $\delta$  (5.8), izraz za funkcional  $\pi_y^{*n,k}(t)$  pojedinih elemenata i čitavog sistema je isti kao i u linearnoj teoriji ili teoriji prvog reda.

Parcijalni izvodi  $\frac{\partial u_1(t)}{\partial x_2}$  i  $\frac{\partial u_2(t)}{\partial x_1}$  su s obzirom na (5.5) i (5.6)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = c_1 \delta \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = c_2 \delta \quad (5.62)$$

gde su  $c_1$  i  $c_2$

$$c_1 = \left\{ -\frac{1}{l}, \frac{6}{l^2}(1-2\xi)x_2, -\frac{1}{l}(4-6\xi)x_2, \frac{1}{l}, -\frac{6}{l^2}(1-2\xi), \frac{1}{l}(2-6\xi)x_2 \right\} \quad (5.63)$$

$$c_2 = \left\{ 0, -\frac{6}{l}(\xi-\xi^2), 1-4\xi+3\xi^2, 0, \frac{6}{l}(\xi-\xi^2), 3\xi^2-2\xi \right\}$$

Nelinearni deo deformacije je prema (5.57)

$$\varepsilon^n(t) = \frac{1}{2} \delta c_1^T c_1 \delta + \frac{1}{2} \delta c_2^T c_2 \delta \quad (5.64)$$

pa je stoga

$$\pi_y^{*n,k}(t) = \frac{1}{2} \delta^T s_{N_1} \delta + \frac{1}{2} \delta^T s_{N_2} \delta \quad (5.65)$$

gde su, kada je normalna sila ista u svim poprečnim presecima elementa, matrice kao i u teoriji elastičnosti /11/

$$s_{N_1} = N(t) \int_0^l \int_{A_{id}} c_1^T c_1 dA dx_1, \quad (5.66)$$

$$s_{N_2} = N(t) \int_0^l \int_{A_{id}} c_2^T c_2 dA dx_1;$$

odnosno prema (5.63)

$$s_{N_1} = \frac{N(t)}{A_{id} l^3} \begin{bmatrix} \frac{l^2 A_{id}}{I_{id}} & 0 & 0 & \frac{l^2 A_{id}}{I_{id}} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ \frac{l^2 A_{id}}{I_{id}} & 0 & 0 & \frac{l^2 A_{id}}{I_{id}} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

$$S_{N2} = \frac{N(t)}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -3l & 0 & -36 & -3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 3l & 0 & 36 & 3l \\ 0 & -3l & -l^2 & 0 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Matrica  $S_{N1}$  se najčešće zanemaruje, kao i uticaj momenta savijanja  $M(t)$  na vrednost funkcionala  $\pi_y^{n,k}(t)$ , pošto je prema (5.63)

$$\delta^T c_1^T c_1 \delta \frac{M(t)}{I_{id}} S_{id} = 0 \quad (5.69)$$

Vrednost funkcionala  $\pi_y^{**k}(t)$  u geometrijski nelinearnoj teoriji je

$$\pi_y^{**k}(t) = \frac{1}{2} \delta^T s \delta + \frac{1}{2} \delta^T s_N \delta - \delta^T s_b^R \delta - \delta^T (q_b^s - R^k q_b^s) - \delta^T (q_b^p - R^k q_b^p) - \delta^T q \quad (5.70)$$

gde je

$$s_N = s_{N1} + s_{N2}$$

Ovaj izraz se razlikuje od odgovarajućeg izraza (5.20) geometrijski linearne teorije po tome što sadrži član  $\frac{1}{2} \delta^T s \delta$ .

Za ceo konstrukcijski sistem je stoga, funkcional

$$\pi_y^*(t) = \Delta^T \left[ \frac{1}{2} (s^* + s_N^*) \Delta^* - s_b^* R \Delta^* - Q_b^{s*} + R Q_b^{s*} - Q_b^{p*} + R Q_b^{p*} - Q^* \right] \quad (5.71)$$

tako da je sistem integralnih jednačina (5.34) sada

$$(s_{NN}^* + s_{N,NN}^*) \Delta_N^* - s_{b,NN}^* R \Delta_N^* = \bar{Q}_N^* \quad (5.72)$$

gde je  $\bar{Q}_N^*$  dato izrazom

$$\bar{Q}_N^* = Q_N^{p*} + Q_N^{s*} - R Q_N^{p*} + Q_N^{s*} - R Q_N^{s*} - (s_{NP}^* + s_{N,NP}^*) \Delta_P^*$$

Za algebarske veze izmedju napona i deformacija (2.4), dobija se postupajući na sličan način kao i za integralne veze, isti izraz

(5.65) za  $\pi_y^{**k}(t)$ , pa je stoga sistem algebarskih jednačina, čijim se rešavanjem dobijaju pomeranja

$$(s_{\varphi,NN}^* + s_{N,NN}^*) \Delta_N^* = Q_N^* + Q_N^{d*} - s_{N,NP}^* \Delta_P^* \quad (5.73)$$

gde su  $Q_N^*$  i  $Q_N^{d*}$  dati izrazima (5.51)



Upoređivanjem sistema jednačina (5.34) i (5.72) odnosno (5.50) i (5.73) može se zaključiti da se u geometrijski nelinearnoj teoriji (teoriji II reda) matrice krutosti elementa  $S$  i  $S_{\varphi}$  i sistema  $S_{NN}^*$  i  $S_{\varphi,NN}^*$  proširuju matricama  $S_N$  i  $S_{N,NN}^*$ .

Pošto normalne sile u poprečnim preseccima elemenata nisu unapred poznate, to se mora primeniti u određivanju matrice  $S_N$  iterativni postupak. Prvo se prema linearnoj teoriji (teoriji prvog reda) odrede normalne sile u karakterističnim poprečnim preseccima elemenata i prema njima i geometrijskim karakteristikama elementa odrede matrice  $S_N$  i rešenja u okviru geometrijski nelinearne teorije. Ako se normalna sila u poprečnim preseccima menja, onda pri određivanju matrice  $S_N$ , da bi se izbeglo formiranje komplikovanih izraza za njene elemente, treba koristiti srednje vrednosti normalnih sila na krajevima elementa.

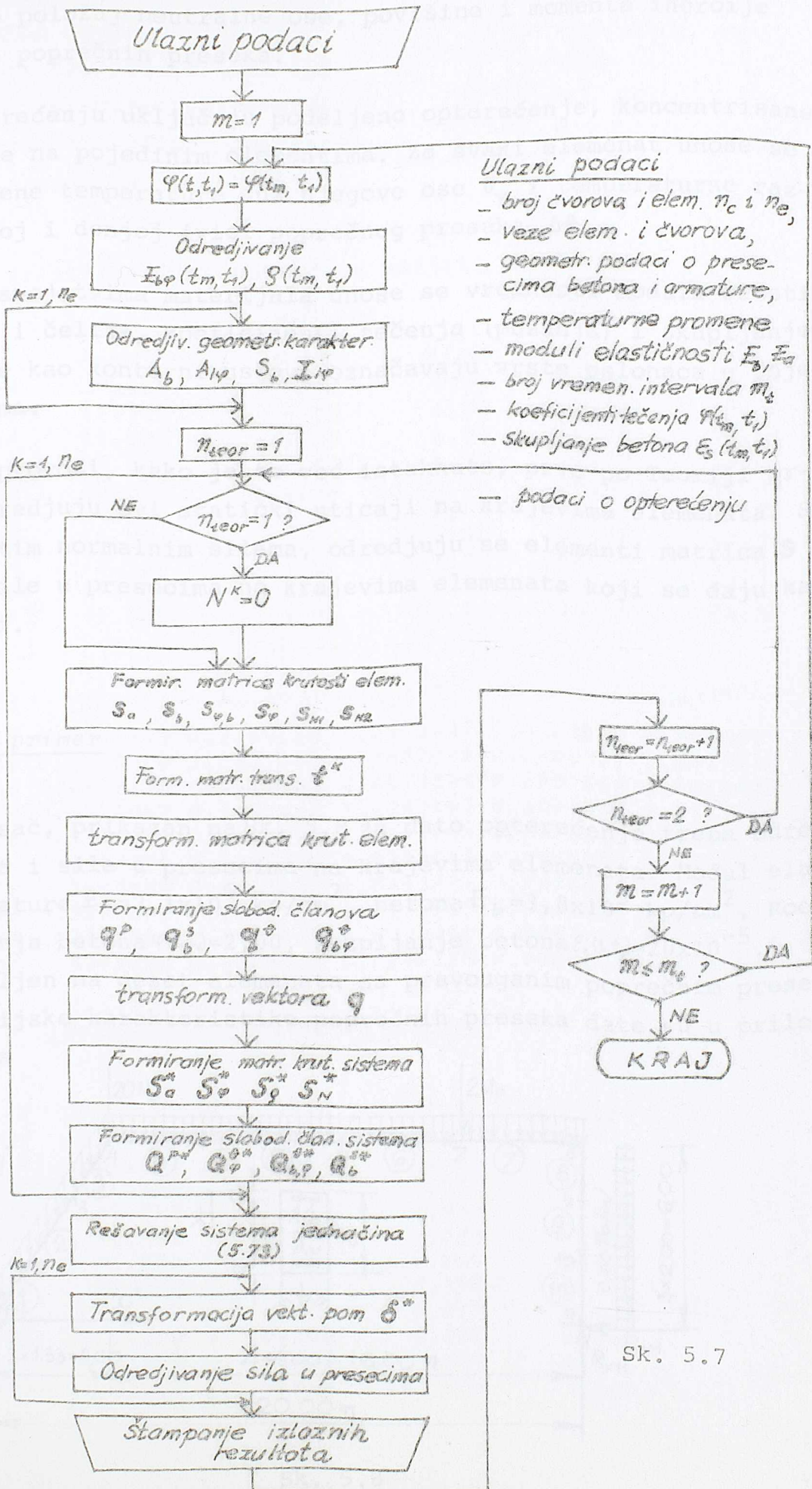
$$N(t) = \frac{N_i(t) + N_j(t)}{2} \quad (5.74)$$

Dužina elemenata  $l$  može se sada birati tako da ove razlike u normalnim silama na krajevima ne budu velike.

### 5.5 Program za elektronski računar

Ako se žele uzeti u obzir svi faktori koji utiču na stanje napona i deformacija jednog konstrukcijskog sistema, naročito u ovakvim slučajevima kada je broj nepoznatih pomeranja veliki, neophodna je upotreba elektronskog računara. Na Sk. 5.7 dat je dijagram toka računskih operacija prema kojem je napisan program za elektronski računar u FORTRAN-u za određivanje statičkih uticaja i pomeranja po teoriji prvog reda i linearizovanoj teoriji drugog reda uzimajući u obzir uticaje tečenja i skupljanja betona. Na ulazu se daju podaci o broju elemenata  $n_e$ , broju čvorova  $n_c$  i njihovim međusobnim vezama, geometrijski podaci, podaci o opterećenju, temperaturi, svojstvima materijala i konturni uslovi.

U geometrijske podatke spadaju koordinate čvorova u globalnom koordinatnom sistemu i dimenzije poprečnih preseka. Program je sastavljen tako da se mogu unositi dimenzije za pravougani, sađučasti, obični T, i dvostruki T presek. Pored toga unose se i podaci o površini armature u poprečnim preseccima koje se na početku moraju proceniti na



- Ulazni podaci
- broj čvorova i elem.  $n_c$  i  $n_e$ ,
  - veze elem. i čvorova,
  - geometr. podaci o prese-cima betona i armature,
  - temperaturne promene
  - moduli elastičnosti  $E_b, E_a$
  - broj vremen. intervala  $M_0$
  - koeficijenti tečenja  $\varphi(t_m, t_1)$
  - Skupljanje betona  $\epsilon_s(t_m, t_1)$

— podaci o opterećenju

Sk. 5.7



bazi uobičajenih procenata armiranja. Na osnovu ovih podataka računar određuje položaj neutralne ose, površine i momente inercije idealizovanih poprečnih preseka.

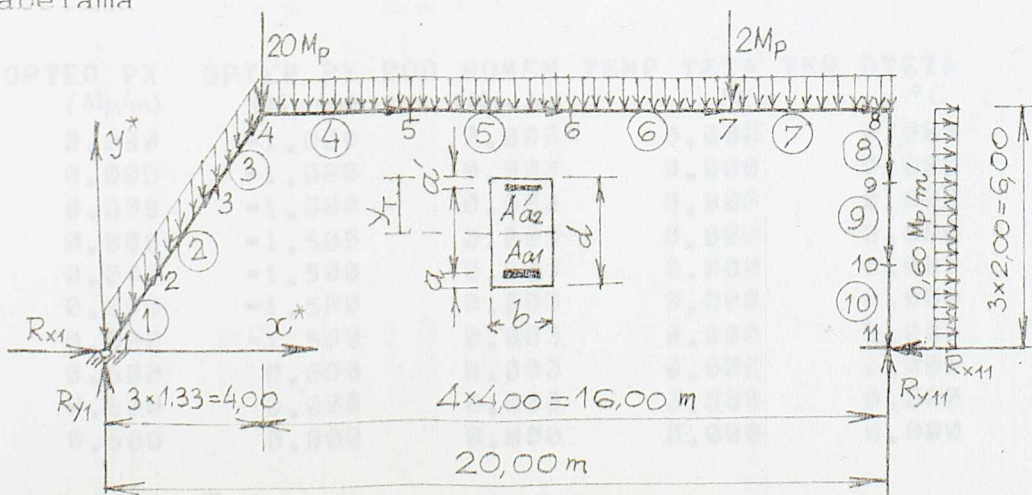
Podaci o opterećenju uključuju podeljeno opterećenje, koncentrisane sile i momente na pojedinim elementima. Za svaki elemenat unose se veličine promene temperature duž njegove ose  $\theta_T$  i temperaturne razlike na gornjoj i donjoj ivici poprečnog preseka  $\Delta\theta$ .

U podacima o svojstvima materijala unose se vrednosti modula elastičnosti betona i čelika, koeficijenti tečenja (puzanja) i skupljanje betona, dok se kao konturni uslovi označavaju vrste oslonaca u pojedinim čvorovima.

Proračun se sprovodi, kako je to već istaknuto, prvo po Teoriji prvog reda i određuju svi statički uticaji na krajevima elemenata. Sa ovako sračunatim normalnim silama, određuju se elementi matrica  $\mathbf{S}$ , pomeranja i sile u presecima na krajevima elemenata koji se daju kao izlazni podaci.

### 5.6 Brojčani primer

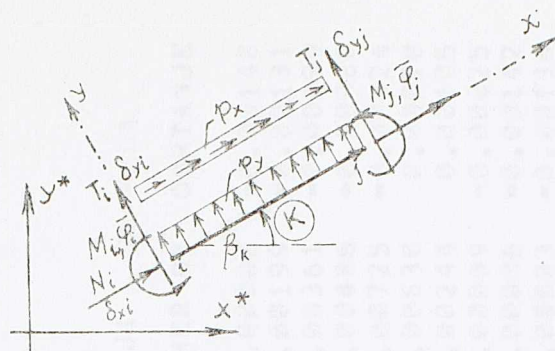
Za okvirni nosač, prikazan na Sk. 5.8 za dato opterećenje treba odrediti pomeranja i sile u presecima na krajevima elemenata. Modul elastičnosti armature  $E_a = 2,1 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2$ , betona  $E_b = 3,8 \times 10^5 \text{ kp/cm}^2$ . Koeficijent tečenja betona  $\varphi(t, t_0) = 2,00$ , skupljanje betona  $\epsilon_s(t, t_0) = 20 \times 10^{-5}$ . Nosač je podeljen na deset elemenata sa pravouganim poprečnim presecima. Geometrijske karakteristike poprečnih preseka date su u priloženim tabelama



Sk. 5.8



Koristeći program, koji je autor napisao za elektronski računar, određene su sile u presecima na krajevima elemenata i pomeranja čvorova. Na sk. 5.9 prikazani su usvojeni pozitivni smerovi spoljašnjih unutrašnjih sila i pomeranja. Uticaj tečenja je uzet sa algebarskom vezom M. Djurića



Sk. 5.9

### GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE POPRECNIH PRESEKA ARNATURA

BETON

ELEM	$A_{a1}(\text{cm}^2)$	$A_{a2}(\text{cm}^2)$	$a'(\text{cm})$	$a(\text{cm})$	$d(\text{cm})$	$b(\text{cm})$
1	2.260	7.600	3.00	4.00	60.00	40.00
2	2.260	11.400	3.00	4.00	60.00	40.00
3	2.260	19.000	3.00	4.00	60.00	40.00
4	7.600	19.000	4.00	6.50	90.00	40.00
5	7.600	34.200	4.00	6.50	90.00	40.00
6	7.600	34.200	4.00	6.50	90.00	40.00
7	41.800	15.200	6.50	4.00	90.00	40.00
8	41.800	15.200	6.50	4.00	80.00	40.00
9	15.200	15.200	4.00	6.50	80.00	40.00
10	15.200	41.800	4.00	6.50	80.00	40.00

ELEM	$A_a(\text{cm}^2)$	$A_b(\text{m}^2)$	$A_{id}(\text{m}^2)$	$I_b(\text{m}^4)$	$I_a(\text{m}^4)$	$I_{id}(\text{m}^4)$
1	0.0009860	0.2400000	0.2459160	0.0072027	0.0000670	0.0076044
2	0.0013660	0.2400000	0.2481960	0.0072078	0.0000909	0.0077532
3	0.0021250	0.2400000	0.2507560	0.0072254	0.0001362	0.0080428
4	0.0026600	0.3600000	0.3759600	0.0243162	0.0004039	0.0267394
5	0.0041800	0.3600000	0.3850800	0.0243883	0.0006042	0.0288137
6	0.0041800	0.3600000	0.3850800	0.0243883	0.0006042	0.0288137
7	0.0057000	0.3600000	0.3942000	0.0243811	0.0008468	0.0294618
8	0.0057000	0.3200000	0.3542000	0.0171335	0.0006426	0.0209893
9	0.0033400	0.3200000	0.3382400	0.0170668	0.0003675	0.0192720
10	0.0057000	0.3200000	0.3542000	0.0171335	0.0006426	0.0209893

### OPTERECENJE I TEMPERATURNE PROMENE ELEMENATA

ELEM	OPTER PX (Mp/m)	OPTER PY (Mp/m)	POD MOMEN (Mpm/m)	TEMP TETA °C	TEM DTETA °C
1	0.000	-1.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	-1.000	0.000	0.000	0.000
3	0.000	-1.000	0.000	0.000	0.000
4	0.000	-1.500	0.000	0.000	0.000
5	0.000	-1.500	0.000	0.000	0.000
6	0.000	-1.500	0.000	0.000	0.000
7	0.000	-1.500	0.000	0.000	0.000
8	0.600	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.600	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.600	0.000	0.000	0.000	0.000







$$t=t_1, \varphi(t, t_1) = 0, \varepsilon_s(t, t_1) = 0$$

## SILE U PRESECIMA NA KRAJEVIMA ELEMENATA PO TEORIJI 1 REDA

ELEM	SILA NI (Mp)	SILA NJ (Mp)	SILA TI (Mp)	SILA TJ (Mp)	MOMENT MI (Mpm)	MOMENT MJ (Mpm)
1	41.496	-39.496	2.033	-0.700	-0.000	3.285
2	39.495	-37.495	0.714	0.620	-3.285	3.398
3	37.495	-35.495	-0.633	1.966	-3.398	0.274
4	21.322	-21.322	8.446	-2.446	-0.274	22.056
5	21.322	-21.322	2.446	3.554	-22.056	19.838
6	21.322	-21.322	-3.554	9.554	-19.838	-6.380
7	21.322	-21.322	-11.554	17.554	6.380	-64.597
8	17.554	-17.554	21.322	-22.522	64.597	-20.754
9	17.554	-17.554	22.522	-23.722	20.754	25.489
10	17.554	-17.554	23.722	-24.922	-25.489	74.133

## REAKCIJE OSLOMACA

CVOR 1	RX =	21.322	RY =	35.657	MOMENT =	-0.000
CVOR 11	RX =	-24.922	RY =	17.554	MOMENT =	74.133

## SILE U PRESECIMA NA KRAJEVIMA ELEMENATA PO TEORIJI 2 REDA

ELEM	SILA NI (Mp)	SILA NJ (Mp)	SILA TI (Mp)	SILA TJ (Mp)	MOMENT MI (Mpm)	MOMENT MJ (Mpm)
1	41.518	-39.518	1.991	-0.658	0.000	3.322
2	39.518	-37.518	0.672	0.662	-3.322	3.441
3	37.517	-35.517	-0.675	2.008	-3.441	0.293
4	21.369	-21.369	8.441	-2.441	-0.293	22.107
5	21.369	-21.369	2.441	3.559	-22.107	19.850
6	21.369	-21.369	-3.559	9.559	-19.850	-6.469
7	21.369	-21.369	-11.550	17.559	6.469	-64.756
8	17.559	-17.559	21.369	-22.569	64.756	-20.785
9	17.559	-17.559	22.569	-23.769	20.785	25.606
10	17.559	-17.559	23.769	-24.969	-25.606	74.372

## REAKCIJE OSLOMACA

CVOR 1	RX =	21.369	RY =	35.652	MOMENT =	0.000
CVOR 11	RX =	-24.969	RY =	17.559	MOMENT =	74.372



$$t \rightarrow \infty, \varphi(t, t_1) = 2,00, \varepsilon_s(t, t_1) = 0,003$$

## SILE U PRESECIMA NA KRAJEVIMA ELEMENATA PO TEORIJI 1 REDA

ELEM	SILA NI (Mp)	SILA NJ (Mp)	SILA TI (Mp)	SILA TJ (Mp)	MOMENT MI (Mpm)	MOMENT MJ (Mpm)
1	41.683	-39.683	1.831	-0.498	-0.000	2.798
2	39.683	-37.683	0.511	0.823	-2.798	2.424
3	37.683	-35.683	-0.836	2.169	-2.424	-1.186
4	21.594	-21.594	8.490	-2.490	1.186	20.772
5	21.594	-21.594	2.490	3.510	-20.772	18.731
6	21.595	-21.595	-3.510	9.510	-18.731	-7.311
7	21.594	-21.594	-11.510	17.510	7.311	-65.353
8	17.510	-17.510	21.594	-22.794	65.353	-20.964
9	17.510	-17.510	22.794	-23.994	20.964	25.825
10	17.510	-17.510	23.994	-25.194	-25.825	75.014

## REAKCIJE OSLOMACA

CVOR 1	RX =	21.594	RY =	35.701	MOMENT =	-0.000
CVOR 11	RX =	-25.194	RY =	17.510	MOMENT =	75.014

## REFERENCE

## SILE U PRESECIMA NA KRAJEVIMA ELEMENATA PO TEORIJI 2 REDA

ELEM	SILA NI (Mp)	SILA NJ (Mp)	SILA TI (Mp)	SILA TJ (Mp)	MOMENT MI (Mpm)	MOMENT MJ (Mpm)
1	41.721	-39.721	1.762	-0.429	-0.000	2.856
2	39.721	-37.721	0.443	0.891	-2.856	2.488
3	37.721	-35.721	-0.904	2.237	-2.488	-1.161
4	21.673	-21.673	8.483	-2.483	1.161	20.858
5	21.673	-21.673	2.483	3.517	-20.858	18.754
6	21.673	-21.673	-3.517	9.517	-18.754	-7.459
7	21.673	-21.673	-11.517	17.517	7.459	-65.617
8	17.517	-17.517	21.673	-22.873	65.617	-21.015
9	17.517	-17.517	22.873	-24.073	21.015	26.017
10	17.517	-17.517	24.073	-25.273	-26.017	75.410

## REAKCIJE OSLOMACA

CVOR 1	RX =	21.673	RY =	35.694	MOMENT =	-0.000
CVOR 11	RX =	-25.273	RY =	17.517	MOMENT =	75.410

Na osnovu dobijenih rezultata može se zaključiti da su razlike u veličinama sila u preseccima za stalno opterećenje sračunate sa i bez uticaja tečenja male i nastaju zbog različitih reoloških svojstava armature i betona. Stoga za takva opterećenja ili pravdanja odredjivanje ovih veličina po Teoriji elastičnosti. Medjutim ove razlike su znatno veće ako se uzmu drugi spoljni uticaji (pomeranje oslonaca, temperaturne promene i dr.) i tokom vremena se povećavaju, pa ima opravdanja izvršiti tačniju analizu uzimajući u obzir tečenje betona. Razlike u veličinama sila u preseccima i pomeranjima sračunatim po Teoriji I i II reda su zbog krutosti elemenata ovog sistema male. Prikazani postupak na bazi primene metode konačnih elemenata, koji prestavlja i tzv. tačnu metodu deformacija podesan je za programiranje i realizaciju na elaktronskom računaru i ima značajnu prednost što se njegovom primenom dobijaju direktno sve tražene veličine - pomeranja izabranih tačaka (čvorova) sistema i unutrašnje sile u poprečnim preseccima. Ako se umesto pravolinijskih upotrebe krivolinijski izoparametarski elementi može se uspešno primeniti za analizu po teoriji I i II reda sistema sastavljenih od krivih štapova uzimajući u obzir uticaje tečenja i skupljanja betona.

#### REFERENCE

- /1/ B r e b i a, C.A., and F e r r a n t e, A.J., Computational Methods for the Solution of Engineering Problems. Prentech Press, London 1978.
- /2/ G h a l i, A., N e v i l e, A.M., Structural Analysis. Chapman and Hall, London, 1978.
- /3/ D j u r i ć, M., Ispitivanje stabilnosti i proračun okvira po teoriji II reda metodom deformacija DGA 1012, 1969.
- /4/ D j u r i ć, M., Metoda deformacije. Zbornik Gradjevinskog fakulteta, sv. 5, Beograd, 1962. str. 131-163.
- /5/ D j u r i ć, M., Teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija. Posebna izdanja SANU, Naučno delo, Beograd 1963.
- /6/ I v k o v i ć, M., P e r i š i ć, Ž., Uticaj tečenja i skupljanja u preseccima proizvoljnog oblika armiranobetonskih nosača sa prslinama. XV Kongres SJL, 1975.
- /7/ L i v e s l e y, R., Matrix Methods of structural Analysis. Pergamon Press, Oxword 1975.



- /8/ M a r t i n, H., Introduction to Matrix Methods of Structural Analys. Mc Grow-Hill 1966.
- /9/ P e r i š i ć, Ž., Prilog odredjivanju uticaja tečenja i skupljanja u preseccima armiranobetonskih nosača sa prslinama. Doktorska disertacija. Gradjevinski fakultet, Beograd 1979.
- /10/ P r a š č e v i ć, Ž., Prilog proračunu statički neodredjenih armiranobetonskih sistema, XII Jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, 1974., Izgradnja 10, 1974.
- /11/ S e k u l o v i ć, M., Matrica krutosti za prav štap koji je opterećen aksijalnim i transverzalnim opterećenjem. XIV Jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, Sv. C-19, str. 145-154.

### 2.1 Uvodna napomena

Višeci prethodno napregnuti sistemi se često koriste za pokrivanje prostora velikih raspona, kao što su sportske dvorane i ložbani paviljoni i drugi objekti. Ove konstrukcije se projektuju najčešće kao sistemi u ravni (obično i dvopojasne lančanice) ili kao prostrani sistemi sastavljeni od mreža čeličnih kablova. Da bi se smanjila deformabilnost lančanica, preko čeličnih kablova se postavljaju armiranobetonski elementi, zatim se prethodno napreže ceo sistem i tako aktiviraju ovi elementi sa prijam sledećih faza opterećenja u toku gradjenja i eksploatacije.

Pošto su ovakvi sistemi vrlo gipki, naročito u prvim fazama montaže, pomeranja i sile u karakterističnim popročnim preseccima određuju se po teoriji velikih ili konačnih deformacija u kojoj se kvadrati i viši stepeni pomeranja i njihovih izvoda ne zanemaruju [3].

U zavisnosti od tehnološkog postupka gradjenja ovih sistema i spoljašnjih sila koje na njih deluju u toku montaže i eksploatacije, faze opterećenja i proračuna se dele na dve vrste. U prvim fazama koja se odnose na

- montažu kablova,
- postavljanje armiranobetonskih elemenata,
- montažu ispuna,

celokupno opterećenje primaju čelični kablovi koji se ponašaju kao elastičan materijal, pa se analiza sprovodi u okviru teorije elastičnosti i ovde neće biti detaljnije razmatrana. U sledećim

## 6. ANALIZA STANJA NAPONA I DEFORMACIJA PRETHODNO NAPREGNUTIH VISEĆIH SISTEMA SA UTICAJEM TEČENJA I SKUPLJANJA BETONA

### 6.1 Uvodne napomene

Viseći prethodno napregnuti sistemi se često koriste za pokrivanje prostorija velikih raspona, kao što su sportske dvorane izložbeni paviljoni i drugi objekti. Ove konstrukcije se projektuju najčešće kao sistemi u ravni (obične i dvopojasne lančanice) ili kao prostrani sistemi sastavljeni od mreža čeličnih kablova. Da bi se smanjila deformabilnost lančanica, preko čeličnih kablova se postavljaju armiranobetonski elementi, zatim se prethodno napreže ceo sistem i tako aktiviraju ovi elementi za prijem sledećih faza opterećenja u toku gradjenja i eksploatacije.

Pošto su ovakvi sistemi vrlo gipki, naročito u prvim fazama montaže, pomeranja i sile u karakterističnim poprečnim presecima određuju se po teoriji velikih ili konačnih deformacija u kojoj se kvadrati i viši stepeni pomeranja i njihovih izvoda ne zanemaruju /3/.

U zavisnosti od tehnološkog postupka gradjenja ovih sistema i spoljašnjih sila koje na njih deluju u toku montaže i eksploatacije, faze opterećenja i proračuna se dele na dve vrste. U prvim fazama koje se odnose na

- montažu kablova,
- postavljanje armiranobetonskih elemenata,
- montažu ispune,

celokupno opterećenje primaju čelični kablovi koji se ponašaju kao elastičan materijal, pa se analiza sprovodi u okviru teorije elastičnosti i ovde neće biti detaljnije razmatrana. U sledećim



fazama u kojima se obavlja

- prethodno naprezanje,
- postavljanje krovnog pokrivača, termo i hidro-izolacije i drugog aktivira se i betonski deo poprečnog preseka. Stoga pri odredjivanju stanja napona i deformacija, usled delovanja ovih opterećenja koja imaju stalni karakter, treba uzeti u obzir uticaje tečenja i skupljanja betona. Za povremena opterećenja od snega, vetra i druga koja kratko traju, analiza se sprovodi u okviru teorije elastičnosti.

Pošto zbog uvodjenja geometrijskih nelinearnosti ne važi princip superpozicije uticaja - to se u analizi stanja napona i deformacija u nekoj fazi moraju uzeti u obzir sva opterećenja, normalne sile i pomeranja iz prethodnih faza. Prema tome, proračun ovakvih konstrukcijskih sistema mora se sprovesti po redosledu koji odgovara dinamici gradjenja i nanošenja opterećenja.

U oblasti teorije visećih sistema od elastičnog materijala postoji veliki broj radova i monografija /1/, /5/, /6/, /9/, /10/, /13/. Međjutim, broj radova u kojima se potpunije analiziraju uticaji tečenja i skupljanja betona na promenu sila u poprečnim presecima i deformacija tokom vremena, koliko je autoru poznato, je vrlo mali. U svim dosadašnjim radovima iz ove oblasti karakteristična su dva pristupa .

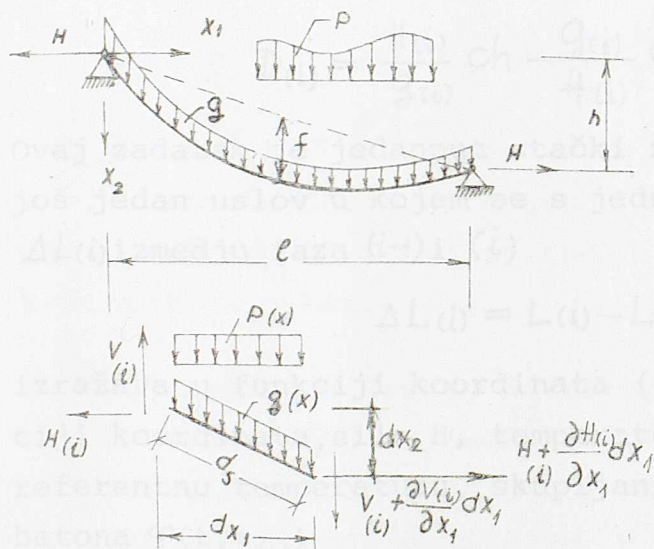
Prvi se sastoji u tome, da se koristeći uslove ravnoteže i promene dužina lančanica pri opterećenju u raznim fazama formulišu nelinearne diferencijalne jednačine ili njihovi sistemi i traže rešenja za zadate konturne uslove /6/, /10/, /13/. Pri tome se koriste razna uprošćenja i linearizacije /5/, koja daju dobre rezultate, naročito za tzv. plitke lančanice za koje je količnik strele i raspona (sl. 6.1)  $f/l = 1/10$ , i omogućavaju da se za odredjivanje uticaja od vertikalnih opterećenja koriste tzv. "zamenjujuće grede" /6/, /13/. Međjutim kada se analiziraju uticaji horizontalnih komponenata spoljašnjih sila dobijaju se sistemi nelinearnih diferencijalnih jednačina koji su nepodesni za rešavanje.

Drugi pristup je noviji i uslovljen je primenom elektronskih računara, a sastoji se u tome da se konstrukcijski sistem tretira kao skup konačnih elemenata - štapova, koji su za gibke kablove zglob-



no vezani medjusobno, a nepoznate veličine su pomeranja /1/ ili koordinate čvorova u posmatranoj fazi opterećenja /9/. Matematički se ovaj problem, kojeg je za elastične sisteme detaljno obradio H.Mølmann /9/, svodi na rešavanje sistema nelinearnih algebarskih jednačina, koji se vrlo uspešno rešava primenom Newton-Raphsonove metode odnosno metode Kontoroviča, kako je to pokazano u radu /8/. Metodu koja se naziva i metodom konačnih pomeranja. Ovaj postupak u kojem se prvo određuju nepoznata pomeranja izabranih tačaka lančanice naziva se i metodom konačnih pomeranja. U ovom poglavlju će se najpre dati kratak prikaz formiranja i rešavanja diferencijalne jednačine gipke prethodno napregnute lančanice, a zatim prikaz metode konačnih pomeranja visećih sistema za razne faze opterećenja, uzimajući u obzir uticaj tečenja (puzanja) i skupljanja betona.

