UNIVERZITET U BEOGRADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

ODREĐIVANJE GRANIČNIH GREŠAKA U GEODETSKIM MREŽAMA

– DOKTORSKA DISERTACIJA –

MR. KRSTA VRAČARIĆ, DIPL. INŽ.

BEOGRAD,
NOVEMBRA 1978.

UNIVERZITET U BEOGRADU
Gradjevinski fakultet

ODREDJIVANJE GRANIČNIH GREŠAKA U GEODETSKIM MREŽAMA

Doktorska disertacija

Mr Krsta Vračarić,dipl.inž.

Beograd,
novembra 1978.

S A D R Ž A J

U V O D

Sva merenja podložna su greškama. U cilju otklanjanja grešaka merenja ili njihovih svodjenja na najmanju meru usavršavaju se geodetski instrumenti i pribor kao i metode rada.

Kod mnogih geodetskih radova unapred se definiše tačnost sa kojom je potrebno izvršiti merenje uglovnih i linearnih veličina. Zavisno od postavljenih uslova tačnosti, mora se odabrati odgovarajući instrumentarij, pribor i odgovarajuća metoda rada. Izbor instrumenata može se izvršiti na osnovu predhodne ocene tačnosti, koja će se u daljem tekstu, kako je u stručnoj literaturi udomaćeno nazivati ocena tačnosti "apriori".

U našoj struci, u današnjim uslovima rada i kvalifikacione strukture stručnjaka, veliki je broj stručnjaka različitih profila koji izvode sve vrste radova. Stručnjaci sa višim i srednjim obrazovanjem ne mogu se baviti analizom tačnosti ali zato mogu uspešno vršiti merenja koja odgovaraju željenoj tačnosti.

Zbog toga su doneti pravilnički propisi kojima se propisuje kako se mrenja moraju izvoditi i koja se tačnost u pojedinim fazama rada mora postići.

Zadatak dozvoljenih odstupanja jeste da se izvrši odabiranje dobijenih rezultata merenja i da se onemogući da loše izvedena merenja budu uključena u dalja računanja.

To znači, u ovom slučaju, dozvoljena odstupanja propisuju tačnost, koja se pri odredjenim radovima mora postići, nezavisno od sredstva, sa kojima je izvršeno merenje.

Pri strogom pridržavanju principa, da se radovi u geodetskoj struci izvode "od većeg ka manjem", greške koje su učinjene pri merenju u mreži višeg ranta, po tačnosti, neće se ozbiljnije manifestovati na dobijene rezultate merenja i izravnanja u narednoj mreži, po tačnosti nižeg ranga.

Medjutim, merenja u gradovima, naseljima i inženjerskoj geodeziji izvode se danas savremenim geodetskim instrumentima visoke preciznosti. Veoma lako i uz malo napora, tim instrumentima i priborom, može se postići tačnost merenja, koja često premašuje tačnost, sa kojom su izvršena merenja u mreži, na koju nova mreža treba da se osloni. Greške merenja u datoj mreži, neće biti zanemarljive, kao ni greške položaja datih tačaka. Uklapanje novih merenja u takvu mrežu, koja po tačnosti nije višeg ranga, može dovesti do ozbiljnih deformacija rezultata merenja i izravnanja.

Zato se mreže u kojima je merenje izvršeno preciznim priborom, najčešće izravnavaju kao slobodne pa se zatim, kao celina, transformacijom uklapaju u datu mrežu, vodeći pri tome računa da se ne poremete odnosi veličina u novoj mreži. Kao primer ovakvih radova, može se navesti većina gradskih trigonometrijskih mreža naših gradova, kao i lokalne trigonometrijske mreže u inženjerskoj geodeziji.

Ispitivanjem se može doći do tačnosti, koju jedan instrument i pribor, uz odredjene uslove i metodu rada može da dâ. Za neke radove može se propisati da se moraju izvoditi odredjenim priborom, i da se takvim priborom uz odredjene uslove merenja i metodu rada, mora postići unapred zadata tačnost.

Prema tome, dozvoljena odstupanja mogu se propisivati i za odredjena sredstva za rad, zatim da se ta sredstva koriste tamo gde mogu udovoljiti unapred postavljene zahteve tačnosti.

Pored selekcije izvršenih merenja ovako definisana dozvoljena odstupanja mogu biti i podsticaj geodetskih stručnjaka na istraživanje boljih metoda rada i usavršavanje pribora za merenje. Dalje usavršavanje metoda rada, dovelo bi do povećanja tačnosti merenja, što može pooštriti kriterijum o dozvoljenim odstupanjima.

Imajući u vidu navedeno, dozvoljena ostupanja, mogu da se definišu na dva načina:

1. Dozvoljena odstupanja, koja se odnose na geodetske radove /trigonometrijsku mrežu, poligonometrijsku mrežu itd./ i njihov cilj je da obezbede unapred utvrdjenu tačnost geodetskih radova.

2. Dozvoljena odstupanja, koja se odnose na odredjeno sredstvo, koje se koristi pri merenju. Ona pružaju informaciju o tačnosti, koja se tim sredstvom može postići.

Prva merenja na tlu Jugoslavije, vršila je geodetska služba Austro-Ugarske monarhije. Pribor i instrumenti za merenje, koji su korišćeni u to vreme, bili su na nivou tačnosti toga vremena. U cilju postizanja jednoobrazne tačnosti merenja, morali su se doneti neki normativi-dozvoljena odstupanja, prema kojima su zadržavana dobra merenja, dok su se loša merenja odbacivala i ponavljala. Dobar deo odredaba za pravilnik Austro-ugarske a naročito za srpski pravilnik preuzet je iz pravilnika Pruske geodetske službe.

U udžbeniku Niža geodezija od Eduarda Doležala, Beč 1910. godine, mogu se naći sledeća dozvoljena odstupanja:

- Najveća dozvoljena razlika, za Austriju, izmedju merenja dužina napred-nazad ne smeju preći granicu datu izrazom

$$\Delta = 0{,}0006\ S + 0{,}02\sqrt{S}$$

Ova granica važi za srednje povoljan teren. Za nepovoljan teren navedeno dozvoljeno odstupanje treba uvećati za 20%, dok za povoljan teren treba ga umanjiti za 20%.

- Za dozvoljeno uglovno odstupanje službena instrukcija preuzeta je iz pruskog katastra i ona glasi

$$f_{\beta_{max}} = \pm 1{,}4\sqrt{N} \quad \text{za glavne vlakove}$$

$$f_{\beta_{max}} = \pm 1{,}7\sqrt{N} \quad \text{za sporedne vlakove}$$

- Dozvoljena podužna i poprečna linearna odstupanja računaju se prema izrazima

$$\Delta l = 0{,}02\sqrt{[S]} + 0{,}0006\,[S]$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\,\{[S] + 100\}}{L}$$ u minutama

- U pruskom pravilniku dozvoljena ukupna linearna odstupanja računaju se po formulama

$$\Delta S = 0{,}01\sqrt{4\,[S] + 0{,}0050\,[S]^2}$$ za teren I kategorije

$$\Delta S = 0{,}01\sqrt{6\,[S] + 0{,}0075\,[S]^2}$$ za teren II kategorije

$$\Delta S = 0{,}01\sqrt{8\,[S] + 0{,}0100\,[S]^2}$$ za teren III kategorije

- Za Bavarsku propisana su sledeća dozvoljena odstupanja

$$\Delta S = 007\sqrt{S} + 0{,}02$$ za razliku merenja dužina napred-nazad

$$\Delta\beta = 48\sqrt{N} + 25''$$ za merenja uglova u poligonskom vlaku

$$\Delta l = 0{,}0035\sqrt{[S]} + 0{,}00044\,[S] + 0{,}05$$ za podužnu grešku vlaka

$$\Delta\varphi = 0{,}00025\,[S] + 0{,}05$$ za poprečnu grešku vlaka.

U knjizi Geodezija od prof. Sviščeva iz 1924. godine nalazimo sledeća dozvoljena odstupanja, srskog katastra:

- Najveća dozvoljena razlika izmedju merenja dužina napred-nazad ne sme preći sledeće granice

$$\Delta S = 0{,}01\sqrt{4\,[S] + 0{,}0050\,[S]^2}$$ za teren I kategorije

$$\Delta S = 0{,}01\sqrt{6\,[S] + 0{,}0075\,[S]^2}$$ za teren II kategorije

$$\Delta S = 0{,}01\sqrt{8\,[S] + 0{,}0100\,[S]^2}$$ za teren III kategorije

- Uglovna odstupanja u poligonskim vlacima ne smeju preći dozvoljenu granicu

$$\Delta\beta = 1{,}5\sqrt{N}$$

- Dozvoljeno ukupno linearno odstupanje računa se zavisno od kategorije terena po sledećim formulama

$$\Delta S = 0{,}01\sqrt{4\,[S] + 0{,}0050\,[S]^2}$$ za teren I kategorije,

$$\Delta S = 0{,}01\sqrt{6\,[S] + 0{,}0075\,[S]^2}$$ za teren II kategorije,

$$\Delta S = 0{,}01\sqrt{8\,[S] + 0{,}0100\,[S]^2}$$ za teren III kategorije.

Navedeni izrazi pokazuju da su naše pravilničke odredbe bile doslovce prepisane iz pruskog pravilnika.

Težnja mnogih zemalja bila je da se postojeći pravilnici usavrše i budu u skladu sa novom mernom tehnikom i novim metodama rada, a pri tome imajući u vidu i savremene tekovine nauke.

Posle formiranja Jugoslavije, naša država je preuzela ogroman merački i kartografski materijal od geodetske službe Austro-Ugarske. Važeći pravilnici Austro-Ugarske bili su od velikog uticaja na formiranje odredaba koje su našle mesta u našem pravilniku. Ovo tim pre što je od njih nasledjen premer jednog dela naše države.

Kasnije su geodetske radove izvodili naši geodetski stručnjaci. Time je stvoreno sopstveno iskustvo za definisanje novih pravilničkih odredaba koje bi najviše odgovarele tadašnjim potrebama pri izvodjenju geodetskih radova. Stalno je bila prisutna težnja za osavremenjavanjem i usavršavanjem pravilnika a naročiti doprinos tome dao je prof. Nikola Svečnikov. Na bazi ličnog iskustva i intuicije kao i podataka izvršenih merenja, naročito je doprineo stvaranju pravilnika IIa deo za gradski premer. Po njegovim idejama i sugestijama, razvijeno je više gradskih trigonometrijskih mreža.

Pravilnik za državni premer, donet je 1958. godine a stvoren je na bazi ispitivanja merenja, koja su izvršena u našoj zemlji na različitim terenima i u različito vreme. Pre ovog pravilnika korišćena su privremena uputstva kao i pravilničke odredbe, preuzete iz inostranih pravilnika. Naročito veliku primenu u našim uslovima rada, do donošenja pravilnika 1958. godine imao je pruski i austrijski pravilnik. Pruski pravilnik poslužio je kao uzor kod donošenja pravilnika u više evropskih država, pa i u Austriji, a i kod nas. Danas se u raznim evropskim državama, mogu videti različiti pravilnici, koji u pojedinim svojim članovima, imaju sličnosti sa pruskim pravilnikom.

Dozvoljena odstupanja, koja služe kao selektor izvršenih merenja, treba realno da procenjuju tačnost izvršenih merenja. Ukoliko ona, kao selektor tačnosti, nisu pouzdana, desiće se slučajevi, a u praksi se i dešavaju, da se neka dobro izvršena merenja odbacuju, dok se druga, loše izvršena merenja, koja po nekim kriterijumima ulazé u dozvoljena odstupanja, zadržavaju i koriste za dalja računanja.

Prilikom razvijanja geodetskih mreža, obavezni smo da se pridržavamo osnovnog geodetskog principa "od većeg ka manjem" odnosno mreže se razvijaju, tako da se ide od radova većeg obima i veće tačnosti ka radovima manjeg obima i manje tačnosti. Tačnost izvršenih merenja u prethodno izravnatoj geodetskoj mreži treba da bude takva, da se greške merenja učinjene u toj mreži neće osetiti kod uklapanja u nju novopostavljene mreže. Pri takvom odnosu tačnosti kod formiranja dozvoljenih odstupanja nije potebno voditi računa o greškama datih veličina.

U prošlosti, kada nisu postojali savremeni precizni geodetski instrumenti, slučajne greške merenja bile su znatno veće od sistematskih grešaka $\eta \gg \lambda$. U takvim slučajevima dovoljno je da dozvoljena odstupanja respektuju samo greške merenja slučajnog karaktera i parametar $\underline{t}$, čija vrednost zavisi od usvojene verovatnoće. Tada se dozvoljena odstupanja u opštem obliku mogu prikazati izrazom

$$\Delta = F(\eta, t)$$
$$t = f(p)$$

Kasnije, sa razvojem merne tehnike i usavršavanjem metoda rada, povećana je tačnost merenja odnosno još više je smanjen uticaj slučajnih grešaka merenja. Kod merenja visoke tačnosti sistematske greške mogu biti značajne o čemu treba voditi računa prilikom formiranja dozvoljenih odstupanja.

Kod oslanjanja radova veće tačnosti, na radove manje tačnosti, nužno je voditi računa o greškama datih veličina (prilikom formiranja dozvoljenih odstupanja), tako da dozvoljena odstupanja, pored grešaka slučajnog karaktera, treba da uvažavaju sistematske greške merenja i greške datih veličina.

Opšta formula za dozvoljena odstupanja može se ovako prikazati

$$\Delta = F(\eta, m_\xi, \lambda, \lambda_o, t)$$
$$t = f(p, n)$$

gde su:

η - uticaj slučajnih grešaka merenja,

m_ξ - uticaj grešaka datih veličina,

λ - uticaj sistematskih grešaka merenja srazmernih merenoj veličini,

λ_o - uticaj konstantne sistematske greške,

t - parametar zavisan od usvojene verovatnoće,

p - usvojena verovatnoća,

n - broj podataka dobijen merenjem.

Ukoliko neki parametar iz prethodne formule nedostaje, odnosno u gornjoj formuli nije prisutan, odna odgovarajući član treba izjednačiti sa nulom. Na primer kod lokalnih geodetskih mreža $m_\xi = 0$.

Na kraju, zadnjih decenija razvija se matematička statika, prema čijoj teoriji, parametar t ne zavisi samo od usvojene verovatnoće (p) nego i od broja merenja (n) iz kojih se vrednosti srednjih grešaka računaju.

Poslednjih godina u stručnoj literaturi, mnogo radova posvećeno je odredjivanju parametra t u zavisnosti od usvojene verovatnoće i broja merenja, tako da ova problematika neće biti razmatrana u disertaciji.

Učinjen je pokušaj da se dâ odgovor na neka praktična pitanja kao i da se dobiju izrazi za dozvoljena odstupanja, koji će biti od koristi za geodetsku praksu.

Pravilničke odredbe, koje se odnose na dozvoljena odstupanja, služe kao selektroi´izvršenih merenja. Koliko će se realno izvršiti selekcija dobijenih merenja zavisi od toga koliko je procena njihovog kvaliteta objektivna. Ova procena biće objektivna samo ako dozvoljena odstupanja sadrže sve parametre koji utiču na tačnost merenja.

Dozvoljena odstupanja menjala su se sa vremenom u kojem se razvijala merna tehnika i usavršavale metode rada. Prvobitna dozvoljena odstupanja uglavnom su uzimala u obzir, kada se radi o uglovnim veličinama, samo greške slučajnog karaktera a kod dužina, pored slučajnih grešaka i sistematske greške.

U poslednje vreme sve je više prisutno, da se na neki način, prilikom definisanja dozvoljenih odstupanja za geodetska merenja, uzimaju u obzir i greške datih veličina. No i pored toga, još uvek nije pronadjen izraz za dozvoljena odstupanja, koji bi realno uzeo u obzir sve faktore, koji su bitni za objektivnu selekciju merenja.

Zato je u ovom radu učinjen pokušaj da se ukaže na pristup kojim treba ići, kako bi se definisala dozvoljena odstupanja, koja će objektivno obaviti svoju funkciju. Pored toga daće se i kritički osvrt na formule za dozvoljena odstupanja koje su korišćene u našoj i nekim drugim evropskim zemljama, kao i neusaglašenost kriterijuma koji služe za ocenu tačnosti.

Analizom i uporedjenjem formula za dozvoljena uglovna i linearna odstupanja u više evropskih država, dolazi se do saznanja, da je dobar deo tih formula dobijen prepisivanjem osnovnog izraza, za dozvoljena uglovna i linearna odstupanja iz Pravilnika pruskog katastra. Kada su slučajne greške merenja u linearnim i uglovnim odstupanjima bile dominantne, tada je oblik formule za dozvoljena odstupanja odgovarao svojoj nameni. Sa razvojem merne tehnike, smanjivale su se vrednosti slučajnih grešaka, pa su se zato više ispoljavale sistematske greške. U poslednje vreme, raspolaže se savremenim elektronskim daljinomerima visoke preciznosti, savremenim preciznim teodolitima i nivelirima sa automatskim horizontiranjem vizure. Korišćenjem ovih savremenih instrumenata, uz malo napora i za kratko vreme, postiže se preciznost merenja kakva je ranije bila moguća samo uz posebne pripreme terena i izuzetne napore i pažnju pri radu. Tako danas imamo svakodnevnu pojavu da se merenja visoke preciznosti uklapaju u date podatke, koji su po tačnosti isti ili čak i ispod tačnosti podataka merenja. Na taj način narušava se princip "od većeg ka manjem", pri kojem je moguće zanemariti greške datih veličina. Stoga je neophodno u izraze za dozvoljena odstupanja uneti uticaj sistematskih grešaka merenja kao i uticaj grešaka datih veličina.

Još ranije uočeni su nedostaci izraza za dozvoljena odstupanja, u kojima se vodi računa samo o slučajnim greškama merenja, a kod merenja dužina, i o sistematskim greškama. Zato se u današnjim izrazima za dozvoljena odstupanja, pored uticaja slučajnih i sistematskih grešaka merenja, pojavljuje i jedan konstantan član čije prisustvo nije teorijski obrazloženo, ali se za njega tvrdi da je neophodan i da odgovara uslovima merenja. Prisustvo konstantnog člana u nekim formulama objašnjava se nedovoljnom kompenzacijom slučajnih grešaka merenja, i posle odredjenog broja merenih veličina /uglova/ taj član se gubi. Kod izraza za dozvoljena odstupanja, većine od navedenih evropskih država, pojedini uticaji, koji nisu ranije bili prisutni u dozvoljenim odstupanjima, sada su unešeni jednostavnim dodavanjem odredjenog sabirka na već postojeći izraz za dozvoljena odstupanja. Teorijska obrazloženja za nove članove, u izrazima za dozvoljena odstupanja nisu davana, nego je njihova pojava objašnjavana time da oni najbolje odgovaraju uslovima merenja. Zato je bilo neophodno doći do izraza za srednje greške linearnih i uglovnih odstupanja sagledavajući uticaje svih izvora grešaka, pa tek potom preći na dozvoljena odstupanja.

Pojavom novog pribora i ideje za odredjivanje dužina paralaktičkom poligonometrijom, napušteni su do tada uobičajeni kriterijumi i izrazi za dozvoljena odstupanja. Sada se dozvoljena odstupanja, kada se radi o linearnim odstupanjima, propisuju kao granične relativne greške. Ovakav način zadavanja dozvoljenih odstupanja bio bi ispravan ako bi u merenjima sistematske greške bile mnogo značajnije od slučajnih grešaka. Poznato je, da su sistematske greške merenja dužina srazmerne dužini, i da one postaju dominantne tek na većim dužinama. Time su merenja dužina u kratkim vlakovima stavljena pod znatno strožiji kriterijum nego u dugim vlakovima. Njihove relativne greške znatno opterećuju i greške koordinata datih tačaka kao i poprečne greške. Ovi uticaji u izrazima za dozvoljena odstupanja nigde se ne pojavljuju. Stoga se dozvoljena odstupanja izražena preko graničnih relativnih grešaka, ne mogu prihvatiti kao objektivna.

Sistematske greške po pravilu su male po vrednosti. Zato se one, u malom broju merenja i na kratkim dužinama, ne ispoljavaju. Njihov uticaj oseća se na većim dužinama, da bi na velikim rastojanjima postao značajniji od uticaja slučajnih grešaka. Pojavu sistematskih grešaka na jednom merenju ili u razlici merenja skoro je nemoguće uočiti jer se ta greška i pri ponovljenom merenju pojavljuje u istoj veličini i sa istim znakom. Sa razvojem merne tehnike smanjene su slučajne greške na najmanju meru, pa se danas sistematske greške mnogo brže i više ispoljavaju nego ranije. Njihov uticaj postaje značajan tako da one na današnjem stepenu razvoja merne tehnike, predstavljaju ozbiljnu smetnju daljem povećanju tačnosti merenja.

Sistematske greške deluju tako da rezultate merenja uvek uvećavaju ili umanjuju. No njihovo delovanje nije tako jednostavno kako na prvi pogled izgleda. One se mogu pojaviti kao konstantne sistematske greške, kada na sva merenja deluju sa istom veličinom i znakom /npr. adiciona konstanta/. Naročito su opasne sistematske greške složenog karaktera. Vrednost ove sistematske greške varira od slučaja do slučaja /npr. greška mikroreljefa, ugiba i dr/. Ponekad sistematska greška složenog karaktera menja čak i svoj znak, /npr. uticaj refrakcije/. Kod sistematskih grešaka složenog karaktera zadržava se osnovno svojstvo sistematskih grešaka, da im matematička nada nije nula. Kao sistematska greška na konačne rezultate utiče neka prosečna vrednost promenljive sistematske greške, dok se odstupanja pojedinih sistematskih grešaka od njihove prosečne vrednosti spajaju i deluju kao slučajne greške. Najverovatnije vrednosti merenih veličina dobijene preko aritmetičke sredine kao i najverovatnije vrednosti nepoznatih veličina dobijene izravnanjem, opterećene su sistematskom greškom i to sa punim iznosom prosečne vrednosti promenljive sistematske greške. Otuda u popravkama merenja nisu prisutne sistematske greške. Iz svega ovog može se zaključiti da je pitanje delovanja sistematskih grešaka veoma delikatno. Veoma je teško otkriti način delovanja sistematskih grešaka pa je teško naći i odgovarajuću metodu rada kojom bi se isključilo delovanje sistematskih grešaka. Stoga je važno da izvodjač merenja dobro poznaje proces merenja, da zna izvore grešaka te da merenja izvodi tako da se sistematske greške pri merenju u najvećem broju eliminišu. Preostalo prisustvo sistematskih grešaka može se otkriti pri izravnanju, uključujući sistematske greške kao nepoznate veličine. Pri tome, kod izravnanja, važno je pronaći odgovarajući model tj. zakonitost ponašanja sistematskih grešaka.

Kada se dužine mere pantljikom od interesa je za ovo merno sredstvo imati odgovarajuću analizu tačnosti merenja koja se pomoću pantljike može postići, uz odredjene terenske uslove. Ovo tim pre što se uočava da važeći pravilnički propisi u tom pogledu imaju odredjene nedostatke. Izvršena analiza pokazuje, da koeficijenti preko kojih se računaju uticaji slučajnih i sistematskih grešaka u važećem pravilniku II deo nisu onakvi kako se mogu realno očekivati. Npr. izjednačenje uticaja slučajnih i sistematskih grešaka na terenu povoljnom za merenje postiže se na većoj dužini nego na nepovoljnom terenu, što je suprotno očekivanju. Koristeći koeficijente date u ovoj analizi dobijaju se odnosi slučajnog i sistematskog uticaja bliži očekivanju. Pored toga u pravilniku se ne sabiraju kvadrati elemenata pojedinih uticaja, što je teorijski neispravno.

Za odredjivanje dozvoljenih granica za podužna i poprečna linearna odstupanja, pored poznavanja uticaja slučajnih i sistematskih grešaka merenja dužina potrebno je sagledati uticaje i ostalih izvora grešaka kao:

- uticaj grešaka koordinata datih tačaka,
- uticaj grešaka početnog i završnog direkcionog ugla i
- uticaj grešaka merenja uglova.

Prikaz uticaja grešaka koordinata datih tačaka na linearna odstupanja po pravcima koordinatnih osa X i Y /f_y i f_x/ zahteva veoma obimne dokaze. Kao rezultat tih izvodjenja dobijaju se glomazni i za praksu nepodesni izrazi. Da bi se pojednostavili izrazi za srednje greške linearnih odstupanja f_y i f_x usvojene su predpostavke:

- da su date tačke kao i dati direkcioni uglovi medjusobno nezavisni
- da je poligonometrijski vlak razvučen i jednakih strana.

Dobijeni uticaji grešaka datih veličina /koordinata i direkcionih uglova/ na linearna odstupanja f_y i f_x lako se transformišu na podužna i poprečna linearna odstupanja l i φ. Pri tome se uočava da na podužna linearna odstupanja utiču samo greške koordinata krajnih tačaka posmatrane u pravcu vlaka, dok na poprečna linearna odstupanja utiču, kako poprečne greške koordinata krajnih tačaka tako i greške datih direkcionih uglova kao i veličine veznih uglova.

Ukupne greške merenja veznih i prelomnih uglova, mogu se podeliti na slučajne i sistematske. Sistematske greške merenja uglova, raspodelom uglovnog odstupanja f_β, dele se na sve uglove podjednako, čime se one dobrim delom otklanjaju. Preostali mali, konstantni deo sistematske greške na linearna odstupanja utiče kao greška datih direkcionih uglova. Prema tome, ova greška, kao i slučajne greške merenja uglova imaju uticaja samo na poprečno linearno odsupanje ispruženog vlaka. Promena uslova merenja uglova u jednom vlaku /promena instrumenta, opažača i vremenskih prilika/ nije poželjna. Na taj način sistematske greške merenja uglova pojavljuju se kao sistematske greške serije merenja. Raspodelom uglovnog odstupanja f_β u poligonometrijskom vlaku odstranjuje se prosečna vrednost, odnosno konstantni deo sistematske greške, dok se odstupanja sistematskih grešaka serije merenja od ove vrednosti, utapaju u slučajne greške, čime se menjaju vrednosti slučajnih grešaka.

Linearna merenja opterećena su slučajnim greškama merenja, sistematskim greškama koje su srazmerne merenoj dužini kao i konstantnom sistematskom greškom koja ne zavisi od dužine i koja je za sve dužine jednaka. Sve ove greške utiču na podužna linearna odstupanja u vlakovima. Kada u jednom vlaku merenja dužina obavlja više stručnjaka i sa različitim instrumentima (priborima), iste kategorije tačnosti, tada se smanjuje greška podužnog linearnog odstupanja. Naime kao sistematska greška na podužno linearno odstupanje tada utiče srednja vrednost iz sistematskih grešaka dok se odstupanja sistematskih grešaka od njihove srednje vrednosti utapaju u slučajne greške merenja.

Podužna i poprečna linearna odstupanja u ispruženom vlaku, uz napred usvojene pretpostavke, /o nezavisnosti datih direkcionih uglova kao i da je vlak ispružen i jednakih strana/, medjusobno su nezavisne veličine. Na osnovu kvadrata njihovih srednjih grešaka, odnosno kvadrata linearnih odstupanja /l^2 i φ^2/ u jednoj ili više poligonometrijskih mreža mogu se, primenom metode najmanjih kvadrata odrediti odgovarajuće vrednosti srednjih grešaka merenja uglova, dužina i datih tačaka. Pri tome će se za svaki vlak dobiti po jedna jednačina popravaka gde će se kao slobodan član pojaviti kvadrat odgovarajućeg odstupanja. Težina kvadrata odstupanja, odnosno jednačina popravaka, dobiće se uopšteno kao kvadrati težina linearnih vrednosti odstupanja /$p_{f^2} = p_f^2$/.

Do grešaka merenja uglova kako slučajnih tako i sistematskih, može se doći na osnovu odstupanja zbira uglova u zatvorenim poligonima. Odstupanja zbira uglova u poligonometrijskim vlakovima, pored slučajnih i sistematskih grešaka merenja, opterećena su i greškama datih direkcionih uglova. Od pravilne procene grešaka datih direkcionih uglova /preko težinskih koeficijenata b_p i b_z/ zavisi objektivnost sračunatih grešaka merenja uglova. Zato je računanje grešaka merenja uglova iz odstupanja zbira uglova u zatvorenim poligonima pouzdanije, pod uslovom da su zatvoreni poligoni medjusobno nezavisni, ili da se pri računanju vodi računa o korelativnoj zavisnosti izmedju pojedinih odstupanja.

Za pravilno odredjivanje dozvoljenih granica za linearna odstupanja u poligonometrijskom vlaku od bitnog značaja je da se izvrši pravilna procena uticaja grešaka koordinata datih tačaka. Glavni poligonometrijski vlakovi oslanjaju se svojim krajevima na trigonometrijske tačke, trigonometrijske i čvorne tačke ili na čvorne tačke. Ostali /sporedni/ poligonometrijski vlakovi oslanjaju se jednim krajem na trigonometrijske ili na čvorne tačke dok se drugim krajem oslanjaju na poligonometrijske tačke. Mnogo češće sporedni poligonometrijski vlakovi sa oba kraja oslanjaju se na poligonometrijske tačke glavnog ili nekog drugog sporednog poligonometrijskog vlaka.

Tačnost odredjivanja položaja trigonometrijskih tačaka moguće je proceniti na osnovu grupnog ili pojedinačnog izravnanja trigonometrijskih tačaka.

Položaj čvornih tačaka odredjuje se grupnim ili pojedinačnim izravnanjem koordinata čvornih tačaka, na osnovu merenja uglova a i dužina. Pri tome su uglovna i linearna merenja opterećena kako slučajnim tako i sistematskim greškama.

Kod procene tačnosti položaja čvornih tačaka obično se vodi računa samo o slučajnim greškama merenja dužina dok se ostali izvori grešaka kao: uticaj sistematskih grešaka merenja dužina, greške merenja uglova i greške koordinata datih tačaka zanemaruju. O ovim uticajima mora se voditi računa. Uticaj sistematskih grešaka merenja dužina srazmernih dužini gubi se ako su svi vlakovi, koji se sustiču u čvornoj tački, jednake dužine i ako su pravilno rasporedjeni oko čvorne tačke. Konstantna sistematska greška, neće imati uticaja na položaj čvorne tačke ukoliko su vlakovi koji se u čvornoj tački sustiču ispruženi, istog broja strana i pravilno rasporedjeni oko čvorne tačke.

Uticaj grešaka merenja uglova raste sa povećanjem prosečnog broja merenih uglova u vlaku i prosečnom dužinom vlaka, a opada sa brojem vlakova koji se u čvornoj tački sustiču.

Date tačke kao i dati direkcioni uglovi utiču na položaj čvorne tačke. Sa povećanjem broja vlakova koji se u čvornoj tački sustiču smanjuje se uticaj grešaka koordinata datih tačaka a i uticaj datih direkcionih uglova.

Svi napred navedeni izvori grešaka, koji su imali uticaj na tačnost položaja čvorne tačke, utiču i na tačnost položaja tačke poligonometrijskog vlaka. Slučajne greške merenja dužina povećavaju svoje delovanje idući od krajeva vlaka ka njegovoj sredini. Kod sistematskih grešaka merenja dužina srazmernih merenoj dužini dolazi do poništavanja njihovog uticaja. Naime, raspodelom linearnih odstupanja f_y i f_x srazmerno merenim dužinama odstranuje se uticaj ovih grešaka. Kada su dužine poligonometrijskih strana jednake odstranjuje se uticaj i konstantne sistematske greške, dok kod različitih dužina ostaje jedan mali, zanemarljiv deo.

Dati direkcioni uglovi nemaju uticaja na tačke koje su na početku i na kraju vlaka dok im se uticaj na tačke ka sredini vlaka povećava simetrično prema sredini vlaka /kada je $b_p = b_z$/.

Koordinate datih tačaka, imaju najveći uticaj na tačke koje su bliže datim tačkama, odnosno na tačke na početku i kraju vlaka, dok im se uticaj na tačke ka sredini vlaka smanjuje.

U nivelmanskoj mreži generalnog nivelmana slično kao u poligonometrijskoj mreži ima nerazjašnjenih pitanja. Medjutim izvršenje merenja u nivelmanu, kao i računanja u njemu mnogo su jednostavnija nego u poligonometrijskoj mreži. Samim tim jednostavniji su i izrazi za računanje dozvoljenih odstupanja pa u njima ima mnogo manje propusta. Evidentno je, da se nigde, u izrazima za dozvoljena odstupanja u generalnom nivelmanu, ni jednim članom, ne uvažava prisustvo grešaka visina datih repera.

Visine čvornih repera, kao i ma kog repera u nivelmanskom vlaku, pored slučajnih grešaka merenja, opterećene su uticajem sistematskih grešaka merenja kao i uticajem grešaka visina datih repera. Slabljenje uticaja visina datih repera na položaj čvornog repera postiže se učvoravanjem više vlakova u čvorni reper. Pravilnim izborom vlakova i padom terena po kojem idu vlakovi može se uticati na smanjenje sistematskih grešaka nivelanja. U nivelmanskom vlaku greške visina datih repera najviše utiču na repere bliže datim reperima a idući ka sredini vlaka ovaj uticaj se smanjuje.

Na osnovu odstupanja u nivelmanskim vlacima i zatvorenim poligonima u jednoj nivelmanskoj mreži koja je postavljena na većem području, moguće je odrediti slučajne i sistematske greške koje se pojavljuju u procesu nivelanja kao i greške apsolutinih visina datih repera. Naime, za svako odstupanje može se obrazovati po jedna jednačina grešaka u kojima će kao nepoznate figurisati slučajne i sistematske greške nivelanja kao i greške datih veličina. Ovde je veoma bitno utvrditi odgovarajuće težine za svaku jednačinu odstupanja (vidi poglavlje 3. tač. 5) a zatim primenom metode najmanjih kvadrata odrediti nepoznatu veličinu.

Prijatna mi je dužnost da se zahvalim mentoru prof. dr Krunislavu Mihajloviću na veoma korisnim savetima i pomoći prilikom izrade disertacije.

I DEO

DOZVOLJENA ODSTUPANJA U POLIGONOMETRIJSKIM MREŽAMA

U našoj struci za poligonometrijsku mrežu odomaćena su dva izraza. Tako se najčešće poligonometrijskom mrežom naziva ona mreža u kojoj su dužine merene povećanom tačnošću pomoću precizne čelične pantljike, ili pomoću pribora za paralaktičku poligonometriju, ili pomoću elektrooptičkih daljinomera. Merenje uglova obavlja se pomoću jednosekundnih teodolita u dva ili tri girusa. Pri tome se koristi pribor za prisilno centrisanje teodolita i markica. Dozvoljena odstupanja za ovu vrstu radova data su u Pravilniku za državni premer IIa deo.

Pod poligonskom mrežom obično se podrazumeva mreža u kojoj se dužine mere poljskom pantljikom običnim načinom. Merenje uglova vrši se teodolitima sa podatkom 30", 20", 10" i 6" a pri tom se viziranje vrši na značke. Dozvoljena odstupanja za ovu mrežu data su u Pravilniku državni premer II deo

Podela jedne, po suštini iste mreže, na poligonsku i poligonometrijsku mrežu izvršena je zavisno od sredstva sa kojim se vrši merenje, a ne prema suštini, razvijanju mreže i načinu odredjivanja položaja tačaka. Mislim da bi pravilnije bilo nazvati ovu mrežu jednim imenom poligonometrijska mreža, a podeliti je po tačnosti na <u>preciznu poligonometriju</u> i <u>običnu poligonometriju</u>. U preciznu poligonometriju spadala bi poligonometrijska mreža u kojima se dužine mere elektro-optičkim daljinomerima u jednom ili u dva smera, dok se uglovi mere jednosekundnim teodolitima u dva ili tri girusa uz prisilno centrisanje teodolita i vizurnih markica. Zavisno od namene i značaja, ova mreža može se, prema potrebi podeliti u više skala tačnosti, gde će se za pojedine skale tačnosti davati odredjeni tehnički normativi.

Naziv obična poligonometrija odgovarao bi poligonometrijskim mrežama u kojima se dužine mere običnim načinom, pomoću poljske pantljike, dok se uglovi mere teodolitima čiji podatak iznosi 30", 20", 10" i 6". Merenje uglova obavlja se u jednom a najviše u dva girusa pri čemu se teodolit centriše pomoću običnog viska a vizira na značke. Drugim rečima u običnu poligonometriju spadala bi mreža i radovi koji odgovaraju sadašnjem nazivu poligonska mreža.

Poligonometrijska mreža razvija se sa ciljem da se od dosta retkih trigonometrijskih tačaka, dodje do detalja koji treba snimiti. Da bi se na terenu postigla dovoljna gustina poligonometrijskih tačaka, a uz to sačuvala tačnost njihovog položaja i poštovao princip "od većeg ka manjem" poligonometrijska mreža deli se u redove a u okviru svakog reda postoje tri skale tačnosti.

Za pojedine skale tačnosti pravilnicima se propisuju dužine poligonometrijskih vlakova, dužine poligona, maksimalne greške merenja uglova, maksimalne greške zatvaranja poligona, maksimalne relativne greške merenja poligonometrijskih strana kao i maksimalne relativne greške ukupnog linearnog odstupanja. Uz to se predvidja način na koji se mora vršiti razvijanje vlakova i mreže, koji je kriterijum razvučenosti vlaka itd. Zavisno od predvidjene tačnosti, u pojedinim skalama tačnosti, odabiraju se instrumenti i pribor kojim će se vršiti merenje kao i metoda rada. Na taj način donekle se sprovodi princip "od većeg ka manjem", kada je u pitanju tačnost merenja uglova ili dužina običnim načinom.

Pošto kod većine elektrooptičkih daljinomera tačnost merenja ne zavisi od dužine to princip "od većeg ka manjem", kada se radi o linearnim veličinama,dobija formalno obeležje.

U poligonometrijskoj mreži gde se dužine mere poljskom pantljikom, običnim načinom, a uglovi uglavnom u jednom girusu nisu propisane skale tačnosti. Prema tome sva uglovna merenja vrše se na isti način i istom tačnošću bez obzira na rang vlaka. Tačnost merenja dužina takodje ne zavisi od ranga vlaka nego od povoljnosti terena za merenje dužina. Iz prednjeg proizilazi da se i ovde ne poštuje princip "od većeg ka manjem".

Ocena tačnosti merenja u mreži i same mreže, može izvršiti na dva načina:

- Pre početka merenja može se izvršiti ocena tačnosti "apriori" koja može imati uticaja na izbor instrumenata, pribora i metode rada. Koliko će ocena tačnosti "apriori" biti bliska realnoj oceni tačnosti, zavisi od toga koliko su u njoj realne pretpostavke o uticaju pojedinih izvora grešaka. Da bi se obezbedila ocena tačnosti "apriori" potrebno je pratiti proces merenja, kako bi se loše izvršena merenja na vreme odbacila i ponovila. Na primer kod merenja uglova prati se promena vrednosti dvostruke kolimacione greške, uporedjuju se vrednosti početne i završne vizure, uporedjuju se vrednosti redukovanih pravaca iz pojedinih girusa i dr. Kod merenja dužina uporedjuju se vrednosti dobijene merenjem napred-nazad. Posle završenog merenja vrši se ocena tačnosti "aposteriori". Tako se npr. tačnost merenja uglova može ceniti preko grešaka zatvaranja horizonta preko odstupanja zbira uglova u zatvorenim poligonima, preko odstupanja zbira uglova u poligonometrijskom vlaku itd.

- Na kraju u procesu računanja i izravnanja mreže dobijaju se, zavisno od načina računanja i izravnanja: podužna i poprečna linearna odstupanja, uglovna odstupanja, srednje greške merenja pravaca i uglova, srednje greške merenja dužina, srednje greške kóordinata tačaka itd.

Ocene tačnosti, odnosno vrednosti pojedinih srednjih grešaka sračunate u raznim etapama merenja i računanja često će se medjusobno razlikovati zavisno od toga, koliko formule, po kojima se vrši računanje, uzimaju objektivno u obzir sve moguće izvore grešaka koji na izvršena merenja i izravnanje utiču.

1.1 PRIKAZ FORMULA ZA DOZVOLJENA ODSTUPANJA PRI MERENJU DUŽINA NAPRED-NAZAD

Merenje dužina u poligonometrijskoj mreži, vrši se dva puta u dva smera. Kao konačan rezultat merenja uzima se aritmetička sredina. Pre usvajanja rezultata merenja mora se proveriti da li se merenja odnosno njihove razlike nalaze u granicama dozvoljenih odstupanja. Ako njihove razlike izlaze izvan granica dozvoljenih odstupanja merenja se moraju ponoviti.

Formule po kojima se računaju dozvoljena odstupanja razlika merenja dužina napred-nazad nisu iste u raznim zemljama i ovde će biti dat prikaz tih formula za neke evropske zemlje.

a. Formule za SFRJ

Vrednosti dozvoljenih odstupanja razlika merenja dužina napred-nazad, prema našem Pravilniku za državni premer II deo zavise od same dužine i kategorije terena po kojem se vrši merenje:

$\Delta_{I} = 0{,}0070\sqrt{S'}$ za teren I kategorije,

$\Delta_{II} = 0{,}0090\sqrt{S'}$ za teren II kategorije,

$\Delta_{III} = 0{,}0120\sqrt{S'}$ za teren III kategorije, .../1.1/

$\Delta_{pt} = 0{,}0025\sqrt{S'}$ za povećanu tačnost merenja.

Za gradsku poligonometrijsku mrežu, koja je podeljena u tri skale tačnosti, najveće dozvoljene razlike merenja dužina napred-nazad date su kao relativne greške i prikazane u tabeli 1.1

Tabela 1.1

Red mreže	Skala tačnosti		
	Prva	Druga	Treća
1	1:7500	1:6000	1:4500
2	1:4500	1:3375	1:2625

b. Formule za SSSR

Prema Instrukciji SSSR za izvršenje premera, geodetske mreže dele se na:

- državnu geodetsku mrežu
- geodetsku mrežu lokalnog značaja i
- mrežu za snimanje.

Državna geodetska mreža služi kao glavna osnova topografskog snimanja svih razmera. Ona je podeljena na četiri reda i to mreže triangulacije, poligonometrije, trilateracije 1, 2, 3 i 4 reda kao i nivelmanske mreže I, II, III i IV reda.

Geodetska mreža lokalnog značaja služi kao osnova topografskog snimanja za planove razmere 1:5000 do 1:500 i inženjerske radove. Ova mreža deli se na:

- analitičku mrežu 1. i 2. razreda,
- poligonometrijsku mrežu 1. i 2. razreda i
- mrežu tehničkog nivelmana

Analitičke mreže oba reda razvijaju se po principima razvijanja trigonometrijske mreže.

Mreža za snimanje služi kao neposredna osnova za izvršenje snimanja svih razmera kao i za druge radove. Ova mreža deli se na položajnu i visinsku mrežu. Tačke položajne mreže za snimanje mogu se odredjivati presecanjem sa tačaka prethodnih mreža zatim kao poligonski i drugi vlaci.

Visinska mreža za snimanje postavlja se u vidu nivelmanskih vlakova.

Ovde će biti dat prikaz formula za dozvoljena odstupanja u poligonometrijskoj mreži 1. i 2. razreda i poligonskoj mreži.