## 6.2 Diferencijalna jednačina gipke prethodno napregnute lančanice



Sk. 6.1

Na sk. 6.1 prikazana je gipka prethodno napregnuta lančanica oslonjena na dva kraja, opterećena stalnim podeljenim opterećenjem  $g(x_1, t)$  i povremenim opterećenjem  $p(x_1, t)$ .

Lančanica je u fazi ( $p$ ) prethodno napregnuta, pa su zbog uticaja tečenja i skupljanja betona u ovoj i narednim fazama opterećenja normalna sila  $N$ , njena horizontalna komponenta  $H$  i ordinate tačaka lančanice zavis-

ne ne samo od opterećenja nego i od vremena  $t$  i starosti betona na početku delovanja opterećenja pojedinih faza  $[t_p, t_{p+1}, \dots, t_n] t_j$ .

$$N_{(i)} = N_{(i)}(x_1, t, t_p, t_{p+1}, \dots, t_n), \quad (6.1)$$

$$H_{(i)} = H_{(i)}(x_1, t, t_p, t_{p+1}, \dots, t_n),$$

$$x_{2(i)} = x_{2(i)}(x_1, t, t_p, t_{p+1}, \dots, t_n)$$

$$x_{1(i)} = x_{1(i)}.$$



Iz uslova ravnoteže elementarnog dela dužine  $dx$ , isečenog iz lančanice dobija se, u nekoj fazi opterećenja  $(i) \gg (p)$ , diferencijalna jednačina

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{g(i)}{H(i)} \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{p(i)}{H(i)} = 0 \quad (6.2)$$

$$g(i) = \sum_{j=1}^i \Delta g(j), \quad y=x_2 \quad (6.2a)$$

gde je  $\Delta g(j)$  deo stalnog opterećenja koji nanaet u fazi  $(j)$ .

Rešenje homogenog dela jednačine (6.2), kada je  $p=0$ , je

$$y_{(i)} = \frac{H(i)}{g(i)} \operatorname{ch} \frac{g(i)}{H(i)} \left[ x + C_{(i)}(t) \right] + D_{(i)}(t), \quad (6.3)$$

gde su funkcije

$$C_{(i)}(t) = \frac{H(i)}{g(i)} \operatorname{Arsh} \left[ \frac{h g(i)}{2H(i) \operatorname{Sh} \left( \frac{g(i) l}{2H(i)} \right)} \right] - \frac{1}{2}, \quad (6.4)$$

$$D_{(i)} = \frac{H(i)}{g(i)} \operatorname{ch} \frac{g(i)}{H(i)} C_{(i)}.$$

Ovaj zadatak je jedanput stački neodređen, tako da se formuliše još jedan uslov u kojem se s jedne strane promena dužine lančanice  $\Delta L(i)$  između faza  $(i-1)$  i  $(i)$

$$\Delta L(i) = L(i) - L(i-1) \quad (6.5)$$

izražava u funkciji koordinata  $(x, y)$  a s druge strane u funkciji koordinata, sile  $H$ , temperaturnih promena u odnosu na neku referentnu temperaturu, skupljanja  $\varepsilon_s(t)$  i koeficijenta tečenja betona  $\varphi(t, t_{(i)})$

$$\Delta L(i) = \Delta L \left[ x, y, H(i), \theta(t), \varepsilon_s(t), \varphi(t, t_{(i)}) \right] \quad (6.6)$$

Tako se dobija još jedna nelinearna algebarska ili Volterrina integralna jednačina, zavisno od izabranih veza između napona i deformacija

$$\Psi(x, y, H(i)) = 0 \quad (6.7)$$

Dužina lančanice je

$$L(i) = \int_0^l \left[ 1 + \left( \frac{\partial y_{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} dx \quad (6.8)$$

i ako se koristi ovaj izraz moguće je odrediti egzaktno rešenja diferencijalne jednačine (6.2), uzimajući u obzir tečenje i skupljanje betona, kako su to pokazali M.Ivković i Ž.Prašćević /6/ samo u posebnom slučaju kada je  $g$  jednako podeljeno opterećenje. Stoga će ovde biti dato proširenje jednog približnog postupka rešavanja jednačine (6.2) koje daje rezultate velike tačnosti za plitke lančanice  $f/l \leq 1/10$ , koje se u praksi najčešće projektuju kao prethodno napregnuti sistemi uz pretpostavku da se za vertikalno opterećenje zanemaruju horizontalna pomeranja tačaka.

Da bi se izbegla integracija diferencijalne jednačine (6.2), čija rešenja nije moguće dobiti u zatvorenom obliku za proizvoljne slučajeve opterećenja  $g_{(i)}(x)$  i  $p_i(x)$ , koja se u praksi najčešće pojavljuju. Iz uslova ravnoteže sila levo ili desno od nekog poprečnog preseka na deformisanoj osi poprečnog preseka dobija se za gibku lančanicu /5/, /13/.

$$y_{(i)}(t) = \frac{M_{(i)}(x, t)}{H_{(i)}(t)} + \frac{h}{l} x, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial y_{(i)}}{\partial x} = \frac{Q_{(i)}(x, t)}{H_{(i)}(t)} + \frac{h}{l}. \quad (6.10)$$

$M_{(i)}(x, t)$  i  $Q_{(i)}(x, t)$  su moment savijanja u preseku sa apscisom  $x$ , tzv. zamenjujuće proste grede raspona  $l$  od spoljašnjeg opterećenja  $g_{(i)}(x, t)$  i  $p_i(x, t)$  i ove se funkcije vrlo jednostavno određuju za proizvoljna opterećenja.

Na ovaj način je umesto diferencijalne jednačine (6.2) dobijena algebarska jednačina (6.9) koja zajedno sa nelinearnom algebarskom ili Volterrinom integralnom jednačinom (6.7) čini sistem čijim se rešavanjem određuju sila  $H_{(i)}(t)$  i ordinate tačaka lančanice  $y_{(i)}(x, t)$  u svakoj fazi (i) delovanja opterećenja. Normalna sila u nekom poprečnom preseku je

$$N_{(i)}(x, t) = H_{(i)}(t) \left[ 1 + \left( \frac{\partial y_{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.11)$$

Nelinearna algebarska ili Volterrina integralna jednačina (6.7) dobijena iz uslova promene dužine lančanice (6.6) je vrlo složene strukture i nepodesna za rešavanje, pa se radi rešavanja praktičnih zadataka vrše uprošćenja u njenom izvodjenju. Element dužine luka  $ds$  može se izraziti razvijanjem u Taylorov red



$$ds = \left[ 1 + \left( \frac{\partial y_{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} dx = \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y_{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{\partial y_{(i)}}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{16} \left( \frac{\partial y_{(i)}}{\partial x} \right)^6 + \dots \right] dx \quad (6.12)$$

Za plitke lančanicе ( $f/l \leq 1/10$ ) mogu se, sa zanemarljivom greškom za praktičnu upotrebu, zadržati prva dva člana ovog reda, tako da je dužina lančanicе s obzirom na (6.10)

$$L_{(i)} = l + \frac{1}{2H_{(i)}} \int_0^l Q_{(i)}^2 dx + \frac{h^2}{2l} \quad (6.13)$$

Ukoliko se želi postići veća tačnost, može se za duboke lančanicе zadržati još jedan član reda (6.12), pri čemu je ceo postupak u formulisanju jednačina (6.7) isti kao kada se koriste samo dva člana reda ali je jednačina znatno komplikovanija.

Promena dužine u dve uzastopne faze je

$$\Delta L_{(i)} = L_{(i)} - L_{(i-1)} = \frac{F_{(i)}}{2H_{(i)}^2} - \frac{F_{(i-1)}}{2H_{(i-1)}^2} \quad (6.14)$$

gde je

$$F_{(i)} = \int_0^l Q_{(i)}^2 dx \quad (6.15)$$

### 6.21 Odredjivanje horizontalne reakcije $H_{(i)}$ za faze u kojima opterećenje prima samo čelični kabl

Dužina lančanicе opterećene jednako podeljenim opterećenjem duž njene ose je /12/

$$L_{(i)} = l + \frac{8}{3} \frac{f_{(i)}^2}{l} + \frac{32}{15} \frac{f_{(i)}^4}{l^3} + \frac{h^2}{2l} + \dots \quad (6.16)$$

pa je početna dužina, kada  $g \rightarrow 0$ , na nekoj referentnoj temperaturi  $\theta_0$  je

$$L_{(0)} = l + \frac{8}{3} \frac{f_{(0)}^2}{l} + \frac{32}{15} \frac{f_{(0)}^4}{l^3} + \frac{h^2}{2l} + \dots \quad (6.17)$$

gde je  $f_{(0)}$  početna strela, koja je, kao i raspon  $l$ , unapred poznata.

Usled delovanja spoljašnjeg opterećenja u prvoj fazi  $g_{(1)} = \Delta g_{(1)}$  i promene temperature  $\theta$  u odnosu na referentno stanje, menja se dužina lančanicе. Ako se u izrazu (6.17) zanemari treći član, koji nije od značaja za plitke lančanicе, onda se iz uslova promene dužine (6.6), s obzirom na (6.13) i (6.17)

$$\Delta L_{(1)} = \frac{1}{2H_{(1)}^2} \mathcal{F}_{(1)} - \frac{8}{3} \frac{f_{(0)}^2}{l},$$

$$\Delta L_{(1)} = \int_0^l \frac{N_{(1)}(x)}{E_K A_K} \left[ 1 + \left( \frac{\partial y_{(1)}}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} dx + \alpha \theta L_{(0)},$$

uzimajući u obzir da je

$$N_{(1)}(x) = H_{(1)} \left[ 1 + \left( \frac{\partial y_{(1)}}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.18)$$

dobija algebarska jednačina

$$H_{(1)}^3 + a_{(1)} H_{(1)}^2 + b_{(1)} = 0, \quad (6.19)$$

gde su

$$a_{(1)} = \frac{8E_K A_K f_{(0)}^2 + 3E_K A_K \alpha \theta L_{(0)} l}{3l^2 + 16f_{(0)}^2 + 3h^2}$$

$$b_{(1)} = - \frac{1.5E_K A_K \mathcal{F}_{(1)} l}{3l^2 + 16f_{(0)}^2 + 3h^2} \quad (6.20)$$

$E_K$  je Youngov modul elastičnosti,  $A_K$  površina poprečnog preseka kabla, dok je  $\alpha$  koeficijent temperaturne dilatacije.

U sledećim fazama ( $i=2,3,\dots,p-1$ ) u kojima ukupno opterećenje prima samo kabal, promena dužine je s obzirom na (6.10) i (6.18)

$$\Delta L_{(i)} = \frac{H_{(i)} - H_{(i-1)}}{E_K A_K} \left[ l + \frac{\mathcal{F}_{(i-1)}}{H_{(i-1)}^2} + \frac{h^2}{l} \right] + \alpha \theta L_{(0)}.$$

Kada se u ovaj izraz zameni (6.14) dobija se posle sredjivanja jednačina

$$H_{(i)}^3 + a_{(i)} H_{(i)}^2 + b_{(i)} = 0, \quad (6.21)$$

gde su

$$a_{(i)} = \frac{E_K A_K l^*_{(i-1)} - 2L^*_{(i-1)} H_{(i-1)} + 2E_K A_K \alpha (\theta_{(i)} - \theta_{(i-1)}) L_{(0)}}{2L^*_{(i-1)}}$$

$$b_{(i)} = - \frac{E_K A_K \mathcal{F}_{(i)}}{2L^*_{(i-1)}}, \quad (6.22)$$

$$l^*_{(i-1)} = \frac{\mathcal{F}_{(i-1)}}{H_{(i-1)}^2}, \quad (6.23)$$

$$L^*_{(i-1)} = l + l^*_{(i-1)} + \frac{h^2}{2l}.$$



### 6.22 Odredjivanje reakcije $H_{(i)}$ za integralne veze izmedju napona i deformacija betona

U fazi (p) vrši se prethodno naprezanje sistema i aktivira i betonski deo poprečnog preseka, pa u ovoj i sledećim fazama treba uzeti u obzir uticaj tečenja i skupljanja betona.

Za integralnu vezu izmedju napona i deformacija betona (1.214) deformacija  $\varepsilon(t)$  u nekoj tački centrično pritisnutog prethodno napregnutog betonskog preseka, kako je to autor prikazao u radu /10/, je

$$\begin{aligned} E_b A_{id} \varepsilon(t) = N(t) + N_k(1+k_n) + \bar{\lambda} \int_{t_1}^t K_N(t, \tau) [N(\tau) + N_k(1+k_n)] d\tau + \\ + E_b A_b \varepsilon_s(t, t_p) + E_b A_{id} \alpha \theta(t), \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$A_{id} = A_b + \frac{E_k}{E_b} A_k + \frac{E_a}{E_b} A_a; \quad (6.25)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{A_b}{A_{id}}, \quad k_n = \frac{E_k A_k}{E_b A_{id}},$$

gde su  $A_b$  i  $A_a$  površine poprečnog preseka betona i tzv. "meke" armature, dok su  $E_b$  i  $E_a$  Youngovi moduli elastičnosti betona i armature.  $N_k$  je sila predhodnog naprezanja.

Funkcija  $K_N(t, \tau)$  prestavlja jezgro Volterrinog integralnog operatora  $K_N$  i kada je poznato jezgro  $K(t, \tau)$  i njegova rezolventa  $R(t, \tau)$  Volterrinog integralnog operatora  $K$ , koji se dobijaju na način kako je to prikazano u poglavlju 1, onda je veza izmedju operatora /10/

$$K_N = \frac{1}{\lambda} \left\{ \left[ (1-\bar{\lambda})I + \bar{\lambda}(I+K)^{-1} \right]^{-1} - I \right\}. \quad (6.26)$$

Medjutim u praktičnim proračunima može se sa neznatnom greškom smatrati da je

$$K_N(t, \tau) = K(t, \tau) \quad (6.27)$$

Dužina lančanice u trenutku vremena  $t$  za neku fazu opterećenja (i)  $\geq$  (p), koja je prethodno naprezana pri starosti betona  $t_p$ , a zatim kasnije u vremenu  $t_j$  ( $j=p+1, p+2, \dots, i$ ) nanošena opterećenja  $\Delta g(j)$ , je s obzirom na (6.24)

$$\begin{aligned}
L^{(i)}(t) = & L^{(p-1)} + \sum_{j=p}^i \left\{ \frac{H^{(j)}(t) - H^{(j-1)}(t)}{\Xi_b A_{id}} + \right. \\
& \left. + \frac{A_b}{A_{id}} \int_{t_j}^t K_N(t, \tau) \frac{H^{(j)}(\tau) - H^{(j-1)}(\tau)}{\Xi_b A_{id}} d\tau \right\} L^{*(j-1)} + \\
& + N_k(1+k_n) \frac{L^{(p-1)}}{\Xi_b A_{id}} \left[ 1 + \int_{t_p}^t K_N(t, \tau) d\tau \right] + \\
& + \frac{A_b}{A_{id}} \varepsilon_s(t, t_p) L^{(p-1)} + \alpha [\theta(t) - \theta(t_p)] L^{(0)}.
\end{aligned} \quad (6.28)$$

Promena dužine lančanice za fazu (i) je

$$\begin{aligned}
\Delta L^{(i)} = & L^{(i)}(t) - L^{(i-1)}(t_i) = \sum_{j=p}^{i-1} \left[ \frac{H^{(j)}(t) - H^{(j)}(t_i)}{\Xi_b A_{id}} + \right. \\
& \left. + \frac{A_b}{A_{id}} \int_{t_i}^t K_N(t, \tau) \frac{H^{(j)}(\tau) - H^{(j)}(t_i)}{\Xi_b A_{id}} d\tau \right] L^{*(j-1)}(t_i) + \\
& + \left[ \frac{H^{(i)}(t) - H^{(i-1)}(t_i)}{\Xi_b A_{id}} + \frac{A_b}{A_{id}} \int_{t_i}^t K_N(t, \tau) \frac{H^{(i)}(\tau) - H^{(i-1)}(t_i)}{\Xi_b A_{id}} d\tau \right] L^{*(i-1)} + \\
& + \frac{N_k(1+k_n)A_b}{\Xi_b A_{id}^2} \int_{t_p}^t K_N(t, \tau) d\tau L^{(p-1)} + \frac{A_b}{A_{id}} \varepsilon_s(t, t_p) L^{(p)}(t_{p-1}) + \\
& + \alpha [\theta(t) - \theta(t_i)] L^{(0)}.
\end{aligned} \quad (6.29)$$

Eliminacijom  $\Delta L^{(i)}(t)$  iz izraza (6.14) i (6.29) dobija se posle sredjivanja nelinearna Volterrina integralna jednačina

$$H_{(i)}^3(t) + H_{(i)}^2(t) \frac{A_b}{A_{id}} \int_{t_i}^t K_N(t, \tau) H_{(i)}(\tau) d\tau + a_{(i)}(t, t_i) H_{(i)}^2(t) + b_{(i)}(t, t_i) = 0, \quad (6.30)$$

gde su

$$\begin{aligned}
a_{(i)}(t, t_i) = & \frac{\Xi_b A_{id} L^{*(i-1)}(t_i)}{2 L^{*(i-1)}(t_i)} - H_{(i-1)}(t_i) \left[ 1 + \frac{A_b}{A_{id}} \int_{t_i}^t K_N(t, \tau) d\tau \right] + \\
& + \sum_{j=p}^{i-1} \left[ \frac{H^{(j)}(t) - H^{(j)}(t_i)}{\Xi_b A_{id}} + \frac{A_b}{A_{id}} \int_{t_i}^t K_N(t, \tau) \frac{H^{(j)}(\tau) - H^{(j)}(t_i)}{\Xi_b A_{id}} d\tau \right] \frac{L^{*(j-1)}(t_j)}{L^{*(i-1)}(t_i)} + \\
& + \frac{N_k(1+k_n)A_b}{\Xi_b A_{id}^2} \int_{t_i}^t K_N(t, \tau) d\tau \frac{L^{(p-1)}}{L^{*(i-1)}(t_i)} + \Xi_b A_b \varepsilon_s(t, t_p) \frac{L^{(p-1)}}{L^{*(i-1)}(t_i)} + \\
& + \Xi_b A_{id} \alpha [\theta(t) - \theta(t_i)] \frac{L^{(0)}}{L^{*(i-1)}(t_i)}
\end{aligned} \quad (6.30)$$

$$i = p+1, p+2, \dots, n$$

n je ukupan broj faza stalnog opterećenja.



$$b_{(i)}(t, t_i) = -\frac{F_{(i)}(t)}{2L_{(i-1)}^*(t_i)} \bar{E}_b A_{id} \quad (6.31)$$

Za fazu prethodnog naprezanja (p) je

$$\begin{aligned} a_{(p)}(t, t_i) = & \frac{1^*(t_i) \bar{E}_b A_{id}}{2 L_{(i)}^*(t_i)} - \left[ H_{(p-1)} - N_k (1 + k_n) \frac{L_{(p-1)}}{L_{(p-1)}^*} \right] \times \\ & \times \left[ 1 + \frac{A_b}{A_{id}} \int_{t_p}^t K_N(t, \tau) d\tau \right] + \bar{E}_b A_b \frac{L_{(p-1)}}{L_{(p-1)}^*} \varepsilon_s(t, t_p) + \\ & + \alpha [\vartheta(t) - \vartheta(t_p)] \frac{L_{(0)} \bar{E}_b A_{id}}{L_{(i-1)}^*(t_p)} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Ako u nekoj fazi (n+1) deluje u vremenu  $t_{n+1}$  povremeno opterećenje  $P_{(n+1)}$  od atmosferskih padavina, vetra i sl. koje nema karakter dugotrajnog uticaja onda je

$$\Delta L_{(n+1)} = L_{(n+1)}(t_{n+1}) - L_{(n)}(t_{n+1}) = \frac{H_{(n+1)}(t_{n+1}) - H_{(n)}(t_n)}{\bar{E}_b A_{id}} L_{(n)}^* + \alpha [\vartheta(t_{n+1}) - \vartheta(t_n)] L_{(0)}$$

Horizontalna sila  $H_{(n+1)}$  dobija se rešavanjem algebarske jednačine (6.21) gde je sada  $i=n+1$ , a umesto  $\bar{E}_k A_k$  u izraze (6.22) je uneto  $\bar{E}_b A_{id}$ .

Rešenje nelinearne Volterrine integralne jednačine ne može se odrediti u zatvorenom obliku čak ni za najjednostavnije funkcije  $K_N(t, \tau)$  koje se u praksi upotrebljavaju. Stoga je neophodno primeniti numerički postupak, kako je to autor prikazao u radu /10/ i odeljku 2.

Interval vremena  $[t_p, \bar{t}]$ , gde je  $\bar{t}$  neki proizvoljno veliki broj, deli se na podintervale različite dužine, vodeći računa o starosti betona u pojedinim fazama opterećenja. Broj podela intervala vremena  $[t_i, t_{i+1}]$  između dve faze (i)-(i+1) je različit i zavisi od njegove dužine. Proračun se sprovodi redosledom kojim je nanošeno spoljašnje opterećenje, a članovi  $a_{(i)}(t, t_i)$  i  $b_{(i)}(t, t_i)$  se određuju prema izrazima (6.30), (6.31) i (6.32) koristeći vrednosti sračunate u prethodnoj fazi proračuna.

U ovom postupku numeričke integracije, kako je to pokazano u odeljku 2.4, Volterrini integralni operatori  $K$ ,  $R$  i  $K_N$  zamenjuju se kvadratnim matricama  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{K}_N$ , za koje važe izrazi (6.26).

Funkcija  $H_{(i)}(t)$  se sračunava u tačkama pdele  $t^{(j)}$  intervala  $[t_i, \bar{t}]$  i tako za fazu (i) formira dijagonalna matrica  $H_{(i)}$  čiji su elementi  $H_{(i)}^{jj}$ . Prema izrazima (6.30), (6.31) i (6.32) formiraju se takodje dijagonalne matrice  $A_{(i)}$  i  $B_{(i)}$ , pa nelinearna Volterrina integralna jednačina zamenjuje sistemom od  $(m+1)$  nelinearnih algebarskih jednačina, gde je  $m$  broj podintervala podele intervala  $[t_i, \bar{t}]$ .

$$(H_{(i)}^3 + \bar{\lambda} H_{(i)}^2 K_N H_{(i)} + A H_{(i)}^2 + B)E = 0 \quad (6.33)$$

gde su  $E$  i  $O$  vektori kolone čiji su svi elementi jedinice odnosno nule.

Ovaj sistem jednačina se može rešiti Newton-Raphsonovom odnosno Kantorovičevom metodom, prema kojoj je za približnu vrednost  $H_{(i)k}$  u iteraciji

$$Z_k = (H_{(i)k}^3 + \bar{\lambda} H_{(i)k} K_N H_{(i)k} + A H_{(i)k}^2 + B)E,$$

u sledećoj iteraciji

$$H_{(i)k+1} E = H_{(i)k} E - Z_k^{-1} \cdot Z_k, \quad (6.34)$$

gde je matrica

$$Z'_k = 3H_{(i)k}^2 + 2\bar{\lambda} H_{(i)k} K_N H_{(i)k} + 2A H_{(i)k}. \quad (6.35)$$

Postupak se nastavlja sve dok

$$\max |z^{(k)}| \leq \delta, \quad k=1, 2, \dots$$

gde je  $\delta$  proizvoljno mali broj u zavisnosti od tačnosti sa kojom se želi rešiti sistem jednačina (6.33).

Kada se odrede vrednosti  $H_{(i)}(t)$  u izabranim tačkama intervala vremena  $[t_i, \bar{t}]$  sračunavaju se prema izrazu (6.9) ordinate tačaka lančanice  $y_{(i)}(x, t)$  a zatim normalne sile  $N_{(i)}(x, t)$  prema izrazu (6.11).

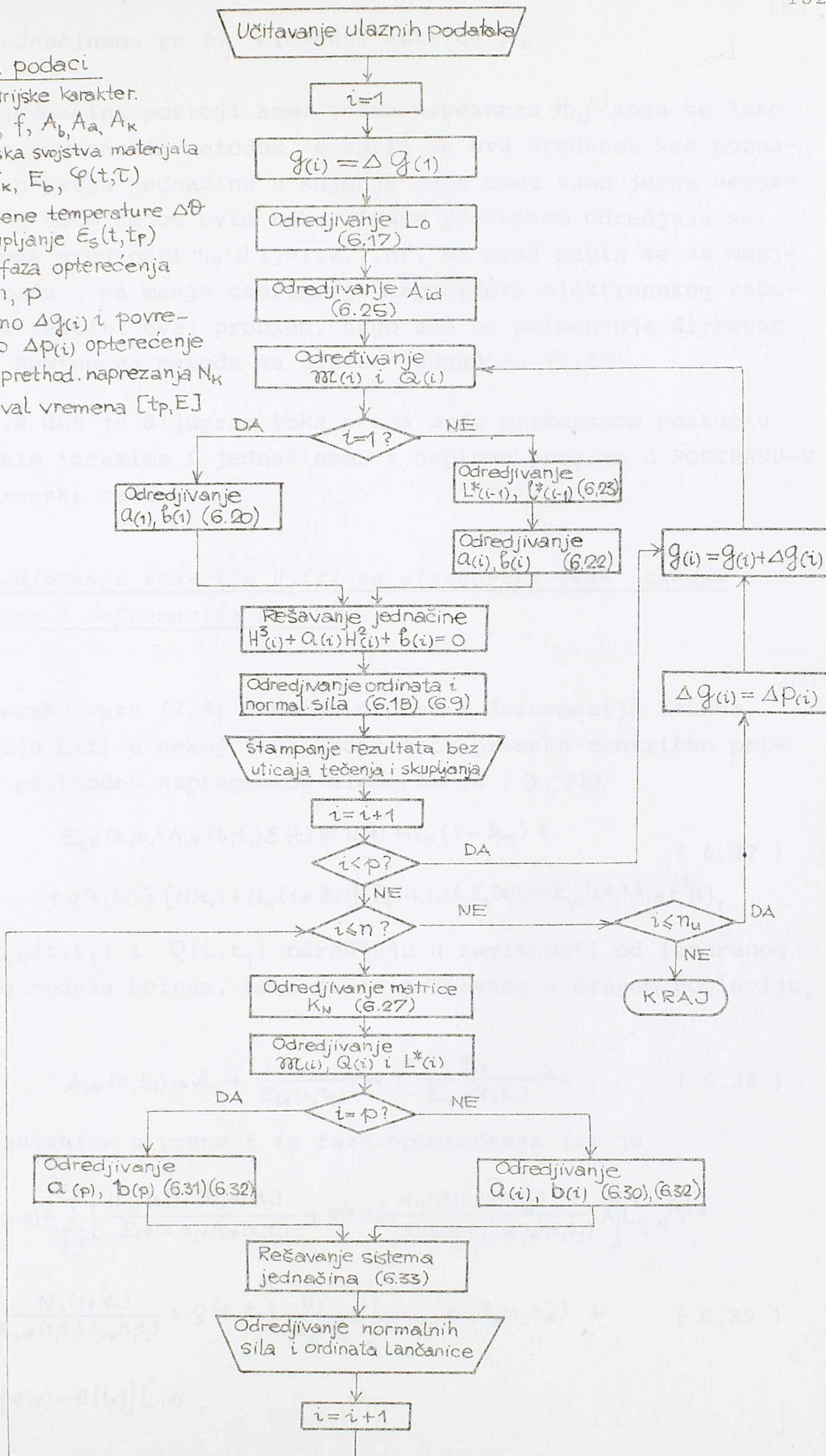
Pošto je  $K_N$  donja trougaona matrica, sistem nelinearnih algebarskih jednačina se može prikazati u obliku

$$\begin{aligned} H_{(i)}^3(1) + A_{(i)} H_{(i)}^2(1) + b_{(i)}(1) &= 0 \\ H_{(i)}^3(2) + A_{(i)} H_{(i)}^2(2) + [k_{21} H_{(i)}(1) + b_{(i)}(2)] &= 0 \\ H_{(i)}^3(3) + A_{(i)} H_{(i)}^2(3) + [k_{31} H_{(i)}(1) + k_{32} H_{(i)}(2) + b_{(i)}(3)] &= 0 \\ \dots & \\ H_{(i)}^3(m) + A_{(i)} H_{(i)}^2(m) + [a_{(i)}(m) + \sum_{j=1}^m k_{mj} H_{(i)}(j)] + b_{(i)}(m) &= 0. \end{aligned} \quad (6.36)$$



Ulazni podaci

- geometrijske karakter.  $l, h, f, A_b, A_a, A_k$
- reološka svojstva materijala  $E_a, E_k, E_b, \varphi(t, \tau)$
- promene temperature  $\Delta \theta$  i skupljanje  $E_s(t, t_p)$
- broj faza opterećenja  $n_u, n, p$
- stalno  $\Delta q(i)$  i povremeno  $\Delta p(i)$  opterećenje
- sila prethod. naprezanja  $N_k$
- interval vremena  $[t_p, E]$



U ovim jednačinama su  $k_{ij}$  elementi matrice  $K_N$ .

U prvoj jednačini postoji samo jedna nepoznata  $H_{(i)}^{(1)}$  koja se lako određuje Newtonovom metodom, a zatim se ova vrednost kao poznata unosi u drugu jednačinu u kojoj je sada opet samo jedna nepoznata  $H_{(i)}^{(2)}$  i tako redom ovim rekurzivnim postupkom određuju se sve tražene vrednosti  $H_{(i)}^{(j)}$  ( $j=1,2,\dots,m$ ). Na ovaj način se uz manje vremena rada i sa manje zauzimanja kapaciteta elektronskog računara može rešiti ovaj problem, nego ako se primenjuje direktno uopštena Newtonova metoda na sistem jednačina (6.33).

Na sk. 6.2 dat je dijagram toka prema ovde prikazanom postupku i izvedenim izrazima i jednačinama i napisan program u FORTRANU-V za elektronski računar.