Srednja relativna greška merenja strana u poligonometrijskoj mreži 1. razreda ne sme biti veća od 1:10000 a u poligonometrijskoj mreži 2. razreda od 1:5000. U poligonskim vlacima relativna razlika merenja napred-nazad jedne strane ne sme preći granicu 1:1000.

c. Formule za NR Bugarsku

Prema Instrukciji za topografsko snimanje terena i izradu planova, teren se snima za planove razmere 1:10000, 1:5000 i 1:2000. Dužina poligonometrijskih strana, gustina /broj/ tačaka, tačnost položaja tačaka pa i dozvoljena odstupanja pri merenju zavise od razmere snimanja i pada terena.

Najveće dozvoljene razlike izmedju rezultata merenja dužina napred-nazad ne sme preći granice date u tabeli 1.2.

Tabela 1.2

Broj	Nagib terena i povoljnost terena za merenje	Dozvoljena razlika na 100 m					
		1:10000		1:5000		1:2000	
		ds cm	ds/s	ds cm	ds/S	ds cm	ds/s
1.	Dobri uslovi za merenje nagib terena do 4%	25	1:400	10	1:1000	5	1:2000
2.	Srednje povoljan teren nagib terena od 4%-8%	40	1:250	14,5	1:700	6,5	1:1500
3.	Loši uslovi za merenje nagib terena iznad 8% zarastao teren	65	1:150	20	1:500	10	1:1000

d. Formule za SR Nemačku

Teren je u SR Nemačkoj, kao i kod nas, podeljen u tri kategorije. Zavisno od kategorije terena i dužine, dozvoljena odstupanja računaju se prema

$\Delta S_{I}=0,004\sqrt{S}+0,00030\ S+0,02$ za teren I kategorije,

$\Delta S_{II}=0,006\sqrt{S}+0,00035\ S+0,02$ .../1.2/za teren II kategorije,

$\Delta S_{III}=0,008\sqrt{S}+0,00040\ S+0,02$ za teren III kategorije.

e. Formule za Austriju

Poligonometrijska mreža u Austriji podeljena je u dve skale tačnosti. Osnovna formula za računanje dozvoljenih razlika merenja napred-nazad data je izrazom

$\Delta S=0,005\sqrt{S}+0,00015\ S+0,015$ .../1.3/.

Za prvu skalu tačnosti od ove vrednosti uzima se 0,75 dok se za drugu skalu tačnosti uzima 1,25 tj.

$\Delta S_{I}=0,75\,\Delta S$ $\Delta S_{II}=1,25\,\Delta S$

f. Formule za Švajcarsku

Prema švajcarskom pravilniku poligonometrijska mreža podeljena je na tri skale tačnosti sa sledećim dozvoljenim razlikama merenja dužina napred-nazad

$\Delta S_{I}=0,001\sqrt{S}+0,0001\ S$ za prvu skalu tačnosti,

$\Delta S_{II}=0,003\sqrt{S}+0,0002\ S$ .../1.4/ za drugu skalu tačnosti,

$\Delta S_{III}=0,020\sqrt{S}+0,0005\ S$ za treću skalu tačnosti.

g. Formule za Italiju

Dozvoljena odstupanja za razlike merenja dužina napred-nazad u Italiji zavise od kategorije strane i same dužine

$\Delta S_{I}=0,0055\sqrt{S}+0,0008\ S$ za I skalu tačnosti,

$\Delta S_{II}=0,020\sqrt{S}+0,0008\ S$ .../1.5/ za II skalu tačnosti,

$\Delta S_{III}=0,025\sqrt{S}+0,0008\ S$ za III skalu tačnosti

1.1.2. KRITIČKI OSVRT NA PRIKAZANE FORMULE

Poznato je da na rezultate merenja dužina utiču slučajne i sistematske greške merenja. Ovi uticaji prikazani su u poglavlju IV ovog rada. Kod formiranja razlike merenja, uticaji sistematskih grešaka merenja, potiru se pa ostaju samo uticaji slučajnih grešaka merenja. Prema tome oblik formule

$$\Delta S = a\sqrt{S} \qquad .../1.6/$$

za dozvoljenu razliku izmedju merenja dužina napred-nazad sasvim je ispravan, koeficijent a odredjen je empirijskim putem iz velikog broja podataka. Svakako da ovaj koeficijent odgovara podacima iz kojih je odredjen, odnosno odgovara mernom priboru, uslovima rada i metodi rada. Njegova vrednost ne može se prihvatiti kao univerzalna, već se može koristiti samo za one uslove rada koji približno odgovaraju uslovima rada iz kojih je koeficijent a odredjen.

Računanje dozvoljenih odstupanja za razlike merenja napred-nazad preko relativnih grešaka teorijski je sasvim neispravno [6], [7], [24]. Srednja greška razlike merenja napred-nazad pa i dozvoljeno odstupanje može se računati prema /1.6/ odnosno biće srazmerno kvadratnom korenu iz merene dužine. Medjutim, kada se dozvoljeno odstupanje računa preko relativnih grešaka, tada je ono, kao i srednje greške merenja, srazmerno merenoj dužini, što se toerijski ne može dokazati.

Relativne greške obično se definišu na sledeći način

$$\frac{m_S}{S} = \frac{1}{n} \qquad .../1.7/$$

gde je n po pravilu neki okrugao broj 1000, 2000 ili neka druga vrednost. Iz izraza /1.7/ sledi

$$m_S = \frac{1}{n} S = a\,S \qquad .../1.7a/$$

gde je a neka konstantna vrednost.

Rast srednje greške merenih dužina po zakonu /1.7a/ karakterističan je za slučaj kada merenja dužina sadrže sistematske greške.

Pošto pri merenju dužina dominiraju slučajne greške /pogotovu u razlici merenja/ to je očigledno da relativne greške ne mogu da posluže kao kriterijum dozvoljenih odstupanja.

Dozvoljene razlike merenja dužina napred-nazad oblika

$$\Delta S = a\sqrt{S} + b\,S + C \qquad .../1.8/$$

takodje su neispravne. Pored uticaja slučajnih grešaka merenja dužina, ovde se posvećuje pažnja uticaju sistematskih grešaka merenja dužina koje su srazmerne mernoj dužini kao i jednom konstantnom članu. Uzimanje svih ovih članova u obzir kod razlike merenja je neopravdano jer se u razlici merenja gubi njihov uticaj. Samim tim ovi uticaji ne mogu se pojaviti ni u srednjoj grešci razlike merenja niti u odgovarajućim dozvoljenim odstupanjima.

Izjednačenje uticaja slučajnih grešaka merenja sa sistematskim uticajem, na razlike merenja dužina, zavisno od pravilnika pojedinih država, postiže se na dužinama datim u tabeli 1.3

Tabela 1.3

	$S = a^2/b^2$		
	I kat.	II kat.	III kat.
SR Nemačka	177	293	400
Austrija	1111	1111	-
Švajcarska	100	225	1600
Italija	351	625	976

1.2. DOZVOLJENA LINEARNA ODSTUPANJA U POLIGONOMETRIJSKIM VLAKOVIMA

Tačnost izvršenih merenja linearnih i uglovnih veličina može se ceniti na osnovu dobijenih odstupanja u poligonometrijskim vlacima.

Linearna odstupanja u poligonometrijskim vlacima mogu se sračunati po pravcu koordinatnih osa X i Y /f_y i f_x/. Ova odstupanja jesu neki brojni pokazatelji ali ne daju dovoljan pojedinačan uvid u tačnost posebno linearnih a posebno uglovnih merenja. Zato je pravilnije posmatrati podužna i poprečna linearna odstupanja u ispruženim vlakovima, pa na osnovu njih davati neki sud o tačnosti merenja dužina i uglova. Poznato je da u ispruženim vlakovima, podužna linearna odstupanja nastaju najviše kao rezultat delovanja grešaka merenja dužina dok poprečna linearna odstupanja nastaju najviše zbog grešaka merenja uglova. Zato se u većini pravilnika evropskih država posebno daju dozvoljena podužna linearna odstupanja a posebno dozvoljena poprečna linearna odstupanja.

1.2.1. PRIKAZ FORMULA ZA RAČUNANJE DOZVOLJENIH PODUŽNIH LINEARNIH ODSTUPANJA

Ovde će biti prikazane formule za računanje dozvoljenih podužnih linearnih odstupanja naše države i nekih drugih evropskih država.

a. Formule za SFRJ

Formule za računanje dozvoljenih podužnih linearnih odstupanja poligonskih vlakova, u kojima su dužine merene običnim načinom, prema našem Pravilniku za državni premer II deo su sledeće

$\Delta l_{I} = 0{,}0035\sqrt{[S]} + 0{,}0002[S] + 0{,}05$ za teren I kategor.,

$\Delta l_{II} = 0{,}0045\sqrt{[S]} + 0{,}0003[S] + 0{,}05$ za teren II kategor.,

$\Delta l_{III} = 0{,}0060\sqrt{[S]} + 0{,}0004[S] + 0{,}05$ ../1.9/ za teren III kategor.,

$\Delta l_{pt} = 0{,}0010\sqrt{[S]} + 0{,}00012[S] + 0{,}03$ za povećanu tačnost merenja

b. Formule za SSSR

Prema Instrukciji SSSR za izvršenje premera, poligonometrija se deli na poligonometriju kao zamenu triangulacije 1., 2., 3. i 4. reda i poligonometriju lokalnog značaja koja se deli na poligonometriju 1. i 2. razreda. Pored ovoga postoji i poligonska mreža za neposredno izvršenje premera. Dozvoljena odstupanja u poligonometrijskoj i poligonskoj mreži SSSR računaju se kao ukupna relativna linearna odstupanja a ne posebno podužna i posebno poprečna linearna odstupanja

c. Formule za NR Bugarsku

U NR Bugarskoj prema Instrukciji za topografsko snimanje terena i izradu planova, teren se snima za planove razmere 1:10000, 1:5000 i 1:2000. Za razvučenost vlaka koristi se kriterijum da zbir dužina poligonometrijskih strana ne odstupa više od 30 % od dijagonale vlaka.

Dužina poligonometrijskih strana, gustina tačaka i dozvoljena odstupanja zavise od razmere snimanja i pada terena. Poligonski vlakovi dele se na glavne i sporedne pa i to utiče na dozvoljena odstupanja. U NR Bugarskoj ne propisuju se posebno dozvoljena podužna i poprečna linearna odstupanja nego samo dozvoljeno ukupno linearno odstupanje.

d. Formule za SR Nemačku

Slično kao i kod nas, u SR Nemačkoj računaju se podužna linearna odstupanja /a i poprečna/ za ispružene vlakove dok se za iskrivljene vlakove računa samo ukupno linearno odstupanje. Kao kriterijum za ispruženost vlaka računa se količnih iz zbira poligonometrijskih strana i dijagonale vlaka. Ako je zadovoljena nejednakost

$$\frac{[S]}{L} \leqslant 1,3 \qquad .../1.11/$$

vlak se smatra ispružen.

Dozvoljena podužna linearna odstupanja data su zavisno od kategorije terena i računaju se po formulama

$$\Delta 1_{I} = 0,0020 \sqrt{[S]} + 0,00030[S] + 0,05 \qquad \text{za teren I kategor.,}$$

$$\Delta 1_{II} = 0,0030 \sqrt{[S]} + 0,00035[S] + 0,05 \quad ../1.12/ \quad \text{za teren II kat.,}$$

$$\Delta 1_{III} = 0,0040 \sqrt{[S]} + 0,00040[S] + 0,05 \qquad \text{za teren III kategor.,}$$

e. Formule za Austriju

Po pravilniku Austrije, poligonometrijska mreža Austrije podeljena je prema povoljnosti terena za merenja, na dve skale tačnosti. Osnovna formula po kojoj se računa dozvoljeno podužno linearno odstupanja je

$$\Delta 1 = 0,006 \sqrt{[S]} + 0,0002[S] + 0,05 \qquad .../1.13/$$

Za povoljan teren usvaja se vrednosti

$$\Delta 1_{I} = 0,75 \, \Delta 1 \qquad .../1.14/$$

dok se za nepovoljan teren uzima

$$\Delta 1_{II} = 1,25 \, \Delta 1 \qquad .../1.15/$$

f. Formule za Švajcarsku

Poligonometrijska mreža Švajcarske podeljena je na tri skale tačnosti, a vlakovi su podeljeni na glave i sporedne. Za sve vlakove data su samo ukupna dozvoljena linearna odstupanja.

1.2.2. KRITIČKI OSVRT NA PRIKAZANE FORMULE

U prethodnom delu navedene su formule po kojima se vrši računanje dozvoljenih podužnih linearnih odstupanja u poligonometrijskim vlakovima. Struktura formula za pojedine države medjusobno se bitno razlikuju a i tamo gde je struktura ista razlikuju se koeficijenti u samim formulama. Pored toga, u nekim državam ne daju se posebno kriterijumi za podužna a posebno za poprečna linearna odstupanja nego samo za ukupna linearna odstupanja.

Teorijska izvodjenja pokazuju da podužna linearna odstupanja zavise od niza faktora odnosno od više izvora grešaka. Struktura formule po kojoj bi se mogla računati srednja greška podužnog linearnog odstupanja imala bi izgled

$$m_l^2 = a\,[S] + b\,[S]^2 + c\,n^2 + d \qquad \ldots/1.16/$$

tj. formula bi trebalo da sadrži sledeće uticaje:

- uticaj slučajnih grešaka merenja dužina,
- uticaj sistematskih grešaka merenja dužina srazmernih dužini,
- uticaj konstantnih sistematskih grešaka koje su iste za svaku stranu,
- jedan konstantan član.

Svi ovi uticaji treba da budu povezani preko zbira kvadrata pojedinih članova.

Kod nas, pa i nekih drugih evropskih država, pošlo se od pretpostavke da će podužna linearna odstupanja sadržati više članova kao što su:

- član koji je srazmeran korenu od zbira dužina,
- član koji je srazmeran zbiru merenih dužina,
- član koji je konstantan i ne zavisi od dužina

odnosno da će dozvoljeno podužno linearno odstupanje imati oblik

$$\Delta l = a\sqrt{[S]} + b[S] + c \qquad \ldots/1.17/$$

Na osnovu izraza /1.17/ može se zaključiti želja donosioca pravilnika, da se kod izraza za dozvoljena podužna linearna odstupanja vodi računa o svim napred navedenim izvorima grešaka. Koeficijenti a, b i c odredjeni su na osnovu podužnih linearnih odstupanja više vlakova po metodi najmanjih kvadrata. Medjutim vrednosti koeficijenata a, b i c mogu biti različite. Njihove vrednosti zavise od više faktora kao što su:

- sredstvo koje smo koristili pri merenju dužina
- metode rada, broja podataka, ako su dužine merene pantljikom od povoljnosti terena za merenje itd. Ovi se koeficijenti odredjuju obično empirijskim putem na osnovu posebno obavljenog eksperimenta ili samih izvršenih radova. Zato njihove vrednosti nemaju opšti karakter već odgovaraju odredjenoj metodi rada i odgovarajućem sredstvu koje je korišćeno pri radu. Kratko rečeno, one se mogu koristiti za one geodetske radove gde su obezbedjeni uslovi slični onima iz kojih su odredjeni koeficijenti a, b i c. Na primer ako se dužine mere pantljikom, vodi se računa o kategoriji terena i dužini same pantljike. Zato prilikom korišćenja dozvoljenih odstupanja za podužna linearna odstupanja, treba biti izuzetno obazriv. Naime za svaku propisanu formulu za dozvoljena odstupanja moraju se jasno objasniti i svi uslovi pod kojim se mogu oni koristiti.

Tako su za istu vrstu merenja, za razne evropske zemlje dobijene različite vrednosti koeficijenata. Pored toga odnos tih koeficijenata, izmedju slučajnih i sistematskih grešaka nije svuda isti. Vrednosti pojedinih koeficijenata a, b i c, kao i dužine vlakova pri kojima se izjednačuju slučajni uticaj merenja sa promenljivom i konstantnom sistematskom greškom za razne evropske države date su u sledećoj tabeli

Tabela 1.4

Država	Kategorija	Koeficijenti a	b	c	$[S]=\left(\frac{a}{b}\right)^2$	$[S]=\left(\frac{c}{a}\right)^2$
SFRJ	I	0,0035	0,0002	0,05	306	204
	II	0,0045	0,0003	0,05	225	123
	III	0,0060	0,0004	0,05	225	44
	pt	0,0010	0,00012	0,03	69	900
NEMAČKA	I	0,0020	0,00030	0,05	44	625
	II	0,0030	0,00035	0,05	73	277
	III	0,0040	0,00040	0,05	100	156
AUSTRIJA	povo.	0,0045	0,00015	0,0375	900	69
	nepov.	0,0075	0,00025	0,0625	900	69

Sama struktura formula /1.17/ i ako sadrži većinu uticaja koji na podužno linearno odstupanje utiču ne može se teorijski obrazložiti. Naime nikakvim transformacijama ne može se od formule /1.16/ preći na formulu /1.17/, pa prema tome ne može se ni /1.17/ koristiti kao objektivan selektor izvršenih merenja. Članovi u izrazima /1.16/ imaju sledeća objašnjenja

- $a[S]=\mu^2[S]$ uticaj slučajnih grešaka merenja dužina
- $b[S]=\lambda_s^2[S]^2$ uticaj sistematskih grešaka merenja dužina koje su srazmerne merenoj dužini
- $cn^2=\lambda_0^2 n^2$ uticaj konstantne sistematske greške koja ne zavisi od dužine i za sve merene dužine je jednaka
- $d=2m_\xi^2$ uticaj grešaka koordinata datih tačaka

Ako je pri donošenju pravilnika bila želja da se o navedenim uticajima vodi računa, što nigde nije objašnjeno, onda u našem Pravilniku ima više nelogičnosti:

Uticaj grešaka koordinata datih tačaka zavisi od tačnosti položaja datih tačaka a ne od tačnosti merenja u vlaku koji se na date tačke oslanja. Prema našem pravilniku, ako se na dve date tačke oslanja vlak u kojem su dužine merene običnim načinom, tim tačkama pripisaće se srednja greška 5 cm, a ako se na iste tačke oslanja vlak gde su dužine merene povećanom tačnošću pripisaće im se greška od 3 cm.

Poznato je, da su pri merenju dužina na povoljnijem terenu manji uticaji slučajnih grešaka nego na nepovoljnom terenu, pa će se samim tim pre izjednačiti slučajni i sistematski uticaji, nego na nepovoljnom terenu. Koristeći odredbe iz našeg pravilnika dobijaju se obrnute vrednosti.

Prema pravilniku SR.Nemačke ovaj odnos dobija se prema očekivanju, dok prema pravilniku Austrije dobijaju se iste vrednosti.

Iz uporedjenja /1.12/ sa /1.2/ može se zaključiti:

- uticaj slučajnih grešaka merenja dužina smanjen je, sasvim ispravno za dva puta,
- uticaj sistematskih grešaka merenja ostao je isti
- uticaj konstantne sistematske greške povećan je za 2,5 puta

Prema pravilniku Austrije, a iz uporedjenja /1.13/ sa /1.3/ ne može se nazreti nikakva zakonitost kojom bi se povezale dozvoljene razlike merenja sa dozvoljenim podužnim linearnim odstupanjem.

Kod ostalih evropskih država propisane su granice samo za ukupna linearna odstupanja.

Očigledno da je pri donošenju pravilničkih odredaba /1.9/ za naš pravilnik, postojao odredjeni uticaj pravilnika SR Nemačke i Austrije.

1.2.3. PRIKAZ FORMULA ZA DOZVOLJENA POPREČNA LINEARNA ODSTUPANJA

Formule za dozvoljena poprečna linearna odstupanja data su kod onih država gde su dati izrazi i za dozvoljena podužna linearna odstupanja.

a. Formule za SFRJ

U našem Pravilniku za državni premer II deo date su formule za dozvoljena poprečna linearna odstupanja. Vrednosti koeficijenata u tim formulama zavise od toga da li se viziranje vrši na markice uz prisilno centrisanje teodolita i markica zatim od podatka teodolita, da li se viziranje vrši na značke i da li se uglovi mere u jednom ili u dva girusa.

Tako se dozvoljena poprečna odstupanja računaju prema izrazima

$$\Delta\varphi = [S]\,\frac{60''}{\rho''}\sqrt{\frac{n'(n'+1)}{12(n'-1)}} + 0{,}05 \qquad \ldots/1.18/$$

za vlakove gde su dužine merene običnim načinom, uglovi mereni teodolitom čiji je podatak 1' sa ocenom od oka jedne desetinke minute, pri čemu je viziranje vršeno na značke i mereno u jednom girusu.

$$\Delta\varphi = [S]\,\frac{45''}{\rho''}\sqrt{\frac{n'(n'+1)}{12(n'-1)}} + 0{,}05 \qquad \ldots/1.19/$$

Ovaj izraz važi za dozvoljena poprečna linearna odstupanja za iste uslove rada kao u prethodnom slučaju ali kada se uglovi mere u dva girusa.

Kod vlakova u kojima se dužine mere povećanom tačnošću a uglovi jednosekundnim teodolitima u dva girusa uz prisilno centrisanje teodolita i vizurnih markica, dozvoljeno poprečno linearno odstupanje računa se po formuli

$$\Delta\varphi=[S]\,\frac{20''}{\rho''}\sqrt{\frac{n'(n'+1)}{12(n'-1)}}+0.03 \qquad .../1.20/$$

gde je: n'=n+b zbir broja merenih uglova n i rednog indeksa vlaka (b).

d. Formule za SR Nemačku

$$\Delta\varphi=[S]\,\frac{60''}{\rho''}\sqrt{\frac{n(n+1)}{12(n-1)}}+0.05 \qquad .../1.21/$$

e. Formule za Austriju

U pravilniku Austrije data je formula za računanje dozvoljenog poprečnog odstupanja za glavne vlakove

$$\Delta\varphi=[S]\,\frac{45''}{\rho''}\sqrt{\frac{n(n+1)}{12(n-1)}}+0.05 \qquad .../1.22/$$

Za sporedne vlakove navedeno dozvoljeno odstupanje treba uvećati za 20 %.