### 6.23 Odredjivanje reakcije $H_i(t)$ za algebarske veze izmedju napona i deformacija betona

Za algebarsku vezu (2.4) izmedju napona i deformacija betona, deformacija  $\varepsilon(t)$  u nekoj tački poprečnog preseka centrično pritisnutog prethodno napregnutog elementa je / 3 /, /10/

$$E_{b\varphi}(t, t_1) A_{i\varphi}(t, t_1) \varepsilon(t) = N(t) + N_K(1 + k_n) + \varrho(t, t_1) \bar{\lambda} [N(t_1) + N_K(1 + k_n)] + E_{b\varphi}(t, t_1) A_b \varepsilon_s(t, t_1) + E_{b\varphi}(t, t_1) A_{id} \varepsilon^{\theta}(t), \quad (6.37)$$

gde se  $E_{b\varphi}(t, t_1)$  i  $\varrho(t, t_1)$  određuju u zavisnosti od izabranog reološkog modela betona, kako je to prikazano u drugom poglavlju, dok je

$$A_{i\varphi}(t, t_1) = A_b + \frac{E_a}{E_{b\varphi}(t, t_1)} A_a + \frac{E_K}{E_{b\varphi}(t, t_1)} A_K. \quad (6.38)$$

Dužina lančanice u vreme  $t$  za fazu opterećenja ( $i$ ) je

$$L_{(i)}(t) = L_{(p-1)} + \sum_{j=p}^{i-1} \left[ \frac{H_{(j)}(t) - H_{(j-1)}(t_j)}{E_{b\varphi}(t, t_j) A_{i\varphi}(t, t_j)} + \varrho(t, t_j) \frac{H_{(j)}(t_j) - H_{(j-1)}(t_j)}{E_{b\varphi}(t, t_j) A_{i\varphi}(t, t_j)} \bar{\lambda} \right] L_{(j-1)}^*(t_j) + \left[ \frac{N_K(1 + k_n)}{E_{b\varphi}(t, t_j) A_{i\varphi}(t, t_j)} + \varrho(t, t_p) \frac{N_K}{E_b A_{id}} \bar{\lambda} \right] L_{(p-1)} + \bar{\lambda} \varepsilon_s(t, t_p) + \alpha [\theta(t) - \theta(t_p)] L_{(0)}, \quad (6.39)$$



pa je prema ovome promena dužine lančanice

$$\begin{aligned} \Delta L_{(i)}(t) &= L_{(i)}(t) - L_{(i-1)}(t_i) = \sum_{j=p}^{i-1} \left[ \frac{H_{(j)}(t) - H_{(j-1)}(t_j)}{E_{b\varphi}(t, t_j) A_{i\varphi}(t, t_j)} - \right. \\ &- \frac{H_{(j)}(t_i) - H_{(j-1)}(t_j)}{E_{b\varphi}(t_i, t_j) A_{i\varphi}(t_i, t_j)} + \bar{\lambda} g(t_i, t_j) \frac{H_{(j)}(t_j) - H_{(j-1)}(t_j)}{E_{b\varphi}(t_i, t_j) A_{i\varphi}(t_i, t_j)} \left. \right] L_{(j-1)}^*(t_j) + \\ &+ \left[ \frac{H_{(i)}(t) - H_{(i-1)}(t_i)}{E_{b\varphi}(t, t_i) A_{i\varphi}(t, t_i)} + \bar{\lambda} g(t, t_i) \frac{H_{(i)}(t_i) - H_{(i-1)}(t_i)}{E_{b\varphi}(t, t_i) A_{i\varphi}(t, t_i)} \right] L_{(i-1)}^*(t_i) + \quad (6.40) \\ &+ \left\{ \frac{N_k(1+k_n)}{E_{b\varphi}(t, t_p) A_{i\varphi}(t, t_p)} - \frac{N_k(1+k_n)}{E_{b\varphi}(t_i, t_p) A_{i\varphi}(t_i, t_p)} + \bar{\lambda} [g(t, t_p) - g(t_i, t_p)] \frac{N_k(1+k_n)}{E_b A_{id}} \right\} L_{(p-1)} + \\ &+ \bar{\lambda} \varepsilon_s(t, t_i) L_{(p-1)} + \alpha [\theta(t) - \theta(t_i)] L_{(0)}. \end{aligned}$$

Eliminacijom  $\Delta L_{(i)}$  iz izraza (6.14) i (6.40) dobija se algebarska jednačina

$$H_{(i)}^3(t) + \bar{\lambda} g(t, t_i) H_{(i)}(t) H_{(i)}^2(t) + a_{(i)}(t, t_i) H_{(i)}^2(t) + b_{(i)}(t, t_i) = 0 \quad (6.41)$$

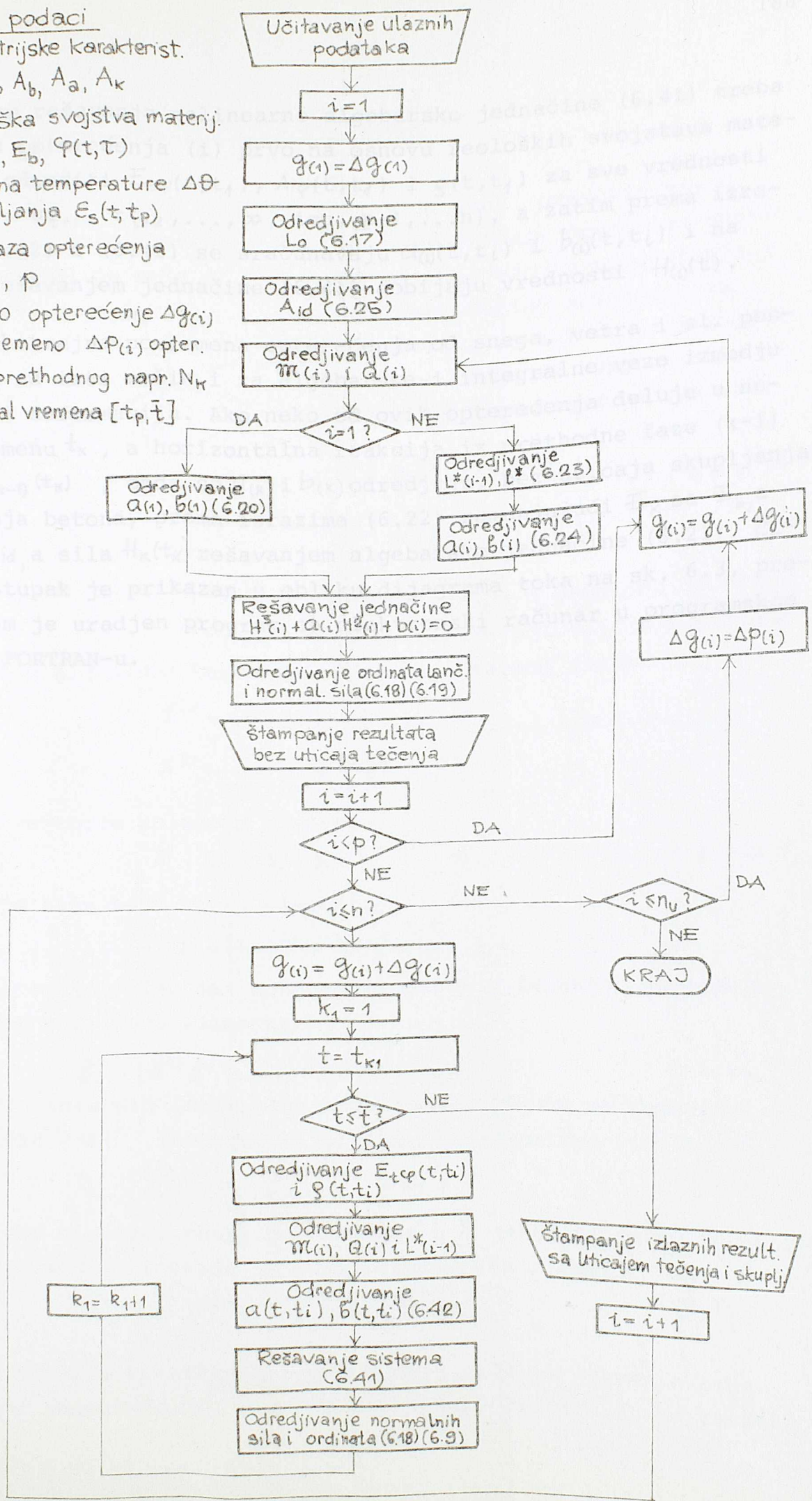
gde je

$$\begin{aligned} a_{(i)}(t, t_i) &= -H_{(i-1)}(t_i) - \bar{\lambda} g(t, t_i) H_{(i-1)}(t_i) + \sum_{j=p}^{i-1} \left\{ \left[ \frac{H_{(j)}(t) - H_{(j-1)}(t_j)}{E_{b\varphi}(t, t_j) A_{i\varphi}(t, t_j)} - \right. \right. \\ &- \frac{H_{(j)}(t_i) - H_{(j-1)}(t_j)}{E_{b\varphi}(t_i, t_j) A_{i\varphi}(t_i, t_j)} \left. \right] E_{b\varphi}(t, t_i) A_{i\varphi}(t, t_i) + \bar{\lambda} g(t_i, t_j) \frac{H_{(j)}(t_j) - H_{(j-1)}(t_j)}{E_{b\varphi}(t_i, t_j) A_{i\varphi}(t_i, t_j)} \times \\ &\times E_{b\varphi}(t, t_i) A_{i\varphi}(t, t_i) \left. \right\} \frac{L_{(j-1)}^*(t_j)}{L_{(i-1)}^*(t_i)} + N_k(1+k_n) \left\{ \frac{E_{b\varphi}(t, t_i) A_{i\varphi}(t, t_i)}{E_{b\varphi}(t, t_p) A_{i\varphi}(t, t_p)} - \right. \\ &- \frac{E_{b\varphi}(t, t_i) A_{i\varphi}(t, t_i)}{E_{b\varphi}(t_i, t_p) A_{i\varphi}(t_i, t_p)} + \bar{\lambda} [g(t, t_p) - g(t_i, t_p)] \left. \right\} \frac{L_{(p-1)}}{L_{(i-1)}^*(t_i)} + \\ &+ \frac{E_{b\varphi}(t, t_i) A_{i\varphi}(t, t_i)}{2 L_{(i-1)}^*(t_i)} L_{(i-1)}^*(t_i) + \bar{\lambda} \varepsilon_s(t, t_i) E_{b\varphi}(t, t_i) A_{i\varphi}(t, t_i) \frac{L_{(p-1)}(t_p)}{L_{(i-1)}^*(t_i)} + \\ &+ \alpha [\theta(t) - \theta(t_p)] \frac{L_{(0)}}{L_{(i-1)}^*(t_i)} \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$b_{(i)}(t, t_i) = - \frac{F_{(i)}(t)}{2 L_{(i-1)}^*(t_i)} E_{b\varphi}(t, t_i) A_{i\varphi}(t, t_i). \quad (6.43)$$

Ulazni podaci

- geometrijske karakterist.  $l, h, f, A_b, A_a, A_k$
- reološka svojstva materij.  $E_a, E_k, E_b, \varphi(t, \tau)$
- promena temperature  $\Delta\theta$  i skupljanja  $\epsilon_s(t, t_p)$
- broj faza opterećenja  $n_u, n, p$
- stalno opterećenje  $\Delta q(i)$  i povremeno  $\Delta p(i)$  opter.
- sila prethodnog napr.  $N_k$
- interval vremena  $[t_p, \bar{t}]$





Prilikom rešavanja nelinearne algebarske jednačine (6.41) treba za fazu opterećenja (i) prvo na osnovu reoloških svojstava materijala odrediti  $\mathbb{F}_{b\varphi}(t, t_1)$ ,  $A_{i\varphi}(t, t_1)$  i  $g(t, t_1)$  za sve vrednosti  $t$  ( $t=t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, \infty, i=p, p+1, \dots, n$ ), a zatim prema izrazima (6.42) i (6.43) se sračunavaju  $a_{(i)}(t, t_i)$  i  $b_{(i)}(t, t_i)$  i na kraju rešavanjem jednačine (6.41) dobijaju vrednosti  $H_{(i)}(t)$ .

Za kratkotrajna povremena opterećenja od snega, vetra i sl. postupa se na isti način i za algebarske i integralne veze između napona i deformacija. Ako neko od ovih opterećenja deluje u nekom vremenu  $t_k$ , a horizontalna reakcija iz prethodne faze (k-1) je  $H_{(k-1)}(t_k)$ , onda se  $a_{(k)}$  i  $b_{(k)}$  određuju, bez uticaja skupljanja i tečenja betona, prema izrazima (6.22) zamenjujući  $\mathbb{F}_k$  sa  $\mathbb{F}_b$ , a  $A_k$  sa  $A_{id}$ , a sila  $H_k(t_k)$  rešavanjem algebarske jednačine (6.21). Čitav postupak je prikazan u obliku dijagrama toka na sk. 6.3, prema kojem je urađen program za elektronski računar u programskom jeziku FORTRAN-u.

$$\begin{aligned} X^0 &= \{x_1^0, x_2^0, x_3^0\} \\ X^1 &= \{x_1^1, x_2^1, x_3^1\} \end{aligned} \quad (6.45)$$

odnosno vektorom položaja elementa

$$X^i = [X^0, X^1] \quad (6.45a)$$

Pomeranje bilo koje tačke elementa

$$u^i = \{u_1^i, u_2^i, u_3^i\}$$

u globalnim koordinatama može se izraziti u funkciji pomeranja tačaka na krajevima elementa

$$\delta_i^j = \{\delta_1^j, \delta_2^j\} = \{\delta_1^j, \delta_2^j, \delta_3^j, \delta_4^j, \delta_5^j, \delta_6^j\} \quad (6.46)$$

Pri pomoći linearnih interpolacionih funkcija može se pomeranje bilo koje tačke  $U$  izraziti u lokalnom koordinatnom sistemu  $(0, x, y, z)$

$$u_n^i = \delta_n^i (1 - \frac{x}{L}) + \delta_n^j \frac{x}{L}, \quad n=1, 2, 3 \quad (6.47)$$

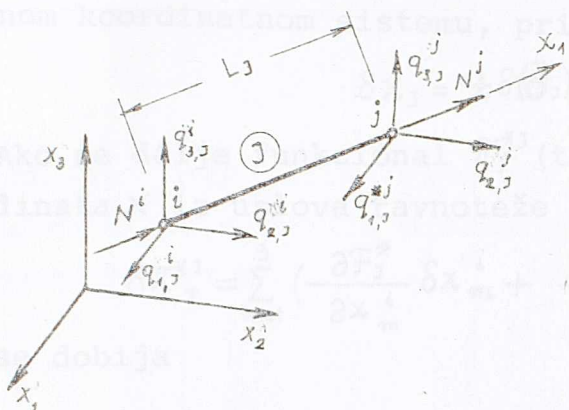
Ako se čeo slobodne energije elementa  $\mathcal{E}$  u nekom trenutku vremena  $t$  označi sa  $F_j^i(t)$  onda je prema (3.11) funkcional

$$\Pi_j^i(t) = F_j^i(t) - q_1^i \delta_1^i - q_2^i \delta_2^i \quad (6.48)$$

Kada se u nekom trenutku vremena  $t$  deju tačkama elementa neka virtualna pomeranja  $\delta q$ , onda će koordinate krajeva štapa zauzeti

### 6.3 Primena metode konačnih pomeranja

Neka je konstrukcijski sistem sastavljen od pravolinijskih elemenata male krutosti, tako da u prosečnim presecima postoje samo normalne sile  $N^i$  i  $N^j$ . Uticaj spoljašnjeg opterećenja i sopstvene težine zamenjuju se koncentrisanim silama na krajevima štapa, čije su komponente u globalnom Descartesovom sistemu.



$$\mathbf{q}_i^{i,T} = \{q_{1,i}^i, q_{2,i}^i, q_{3,i}^i\} \quad (6.44)$$

$$\mathbf{q}_j^{j,T} = \{q_{1,j}^j, q_{2,j}^j, q_{3,j}^j\}$$

Položaj štapa u prostoru određen je vektorima položaja  $\mathbf{x}^i$  i  $\mathbf{x}^j$  krajeva štapa u globalnom Descartesovom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{x}^{i,T} = \{x_1^i, x_2^i, x_3^i\}, \quad (6.45)$$

$$\mathbf{x}^{j,T} = \{x_1^j, x_2^j, x_3^j\},$$

odnosno vektorom položaja elementa

$$\mathbf{x}_J^T = \{\mathbf{x}^{i,T}, \mathbf{x}^{j,T}\} \quad (6.45a)$$

Pomeranje bilo koje tačke elementa

$$\mathbf{u}^T = \{u_1, u_2, u_3\}$$

u globalnim koordinatama može se izraziti u funkciji pomeranja tačkaka na krajevima elementa

$$\delta_J^T = \{\delta^{i,T}, \delta^{j,T}\} = \{\delta_1^i, \delta_2^i, \delta_3^i, \delta_1^j, \delta_2^j, \delta_3^j\} \quad (6.46)$$

Primenom linearnih interpolacionih funkcija može se pomeranje bilo koje tačke  $\mathbf{u}$  izraziti u lokalnom koordinatnom sistemu  $(o, x, y, z)$

$$u_m = \bar{\delta}_m^i \left(1 - \frac{\bar{x}_1}{L_1}\right) + \bar{\delta}_m^j, \quad m = 1, 2, 3. \quad (6.47)$$

Ako se deo slobodne energije elementa J u nekom trenutku vremena t označi sa  $\mathcal{F}_J^*(t)$  onada je prema (3.11) funkcional

$$\Pi_J^{*J}(t) = \mathcal{F}^{*J}(t) - \mathbf{q}_i^{i,T} \delta^i - \mathbf{q}_j^{j,T} \delta^j. \quad (6.48)$$

Kada se u nekom trenutku vremena t daju tačkama elementa neka virtualna pomeranja  $\delta \mathbf{u}$ , onda će koordinate krajeva štapa zauzeti



neki novi položaj tako da će, s obzirom da je  $u$  funkcija koordinata, biti virtualna pomeranja izražena u globalnom koordinatnom sistemu

$$\delta \mathbf{x}_j^T = \{\delta x_1^i, \delta x_2^i, \delta x_3^i, \delta x_1^j, \delta x_2^j, \delta x_3^j\} \quad (6.49)$$

Ona se dobijaju iz varijacije pomeranja  $\delta$ , koje je izraženo u lokalnom koordinatnom sistemu, primenom matrice transformacije koordinata

$$\delta \mathbf{x}_j = \mathbf{t} \delta(\bar{\mathbf{x}}_j) \quad (6.50)$$

Ako se dalje funkcional  $\Pi_r^{*j}(t)$  izrazi u funkciji globalnih koordinata  $\mathbf{x}$  iz uslova ravnoteže (3.10)

$$\delta \Pi_r^{*j} = \sum_{m=1}^3 \left( \frac{\partial \mathcal{F}_j^*}{\partial x_m^i} \delta x_m^i + \frac{\partial \mathcal{F}_j^*}{\partial x_m^j} \delta x_m^j - q_{m,j}^i \delta x_m^i - q_{m,j}^j \delta x_m^j \right) = 0$$

se dobija

$$q_{m,j}^i = \frac{\partial \mathcal{F}_j^*}{\partial x_m^i}, \quad q_{m,j}^j = \frac{\partial \mathcal{F}_j^*}{\partial x_m^j}, \quad \begin{matrix} m=1,2,3 \\ j=1,2,\dots,n_e \end{matrix} \quad (6.51)$$

gde je  $n_e$  broj elemenata.

Kada se izvrši sumiranje po svim elementima onda je funkcional

$$\Pi_r^* = \sum_{j=1}^{n_e} \Pi_{r,j}^* = \sum_{j=1}^{n_e} (\mathcal{F}_j^* - q_j^{i^T} \delta^i - q_j^j \delta^j) \quad (6.52)$$

gde je  $n_c$  broj čvorova, pa dobija iz uslova

$$\delta \Pi_r^* = 0, \quad q_m^i = \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial x_m^i}, \quad \mathcal{F}^* = \sum_j \mathcal{F}_j^*, \quad i=1,2,\dots,n_c, \quad (6.53)$$

pošto je parcijalni izvod  $\mathcal{F}_j^*(t)$  po koordinati čvora  $x_m^{*i}$  koja ne pripada elementu  $j$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_j^*}{\partial x_m^i} = 0, \quad i \neq i, j, \quad m=1,2,3. \quad (6.54)$$

Komponente vektora  $q_m^i(t)$  ( $m=1,2,3$ ) u čvoru  $i$  su jednake zbiru odgovarajućih komponenata  $q_{m,j}^i$  elemenata koji se susstiču u ovim čvorovima

$$q_m^i = \sum_j q_{m,j}^i \quad (6.55)$$

Pošto se elementi konstrukcijskog sistema nalaze u jednoosnom stanju napona

$$\sigma_{11}(t) = \sigma(t), \quad \varepsilon_{11}(t) = \varepsilon(t)$$

onda se  $\mathcal{F}_j^*(t)$  i  $\Pi_r^{*j}(t)$  mogu izraziti, u funkciji  $\varepsilon_j(t)$ . Iz uslova



stacionarnosti funkcionala  $\mathcal{F}_j^*(t)$  pri varijaciji  $\varepsilon_j(t)$ , kao nezavisnog funkcionalnog argumenta, i pošto se normalna sila ne menja duž elementa, onda se dobija, kako je to pokazano u odeljku 3.5

$$\frac{\partial \mathcal{F}_j^*(t)}{\partial \varepsilon_j(t)} = N_j(t) L_j(t) . \quad (6.56)$$

Deformacija ose elementa  $j$  je

$$\varepsilon_j(t) = \frac{L_j(t) - L_j(t_0)}{L_j(t_0)} ,$$

gde je  $L_j(t)$  dužine elementa u posmatranom trenutku vremena  $t$ , a  $L_j(t_0)$  dužina elementa u neopterećenom stanju na nekoj referentnoj temperaturi  $\theta_0$ .

Pošto je

$$L_j = [(x_1^j - x_1^i)^2 + (x_2^j - x_2^i)^2 + (x_3^j - x_3^i)^2]^{1/2} \quad (6.57)$$

to se funkcional  $\mathcal{N}_j^*(t)$  odnosno  $\mathcal{N}_j^*(t)$  može izraziti u funkciji koordinata čvorova konstrukcijskog sistema. U ovome se i sastoji i razlika u definisanju ovih funkcionala u odnosu na poglavlja 4 i 5, gde su oni definisani - kako se to najčešće radi u metodi konačnih elemenata - u funkciji pomeranja čvorova.

Uslovi kvaziranotežnog stanja (6.51) u trenutku vremena  $t$  mogu se pisati stoga u obliku

$$q_{r,m}^{*i}(t) = \frac{\partial \mathcal{F}^*(t)}{\partial \varepsilon_j(t)} \cdot \frac{\partial \varepsilon_j(t)}{\partial x_m^i} , \quad \begin{matrix} m=1,2,3 \\ i=1,2,\dots,n_c \\ j=1,2,\dots,n_e \end{matrix} \quad (6.58)$$

pri čemu ponovljeni indeks pokazuje da se po njemu vrši sumiranje.

Broj ovih jednačina, jednak je broju koordinata čvorova konstrukcijskog sistema, i one su, s obzirom na (6.56), u odnosu na ove koordinate nelinearne Volterrine integralne ili algebarske jednačine - zavisno od toga da li se koriste algebarske ili integralne veze između napona i deformacija.

Za rešavanje ovog sistema nelinearnih jednačina primenjuje se modifikovana Newtonova metoda, koja se naziva i Newton-Raphsonova metoda ili metoda L.V. Kantoroviča /13/. Sistem se rešava interaktivno, pošto se prethodno uvede vektor  $r^i$  čije su komponente



$$r_m^i = q_m^i - \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial \varepsilon_j} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x_m^i} = q_m^i - \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial x_m^i}, \quad i=1,2,\dots,n_c, \quad m=1,2,3$$

Ako je određena koordinata  $x_{m(k)}^i$  u k-toj iteraciji, onda je

$$x_{m(k+1)}^{*i} = x_{m(k)}^{*i} + \left[ \frac{\partial}{\partial x_n^{*j}} \left( \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial \varepsilon_j} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x_m^{*i}} \right) r_n^{*i} \right]$$

ili

$$x_{m(k+1)}^i = x_{m(k)}^i + \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{F}^*}{\partial x_m^i \partial x_n^j} \right]^{-1} r_n^i \quad (6.60)$$

odnosno u matričnom obliku

$$\mathbf{X}_{(k+1)} = \mathbf{X}_{(k)} + \mathbf{S}_{(k)}^{-1} \mathbf{R}_{(k)} \quad (6.60a)$$

gde je  $\mathbf{S}$  matrica krutosti čitavog sistema, dok je vektor  $\mathbf{X}$  sastavljen od vektora položaja svih čvorova

$$\mathbf{X}^T = \{ \mathbf{x}^{1,T}, \mathbf{x}^{2,T}, \dots, \mathbf{x}^{n_c,T} \} \quad (6.61)$$

$$\mathbf{R} = \{ \mathbf{r}^{1,T}, \mathbf{r}^{2,T}, \dots, \mathbf{r}^{n_c,T} \}$$

Da bi se izbeglo invertovanje matrice  $\mathbf{S}$  uvodi se vektor  $\Delta \mathbf{X}_{(k+1)}$

$$\Delta \mathbf{X}_{(k+1)} = \mathbf{X}_{(k+1)} - \mathbf{X}_{(k)}, \quad (6.62)$$

čije su komponente

$$\Delta \mathbf{x}_{(k+1)} = \mathbf{x}_{(k+1)} - \mathbf{x}_{(k)},$$

tako da se dobija sistem linearnih jednačina

$$\mathbf{S}_{(k)} \Delta \mathbf{X}_{(k+1)} = \mathbf{R}_{(k)}, \quad (6.63)$$

čijim se rešavanjem određuje promena vektora  $\mathbf{X}$  između uzastopnih iteracija  $(k+1)$  i  $(k)$ .

Matrica krutosti sistema  $\mathbf{S}$  sastavljena je od submatrica  $\mathbf{S}_{ij}$  tipa  $(3,3)$  za prostorne sisteme, odnosno  $(2,2)$  za sistem u jednoj ravni

$$\mathbf{S}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}^*}{\partial x_m^i \partial x_n^j} \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,n_c; j=1,2,\dots,n_c; \\ m=1,2,3; \quad n=1,2,3; \end{matrix} \quad (6.64)$$

ili s obzirom na (6.53)

$$\mathbf{S}_{ij} = \sum_j \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{F}_j^*}{\partial x_m^i \partial x_n^j} \right] = \sum_j \mathbf{S}_j^{ij} \quad j=1,2,\dots,n_e \quad (6.65)$$

gde je matrica

$$\mathbf{S}_j^{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_j^*}{\partial x_m^i \partial x_n^j} \quad (6.66)$$

Ako čvorovi  $i, j$  nisu povezani nekim elementom onda je matrica

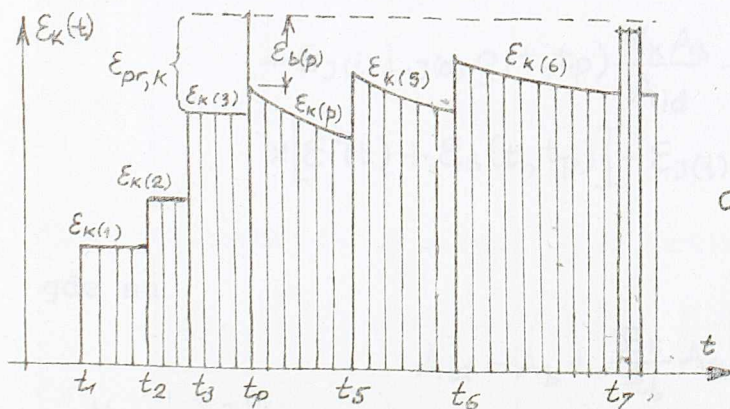
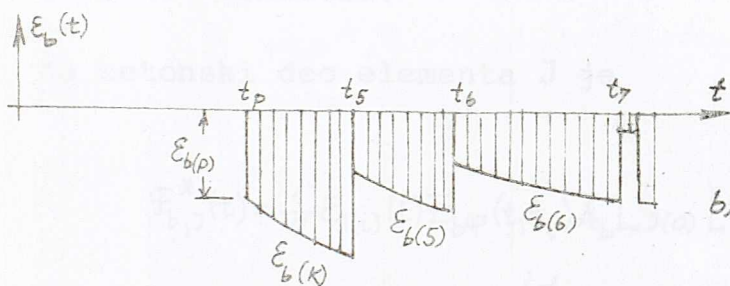
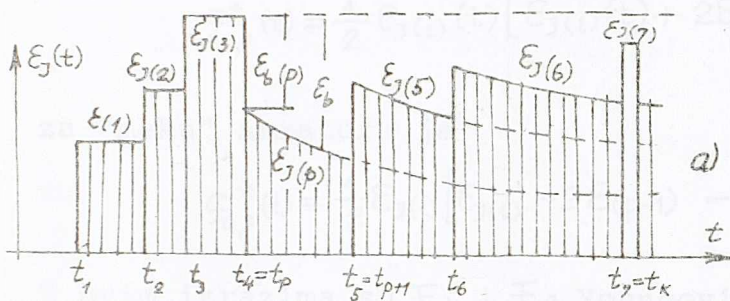
$$\mathbf{S}_{ij} = 0.$$



Svi ovde izvedeni izrazi i jednačine su formalno isti kao i za sisteme od elastičnog materijala čiju je teoriju na ovaj način detaljno obradio H.Møllmann /9/. U daljoj matematičkoj formulaciji proračuna visećih konstrukcijskih prethodno napregnutih sistema neophodno je uzeti u obzir uticaje tečenja i skupljanja betona i analizu sprovesti za različite faze opterećenja.

### 6.31 Odredjivanje funkcionala $F_J^*(t)$

Na sk. 6.6 a,b,c prikazan je tok deformacije elementa  $J$  u celini, kabla i betona tokom vremena za razne faze opterećenja. U



Sk. 6.6

Deformacije betona  $\varepsilon_{b(i)}$ , kabla  $\varepsilon_{K(i)}$  i tzv. "meke" aramtire elementa  $\varepsilon_{a(i)}$  su u fazi (i)

ovom slučaju je uzeto da se do prethodnog naprezanja u nekom vremenu  $t_p$  stalno opterećenja nanosi u tri faze, a zatim posle prethodnog naprezanja nanosi još u dve faze. U nekom kasnijem trenutku vremena  $t$  deluje neko povremeno opterećenje od snega i vetra, čije je dejstvo u odnosu na stalno opterećenje kratkotrajno, pa se uticaji tečenja i skupljanja betona na promenu napona i deformacija usled ovog opterećenja zanemaruju. Svi ovde izvedeni izrazi i jednačine važe i u slučajevima kada je broj faza opterećenja pre ili posle prethodnog naprezanja različit od broja koji se ovde razmatra.



$$\begin{aligned}\varepsilon_{b(i)}(t) &= \varepsilon_{J(i)}(t) - \varepsilon_{(p-1)}, \\ \varepsilon_{K(i)}(t) &= \varepsilon_{pr,K} + \varepsilon_{J(i)}(t), \quad i \geq p \\ \varepsilon_{a(i)}(t) &= \varepsilon_{b(i)}(t),\end{aligned}\quad (6.67)$$

gde su

$\varepsilon_{J(i)}(t)$  - deformacija elementa J u fazi opterećenja,  
 $\varepsilon_{pr,K}(t)$  - deformacija kabla pri prethodnom naprežanju sistema,  
 (p) - je faza u kojoj se vrši prethodno naprežanje sistema.

Promena dela slobodne energije za deo kabla

$$\mathcal{F}_{K,J}^*(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_{J(i)}(t) [\varepsilon_{J(i)}(t) + 2\varepsilon_{pr,K} - 2\varepsilon^\theta(t)] E_K A_K L_{J(0)}, \quad (6.68)$$

za "meku" armaturu je

$$\mathcal{F}_{a,J}^*(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_{J(i)} [\varepsilon_{J(i)} - 2\varepsilon_{(p-1)} - 2\varepsilon^\theta(t)] E_a A_a L_{J(0)}. \quad (6.69)$$

U ovim izrazima su  $E_K$  i  $E_a$  Youngovi moduli elastičnosti kablova i "meke" armature.

Za betonski deo elementa J je

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{b,J}^*(t) &= \frac{1}{2} \varepsilon_{J(i)}(t) E_{b\varphi}(t, t_i) A_b L_{J(0)} [\varepsilon_{J(i)}(t) - 2\varepsilon_{J(i-1)}(t)] + \\ &+ \varepsilon_{J(i)} A_b L_{J(0)} \sum_{j=p}^{i-1} E_{b\varphi}(t, t_j) [\varepsilon_{J(j)}(t) - \varepsilon_{J(j-1)}(t)] - \\ &- \varepsilon_{J(i)} L_{J(0)} \varrho(t, t_p) \frac{N_K A_b}{A_{id}} - \varepsilon_{J(i)} E_{b\varphi}(t, t_p) A_b L_{J(0)} \times \\ &\times [\varepsilon^\theta(t) + \varepsilon_s(t, t_p)] - \varepsilon_{J(i)} L_{J(0)} \sum_{j=p}^i \varrho(t, t_j) \frac{\Delta N_{(j)}(t_j)}{A_{id}} A_b\end{aligned}$$

gde su

$$A_{id} = A_b + \frac{E_K}{E_b} A_K + \frac{E_a}{E_b} A_a \quad (6.71)$$

$N_K$  - sila prethodnog naprežanja,

$$\Delta N_{(j)}(t_j) = N_{(j)}(t_j) - N_{(j-1)}(t_j) \quad (6.72)$$

priraštaj normalne sile u poprečnom preseku elementa usled nanošenja dodatnog opterećenja  $\Delta q_{(j)}$  faze  $j$  u vreme  $t_j$ .

Ukupna vrednost funkcionala  $\mathcal{F}_J^*(t)$  za ceo elementat  $J$  je

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_J^*(t) = & \frac{1}{2} \varepsilon_{J(i)}^2(t) E_{b\varphi}(t, t_i) A_{i\varphi}(t, t_i) L_{J(0)} - \varepsilon_{J(i)} E_{b\varphi}(t, t_i) \bar{A}_{i\varphi}(t, t_i) \times \\ & \times L_{J(0)} \varepsilon_{J(i-1)}(t) + \sum_{j=p}^{i-1} \varepsilon_{J(i)}(t) \bar{A}_{i\varphi}(t, t_j) E_{b\varphi}(t, t_j) L_{J(0)} [\varepsilon_{J(j)}(t) - \\ & - \varepsilon_{J(j-1)}(t)] - \varepsilon_{J(i)} A_b L_{J(0)} \sum \varrho(t, t_j) \frac{\Delta N_{(j)}(t_j)}{A_{id}} - \\ & - \varepsilon_{J(i)}(t) A_b L_{J(0)} \varrho(t, t_p) \frac{N_k}{A_{id}} - \varepsilon_{J(i)}(t) E_{b\varphi}(t, t_p) A_{b\varphi}(t, t_p) \times \\ & \times \left[ \varepsilon^{\theta}(t) - \frac{A_b}{A_{i\varphi}(t, t_p)} \varepsilon^s(t, t_p) \right] + \varepsilon_{J(i)} N_k L_{J(0)} \end{aligned} \quad (6.73)$$

gde su

$$\begin{aligned} N_k &= A_k E_k \varepsilon_{p\gamma, k} \\ A_{i\varphi}(t, t_i) &= A_b + \frac{E_a}{E_{b\varphi}(t, t_i)} A_a + \frac{E_k}{E_{b\varphi}(t, t_i)} A_k \\ \bar{A}_{i\varphi}(t, t_i) &= A_b + \frac{E_a}{E_{b\varphi}(t, t_i)} A_a \end{aligned} \quad (6.74)$$

Normalna sila je prema (6.56)

$$\begin{aligned} N_J(t) = & E_{b\varphi}(t, t_i) A_{i\varphi}(t, t_i) \varepsilon_{J(i)} - E_{b\varphi}(t, t_i) \bar{A}_{i\varphi}(t, t_i) \varepsilon_{J(i-1)} + \\ & + \sum_{j=p}^{i-1} \bar{A}_{i\varphi}(t, t_j) E_{b\varphi}(t, t_j) [\varepsilon_{J(j)}(t) - \varepsilon_{J(j-1)}(t)] - A_b \sum_{j=p}^i \varrho(t, t_j) \frac{\Delta N_{(j)}(t_j)}{A_{id}} \\ & - A_b \varrho(t, t_p) \frac{N_p}{A_{id}} \end{aligned} \quad (6.75)$$

### 6.32 Odredjivanje elemenata matrice $s_J^{ij}$

Elementi matrica  $s_J^{ij}$  štapa  $J$  su prema (6.56), (6.59) i (6.66)

$$s_{mn}^{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_J^*}{\partial x_m^i \partial x_n^j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_J}{\partial x_m^i \partial x_n^j} N_J + \frac{\partial \varepsilon_J}{\partial x_m^i} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_J^*}{\partial \varepsilon_J^2} \frac{\partial \varepsilon_J}{\partial x_n^j} \quad (6.76)$$

ili

$$s_{mn}^{ij} = g_{mn}^{ij} + h_{mn}^{ij} \quad (6.77)$$



gde

$$g_{mn}^{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}_J}{\partial x_m^i \partial x_n^j} N_J \quad (6.78)$$

odredjuje tzv. geometrijski deo, a

$$h_{mn}^{ij} = \frac{\partial \mathcal{E}_J}{\partial x_m^i} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_J^*}{\partial \mathcal{E}_J^2} \frac{\partial \mathcal{E}_J}{\partial x_n^j} \quad (6.79)$$

deo matrice koji zavisi od reoloških svojstava materijala.

Stoga se matrica krutosti  $\mathbf{S}$  celog konstrukcijskog sistema može prikazati kao zbir dve matrice

$$\mathbf{S} = \mathbf{G} + \mathbf{H} \quad (6.80)$$

gde  $\mathbf{G}$  zavisi od geometrijskih karakteristika i normalnih sila, a  $\mathbf{H}$  od reoloških karakteristika materijala.