1.2.4. KRITIČKI OSVRT NA PRIKAZANE FORMULE

Poprečna linearna odstupanja mogu se računati iz dva razloga: da se izvrši procena da li se poprečno linearno odstupanje nalazi u granicama dozvoljenih odstupanja, ili da njegova vrednost posluži kao kriterijum za način izravnanja vlaka, odnosno da li će se izravnanje vlaka /kao kod nas/ izvršiti po prostoj ili po strožijoj metodi.

Poprečno linearno odstupanje ne sme preći unapred propisanu vrednost. Sva tri prikazana dozvoljena poprečna odstupanja sadrže u sebi: uticaj grešaka merenja uglova, ukupnu dužinu vlaka i jedan konstantan član. Vrednost konstantnog člana određena je empirijskim putem iz velikog broja poprečnih linearnih odstupanja i može se prihvatiti kao ispravna samo ako se pri merenju obezbede isti uslovi kakvi su bili prilikom merenja u ispitivanim vlakovima.

Da bi se uzele u obzir greške datih direkcionih uglova, u našem Pravilniku, u formulama za dozvoljena poprečna odstupanja, pod znakom kvadratnog korena, pojavljuje se, umesto broja merenih uglova n, broj n'=n + b, odnosno broj merenih uglova uvećan za redni indeks vlaka.

Suštinska primedba bila bi u tome da se srednja greška poprečnog linearnog odstupanja ne može predstaviti iz dva linearna sabirka kako je to dato izrazima /1.18/ do /1.22/. Ono, kao i dozvoljeno poprečno linearno odstupanje, može se predstaviti kao kvadratni koren iz zbira kvadrata članova koji predstavljaju uticaje pojedinih izvora grešaka.

Sagledavajući nedostatke prednjih formula kao i nedovoljna objašnjenja u vezi sa njima, u [18] izvedeni su izrazi a u ovom radu, poglavlje 5 dopunjeni, za srednju odnosno graničnu grešku poprečnog linearnog odstupanja

$$\Delta\varphi = k\sqrt{m_\beta^2 \frac{S_{1N}^2}{4}\left[\frac{N(N+1)}{3(N-1)} + b_p + b_z\right] + 2m_\xi^2} \qquad .../1.23/$$

gde su:

S_{1N} - dijagonala vlaka,

N - broj uglova u vlaku,

b_p, b_z - recipročne vrednosti težina početnog i završnog datog direkcionog ugla,

m_ξ - srednja položajna greška datih tačaka.

Pri izvodjenju prednjeg izraza uvažavane su sledeće pretpostavke:

- da su koordinate datih tačaka medjusobno nezavisne,
- da su dati direkcioni uglovi /početni i završni/ medjusobno nezavisni,
- da je vlak razvučen i jednakih dužina strana

Uporedjujući izraze /1.18/ do /1.22/ sa /1.23/ uočavaju se nedostaci važećih formula za dozvoljeno odstupanje.

1.2.5. PRIKAZ FORMULA ZA RAČUNANJE DOZVOLJENIH UKUPNIH LINEARNIH ODSTUPANJA

Podužna i poprečna linearna odstupanja potrebno je računati za sve ispružene vlakove. Njihove vrednosti mogu da nam ukažu na moguće izvore grešaka kao što su: sistematske greške merenja dužina /konstantne i promenljive/, greške datih direkcionih uglova, greške koordinata datih tačaka i dr.

Medjutim i ako se u većini evropskih država ova odstupanja računaju, za njihove vrednosti ne postavljaju se svugde dozvoljene granice. Mnogo češće, one se računaju radi dobijanja uvida u moguće izvore grešaka ili radi odredjivanja kriterijuma o načinu izravnanja vlaka, dok se granice dozvoljenih odstupanja propisuju samo za ukupna linearna odstupanja.

a. Formule za SFRJ

Prema našem Pravilniku za državni premer II deo, ukupno linearno odstupanje računa se za sve iskrivljene vlakove i ispružene vlakove koji nemaju više od tri strane. Pri tome ukupno linearno odstupanje ne sme preći granice dozvoljenog podužnog linearnog odstupanja ispruženog vlaka sa istim zbirom poligonskih strana.

Kvalitet izvršenih merenja u poligonometrijskoj mreži ceni se preko ukupnog relativnog linearnog odstupanja čija vrednost ne sme preći granice koje su date zavisno od skale tačnosti i reda mreže. Ove dozvoljene granice date su u tabeli 1.5.

Tabela 1.5

Red mreže	Skala tačnosti		
	Prva	Druga	Treća
1.	1:10000	1:8000	1:6000
2.	1:6000	1:4500	1:3500
3.	1:3500	1:2500	1:2000

Pri računanju relativnih grešaka koriste se izrazi

$$m_R = \frac{\sqrt{f_Y^2 + f_X^2}}{[S]} = \frac{f_d}{[S]} \qquad \text{.../1.24/}$$

b. Formule za SSSR

Ukupna relativna greška vlaka sračunata prema /1.24/ za poligonometrijsku i poligonsku mrežu u SSSR, ne sme preći granice prikazane u tabeli 1.6

Tabela 1.6

Red mreže	Relativna greška
Poligonometrijska mreža 1. reda	1:300 000
" " 2. "	1:250 000
" " 3. "	1:200 000
" " 4. "	1: 25 000
Poligonometrijska mreža 1. razreda	1: 10 000
" " 2. "	1: 5 000
Poligonska mreža-povoljan teren	1: 2 000
" " nepovoljan teren	1: 1 000

c. Formule za NR Bugarsku

U NR Bugarskoj računaju se ukupna linearna odstupanja i njihova vrednost ne sme preći unapred propisane granice. Dozvoljene granice računaju se zavisno od razmere snimanja za koju je mreža namenjena, od nagiba terena odnosno od njegove povoljnosti za merenje i od toga da li su vlaci glavni ili sporedni. Formule po kojima se računaju vrednosti dozvoljenih odstupanja prikazane su u tabeli 1.7.

Tabela 1.7

Red vlaka i kateg.strane	Razmera snimanja		
	1:10000	1: 5000	1:2000
Glavni vlaci nagib do 15%	$0,05\sqrt{[S]} + 0,30$	$0,03\sqrt{[S]} + 0,20$	$0,015\sqrt{[S]} + 0,10$
Sporedni vlaci nagib do 15%	$0,07\sqrt{[S]} + 0,30$	$0,05\sqrt{[S]} + 0,20$	$0,02\sqrt{[S]} + 0,10$
Glavni vlaci nagib preko 15 %	$0,08\sqrt{[S]} + 0,30$	$0,06\sqrt{[S]} + 0,20$	$0,02\sqrt{[S]} + 0,10$
Sporedni vlaci nagib preko 15%	$0,15\sqrt{[S]} + 0,30$	$0,12\sqrt{[S]} + 0,20$	$0,03\sqrt{[S]} + 0,10$

dozvoljena odstupanja po prednjim formulama dobijaju se u metrima.

d. Formule za SR Nemačku

Za SR Nemačku nisu propisane formule za računanje dozvoljenih ukupnih linearnih odstupanja

e. Formule za Austriju

Prema Pravilniku Austrije, ukupno linearno odstupanje ne sme preći granicu

$$\Delta S = 1,25\,\Delta 1 \qquad .../1.25/$$

odnosno ne sme preći 1,25 vrednosti dozvoljenog podužnog linearnog odstupanja za odgovarajuću kategoriju terena i red vlaka.

f. Za Švajcarsku

Dozvoljene granice za ukupno linearno odstupanje poligonometrijske mreže Švajcarske zavisi od zbira dužina strana kategorije strana i važnosti vlaka. Kao i kod nas teren je prema švajcarskom pravilniku podeljen na tri kategorije a vlaci su podeljeni na glavne i sporedne. Dozvoljena odstupanja za vrste vlakova i kategorije strana data su sledećim obrascima.

$$\Delta S_I = 0{,}005\sqrt{[S]} + 0{,}05 \qquad \text{za teren I kategorije,}$$
$$\Delta S_{II} = 0{,}010\sqrt{[S]} + 0{,}10 \qquad .../1.26/ \quad \text{za teren II kategorije,}$$
$$\Delta S_{III} = 0{,}040\sqrt{[S]} + 0{,}20 \qquad \text{za teren III kategorije.}$$

Prethodne formule važe za glavne vlakove dok će za sporedne važiti sledeći obrasci

$$\Delta S_I = 0{,}01\sqrt{[S]} + 0{,}05 \qquad \text{za teren I kategorije,}$$
$$\Delta S_{II} = 0{,}02\sqrt{[S]} + 0{,}10 \qquad .../1.27/ \quad \text{za teren II kategorije,}$$
$$\Delta S_{III} = 0{,}08\sqrt{[S]} + 0{,}20 \qquad \text{za teren III kategorije}$$

g. Formule za Italiju

Poligonometrijska mreža Italije podeljena je, zavisno od povoljnosti terena za merenja, na tri kategorije. Dozvoljena ukupna linearna odstupanja propisana su zavisno od kategorije terena a računaju se po sledećim obrascima

$$\Delta S_I = 0{,}015\sqrt{[S]} + 0{,}0008[S] + 0{,}1\sqrt{n-1} \qquad \text{povoljan teren,}$$
$$\Delta S_{II} = 0{,}020\sqrt{[S]} + 0{,}0008[S] + 0{,}1\sqrt{n-1} \quad /1.28/ \quad \text{sred.povolj.teren,}$$
$$\Delta S_{III} = 0{,}025\sqrt{[S]} + 0{,}0008[S] + 0{,}1\sqrt{n-1} \qquad \text{nepovoljan teren}$$

1.2.6. KRITIČKI OSVRT NA PRIKAZANE FORMULE

Posle završenog računanja koordinatnih razlika u poligonometrijskom vlaku računaju se linearna odstupanja f_y i f_x u pravcu koordinatnih osa /Y i X/. Na osnovu ovih odstupanja može se naći podužno odstupanje /1/ i poprečno odstupanje /φ/, kao i ukupno linearno odstupanje f_d.

$$f_d = \sqrt{f_y^2 + f_x^2} = \sqrt{l^2 + \varphi^2} \qquad /1.29/$$

Podužna linearna odstupanja računaju se da bi se u razvučenom vlaku, na osnovu njih, procenila valjanost merenja dužina. Ako su u jednoj poligonometrijskoj mreži podužna linearna odstupanja uvek istog znaka, ona nam mogu ukazati na postojanje sistematske greške merenja dužina, kao i da nam omoguće njeno računanje. Poprečna linearna odstupanja kod razvučenih vlakova ukazuju, uglavnom, na greške merenja uglova i greške datih direkcionih uglova. Njihova vrednost ne sme prekoračiti unapred propisane dozvoljene granice. Kada poprečno linearno odstupanje svedeno na jedinicu dužine dijagonale vlaka, prelazi odredjenu granicu, izravnanje vlaka mora se izvršiti po strožijoj metodi. Za sve izlomljene vlakove a često i za ispružene, računa se ukupno linearno odstupanje. Za njega se postavlja uslov da ne sme preći odredjenu dozvoljenu granicu koje su za razne evropske zemlje date izrazima /1.24/ do /1.28/.

U osnovi svih tih izraza nalazi se formula oblika

$$\Delta S = a\sqrt{[S]} + b[S] + cn + d \qquad .../1.30/$$

gde pojedini članovi predstavljaju sledeće uticaje

$a\sqrt{[S]}$ - uticaj slučajnih grešaka merenja

$b \cdot [S]$ - uticaj sistematskih grešaka merenja srazmernih merenoj dužini

$c\,n$ - uticaj konstantne sistematske greške koja je ista za sve merene dužine i ne zavisi od dužine

d - konstantna sistematska greška ista za sve vlakove bez obzira na dužinu vlaka

Ovaj oblik formule /1.30/ za srednju grešku pa i za dozvoljeno ukupno linearno odstupanje ne može se teorijski obrazložiti. Prema tome sva dozvoljena odstupanja data formulom /1.30/ ne mogu se prihvatiti kao objektivni selektori izvršenih uglovnih i linearnih merenja. Oblik formule /1.30/ uočava se u izrazima za dozvoljena ukupna linearna odstupanja skoro svih evropskih država /izuzev naše poligonometrijske mreže i mreže SSSR/. Sama formula /1.30/ nigde nije teorijski obrazložena, ali se svugde smatralo da ona dobro odgovara uslovima merenja. U pojedinim Pravilnicima nedostaju neki od članova, verovatno se smatralo da su uticaji, dati tim članovima, zanemarljivo mali.

Našom pravilničkom odredbom, da se za iskrivljene vlakove računa samo ukupno linearno odstupanje i da ono mora biti u granicama koje važe za podužno linearno odstupanje ispruženog vlaka istog zbira strana, čini se gruba greška. Na taj način nigde ne figuriše dozvoljeno poprečno linearno odstupanje. Tako se može dogoditi, da ukupno linearno odstupanje jednog vlaka, koji je proglašen kao iskrivljen, ne ulazi u granice dozvoljenih odstupanja a ako bi imao tretman ispruženog vlaka njegovo podužno i poprečno linearno odstupanje pojedinačno bi bili dozvoljeni. Samim tim za iskrivljene vlakove, koji često idu po nepovoljnijem terenu, postavljaju se oštrije granice tolerancije nego za ispružene vlakove. Objektivnije bi bilo da se dozvoljeno ukupno linearno odstupanje računa kao

$$\Delta S = \sqrt{\Delta l^2 + \Delta q^2} \qquad \ldots/1.31/$$

Dozvoljene granice za ukupnu relativnu grešku vlaka takodje se ne mogu prihvatiti kao objektivno merilo. Kod takvog prilaza unapred se predpostavlja da će sistematske greške merenja dužina biti u ukupnoj grešci dominantne. Ovo se može očekivati tek na velikim dužinama poligonometrijskih vlakova. Na kratkim dužinama, poznato je, dominantne su slučajne greške merenja dužina. Pored toga takav način ocene tačnosti ne uvažava prisustvo grešaka merenja uglova i grešaka koordinata datih tačaka.

Slobodan, konstantan, član u granicama dozvoljenih odstupanja, prema teoriji, trebao bi da predstavlja uticaj grešaka koordinata datih tačaka. Taj član zavisi od položaja datih tačaka a ne od kategorije terena po kojem ide vlak niti od ranga vlaka úmetnutog izmedju datih tačaka. Medjutim u velikom broju Pravilnika ovaj član zavisi od kategorije terena odnosno zavisi od toga da li je vlak glavni ili sporedni.

U našem Pravilniku za državni premer II deo, u izrazima za dozvoljena podužna i poprečna linearna odstupanja poligonometrijskih vlakova uočavaju se isti članovi /sa promenjenim koeficijentima/ kao u formulama Nemačke i Austrije. Izmena strukture njihovih formula sastoji se u tome što je kod dozvoljenih poprečnih linearnih odstupanja u našem Pravilniku unešen i redni indeks vlaka, čime je izražena želja da se uzmu u obzir i greške datih direkcionih uglova.

Paralaktičku poligonometriju najviše su koristili sovjetski stručnjaci. Stoga su izrazi za računanja dozvoljenih odstupanja kod poligonometrijskih mreža slični onim kod SSSR.

Kod Pravilnika NR Bugarske takodje se uočavaju oba uticaja, kao i kod nas. Oni dozvoljene razlike merenja dužina napred-nazad izražavaju preko relativnih grešaka /slično kao u SSSR-u/ dok ukupna dozvoljena linearna odstupanja izražavaju u metrima /slično sa švajcarskim formulama/.

Teorijski dokaz srednje greške ukupnog linearnog odstupanja izveden je u radovima[18] a u ovoj disertaciji dopunjen je još nekim uticajima u poglavlju 5 . Njena vrednost data je izrazom

$$M_{f_s}^2 = \mu_s^2 S_{1N} + \lambda_s^2 S_{1N}^2 + \lambda_0^2 n^2 + m_\beta^2 \left(\frac{S_{1N}}{2}\right)^2 \left[\frac{N(N+1)}{3(N-1)} + b_p + b_z\right] + 4 m_\xi^2 \qquad \text{.../1.32/}$$

za slučaj merenja dužina klasičnim priborom, odnosno

$$M_{f_s}^2 = \mu_s^2 + \lambda_s^2 S_{1N}^2 + \lambda_o^2 n^2 + m_\beta^2 \left(\frac{S_{1N}}{2}\right)^2 \left[\frac{N(N+1)}{3(N-1)} + b_p + b_z\right] + 4 m_\xi^2 \qquad .../1.33/$$

za slučaj merenja dužina elektrooptičkim daljinomerom.

Odgovarajuća dozvoljena ukupna linearna odstupanja, uz pretpostavku koje su uvažavane za izraz /1.23/ imale bi izgled

$$\Delta S = k \cdot \sqrt{a[S] + b[S]^2 + cn^2 + m_\beta^2 [S] \cdot d + e}$$

$$\Delta S = k \cdot \sqrt{an + b[S]^2 + cn^2 + m_\beta^2 [S] \cdot d + e} \qquad .../1.34/$$

Pojedini članovi pod znakom korena uvažavali bi redom prisustvo grešaka: slučajnih grešaka merenja dužina, sistematskih grešaka merenja dužina srazmernih dužini, konstantnih sistematskih grešaka za svaku dužinu, uticaj grešaka merenja uglova i datih direkcionih uglova i uticaj grešaka koordinata datih tačaka.

1.3. DOZVOLJENA ODSTUPANJA KOD MERENJA UGLOVA

Pre računanja koordinata poligonometrijskih tačaka računa se uglovno odstupanje f_β a zatim, posle računanja popravaka merenih uglova, računaju se direkcioni uglovi. Kao kriterijum kvaliteta merenih uglova, koriste se dozvoljena uglovna odstupanja. Dozvoljena uglovna odstupanja mogu se propisati za razliku izmedju merenja jednog istog ugla u dva girusa, za zatvorene poligone i za poligonske vlakove.

1.3.1 PRIKAZ FORMULA ZA DOZVOLJENA UGLOVNA ODSTUPANJA U POLIGONOMETRIJSKIM VLAKOVIMA

Dozvoljena uglovna odstupanja u poligonometrijskim vlakovima računaju se zavisno od instrumenata i pribora koji je pri merenju upotrebljen, od broja girusa i od toga da li su vlakovi glavni ili sporedni.

a. Formule za SFRJ

Prema našem Pravilniku za državni premer II deo u poligonskoj mreži, uglovi se mere u jednom ili u dva girusa teodolitima čiji je podatak 30", 20", 6" ili 1". Pri merenju uglova viziranje se može vršiti na značke uz centrisanje teodolita pomoću običnog viska ili na vizurne markice uz prisilno centrisanje teodolita i vizurnih markica. Zavisno od toga kao i od ranga vlaka /da li je vlak glavni ili sporedni/ dozvoljena odstupanja računaju se po formulama prikazanim u tabeli 1.8.

Tabela 1.8

Vrsta vlaka	Vizirano na značke p=30",20" i 6"		Vizirano na marke p=1"
	1 girus	2 girusa	2 girusa
glavni	$60''\sqrt{N}$	$45''\sqrt{N}$	$20''\sqrt{N}$
sporedni	$60''\sqrt{N+b}$	$45''\sqrt{N+b}$	$20''\sqrt{N+b}$

Pri čemu je b redni indeks vlaka a N broj merenih uglova.

U Pravilniku za državni premer IIa deo nalazimo dozvoljena uglovna odstupanja za gradsku poligonometrijsku mrežu. Najveća dozvoljena odstupanja pri merenju uglova u poligonometrijskim vlakovima ne smeju preći vrednost

$$\Delta\beta = 2m_\beta\sqrt{\Sigma n} + 3m_\nu + k \qquad \Sigma n \leq 15$$

$$\Delta\beta = 2m_\beta\sqrt{\Sigma n} + 3m_\nu \qquad .../1.35/$$

gde je:

Σn - broj merenih uglova

m_ν - greška datih direkcionih uglova, k - komenzacioni član koji zavisi od broja uglova u vlaku a računa se po obrascu k

$$k = 2''\!,6 - 0''\!,2\ (\sum n - 2) \qquad .../1.35a/$$

m_β - srednja greška merenog ugla koja zavisi od skale tačnosti i ne sme preći sledeće vrednosti

I skala	II skala	III skala	za sve skale tačnosti
$m_\beta = 3''\!,5$	$m_\beta = 4''\!,0$	$m_\beta = 4''\!,5$	$m_\nu = 1''\!,7$

.../1.35b/

b. Formule za SSSR

U Instrukciji SSSR-a za izvodjenje topografskih geodetskih radova nalazimo da se dozvoljena uglovna odstupanja nepo-sredne osnove za nimanje /poligonske mreže/ računa po obrascu

$$\Delta\beta = 1'\sqrt{n} \qquad .../1.36/$$

Dozvoljeno uglovno odstupanje u poligonskoj mreži namenjenoj za planinsko istraživačke radove računa se po obrascu

$$\Delta\beta = 1'\!,5\sqrt{n} \qquad .../1.37/$$

za glavne vlakove dok se za sporedne računa prema

$$\Delta\beta = 2'\!,0\sqrt{n} \qquad .../1.38/$$

Dozvoljena uglovna odstupanja u gradskoj poligonometrijskoj mreži računaju se zavisno od razreda mreže po sledećim formulama

$$\Delta\beta = 10''\sqrt{n} \quad \text{za mrežu 1. razreda}$$
$$\Delta\beta = 20''\sqrt{n} \quad \text{za mrežu 2. razreda}$$

Pod pretpostavkom da su dati direkcioni uglovi, opterećeni greškama, koje su približno jednake srednjim greškama merenja ugla, dozvoljena uglovna odstupanja mogu se, prema Čebotarevu, računati po formulama

$$\Delta\beta = 10''\sqrt{n+2} \quad \text{za vlakove 1. razreda}$$
$$\Delta\beta = 20''\sqrt{n+2} \quad .../1.40/ \quad \text{za vlakove 2. razreda}$$

c. Formule za NR Bugarsku

U NR Bugarskoj dozvoljena uglovna odstupanja računaju se u zavisnosti od razmere snimanja i reda vlaka, prema formulama prikazanim u tabeli 1.9

Tabela 1.9

Vrsta vlakova	Razmera snimanja		
	1:10 000	1:5 000	1:2000
glavni vlakovi	$4^c \sqrt{n}$	$3^c \sqrt{n}$	$2^c \sqrt{n}$
sporedni vlaci	$6^c \sqrt{n}$	$5^c \sqrt{n}$	$2^c{,}5 \sqrt{n}$

d. SR Nemačka

Dozvoljena uglovna odstupanja računaju se, zavisno od važnosti vlaka tj. da li je vlak glavni ili sporedni, po formulama

$$\Delta\beta = 1' \sqrt{n} \qquad \Delta\beta = 2^c \sqrt{n} \qquad .../1.41/$$

za glavne vlakove, odnosno

$$\Delta\beta = 1' \sqrt{n} + 1' \qquad \Delta\beta = 2^c \sqrt{n} + 2^c \qquad .../1.42/$$

za sporedne vlakove

e. Formule za Austriju

Prema austrijskom pravilniku dozvoljena uglovna odstupanja računaju se po formulama

$$\Delta\beta = 45'' \sqrt{n} + 45'' \qquad \Delta\beta = 139^{cc} \sqrt{n} + 139^{cc} \qquad .../1.43/$$

za glavne vlakove, odnosno za sporedne

$$\Delta\beta = 45'' \sqrt{n} + 2'15'' \quad \Delta\beta = 139^{cc} \sqrt{n} + 417^{cc} \qquad .../1.44/$$

kada se viziranje vrši na markice.