Kada se izvrši parcijalno diferenciranje izraza (6.73) dobija se s obzirom na (6.56) i (6.57)

$$g_{mn}^{ii} = g_{mn}^{jj} = -g_{mn}^{ij} = -g_{mn}^{ji} = \frac{N_J}{L_J} [\delta_{ij} - \cos\beta_m \cos\beta_n] \quad (6.81)$$

gde su

$$\cos\beta_m = \frac{x_m^j - x_m^i}{L_J}, \quad \cos\beta_n = \frac{x_n^j - x_n^i}{L_J}, \quad \begin{matrix} m=1,2,3 \\ n=1,2,3 \end{matrix} \quad (6.82)$$

Pošto je za fazu proračuna ( $i$ ) u trenutku vremena  $t$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_J}{\partial x_m^i} = -\frac{\cos\beta_m}{L_J(t)}, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_J}{\partial x_m^j} = \frac{\cos\beta_m}{L_J(t)}, \quad m=1,2,3; \quad (6.83)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_J^*}{\partial x_m^i \partial x_n^j} = A_{i\varphi}(t, t_i) \mathbb{E}_{b\varphi}(t, t_i) L_J(t)$$

onda su elementi matrice

$$h_{mn}^{ii} = h_{mn}^{jj} = -h_{mn}^{ij} = -h_{mn}^{ji} = A_{i\varphi}(t, t_i) \mathbb{E}_{b\varphi}(t, t_i) / L_J(t), \quad (6.84)$$

pa su stoga

$$\mathbf{s}_J^{ii}(t, t(i)) = \mathbf{s}_J^{jj}(t, t(i)) = -\mathbf{s}_J^{ij}(t, t(i)) = -\mathbf{s}_J^{ji}(t, t(i)) \quad (6.85)$$

$$\mathbf{s}_J^{ii}(t, t(i)) = \frac{N_J(t, t(i))}{L_J(t, t(i))} [\mathbf{I} - \boldsymbol{\beta}(t, t(i))] + \frac{\mathbb{E}_{b\varphi}(t, t(i)) A_{i\varphi}(t, t(i))}{L_J(t)} \boldsymbol{\beta}(t, t(i))$$

gde su matrice

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\beta} = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta_1 & \cos \beta_1 \cos \beta_2 & \cos \beta_1 \cos \beta_3 \\ \cos \beta_2 \cos \beta_1 & \cos^2 \beta_2 & \cos \beta_2 \cos \beta_3 \\ \cos \beta_3 \cos \beta_1 & \cos \beta_3 \cos \beta_2 & \cos^2 \beta_3 \end{bmatrix} \quad (6.86)$$

Ako se konstrukcijski sistem nalazi u jednoj ravni ( $0, x_1, x_2$ ) onda je  $\cos \beta_3 = 0$ , pa su matrice  $\mathbf{I}$  i  $\mathbf{\beta}$  tipa (2,2).

Ako se u konstrukcijskom sistemu nalaze u svim fazama čelični elementi čija je površina poprečnog preseka  $A_k$  i Youngov modul elastičnosti  $E_k$ , onda je za njih

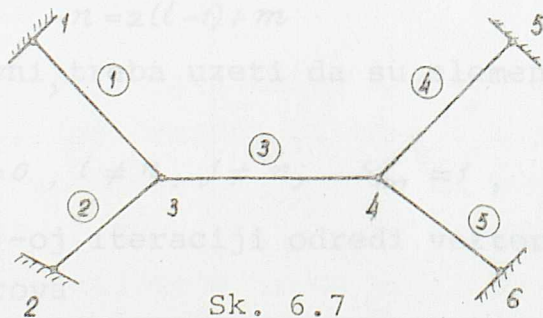
$$E_{b\varphi}(t, t_i) A_{i\varphi}(t, t_i) = E_k A_k, \quad \varrho(t, t_i) = 0, \quad \varepsilon_s(t, t_i) = 0. \quad (6.87)$$

U fazama opterećenja (i)  $\leq (p-1)$ , kada je sistem sastavljen od elastičnih čeličnih elemenata koji primaju ukupno opterećenje umesto  $E_{b\varphi}$  i  $A_{i\varphi}$  treba uneti  $E_k$  i  $A_k$ . Normalna sila u poprečnom preseku elementa J je

$$N_{J(i)} = E_k A_k \varepsilon_{J(i)} \quad (6.88)$$

U nekim sistemima (na primer dvopojasnim lančanicama) mogu se u pojedinim fazama opterećenja pri proračunu u nekoj iteraciji pojaviti sile pritiska  $N_J(i)$  koje element J ne može primiti zbog svoje vitkosti. Taj element se isključuje iz rada sistema za to opterećenje, a u proračun se unosi u narednim iteracijama  $N_{J(i)} = 0$ , odnosno  $S_J^{ij} = 0$ .

Za konstrukcijski sistem na sk. 6.4 prikazan je postupak formiranja matrice krutosti  $\mathbf{S}$  od matrica  $S_J^{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ;  $j=1, 2, \dots, 6$ ;  $J=1, 2, \dots, 5$ ) i sistema jednačina (6.63)



Sk. 6.7



	1	2	3	4	5	6				
1	$S_{11}^{11}$	0	$S_{13}^{13}$	0	0	0	}	$\Delta X^1$	}	$r^1$
2	0	$S_{22}^{22}$	$S_{23}^{23}$	0	0	0		$\Delta X^2$		$r^2$
3	$S_{31}^{31}$	$S_{32}^{32}$	$S_{33}^{33} +$ $S_{33}^{33} +$ $S_{33}^{33}$	0	0	0		$\Delta X^3$		$r^3$
4	0	0	0	$S_{44}^{44} +$ $S_{44}^{44} +$ $S_{44}^{44}$	$S_{45}^{45}$	$S_{46}^{46}$		$\Delta X^4$		$r^4$
5	0	0	0	$S_{54}^{54}$	$S_{55}^{55}$	0		$\Delta X^5$		$r^5$
6	0	0	0	$S_{64}^{64}$	0	$S_{65}^{65}$		$\Delta X^6$		$r^6$

( 6.90 )

### Rešavanje sistema jednačina

Pošto su za konstrukcijski sistem pomeranja nekih čvorova propisana, pa su stoga odgovarajuće promene u iterativnom postupku  $\Delta X_m^i = 0$ . Zbog toga se broj nepoznatih pomeranja i jednačina smanjuje i svodi na sistem

$$S' \Delta X' = G' \quad ( 6.91 )$$

Uticao propisanih pomeranja, može se uvesti u račun i na drugi način. Ako je poznato pomeranje  $\chi_m^l$ , onda u odgovarajućem redu

$$n = 3(l-1) + m$$

za sistem u prostoru, odnosno

$$n = 2(l-1) + m$$

za sistem u ravni, treba uzeti da su elementi matrice i slobodan član

$$s_{ij} = 0, \quad i \neq n, \quad j \neq n; \quad s_{nn} = 1, \quad r_n = 0.$$

Kada se u (k+1)-oj iteraciji odredi vektor  $\Delta X_{(k+1)}$  onda je vektor koordinata čvorova

$$X_{(k+1)} = X_{(k)} + \Delta X_{(k+1)}$$



Dužina štapa je

$$L_{J(k+1)} = \left[ \sum_{m=1}^3 (x_{m(k+1)}^j - x_{m(k+1)}^i)^2 \right]^{1/2}$$

dok je izduženje

$$\Delta L_{J(k+1)} = L_{J(k+1)} - L_{J(0)} ; \quad \varepsilon_{J(k+1)} = \Delta L_{J(k+1)} / L_{J(0)}.$$

Normalna sila  $N_{J(k+1)}$  se određuje prema izrazu (6.75) vodeći računa o deformacijama i normalnim silama u prethodnim fazama opterećenja, reološkim svojstvima materijala, temperaturnim promenama i skupljanju betona. Sa poznatim vektorima koordinata čvorova  $X_{(k+1)}$  i normalnih sila  $N_{(k+1)}$  određuju se vektor  $B_{(k+1)}$ , matrica krutosti sistema  $S_{(k+1)}$  i vektor opterećenja  $R_{(k+1)}$  koje je ostalo "neuravnoteženo" u iteraciji (k+1). Ponovo se rešava sistem jednačina (6.91) i postupak ponavlja u okviru posmatrane faze, sve dok maksimalna apsolutna vrednost neke komponente neuravnoteženog opterećenja ne bude

$$\max |r_m^i| \leq \delta_r, \quad m=1,2,3; \quad i=1,2,\dots,n_c \quad (6.91 a)$$

gde je  $\delta_r$  neka proizvoljno izabrana mala veličina u zavisnosti od tačnosti rezultata. Kada je ovaj uslov ispunjen, završen je proračun u posmatranoj fazi - pa se može preći na sledeću fazu.

Za faze opterećenja u kojima spoljašnje sile primaju pored kablova i betonski elementi  $(i) > (p)$ , položaj koordinata čvorova određuje se u vreme nanošenja dodatnog opterećenja ove faze  $\Delta q_{(i)}$  zbog čega se pojavljuje trenutne elastične deformacije i menjaju aksijalne sile u poprečnim presecima i neposredno pre nanošenja  $\Delta q_{(i+1)}$  sledeće faze (i+1), kada je  $t=t_{(i+1)}$  i kada se moraju uzeti u obzir i uticaji tečenja i skupljanja betona. Za povremena kratkotrajna opterećenja (sneg i vetar), koja izazivaju uglavnom elastične promene sistema, analiza se vrši za stanje odmah posle delovanja opterećenja.

Na početku sprovođenja analize stanja napona i deformacija treba odrediti položaj čvorova sistema  $X^*$  u nekom referentnom stanju, u odnosu na koje će se određivati pomeranja čvorova u pojedinim fazama. Za višeće prethodno napregnute sisteme za ovo stanje se najčešće uzima prva faza opterećenja za koju se proračun sprovodi u oblasti elastostatike.



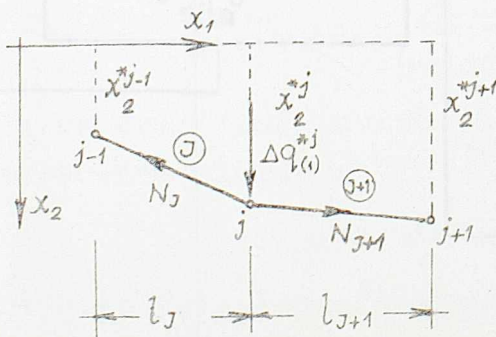
Ako je u referentnom stanju dužina elementa  $L_j^*$ , površina poprečnog preseka  $A^*$ , Youngov modul elastičnosti  $E^*$ , normalna sila  $N_j^*$ , a referentna temperaturna razlika  $\theta^*=0$ , onda je dužina štapa u neopterećenom stanju

$$L_{j(0)} = \frac{L_j^*}{1 + \frac{N_j^*}{E^* A^*}} \quad (6.92)$$

Početne vrednosti normalnih sila  $N_{(1)}^*$  za prvu iteraciju referentnog stanja, mogu se na osnovu zadatih početnih vrednosti koordinata čvorova  $X_{(1)}^*$  i zadatih spoljnih sila odrediti poznatim postupcima u okviru teorije I reda. Zatim se, koristeći ove geometrijske i fizičke veličine, određuju elementi matrice krutosti  $S_{(1)}$  i neuravnoteženo opterećenje  $R_{(1)}$ , a rešavanjem sistema jednačina (6.91) vektor  $\Delta X_{(2)}^*$  i zatim  $\epsilon_{(2)}^*$  usvajajući da je  $L_{j(0)} = L_j^*(1)$ . Postupak se ponavlja, kako je to već opisano, sve dok se ne ispuni uslov (6.91a) i na taj način dobijaju koordinate čvorova  $X^*$  i normalne sile  $N^*$  u referentnom stanju.

Pri prelasku na novu fazu opterećenja, odnosno proračuna koriste se za prvu iteraciju koordinate čvorova i normalne sile iz prethodne faze i unosi odgovarajuće dodatno opterećenje  $\Delta q$  i eventualne promene o reološkim svojstvima materijala i geometrijskim karakteristikama poprečnih preseka.

Za obične lančanice (sk. 6.1) koje su oslonjene na dva kraja, kao i prostorne viseće sisteme sastavljene od mreže kablova, u referentnom stanju opterećenje je vertikalno, pa je horizontalna komponenta normalnih sila u presecima duž kabla konstantna. Ako je ona poznata, onda je prema sk. 6.8



Sk. 6.8

$$\frac{x_2^j - x_2^{j-1}}{x_1^j - x_1^{j-1}} - \frac{x_2^{j+1} - x_2^j}{x_1^{j+1} - x_1^j} = \frac{\Delta q_{(1)}^{*j}}{H^*} \quad (6.93)$$

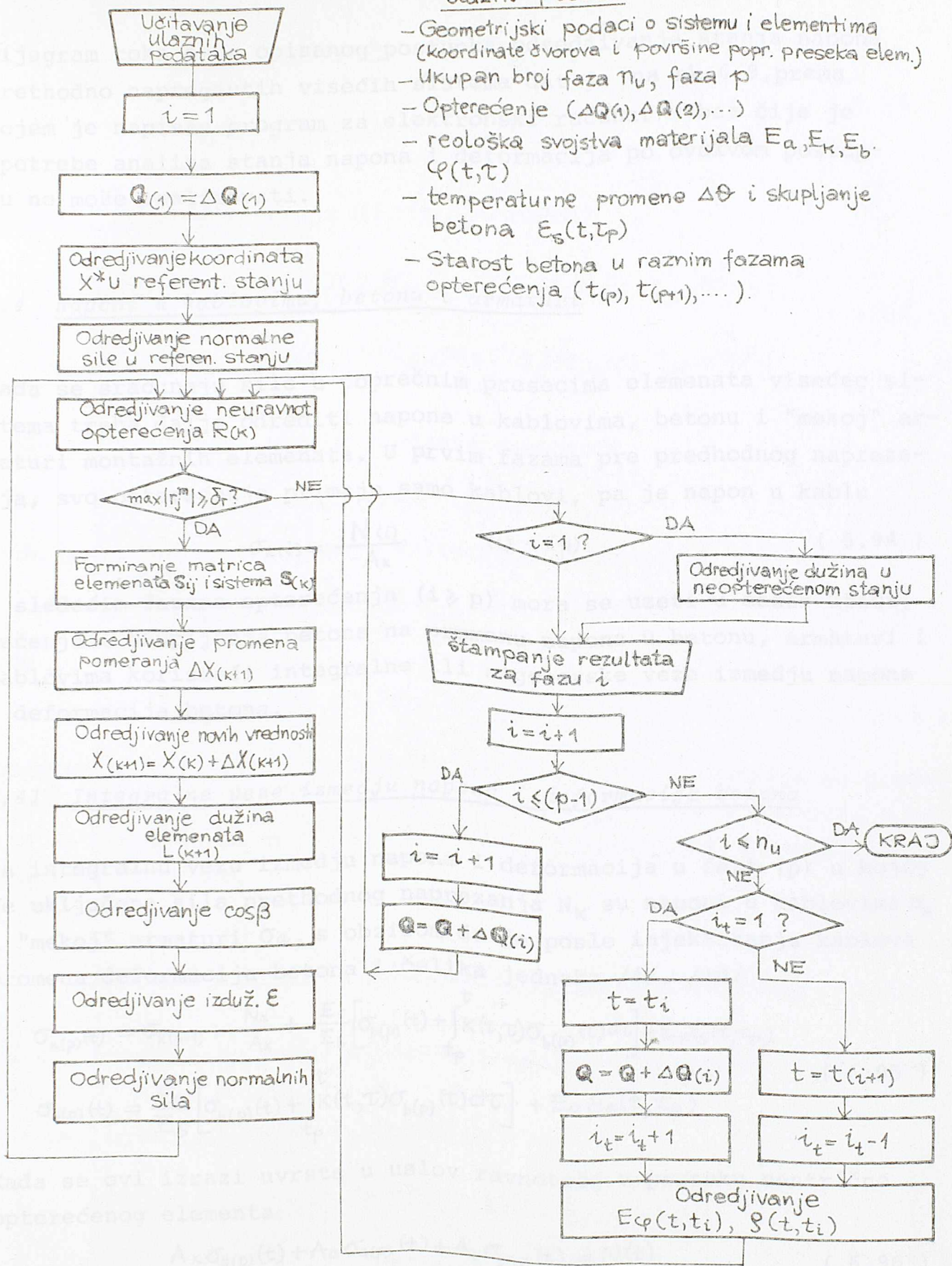
Rešavanjem ovog sistema linearnih jednačina u kojem su unapred zadate apscise čvorova  $x_1^{*j}$  dobijaju se tražene ordinatne čvorova  $x_2^{*j}$  koje će se koristiti kao početne vrednosti za

prvu iteraciju u određivanju položaja tačaka i normalnih sila referentnog stanja.



Ulazni podaci

- Geometrijski podaci o sistemu i elementima (koordinate švorova i površine popr. preseka elem.)
- Ukupan broj faza  $n_u$ , faza  $p$
- Opterećenje  $(\Delta Q(1), \Delta Q(2), \dots)$
- reološka svojstva materijala  $E_a, E_k, E_b, \varphi(t, \tau)$
- temperaturne promene  $\Delta \theta$  i skupljanje betona  $\epsilon_s(t, t_p)$
- Starost betona u raznim fazama opterećenja  $(t_{(p)}, t_{(p+1)}, \dots)$ .



Sk. 6.9



Dijagram toka ovde opisanog postupka određivanja stanja napona prethodno napregnutih visećih sistema dat je na sk.6.9, prema kojem je napisan program za elektronski računar - bez čije je upotrebe analiza stanja napona i deformacija po ovakvom postupku ne može realizovati.

#### 6.4 Naponi u kablovima, betonu i armaturi

Kada se sračunaju sile u poprečnim presecima elemenata visećeg sistema treba dalje odrediti napone u kablovima, betonu i "mekoj" armaturi montažnih elemenata. U prvim fazama pre predhodnog naprezanja, svo opterećenje primaju samo kablovi, pa je napon u kablju

$$\sigma_{k(i)} = \frac{N(i)}{A_k} \quad (i) < (p) \quad (6.94)$$

U sledećim fazama opterećenja ( $i \geq p$ ) mora se uzeti u obzir uticaj tečenja i skupljanja betona na promenu napona u betonu, armaturi i kablovima koristeći integralne ili algebarske veze izmedju napona i deformacija betona.

#### 6.41 Integralne veze izmedju napona i deformacija betona

Za integralnu vezu izmedju napona i deformacija u fazi (p) u kojoj je uključena sila prethodnog naprezanja  $N_k$  su naponi u kablovima  $\sigma_k$  i "mekoj" armaturi  $\sigma_a$ , s obzirom da je posle injektiranja kablova promena deformacija betona i čelika jednaka  $/4/$ ,  $/10/$

$$\begin{aligned} \sigma_{k(p)}(t) &= \sigma_{k(p-1)} + \frac{N_k}{A_k} + \frac{E_k}{E_b} \left[ \sigma_{b(p)}(t) + \int_{t_p}^t K(t, \tau) \sigma_{b(p)}(\tau) d\tau \right] + E_k \varepsilon_s(t, t_p) \\ \sigma_{a(p)}(t) &= \frac{E_a}{E_b} \left[ \sigma_{b(p)}(t) + \int_{t_p}^t K(t, \tau) \sigma_{b(p)}(\tau) d\tau \right] + E_a \varepsilon_s(t, t_p) \end{aligned} \quad (6.95)$$

Kada se ovi izrazi uvrste u uslov ravnoteže u preseku centrično opterećenog elementa

$$A_k \sigma_{k(p)}(t) + A_a \sigma_{a(p)}(t) + A_b \sigma_{b(p)}(t) = N(t) \quad (6.96)$$

dobija se Volterrina integralna jednačina

$$\sigma_{b(p)}(t) + \bar{\lambda} \int_{t_p}^t K(t, \tau) \sigma_{b(p)}(\tau) d\tau = \frac{N(p)(t) - N_{(p-1)}(t) - N_k - N_s(t, t_p)}{A_{id}} \quad (6.97)$$

gde su

$$\bar{\lambda} = \frac{A_{id} - A_b}{A_{id}},$$

$$N_s(t, t_p) = (E_a A_a + E_k A_k) \varepsilon_s(t, t_p). \quad (6.98)$$

U nekoj fazi opterećenja  $(i) > (p)$  su naponi

$$\begin{aligned} \sigma_{k(i)}(t) &= \sigma_{k(i-1)}(t) + \frac{E_k}{E_b} \left\{ \sigma_{b(i)}(t) - \sigma_{b(i-1)}(t) + \int_{t_i}^t K(t, \tau) [\sigma_{b(i)}(\tau) - \sigma_{b(i-1)}(\tau)] d\tau \right\} \\ \sigma_{a(i)}(t) &= \sigma_{a(i-1)}(t) + \frac{E_k}{E_b} \left\{ \sigma_{b(i)}(t) - \sigma_{b(i-1)}(t) + \int_{t_i}^t K(t, \tau) [\sigma_{b(i)}(\tau) - \sigma_{b(i-1)}(\tau)] d\tau \right\} \end{aligned} \quad (6.99)$$

Kada se ovi izrazi uvrste u uslove ravnoteže

$$\sigma_{k(i)}(t) A_k + \sigma_{a(i)}(t) A_a + \sigma_{b(i)}(t) = N_{(i)}(t) \quad (6.100)$$

dobija se posle sredjivanja Volterrina integralna jednačina

$$\Delta \sigma_{b(i)}(t) + \bar{\lambda} \int_{t_1}^t K(t, \tau) \Delta \sigma_{b(i)}(\tau) d\tau = \frac{\Delta N_{(i)}(t)}{A_{id}} \quad (6.101)$$

gde je

$$\Delta \sigma_{b(i)}(t) = \sigma_{b(i)}(t) - \sigma_{b(i-1)}(t); \Delta N_{(i)}(t) = N_{(i)}(t) - N_{(i-1)}(t). \quad (6.102)$$

Rešavanjem Volterrine integralne jednačine (6.101) dobija se promena napona u betonu  $\Delta \sigma_{b(i)}(t)$  izmedju dve uzastopne faze u vreme  $t$ , a zatim se prema izrazima (6.99) i (6.102) dobija napon u kablovima, armaturi i betonu.

#### 6.42 Algebarske veze izmedju napona i deformacija betona

Za algebarsku vezu izmedju napona i deformacija betona (2.4) u fazi  $(p)$  je

$$\begin{aligned} \sigma_{k(p)}(t) &= \sigma_{k(p-1)} + \frac{N_k}{A_k} + n_{k\varphi}(t, t_p) \sigma_{b(p)}(t) + \\ &+ g(t, t_p) n_{k\varphi}(t, t_p) \frac{N_k + N_{(p)}(t_p) - N_{(p-1)}}{A_{id}} + E_k \varepsilon_s(t, t_p), \end{aligned} \quad (6.103)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{a(p)}(t) &= n_{a\varphi}(t, t_p) \sigma_{b(p)}(t) + g(t, t_p) n_{a\varphi}(t, t_p) \frac{N_k + N_{(p)}(t_p) - N_{(p-1)}}{A_{id}} + \\ &+ E_a \varepsilon_s(t, t_p); \end{aligned}$$



gde su

$$n_{k\varphi}(t, t_p) = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{b\varphi}(t, t_p)}, \quad n_{a\varphi}(t, t_p) = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{b\varphi}(t, t_p)}, \quad (6.104)$$

Iz uslova ravnoteže (6.96) sila u preseku se dobija izraz za sredjivanje napona u betonu

$$\sigma_{b(p)}(t) = \frac{N(p) - N(p-1) - N_k - N_s(t, t_p)}{A_{i\varphi}(t, t_p)} - \varrho(t, t_p) \frac{N_k + N(p)(t_p) - N(p-1)}{A_{id}} \bar{\lambda}_{\varphi}(t, t_p) \quad (6.105)$$

gde su

$$A_{i\varphi}(t, t_p) = A_b + n_{k\varphi}(t, t_p) A_k + n_{a\varphi}(t, t_p) A_a \quad (6.106)$$

$$\bar{\lambda}_{\varphi}(t, t_p) = \frac{A_{i\varphi}(t, t_p) - A_b}{A_{i\varphi}(t, t_p)}$$

U nekoj fazi opterećenja ( $i > p$ ) je

$$\sigma_{k(i)}(t) = \sigma_{k(i-1)}(t) + n_{k\varphi}(t, t_i) [\sigma_{b(i)}(t) - \sigma_{b(i-1)}(t)] + \varrho(t, t_i) n_{k\varphi}(t, t_i) \frac{N(i)(t_i) - N(i-1)(t_i)}{A_{id}}, \quad (6.107)$$

$$\sigma_{a(i)}(t) = \sigma_{a(i-1)}(t) + n_{a\varphi}(t, t_i) [\sigma_{b(i)}(t) - \sigma_{b(i-1)}(t)] + \varrho(t, t_i) n_{a\varphi}(t, t_i) \frac{N(i)(t_i) - N(i-1)(t_i)}{A_{id}}$$

Kada se ovi izrazi uvrste u uslove ravnoteže (6.100) dobija se posle sredjivanja

$$\sigma_{b(i)}(t) = \sigma_{b(i-1)}(t) + \frac{N(i)(t) - N(i-1)(t)}{A_{i\varphi}(t, t_i)} + \varrho(t, t_i) \bar{\lambda}_{\varphi}(t, t_i) \frac{N(i)(t_i) - N(i-1)(t_i)}{A_{id}} \quad (6.108)$$

Ako se u nekoj fazi  $k$  ( $k > p$ ) u vreme  $t_k$  aplicira kratkotrajno opterećenje za koje se pretpostavlja da nema uticaja na tecenje betona, u toj fazi se konstrukcija ponaša kao elastičan sistem. Naponi u betonu, armaturi i kablovima se sračunavaju prema izrazima



$$\sigma_{b(k)}(t_k) = \sigma_{b(k-1)}(t_k) + \frac{N_{(k)}(t_k) - N_{(k-1)}(t_k)}{A_{id}} \quad )$$

$$\sigma_{a(k)}(t_k) = \sigma_{a(k-1)}(t_k) + \frac{E_a}{E_b} \frac{N_{(k)}(t_k) - N_{(k-1)}(t_k)}{A_{id}} \quad ) \quad ( 6.109 )$$

$$\sigma_{k(k)}(t_k) = \sigma_{k(k-1)}(t_k) + \frac{E_k}{E_b} \frac{N_{(k)}(t_k) - N_{(k-1)}(t_k)}{A_{id}} .$$

Promena normalnih sila u preseccima lančanice, usled tečenja i skupljanja betona, kako su to ustanovili M. Ivković i Ž. Praščević /7/, nisu tako velike kao promene napona u betonu i kablovima. Zbog tečenja i skupljanja betona smanjuje se trajni napon pritiska u betonu koji je nastao unošenjem sile prethodnog naprezanja u konstrukcijski sistem. Ukoliko nije izvršena pravilna procena ovog napona ne uzimajući u obzir tečenje i skupljanje betona, tako da je stvarni trajni napon pritiska u betonu manji od sračunatog, usled delovanja nekog povremenog opterećenja on će se još više smanjiti. Ako je ovaj napon jednak nuli ili se pojavi zatezanje u betonu mogu nastati prsline, odnosno doći do medjusobnog odvajanja montažnih elemenata. Oni tada deluju kao balast koji samo opterećuje konstrukcijski sistem čiji se poprečni presecci u ovom slučaju drastično smanjuju. Usled toga dolazi do pojave velikih deformacija i destrukcije sistema sa svim neželjenim posledicama. Zbog svega ovoga analiza stanja napona u kojoj se uzimaju svi relevantni uticaji je izvanredno značajna.

#### REFERENCE

- /1/ A r g i r i s, J.H., and S c h a r p f, D.W., Large deflection analysis of prestressed networks. Journal of Structural Division ASCE, March 1972, pp. 633-654.
- /2/ F r e i, O. Zugeranspruche Konstruktionen. Springer-Verlag, 1966.
- /3/ D j u r i ć, M., Statika konstrukcija I deo. Naučna knjiga, Beograd, 1970.
- /4/ D j u r i ć, M., Teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija. Naučno delo, Beograd 1963.
- /5/ H e i l i g, R., Statik der schweren Seile. Der Stahlbau, Heft 11,12, 1954.



- /6/ I v k o v i ć, M., Višeće konstrukcije (skripta). Građevinski fakultet, Beograd 1968.
- /7/ I v k o v i ć, M., P r a š č e v i ć, Ž., Prilog proračunu višećih sistema od prethodno napregnutog betona. XII Jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, Sv. C5, 1974.
- /8/ I v k o v i ć, M., P r a š č e v i ć, Ž., K l e m, N., Prilog analizi višećih krovova uz primenu elektronskog računara XIV Jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, Sv. C-12 str. 89-96, 1978.
- /9/ M o l m a n n, H., Analysis of hanging roofs by means of the displacement method. Polyteknisk Forlag, Lingby 1974.
- /10/ P r a š č e v i ć, Ž., Neki problemi tehničke teorije armirano-betonskog štapa. Magistarski rad, Građevinski fakultet, Beograd 1973.
- /11/ Д м и т р и е в, Л. Г., К а с и л о в, Л. Г., Вантовые покрытия. Будивельник, Киев 1968.
- /12/ Л и в л е в, А. Ф., С е л е з н е в а, Е. Н., Методы расчета пространственных вантовых систем. Стройиздат, Москва 1964.
- /13/ К а ч у р и н, В. К., Теория высячих систем. Гостехстройиздат, Москва 1962.
- /14/ К а н т о р о в и ч, Л. В., А к и л о в, Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Наука, Москва 1978.



## 7. PRIMENA METODE INTEGRALNIH JEDNAČINA ZA REŠAVANJE NEKIH GRANIČNIH ZADATAKA TEORIJE ARMIRANOBETONSKOG ŠTAPA

U predhodnim poglavljima ovog rada primenjivana je metoda konačnih elemenata, odnosno metoda deformacija za određivanje pomeranja čvorova i sila u preseccima armiranobetonskih elemenata. Medjutim, za rešavanje nekih graničnih zadataka svrsishodnije je primeniti postupak koji je za elastične materijale predložio N.Hajdin /6/. U ovom postupku se matematički model graničnog problema teorije elastičnosti, koji se sastoji od jedne ili više linearnih diferencijalnih, odnosno parcijalnih jednačina sa zadatim uslovima na konturi, prikazuje u obliku jedne ili više Fredholmovih integralnih jednačina u kojima su nepoznate funkcije izvodi najvišeg reda traže ih funkcija u diferencijalnim odnosno parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Značajna prednost postupka sastoji se u tome što su jezgra ovih jednačina (Greenove funkcije) u stvari uticajne funkcije ili "uticajne linije" za linijske sisteme, koje se lako određuju poznatim metodama Statike konstrukcija. Pored toga po ovom postupku se dobijaju i pri malom broju tačaka podele rezultati veće tačnosti nego ako se primene neki drugi postupci (diferencna metoda) i vrlo je podesan ispisavanje programa za elektronski računar. U ovom radu se daje pokušaj uopštavanja ovog postupka, odnosno proširivanja primene za rešavanje nekih problema teorije armiranobetonskih konstrukcija uzimajući u obzir tečenje i skupljanje betona, kao i za rešavanje graničnih zadataka linearne viskoelastičnosti.

U ovom poglavlju takodje će se ukazati i na mogućnost primene metode integralnih jednačina na rešavanje nekih problema krivih štapova u ravni. Izvršiće se uporedjenja rezultata dobijenih na osnovu integralnih i algebarskih veza izmedju napona i deformacija betona, kako bi se ocenila opravdanost primene prostijih algebarskih veza za rešavanje ovakvih problema.



7.1. Granični zadatak definisan linearnom integro-diferencijalnom jednačinom

Razmatra se granični zadatak uzimajući u obzir deformacije zavisne od vremena, čiji se matematički model sastoji od linearne integro-diferencijalne jednačine

$$L(y, t) \equiv \frac{\partial^{(n)} y(x, t)}{\partial x^n} + f_{n-1}(x) \frac{\partial^{(n-1)} \bar{y}(x, t)}{\partial x^{n-1}} + \dots + f_1(x) \frac{\partial \bar{y}(x, t)}{\partial x} +$$

$$+ f_0(x) \bar{y}(x, t) = f(x, t)$$

i uslovima na konturi za  $x=0$  i  $x=l$

$$\sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\partial^{(i-1)} y(0, t)}{\partial x^{i-1}} + \alpha_1 y(0, t) = 0,$$

$$\sum_{i=2}^n \beta_i \frac{\partial^{(i-1)} y(l, t)}{\partial x^{i-1}} + \beta_1 y(l, t) = 0.$$

( 7.2 )

Broj ovih uslova je  $n$ .

U jednačini (7.1) su funkcije

$$\bar{y}(x, t) = y(x, t) + \int_{t_1}^t V(t, \tau) y(x, \tau) d\tau,$$

( 7.3 )

gde je  $V(x, t)$  jezgro Volterrinog integralnog operatora  $V$ , a zavisi od reoloških svojstava materijala.

Izrazi (7.3) se mogu kraće pisati u operatorskom obliku

$$\bar{y} = (I + V)y$$

( 7.3a )

gde je  $I$  jedninični operator.

Ako se uvede nova funkcija

$$\eta(x, t) = f(x, t) - \sum_{i=1}^{n-1} f_{(i)}(x) \frac{\partial^{(i)} \bar{y}(x, t)}{\partial x^i} - f_0(x) \bar{y}(x, t),$$

( 7.4 )

onda je jednačina (7.1)

$$\frac{\partial^{(n)} y(x, t)}{\partial x^n} = \eta(x, t).$$

( 7.5 )

Rešenje ove jednačine za zadate granične uslove (7.2) je /13/

$$y(x, t) = \int_0^l a(x, z) \eta(z, t) dz + y_0(x, t),$$

( 7.6 )

gde je  $a(x, z)$  Greenova funkcija jednačine (7.6) za homogene granične uslove, a  $y_0(x, t)$  polinom do  $(n-1)$  stepena koji se određuje iz graničnih uslova.

Kada se (7.6) uvrsti (7.3) dobija se

$$\bar{y}(x, t) = \int_0^l a(x, z) \eta(z, t) dz + y_0(x, t) + \int_{t_1}^t V(t, \tau) \int_0^l a(x, z) \eta(z, \tau) dz d\tau + \int_{t_1}^t V(t, \tau) y_0(x, \tau) d\tau \quad (7.7)$$

ili u operatorskom obliku

$$\bar{y} = (I + V)(A\eta + y_0) \quad (7.7a)$$

gde je  $A$  Fredholmov integralni operator čije je jezgro funkcija  $a(x, z)$ .

Parcijalni izvod funkcija  $y(x, t)$  i  $\bar{y}(x, t)$  po  $x$  je

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(m)} y(x, t)}{\partial x^m} &= \int_0^l a^{(m)}(x, z) \eta(z, t) dz + y_0^{(m)}(x, t), \\ \frac{\partial^{(m)} \bar{y}(x, t)}{\partial x^m} &= \int_0^l a^{(m)}(x, z) \eta(z, t) dz + y_0^{(m)}(x, t) + \\ &+ \int_{t_1}^t V(t, \tau) \int_0^l a^{(m)}(x, z) \eta(z, \tau) dz d\tau + \int_{t_1}^t V(t, \tau) y_0^{(m)}(x, \tau) d\tau; \end{aligned} \quad (7.8)$$

ili u operatorskom obliku

$$\begin{aligned} y^{(m)} &= A^{(m)} \eta + y_0^{(m)}, \\ \bar{y}^{(m)} &= (I + V)(A^{(m)} \eta + y_0^{(m)}), \\ m &= 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (7.8a)$$

gde je  $A^{(m)}$  Fredholmov integralni operator čije je jezgro  $a^{(m)}(x, z)$ .

Kada se drugi od izraza (7.8) odnosno (7.8a) uvrsti u (7.1), uzimajući u obzir (7.5) i (7.6) dobija se posle sredjivanja Fredholm-Volterrina integralna jednačina

$$\eta(x, t) + \int_0^l g(x, z) \eta(z, t) dz + \int_{t_1}^t V(t, \tau) \int_0^l g(x, z) \eta(z, \tau) d\tau dz = f^*(x, t), \quad (7.9)$$

odnosno u operatorskom obliku

$$\eta + (I + V)G\eta = f^*, \quad (7.10)$$



gde su

$$g(x, x) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) a^{(i)}(x, x) + f_0(x) a(x, x), \quad (7.11)$$

$$f^*(x, t) = f(x, t) - f_0(x) y_0(x, t) - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) y_0^{(i)}(x, t);$$

odnosno

$$G = \sum_{i=1}^n f_i A^{(i)} + f_0 A \quad (7.12)$$

$$f^* = f - f_0 y_0 - \sum_{i=1}^{n-1} f_i y_0^{(i)}$$

### 7.11 Rešavanje Fredholm-Volterrine integralne jednačine

U najvećem broju slučajeva nije moguće naći rešenje jednačine (7.9) u zatvorenom obliku, pa treba primeniti numerički postupak da bi se odredile vrednosti funkcije  $\eta(x, t)$ . U intervalu  $[0, l]$  izabere se  $m$  tačaka čije su apcise  $x=x_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) i kojima se ovaj interval deli na  $m-1$  podintervala. Isto tako se interval vremena  $[t_1, \bar{t}]$ , gde je  $\bar{t}$  neki proizvoljno izabran veliki broj, deli sa  $n$  tačaka u kojima je  $t=t_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) na  $n-1$  podintervala. Vrednosti funkcije  $\eta(x, t)$  u tačkama  $x_i$  u vreme  $t_j$   $\eta(x_j, t_j)$  obrazuju vektor prikazan u transponovanom obliku

$$\eta^T = \{ \eta_1^T, \eta_2^T, \eta_3^T, \dots, \eta_j^T, \dots, \eta_n^T \}, \quad (7.13)$$

gde su elementi  $\eta_{ij}$  vektora  $\eta_j$  vrednosti funkcije  $\eta(x_i, t_j)$

$$\eta_{ij} = \eta(x_i, t_j), \quad i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n; \quad (7.14)$$

tako da je

$$\eta_j^T = \{ \eta_{1j}, \eta_{2j}, \eta_{3j}, \dots, \eta_{ij}, \dots, \eta_{mj} \}. \quad (7.14a)$$

Na sličan način se vrednosti funkcije  $f^*(x, t)$  u tačkama  $x_i$  i vremenu  $t_j$

$$f_{ij}^* = f^*(x_i, t_j) \quad (7.15)$$

prikazuju vektorom

$$f^{*T} = \{ f_1^{*T}, f_2^{*T}, f_3^{*T}, \dots, f_i^{*T}, \dots, f_n^{*T} \} \quad (7.15a)$$

Fredholmov integralni operator  $G$  zamenjuje se kvadratnom simetričnom matricom  $G$  čiji elementi



$$g_{ik} = g(x_i, z_k) \quad i=1,2,\dots,m; k=1,2,\dots,m; \quad (7.16)$$

zavise od izabranog postupka određivanja numeričke vrednosti integrala .

N.Hajdin je dao jedan način za određivanje elemenata matrice  $G$  koji daje rezultate velike tačnosti i pri manjem broju podintervala, čime se broj nepoznatih smanjuje - što je značajno ako se ne koriste računski sredstva većih mogućnosti. Ovaj postupak je detaljno izložen u radovima /6/ i /7/ i ovde neće biti ponavljan.

Volterrin integralni operator  $V$  zamenjuje se matricom  $V$  tipa  $(n,n)$ , kako je to autor pokazao u radu /9/ i odeljku 2.4, čiji su elementi

$$v_{11} = 0, \quad v_{kl} = 0, \quad k < l, \quad k=1,2,\dots,n; l=1,2,\dots,n.$$

Integralna jednačina (7.9) zamenjuje se sistemom algebarskih jednačina

$$\begin{bmatrix} I+(1+v_{11})G & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ v_{21}G & I+(1+v_{22})G & 0 & \cdot & 0 \\ v_{31}G & v_{32}G & I+(1+v_{33})G & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n1}G & v_{n2}G & v_{n3}G & \cdot & (1+v_{nn})G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \cdot \\ \eta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^* \\ f_2^* \\ f_3^* \\ \cdot \\ f_n^* \end{Bmatrix} \quad (7.17)$$

Da bi se postigla ušteda u korišćenju kapaciteta i vremena rada računara, preporučuje se, s obzirom na strukturu matrice ovog sistema linearnih algebarskih jednačina, da se ne formira posebno ova matrica i jednačine sve rešavaju jednovremeno. Mnogo je bolje, pošto se formiraju matrice  $V$  i  $G$  da se prvo reši sistem jednačina

$$(I+G)\eta_1 = f_1^* \quad (7.18)$$

i dobije  $\eta_1$  kao rešenje zadatka Teorije elastičnosti. Zatim se s obzirom na sistem jednačina (7.17) koristeći ovo rešenje određuje  $\eta_2$  i tako redom primenjujući rekurentan postupak, rešavanjem sistema jednačina

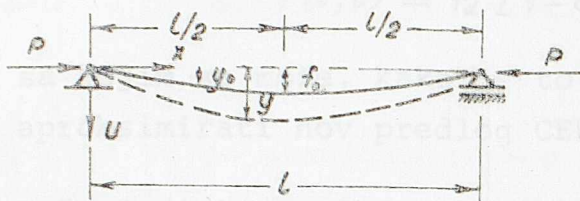
$$[I+(1+v_{jj})G]\eta_j = f_j^* - \sum_{k=1}^{j-1} v_{jk}G\eta_k \quad j=2,3,\dots,n. \quad (7.19)$$

određuju vektori  $\eta_j$ .



7.12 Brojčani primer. Deformacije pritisnutog armirano betonskog štapa

Na Sk. 7.1 je prikazan armirano betonski štap zglobno vezan na krajevima opterećen nekom silom  $P$



Sk. 7.1

$$P = \alpha_E P_E, \quad (7.20)$$

gde je

$$P_E = E_b I_{id} \frac{\pi^2}{l^2} \quad (7.21)$$

Eulerova sila izvijanja pravog štapa od elastičnog materijala.

$$I_{id} = I_b + \frac{E_a}{E_b} I_a. \quad (7.21a)$$

$I_b$  i  $I_a$  su momenti inercije površine betona i armature u odnosu na težišnu osu koja je normalna na ravan savijanja, dok su  $E_b$  i  $E_a$  Youngovi moduli elastičnosti betona i armature.

Pošto se armiranobetonski štapovi ne mogu napraviti da budu idealno/pravi, posmatra se slučaj kada je osa štapa pre delovanja sile  $P$  kriva linija, čije su ordinate  $u_0$ .

$$y_0 = f_0 \sin \frac{\pi}{l} x, \quad (7.22)$$

gde je  $f_0$  ordinata ose u sredini raspona  $l$ .

Iz uslova ravnoteže, sila na delu deformisane ose dužine  $dx/12/$  i uzimajući u obzir da je promena krivine deformisane ose armiranobetonskog štapa sa uticajem tečenja betona /9/

$$-x(x,t) = \frac{\partial^2 [y(x,t) - y_0(x,t)]}{\partial x^2} = \frac{M(x,t)}{E_b I_{id}} + \int_{t_1}^t V(t,\tau) \frac{M(x,\tau)}{E_b I_{id}} d\tau, \quad (7.23)$$

gde su

$$M(x,t) = P u(x,t),$$

$$V(t,\tau) = -\bar{\lambda} \frac{\partial \varphi(t,\tau)}{\partial \tau}, \quad (7.24)$$

$$\bar{\lambda} = I_b / I_{id},$$

dobija se integro-diferencijalna jednačina

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \alpha_E \frac{\pi^2}{l^2} \left[ y(x,t) + \int_{t_1}^t V(t,\tau) y(x,\tau) d\tau \right] = \frac{\partial^2 y_0(x)}{\partial x^2}. \quad (7.25)$$



Ako se funkcija  $V(t, \tau)$  odredi prema Maxwellovom, Kelvinovom ili Burgersovom reološkom modelu betona sa konstantnim ili promenljivim viskoznim svojstvima tokom vremena, može se naći rešenje ove integro-diferencijalne jednačine u zatvorenom obliku. U ovom slučaju je korišćen Burgersov reološki model sa promenljivim reološkim svojstvima (sk. 1.9) na kojem bazira Illston-Jordaanov predlog za koeficijent tečenja betona (1.178)

$$\varphi(t, \tau) = \bar{\varphi}_d [1 - e^{-\bar{\gamma}(\xi_t - \xi_\tau)}] + \xi_t - \xi_\tau, \quad (7.26)$$

sa kojim se može, kako je to istaknuto u odeljku 1.84, uspešno aproksimirati nov predlog CEB-FIP /1/.

Rešenje integro-diferencijalne jednačine (7.25) se traži u obliku

$$y(x, t) = f_0 \sin \frac{\pi}{l} x \cdot u(t), \quad (7.27)$$

tako da se funkcija  $u(t)$  dobija rešavanjem Volterrine jednačine

$$(1 - \alpha_E) u(t) - \alpha_E \int_{t_1}^t v(t, \tau) u(\tau) d\tau = 1, \quad (7.27a)$$

gde je s obzirom na (7.24) i (7.25)

$$v(t, \tau) = \bar{\lambda} [\bar{\gamma} \bar{\varphi}_d e^{-\bar{\gamma}(\xi_t - \xi_\tau)} + 1] \frac{d\xi_\tau}{d\tau}. \quad (7.28)$$

Diferencijaljenjem jednačine (7.27a) dobija se linearna diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2 u}{d\xi_t^2} + p \frac{du}{d\xi_t} + qu = 0, \quad (7.29)$$

$$p = \frac{\alpha_E \bar{\lambda} (1 + \bar{\gamma} \bar{\varphi}_d) + \bar{\gamma} (\alpha_E - 1)}{\alpha_E - 1}, \quad q = \frac{\alpha_E \bar{\lambda} \beta}{\alpha_E - 1} \quad (7.30)$$

čije je opšte rešenje

$$u = C_1 e^{r_1 \xi_t} + C_2 e^{r_2 \xi_t}, \quad (7.31)$$

gde su

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \left[ \frac{p^2}{4} - q \right]^{1/2} \quad (7.32)$$

Vrednosti konstanti  $C_1$  i  $C_2$ , određene iz početnih uslova koji proističu iz integralne jednačine (7.27)

$$t = t_1, \quad \xi_t = \xi_{t_1}, \quad u(\xi_{t_1}) = 1/(1 - \alpha_E), \quad \frac{du}{d\xi_t}(t_1) = \alpha_E \bar{\lambda} (1 + \bar{\gamma} \bar{\varphi}_d) / (1 - \alpha_E)^2,$$

su

$$C_1 = \frac{\alpha_E \bar{\lambda} (1 + \bar{\gamma} \bar{\varphi}_d) - r_2 (1 - \alpha_E)}{(1 - \alpha_E)^2} \cdot \frac{e^{-r_1 \xi_{t_1}}}{r_1 - r_2}, \quad (7.33)$$

$$C_2 = \frac{\alpha_E \bar{\lambda} (1 + \bar{\gamma} \bar{\varphi}_d) - r_1 (1 - \alpha_E)}{(1 - \alpha_E)^2} \cdot \frac{e^{-r_2 \xi_{t_1}}}{r_2 - r_1}.$$



Iz jednačine (7.27) i izraza (7.31) i (7.33) može se lako zaključiti da ako se štap optereti Eulerovom silom izvijanja

$$P \rightarrow P_E, \quad \alpha_E \rightarrow 1,$$

onda

$$u(t) \rightarrow \infty,$$

što znači da ugib teorijski teži beskonačno velikoj vrednosti, što znači da bi se štap prethodno polomio.

Ako se primeni ovde prikazani postupak uvodeći oznaku

$$\eta(x, t) = - \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (7.34)$$

dobija se za granične uslove  $y(0, t) = y(l, t) = 0$ , Fredholm-Volterrina integralna jednačina

$$\eta(x, t) - \alpha_E \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l a(x, z) \eta(z, t) dz - \alpha_E \frac{\pi^2}{l^2} \int_{\xi_{t1}}^{\xi_{t2}} \int_0^l a(x, z) \eta(z, \xi) d\xi dz = f^*(x) \quad (7.35)$$

gde je s obziron na (7.34)

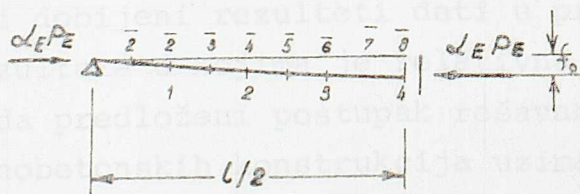
$$a(x, z) = \begin{cases} (l-x) \frac{z}{l} & z \leq x \\ (l-z) \frac{x}{l} & x \leq z \end{cases} \quad (7.36)$$

uticajna funkcija za moment savijanja proste grede raspona  $l$ , dok je

$$f^*(x) = f_0 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi}{l} x \quad (7.37)$$

Pošto je funkcija pomeranja  $y(x, t)$  simetrična u odnosu na presek u sredini raspona, to se radi smanjenja broja nepoznatih, sistem dat na sk. 7.1 zamenjuje sistemom na sk. 7.2. Uticajna funkcija je sada

$$a(x, z) = \begin{cases} z, & z \leq x \\ x, & x \leq z \leq l/2. \end{cases}$$



Sk. 7.2

Za numeričko određivanje integrala  $\int_0^l a(x, z) \eta(z, t) dz$  primenjen je postupak koji je predložio N. Hajdin

/6/, a prema kojem se pored tačaka

$i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) u kojima se određuju funkcije  $\eta(x_i, t)$  i  $y(x_i, t)$  i koje se nalaze na istom razmaku koriste i vrednosti funkcije  $(x, s)$  u tačkama  $\bar{i}$  ( $\bar{i}=\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}$ ). Na taj način se vrši kvadratna interpolacija i primenjuje Simpsonovo pravilo numeričke integracije. Na taj



način se obezbedjuje veća tačnost i pri manjem broju tačaka podele i.

Vrednosti funkcije uticaja  $a(x_i, z_j)$  su elementi matrice  $\bar{A}$ , prema kojima se koristeći pomenuti postupak / 6 / određuju elementi matrice  $G$  koja zamenjuje Fredholmov integralni operator  $G$  sa jezgrom

$$g(x, z) = a(x, z) \alpha_E \pi^2 / l^2$$

Funkcije  $\xi_t$  su određene tako da odgovaraju koeficijentu nepovratnog dela tečenja betona prema Propisima CEB-FIP / 1 /, a koje su date izrazom (1.198a)

$$\xi_t = \bar{\varphi}_f / \beta_f(t)$$

za "fiktivnu debljinu" elementa  $l = 10$  cm. Starost betona pri opterećenju  $t_1 = 20$  dana. Maksimalna vrednost koeficijenta povratnog dela tečenja uzeta je takodje prema Propisima CEB-FIP  $\bar{\varphi}_d = 0,40$ , dok je koeficijent  $\bar{\delta} = 6$ . Prema ovim vrednostima primenjujući ranije prikazani numerički postupak integraljenja Volterrinih integralnih jednačina, Volterrin integralni operator  $V$  zamenjen matricom  $V$ , pošto je prethodno interval vremena  $[20, 10000]$  podeljen na 9 podintervala. Koeficijent  $\bar{\lambda} = 0,96$ .

Na ovaj način se Fredholm-Volterrina integralna jednačina (7.35) zamenjuje sistemom linearnih algebarskih jednačina (7.17). Rešavanjem ovog sistema dobijaju se vrednosti funkcija  $\eta(x_i, t_j)$  ( $i=1,2,3,4, t=1,2,\dots,10$ ) odnosno elementi vektora  $\eta$ . Kada su poznate ove vrednosti, pomeranja  $y(x_i, t_j)$  odnosno vektor

$$y^T = \{y_1^T, y_2^T, \dots, y_{10}^T\}$$

određuje se prema izrazu

$$y_j = A \eta_j, \quad A = \frac{l^2}{\alpha_E \pi^2} G, \quad j=1,2,\dots,10. \quad (7.38)$$

Celokupan postupak je sproveden uz korišćenje elektronskog računara i dobijeni rezultati dati u priloženim tabelama. Na osnovu ovih rezultata u kojima je relativna greška manja od 0,5%, može se zaključiti da predloženi postupak rešavanja graničnih zadataka Teorije armiranobetonskih konstrukcija uzimajući u obzir tečenje (puzanje) betona daje rezultate velike tačnosti, i može se uspešno primeniti za rešavanje problema za koje nije moguće naći matematička rešenja u zatvorenom obliku. Treba istaći, da je ovo samo jedan ilustrativan primer u kojem je vršeno uporedjenje numeričkog i egzaktnog rešenja, koja važe za štapove velikih vitkosti u kojima se najveći deo procesa deformisanja odvija u oblasti važenja linearnih veza između napona i deformacija.



MATRICA VREDNOSTI GREENOVE FUNKCIJE  $a(x_i, x_j)$

0.0625	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250
0.0625	0.1250	0.1875	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500
0.0625	0.1250	0.1875	0.2500	0.3125	0.3750	0.3750	0.3750	0.3750	0.3750
0.0625	0.1250	0.1875	0.2500	0.3125	0.3750	0.4375	0.4375	0.4375	0.5000

MATRICA G

0.074536	0.041123	0.064255	0.035983
0.082247	0.092528	0.123370	0.071966
0.082247	0.100238	0.169634	0.110519
0.082247	0.100238	0.174774	0.136221

MATRICA A

0.018880	0.010417	0.016276	0.009115
0.020833	0.023438	0.031250	0.018229
0.020833	0.025391	0.042969	0.027995
0.020833	0.025391	0.044271	0.034505

MATRICA VOLTERRINOG INTEGRALNOG OPERATORA

0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.161	0.161	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.108	0.269	0.161	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.083	0.190	0.269	0.161	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.071	0.153	0.190	0.269	0.161	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.065	0.136	0.153	0.190	0.269	0.161	0.000	0.000	0.000	0.000
0.062	0.127	0.136	0.153	0.190	0.269	0.161	0.000	0.000	0.000
0.061	0.124	0.127	0.136	0.153	0.190	0.269	0.161	0.000	0.000
0.061	0.122	0.124	0.127	0.136	0.153	0.190	0.269	0.161	0.000
0.060	0.121	0.122	0.124	0.127	0.136	0.153	0.190	0.269	0.161

KOEFICIJENTI POVRATNOG, NEPOVRATNOG I UKUPNOG TECENJA BETONA

0.000	0.211	0.311	0.358	0.380	0.391	0.396	0.398	0.399	0.400
0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	1.000	1.125
0.000	0.336	0.561	0.733	0.880	1.016	1.146	1.273	1.399	1.525

ORDINATE OSE STAPA  $y(x_i, t_j)$  - NUMERICKO RESENJE

0.637	0.791	0.924	1.052	1.181	1.318	1.466	1.628	1.807	2.004
1.179	1.463	1.710	1.945	2.184	2.438	2.712	3.011	3.341	3.706
1.540	1.911	2.234	2.542	2.855	3.185	3.543	3.935	4.366	4.843
1.667	2.069	2.418	2.751	3.090	3.448	3.835	4.259	4.726	5.242

ORDINATE OSE STAPA  $y(x_i, t_j)$  - TACNO RESENJE

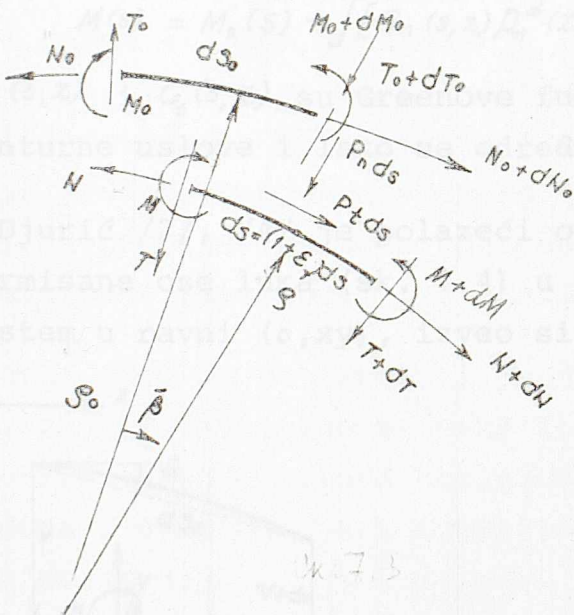
0.638	0.794	0.928	1.056	1.186	1.324	1.472	1.635	1.814	2.012
1.179	1.466	1.715	1.952	2.192	2.446	2.720	3.021	3.352	3.718
1.540	1.916	2.241	2.550	2.864	3.195	3.554	3.947	4.380	4.858
1.667	2.074	2.426	2.760	3.100	3.459	3.847	4.272	4.741	5.259



## 7.2 Krivi armiranobetonski štap u ravni

Konstruktivski sistemi sastavljeni od krivih armiranobetonskih štapova se vrlo često projektuju u praksi. Za takve sisteme, naročito kada su rasponi veliki, neophodno je proveriti stabilnost i odrediti sile u karakterističnim preseccima po linearizovanoj teoriji II reda. Ovoj problematici posvećen je veliki broj radova - naročito u oblasti elastičnog ponašanja konstrukcija. Najčešće se problem svodio na rešavanje sistema diferencijalnih jednačina sa poznatim konturnim uslovima, i na taj način određivala pomeranja i sile u preseccima odnosno kritično spoljašnje opterećenje pri kojem sistem dolazi u nestabilan položaj /13/.

D. Radenković /10/ je polazeći od uslova ravnoteže u pravcu normale i tangente na elementu štapa dužine  $ds$  (sk. 7.3) ispisao uslove ravnoteže, izvršivši linearizaciju ovih uslova i dobio sistem diferencijalnih jednačina za elastičan materijal



$$\frac{dT}{ds_0} + \frac{N}{s_0} + p_n + p_n^d = 0, \quad (7.40)$$

$$\frac{dN}{ds_0} - \frac{T}{s_0} + p_t + p_t^d = 0,$$

$$\frac{dM}{ds_0} - T = 0.$$

$N, T$  i  $M$  su normalna, transalna sila i moment savijanja u nekom preseku štapa po linearizovanoj teoriji II reda,  $ds_0$  i  $s_0$  su element luka i poluprečnik krivine u posmatranom preseku u nedeformisanom stanju, dok su  $p_n$  i  $p_t$  komponente spoljašnjeg opterećenja u pravcu normale i tangente štapa.  $p_n^d$  i  $p_t^d$  su komponente tzv. dopunskog opterećenja u pravcu tangente i normale koje se određuje prema izrazima



$$p_n^d = -\frac{N_0}{EI} M, \quad p_t^d = \frac{T_0}{EI} M \quad (7.41)$$

ako se opterećenje obrće zajedno sa elementom štapa i

$$p_n^d = \frac{d}{ds_0} (N_0 \bar{\beta}) - \frac{T_0}{\rho_0} \bar{\beta}, \quad p_t^d = -\frac{d}{ds_0} (T_0 \bar{\beta}) - \frac{N_0}{\rho_0} \bar{\beta} \quad (7.42)$$

ako se opterećenje ne obrće zajedno sa elementom luka.

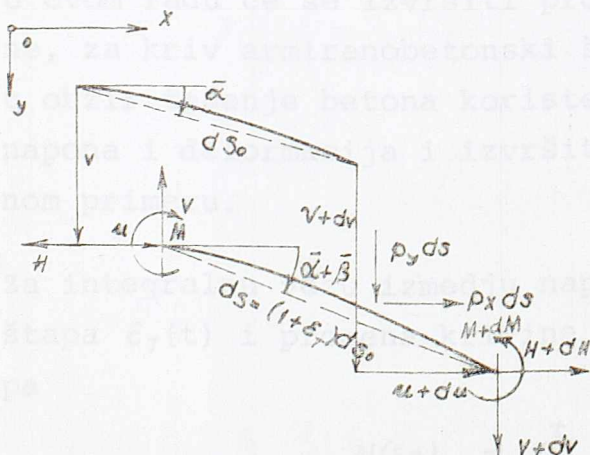
U ovim izrazima su  $N_0$  i  $T_0$  normalna i transferzalna sila u poprečnom preseku po linearnoj teoriji I reda, dok  $\bar{\beta}$  predstavlja ugao obrtanja elementa  $ds_0$ .

Iz izraza (7.40) se može zaključiti neposredno da se uticaji po teoriji II reda mogu dobiti prema linearnoj teoriji I reda, u kojoj važi princip superpozicije, ako se stvarnom opterećenju doda dopunsko opterećenje definisano izrazima (7.41) odnosno (7.42). Zahvaljujući ovoj konstataciji, D. Radenković je problem matematički definisao u obliku Fredholmove integralne jednačine, koja za slučaj kada se opterećenje obrće sa elementom luka glasi

$$M(s) = M_0(s) + \int [G_n(s, x) p_n^d(x) + G_t(s, x) p_t^d(x)] dx \quad (7.43)$$

$G_n(s, x)$  i  $G_t(s, x)$  su Greenove funkcije (funkcije uticaja) za zadate konturne uslove i lako se određuju metodama Statike konstrukcija.

M. Djurić /2/, /4/ je polazeći od uslova ravnoteže na elementu  $ds$  deformisane ose luka (sk. 7.4) u odnosu na neki globalni koordinatni sistem u ravni  $(o, xy)$ , izveo sistem diferencijalnih jednačina



Sk. 7.4

$$\frac{du}{ds} = \epsilon_t \cos \bar{\alpha} - \bar{\beta} \sin \bar{\alpha}$$

$$\frac{dv}{ds} = \epsilon_t \sin \bar{\alpha} + \bar{\beta} \cos \bar{\alpha},$$

$$\frac{dH}{ds} + p_x = 0, \quad (7.45)$$

$$\frac{dM}{ds} + H \frac{dy}{ds} - V \frac{dx}{ds} + (N_0 \bar{\beta} + T_0 \epsilon_t) = 0,$$

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = -\frac{M}{EI},$$

$$\epsilon_t = (H \cos \bar{\alpha} + V \sin \bar{\alpha}) / EA.$$



Ako se zanemari uticaj  $\varepsilon$ , odnosno skraćenja štapa, što ima opravdanja u armiranobetonskim konstrukcijama, i usvajajući kao dopunsko opterećenje

$$p^d = N_0 \bar{\beta} \quad (7.46)$$

dobija se Fredholmova integralna jednačina

$$\bar{\beta}(s) = \bar{\beta}_0(s) + \int G_{\beta}(s, z) \bar{\beta}(z) dz \quad (7.47)$$

M. Djurić i B. Ćorić /4/ su razmatrali slučaj kada se ne zanemaruje  $\varepsilon_T$  i uzeli u obzir i promene temperature i dobili neznatne razlike u odnosu na rešenja koja se dobijaju prema jednačini (7.47).

### 7.21 Uticaj tečenja (puzanja) betona

Zbog tečenja (puzanja) betona deformacije se tokom vremena menjaju, što dovodi do znatnih promena sila u poprečnim preseccima. Pošto presečne sile zavise od deformacija ovaj proces može se tokom vremena pri nekom stalnom opterećenju stabilizovati. Medjutim za neka opterećenja, koja nisu bila kritična u vreme njihovog nanošenja, može usled povećanja deformacija i sila u preseccima doći do loma konstrukcije posle određenog vremena koje se naziva i kritičnim vremenom. Uticaj tečenja (puzanja) betona na deformacije krivih štapova razmatrali su D. Radenković i J. Lazić /11/.

U ovom radu će se izvršiti proširenje Fredholmove integralne jednačine, za kriv armiranobetonski štap slično kao u odeljku 7.1, uzimajući u obzir tečenje betona koristeći integralne i algebarske veze izmedju napona i deformacija i izvršiti uporedjenja rezultata u jednom brojnom primeru.

Za integralnu vezu izmedju napona i deformacija su dilatacija ose štapa  $\varepsilon_T(t)$  i promena krivine deformisane ose armirano betonskog štapa

$$\varepsilon_T(s, t) = \frac{N(s, t)}{E_b A_{id}} + \bar{\lambda}_N \int_{t_1}^t K_N(t, \tau) \frac{N(s, \tau)}{E_b A_{id}} d\tau, \quad (7.48)$$

$$-\mathcal{K}(s, t) \equiv -\frac{d\bar{\beta}}{ds} = \frac{M(s, t)}{E_b I_{id}} + \bar{\lambda}_M \int_{t_1}^t K_M(t, \tau) \frac{M(s, \tau)}{E_b I_{id}} d\tau;$$

$$\bar{\lambda}_M = I_b / I_{id}, \quad \bar{\lambda}_N = A_b / A_{id}.$$



$K_N(t, \tau)$  i  $K_M(t, \tau)$  zavise, kako je to već istaknuto od koeficijenta tečenja betona, i za male procenete armiranja može se pisati

$$K_N(t, \tau) = K_M(t, \tau) = K(t, \tau) = - \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} \quad (7.49)$$

ili se odgovarajuće matrice koje zamenjuju ove operatore mogu dobiti i tačnije kako je to autor pokazao u radu /9/.

Zbog ovoga će se "dopunsko" opterećenje menjati tokom vremena, pa će naprimer u slučaju kada se opterećenje obrće zajedno sa elementom luka biti s obzirom na (7.41) i (7.47)

$$p_n^d(s, t) = - \frac{N_0}{E_b I_{id}} \left[ M(s, t) + \bar{\lambda}_M \int_{t_1}^t K_N(t, \tau) M(s, \tau) d\tau \right], \quad (7.50)$$

$$p_t^d(s, t) = \frac{T_0}{E_b I_{id}} \left[ M(s, t) + \bar{\lambda}_M \int_{t_1}^t K_M(t, \tau) M(s, \tau) d\tau \right].$$

Kada se ovi izrazi uvrste u (7.43) dobija se, uz pretpostavku da se pri stalnom opterećenju promene sila u presecima od stalnog opterećenja po teoriji prvog reda usled tečenja i skupljanja betona tokom vremena mogu zanemariti, Fredholm-Volterrina integralna jednačina

$$M(s, t) = M_0(s, t) + \int G(s, x) M(x, t) dx + \int G(s, x) \bar{\lambda}_M \int_{t_1}^t K_M(t, \tau) M(x, \tau) dx d\tau \quad (7.51)$$

gde je

$$G(s, x) = -G_n(s, x) \frac{N_0}{E_b I_{id}} + G_t(s, x) \frac{M_0}{E_b I_{id}} \quad (7.52)$$

Za algebarske veze izmedju napona i deformacija (2.4) betona su /9/

$$\varepsilon_T(s, t) = \frac{N(s, t)}{E_{b\varphi}(t, t_1) A_{i\varphi}(t, t_1)} + \varrho(t, t_1) \frac{N_b(s, t_1)}{E_{b\varphi}(t, t_1) A_{i\varphi}(t, t_1)} \quad (7.53)$$

$$-\varepsilon_x(s, t) = \frac{M(s, t)}{E_{b\varphi}(t, t_1) I_{i\varphi}(t, t_1)} + \varrho(t, t_1) \frac{M_b(s, t_1)}{E_{b\varphi}(t, t_1) I_{i\varphi}(t, t_1)}$$

$$A_{i\varphi}(t, t_1) = A_b + \frac{E_a}{E_{b\varphi}(t, t_1)} A_a, \quad I_{i\varphi}(t, t_1) = I_b + \frac{E_a}{E_{b\varphi}(t, t_1)} I_a. \quad (7.54)$$

$N_b(s, t_1)$  i  $M_b(s, t_1)$  su normalna sila i moment savijanja koje prima betonski deo poprečnog preseka u vreme nanošenja spoljašnjeg opterećenja  $t=t_1$ . Za homogene i simetrično armirane preseke je

$$N_b(s, t_1) = \bar{\lambda}_N N(s, t_1)$$

$$M_b(s, t_1) = \bar{\lambda}_M M(s, t_1)$$

( 7.55 )

Dopunsko opterećenje koje odgovara izrazima (7.50) je

$$p_n^d(s, t) = - \frac{N_0}{E_b I_{id}} k(t, t_1) [M(s, t) + \rho(t, t_1) M_b(s, t_1)]$$

( 7.56 )

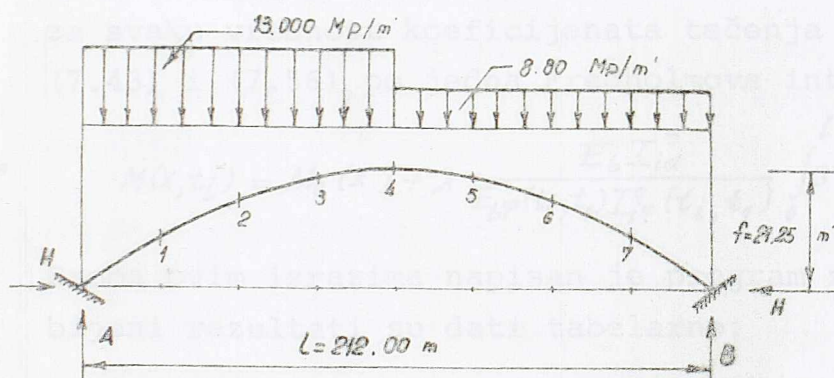
$$p_t^d(s, t) = \frac{T_0}{E_b I_{id}} k(t, t_1) [M(s, t) + \rho(t, t_1) M_b(s, t_1)]$$

gde je

$$k(t, t_1) = \frac{E_b I_{id}}{E_b \varphi(t, t_1) I_{ip}(t, t_1)}$$

### 7.22 Brojčani primer:

Na sk. 7.5 dat je dvoglobni luk, koji je razmatran kao primer u radovima /5/ i /10/, smatrajući da je luk napravljen od armiranog betona.