Prilikom merenja uglova u dva girusa, od vrednosti sračunatih po prednjim formulama treba uzeti 3/4. Kada se viziranje vrši na značke od vrednosti sračunatih po prednjim formulama treba uzeti 5/4.

f. Formule za Švajcarsku

U Švajcarskoj poligonski vlaci podeljeni su na glavne i sporedne, a i jedni i drugi svrstani su u tri kategorije prema povoljnosti terena za merenje. Dozvoljena odstupanja računaju se po formulama prikazanim u tabeli 1.10.

Tabela 1.10

Kategorija	glavni	sporedni
I	$1^c\ n$	$1{,}5^c\ n$
II	$2^c\ n$	$3{,}0^c\ n$
III	$3^c\ n$	$5{,}0^c\ n$

g. Formule za Italiju

U pravilniku Italije dozvoljena uglovna odstupanja računaju se po formulama

$$\Delta\beta = 90''\sqrt{n} \qquad \Delta\beta = 3^c\sqrt{n} \qquad \ldots/1.45/$$

bez obzira na vrstu vlaka i kategoriju terena.

1.3.2. KRITIČKI OSVRT NA PRIKAZANE FORMULE

U [3] prikazano je da srednja greška uglovnog odstupanja f_β zavisi od: broja merenih uglova u vlaku, broja pomoćnih elemenata /strana i uglova/ koji su izmereni u cilju odredjivanja nekog ugla (koji je nepristupačan za direktno merenje), tačnosti merenja uglova i tačnosti početnog i završnog direkcionog ugla. U [3] pokazano je da dozvoljeno uglovno odstupanje treba računati po formuli

$$\Delta\beta = k\ m_\beta\sqrt{N + N_1 + b_p + b_z} \qquad \ldots/1.46/$$

gde je:

k - koeficijent koji zavisi od usvojene verovatnoće i željenog stepena odbitaka izvršenih merenja,

N - broj merenih uglova u vlaku

N_1 - broj pomoćnih elemenata /uglova i dužina/ koji su izmereni u cilju odredjivanja veznog ili prelomnog ugla

b_p i b_z - recipročne vrednosti težina početnog i završnog direkcionog ugla.

Prema našem pravilniku, kod računanja dozvoljenih uglovnih odstupanja, sporednih vlakova broju merenih uglova pod znakom korena, dodaje se redni indeks vlaka. Time je izražena želja da se preko rednog indeksa vlaka uzmu u obzir i greške datih direkcionih uglova. Medjutim u [3] pokazano je da redni indeks vlaka za vlakove 2. i 3. rednog indeksa nedovoljno kompenziraju uticaj grešaka datih direkcionih uglova /$b_p + b_z > b$/ dok za vlakove rednog indeksa 5, 6, 7 itd. rednog indeksa, isuviše brzo rastu redni indeksi, tj. dodeljuje se isuviše velika srednja greška datim direkcionim uglovima /$b_p + b_z < b$/.

Prema tome formule /1.34/ ne mogu se usvojiti kao objektivni selektori izvršenih merenja uglova. Član b /redni indeks vlaka/ ne može se paušalno odredjivati, nego treba posvetiti veću pažnju odredjivanju grešaka datih veličina. Pogotovu, ova činjenica je važna kada se ima na umu da se dosta često tačnija merenja uklapaju u manje tačna merenja, što može dovesti do pojave da se sasvim dobra merenja odbace zbog loših datih veličina, odnosno zbog neadekvatnih dozvoljenih odstupanja.

Kod izraza /1.35/ srednja greška datih direkcionih uglova nalazi se neopravdano izvan znaka korena. Vlak se naslanja na dve date strane, a ne na tri, pa je nejasno odakle se tu pojavljuje $3m_\nu$. Pogotovu je nejasan kompenzacioni član k koji se računa po formuli /1.35a/ i dodaje na dozvoljena odstupanja za vlakove kod kojih je broj uglova manji od 15. Za $\Sigma n=15$ ovaj član se gubi. Teorijski se izraz /1.35/ ne može dokazati. Zatim je neobjašnjivo odakle baš tačno na 15 uglova, da je taj član nepotreban. Verovatno je u pitanju netačno odredjena vrednost srednje greške merenog ugla. Poznato je da se vrednost srednje greške merenog ugla, odredjuje na osnovu odstupanja rezultata merenja od proste aritmetičke sredine ili na osnovu odstupanja zbira uglova u zatvorenim poligonima. Kada se vrednost srednje greške merenog ugla odredjuje na osnovu odstupanja rezultata merenja od proste aritmetičke sredine, ne dolaze do izražaja svi izvori grešaka, kao što su greška centrisanja, greška signalisanja, uticaj refrakcije i dr. Prilikom odredjivanja srednje greške merenog ugla na osnovu odstupanja zbira uglova u zatvorenim poligonima, ne vodi se računa o korelativnoj zavisnosti odstupanja u pojedinim poligonima. Ne uzimanje korelativne zavisnosti u obzir dovodi do pogrešne vrednosti merenog ugla.

Kada se poligonometrijska mreža razvija i izravnava po načinu grupnog učvoravanja, odredjuju se vrednosti direkcionih uglova zajedničkih strana. Težine ovih direkcionih uglova retko dostižu vrednost jedan. Uz srednje greške jedinice težine, odnosno srednje greške merenja jednog ugla, date ovim pravilnikom /$\pm 3''5$, $\pm 4''0$ i $\pm 4''5$/, ne može se očekivati da će srednja greška direkcionog ugla biti $m_\nu = 1''7$ nego bar iznad srednje greške merenih uglova. Ovaj raskorak naročito se manifestuje kod poligonometrijskih vlakova sa malim brojem uglova. Umesto da se potraži stvarni uzrok velikog broja odbacivanja izvršenih merenja, odnosno veliki broj odstupanja iznad dozvoljenih vrednosti dodaju se korekcioni članovi. Prisustvo ovog korekcionog člana u formuli /1.35/ stvara zabunu i otežava računanje.

U SSSR-u i NR Bugarskoj ne dodaje se nikakav član za uticaj grešaka datih direkcionih uglova. Da bi se uglovna merenja u sporednim vlakovima, gde se naročito ispoljavaju značajne greške datih direkcionih uglova, ušla u granice dozvoljenih odstupanja, povećava se vrednost srednje greške merenog ugla. Ovo povećanje srednje greške merenog ugla ne može se pravdati pogotovu kada se zna, da se sva uglovna merenja u poligonometrijskoj mreži vrše istim priborom, u istom broju girusa, na isti način i od istog opažača. U sporednim vlakovima mogla bi se nešto povećati vrednost srednje greške merenog ugla zbog kraćih dužina strana kada više dolaze do izražaja greške centrisanja instrumenta i markica odnosno postavljanja značaka.

Prema Pravilnicima SR Nemačke i Austrije za sporedne vlakove /a kod Austrije i za glavne/ kod dozvoljenih uglovnih odstupanja figuriše jedan konstantan član koji se dodaje na osnovni deo greške.

Pre ovih dozvoljenih uglovnih odstupanja u Pravilniku o katastarskom premeru Nemačke, postojao je kriterijum za dozvoljena uglovna odstupanja $\Delta\beta = 1\overset{c}{,}5\sqrt{n}$ bez razlike da li se radi o glavnim ili o sporednim vlakovima. 1931. godine izdate su dopunske odredbe na navedeni pravilnik prema kojima se dozvoljena uglovna odstupanja imaju računati kao

$\Delta\beta = 1\overset{c}{,}5\sqrt{n}$ za glavne vlakove i

$\Delta\beta = 1\overset{c}{,}0 + 1'\sqrt{n}$ za sporedne vlakove.

Donošenju dopunskih odredaba prethodila je konferencija nemačkih geodetskih stručnjaka. Na toj konferenciji rečeno je da se predlagani obrazac za dozvoljena uglovna odstupanja ne može obrazložiti ali da dobro odgovara rezultatima izvršenih merenja.

U pravilniku Švajcarske, dozvoljena uglovna odstupanja za glavne vlakove razlikuju se od onih za sporedne vlakove a takodje su podeljeni i prema povoljnosti terena za merenje strana na tri kategorije. U njima se ne dodaje nikakav konstantan član, ali se zato proglašavaju različite vrednosti srednjih grešaka merenih uglova, što je nerealno. Takodje, zavisno do povoljnosti terena za merenje dužina, daju se različite vrednosti srednjih grešaka merenja uglova.

Moguće je, u cilju usaglašavanja tačnosti merenja uglova sa tačnošću merenja dužina, dozvoliti da se na terenu nepovoljnom za merenje dužina i uglovi mere sa manjom tačnošću. Pri tome bi trebalo tačno propisati broj girusa, tačnost centrisanja i dr. Kako se kategorije stana menjaju i duž jednog vlaka to bi bilo nemoguće realizovati takvu gradaciju tačnosti merenja uglova. Zato se uglovi u celoj mreži mere na isti način i sa istom tačnošću te nema logike menjati srednje greške merenja uglova u zavisnosti od kategorije strana.

1.3.3. PRIKAZ FORMULA ZA DOZVOLJENA UGLOVA ODSTUPANJA U ZATVORENIM POLIGONIMA

Od navedenih evropskih država, ova odstupanja nalaze se u našem Pravilniku za državni premer IIa deo i Instrukciji SSSR-a.

a. Formule za SFRJ

Prema Pravilniku za državni premer IIa deo, greške zatvaranja poligona osnovičke poligonometrije gradske trigonometrijske mreže zavisiće od načina centrisanja instrumenta i vizurnih markica kao i od broja izmerenih uglova u zatvorenom poligonu.

Tako je:

$$\Delta\beta = 10'' \sqrt{n} \quad \text{za } n \leq 5$$
$$\Delta\beta = 8'' \sqrt{n} \quad \text{za } n > 5 \qquad \ldots/1.49/$$

kada se centrisanje teodolita i vizurnih markica vrši optičkim putem, odnosno

$$\Delta\beta = 15'' \sqrt{n} \quad \text{za} \quad n \leq 5$$
$$\Delta\beta = 10'' \sqrt{n} \quad \text{za} \quad n > 5 \qquad .../1.50/$$

za centrisanje instrumenta pomoću običnog viska.

U istom pravilniku, za gradsku poligonometrijsku mrežu, za greške zatvaranja poligona nalazimo

$$\Delta\beta = 2m_\beta \sqrt{\Sigma n} + k \quad \text{za } n \leq 15$$
$$\Delta\beta = 2m_\beta \sqrt{\Sigma n} \quad \text{za } n > 15 \qquad .../1.51/$$

gde je:

Σn - broj merenih uglova

m_β i k - imaju vrednosti date izrazima /1.35a/ i /1.35b/

Prema Instrukciji SSSR u gradskoj poligonometrijskoj mreži uglovna odstupanja zatvorenih poligona ne smeju preći dozvoljene granice

$$\Delta\beta = 10'' \sqrt{n} \quad \text{za poligonometriju 1. razreda,}$$
$$\Delta\beta = 20'' \sqrt{n} \quad \text{za poligonometriju 2. razreda.} \qquad /1.52/$$

1.3.4. KRITIČKI OSVRT NA PRIKAZANE FORMULE

Formule date u Instrukciji SSSR /1.52/ teorijski su ispravne. U našem Pravilniku oblik formula /1.49/ i /1.50/ teorijski je ispravan, ali je neprihvatljivo da tačnost merenja uglova zavisi od broja merenih uglova /koeficijent ispred znaka korena/. Tačnost merenja uglova u zatvorenom poligonu ni u kom slučaju ne zavisi od broja uglova nego do upotrebljenog instrumenta i pribora kao i od metode rada. Tako je na primer prema /1.49/ i /1.50/

za n = 5 $\Delta\beta = 22.''36$ odnosno $\Delta\beta = 33.''54$ a

za n = 6 $\Delta\beta = 19.''60$ odnosno $\Delta\beta = 24.''49$

tj. kada se sračunaju dozvoljena uglovna odstupanja, za poligone sa pet i šest uglova, dobijaju se veća odstupanja za poligon od pet merenih uglova nego za šest, što se ne može očekivati.

U izrazima /1.51/ ispred znaka kvadratnog korena stoje iste vrednosti što je i realno ali opet tu za broj uglova manji od 15 figuriše kompenzacioni član k dat izrazom /1.35a/. Ovaj kompenzacioni član, kako je prethodno rečeno, nema svoje teorijsko opravdanje. Njegova vrednost ne zavisi od skale tačnosti nego samo od broja merenih uglova. Tako se dešava da on kod dozvoljenih odstupanja, u zatvorenim poligonima gde su uglovi mereni po prvoj skali tačnosti, ima veći procenat učešća, nego u onima gde su uglovi mereni na primer po trećoj skali tačnosti. Takva njegova vrednost, sigurno je, ne može doprineti poboljšanju objektivnosti formula po kojima se vrši računanje dozvoljenih odstupanja.

II DEO

DOZVOLJENA ODSTUPNJA U NIVELMANSKIM MREŽAMA

Merenja u nivelmanskim mrežama izvode se danas savremenim instrumentima, kojim se može postići veoma lako tačnost, kakva je starim instrumentima postizana mnogo teže, i sa znatno više napora. Pojava novih nivelira sa automatskim horizontiranjem vizure, doprinela je velikom povećanju učinka kod nivelanja, u odnosu na nivelanje pomoću nivelira sa libelom.

Za precizne nivelmanske radove danas se masovno koriste i niveliri sa libelom kao i niveliri sa automatskim horizontiranjem vizure. Prema tome pojava nivelira sa automatskim horizontiranjem vizure, znatno je doprinela bržem izvodjenju radova u nivelmanu ali ne i nekom značajnijem povećanju tačnosti u preciznom nivelmanu i nivelmanu visoke tačnosti. Danas se veoma često u tehničkom nivelmanu i tehničkom nivelmanu povećane tačnosti, koriste niveliri sa automatskim horizontiranjem vizure, koji zadovoljavaju i tačnost preciznog nivelmana. Tako se dešava da se radovi veće tačnosti uklapaju u mrežu niže tačnosti /tehnički nivelman u ranije završen tehnički nivelman povećane tačnosti/. Ranije proklamovan princip da se u geodetskoj praksi merenja izvode "od većeg ka manjem" sada dobija formalno obeležje.

Pri ovakvom odnosu tačnosti u datoj nivelmanskoj mreži i novopostavljenoj ne mogu se više zanemarivati uticaji grešaka visina datih tačaka.

Merenja visinskih razlika opterećena su slučajnim greškama nivelanja, sistematskim greškama srazmernim dužini nivelmanskog vlaka i sistematskim greškama srazmernim visinskoj razlici. Prema tome u izrazima za dozvoljena odstupanja nivelanja treba na neki način da figurišu svi navedeni uticaji kao i uticaji grešaka visina datih repera.

Ocena tačnosti nivelanja i nadmorskih visina repera u mreži može se izvršiti uglavnom na dva načina:

- Pre početka merenja, može se izvršiti ispitivanje instrumenata, izvršiti analiza metode rada i ispitivanje pribora, tj. analiza tačnosti "apriori". Analizu tačnosti "apriori" može vršiti stručnjak koji dobro poznaje mogućnosti instrumenta, uticaje pojedinih izvora grešaka i metodu rada. Da bi se postigla tačnost merenja koja je analizom tačnosti "apriori" utvrdjena, potrebno je pri merenju obezbediti sve uslove predvidjene tom analizom. Zato se u toku merenja mora neprekidno pratiti proces merenja i kontrolisati ispunjavanje odredjenih uslova /tačnost instrumenta, dužina vizure, maksimalne razlike dužina vizure, maksimalna odstupanja dva puta nivelanih visinskih razlika na pojedinim stanicama, visina vizure nad terenom i dr/.

Posle izvršenog merenja u procesu izravnanja mreže takodje se može izvršiti ocena tačnosti, kako nadmorskih visina repera tako i samog nivelanja /ocena tačnosti "aposteriori"/. Ovom prilikom može se tačnost nivelanja podudariti sa onom koja je predvidjena analizom tačnosti "apriori" ili može od nje više ili manje da odstupi. Koliko će analiza tačnosti "apriori" biti bliska analizi tačnosti "aposteriori" zavisiće od toga koliko su realne predpostavke, koje su učinjene pri prethodnoj analizi tačnosti. Uočena neslaganja prethodne i konačne ocene tačnosti mogu biti putokaz ka otkrivanju nekih izvora grešaka koji prethodnom analizom tačnosti nisu bili obuhvaćeni.

2.1 PRIKAZ DOZVOLJENIH ODSTUPANJA U GENERALNOM NIVELMANU

Geometrijski nivelman dosta je jednostavna geodetska operacija. Formule po kojima se vrše računanja takodje nisu komplikovane. Koeficijenti u jednačinama grešaka su obično brojevi +1 ili -1. Samim tim jednostavni su i izrazi za dozvoljena odstupanja u geometrijskom nivelmanu.

a. Formule za SFRJ

Prema našem Pravilniku za izvršenje nivelmana, generalni nivelman deli se na četiri reda; sa tehničkim normativima datim u tabeli 2.1.

Tabela 2.1

Vrsta nivelmana	Verovatna greška po 1 km mm slučaj.	Verovatna greška po 1 km mm sist.	Rastojanje u kolometrima polig.	Rastojanje u kolometrima repera	Način nivelanja Vis.raz. na stan.	Način nivelanja Nivelm. strane
1. Nivelman visoke tačnosti	± 1	±0,2	250	7-8	2 puta	napred nazad
2. Precizni nivelman	± 2	±0,4	75-250	4	2 "	napred nazad
3. Tehnički nivelman povećane tačnosti	± 5		25-75	2	2 "	napred
4. Tehnički nivelman	± 8		do 25	1	1 "	napred

Zavisno od vrste nivelmana pravilnikom su dati ostali normativi kao: dužine nivelmanskih poligona, dužine nivelmanskih strana, maksimalne dužine nivelmanskih vlakova, maksimalne dužine vizure, maksimalne razlike u dužini vizure idr.

Dozvoljena odstupanja u nivelmanu računaju se prema Pravilniku o izvršenju radova na nivelmanu iz 1930 godine. Dozvoljena odstupanja daju se zavisno od reda nivelmana vrste odstupanja, značaja nivelmana i povoljnosti terena za nivelanje. Pri korišćenju datih granica dozvoljenih odstupanja treba imati na umu da kategorijama nivelmana datim u pravilniku, odgovaraju sledeći važeći nazivi nivelmana:

Preciznom nivelmanu 1. reda - odgovara Precizni nivelman

Preciznom nivelmanu 2. reda - odgovara Tehnički nivelman pvećane tačnosti

Tehničkom nivelmanu - odgovara Tehnički nivelman

Dopunskom nivelmanu - Ova kategorija nivelmana prema novim propisima nije predvidjena.

U tabeli 2.2 data su dozvoljena odstupanja odstupanja zbira visinskih razlika u zatvorenim poligonima

Tabela 2.2

Red i vrsta nivelmana	Teren	
	Povoljan	Nepovoljan
1. Precizni nivelman 1.reda	$\Delta = \pm 4 \sqrt{S + 0,04\ S^2}$	$\Delta = \pm 6 \sqrt{S + 0,04\ S^2}$
2. Precizni nivelman 2.reda	$\Delta = \pm 10 \sqrt{S + 0,04\ S^2}$	$\Delta = \pm 15 \sqrt{S + 0,04\ S^2}$
3. Tehnički nivelman	$\Delta = \pm 16 \sqrt{S + 0,06\ S^2}$	$\Delta = \pm 24 \sqrt{S + 0,06\ S^2}$
4. Dopunski nivelman	$\Delta = \pm 24 \sqrt{S + 0,06\ S^2}$	$\Delta = \pm 36 \sqrt{S + 0,06\ S^2}$
5. Nivelman gradova i varošica	$\Delta = \pm 7 \sqrt{S + 0,04\ S^2}$	
6. Za vlakove koji se sustiču u čvornim reperima	$\Delta = \pm 10 \sqrt{S + 0,04\ S^2}$	

Kada se u prethodne i navedene izraze unese S u kilometrima dobija se dozvoljeno odstupanje u milimetrima.