Sk. 7.5

$$E_b = 3000\ 000\ \text{Mp/m}^2,$$

$$I_{id} \cos \bar{\alpha} = 3.22\ \text{m}^4,$$

$$\bar{\lambda}_M = 0.96.$$

Pošto je ovo ilustrativan primer u kojem se upoređuju rezultati dobijeni na osnovu algebarskih i integralnih veza između napona i deformacija betona uzeto je

ovako izrazito nesimetrično opterećenje i relativno male dimenzije poprečnih preseka, kako bi što više došli do izražaja efekti Teorije II reda.

Proračun je sproveden prema Teoriji starenja i algebarskoj vezi M. Djurića između napona i deformacija betona.

Uvođeci fakotr /10/

$$\lambda = \frac{H_0}{E_b I_{id} \cos \bar{\alpha}} = \frac{2864,52}{3 \times 10^6 \times 3,22} = 0,0002965$$



integralna jednačina (7.51) može se pisati u obliku

$$M(s,t) = M_0(s,t) + \lambda \int_0^l G'(s,x) M'(x,t) dx + \\ + \lambda \bar{\lambda}_M \int_0^l G'(s,x) \int_{t_1}^t K(t,\tau) M(x,\tau) dx d\tau,$$

gde je

$$G'(s,z) = G_y(s,z) + G_x(s,z) \frac{V_0(z)}{I_0}$$

$G_y(s,z)$  i  $G_x(s,z)$  su uticajne funkcije momenata savijanja za vertikalno i horizontalno opterećenje,  $V_0$  je vertikalna komponenta redukcione rezultante svih sila levo od preseka,  $I_0$  je moment inercije idealizovanog poprečnog preseka u temenu luka.

Primenjujući postupak numeričke integracije u odnosu na prostoru koordinatu  $x$ , kako je to pokazano u radu /10/, i metodu Krilova-Bogoljubova za numeričku integraciju po vremenu dobije se sistem algebarskih jednačina sličan sistemu (7.11). Rešavanjem tog sistema, kako je to pokazano u odelju 7.11 dobijene su vrednosti  $M(s,t)$ .

Za algebarske veze između napona i deformacija betona dobijaju se za svaku vrednost koeficijentata tečenja  $\varphi(t,t_1)$ , uzimajući u obzir (7.43) i (7.56), po jedna Fredholmova integralna jednačina

$$M(x,t_i) = M_0(x) + \lambda \frac{E_b I_{id}^c}{E_{b\varphi}(t_i,t_1) I_{i\varphi}^c(t_i,t_1)} \int_0^l G'(s,x) [M(s,t) + \varphi(t,t_1) M(x,t_1)] dx$$

Prema ovim izrazima napisan je program za elektronski računar a dobijeni rezultati su dati tabelarno.

Integralne veze između napona i deformacija

#### MOMENTI U PRESECIMA LUKA PO TEORIJI PRVOG REDA (Mpm)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Metoda	2371.	3222.	2554.	365.	-1870.	-2667.	-2053.

#### MOMENTI U PRESECIMA LUKA PO TEORIJI DRUGOG REDA

$\varphi(t,t_1)$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0.000	3602.	4931.	3766.	389.	-3050.	-4378.	-3310.
0.059	3718.	5092.	3880.	391.	-3162.	-4539.	-3428.
0.116	3835.	5254.	3993.	392.	-3273.	-4701.	-3547.
0.226	4069.	5578.	4221.	395.	-3497.	-5026.	-3784.
0.427	4537.	6225.	4676.	401.	-3945.	-5674.	-4259.
0.762	5453.	7491.	5565.	411.	-4822.	-6942.	-5185.
1.234	7082.	9739.	7139.	426.	-6379.	-9195.	-6830.
1.707	9220.	12688.	9200.	441.	-8422.	-12148.	-8983.
1.978	10726.	14764.	10649.	450.	-9862.	-14228.	-10498.
2.000	10860.	14949.	10777.	451.	-9989.	-14412.	-10632.



## Algebarske veze izmedju napona i deformacija betona

## MOMENTI U PRESECIMA LUKA PO TEORIJI PRVOG REDA

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
	2371.	3222.	2554.	365.	-1870.	-2667.	-2053.

## MOMENTI U PRESECIMA LUKA PO TEORIJI DRUGOG REDA

$\varphi(t, t_0)$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0.000	3604.	4932.	3766.	389.	-3050.	-4378.	-3310.
0.059	3699.	5063.	3859.	391.	-3141.	-4510.	-3407.
0.116	3795.	5196.	3953.	392.	-3233.	-4643.	-3504.
0.226	3987.	5462.	4140.	395.	-3417.	-4909.	-3700.
0.518	4567.	6265.	4706.	403.	-3972.	-5713.	-4288.
1.187	6444.	8855.	6523.	422.	-5766.	-8308.	-6184.
1.669	8641.	11883.	8637.	436.	-7864.	-11339.	-8393.
1.945	10500.	14443.	10420.	445.	-9638.	-13901.	-10258.
1.999	10936.	15042.	10837.	446.	-10054.	-14500.	-10694.
2.000	10948.	15059.	10849.	446.	-10065.	-14517.	-10706.

Razlike u vrednostima momenata savijanja u preseccima lika sračunate prema integralnim i algebarskim vezama izmedju napona i deformacija su beznačajne i relativna greška koja se čini primenom algebarskih veza u odnosu na matematički tačnija rešenja sa integralnim vezama ja u ovom slučaju manja 0,5%. Na osnovu ovoga može se izvući vrlo važan zaključak, da se za rešavanje ovakvih problema Teorije II reda i stabilnosti armiranobetonskih konstrukcija mogu vrlo uspešno primeniti algebarske veze izmedju napona i deformacija betona, koje su znatno jednostavnije za primenu, a omogućavaju rešavanje niza problema uz korišćenje računskih sredstava manjih kapaciteta i mogućnosti.

Nesimetrična stalna opterećenja izazivaju velike promene momenata savijanja i pomeranja tokom vremena usled tečenja (puzanja) betona. Za simetrična stalna opterećenja one su znatno manje, a u ovom slučaju bi vrlo brzo došlo do loma konstrukcije, jer bi naponi u betonu postali usled velikih momenata savijanja bili veći od njegove čvrstoće.

Za rešavanje graničnih zadataka krivog štapa može se uspešno primeniti Metoda konačnih elemenata, kako je to pokazano u poglavlju 5. Primenom ove metode dobijaju se direktno i pomeranja i sile u preseccima a ostvaruje se velika tačnost ako se umesto pravolinijskih upotrebe krivolinijski izoparamatarski elementi /12/.

## REFERENCE

- /1/ Comité Euro-International du béton, Code Modele for Concrete Structures. Paris 1978.
- /2/ Djurić M., Statika konstrukcija I deo. Naučna knjiga, Beograd, 1970.



- /3/ D j u r i ć, M., Diferencijalne jednačine krivog štapa u ravni XI Jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike 1972.
- /4/ D j u r i ć, M., Ć o r i ć, B., Proračun lučnih nosača prema teoriji drugog reda primenom metode integralnih jednačina. XIV Jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, 1978. Sv C-19, str. 69-77.
- /5/ F r i t z, B., Theorie und Berechnung Vollwandiger Bogenträger. Springer, Berlin 1934.
- /6/ H a j d i n, N., Jedan postupak za numeričko rešavanje graničnih zadataka i njegova primena na neke probleme teorije elastičnosti. (Izvod iz doktorske disertacije) Zbornik Gradjevinskog fakulteta No4, Beograd 1958, str. 1-59.
- /7/ H a j d i n, N., and K r a j č i n o v i ć, D., Integral equation method for solution boundary value problems of structural mechanics, Part I and II. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 4, pp.509-522,523-539,1972.
- /8/ L a z a r e v i ć, Dj., Bočna elastična stabilnost luka. Drugi kongres gradjevinskih konstruktora Jugoslavije, str. 108-118,1958.
- /9/ P r a š č e v i ć, Ž., Neki problemi tehničke teorije armirano-betonskog štapa. Magistarski rad, Gradjevinski fakultet, Beograd 1972.
- /10/ R a đ e n k o v i ć, D., Savijanje krivih štapova u ravni (Izvod iz doktorske disertacije) Zbornik Gradjevinskog fakulteta br. 2, Beograd 1955, str. 83-117.
- /11/ R a đ e n k o v i ć D., et L a z i ć, J., Calcul pratique des arcs de grandé portée. Annales de l' Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics. No 322, 1974, pp. 41-71.
- /12/ Z i e n k i e w i c z, O.C., The Finite Element Method in Engineering Science. Mc Grow-Hill, London, 1974.
- /13/ Д и н и к, А. Н., Продольный изгиб и кручение. Академия наук СССР, Москва 1955.
- /14/ С м и р н о в, В. И., Курс высшей математики, том II, Москва, 1962.
- /15/ С м и р н о в, А. Ф., Статическая и динамическая устойчивость сооружений. Трансжелдориздат, Москва 1947.



tog teorijskog rada L. Eulera (1744 god.) o izvijanju pravih štapova. Prvi rad o graničnim stanjima stubova napisao je P. Muskhelishvili 1726, definišući svojstva materijala kao tvrda, perfektno tvrda, meka, perfektno meka, elastična i perfektno elastična. Široka primena celika u građevinarstvu i drugim oblastima, a kasnije i armiranog betona, razvojem nauke i tehnike, dovelo je do razvoja nauke o stabilnosti pravih štapova.

## 8. PRIMENA NELINEARNIH VEZA IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA ZA REŠAVANJE NEKIH ZADATAKA TEORIJE DRUGOG REDA I STABILNOSTI PRAVIH ŠTAPOVA

### 8.1 Uvodne napomene

U prethodnim poglavljima razmatrani su neki zadaci Teorije drugog reda armiranobetonskih konstrukcijskih sistema polazeći od linearnih veza izmedju napona i deformacija. Pošto je i pri kratkotrajnim opterećenjima deformacija nelinearna funkcija napona, to linearne teorije predstavljaju izvesnu idealizaciju - značajnu za praktičnu primenu. Proračun armiranobetonskih i prethodno napregnutih konstrukcija prema Teoriji granične ravnoteže i određivanje koeficijenata sigurnosti na lom, vodeći računa o stanju deformacija u toku eksploatacije objekta, danas se zahteva propisima mnogih zemalja, pa i našim Pravilnikom o tehničkim merama i uslovima za armirani beton. U ovim analizama posmatra se konstrukcijski sistem u celini i određuju za zadata opterećenja, koeficijenti sigurnosti u odnosu na pojavu mehanizama loma zbog formiranja plastičnih zglobova. Pored toga analiziraju se i pojedini elementi konstrukcije i određuju naponi i deformacije i koeficijenti sigurnosti u odnosu na granična stanja loma i eksploatacije uzimajući u obzir i pojavu prslina zbog složenih reoloških svojstava betona, karaktera opterećenja koja različito utiču na stanje deformacija ovakve analize vrlo složene.

Ovim problemima je posvećen veliki broj radova, monografija i eksperimentalnih istraživanja u svetu i u nas (/18/, /32/, /33/, /6/, /13/ i dr.). Jedan od prvih značajnijih radova u nas u ovoj oblasti je rad M. Ivkovića /12/ u kojem se razmatra ponašanje betona u oblasti granične ravnoteže i definišu uslovi loma betona za prostrano stanje napona.

Primena Teorije drugog reda najčešće je u armiranobetonskim konstrukcijama vezana za rešavanje problema njihove stabilnosti. Još se Heron iz Aleksandrije pre više od dve hiljade godina bavio problemom stabilnosti /1/, i znatno kasnije Leonardo da Vinci (1452-1519) pre znameniti-



tog teorijskog rada L.Eulera (1744 god.) o izvijanju pravih štapova. Prvi rad o graničnim stanjima stubova napisao je P.Musschenbroek 1726, definišući svojstva materijala kao tvrda, perfektno tvrda, meka, perfektno meka, elastična i perfektno elastična. Široka primena čelika u građevinarstvu i drugim oblastima, a kasnije i armiranog i prethodno napregnutog betona uticali su od kraja prošlog veka na razvoj teorijskih i eksperimentalnih istraživanja i ostvarenje značajnih doprinosa u ovoj oblasti.

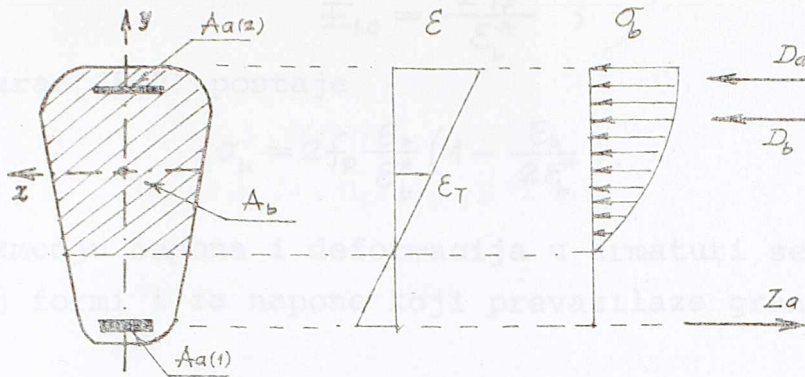
Danas se u teorijskim istraživanjima sve više teži ka uzimanju u obzir realnih svojstava materijala oslanjajući se pri tom na eksperimentalne rezultate. Takođe se ne zanemaruju ni razne vrste imperfekcija - koje se izražavaju u nehomogenosti kvaliteta materijala, ostupanja od projektovane geometrije elemenata i pravca delovanja spoljašnjih sila, koristeći pri tome i metode statističke analize. Zbog složenih reoloških svojstava betona, kao i uslova koji se prepisuju pri projektovanju armiranobetonskih konstrukcija najveći broj problema izlazi izvan okvira elastične stabilnosti i zahteva znatno složeniju analizu i proveru.

S obzirom na ogroman obim ove problematike, autor će u ovom radu ukazati na neke predloge za praktična rešenja nekih od ovih problema i pokušati da definiše postupak za određivanje osnovnih deformacijskih veličina - dilataciju ose  $\epsilon_T$  i promenu krivine  $\kappa$  ose elemenata u posmatranom preseku usled deformisanja i ukazati na mogućnost njihove primene u formulisanju problema Teorije II reda i stabilnosti pravog štapa. Metoda konačnih elemenata, koja se sve više primenjuje u rešavanju različitih zadataka nelinearne teorije u ovom poglavlju neće biti korišćena.

### 8.2 Određjivanje deformacijskih veličina $\epsilon_T$ i $\kappa$ u vreme $t=t_1$ i za kratkotrajna opterećenja

Na Sk.8.1 je prikazan poprečni presek armiranobetonskog štapa u kojem deluju moment savijanja  $M$  i normalna sila  $N$





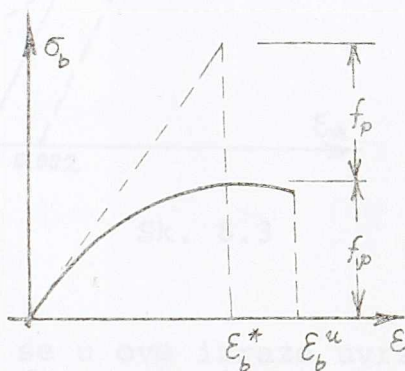
Sk. 8.1

Deformacija u nekoj tački preseka je prema Bernoullievoj hipotezi

$$\varepsilon = \varepsilon_T + \kappa y \quad (8.1)$$

gde je  $\varepsilon_T$  deformacija u težištu površine idealizovanog poprečnog preseka,  $\kappa$  promena krivine poprečnog preseka usled deformisanja a  $y$  ordinata posmatrane tačke.

Veza izmedju napona i deformacija u betonu je prema skici 8.2



Sk. 8.2

$$\sigma_b = E_{b0} \varepsilon_b (1 - \varepsilon_b / 2\varepsilon_b^*) \quad (8.2)$$

$E_{b0}$  je tangenti moduli betona za  $\varepsilon_b^*$  deformacija betona za napon  $\sigma = f_p$  ( $f_p$  je čvrstoća betonske prizme na pritisak). U opštem slučaju je ova deformacija različita od deformacije loma betona  $\varepsilon_b^u$ , tj.

$$\varepsilon_b^* \neq \varepsilon_b^u$$

Na ovaj način se samo jednim izrazom opisuje veza izmedju napona i deformacija betona i u odnosu na Propise CEB-FIP gde je ova veza data sa dva izraza

$$\sigma_b = \begin{cases} E_{b0} \varepsilon_b (1 - \varepsilon_b / 2\varepsilon_b^*), & 0 \leq \varepsilon_b \leq 2,5\% \\ E_{b0} \cdot \varepsilon_b^* / 2 = f_c, & 2,5\% \leq \varepsilon_b \leq 3,5\% \end{cases}, \quad \varepsilon_b^* = 2,5\% \quad (8.3)$$

čini beznačajna greška, a dalja analiza se matematički znatno uprošćava. Izraz (8.2) realnije izražava stvarno ponašanje betona od izraza (8.3) i znatno je prostiji od nekih drugih predloga za veze (3) date u obliku hiperboličke funkcije /17/.

Pošto je prema Sk. 8.2



$$\mathbb{E}_{b0} = \frac{2f_p}{\varepsilon_b^*} \quad (8.4)$$

onda izraz (8.2) postaje

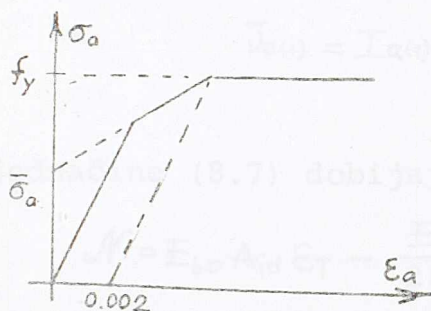
$$\sigma_b = 2f_p \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b^*} \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{2\varepsilon_b^*}\right). \quad (8.5)$$

Veze izmedju napona i deformacija u armaturi se prikazuje u linearnizovanoj formi i za napone koji prevazilaze granicu proporcionalnosti

$$\sigma_a = \bar{\sigma}_a + \bar{\mathbb{E}}_a \varepsilon_a \quad (8.6)$$

$\bar{\sigma}_a$  i  $\bar{\mathbb{E}}_a$  zavise od domena u kojem se nalazi  $\varepsilon_a$  (Sk.8.3).

Prema Britanskim propisima CP 110 /3/ dijagram  $\sigma_a - \varepsilon_a$  je sličan dijagramu prikazanom na Sk. 8.3. Prema Propisima CEB-FIP /2/  $\bar{\sigma}_a$  odgovara naponu velikih izduženja odnosno tečenja  $|\varepsilon_a| \geq 0,2\%$ , dok je  $\bar{\mathbb{E}}_a = 0$ . U oblasti proporcionalnosti napona i deformacija je  $\bar{\sigma}_a = 0$   $\bar{\mathbb{E}}_a = \mathbb{E}_a$ .



Sk. 8.3

Normalna sila  $N$  i moment savijanja  $M$  se mogu izraziti u funkciji napona u betonu i armaturi u preseku

$$N = \int_{A_b} \sigma_b dA + \int_{A_a} \sigma_a dA_a \quad (8.7)$$

$$M = \int_{A_b} \sigma_b y_b dA + \int_{A_a} \sigma_a y_a dA$$

Kada se u ove izraze uvrste izrazi (8.2) i (8.6), uzimajući u obzir (8.1) dobija se

$$\begin{aligned} N &= \mathbb{E}_{b0} A_b \varepsilon_T + \mathbb{E}_{b0} S_b \varkappa - \frac{\mathbb{E}_{b0}}{2\varepsilon_b^*} \left[ A_b \varepsilon_T^2 + 2S_b \varepsilon_T \varkappa + I_b \varkappa^2 \right] + \\ &+ \bar{\sigma}_{a(1)} A_{a(1)} + \bar{\sigma}_{a(2)} A_{a(2)} + (\bar{\mathbb{E}}_{a(1)} A_{a(1)} + \bar{\mathbb{E}}_{a(2)} A_{a(2)}) \varepsilon_T + (\bar{\mathbb{E}}_{a(1)} S_{a(1)} + \bar{\mathbb{E}}_{a(2)} S_{a(2)}) \varkappa \\ M &= \mathbb{E}_{b0} S_b \varepsilon_T + \mathbb{E}_{b0} I_b \varkappa - \frac{\mathbb{E}_{b0}}{2\varepsilon_b^*} \left[ S_b \varepsilon_T^2 + 2I_b \varepsilon_T \varkappa + \mathcal{I}_b \varkappa^2 \right] + \\ &+ \bar{\sigma}_{a(1)} S_{a(1)} + \bar{\sigma}_{a(2)} S_{a(2)} + (\bar{\mathbb{E}}_{a(1)} S_{a(1)} + \bar{\mathbb{E}}_{a(2)} S_{a(2)}) \varepsilon_T + (\bar{\mathbb{E}}_{a(1)} I_{a(1)} + \bar{\mathbb{E}}_{a(2)} I_{a(2)}) \varkappa \end{aligned} \quad (8.8)$$

gde su

$$S_b = \int_{A_b} y_b dA, \quad I_b = \int_{A_b} y_b^2 dA, \quad \mathcal{I}_b = \int_{A_b} y_b^3 dA \quad (8.9)$$

$$S_{a(1)} = \int_{A_{a(1)}} y_a dA, \quad S_{a(2)} = \int_{A_{a(2)}} y_a dA, \quad I_{a(1)} = \int_{A_{a(1)}} y_a^2 dA, \quad I_{a(2)} = \int_{A_{a(2)}} y_a^2 dA.$$



Ako se uvede idealizovani poprečni presek, čija je površina  $A_{id}$ , statički moment  $S_{id}$  i moment inercije  $I_{id}$

$$\begin{aligned} A_{id} &= A_b (1 + \bar{n}_{a(1)} S_{a(1)} + \bar{n}_{a(2)} S_{a(2)}), \\ S_{id} &= S_b + \bar{n}_{a(1)} S_{a(1)} + \bar{n}_{a(2)} S_{a(2)} = 0, \\ I_{id} &= I_b (1 + \bar{n}_{a(1)} \bar{V}_{a(1)} + \bar{n}_{a(2)} \bar{V}_{a(2)}) \end{aligned} \quad (8.10)$$

gde su

$$\bar{n}_{a(1)} = \bar{E}_{a(1)} / \bar{E}_{b0}, \quad \bar{n}_{a(2)} = \bar{E}_{a(2)} / \bar{E}_{b0}, \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned} S_{a(1)} &= A_{a(1)} / A_b, & S_{a(2)} &= A_{a(2)} / A_b, \\ \bar{V}_{a(1)} &= I_{a(1)} / I_b, & \bar{V}_{a(2)} &= I_{a(2)} / I_b, \end{aligned} \quad (8.12)$$

jednačine (8.7) dobijaju oblik

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \bar{E}_{b0} A_{id} \varepsilon_T - \frac{\bar{E}_{b0}}{2\bar{E}_b^*} \left[ A_b \varepsilon_T^2 + 2S_b \varepsilon_T \varkappa + I_b \varkappa^2 \right], \\ \mathcal{M} &= \bar{E}_{b0} I_{id} \varkappa - \frac{\bar{E}_{b0}}{2\bar{E}_b^*} \left[ S_b \varepsilon_T^2 + 2I_b \varepsilon_T \varkappa + \mathcal{J}_b \varkappa^2 \right], \end{aligned} \quad (8.13)$$

gde su

$$\mathcal{N} = N - (\bar{\sigma}_{a(1)} A_{a(1)} + \bar{\sigma}_{a(2)} A_{a(2)}), \quad \mathcal{M} = M - (\bar{\sigma}_{a(1)} S_{a(1)} + \bar{\sigma}_{a(2)} S_{a(2)}), \quad (8.14)$$

Ako se naponi u armaturi nalaze u domenu elastičnog ponašanja onda su  $\bar{\sigma}_{a(1)} = 0$ ,  $\bar{\sigma}_{a(2)} = 0$ ,  $\bar{E}_{a(1)} = \bar{E}_{a(2)} = \bar{E}_a$ , pa su  $\mathcal{N} = N$ ,  $\mathcal{M} = M$ .

Rešavanjem sistema kvadratnih jednačina (8.13) određuju se deformacijske veličine  $\varepsilon_T$  i  $\varkappa$  u posmatranom preseku. Ako se u tom preseku pojavila prslina zbog prekoračenja napona zatezanja u betonu (faza velikog ekscentriciteta), treba odrediti prethodno položaj neutralne ose i geometrijske karakteristike tzv. "aktivne" površine poprečnog preseka. Medjutim ovakav račun je dosta glomazan i nepraktičan ukoliko se ne koristi računar, tako da ima opravdanja izvršiti neka uprošćenja. Jednačine (8.13) postaju nešto jednostavnije kada se razmatraju simetrički poprečni preseki bez prslina u betonu (faza malog ekscentriciteta), pošto je tada



$$S_b = 0, \quad F_b = 0. \quad (8.15)$$

Kada se prema drugoj jednačini ovako uprošćenog sistema jednačina (13)  $\varepsilon_T$  izrazi u funkciji  $M$  i  $\varkappa$

$$\varepsilon_T = \frac{I_{id}}{I_b} \varepsilon_b^* - \frac{M}{E_b I_b} \frac{\varepsilon_b^*}{\varkappa} \quad (8.16)$$

i uvrsti u prvu jednačinu, dobija se posle sredjivanja

$$\varkappa^4 + p \varkappa^2 + q \varkappa + r = 0, \quad (8.17)$$

gde su

$$p = \frac{A_b I_{id}^2}{I_b^3} \varepsilon_b^{*2} - \frac{2 A_{id} I_{id} \varepsilon_b^{*2}}{I_b^2} + \frac{2 N \varepsilon_b^*}{E_b I_b},$$

$$q = 2 \left[ \frac{A_{id}}{I_b^2} - \frac{A_{id} I_{id}}{I_b^3} \right] \frac{M}{E_b} \varepsilon_b^{*2} \quad (8.18)$$

$$r = \frac{A_b M^2 \varepsilon_b^{*2}}{E_b^2 I_b^3}.$$

Za uobičajene procenat armiranja veličina  $q$  je znatno manja od  $p$  i  $r$ , te se njen uticaj na deformaciju može zanemariti, i uprostiti jednačina (8.17), tako da ona postaje bikvadratna

$$\varkappa^4 + p \varkappa^2 + r = 0. \quad (8.19)$$

Jedno rešenje ove jednačine, koje će se dalje koristiti u analizi deformacija je

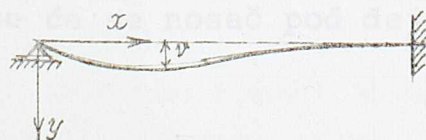
$$\varkappa = \left[ -\frac{p}{2} + \left[ \frac{p^2}{4} - r \right]^{1/2} \right]^{1/2} \quad (8.20)$$

ili

$$\varkappa = \varkappa(N, M, \varepsilon) \quad (8.21)$$

Za zadate sile u preseku  $M$  i  $N$  i mehanička svojstva betona i čelika, prema teoriji prvog reda vrednosti  $p$  i  $r$  se mogu prethodno odrediti. Pomeranja tačaka ose štapa  $v$  u pravcu ose  $y$  i uglovi obrtanja poprečnih preseka  $\bar{\varphi}$  usled deformisanja (Sk. 8.4) određuju se rešavanjem diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varkappa$$



Sk. 8.4

za zadate granične uslove.

Za rešavanje ovog zadatka može se koristiti Mohrova analogija kao i u teoriji elastičnosti uvodjenjem zamenjujućeg nosača i tzv. fiktivnog opterećenja

$$q^f = \left[ -\frac{p}{2} + \left[ \frac{p^2}{4} - r \right]^{1/2} \right]^{1/2} \quad (8.22)$$

Ako se za određivanje stanja napona i deformacija koristi elektronski računar nije neophodno vršiti pomenuta uprošćenja. Rešavanjem sistema kvadratnih jednačina, vodeći računa o pojavi prslina, dobijaju se vrednosti  $\mathcal{K}$  u unapred izabranim poprečnim preseccima, a zatim koristeći Mohrovu analogiju i primenjujući metode numeričke integracije određuju vrednosti pomeraanja  $\mathcal{V}$  u ovim preseccima.

Postupak se sprovodi interaktivno. Prvo se za moment  $M$  i normalnu silu  $N$ , sračunatim po teoriji I reda, određuju za homogene preseke  $\mathcal{E}_T$  i  $\mathcal{K}$ , a zatim prema izrazima (8.1), (8.2) i (8.6) naponi u betonu i armaturi. Ukoliko su prekoračeni naponi zatezanja u betonu, odnosno naponi u armaturi se nalaze izvan oblasti proporcionalnosti vrši se korektura. Pošto su sračunate vrednosti  $\mathcal{E}$  na gornjoj i donjoj ivici preseka na osnovu Bernoullieve hipoteze određuje se položaj neutralne ose u preseku i aktivna površina preseka. Pored toga određuje se vrednost  $\bar{\sigma}_a$  i  $\bar{\epsilon}_a$ , zavisno od dobijenih vrednosti u prvoj iteraciji. Ukoliko je potrebno da se problem tretira po Teoriji II reda (vitki pritisnuti elementi) prema vrednostima pomeraanja  $\mathcal{V}$  sračunatim u prvoj iteraciji određuje se vrednost momenta po teoriji drugog reda  $M_{II}$ .

$$M_{II} = M_I + N\mathcal{V} \quad (8.23)$$

gde je  $M_I$  moment po Teoriji I reda.

Sa ovim novim podacima proračun se ponavlja u sledećim iteracijama sve dok u preseku ne bude

$$\max |\epsilon_{(i)} - \epsilon_{(i-1)}| \leq \delta \quad (8.24)$$

gde je  $\delta$  neki proizvoljno izabran mali broj zavisno od tačnosti koja se želi postići.

Ako su u nekom preseku stvoreni uslovi za lom po betonu ili armaturi, tj.  $\epsilon_b > \epsilon_u$  ili  $\epsilon_a > \epsilon_a^u$  konstatuje se će se nosač pod dejstvom ovog opterećenja slomiti.



### 8.21 Brojčani primer

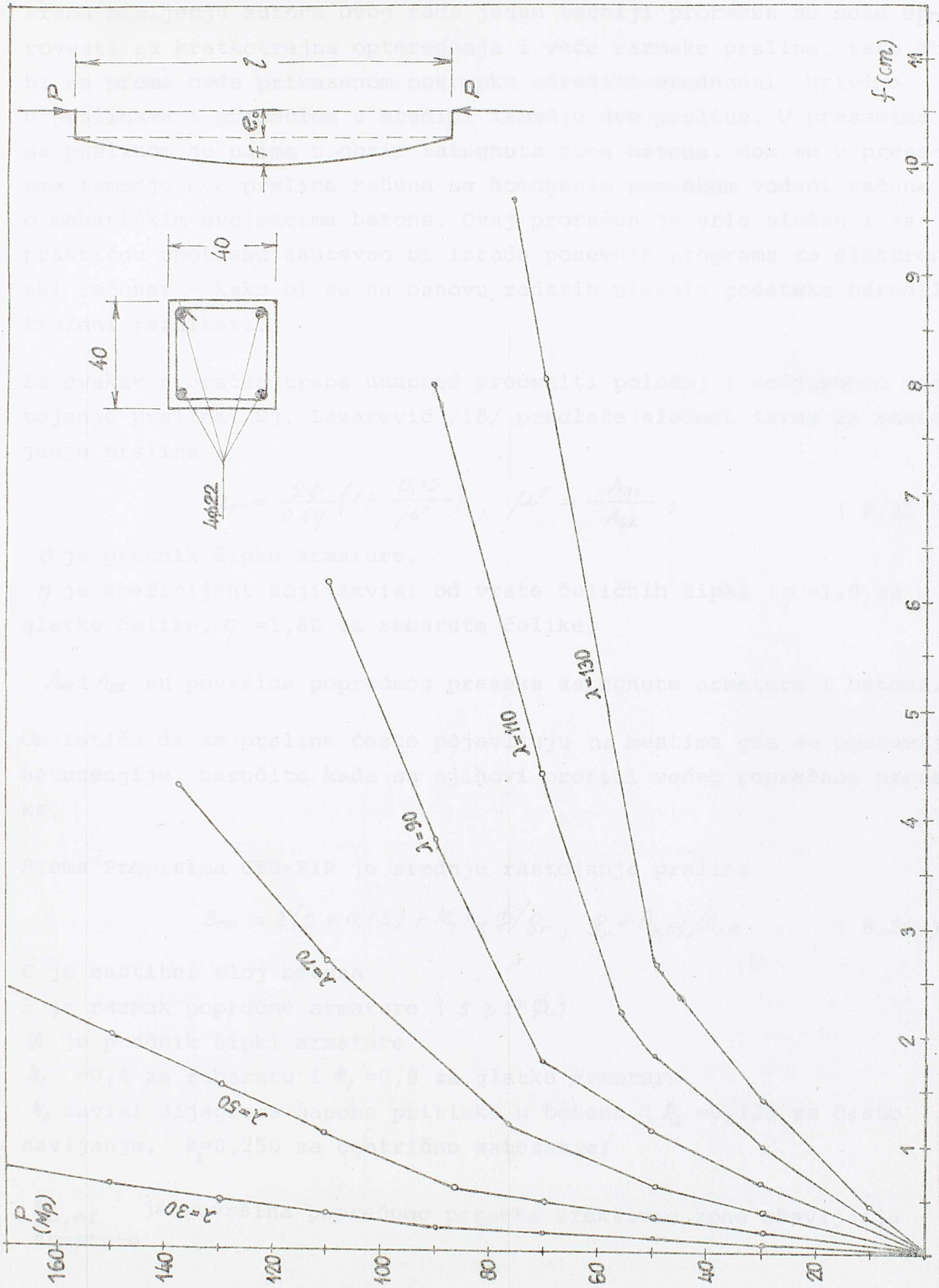
Za armirano betonski štap ekscentrično opterećen silom  $P$  (sk.8.5) odrediti za različite vitkosti  $\lambda$  prema Teoriji drugog reda pomeranje  $f$  u sredini raspona i sile loma  $P$  uzimajući u obzir nelinearne veze između napona i deformacija. Čvrstoća betona na pritisak  $300 \text{ kp/cm}^2$ , na zatezanje  $30 \text{ kp/cm}^2$ ,  $\varepsilon_b^u = 0,35\%$ , početni modul elastičnosti betona  $\bar{E}_{bo} = 300\,000 \text{ kp/cm}^2$ . Modul elastičnosti  $\bar{E}_a = 2100\,000 \text{ kp/cm}^2$  za  $\varepsilon_a \leq 0,2\%$  i  $\bar{E}_a = 0$  za  $\varepsilon_a \geq 0,2\%$ ,  $\varepsilon_a \leq 0,5\%$ .

Proračun je izvršen prema ovde izvedenim izrazima i prikazanom postupku tako što je menjana veličina normalne sile sve dok nisu bili ispunjeni uslovi loma po betonu ili armaturi. Vrednosti  $\varepsilon_T$  i  $\mu$  određivane su u 11 poprečnih preseka koji se nalaze na istom rastojanju rešavanjem sistema kvadratnih jednačina (8.13). Vrednosti  $f$  u ovim presecima smatrane su kao fiktivno opterećenje proste grede raspona  $l$ , slično kao i u elastostatici. Fiktivni momenti savijanja od ovog opterećenja predstavljaju pomeranja tačaka u poprečnog preseka. Numerička integracija je izvršena primenom Simpsonovog postupka. Celokupan postupak je programiran za elektronski računar i dobijen je veliki broj numeričkih rezultata, a ovde se samo daju krive koje izražavaju zavisnost normalne sile  $N$  i pomeranja  $f$  preseka u sredini raspona za različite vitkosti  $\lambda$ .

Iz ovih dijagrama se može neposredno zaključiti da pojava prslina u poprečnim presecima izaziva velike promene pomeranja odnosno "prelom" dijagrama  $N-f$ . Pošto ovi dijagrami vrlo malo ostupaju od pravih linija to ima puno opravdanja primena bilinearnih dijagrama, koji su našli i eksperimentalnu potvrdu u ispitivanjima R.Faverea i A.Radojčića /9/.

### 8.22 Uticao rastojanja prslina

Beton u zategnutoj zoni između dve prsline, naročito kada su one na većem rastojanju, učestvuje u prijemu spoljašnjih sila, pa se njegov uticaj na krutost poprečnih sila i deformacije nosača ne može zanemariti. U literaturi i propisima pojedinih zemalja daju se različiti približni obrasci za praktičnu upotrebu pomoću kojih se sračunava krivina deformisane ose štapa vodeći računa o ovom faktoru /9/, /13/, /18/, /19/, /28/, /34/, /36/.



Sk. 8.5



Prema mišljenju autora ovog rada jedan tačniji proračun se može sprovesti za kratkotrajna opterećenja i veće razmake prslina, tako što bi se prema ovde prikazanom postupku odredile vrednosti krivine u prslinama i preseccima u sredini između dve prsline. U preseccima sa prslinom ne uzima u obzir zategnuta zona betona, dok se u preseccima između dve prsline računa sa homogenim presekom vodeći računa o mehaničkim svojstvima betona. Ovaj proračun je vrlo složen i za praktičnu upotrebu zahtevao bi izradu posebnih programa za elektronski računar - kako bi se na osnovu zadatih ulaznih podataka odredili traženi rezultati.

Za ovakav proračun treba unapred proceniti položaj i međusobno rastojanje prslina. Dj. Lazarević /18/ predlaže sledeći izraz za rastojanje prslina

$$a_{pr} = \frac{2\phi}{0.6\eta} \left( 1 + \frac{0.10}{\mu^*} \right), \quad \mu^* = \frac{A_{az}}{A_{bz}}, \quad (8.25)$$

$\phi$  je prečnik šipke armature,

$\eta$  je koeficijent koji zavisi od vrste čeličnih šipki ( $\eta = 1,0$  za glatke čelike,  $\eta = 1,60$  za rebarste čelike)

$A_{az}$  i  $A_{bz}$  su površine poprečnog preseka zategnute armature i betona.

On ističe da se prsline često pojavljuju na mestima gde su postavljene uzengije, naročito kada su njihovi profili većeg poprečnog preseka.

Prema Propisima CEB-FIP je srednje rastojanje prslina

$$S_{rm} = 2(c + 0,15) + k_1 k_2 \phi / \rho_r, \quad \rho_r = A_{b,ef} / A_{bz} \quad (8.26)$$

$c$  je zaštitni sloj betona

$S$  je razmak poprečne armature ( $S \geq 15\phi$ )

$\phi$  je prečnik šipki armature

$k_1 = 0,4$  za rebarstu i  $k_1 = 0,8$  za glatku armaturu

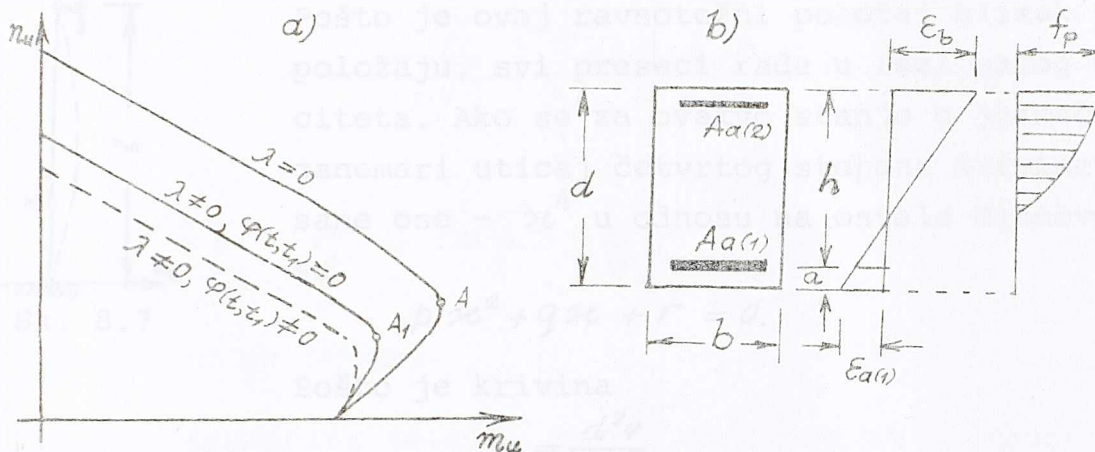
$k_2$  zavisi dijagrama napona pritiska u betonu ( $k_2 = 0,125$  za čisto savijanje,  $k_2 = 0,250$  za centrično zatezanje)

$A_{b,ef}$  je površina poprečnog preseka efektivne zone obavijanja armature

8.3 Dijagrami interakcije

Radi efikasnijeg i bržeg proračuna armirano betonskih elemenata opterećenih ekscentrično i određivanja koeficijenata sigurnosti u odnosu na graničnu nosivost koriste se dijagrami interakcije normalne sile loma  $N_u$  i momenta loma  $M_u$  ili vrednosti  $n_u$  i  $m_u$ , gde su za pravougaoni presek (sk. 8.6)

$$n_u = \frac{N_u}{bh f_p}, \quad m_u = \frac{M_u}{bh^2 f_p} \quad (8.28)$$



Sk. 8.6

Kada se  $n_u$  i  $m_u$  za izabrane procenite armiranja u pritiskutoj i zategnutoj zoni  $\rho_{a(2)}$  i  $\rho_{a(1)}$ , količnike  $d/h$  i  $a/h$ , čvrstoću betona  $f_p$ , vitkosti elementa  $\lambda$  i koeficijent tečenja  $\varphi(t, t_1)$ , izraze u funkciji

$$k_\epsilon = \epsilon_b / (\epsilon_b + \epsilon_{a(1)})$$

kao nezavisnog i promenljivog parametra dobijaju se dijagrami interakcije  $n_u$  i  $m_u$  prikazani na sk. 8.6a. Sa ove skice se može videti da se sa povećanjem vitkosti elementa i koeficijenta tečenja betona  $\varphi(t, t_1)$  smanjuje njegova nosivost. Tačke A i A<sub>1</sub> na dijagramima interakcije označavaju slučaj kada su istovremeno ispunjeni uslovi za lom u pritiskutoj zoni betona i izduženje kidanja armature ( $\epsilon_b = \epsilon_b^u$ ,  $\epsilon_a = \epsilon_a^u$ ).

U literaturi se može naći već broj ovakvih dijagrama koje su pojedini autori /5/, /10/, /17/, /20/, napravili oslanjajući se na nacionalne propise, različite uslove oslanjanja na krajevima štapa i koeficijente tečenja betona. D.Jevtić /16/ je sastavio ovakve dijagrame za pravougaone i kružne preseke sa vitkostima  $\lambda = 0$ , ne uzimajući u obzir koeficijent tečenja betona, prema odredbama našeg Pravilnika o



tehničkim merama i uslovima za beton i armirani betona /25/.

#### 8.4 Izvijanje idealno pravog štapa

Dat je idealno prav armiranobetonski štap zglavkasto oslonjen na krajevima, centrično opterećen silom  $P$  (Sk. 8.7) i treba odrediti silu izvijanja  $P_c$  pri kojoj će štap zauzeti jedan obližnji ravnotežni položaj. Analizira se štap čiji su poprečni preseći simetrični u odnosu na osu oko koje se oni pri deformaciji obrću. Pošto je ovaj ravnotežni položaj blizak početnom položaju, svi preseći rade u fazi malog ekscentriciteta. Ako se za ovakvo stanje u jednačini (8.17) zanemari uticaj četvrtog stepena krivine deformisane ose -  $\varkappa^4$  u odnosu na ostale članove dobija se



Sk. 8.7

$$p \varkappa^2 + q \varkappa + r = 0. \quad (8.29)$$

Pošto je krivina

$$\varkappa = \frac{d^2 v}{dx^2}$$

a razlika napona u armaturi takva da je

$$\bar{M}_a = A_{a(1)} \gamma_{a(1)} \bar{\sigma}_{a(1)} + A_{a(2)} \gamma_{a(2)} \bar{\sigma}_{a(2)} = 0$$

onda je  $M = Nv$ , pa jednačina (8.29) dobija oblik, uzimajući u obzir (8.18)

$$\left[ (1 + \bar{\nu}_a) (\bar{\nu}_a - 2\bar{\rho}_a - 1) + \frac{2N}{E_b A_b \xi_b^*} - \frac{2\bar{N}_a}{E_b A_b \xi_b^*} \right] \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 - \frac{2Nv}{E_b I_b} (1 + \bar{\rho}_a) \bar{\nu}_a \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{N^2 v^2}{E_b^2 I_b^2} = 0,$$

gde je

$$\bar{\nu}_a = \frac{I_{id}}{I_b} - 1, \quad \bar{\rho}_a = \frac{A_{id}}{A_b} - 1, \quad \bar{N}_a = (A_{a(1)} + A_{a(2)}) \bar{\sigma}_a, \quad N = P.$$

Ako se partikularno rešenje, ove diferencijalne jednačine koje zadovoljava konturne uslove traži u obliku

$$v = A \sin \frac{\pi}{l} x \quad (8.29a)$$

dobija se

$$\left[ (1+\bar{\nu}_a)(\bar{\nu}_a-2\bar{\rho}_a-1) + \frac{2(P-\bar{N}_a)}{E_b A_b \epsilon_b^*} \right] A^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi}{l} x + \\ + \frac{2N}{E_b I_b} (1+\bar{\rho}_a) \bar{\nu}_a A^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sin^2 \frac{\pi}{l} x + \frac{P^2}{E_b^2 I_b^2} A^2 \sin^2 \frac{\pi}{l} x = 0.$$

Pošto je

$$A \sin \frac{\pi}{l} x \neq 0,$$

jednačina ima netrivialno rešenje kada je

$$\frac{\pi^4}{l^4} \left[ (1+\bar{\nu}_a)(\bar{\nu}_a-2\bar{\rho}_a-1) + \frac{P-\bar{N}_a}{P_b^*} \right] + \frac{2P(1+\bar{\rho}_a)\bar{\nu}_a \pi^2}{E_b I_b l^2} + \frac{P^2}{E_b^2 I_b^2} = 0, \quad (8.29a)$$

gde je

$$P_b^* = \frac{E_b \epsilon_b^* A_b}{2} = f_p A_b$$

sila loma štapa po betonu.

Kada se reši jednačina (8.29a) dobija se izraz za kritičnu silu

$$P_C^T = - \frac{P_E}{(1+\bar{\nu}_a)} \left\{ (1+\bar{\rho}_a)\bar{\nu}_a + \frac{P_E}{2(1+\bar{\nu}_a)P_b^*} - \sqrt{\left[ (1+\bar{\rho}_a)\bar{\nu}_a + \frac{P_E}{2(1+\bar{\nu}_a)P_b^*} \right]^2 + (1+\bar{\nu}_a)(2\bar{\rho}_a-\bar{\nu}_a-1) + \frac{\bar{N}_a}{P_b^*}} \right\} \quad (8.30)$$

ili

$$P_C^T = E^T I_{id} \frac{\pi^2}{l^2} \quad (8.31)$$

gde je

$$E^T = \frac{E_b \epsilon_b^*}{(1+\bar{\nu}_a)} \left\{ (1+\bar{\rho}_a) + \frac{P_E}{2(1+\bar{\nu}_a)P_b^*} - \sqrt{\left[ (1+\bar{\rho}_a)\bar{\nu}_a + \frac{P_E}{2(1+\bar{\nu}_a)P_b^*} \right]^2 + (1+\bar{\nu}_a)(2\bar{\rho}_a-1) + \frac{\bar{N}_a}{P_b^*}} \right\}$$

zamenjujući tangenti moduli, a

$$P_E = E_b I_{id} \frac{\pi^2}{l^2}$$

Eulerova sila izvijanja štapa od elastičnog materijala.

Poznato je da se Eulerova kritična sila može izraziti

$$P_E = E_b A_{id} \left( \frac{\pi}{\lambda} \right)^2, \quad \lambda = \frac{l}{i_{min}}, \quad i_{min} = \sqrt{I_{id}/A_{id}};$$

gde je  $\lambda$  vitkost štapa, a  $i_{min}$  minimalni poluprečnik inercije preseka i da za  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $P_E \rightarrow \infty$ . Kritična sila  $P_C$  ima, međutim, konačnu vrednost za  $\lambda \rightarrow 0$  i  $P_E \rightarrow \infty$ , koja se može lako dobiti kada se izvrši granični prelaz, a koja iznosi

$$\lim_{P_E \rightarrow \infty} P_C = (1+\bar{\nu}_a)(1-2\bar{\rho}_a-\bar{\nu}_a)P_b^* + \bar{N}_a$$



Ako je došlo do postupne plastifikacije čelika, tj.  $\bar{\varepsilon}_a = 0$ , a  $\bar{N}_a = \bar{\sigma}_a A_a$  onda su  $\bar{v}_a = 0$ ,  $\bar{s}_a = 0$ , pa je

$$P_{cr} = P_b^* + \bar{N}_a \quad (8.32)$$

dok je kritičan napon u betonu, jednak njegovoj čvrstoći na pritisak

$$\sigma_{b,c} = f_p \quad (8.32a)$$

Da bi se odredio kritičan napon u betonu  $\sigma_c$ , pri kojem štap počinje da se izviija treba prvo odrediti  $\varepsilon_{b,c}$ . Kada se u prvoj jednačini (8.13) stavi da je  $\mathcal{K} = 0$ , a  $\varepsilon_c = \varepsilon_T$  dobija se

$$\varepsilon_{b,c} = \varepsilon_b^* \left[ \frac{A_{id}}{A_b} - \sqrt{\frac{A_{id}^2}{A_b^2} - \frac{2N}{E_b A_b \varepsilon_b^*}} \right] \quad (8.33)$$

Kritičan napon u betonu je prema (8.3)

$$\sigma_{b,c} = E_{b0} \varepsilon_{b,c} \left( 1 - \varepsilon_{b,c} / 2 \varepsilon_b^* \right) \quad (8.34a)$$

Napon u armaturi se dobija prema izrazu (8.6)

$$\sigma_a = \bar{\varepsilon}_a \varepsilon_{b,c} + \bar{\sigma}_a \quad (8.34b)$$

Dalje se uvode koeficijenti  $\psi_E$  i  $\psi_f$  radi uporedjenja kritičnog napona u betonu sa kritičnim naponom štapa od elastičnog materijala  $\sigma_{c,E}$  i čvrstoćom betona na lom  $f_p$

$$\psi_E = \frac{\sigma_{c,E}}{\sigma_{b,c}}, \quad (8.35)$$

$$\psi_f = \frac{\sigma_{c,E}}{f_p}$$

Da bi se rešio ovaj zadatak mora se primeniti iterativni postupak. Najpre se prepostavi da je  $\bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a$  i  $\bar{\sigma}_a = 0$ ,  $\bar{N}_a = 0$ , odrede geometrijske karakteristike preseka i koeficijenti  $\bar{v}_a$  i  $\bar{s}_a$ , a zatim kritična sila prema izrazu (8.30) i dalje  $\varepsilon_{b,c}$ ,  $\sigma_{b,c}$  i  $\sigma_a$  prema izrazima (8.33) - (8.34a). Ukoliko je  $\sigma_a \leq \bar{\sigma}_a$  nema potrebe da se postupak ponavlja. Ako je  $\sigma_a > \bar{\sigma}_a$  treba uneti stvarne vrednosti  $\bar{\varepsilon}_a$ ,  $\bar{\sigma}_a$  i  $\bar{N}_a$  i sa njima ponoviti ceo postupak a zatim odrediti  $\psi_E$  i  $\psi_f$ .

Za štap od nearmiranog betona su

$$\bar{v}_a = 0, \quad \bar{s}_a = 0, \quad \bar{N}_a = 0, \quad I_{id} = I_b,$$

pa je kritična sila

$$P_C = P_E \left[ -\frac{P_E}{2P_b^*} + \sqrt{1 + \frac{P_E^2}{4P_b^{*2}}} \right] \quad (8.36)$$

Isti ovaj izraz se može dobiti ako se uvede tangentni modul betona

$$E_b^T = \frac{d\sigma_b}{d\varepsilon_b} = E_{b0} \left[ 1 - \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b^*} \right] \quad (8.37)$$

Pošto je prema (8.2)

$$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b^*} = 1 - \sqrt{1 - \sigma_b/f_p} \quad ,$$

onda je tangentni modul

$$E_b^T = E_{b0} \sqrt{1 - \sigma_b/f_p} \quad (8.38)$$

ili ako se usvoji da je napon proporcionalan normalnoj sili  $N=P$

$$E_b^T = E_{b0} \sqrt{1 - P/P_b^*} \quad (8.39)$$

Poznato je da se tzv. Prva Engesser-Kármánova kritična sila može dobiti prema izrazu

$$P_c = E_b^T I_b \frac{\pi^2}{l^2} \quad .$$

Kada se u ovaj izraz uvede (8.39) dobija se nelinearna jednačina

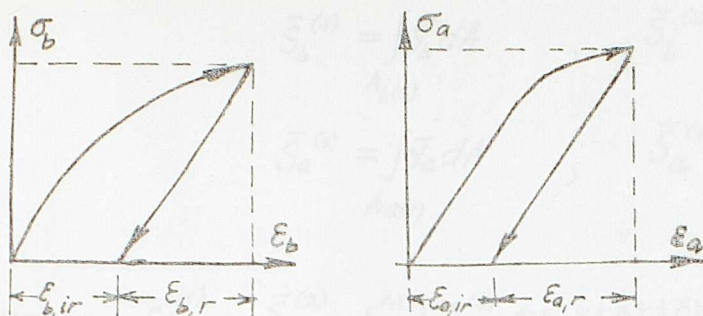
$$P_c = P_E \sqrt{1 - P/P_b^*} \quad (8.40)$$

čije je rešenje dato izrazom (8.36)

Izraz za kritičnu silu, koji je F.Engesser izveo 1895 god. za prav štapa od homogenog materijala koristeći tangentni modul, bio je kritikovan od M.Considérea i F.Jasinskog jer nije vodjeno računa o uticaju smanjenja napona na konveksnoj strani štapa prilikom izvijanja. Engesser je zatim dopunio svoju teoriji izvijanja pravih štapova i uzeo u obzir i ovaj uticaj, zbog kojeg se u poprečnom preseku pojavljuju dva modula deformacija i izveo izraze za kritičku silu uvodeći tzv. "dvostruki modul" ili "redukovani modul". Medjutim ova teorija je bila čak ubrzo zaboravljena, sve dok je nije Th.v. Kármán 1910 g. eksperimentalno potvrdio posle čega je došlo do njene šire praktične primene u proračunima čeličnih konstrukcija /8/, /30/.

Ovde će sada biti izveden izraz za kritičnu silu pravog armiranobetonskog štapa vodeći računa o različitom ponašanju betona i čelika pri porastu i smanjenju napona. Na sk. 8.8 je prikazan  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagram za beton i čelik i polazi se od pretpostavke da je trenutna povratna deformacija proporcionalna naponu za oba materijala /23/.



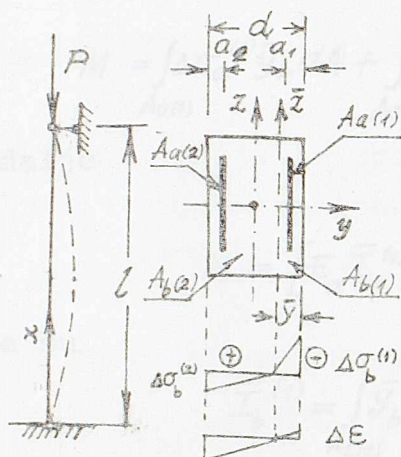


Sk. 8.8

$$\varepsilon_{a,r} = \sigma_a / E_a, \quad (8.41)$$

$$\varepsilon_{b,r} = \sigma_b / E_{b0}$$

Na Sk. 8.9 je prikazan prav armiranobetonski štap koji se izvio pod silom  $P$ . Naposredno pre izvijanja napon je zbog centričnosti bio isti u svima tačkama poprečnog preseka betona odnosno armature. Kada se štap počeo izvijati usled pojave momenta savijanja napon u betonu i armaturi se na konveksnoj strani smanjuje, a na konkavnoj povećava. Veza između priraštaja napona u betonu i armaturi na konveksnoj strani je



Sk. 8.9

$$\Delta\sigma_b^{(1)} = E_{b0} \Delta\varepsilon_b \quad (8.42)$$

$$\Delta\sigma_a^{(1)} = E_a \Delta\varepsilon_a$$

a na konkavnoj

$$\Delta\sigma_b^{(2)} = E_b^T \Delta\varepsilon_b \quad (8.43)$$

$$\Delta\sigma_a^{(2)} = E_a \Delta\varepsilon_a$$

Pošto presek ostaje ravan i posle deformacije, a deformacije betona i čelika u tačkama njihovog spoja su iste, to je

$$\Delta\varepsilon_b = \bar{y}_b \kappa, \quad (8.44)$$

$$\Delta\varepsilon_a = \bar{y}_a \kappa,$$

gde su  $\bar{y}_b$  i  $\bar{y}_a$  rastojanja tačaka poprečnog preseka betona i armature od ose  $\bar{z}$  na kojoj je priraštaj i deformacija jednak nuli.

Pošto se ovde razmatraju stanja neposredna pre i posle izvijanja štapa, to je promena sile jednaka nuli tj.

$$\Delta P_c = \int_{A_a(1)} \Delta\sigma_a^{(1)} dA + \int_{A_a(2)} \Delta\sigma_a^{(2)} dA + \int_{A_b(1)} \Delta\sigma_b^{(1)} dA + \int_{A_b(2)} \Delta\sigma_b^{(2)} dA = 0$$

i dalje sa obzirom na (8.42) i (8.43) i (8.44)

$$E_{b0} \bar{S}_b^{(1)} + E_b^T \bar{S}_b^{(2)} + E_a \bar{S}_a^{(1)} + E_a \bar{S}_a^{(2)} = 0, \quad (8.45)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_b^{(1)} &= \int_{A_b(1)} \bar{y}_b dA, & \bar{S}_b^{(2)} &= \int_{A_b(2)} \bar{y}_b dA, \\ \bar{S}_a^{(1)} &= \int_{A_a(1)} \bar{y}_a dA, & \bar{S}_a^{(2)} &= \int_{A_a(2)} \bar{y}_a dA. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Dakle,  $\bar{S}_b^{(1)}$ ,  $\bar{S}_b^{(2)}$ ,  $\bar{S}_a^{(1)}$  i  $\bar{S}_a^{(2)}$  su statički momenti površina betona i armature u kojima se deformacije povećavaju odnosno smanjuju u odnosu na osu  $\bar{x}$ .

Momenat koji se pojavio u preseku štapa usled izvijanja njegove ose je

$$M = \int_{A_a(1)} \Delta\sigma_a^{(1)} \bar{y}_a dA + \int_{A_a(2)} \Delta\sigma_a^{(2)} \bar{y}_a dA + \int_{A_b(1)} \Delta\sigma_b^{(1)} \bar{y}_b dA + \int_{A_b(2)} \Delta\sigma_b^{(2)} \bar{y}_b dA$$

i dalje

$$M = [E_a \bar{I}_a^{(1)} + E_a \bar{I}_a^{(2)} + E_b \bar{I}_b^{(1)} + E_b \bar{I}_b^{(2)}] \mathcal{X} \quad (8.47)$$

gde su

$$\begin{aligned} \bar{I}_b^{(1)} &= \int_{A_b(1)} \bar{y}_b^2 dA, & \bar{I}_b^{(2)} &= \int_{A_b(2)} \bar{y}_b^2 dA, \\ \bar{I}_a^{(1)} &= \int_{A_a(1)} \bar{y}_a^2 dA, & \bar{I}_a^{(2)} &= \int_{A_a(2)} \bar{y}_a^2 dA, \end{aligned} \quad (8.48)$$

momenti inercije površina poprečnog preseka betona i armature u kojima se deformacije smanjuju odnosno povećavaju u odnosu na osu  $\bar{x}$  oko koje se presek obrće.

Kada se uvede redukovani modul  $E^R$  i moment inercije idealizovanog poprečnog preseka  $I_{id}$  u odnosu na težišnu osu  $x$ , tako da je

$$M = E_b^R I_{id} \mathcal{X} \quad (8.49)$$

i izjednače desne strane izraza (8.47) i (8.49) dobija se

$$E^R = \frac{E_b \bar{I}_b^{(1)} + E_b \bar{I}_b^{(2)} + E_a \bar{I}_a^{(1)} + E_a \bar{I}_a^{(2)}}{I_{id}} \quad (8.50)$$

Diferencijalna jednačina deformisane ose štapa usled delovanja sile izvijanja  $P_C$  je



$$E^R I_{id} \frac{d^2 v}{dx^2} + P_C v = 0$$

iz čijeg se netrivialnog rešenja dobija kritična sila izvijanja pravog armiranobetonskog štapa

$$P_C^R = k E^R I_{id} \frac{\pi^2}{l^2} \quad (8.51)$$

gde koeficijent  $k$  zavisi od toga kako je štap vezan na svojim krajevima. Kritični napon u betonu  $\sigma_{bc}^R$  dobijen prema redukovanom modulu je

$$\sigma_{bc}^R = E^R \pi^2 / \lambda^2 \quad (8.51a)$$

Položaj ose  $\bar{z}$  određen je koeficijentom  $\bar{\xi}_y$

$$\bar{\xi}_y = \bar{y} / d$$

koji se dobija iz uslova (8.45). Za pravougaoni poprečni presek vrednost ovog koeficijenta se određuje rešavanjem kvadratne jednačine

$$(1 - n_T) \bar{\xi}_y^2 + 2(n_T + \bar{n}_a \rho_{a(2)} + n_a \rho_{a(1)}) \bar{\xi}_y - \{n_T + 2[\bar{n}_a \rho_{a(2)} (1 - \bar{\xi}_2) + n_a \rho_{a(1)} \bar{\xi}_1]\} = 0 \quad (8.52)$$

gde su prema oznakama datim na sk. 8.9

$$\bar{\xi}_1 = \frac{a_1}{d}, \quad \bar{\xi}_2 = \frac{a_2}{d}, \quad \rho_{a(1)} = \frac{A_{a(1)}}{A_b}, \quad \rho_{a(2)} = \frac{A_{a(2)}}{A_b} \quad (8.52a)$$

Za određivanje kritične sile i kritičnog napona i u ovom slučaju se primenjuje iterativni postupak. U prvoj iteraciji se pretpostavi da je  $\sigma_a < \bar{\sigma}_a$ ,  $\bar{E}_a = E_a$ , a modul  $E_b^T$  se određuje prema izrazu (8.38), uzimajući da je  $\sigma_b = \sigma_{bc}^T$  i sa ovim vrednostima nadje položaj ose  $\bar{z}$ , odnosno koeficijent  $\bar{\xi}_y$ , a zatim prema izrazima (8.50), (8.51) i (8.51a) modul  $E^R$ , kritična sila  $P_C^R$  i kritični napon  $\sigma_{bc}^R$ . Napon u armaturi se određuje, kao i u slučaju tangentskog modula, prema izrazu (8.34). Ako je  $\sigma_a > \bar{\sigma}_a$  onda treba u sledećoj iteraciji staviti da je  $\bar{E}_a = \bar{E}_a$ , zatim odrediti  $E_b^T$  za napon  $\sigma_{bc}^R$  prema izrazu (8.38) i postupak još jednom ponoviti.

Za male vitkost štapa (izvijanje u području plastičnih deformacija) može se ovakvim proračunom dobiti  $\sigma_{bc}^R > f_p$ . U tom slučaju treba uzeti

$$\sigma_{bc}^R = f_p, \quad \bar{E}_b^T = 0.$$



8.41 Brojčani primer

Odrediti kritičan napon i kritičnu silu izvijanja koristeći tangentni i redukovani modul deformacija centrično pritisnutog armiranobetonskog štapa zglobno vezanog na krajevima, kvadratnog poprečnog preseka strane  $d=40$  cm, varirajući vitkost  $\lambda$ . Presek je simetrično armiran sa procentom armiranja  $\rho_a=0,95\%$ . Početna vrednost modula elastičnosti betona je  $E_{bo}=300\ 000$  kp/cm<sup>2</sup>, čvrstoća betona  $f_p=3000$  kp/cm<sup>2</sup>,  $\varepsilon_b^u=0,35\%$ . Modul elastičnosti armature je  $E_a=2100\ 000$  kp/cm<sup>2</sup> za  $\varepsilon_a \leq 0,2\%$  i  $\bar{E}_a=0$  za  $\varepsilon_a > 0,2\%$ . Granica velikih izduženja čelika je  $\sigma_{a,0.2}=3600$  kp/cm<sup>2</sup>.

Prema izvedenim izrazima u ovom odeljku napisan je program u FORTRAN-u za elektronski računar, a rezultati dati u sledećim tabelama i na skici 8.10

Tabela 8.1

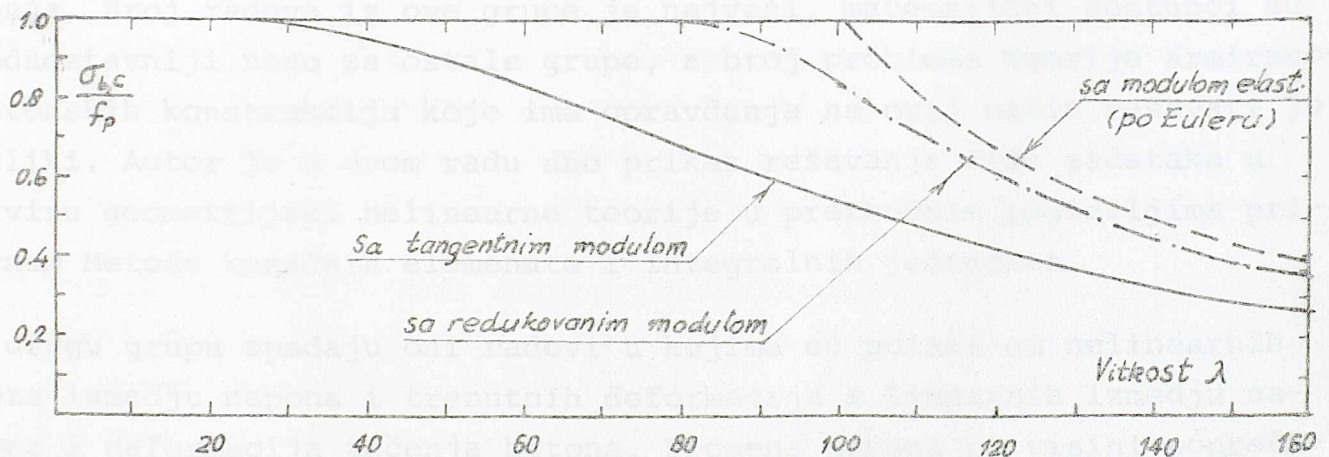
## KRITICNE SILE I NAPONI SA TANGENTNIM MODULIMA

$\lambda$	$P_E$	$P_C^T$	$\sigma_{b,c}^E$	$\sigma_{b,c}^T$	$\frac{\sigma_{b,c}^E}{\sigma_{b,c}^T}$	$\frac{\sigma_{b,c}^T}{f_p}$	$E_b^T$	$\sigma_a$	$\bar{E}_a$
—	$M_p$	$M_p$	kp/cm <sup>2</sup>	kp/cm <sup>2</sup>	—	—	kp/cm <sup>2</sup>	kp/cm <sup>2</sup>	kp/cm <sup>2</sup>
5.	202097.920	534.617	118435.	300.	394.87	1.00	846.	3600.	0
10.	50524.480	534.660	29609.	300.	98.71	1.00	3386.	3600.	0
15.	22455.325	534.375	13159.	300.	43.90	1.00	7614.	3600.	0
20.	12631.120	533.630	7402.	299.	24.73	1.00	13517.	3600.	0
25.	8083.917	532.076	4737.	298.	15.88	0.99	21059.	3600.	0
30.	5613.831	529.294	3290.	297.	11.09	0.99	30166.	3600.	0
35.	4124.447	516.158	2417.	290.	8.33	0.97	37544.	3433.	2100000
40.	3157.780	504.982	1851.	285.	6.50	0.95	47975.	3252.	2100000
45.	2495.036	491.448	1462.	278.	5.26	0.93	59091.	3064.	2100000
50.	2020.979	475.658	1184.	270.	4.39	0.90	70608.	2872.	2100000
60.	1403.458	438.515	822.	250.	3.28	0.83	93736.	2492.	2100000
70.	1031.112	396.951	604.	228.	2.65	0.76	115492.	2139.	2100000
80.	789.445	354.705	463.	204.	2.26	0.68	134793.	1828.	2100000
90.	623.759	314.574	366.	182.	2.01	0.61	151296.	1563.	2100000
100.	505.245	278.098	296.	161.	1.84	0.54	165126.	1342.	2100000
110.	417.558	245.824	245.	143.	1.72	0.48	176615.	1158.	2100000
120.	350.864	217.703	206.	127.	1.63	0.42	186142.	1006.	2100000
140.	257.778	172.433	151.	100.	1.50	0.33	200676.	774.	2100000
160.	197.361	138.765	116.	81.	1.43	0.27	210931.	611.	2100000
180.	155.940	113.501	91.	66.	1.38	0.22	218355.	493.	2100000



## KRITICNI NAPONI SA REDUKOVANIM MODULOM

$\lambda$	$P_c^R$	$E^R$	$\sigma_{b,c}^R$	$\frac{\sigma_{b,c}^E}{\sigma_{b,c}^R}$	$\frac{\sigma_{b,c}^R}{f_p}$	$\xi_y$
	$M_p$	$kp/cm^2$	$kp/cm^2$	—	—	—
5.	534.720	12406.	300.	394.784	1.000	0.106
10.	534.720	9749.	300.	98.696	1.000	0.097
15.	534.720	21214.	300.	43.865	1.000	0.134
20.	534.720	34738.	300.	24.674	1.000	0.168
25.	534.720	50013.	300.	15.791	1.000	0.201
30.	534.720	66389.	300.	10.966	1.000	0.232
35.	534.720	136784.	300.	8.057	1.000	0.326
40.	534.720	150250.	300.	6.169	1.000	0.344
45.	534.720	163235.	300.	4.874	1.000	0.360
50.	534.720	175551.	300.	3.948	1.000	0.375
60.	534.720	197659.	300.	2.742	1.000	0.400
70.	534.720	216040.	300.	2.014	1.000	0.420
80.	534.720	230844.	300.	1.542	1.000	0.435
90.	504.379	242584.	296.	1.237	0.985	0.447
100.	424.172	251861.	249.	1.191	0.829	0.456
110.	360.800	259222.	211.	1.157	0.705	0.463
120.	310.056	265107.	182.	1.132	0.606	0.468
140.	235.210	273736.	138.	1.096	0.459	0.476
160.	183.934	279589.	108.	1.073	0.359	0.482
180.	147.474	283714.	86.	1.057	0.288	0.485



Sk. 8.10

Iz ovih rezultata se može zaključiti da se dobija veća kritična sila i napon ako se koristi redukovani modul deformacija, što znači da se sa tangentsnim modulom, koji je nešto jednostavniji za računanje, dobijaju rezultati na strani sigurnosti. Za vitkosti koje se dozvoljavaju propisima i u praksi najčešće primenjuju pri projektovanju ovakvih elemenata, dobijaju se velika odstupanja u odnosu na Eulerovu



kritičnu silu i napon. Stoga se provera stabilnosti ovih elemenata mora vršiti u plastičnom i elastoplastičnom području.