U tabeli 2.3 prikazane su granice dozvoljenih odstupanja za razlike nivelanja napred-nazad nivelmanskih strana

Tabela 2.3

Red i vrsta nivelmana	Teren	
	Povoljan	Nepovoljan
1. Precizni nivelman 1. reda	$\Delta=\pm 8\sqrt{S+0{,}04\,S^2}$	$\Delta=\pm 10\sqrt{S+0{,}04S^2}$
2. Precizni nivelman 2. reda	$\Delta=\pm 20\sqrt{S+0{,}04\,S^2}$	$\Delta=\pm 25\sqrt{S+0{,}04S^2}$
3. Tehnički nivelman	$\Delta=\pm 32\sqrt{S+0{,}06\,S^2}$	$\Delta=\pm 40\sqrt{S+0{,}06S^2}$
4. Dopunski nivelman	$\Delta=\pm 48\sqrt{S+0{,}06\,S^2}$	$\Delta=\pm 60\sqrt{S+0{,}06S^2}$
5. Nivelman gradova i varošica	$\Delta=\pm 15\sqrt{S+0{,}04\,S^2}$	
6. Za vlakove koji se sustiču u čvornim reperima	$\Delta=\pm 20\sqrt{S+0{,}04\,S^2}$	

Najveća dozvoljena razlika izmedju date i nivelane visinske razlike izmedju čvornih repera ne sme preći granicu

$$\Delta = \pm 10\sqrt{S + 0{,}04\,S^2} \qquad .../2.1/$$

Prema Pravilniku za gradski premer IIa deo, najveće dozvoljeno odstupanje izmedju visinskih razlika krajnih datih tačaka vlaka i sume nivelanih visinskih razlika pojedinih strana ne smre preći granicu

$$\Delta = \tau\sqrt{S}$$

Ovde su τ maksimalne vrednosti ukupne srednje greške nivelanja po 1 km. One su zavisne od skale tačnosti i reda mreže, a date su u tabeli 2.4

Tabela 2.4

Red mreže	Skala tačnosti		
	Prva τ mm	Druga τ mm	Treća τ mm
1.	$\pm 1{,}0$	$\pm 1{,}5$	$\pm 2{,}0$
2.	± 2.0	$\pm 3{,}0$	$\pm 4{,}0$
3.	$\pm 3{,}0$	$\pm 4{,}5$	$\pm 6{,}0$

b. Formule za SSSR

Instrukcijom SSSR o izvršenju nivelmana, izvršena je podela državnog nivelmana na četiri reda. Za pojedine redove kao i za tehnički nivelman dati su tehnički normativi u tabeli 2.5

Tabela 2.5

Red nivelmana	Srednja sluč. greška nivel. 1 km mm/km	Dozv.raz. za jednu stanicu mm	Dozvoljena odstupanja vlakova i poligona Broj stanica	
			Paran	Neparan
Nivelman 1.reda	$\pm 0,5$	$\pm 0,15$	$1,5\sqrt{S}$	$2\sqrt{S}$
Nivelman 2. "	$\pm 0,8$	$\pm 0,30$	$2,5\sqrt{S}$	$3\sqrt{S}$
Nivelman 3. "	$\pm 1,6$	$\pm 0,65$	$5\sqrt{S}$	
Nivelman 4. "	± 6	$\pm 3,0$	$20\sqrt{S}$	
Tehnički nivelman	± 15	$\pm 8,0$	$50\sqrt{S}$	

c. Formule za NR Bugarsku

U Instrukciji za topografsko snimanje terena u NR Bugarskoj propisano je dozvoljeno odstupanje isto za umetnute nivelmanske vlakove i za zatvorene poligone

$$\Delta = \pm 30\sqrt{S} \qquad .../2.2/$$

d. Formule za SR Nemačku

Podela nivelmana u SR Nemačkoj izvršena je na tri reda i to:

1. red sa tačnošću $<$1mm/km i rastojanjem 30-50 km izmedju repera,
2. red sa tačnošću $<$ 20mm/km i " 15-20 km izmedju čvornih repera
3. red sa tačnošću $>$ 20mm/km i " 2-5 km izmedju repera.

Dozvoljena odstupanja zatvaranja poligona i umetnutih nivelmanskih vlakova iznose

$$\Delta = \pm 20\sqrt{S} \text{ - za povoljan teren}$$
$$\Delta = \pm 40\sqrt{S} \text{ - za nepovoljan teren} \qquad .../2.3/$$

e. Formule za Austriju

Podela nivelmana u Austriji i odgovarajuća dozvoljena odstupanja prikazana su u tabeli 2.6

Tabela 2.6

Vrsta nivelmana	Dozvoljena odstupanja
Precizni nivelman	$\Delta = \pm 3\sqrt{S}$
Fini nivelman	$\Delta = \pm 5\sqrt{S}$
Tehnički nivelman a. povećane tačnosti	$\Delta = \pm 10\sqrt{S}$
b. za tačnije radove	$\Delta = \pm 20\sqrt{S}$
c. običan nivelman u gradjevinarstvu	$\Delta = \pm 40\sqrt{S}$

Navedena dozvoljena odstupanja važe za greške zatvaranja poligona, za odstupanja u umetnutim nivelmanskim vlakovima kao i za odstupanja visinskih razlika dobijenih nivelanjem napred-nazad pri čemu se kao dužina S koristi dvostruko rastojanje izmedju repera.

2.2. KRITIČKI OSVRT NA PRIKAZANE FORMULE

Prilikom odredjivanja visinskih razlika u geometrijskom nivelmanu, kao podaci neposrednog merenja dobijaju se odsečci na litvi, čijim se oduzimanjem računaju visinske razlike. Ako bi na rezultate nivelanja delovale samo slučajne greške merenja, srednja greška visinske razlike računala bi se po formuli

$$m^2_{\eta_{\Delta H}} = \mu^2_h S \qquad .../2.4/$$

gde je:

μ_h- srednja greška jedinice težine, odnosno srednja slučajna greška nivelanja /obično/ jednog kilometra,

S - dužina vlaka u kilometrima.

Kada se nivelanje izvodi tako da se svaka nivelana visinska razlika odredjuje na neki način dva puta i kao definitivna vrednost visinske razlike uzima se aritmetička sredina iz dva nivelanja, tada će srednja slučajna greška visinske razlike biti

$$m^2_{\eta_{\Delta H}} = \frac{1}{2}\mu^2_h S \qquad .../2.5/$$

Visinske razlike dobijene nivelanjem često se uključuju u nivelmanske poligone pa se potom kontroliše da li su greške zatvaranja poligona u dozvoljenim granicama. Srednja greška zatvaranja poligona bila bi

$$m^2_{\eta_{f_h}} = \mu^2[S] \qquad .../2.4a/$$

za nivelanje sa jednom visinom instrumenta, odnosno

$$m^2_{\eta_{f_h}} = \mu^2[S]\cdot\frac{1}{2} \qquad .../2.5a/$$

za nivelanje sa promenom visine instrumenta.

Kod nekih kategorija nivelmana visinska razlika svake nivelmanske strane nivela se istim postupkom u dva smera. Razlika nivelanja napred-nazad imaće srednju slučajnu grešku

$$m^2_{\eta_d} = 2\mu^2_h S \qquad .../2.4b/$$

za nivelanje sa jednom visinom instrumenta, odnosno

$$m^2_{\eta_d} = \mu^2_h S \qquad .../2.5b/$$

za nivelanje sa promenom visine instrumenta. Ove greške mogu se poistovetiti sa greškama nezatvaranja nivelmanskog poligona čija će dužina biti zbir dužina nivelanja napred-nazad.

Za definitivnu vrednost visinske razlike nivelanja napred-nazad uzima se aritmetička sredina pa će njena srednja slučajna greška biti

$$m^2_{\eta_{\Delta H'}} = \frac{1}{2}\mu^2_h S \qquad .../2.6/$$

za jednu visinu instrumenta, tj.

$$m^2_{\eta_{\Delta H'}} = \frac{1}{4}\mu^2_h S \qquad .../2.7/$$

za visinske razlike odredjene promenom visine instrumenta.

Uključivanjem visinskih razlika odredjenih nivelanjem napred-nazad u zatvorene poligone, dobiće se srednje greške njihovih odstupanja

$$m^2_{\eta_{f_h}} = \frac{1}{2}\mu^2_h[S] \qquad .../2.6a/$$

odnosno

$$m^2_{f_h} = \frac{1}{4}\mu^2_h[S] \qquad .../2.7a/$$

Pored slučajnih grešaka nivelanja na tačnost nivelanih visinskih razlika utiču još i sistematske greške nivelanja srazmerne dužini vlaka, kao i sistematske greške srazmerne nivelanoj visinskoj razlici. U poglavlju 12 dati su odgovarajući izrazi za ove uticaje. Kolika je njihova veličina, zavisi od pribora koji je upotrebljen za nivelanje, od ekipe koja nivela, metode rada i spoljnih prilika. Odredjivanje njihovih vrednosti vestoma je obiman posao i na njemu se može angažovati više ekipa stručnjaka, za rad na terenu i u kancelariji.

Srednje greške odstupanja zbira visinskih razlika u zatvorenim poligonima prema (12,19) mogu se računati po formuli

$$m^2_{f_h} = k\cdot\mu^2_h[S] + \lambda^2_s[S]^2 \qquad .../2.8/$$

gde je k -koeficijent, zavisan od načina odredjivanja visinskih razlika i može biti:

k = 1 za visinske razlike odredjene nivelanjem u jednom smeru sa jednom visinom instrumenta

k = 1/2 za visinske razlike odredjen nivelanjem napred-nazad sa jednom visinom instrumenta ili nivelanjem u jednom smeru sa promenom visine instrumenta

k = 1/4 za visinske razlike nivelane napred-nazad i promenom visine instrumenta.

Verovatno je uticaj sistematskih grešaka nivelanja, koje su srazmerne dužini nivelmanske strane vrlo mali a možda i zanemarljiv, pa u izrazima /2.8/ treba zadržati samo prvi član na desnoj strani znaka jednakosti, onako kako je to učinjeno kod većine evropskih država.

Srednja greška odstupanja visinske razlike u umetnutom nivelmanskom vlaku može se računati prema /12,19/ po formuli

$$m_{f_h}^2 = k \cdot \mu_h^2 [S] + \lambda_S^2 [S]^2 + \lambda_h^2 [h]^2 + 2 m_\xi^2 \qquad .../2.9/$$

Prema tome struktura izraza za dozvoljena odstupanja visinskih razlika u zatvorenim poligonima, ne može biti ista kao u umetnutom nivelmanskom vlaku.

Kada se prednji izrazi, pod pretpostavkom da su korektni, uporede sa izrazima za dozvoljena odstupanja, datim u tabeli /2.2/ i /2.3/ mogu se uočiti sledeći nedostaci:

- koeficijenti ispred znaka korena /tabela 2.2/ predstavljaju vrednost slučajnih grešaka jednog kilometra nivelanja, pomnožen parametrom t μ_h^2. U atabeli /2.3/ uz nepromenjene uslove nivelanja ove koeficijente treba množiti sa 2, kako je učinjeno u navedenom pravilniku. Medjutim uticaj sistematskih grešaka nivelanja, u razlici nivelanja, nestaje. Zato član u dozvoljenim odstupanjima, preko kojeg se ovaj uticaj uzima u obzir, treba brisati.
- Zatvoreni nivelmanski poligon, može se uslovno smatrati kao nivelanje u dva smera izmedju najudaljenijih repera u zatvorenom poligonu. Pitanje je, da li i u zatvorenom poligonu treba

u dozvoljena odstupanja unositi uticaj sistematskih grešaka?

- Prema našem Pravilniku o izvršenju nivelmana, u tehničkom nivelmanu povećane tačnosti i tehničkom nivelmanu, nivelanje se vrši samo u jednom smeru. Pravilnička odredba u vezi razlike nivelanja napred-nazad za ove vrste nivelmana je suvišna.

- Kod vlakova umetnutih izmedju dva data repera ni jednim članom ne uzima se u obzir prisustvo grešaka visina datih repera. Ovo zapažanje važi za dozvoljena odstupanja u generalnom nivelmanu svih navedenih evropskih država. Uticaj grešaka visina datih repera, mora se uzimati u obzir. Ovo tim pre što se dosta često, merenja odredjene tačnosti naslanjaju na date repere, koji su odredjeni na osnovu merenja iste tačnosti, ili čak i niže tačnosti.

Dozvoljena odstupanja, računaju se preko srednjih grešaka, množeći iz parametrom t=3 ili t=2 što zavisi od usvojene verovatnoće. Obično se za masovna merenja, za parametar t usvaja vrednost t=3 dok se za precizne radove i radove visoke tačnosti koristi vrednost parametra t=2. Uvažavajući kriterijume o srednjim slučajnim greškama nivelanja /1mm, 2mm, 5mm i 8mm/ prema kojima je generalni nivelman u nas podeljen na četiri reda, i analizirajući formule date u tabeli /2.2/ vidimo da je kod svih dozvoljenih odstupanja korišćen parametar t=2 za povoljan teren, i t=3 za nepovoljan teren. Medjutim kod propisivanja srednjih slučajnih grešaka, za pojedine redove nivelmana, nije isticana povoljnost terena za nivelanje. Stoga, a u vezi napred rečenog, potrebno je za povoljan teren uzeti kriterijum t=3, odnosno za povoljan teren uzeti dozvoljena odstupanja koja sada važe za nepovoljan teren ali bez uticaja sistematskih grešaka. Kod nivelanja po terenu nepovoljnom za nivelanje potrebno je uložiti više truda da se postigne predvidjena tačnost nivelanja. U tom slučaju neće imati potrebe unositi neke dodatne članove čije prisustvo teorijski nije obrazloženo.

III D E O

3. KLASIFIKACIJA GREŠAKA

Polazni uslovi prilikom primene izravnanja po metodi najmanjih kvadrata jeste da su merenja opterećena samo slučajnim greškama. Ukoliko merene vrednosti sadrže pored slučajnih i sistematske greške, onda će doći do deformacije (izobličavanja) izravnatih vrednosti.

Sa razvojem merne tehnike i usavršavanjem metoda rada menjao se odnos izmedju slučajnih i sistematskih grešaka u korist prvih. U prošlosti, slučajne greške merenja bile su znatno veće od sistematskih $\eta \gg \lambda$.

Medjutim, danas su one skoro izjednačene $\eta \approx \lambda$, te proučavanje uticaja sistematskih grešaka ima izuzetan značaj za objektivniju ocenu tačnosti merenih veličina, kao i za odredjivanje dozvoljenih odstupanja. Zato je razumljivo što se u prošlosti nije dovoljna pažnja poklanjala sistematskim greškama (jer je $\lambda \ll \eta$). Pogotovu kada se ima u vidu da se mnoge sistematske greške mogu otkloniti metodom rada ili računskim putem uzeti u obzir njihov uticaj.

Kako dominantnost slučajnih grešaka nad sistematskim opada sa vremenom, tako će proučavanje sistematskih grešaka postajati sve aktuelnije. Već danas, a i u buduće još više, biće neophodno da se o sistematskim greškama vodi računa, kako prilikom izravnanja tako i kod ocene tačnosti dobijenih rezultata.

Praksa i teorija prve polovine XX veka prilično su zanemarivali uticaj sistematskih grešaka, pri čemu se predpostavljalo da će se one otkloniti metodom rada, računskim putem ili konstrukcijom pribora. Tadašnji, malo precizni pribor, davao je rezultate merenja opterećene slučajnim greškama, koje su bile dominantne u odnosu na sistematske. Savremeni instrumenti i pribor omogućuju da se znatno smanje slučajne greške dok se sistematske greške /rektifikacija, razni ekscentriciteti i dr./ ispoljavaju u punoj veličini i često predstavljaju prepreku povećanja tačnosti merenja.

Kao ilustracija da sistematske greške sa vremenom postaju sve dominantnije može poslužiti trigonometrijska mreža Nemačke gde je bilo:

- u drugoj polovini XIX veka m=0",41 η=0",31 λ=0",27
- u drugoj polovini XX veka m=0",33 η=0",17 λ=0",28

odakle se vidi, da i pored znatnog smanjenja uticaja slučajnih grešaka /sa 0",31 na 0",17/, ukupna greška malo je smanjena. Takodje je poznato da se u malom nizu merenja, sistematske greške mnogo teže uočavaju nego u dužem nizu, gde njihova vrednost veoma često prelazi uticaj slučajnih grešaka. Samim tim tačnost merenja veoma će zavisiti od stepena eliminacije sistematskih grešaka.

Treba tako organizovati merenja da se kroz sam proces merenja (metodom rada) otklone sve sistematske greške koje se mogu otkloniti, a za preostale sistematske greške potrebno je, ako je to moguće utvrditi zakonitost njihovog delovanja. U takvim slučajevima uticaj sistematskih grešaka može se znatno smanjiti ili pak uzeti u obzir prilikom odredjivanja dozvoljenih odstupanja.

Zato je neophodno, kod rezultata merenja sprovesti temeljnu analizu, otkriti sistematske greške, otkriti izvore njihovog delovanja, naći njihovu zakonitost. Ovo nas može dovesti do izbora metode merenja, gde će sistematske greške doći najmanje do izražaja.

3.1 SLUČAJNE GREŠKE $\delta(\eta)$

Slučajne greške su one, koje pri istim uslovima rada, istoj pažnji pri radu i istoj merenoj veličini mogu primiti razne vrednosti i razne znake. Važna osobina im je da je njihovo matematičko očekivanje jednako nuli

$$M[\delta]=0 \qquad /3.1/$$

Pojedinačno, ne pokazuju nikakvu zakonitost, medjusobno su nezavisne /znak i veličina jedne greške ne zavisi niti ima uticaj na bilo koju drugu grešku/ medjutim u većem skupu pokoravaju se Gausovom-normalnom zakonu verovatnoće. Znak i vrednost pojedine greške ne može se unapred predvideti.

Primeri kod merenja dužina su: netačno držanje početka pantljike, netačno obeležavanje kraja pantljike, netačno centrisanje elektrooptičkog daljinomera, prizme i dr.

3.2. SISTEMATSKE GREŠKE $C(\lambda)$

Sistematske greške nastaju takodje od raznih uzroka ali njihov uticaj na rezultate merenja odražava se tako što ih uvek uvećavaju ili umanjuju. One već i pojedinačno pokazuju odredjenu zakonitost a njihova veličina i znak mogu se nekad unapred predvideti. Prema načinu delovanja sistematske greške mogu se podeliti na: konstantne sistematske greške, promenljive i progresivne sistematske greške.

a) <u>Konstantne sistematske greške</u>

Pri svom delovanju javljaju se sa istim znakom i istom veličinom. Pri ponovnom merenju iste veličine njihovo delovanje ne može se otkriti. Primer: greška komparisanja pantljike pri samom komparisanju je slučajna ali se na rezultate merenja odražava kao sistematska, neuzimanje u obzir postojeće adicione konstante, greška odredjivanja adicione konstante i dr. Ona sa punom vrednošću opterećuje izravnate vrednosti dok u popravkama merenja nije sadržana. Matematičko očekivanje konstantne sistematske greške jednako je samoj grešci.

$$M[C] = C \qquad .../3.2/$$

b) Sistematska greška složenog karaktera dobija slučajno razne vrednosti ali njeno matematičko očekivanje nije nula:

$$M[C] \neq 0 \qquad .../3.3/$$

Ponekad ove greške mogu da menjaju čak i znak /refrakciona greška pri noćnom i dnevnom merenju/. Ova greška najčešće deluje kao jednostrana tj. uvek deluje sa istim znakom, ali sa promenljivom veličinom. (Primer: uticaj mikroreljefa na merenu duž, netačno polaganje merila po pravcu merene duži, nevertikalnost nivelmanske letve, izvitoperenost letve, neupravnost baze na merenu duž).

One osciluju oko njihove srednje vrednosti, koja nije jednaka nuli:

$$M(C_i) = \bar{C}_i \qquad .../3.4/,$$

a na rezultate merenja deluju kao kad bi delovala njihova srednja vrednost. Njihov uticaj može se zameniti konstantnim delom $\bar{C}_i$ a razlike:

$$C_i - \bar{C}_i' = \delta_i' \qquad ../3.5/$$

predstavljaće sada slučajni uticaj koji se može pridružiti slučajnim greškama.

U ovu grupu spadaju sistematske greške serije merenja koje ćemo, kratkoće radi, nazivati serijske sistematske greške. One se menjaju od serije do serije. Deluju na celu grupu svojom srednjom vrednošću, odnosno konstantnom vrednošću, ali od serije do serije menjaju veličinu i znak.

Na konačan rezultat serijske sistematske greške deluju delom i kao slučajne. Zato se promenom uslova merenja može dovesti do većeg broja serijskih grešaka, čime će se smanjiti ukupan uticaj sistematskih grešaka. Promena uslova rada vrši se u nas kod preciznih merenja /baza se meri većim brojem žica, uglovna merenja dele se na dnevna i noćna, nivelanje se vrši pre i posle podne itd./. Na rezultate merenja utiče srednja vrednost serijske sistematske greške, a promenljivi deo svrstava se u slučajni deo ukupne greške. (Primer: pri komparisanju pantljike čini se greška komparisanja koja će delovati kao serijska sistematska greška, greška u dužini komparatora delovaće na sva merenja kao sistematska konstantna greška.)

c) Sistematska greška u funkciji vremena

menja svoju vrednost u toku merenja. (Primer: Greška u dužini merila nastala promenom temperature, greška faze kod merenja uglova). Pojedine sistematske greške mogu se metodom rada isključiti (Primer: Kolimaciona greška pri merenju uglova u dva položaja durbina). Medjutim, u većini slučajeva njihov uticaj se samo delimično smanji ali ostaje neka vrednost nepoznate veličine i znaka.

Zato se ukupna greška sastoji iz slučajne i sistematske komponente

$$\varepsilon_i = \delta_i + c_i \qquad /3.6/$$

Pri tome i slučajni i sistematski deo nastaju kao algebarski zbir delovanja većeg broja komponenata

$$\delta_i = \delta_i' + \delta_i'' + \delta_i''' + \cdots \qquad /3.7/$$

$$c_i = c_i' + c_i'' + c_i''' + \cdots$$

Prema definiciji srednje greške, a polazeći od /1.5/ nalazimo

$$m^2 = \eta^2 + \lambda^2 \qquad /3.8/$$

Vrednost m dobija se iz istinitih /ukupnih/ grešaka

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \qquad /3.9/$$

dok se vrednost η može dobiti na osnovu "unutrašnje" ocene tačnosti gde popravke po pravilu sadrže samo slučajni deo ukupne greške

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} \qquad /3.10/$$

odnosno

$$\lambda^2 = m^2 - \eta^2 \qquad /3.11/$$

3.3 ISTOVREMENO DELOVANJE SISTEMATSKIH I SLUČAJNIH GREŠAKA

a) Konstantna sistematska greška

Sva merenja $l_1, l_2 \ldots\ldots l_N$ opterećena su konstantnom sistematskom greškom C

$$\varepsilon_i = \delta_i + C \qquad /3.12/$$

Funkcija merenih veličina može se predstaviti izrazom

$$\Phi = \varphi(l_1, l_2, \ldots\ldots, l_N) \qquad /3.13/$$

gde je

$$\varphi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial l_i}$$

odnosno

$$\varepsilon_\Phi^2 = [\varphi^2\delta^2] + [\varphi]^2C^2 + 2\sum\varphi_i\varphi_j\delta_i\delta_j + 2[\varphi]C\sum\varphi_i\delta_i \quad i \neq j \qquad /3.14/$$

$$M[\varepsilon_\Phi^2] = \bar{m}_\Phi^2 = [\varphi^2\bar{\eta}^2] + [\varphi]^2\bar{\lambda}^2 = \bar{\eta}^2 + \bar{\lambda}_{o\Phi}^2 \qquad /3.15/$$

Kada na niz merenja deluje, pored slučajnih grešaka, i konstantna sistematska greška, tada će srednja greška niza merenja biti opterećenja i tom konstantnom sistematskom greškom.

b) Promenljiva sistematska greška

Na niz merenja l_1, l_2 , ...l_N deluje sistematska greška ali njena veličina zavisi od pribora za merenje i od načina merenja. Zato je niz merenja potrebno podeliti u k grupa prema izvorima delovanja sistematskih grešaka

$n_1, n_2, \ldots, n_k$ broj merenja u pojedinim grupama $[n] = N$;

$p_i = \frac{n_i}{N}$ relativna frekvencija u istoj grupi

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$ slučajne greške merenja, medjusobno nezavisne

$C_1, C_2, \ldots, C_N$ serijske sistematske greške, nezavisne od grupe do grupe,

$\lambda_o = M[C]$ - srednja vrednost sistematskih grešaka koja deluje kao prikrivena sistematska greška,

$\theta_i = C_i - C_o$ - odstupanje pojedinih sistematskih greška od srednje vrednosti. Ove greške su u jednoj grupi konstantne ali su promenljive od grupe do grupe

$[\theta] = 0 \quad t_j \quad [P] = 0$

Sa ovim oznaka ukupna greška j-tog merenja u i-toj grupi

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \theta_i + \lambda_o \qquad /3.16/$$

odnosno

$$\overline{m}^2 = \overline{\eta}^2 + \overline{m}_\theta^2 + \overline{\lambda}_o^2 \qquad /3.17/$$

Kvadrat ukupne srednje greške za zbir svih merenja $S = [l]$

$$\varepsilon_s = \sum_{i=1}^{N} \delta_i + \sum_{i=1}^{K} (n\theta)_i + N\lambda_o \qquad \overline{m}_s^2 = N\overline{\eta}^2 + m_\theta^2 \sum_{i=1}^{n} n_i^2 + N^2 \overline{\lambda}_o^2 \qquad /3.18/$$

za $n_1 = n_2 = \dots = n_k = \frac{N}{K}$ biće $\sum_{i=1}^{K} n_i^2 = \frac{N^2}{K}$

$$\overline{m}_s^2 = N\overline{\eta}^2 + \frac{N^2}{K} m_\theta^2 + N^2 \overline{\lambda}_o^2 \qquad /3.19/$$

odnosno

$$\overline{m}_s^2 = N^2 \left(\frac{\overline{\eta}^2}{N} + \frac{m_\theta^2}{K} + \overline{\lambda}_o^2 \right) \qquad /3.19a/$$

Poslednji izraz jasno ukazuje da se zakonu delovanja slučajnih grešaka pokorava samo slučajni deo.

ZA ARITMETIČKU SREDINU BIĆE

$$\overline{x} = \frac{[l]}{N} \qquad \varepsilon_{\overline{x}} = \frac{\varepsilon_s}{N} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{K} (n\theta)_i + \overline{\lambda}_o^2$$

$$m_{\overline{x}}^2 = \frac{\eta^2}{N} + \frac{[n^2]}{N^2} \overline{m}_\theta^2 + \overline{\lambda}_o^2 \qquad /3.20/$$

slučaju jednakih skupova $n_1 = n_2 = n_3 \dots = n_k = n = \frac{N}{K}$

$$m_{\overline{x}}^2 = \frac{\eta^2}{N} + \frac{1}{K} m_\theta^2 + \overline{\lambda}_o^2 \qquad /3.21/$$

U aritmetičkoj sredini, konstantna sistematska greška, ne zavisi od broja merenja, dok promenljivi deo sistematske greške opada sa korenom iz broja grupa, te otuda razlog da se menjaju uslovi merenja

ZA GRUPNU SREDINU BIĆE

$$x_i = \frac{[l]_i}{n_i} \qquad n_1 = n_2 = \cdots = n_k = \frac{N}{n} \qquad /3.22/$$

$$\overline{m}_{\overline{x}}^2 = \frac{\overline{\eta}^2}{n} + m_\theta^2 + \overline{\lambda}_0^2$$

Za nejednake težine p_{ij} merenja l_{ij} biće

- za grupnu sredinu $\quad x = \frac{[pl]_i}{[p]_i}$

- za ukupnu sredinu $\quad \overline{x} = \frac{[pl]}{[p]} - \frac{[PX]}{[P]} \qquad P_i = [p]_i$

Kada, pri računanju dobijemo konkretne vrednosti za m, η i λ i pri tome za λ postavimo nultu hipotezu, važiće sledeći odnosi:

pri $\overline{m} < \overline{\eta}$ ne računamo sa postojanjem sistematske greške,

pri $\overline{\eta} < \overline{m} < 2\overline{\eta}$ moguće je da deluje sistematska greška (sa rizikom 32% do 5%)

pri $\overline{m} > 2\overline{\eta}$ uvereni smo da deluje sistematska greška (sa rizikom 5%) i nultu hipotezu odbacujemo

Ma kakav bio odnos $\overline{m}$ i $\overline{\eta}$ nikada ne možemo biti uvereni da ne deluje sistematska greška. Iz niza merenja može se naći $\overline{m}$ i $\overline{\eta}$ a vrednost sistematske greške najlakše je naći kao prvi moment (m_1). Za verovatnoću vrednosti C možemo potvrditi da će biti u granicama

$$P\left(m_1 - t\frac{\eta}{\sqrt{n}} < C < m_1 + t\frac{\eta}{\sqrt{n}}\right) = F(t)$$

3.4. PROCENA SREDNJIH GREŠAKA (SLUČAJNIH I SISTEMATSKIH) METODOM NAJMANJIH KVADRATA

Izaberemo veću poligonsku mrežu u kojoj su dužine izmerene:

a) pantljikom

b) elektronskim daljinomerom

a) Kod merenja dužina pantljikom na tačnost rezultata merenja utiču: slučajna greška δ, promenljiva sistematska greška C srazmerna mernoj dužini (greška mikro reljefa, radnog metra na pantljici) i konstantna sistematska greška (netačno izveden početak podele) koja odgovara broju položenih pantljika Co.

Svaka dužina merena je dva puta (napred-nazad) i to različitim pantljikama.

Razlika $d=l_1-l_2$ nastaje kao rezultat delovanja svih ovih grešaka

$$d_i=(\delta_1-\delta_2)_i+(C_{1.0}-C_{2.0})_i\cdot L_i+(C_{o1}-C_{o2})N \qquad /3.23/$$

gde je: N-broj položenih pantljika

Razlike $d_i=l_{1i}-l_{2i}$ poznate su nam na osnovu merenja a cilj nam je da odredimo srednje greške jedinice težine koje se odnose na primer na jednu pantljiku, i to za čitav sektor merenja, kao srednje vrednosti. Zato kvadratima razlika treba dodati popravke

$$d_i^2+v_i=2\eta_o^2L_i+2\lambda^2L_i^2+2\lambda_o^2N_i^2 \qquad /3.24/$$

odakle se mogu dobiti jednačine popravaka

$$v_i=2\eta_o^2L_i+2\lambda^2L_i^2+2\lambda_o^2N_i^2-d_i^2 \qquad /3.25/$$

a zatim iz njih, primenom metode najmanjih kvadrata [vv]=minimum tj. [pvv]=minimum, i nepoznate η_o^2, λ^2 i λ_o^2.

Ukoliko se za sistematske uticaje λ^2 i λ_o^2 dobije negativna vrednost, odnosno za λ i λ_o imaginarne vrednosti, to će biti znak da u mreži ne možemo računati sa sistematskim greškama.

b) Pri merenju dužina elektronskim daljinomerom na tačnost merenja utiče broj stanica, tj. broj merenja (zbog uticaja adicione konstante), kao konstantna sistematska greška, zatim slučajna greška centrisanja instrumenta i greška zbog meteoroloških uslova. Ukoliko se dužine mere dva puta različitim instrumentima mogu se uporedjivati razlike

$$d_i = (\delta_1 - \delta_2)_i + (C_1 - C_2)_i \qquad /3.26/$$

$$d_i^2 - v_i = 2\eta^2 + 2\lambda^2 \qquad /3.27/$$

odnosno

$$v_i = 2\eta^2 + 2\lambda^2 - d_i^2 \qquad /3.28/$$

Na potpuno isti način, kako je prethodno objašnjeno, mogu se naći η^2 i λ^2.

3.5. TEŽINE KVADRATA ODSTUPANJA

Od velikog značaja je dobiti informaciju o tačnosti koju jedan odredjeni instrument i pribor pri datim uslovima i metodi rada može da da. Tačnost merenja nekim instrumentom može se proceniti na osnovu prethodne ocene tačnosti. Da bi se postigla tačnost koja je utvrdjena prethodnom ocenom tačnosti, potrebno je na terenu obezbediti sve predvidjene uslove rada. Ukoliko je pri analizi tačnosti "apriori" učinjen neki previd ili nisu dovoljno i objektivno sagledani svi izvori grešaka, može se dobiti veoma pogrešan podatak o tačnosti instrumenta. Dešava se da je neke operacije pri merenju potrebno izvoditi veoma pažljivo i uz posebnu obuku stručnjaka, da bi se održao nivo željene tačnosti. Ovu pažnju moguće je održati na malom broju merenja i uz povoljne terenske uslove. Kod velikog broja merenja, uz ponekad teže uslove rada i uobičajenu obučenost stručnjaka nemoguće je zadovoljiti sve uslove rada predvidjene ocenom tačnosti "apriori".

Zato je važno odrediti tačnost koja je postignuta pomoću jednog ili više instrumenata na terenu u masovnim merenjima, pri nekada boljim a nekada lošijim uslovima rada. Prilikom računanja koordinata i nadmorskih visina geodetskih tačaka, računaju se različita odstupanja kao:

- Greška uglonog zatvaranja poligona
- Uglovna odstupanja u umetnutim poligonometrijskim vlakovima
- Podužna i poprečna linearna odstupanja u umetnutim i ispruženim poligonometrijskim vlakovima,
- Odstupanja zbira visinskih razlika u nivelmanskim poligonima,
- Odstupanja zbira visinskih razlika u umetnutim nivelmanskim vlakovima i dr.-

Sva ova odstupanja, već i pojedinačno, daju predstavu o nekoj postignutoj tačnosti ali čega? Obično su ona zavisna od većeg broja izvora grešaka. U pojedinačnim odstupanjima izvori grešaka mogu veoma različito da ispolje svoje delovanje dok u većem broju odstupanja, na primer u čitavoj poligonometrijskoj mreži, delovanje grešaka ima odredjenu zakonistost. Da bi se uočila zakonitost delovanja izvora grešaka izvode se i dokazuju izrazi za srednje greške kvadrata nekog odstupanja.

$$m_f^2 = a\mu^2 + b\lambda^2 + c\lambda_0^2 + d\,m_\xi^2 \qquad /3.29/$$

koja su obično u funkciji:

- μ, uticaja slučajnih grešaka merenja
- λ, promenljivih sistematskih grešaka merenja,
- λ_0, konstantne sistematske greške merenja
- m_ξ, grešaka datih veličina

Srednja greška nekog odstupanja može se dobiti po formuli

$$m_f^2 = \frac{[f^2]}{N} \qquad /3.30/$$

za N = 1 biće $$m_f^2 = f^2 \qquad /3.31/$$

Sa poslednjom smenom izraz /3.29/ dobija oblik

$$f^2 = a\mu^2 + b\lambda^2 + c\lambda_o^2 + d\,m_\xi^2 \qquad /3.32/$$

Kako u datoj mreži ima više odstupanja to ona neće sva zadovoljiti datu jednakost /3.32/ nego se levim stranama moraju dodati neke popravke /3.33/

$$v_i + f_i^2 = a_i\mu^2 + b\lambda^2 + c\lambda_o^2 + d\,m_\xi^2$$

$$v_i = a_i\mu^2 + b\lambda^2 + c\lambda_o^2 + d\,m_\xi - f_i^2 \qquad /3.34/$$

Na taj način dobijaju se jednačine popravaka kod kojih na desnoj strani kao slobodni članovi figurišu kvadrati odstupanja. Primenom metode najmanjih kvadrata mogu se od ovih jednačina grešaka formirati normalne jednačine čijim se rešavanjem dobijaju nepoznate vrednosti srednjih grešaka $\mu^2, \lambda^2, \lambda_o^2$ i m_ξ^2.

Od bitnog uticaja na tačnost odredjivanja srednjih grešaka je pravilno odredjivanja težina slobodnih članova (f^2) u jednačinama /3.34/.

Do težina kvadrata odstupanja može se doći polazeći od funkcije oblika

$$Y = f^2 \qquad .../3.35/$$

odnosno

$$m_Y^2 = 4f^2\,m_f^2 \qquad .../3.36/$$

Koristeći smenu (3.31) dobija se

$$m_Y^2 = 4\,m_f^2 \cdot m_f^2 \qquad .../3.37/$$

odakle se može preći na težine

$$\frac{1}{p_Y}\mu^2 = 4\,\mu^2\frac{1}{p_f}\,\mu^2\frac{1}{p_f} \qquad .../3.38/$$

I na kraju

$$(p_f)^2 = \frac{1}{4\mu^2}\,p_y = k\,p_y \qquad .../3.39/$$

Kako se u jednom sistemu jednačina mogu težine proporcionalno povećavati ili smanjivati to je

$$(P_f)^2 = P_y \qquad .../3.40/$$

odnosno

$$(P_f)^2 = P_f 2 \qquad .../3.41/$$

Odavde se izvodi zaključak da je težina kvadrata nekog odstupanja jednaka kvadratu težine tog odstupanja.

Uradjeni brojni primeri pokazuju sa se sa nepravilno uzetim težinama dobijaju veoma pogrešne i neočekivane vrednosti srednjih grešaka.

IV D E O

ANALIZA I TAČNOST MERENJA DUŽINA OBIČNIM NAČINOM

Postupak merenja dužina običnim načinom opšte je poznat pa nema potrebe, u vezi s tim, davati bilo kakva objašnjenja. Od značaja je nabrojati izvore grešaka a zatim razmotriti njihove pojedine uticaje.

Različiti izvori grešaka daju greške slučajnog karaktera, sistematske greške srazmerne dužini, promenljive sistematske greške i konstantne sistematske greške. Njihova klasifikacija prema vrsti delovanja mogla bi se izvršiti na sledeći način:

- greška nameštanja početka pantljike na početak merene duži je slučajnog karaktera,
- greška očitavanja pantljike na završnoj tački duži je takodje slučajna,
- greška obeležavanja kraja pantljike klinom brojačem je slučajna,
- greška držanja početka daredne pantljike na kraju prethodne, je takodje slučajna,
- greška komparisanja pantljike, pri samom komparisanju pantljike je slučajna dok u procesu merenja na rezultate merenja deluje kao sistematska greška nepoznatog predznaka i veličine a srazmerna je merenoj dužini,
- greška nedoterivanja pantljike u pravac merene duži je sistematska promenljive veličine ali uvek istog negativnog znaka (povećava merenu dužinu),
- greška zatezanja pantljike može biti slučajnog ili sistematskog karaktera, što zavisi od toga da li grupa koja vrši merenje pantljiku zateže isuviše ili nedovoljno (sistematska) ili

ili je zateže približno silom od 10 kg ali nekad više a nekad manje od toga (slučajna)

- greške mikroreljefa, koji svojim neravninama stvara ugibe pantljike ili ispupčenja je sistematskog karaktera, negativnog znaka ali nepoznate veličine.

- greška zbog nedovoljnog ispravljanja pantljike pri merenju je sistematskog karaktera, negativnog znaka ali nepoznate vrednosti,

- greška u dužini nastala zbog pogrešno odredjene visinske razlike je slučajnog karaktera

Greška u merenoj dužini zbog razlike izmedju temperature pri merenju i komparisanju pantljike može biti slučajna ili sistematska. Slučajna će biti ako je temperatura merenja približno ista sa temperaturom komparisanja. U slučaju da se merenje vrši pri višim ili nižim temperaturama od temperature komparisanja imaće sistematski karakter.

Greška u merenoj dužini nastala zbog trenja pantljike sa travom i zemljištem je sistematska.

Prve četiri grupe grešaka su slučajnog karaktera i medjusobno su približno jednake, tako da prve dve, odnosno treća i četvrta daju grešku polaganja pantljike.

Označimo sa:

- $(m_p)_\delta$ grešku nameštanja početka pantljike na početnoj tački, odnosno na zabodenom klincu brojaču (slučajne greške označavaćemo znakom δ za razliku od sistematskih koje ćemo označavati sa C),

- $(m_z)_\delta$ srednju grešku obeležavanja kraja pantljike, odnosno očitavanja pantljike na kraju merene duži,

- $(m_h)_\delta$ grešku u konačnoj dužini zbog pogrešno odredjene visinske razlike,

- $(m_k)_c$ srednja greška komparisanja pantljike,
- $(m_e)_c$ srednja greška u dužini raspona nastala zbog nedoterivanja pantljike u pravac merene duži,
- $(m_s)_c$ greška u dužini jednog raspona nastala zbog prekomernog (nedovoljnog) zatezanja pantljike,
- $(m_u)_c$ greška u dužini raspona nastala zbog uticaja ugiba pantljike,
- $(m_i)_c$ greška u dužini raspona zbog nedovoljnog ispravljanja pantljike pri merenju dužine,
- $(m_q)_c$ greška u dužini raspona nastala zbog uticaja neravnina na uzdužnom profilu duži,
- $(m_t)_c$ greška u dužini raspona nastala zbog razlike izmedju temperature pri merenju i komparisanju i
- $(m_p)_c$ greška u dužini raspona nastala zbog sile trenja izmedju trave i zemljišta sa pantljikom.

Za greške zatezanja pantljike i promene temperature, usvojeno je da deluju kao sistematske, jer se pri merenju duži običnim načinom ne meri temperatura, ne koriste se dinamometri niti se za ove promene uslova merenja, unosi bilo kakva popravka. Merenje obično obavlja jedna ekipa gde radnici, priučeni od stručnjaka, zatežu pantljiku približno istom silom, koja je veća ili manja od 10 kg, što daje grešci karakter sistematske greške. Isto važi i za uticaj temperature, odnosno sve dužine u jednom vlaku izmerene su u relativno kratkom vremenskom intervalu, pri čemu nema značajnijih promena temperature.

Pojedine greške imaju sledeće izraze

$$(m_h)_\delta = \frac{h}{d}\, dh \qquad \ldots/4.1/$$

$$(m_k)_c = \frac{dl}{l_0} \qquad \ldots/4.2/$$

je greška komparisanja gde je: dl - greška odredjivanja radne dužine pantljike, a l_0 - nominalna dužina pantljike: greška se odnosi na jedan metar dužine pantljike

$$(m_e)_c = \frac{e^2}{2l_o} \qquad .../4.3/$$

odnosi se na jedan raspon merene pantljike

$$(m_s)_c = \frac{S_k - S}{EP} l_o \qquad .../4.4/$$

gde je: S_k - sila zatezanja pantljike pri komparisanju,

S - sila zatezanja pantljike pri merenju,

E - modul elastičnosti koji za čelik iznosi $E=20.000 kg/mm^2$

P - površina poprečnog preseka pantljike odnosi se na jednu pantljiku

$$(m_u)_c = \frac{8u^2}{3l} \qquad .../4.5/$$

greška koja nastaje zbog ugiba, odnosi se na veličinu dela pantljike koji slobodno visi l.

$$(m_i)_c = \frac{8i^2}{3l_o} \qquad .../4.6/$$

greška zbog nedovoljnog ispravljanja pantljike pri merenju duži gde je:

i - iskrivljenost pantljike

l_o - dužina pantljike

$$(m_q)_c = \frac{8q^2}{3l_o} \qquad .../4.7/$$

greška nastala zbog neravnina terena gde je:

q - najveće izdizanje /uleganje/ pantljike

l_o - dužina pantljike

$$(m_t)_c = l_o(t_m - t_o)\alpha \qquad .../4.8/$$

greška u dužini raspona nastala zbog razlike temperature komparisanja i merenja.