### 8.5 Uticao dugotrajnih dejstava

U prethodnim odeljcima razmatrane su mogućnosti određivanja stanja napona i deformacija ekscentrično pritisnutih elemenata, uzimajući u obzir geometrijske i fizičke nelinearnosti, za kratkotrajna opterećenja i u vreme nanošenja dugotrajnog ili kratkotrajnog opterećenja  $t=t_1$ . Uticaj tečenja i skupljanja betona je vrlo značajan za ponašanje i ocenu stabilnosti ovakvih elemenata i čitavog sistema pod dejstvom dugotrajnih opterećenja. Ovim pitanjima je posvećen veliki broj radova i oni bi se po mišljenju autora mogli svrstati u četiri grupe.

U prvoj grupi se obrađuju oni problemi u kojima se usvajaju nelinearne veze između napona i deformacija - trenutnih i deformacija tečenja. Broj radova iz ove grupe je najveći, matematički postupci su jednostavniji nego za ostale grupe, a broj problema Teorije armiranobetonskih konstrukcija koje ima opravdanja na ovaj način rešavati je veliki. Autor je u ovom radu dao prikaz rešavanja više zadataka u okviru geometrijski nelinearne teorije u prethodnim poglavljima primenom Metode konačnih elemenata i integralnih jednačina.

U drugu grupu spadaju oni radovi u kojima se polazi od nelinearnih veza između napona i trenutnih deformacija a linearnih između napona i deformacija tečenja betona. Promena napona po visini poprečnih preseka štapova je stoga nelinearna i prvi naš značajniji rad iz te grupe je rad N.Naerlović - Veljković /22/ koji se odnosi na problem stabilnosti i deformacija armiranobetonskog štapa sa početnom krivinom.

Treću grupu sačinjavaju radovi u kojima se usvajaju linearne veze između napona i trenutnih deformacija, a nelinearne veze između napona i deformacija tečenja betona. N.H.Arutjunjan /31/, a kasnije i I.I.Ulicki /39/ su među prvima dali rešenja nekih problema na bazi ovakvih pretpostavki.



Četvrtoj grupi pripadaju oni radovi u kojima se polazi od nelinearnih veza između napona i deformacija, kako trenutnih tako i deformacija tečenja (puzanja) betona. Rešavanje ovakvih problema, u koje spadaju deformacije i stabilnost pritisnutih armiranobetonskih elemenata, uticaj tečenja na određivanje stvarnih koeficijenata sigurnosti na lom armiranobetonskih preseka i sl., je matematički najslabije - pa je broj radova iz ove grupe vrlo mali. Za rešavanje ovakvih zadataka V.M. Bondarenko je predložio jednu približnu metodu koju je nazvao Metodom integralnog modula, a po kojoj se problemi matematički formulišu u obliku algebarskih jednačina /40/.

U.H. Oelhafen /24/ polazi od nelinearne veze između napona i deformacija

$$\varepsilon(t, t_1) = \varepsilon(t_1) \left[ 1 + C_1(t-t_1) + C_2(t-t_1) \frac{\sigma(t)}{f_c} \right] + \varepsilon_s(t, t_1) \quad (8.52)$$

gde je

$$\varepsilon(t_1) = \frac{2f_c}{E} \left[ 1 - \sqrt{1 - \sigma(t_1)/f_c} \right] \quad (8.53)$$

dok se funkcije  $C_1(t-t_1)$  i  $C_2(t-t_1)$  se određuju na osnovu linearne regresivne analize eksperimentalnih podataka ili krivih tečenja datih propisima. Sa ovakvim vezama primenjujući numeričke metode on rešava probleme deformisanja vitkih stubova primenom numeričkih postupaka.

U literaturi postoji veći broj približnih izraza koje su predložili pojedini autori ili su dati u nacionalnim i internacionalnim propisima za određivanje zamenjujuće krutosti poprečnog preseka  $EI$ , odnosno krivine deformisane ose elementa, vodeći računa o dejstvu kratkotrajnih i dugotrajnih opterećenja.

prema Američkim propisima (ACI Building Code) /26/ je zamenjujuća krutost

$$EI = \frac{E_c I_g / 5 + E_s I_s}{1 + \beta_d} \quad , \quad S_a \geq 1\% \quad (8.54)$$

$$EI = \frac{E_c I_g}{2.5(1 + \beta_d)} \quad , \quad S_a \leq 1\% \quad ,$$

gde su  $E_c$  i  $E_s$  početna vrednost modula deformacija betona i čelika,  $I_g$  moment inercije betonskog preseka bez prslina,  $I_s$  moment inercije



poprečnog preseka armature. Koeficijent  $\beta$  izražava količnik maksimalnog stalnog i ukupnog opterećenja.

Kritična sila se određuje prema izrazu

$$P_c = EI \frac{\pi^2}{l_k^2} \quad (8.55)$$

gde je  $l_k$  dužina izvijanja.

Prema Propisima CEB-FIP /2/, pri ispitivanju stabilnosti izolovanih štapova treba uzeti u obzir dodatni ekscentricitet u sredini raspona  $l$

$$e_a = \frac{l}{300} \quad (8.56)$$

i za vitkosti  $\lambda \leq 25$  ne treba računati sa efektima Teorije II reda, dok se upotreba aproksimativnih metoda ne preporučuje za vitkosti  $\lambda \geq 140$ . Ovde treba istaći da se za tako velike vitkosti problemi mogu rešavati u okviru Teorije za koju važe pretpostavke o linearnim vezama između napona i deformacija i u kojoj je moguće vršiti i tačnije proračune.

Za okvire sa nepomerljivim čvorovima pri ispitivanju stabilnosti pojedinih elemenata treba u sredini raspona  $l$  računati sa ukupnim ekscentricitetom

$$e_{tot} = e_0 + e_a + e_2 \quad (8.57)$$

gde je  $e_0$  ekscentricitet normalne sile u preseku prema Teoriji prvog reda,  $e_a$  dodatni ekscentricitet usled efekata drugog reda, a može se odrediti prema obrascu

$$e_2 = \frac{l_k^2}{10} \kappa, \quad \kappa \approx \frac{5}{d} \cdot 10^{-3} \quad (8.58)$$

$l_k$  je dužina izvijanja,  $d$  je debljina preseka.

Uticao tečenja izražava se kroz dodatni ekscentricitet

$$e_c = e_{1g} \left[ e^{\frac{\varphi(t, t_1)}{N_E - N_g}} - 1 \right] \quad (8.59)$$

gde je  $e_{1g}$  ekscentricitet od stalnog opterećenja po Teoriji prvog reda uključujući i dopunski ekscentricitet  $e_a$ ,  $N_E$  Eulerova sila izvijanja, a  $N_g$  normalna sila od stalnog opterećenja za ove elemente nije neophodno uzimati u obzir uticaj tečenja ako je  $\lambda \leq 50$ , ako je normalna sila od stalnog opterećenja  $N_g \leq 0,2 N_{tot}$ , (gde je  $N_{tot}$  normalna sila od ukupnog opterećenja) i kada je ekscentricitet po teoriji prvog reda dva ili više puta veći od debljine preseka.



Za elemente okvira sa promenljivim čvorovima treba uzeti u obzir i ekscentricitet usled različitog pomeranja čvorova na krajevima štapa a što se određuje iz ugla nagiba štapa  $\alpha_n$  prema prvobitnom položaju, čiji je  $\tan \alpha_n = 1/50$  za višespratne okvire opterećene pri vrhu stubova i  $\tan \alpha_n = 1/200$  za ostale okvire.

### 8.51 Odredjivanje deformacijskih veličina $\varepsilon_T(t)$ i $\varkappa(t)$

Veza između napona i deformacija betona i armature mogu se prikazati, s obzirom na (1.216), (1.218), (8.3) i (8.6) u obliku

$$\varepsilon_b(t) \equiv \varepsilon_T(t) + \varkappa(t) y_b = \frac{\sigma_b(t)}{E_b^s(t)} + \int_{t_1}^t k(t, \tau) \left[ \frac{\sigma_b(\tau) + \beta \sigma_b^2(\tau)}{E_{b0}} \right] d\tau + \varepsilon_s(t, t_1) \quad (8.60)$$

$$\bar{E}_a \varepsilon_a(t) \equiv \bar{E}_a [\varepsilon_T(t) + \varkappa(t) y_a] = \sigma_a(t) - \bar{\sigma}_a(t)$$

$E_b^s(t)$  je sekantni modul deformacija betona /18/

$$E_b^s(t) = \frac{E_{b0} \sigma_b(t)}{2f_p (1 - \sqrt{1 - \sigma_b(t)/f_p})} \quad (8.61)$$

gde je  $E_{b0}$  početna vrednost tangentskog modula deformacija betona, tako da je

$$\lim_{\sigma_b \rightarrow 0} E_b^s = E_{b0}. \quad (8.62)$$

Uslovi ravnoteže sila u nekom preseku su

$$\int_{A_a} \sigma_a(t) dA + \int_{A_b} \sigma_b(t) dA_b = N(t),$$

$$\int_{A_a} \sigma_a(t) y_a dA + \int_{A_b} \sigma_b(t) y_b dA_b = M(t). \quad (8.63)$$

Pošto je modul deformacija betona  $E_b^s(t)$  nelinearna funkcija napona koja se menja u preseku nije moguće direktnom primenom uslova ravnoteže (8.63) izraziti  $\varepsilon_T(t)$  i  $\varkappa(t)$  u funkciji sila u preseku  $N(t)$  i  $M(t)$ .



Stoga treba izvršiti neka uprošćenja i računati sa nekim osrednjem modulom deformacija  $E_b^*(t)$  koji će biti isti u svim tačkama poprečnog preseka, tako da se može pisati

$$E_b^*(t) = k_E(t) E_{b0} \quad (8.64)$$

Koeficijent  $k_E$  zavisi od stepena naprezanja  $\sigma/f_p$  i ako su naponi mali ( $\sigma/f_p \rightarrow 0$ ) onda je  $k_E=1$ , ako su u preseku naponi dostigli čvrstoću na lom ( $\sigma/f_p \rightarrow 1$ ) onda je  $k_E=0.5$  za centrično pritisnute elemente.

Kada se u prvoj jednačini (8.60) izvrši integraljenje po  $A_b$  u drugoj po  $A_a$ , a zatim prva pomnoži sa  $y_b$ , a druga sa  $y_a$  i izvrši integraljenje i iskoriste uslovi ravnoteže (8.63) dobija se posle sredjivanja sistem od dve Volterrine integralne jednačine

$$\begin{aligned} k_E(t) E_{b0} A_{id} \varepsilon_T(t) + k_E(t) \bar{E}_a A_a \int_{t_1}^t k(t, \tau) \varepsilon_T(\tau) d\tau + k_E \bar{E}_a S_a \int_{t_1}^t k(t, \tau) \varkappa(\tau) d\tau = \\ = N(t) - \bar{N}_a + k_E(t) \int_{t_1}^t k(t, \tau) [N(\tau) - \bar{N}_a(\tau)] d\tau + k_E(t) \bar{\beta} \int_{A_b} \int_{t_1}^t k(t, \tau) \sigma_b^2(\tau) dA d\tau + N_S(t, t_1) \end{aligned} \quad (8.65)$$

$$\begin{aligned} k_E(t) E_{b0} I_{id} \varkappa(t) + k_E(t) \bar{E}_a S_a \int_{t_1}^t k(t, \tau) \varepsilon_T(\tau) d\tau + k_E(t) \bar{E}_a S_a \int_{t_1}^t k(t, \tau) \varkappa(\tau) d\tau = \\ = M(t) - \bar{M}_a(t) + k_E(t) \int_{t_1}^t k(t, \tau) [M(\tau) - \bar{M}_a(\tau)] d\tau + k_E(t) \bar{\beta} \int_{A_b} \int_{t_1}^t k(t, \tau) \sigma_b^2(\tau) y_b dA d\tau + M_S(t, t_1), \end{aligned}$$

gde su

$$A_{id} = A_b + \frac{\bar{E}_a}{E_b^*} A_a, \quad I_{id} = I_b + \frac{\bar{E}_a}{E_b^*} I_a; \quad (8.66)$$

$$\bar{N}_a = A_a \bar{\sigma}_a, \quad \bar{M}_a = S_a \bar{\sigma}_a, \quad (8.67)$$

$$N_S(t, t_1) = -E_b^* A_b \varepsilon_S(t, t_1), \quad M_S(t, t_1) = -E_b^* S_b \varepsilon_S(t, t_1).$$

U jednačinama (8.65) se pojavljuje  $\sigma_b^2(\tau)$  pod znakom integrala po površini, koji unapred nije poznat i treba ga izraziti u funkciji  $M$  i  $N$ , što je vrlo složeno s obzirom na nelinearnost veza između napona i deformacija. Ovde se stoga predlaže jedno uprošćenje, kako bi se odredila približna vrednost ovih integrala, pretpostavljajući da se napon linearno menja po visini preseka

$$\sigma_b(t) \approx \frac{N(t) - N_a}{A_{id}} + \frac{M(t) - \bar{M}_a}{I_{id}} y_b$$



Jednačine (8.65) sada dobijaju oblik

$$\begin{aligned}
 E_b^*(t) A_{id} \varepsilon_T(t) + k_E(t) \bar{E}_a A_a \int_{t_1}^t K(t, \tau) \varepsilon_T(\tau) d\tau + k_E(t) S_a \bar{E}_a \int_{t_1}^t K(t, \tau) \varkappa(\tau) d\tau = \\
 = N(t) + k_E(t) \int_{t_1}^t K(t, \tau) N(\tau) d\tau + k_E(t) \bar{\beta} \int_{t_1}^t K(t, \tau) \left[ \frac{N^2(\tau) A_b}{A_{id}^2} + \right. \\
 \left. + 2 \frac{N(\tau) M(\tau)}{A_{id} I_{id}} S_b + \frac{M^2(\tau)}{I_{id}^2} I_b \right] d\tau + N_S(t, t_1), \quad (8.68)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_b^*(t) I_{id} \varkappa(t) + k_E(t) \bar{E}_a S_a \int_{t_1}^t K(t, \tau) \varepsilon_T(\tau) d\tau + k_E(t) \bar{E}_a I_a \int_{t_1}^t K(t, \tau) \varkappa(\tau) d\tau = \\
 = M(t) + k_E(t) \int_{t_1}^t K(t, \tau) M(\tau) d\tau + k_E(t) \bar{\beta} \int_{t_1}^t K(t, \tau) \left[ \frac{N^2(\tau) S_b}{A_{id}^2} + \right. \\
 \left. + 2 \frac{N(\tau) M(\tau)}{A_{id} I_{id}} I_b + \frac{M^2(\tau)}{I_{id}^2} J_b \right] d\tau + M_S(t, t_1),
 \end{aligned}$$

gde su  $N(t)$  i  $M(t)$  dati izrazima (8.14), dok je

$$J_b(t) = \int_{A_b} y_b^3 dA.$$

Rešavanjem sistema Volterrinih nelinearnih integralnih jednačina (8.68) dobijaju se  $\varepsilon_T(t)$  i  $\varkappa(t)$  koje se dalje mogu upotrebiti za određivanje pomeranja štapa, odnosno čitavog sistema.

Elementi konstrukcija od armiranog betona koji su opterećeni u fazi malog ekscentriciteta najčešće se projektuju sa simetričnim prese-cima u kojima je i armatura raspoređena simetrično, pa je onda

$$S_a = 0, \quad S_b = 0, \quad J_b = 0.$$

Jednačine (8.68) postaju onda znatno jednostavnije

$$\begin{aligned}
 E_b^*(t) A_{id} \varepsilon_T(t) + k_E(t) \bar{E}_a A_a \int_{t_1}^t K(t, \tau) \varepsilon_T(\tau) d\tau = N(t) + \\
 + k_E(t) \int_{t_1}^t K(t, \tau) N(\tau) d\tau + k_E(t) \bar{\beta} \int_{t_1}^t K(t, \tau) \left[ \frac{N^2(\tau)}{A_{id}} I_b + \frac{M^2(\tau)}{I_{id}^2} I_b \right] d\tau + N_S(t, t_1), \quad (8.69)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_b^*(t) I_{id} \varkappa(t) + k_E(t) \bar{E}_a I_a \int_{t_1}^t K(t, \tau) \varkappa(\tau) d\tau = M(t) + \\
 + k_E(t) \int_{t_1}^t K(t, \tau) M(\tau) d\tau + 2 k_E(t) \bar{\beta} \int_{t_1}^t K(t, \tau) \frac{N(\tau) M(\tau)}{A_{id} I_{id}} I_b d\tau + M_S(t, t_1).
 \end{aligned}$$



### 8.52 Odredjivanje zamenjujućeg modula deformacija betona

U vreme nanošenja opterećenja  $t=t_1$  krivina je prema drugoj jednačini (8.69)

$$E_b^*(t_1) I_{id} \kappa(t_1) = M(t). \quad (8.70)$$

Pošto u vreme nanošenja opterećenja tečenje i skupljanje betona ne utiču na deformacije, to se može za  $\kappa$  koristiti izraz (8.20), tako da se dobija za simetrične preseke

$$E_b^*(t_1) = \frac{M(t_1)}{I_{id} \left[ -\frac{p}{2} + \left[ \frac{p^2}{4} - r \right]^{1/2} \right]^{1/2}} \quad (8.71)$$

gde su  $p$  i  $r$  dati izrazima (8.18) u funkciji momenta  $M$  i normalne sile  $N$ .

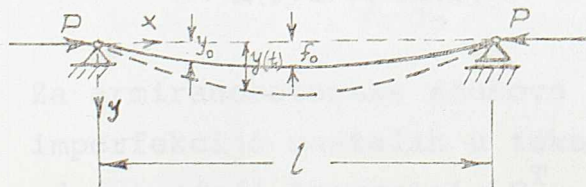
Za centrično pritisnute elemente treba kao zamenjujući modul uzeti sekantni modul deformacija  $E^S$  koji se određuje prema izrazu (8.61).

Na ovaj način se  $E_b^*(t_1)$  izražava u funkciji momenta i normalne sile u poprečnom preseku. Ako se momenat i normalna sila menjaju tokom vremena, može se koristiti izraz (8.71) u koji se unose vrednosti  $N(t)$  i  $M(t)$ . Pošto je izraz za  $I_{id}$  (8.66) takodje sadrži  $E_b^*(t)$ , to se u prvoj aproksimaciji  $I_{id}$  može sračunati usvajajući da je  $\bar{E}_b = \bar{E}_{b0}$  i  $E_a = E_a$ ,  $\bar{\sigma}_a = 0$ , a zatim odrediti naponi u betonu i armaturi i izvršiti potrebne korekture

Za nesimetrične preseke treba odrediti  $\kappa$  rešavajući sistem algebarskih jednačina (8.13), uvrstiti ga u izraz (8.70) i odrediti vrednost zamenjujućeg modula deformacija betona  $E_b^*(t)$ .

### 8.53 Deformacije štapa sa početnom krivinom

Na sk. 8.11 je prikazan štاپ, zglobno vezan na krajevima, koji je već razmatran u odeljku. Ordinate ose štapa  $(x, t)$  se dobijaju rešavanjem integro-diferencijalne jednačine



Sk. 8.11



$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \omega_M(t) k_E(x,t) \int_{t_1}^t k(t,\tau) \frac{\partial^2 y(x,\tau)}{\partial x^2} d\tau + \alpha_c \frac{\pi^2}{l^2} \left[ y(x,t) + k_E(x,t) \int_{t_1}^t k(t,\tau) y(x,\tau) d\tau \right] + 2k_E(x,t) \alpha_c^2 \frac{\pi^2}{l^2} P_c \bar{\beta} \int_{t_1}^t k(t,\tau) y(x,\tau) d\tau = \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} + k_E(x,t) \omega_M(x,t) \int_{t_1}^t k(t,\tau) \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} d\tau, \quad (8.72)$$

gde su

$$\omega_M(x,t) = \frac{\bar{F}_a I_a}{E_b^*(x,t) I_{id}}, \quad \alpha_c = \frac{P}{P_c}, \quad P_c = E_b^*(x,t) I_{id} \frac{\pi^2}{l^2} \quad (8.73)$$

$E_b^*(t)$  i  $\omega_M(t)$  zavise od momenta i normalne sile u poprečnom preseku, odnosno sile  $P$  i  $y(t)$ , pa stoga nije moguće naći rešenje ove integro-diferencijalne jednačine u zatvorenom obliku. Ako bi se radi uprošćenja uvela pretpostavka da je  $E_b(t)$  konstantno duž celog štapa i da se zanemaruju njegove promene tokom vremena, što nema opravdanja kada se radi o velikim pomeranjima, onda se rešenje ove jednačine može tražiti u obliku

$$y(x,t) = f_0 \sin \frac{\pi}{l} x u(t). \quad (8.74)$$

Početne vrednosti ordinata  $y_0$  u neopterećenom stanju su

$$y_0 = f_0 \sin \frac{\pi}{l} x.$$

Funkcija  $u(t)$  se onda dobija kao rešenje Volterrine integralne jednačine

$$u(t)(1-\alpha_c) - k_E \bar{p} \int_{t_1}^t k(t,\tau) u(\tau) d\tau = [1 + k_E \omega_M \varphi(t,t_1)] \quad (8.75)$$

gde je

$$\bar{p} = \alpha_c + 2\bar{\beta} \alpha_c^2 \frac{P_c - \bar{N}_a / \alpha_c P_c}{A_{id} I_{id}}. \quad (8.76)$$

Za Maxwellov reološki model betona sa promenljivim viskoznim svojstvima tokom vremena (Dischingerova veza između napona i deformacija) je

$$\varphi(t,t_1) = \xi_t - \xi_{t_1}$$

pa se posle diferenciranja jednačine (8.74) po  $\xi_t$  dobija linearna diferencijalna jednačina

$$\frac{du}{d\xi_t} - \frac{k_E \bar{p}}{(1-\alpha_c)} u = \frac{k_E \omega_M}{1-\alpha_c}. \quad (8.77)$$

Partikularno rešenje ove jednačine za početni uslov

$$t = t_1, \quad \xi_t = \xi_{t_1}, \quad u(t_1) = 1/(1-\alpha_c)$$

je

$$u(t) = \frac{1}{1-\alpha_c} e^{-\frac{k_E \bar{p}}{1-\alpha_c} \varphi(t,t_1)} - \frac{\omega_M}{\bar{p}} \left[ 1 - e^{-\frac{k_E \bar{p}}{1-\alpha_c} \varphi(t,t_1)} \right]. \quad (8.78)$$

Za armiranobetonske stubove u kojih je  $f_0$  posledica geometrijskih imperfekcija nastalih u toku i gradjenja može se za  $E_b^*(t)$  uzeti odgovarajući tangentni  $E^T$  ili redukovani modul  $E^R$  deformacija.



Ako ovakva uprošćenja nemaju opravdanja i ne može se naći rešenje u zatvorenom obliku, za rešavanje zadatka može se primeniti uopšteni metod N. Hajdina, koji je prikazan u šestom poglavlju. Ovaj metod omogućava rešavanje zadatka sa različitim geometrijskim i reološkim karakteristikama u poprečnim presecima. Postupak se sprovodi iterativno u dve faze. Prvo se u okviru teorije sa linearnim vezama napona i deformacija određuju pomeranja i sile u poprečnim presecima po teoriji drugog reda za različite koeficijente tečenja  $\varphi(t, t_1)$ . Sa ovim vrednostima određuju se za odgovarajuće vrednosti  $\varphi(t, t_1)$ , veličine zamenjujućeg modula deformacija  $E_D^*(t)$ , pomeranja i stvarni momenti u presecima uzimajući u obzir geometrijske i fizičke nelinearnosti. Za izabrane vrednosti  $\varphi(t, t_1)$  određuju se rešavanjem integralnih jednačina (8.65)  $\varepsilon_r(t)$  i  $\mathcal{H}(t)$  u poprečnim presecima i proverava da li su ispunjeni uslovi za lom po betonu ili armaturi. Vreme, odnosno koeficijent  $\varphi(t, t_1)$ , za koji su ti uslovi ispunjeni naziva se kritičnim vremenom  $t_c$ , odnosno kritičnim koeficijentom tečenja betona  $\varphi_c(t_c, t_1)$ .

Problem deformacija štapa ili konstrukcijskog sistema može se razmatrati i u odnosu na maksimalne dozvoljene deformacije, odnosno pomeranja, u toku eksploatacije koje su različite od deformacija u stanju loma. Ovaj zahtev se u praksi često postavlja, tako da se kritično vreme  $t_c$  i kritični koeficijent tečenja određuju u odnosu na stanje maksimalnih dozvoljenih deformacija.

Ovaj proračun u kojem se uzimaju u obzir geometrijske i fizičke nelinearnosti je vrlo složen i pored ovde prikazanih uprošćenja uz uvodjenje zamenjujućeg modula deformacija betona. Stoga je za njegovu realizaciju neophodno korišćenje elektronskog računara, pa ga treba primenjivati u posebnim slučajevima gde je neophodno uzeti u obzir oba tipa nelinearnosti.

#### REFERENCE

- /1/ B a r t a, T., Some simple thoughts on column buckling. Proc. International Cologuium on Column Strength IABSE, Vol. 23, Paris 1975, pp. 277-292.
- /2/ CEB-FIP Code Modele for Concrete Structures. International System of Unified Standard Codes of Practice for Structures. Vol II, 1978
- /3/ CP 110 - British Code of Practice. Cement and Concrete Association 1974.



- /4/ C o n s t a n t i n e s c u, R.D., and I l l s t o n, J.M.,  
The responce of reinforced concrete cross-sections to short-term  
and sustainde loads. Magazine of Concrete Research. Vol.30, No  
104, 1978, pp. 107-118.
- /5/ C o n s t a n t i n e s c u, R.D., and I l l s t o n, J.M.,  
Computer experiments on slender beam-columns of reinforced Conc-  
rete. Magazine of Concrete Research Vol.30, No 105, 1978, pp.  
177-189.
- /6/ C r a e m e r, H., Teorija plasticiteta armiranog betona. Naučna  
gradjevinska biblioteka. Beograd 1949.
- /7/ DIN-1045, Beton Kolender, Tail II W.Ernst und Sohn 1975.
- /8/ D j u r i ć, M., Stabilnost i dinamika konstrukcija (skripta),  
Gradjevinski fakultet, Beograd 1976.
- /9/ F a v r e, R., R a đ o j č i ć, A., Vérification états limites  
d'utilisation. Ecole Politechnique Federale de Losanne, 1979.
- /10/ F e r g u s o n, P.M., Reinforced Concrete Fundamentals. John  
Wiley 1973.
- /11/ F r a n z, G., Teorija armiranobetonskih konstrukcija (prevod sa  
nemačkog) Gradjevinska knjiga, Beograd 1979.
- /12/ I v k o v i ć, M., Ponašanje betona u oblasti granične ravnoteže.  
Doktorska disertacija, Gradjevinski fakultet, Beograd 1962.
- /13/ I v k o v i ć, M., Proračun napona i deformacija od armiranog  
betona. Priručnik za armirani beton. SJL, Beograd 1974.
- /14/ J a n s o n, E.J., Deformation Capacity of Concrete Columns.  
National Swedish Building research. Document D-5, 1974.
- /15/ J ä g e r, K., Die Bemessung schlanker Stahlbetonstützen auf ausmiti-  
gen Druck Beton und Stahlbetonbau, Heft 3, Marz 1955.
- /16/ J e v t i ć, D., Dijagrami interakcije preseka. Naše gradjevinars-  
tvo, Nol 1977, str. 22-32.
- /17/ K o r d i n a, K., Q u a s t, U., Bemessung von schlanken  
Bauteilen - Knicksicherheitsnachweis. Beton Kalender I, Ernst  
und Sohn 1976.
- /18/ L a z a r e v i ć, Dj., Granična nosivost linijskih sistema.  
Gradjevinska knjiga, Beograd 1973.
- /19/ L e o n h a r d t, F., Vorlesungen über Masivbau. Vierter Teil.  
Nachweis der Gebrauchsfähigkeit. Springer-Verlag 1977.
- /20/ L e o n h a r d t, F., Mönning, E, Vorlesungen über Masivbau.  
Erster Teil. Grundlagen zur Bemessung im Stahlbetonbau. Sprin-  
ger Verlag, 1973.
- /21/ M a r i n č e k, M., Ductility and Limit States. Proc. IABSE  
1972, pp. 11-17.
- /22/ N a e r l o v i ć - V e l j k o v i ć, N., Der Einfluss des Kri-  
echens auf die Tragfähigkeit von Stahlbetonsäulen. Österreic-  
isches Ingenieur-Archiv. Vol. 14, No 2, 1960, s. 99-139
- /23/ N e v i l e, A.M., Properties of concrete. Pitman Publishing,  
London 1975.



- /24/ O e l h a f e n, U.H., Formänderungen von stahlbetonstützen unter exzentrischer Druckkraft. Institut für Baustatik ETH Zürich, 1970.
- /25/ Pravilnik o tehničkim merama i uslovima za beton i armirani beton . Službeni list SFRJ 1971.
- /26/ R i c e, P.F., H o f m a n, E.S., Structural Design Guide to the ACI Building Code Van Nostrand Reinhold Company, New York 1972.
- /27/ R ü s c h, H., Stahlbeton-Spanbeton, Band1, Werner-Verlag, Düsseldorf 1972.
- /28/ R e g a n, P.E., Yu, C.W. Limite State Design of Structural Concrete. Chato and Windus, London 1973.
- /29/ R ž a n i c i n, A.R. Teorija puženja materijala (prevod sa ruskog) Gradjevinska knjiga, Beograd 1974.
- /30/ Y l i n e n, A., A method of determining the buckling stress and the required cross-section area for centrally loaded straight columns in elastic and inelastic range. Publications AIPC Vol.16, Zürich 1956, pp. 529-550.
- /31/ А р у т ю н я н, Н. Х., Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, Москва, 1952.
- /32/ Г в о з д е в, А. А., Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Гостройиздат, Москва 1949.
- /33/ В о л ь м и р, А. С., Устойчивость деформируемых систем. Наука, Москва 1967.
- /34/ З а л е с о в, А., Ф и л и п о в с к и й, В. В., Практический метод расчета железобетонных конструкций по деформациям. Стройиздат, Москва 1976.
- /35/ П р о к о п о в и ч, И. Е., Л и н и к, А. С., О влиянии ограниченной нелинейной ползучести на устойчивость сжатых стержней. Строительная механика и расчет сооружений 5, 1973, стр. 47-51.
- /36/ СН и П II-21-75. Строительные нормы и правила. Гостстрой СССР, Стройиздат, Москва 1976.
- /37/ Ч и с т я к о в, Е. А., Экспериментальное исследование несущей способности гибких железобетонных стержней при продольно-поперечной нагрузке. Сообщения НИИЖБ-а, Москва 1970, стр. 88-98.
- /38/ Ч и с т я к о в, Е. А., Н и к а н е н, И. А., Расчет гибких железобетонных стержней с приближенной оценкой изменения кривизны по их длине. Сообщения НИИЖБ-а, Москва 1973, стр.116-123.
- /39/ У л и ц к и й, И. И., Расчет железобетонных стержневых систем с учетом ползучести. Будивельник, Киев 1967.
- /40/ Б о н д а р е н к о, В. М., Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. Издательство Харьковского университета, Харьков 1968.