Saglasno prednjim oznakama srednja greška u dužini merenja jednog raspona bila bi

$$(m^2_{d_o})_q = (m^2_z)_\delta + d_o^2(m^2_k)_c + (m_e \pm m_s + m_u + m_q \pm m_t + m_p)^2_c \ldots /14.9/$$

Ukoliko bi jedan isti raspon, obeležen na terenu, izmerili napred-nazad, veliki broj grešaka bi otpao tako da bi ostale greške obeležavanja i držanja krajeva pantljike.

Tako bi srednja greška razlike merenja napred-nazad bila data izrazom

$$m^2_{\Delta d_o} = 2(m^2_z)_\delta \qquad \text{.../4.10/}$$

Srednja greška aritmetičke sredine iz dvostrukog merenja raspona sadržala bi sve greške koje utiču na tačnost merenja raspona, s tim što bi se uticaj slučajne greške smanjio.

$$(m^2_d)_\tau = \frac{1}{2}(m^2_z)_\delta + d^2_o(m^2_k)_c + (m_e \pm m_s + m_u + m_q \pm m_t + m_p)^2_c \qquad \text{.../4.11/}$$

Sabiranjem više raspona, dobija se ukupna dužina merene duži pa se može naći srednja greška merenja duži u jednom smeru

$$(m^2_{D_o})_\tau = n \cdot m^2_z + D^2_o(m^2_K)_c + n^2(m_e \pm m_s + m_u + m_q \pm m_t + m_p)^2_c \qquad \text{.../4.12/}$$

Merenje duži obavlja se napred-nazad pa se iz tih merenja formira razlika. Srednja greška razlike merenja napred-nazad biće

$$m^2_{\Delta D} = 2n\, m^2_z \qquad \text{.../4.13/}$$

opterećena samo slučajnim greškama merenja dužine. Kako je $n = \frac{D_o}{l}$ to će konačno srednja greška razlike merenja napred-nazad biti

$$m^2_{\Delta D} = 2\frac{D}{l} m^2_z = \mu^2_s\, 2D \qquad \text{.../4.14/}$$

$$m_{\Delta D} = \mu_s \sqrt{2}\sqrt{D} \qquad \text{.../4.15/}$$

Pri tome se kao konačna vrednost merene dužine usvaja aritmetička sredina iz merenja napred-nazad sa odgovarajućom srednjom greškom

$$(m^2_D)_\tau = \frac{n}{2} m^2_z + D^2_o(m^2_K)_c + n^2(m_e \pm m_s + m_u + m_i + m_q \pm m_t + m_p)^2_c \qquad \text{.../4.16/}$$

Za računanje koordinata tačaka vlaka koriste se redukovane dužine pa će ovde doći još i srednja greška redukcije kao i greška za svodjenje dužine na nultu nivosku površ.

$$(m^2_{Dr}) = \frac{n}{2} m^2_z + D^2_o(m^2_K)_c + n^2(m_e \pm m_s + m_u + m_i + m_q \pm m_t + m_p)^2_c + (m^2_h)_\delta + (m^2_H)_c \qquad \text{.../4.17/}$$

Kada se saberu svi sistematski uticaji, dobija se:

$$m^2_{\Sigma c} = n^2\left[\frac{e^2}{2l_o} + l_o\frac{S_K\, S}{EP} + \frac{8u^2}{3l} + \frac{8i^2}{3l_o} + \frac{8q^2}{3l_o} + l_o(t_m - t_o)\alpha + l_o\frac{S_K\, S_o}{EP}\right]^2 \qquad \text{.../4.18/}$$

Na kraju se može dobiti srednja greška merenja dužina za čitav vlak

$$m_{\Sigma S}^2 = \frac{1}{2}\mu_S^2 \sum_{i=1}^{n} D_i + (\Sigma n)^2 \Big[\frac{e^2}{2l_o} + l_o \frac{S_K - S}{EP} + \frac{8u^2}{3l} + \frac{8i^2}{3l_o} + \frac{8q^2}{3l_o} +$$

$$+ \alpha (t_m - t_o) l_o + l_o \frac{S_K \; S}{EP} \Big]^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta h_i}{D_i}\right)^2 m_{\Delta h}^2 + \left(\frac{H_m}{R}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} D_i\right)^2 \qquad .../4.19/$$

Razmotrimo sada pojedine uticaje, uz neke pretpostavke koje su dosta bliske realnosti:

- Neka je greška doterivanja pantljike u pravac merene duži e=0.10 m a dužina pantljike neka je l=50 m. Ova greška ima negativan znak i ne zavisi bitno od kategorije terena

$$m_e = \frac{e^2}{2l_o} = 1 \cdot 10^{-4}\ m$$

- Pri uporedjenju pantljike sa preciznom čeličnom pantljikom, neka se čini greška komparisanja d_k = 0,5 cm odgovarajuća srednja greška bila bi

$$m_k^2 = \left(\frac{d_k}{l_o}\right)^2 = 1 \cdot 10^{-8}\ m$$

- Kada se vrši merenje dužina poljskom pantljikom, pantljika nije potpuno prava zbog ugiba, mikroreljefa, i iskrivljenosti. Svi ovi uticaji neka daju sumarni uticaj tj. ukupnu iskrivljenost koja iznosi:

za I kategoriju 0,05 m, za drugu kategoriju 0,08 m, za III kategoriju 0.12 m, a odgovarajući uticaji na dužinu pantljike biće

$$m_i = \frac{8i^2}{3l_o}$$

Za I kategoriju m_i = 1.333 x 10^{-4} m

Za II " m_i = 3.413 x 10^{-4} m

Za III " m_i = 7.680 x 10^{-4} m ;

- Sistematska greška sile zatezanja za slučaj $S_k - S_o$ = 0,5 kg za jedan raspon biće za E=20.000 kg/mm^2 i P=20x0,4 = 8 mm^2

$$m_s = \frac{S_K - S_o}{EP} l_o = 1{,}562 \times 10^{-4}\ m$$

- Greška u merenoj dužini raspona zbog razlike temperature komparisanja i merenja $m_t = l_0 \alpha / t - t_0 /$ za $\alpha = 0{,}0000011$ i $t - t_0 = 2^0C$ $m_t = 1 \times 10^{-4}$ m

Svi sistematski uticaji uglavnom su negativnog znaka osim greške sile zatezanja i promene temperature koji mogu biti i pozitivni.

- Greška zbog nesvodjenja dužine na nultu nivosku površ je sistematskog karaktera i negativnog znaka

Za $H_m = 200$ m $\frac{H_m}{R} = 0{,}314 \times 10^{-4}$, m

za $H_m = 600$ m $\frac{H_m}{R} = 0{,}941 \times 10^{-4}$, m

pa možemo uzeti približno da je,

$m_H = \frac{H_m}{R} = 0{,}500 \times 10^{-4}$, m

- Uticaj pogrešnog odredjivanja visinskih razlika odražava se na tačnost redukovane dužine. Za ceo vlak biće $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_i}{D_i}\right)^2 m_{h_i}^2$. Ako su strane jednake medjusobno i istog pada $h/D = J = 10\%$ i iste tačnosti visinskih razlika $m_{h_i} = \pm 3$ cm (koje se u vangradskom terenu koriste za redukovanje dužina)

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_i}{D_i}\right)^2 m_{h_i}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{D_o} \cdot 9 \cdot 10^{-6} \, m$$

Neka je $D_o = 200$ m dobija se

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_i}{D_i}\right)^2 m_{h_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} D_i \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-8} \, m$$

Sada će greška vlaka biti

$$m_{[S]}^2 = \left(\frac{1}{2} \mu_s^2 + 4{,}5 \cdot 10^{-8}\right)[S] + m_K^2 [S]^2 + (m_i + m_e + m_s)^2 [n]^2 + \qquad \ldots/4.20/$$

$$+ m_t^2 [n]^2 + m_H^2 [S]$$

gde je $[n]$ ukupan broj pantljika $[n] = \frac{[S]}{50}$

$$m_{[S]}^2 = \left(\frac{1}{2} \mu_s^2 + 4{,}5 \cdot 10^{-8}\right)[S] + \left[m_K^2 + \frac{m_t^2}{2500} + \left(\frac{m_i + m_e + m_s}{50}\right)^2 + m_H^2\right][S]^2 \qquad \ldots/4.21/$$

Za razne kategorije terena imali bi

	I	II	III
$m_i + m_e + m_s$ =	$3{,}895 \times 10^{-4}$	$5{,}975 \times 10^{-4}$	$10{,}242 \times 10^{-4}$ m

Vrednosti μ_s mogu se naći na osnovu dozvoljenih odstupanja koja važe za razlike merenja dužina napred-nazad

$$m_{II-I} = m\sqrt{2} = \mu_s\sqrt{2}\,\sqrt{S}$$

$$\Delta = 3\cdot m_{II-I} = 3\,\mu_s\sqrt{2}\,\sqrt{S}$$

$$\mu_s = \frac{\Delta}{3\sqrt{2}\sqrt{S}}$$

za I kategoriju $\mu_s = 16{,}50\times 10^{-4}$ $\quad \frac{1}{2}\mu_s^2 = 136{,}13\times 10^{-8}$

" II " $\mu_s = 21{,}21\times 10^{-4}$ $\quad \frac{1}{2}\mu_s^2 = 224{,}93\times 10^{-8}$

" III " $\mu_s = 28{,}28\times 10^{-4}$ $\quad \frac{1}{2}\mu_s^2 = 399{,}88\times 10^{-8}$

Srednja greška zbira dužina u vlaku prema kategorijama terena po kojem je dužina merena a uvažavajući napred sračunate vrednosti pojedinih uticaja dobija se

Za I kategorija $m^2_{[S]} = 140{,}63\times 10^{-8}[S] + 1{,}25647\times 10^{-8}[S]^2$

Za II " $m^2_{[S]} = 229{,}43\times 10^{-8}[S] + 1{,}26470\times 10^{-8}[S]^2$ .../4.23/

Za III " $m^2_{[S]} = 404{,}38\times 10^{-8}[S] + 1{,}2924\times 10^{-8}[S]^2$

Interesantno je videti na kojoj se dužini izjednačuju uticaji slučajnih i sistematskih grešaka. Prema izrazima koji su ovde dati, to izjednačenje se postiže:

Za I kategoriju terena na $[S] = 112$ m

Za II " " " $[S] = 181$ m

Za III " " " $[S] = 225$ m

Svakako da ovakav odnos nije realno očekivati jer kada se, zahvaljujući povoljnijim uslovima merenja, slučajne greške merenja smanje, kao dominantne greške vrlo brzo se ispoljavaju sistematske. Kod terena nepovoljnog za merenje, slučajne greške merenja su dominantne da bi se na većoj dužini izjednačile. Ovo je suprotno rezultatima koji se dobijaju ne osnovu našeg važećeg pravilnika.

Radi uporedjenja dozvoljenih odstupanja / $\Delta=3.m_s$/ koja bi se dobila na osnovu izraza /4,23/ sa onim delom, koji se odnosi na uticaj slučajnih grešaka merenja i sistematskih grešaka srazmernih dužini, a koja bi se dobila na osnovu Pravilnika II deo sačinjena je tabela /4.1/. U njoj su sračunate vrednosti dozvoljenih odstupanja za poligonometrijske vlakove koji idu po terenima različitih kategorija a za vrednosti sume dužina od 100 do 1000 metara.

Tabela 4.1

S	Vrednosti dozvoljenih odstupanja sračunate: Prema izrazima /4.23/ $\Delta = 3\sqrt{a'[S] + b'[S]^2}$			Prema Pravilniku $\Delta = a\sqrt{[S]} + b[S]$		
	I	II	III	I	II	III
1	2	3	4	5	6	7
100	0,05m	0,06 m	0,07 m	0,06m	0,08 m	0,10 m
150	7	8	9	7	10	13
200	8	9	11	9	12	16
250	10	11	13	11	15	19
300	12	13	15	12	17	22
350	14	15	16	14	19	25
400	15	16	18	15	21	28
500	19	20	22	18	25	33
600	22	23	25	21	29	39
700	25	27	29	23	33	44
800	29	30	32	26	37	49
900	32	33	36	29	41	54
1000	35	37	39	31	44	59

Uporedjujući odgovarajuće kolone u tabeli 4.1 (kolonu 2 sa kolonom 5, kolonu 3 sa kolonom 6, kolonu 4 sa kolonom7) može se zaključiti sledeće:

- Vrednosti dozvoljenih odstupanja sračunate za teren I kategorije malo se medjusobno razlikuju pa čak su vrednosti sračunate prema /4.23/ nešto veće od onih sračunatih prema Pravilniku II deo.

- Za teren II kategorije, vrednosti dozvoljenih odstupanja sračunate prema Pravilniku dobijaju se malo veće nego prema izrazu /4.23/. Odnos tih vrednosti kreće se u tabeli od 1,33 do 1,19 i to opada sa povećanjem zbira dužina. Stalno pozitivne razlike vrednosti dozvoljenih odstupanja iz kolona 6 i 3 dozvoljava komotnije ponašanje stručnjaka kada se mrenja vrše po terenu II kategorije nego po terenu I kategorije.

Uporedjenje kolone 7 sa 4 daje još veće razlike dozvoljenih odstupanja sračunatih prema Pravilniku II deo i izrazima /4.23/. Odnos tih dozvoljenih odstupanja raste sa povećanjem dužina i kreće se u tabeli od 1,43 do 1,51.

Ako dozvoljena odstupanja treba na neki način da podstiču povećanje tačnosti pri merenju onda su rezultati koji se dobijaju iz tabele /4.1/ suprotni toj težnji. Navedena tabela ukazuje, da se kod dozvoljenih odstupanja pri merenju dužina u vlaku, uz uobičajenu pažnju pri radu, na terenu II i III kategorije, mogu pooštriti kriterijumi. Samim tim za to merno sredstvo, mogu se propisati i druga (strožija) dozvoljena odstupanja.

Da bi se potvrdio ovaj komentar ispitana su dozvoljena odstupanja poligonometrijske mreže ko Barajevo u kojoj su dužine merene običnim načinom. Ova ukupna linearna odstupanja, prema tada važećim kriterijumima, ušla su u granice dozvoljenih odstupanja. Ako se primeni tablica 14.1, o dozvoljenim odstupanjima, Pravilnik i državni premer II deo dobijaju se sledeći rezultati

Od 17 vlakova koji idu po terenu I kategorije u tih 12 odstupanja izlaze izvan dozvoljenih granica, za drugu kategoriju od 17 vlakova za 4 vlaka je izvan dozvoljenih granica a za III kategoriju od 5 vlakova u jednom vlaku odstupanje f_s izlazi izvan dozvoljenih granica.

V DEO

SREDNJA GREŠKA LINEARNIH ODSTUPANJA U UMETNUTOM POLIGONOMETRIJSKOM VLAKU

Kada se poligonometrijski vlak oslanja na dve date tačke, tada se mogu odrediti linearna odstupanja po pravcu koordinatnih osa f_y i f_x kao i podužno i poprečno linearno odstupanje l i φ.

Odstupanja po pravcu koordinatnih osa odredjuju se po formuli

$$f_y = Y_N - Y_1 - \sum_{i=1}^{n} S_i \sin \nu_i$$

$$f_x = X_N - X_1 - \sum_{i=1}^{n} S_i \cos \nu_i \qquad .../5.1/$$

Direkcioni uglovi pojedinih poligonometrijskih strana odredjuju se na osnovu popravljenih vrednosti merenih uglova

$$\nu_1 = \nu_p + \beta_1 \qquad + \frac{1}{N} f_\beta \pm 180$$

$$\nu_2 = \nu_p + \beta_1 + \beta_2 \qquad + \frac{2}{N} f_\beta \pm 2 \cdot 180$$

$$\nu_3 = \nu_p + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \qquad + \frac{3}{N} f_\beta \pm 3 \cdot 180$$

$$\nu_n = \nu_p + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots\cdots + \beta_n \pm n \cdot 180^\circ + \frac{n}{N} f_\beta \qquad .../5.2/$$

gde je:

$$f_\beta = \nu_z - (\nu_p + [\beta] \pm N \cdot 180) \qquad .../5.3/$$

uglovno odstupanje u poligonometrijskom vlaku.

Kada se izraz /5.1/ diferencira dobija se

$$df_y = dy_N - dy_1 - \sum_{i=1}^{n} \Delta X_i \, d\nu_i - \sum_{i=1}^{n} \sin \nu_i \, dS_i$$

$$df_x = dx_N - dx_1 + \sum_{i=1}^{n} \Delta Y_i \, d\nu_i - \sum_{i=1}^{n} \cos \nu_i \, dS_i \qquad .../5.4/$$

dok se diferenciranjem izraza /5.2/ dobija

$$d\nu_1 = \frac{N-1}{N} d\nu_p + \frac{1}{N} d\nu_z + d\beta_1'$$

$$d\nu_2 = \frac{N-2}{N} d\nu_p + \frac{2}{N} d\nu_z + d\beta_1' + d\beta_2'$$

$$d\nu_n = \frac{N-n}{N} d\nu_p + \frac{n}{N} d\nu_z + d\beta_1' + d\beta_2' + \cdots + d\beta_n' \quad .../5.5/$$

pri čemu je:

$$d\beta_K' = d\beta_K - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} d\beta_i \quad .../5.6/$$

Radi sredjivanja izraza /5.4/ potrebno je izraze /5.5/ množiti redom sa ΔX_1, ΔX_2, ..., ΔX_n i ΔY_1, ΔY_2, ..., ΔY_n a zatim ih sabrati

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i d\nu_i = \frac{1}{N} d\nu_p \cdot \sum_{i=1}^{n} (N-i) \Delta x_i + \frac{1}{N} d\nu_z \sum_{i=1}^{n} i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} (X_N - X_i) d\beta_i'$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i d\nu_i = \frac{1}{N} d\nu_p \sum_{i=1}^{n} (N-i) \Delta y_i + \frac{1}{N} d\nu_z \sum_{i=1}^{n} i \Delta y_i + \sum_{i=1}^{n} (Y_N - Y_i) d\beta_i' \quad .../5.7/$$

Direkcioni uglovi u trigonometrijskoj mreži nisu nezavisni od koordinata datih tačaka pa će njihovi diferencijali biti u funkciji koordinata datih tačaka $(\nu_p = \nu_A^1 \; ; \; \nu_z = \nu_N^B)$

$$d\nu_p = a_{A1} dX_A + b_{A1} dY_A + a_{1A} dX_1 + b_{1A} dY_1$$

$$d\nu = a_{NB} dX_N + b_{NB} dY_N + a_{BN} dX_B + b_{NB} dY_B \quad .../5.8/$$

U prethodnim izrazima koeficijenti a_{ij} i b_{ij} su faktori odnosno koeficijenti u jednačinama grešaka za direkcione uglove, oni predstavljaju promenu direkconog ugla koja nastaje kao posledica pomeranja jedne krajnje tačke duži za jedinicu.

$$a_{ij} = \frac{\sin \nu_i^j}{S_{ij}} \; ; \qquad b_{ij} = \frac{-\cos \nu_i^j}{S_{ij}} \quad .../5.9/$$

Sa ovim zamenama diferencijali linearnih odstupanja dobiće oblik

$$df_y = \left(1 - \frac{b_{NB}}{N} \sum_{i=1}^{n} i \Delta X_i\right) dy_N - \left[1 + \frac{b_{1A}}{N} \sum_{i=1}^{n} (N-i) \Delta X_i\right] dy_1 -$$

$$- \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} i x_i (a_{NB} dX_N + a_{BN} dX_B + b_{BN} dY_B) -$$

$$- \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (N-i) \Delta X_i (a_{A1} dX_A + a_{1A} dX_1 + b_{A1} dY_A) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (X_N - X_i) d\beta_i' - \sum_{i=1}^{n} \sin \nu_i dS_i$$

$$df_x=\left(1+\frac{a_{NB}}{N}\sum_{i=1}^{n} i\Delta Y_i\right)dX_N-\left[1-\frac{a_{1A}}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta Y_i\right]dX_1+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} i\Delta Y_i\left(b_{NB}\cdot dY_N+a_{BN}dX_B+b_{BN}dY_B\right)+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta Y_i\left(a_{A1}dX_A+b_{A1}dY_A+b_{1A}dY_1\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(Y_N-Y_i)\,d\beta_i'-\sum_{i=1}^{n}\cos\nu_i dS_i \qquad .../5.10/$$

Poslednji izrazi dosta su glomazni. Oni se mogu napisati kraće u matričnom obliku

$$df_y=A_1^*\xi+B_1^*\beta+C_1^*S$$

$$df_x=A_2^*\xi+B_2^*\beta+C_2^*S \qquad .../5.11/$$

gde je: ${}_1\xi_8^*=\|dY_1;dX_1;dY_N;dX_N;dY_A;dX_A;dY_B;dX_B\|$

$${}_1\beta_N^*=\|d\beta_1',d\beta_2',\ldots,d\beta_n',d\beta_N'\|$$

$${}_1S_n^*=\|dS_1,dS_2,\ldots,dS_n\| \qquad .../5.12/$$

$${}_1A_{1\,8}^*=\|-\left[1+\frac{b_{1A}}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta X_i\right]-\frac{a_{1A}}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta X_i;\left(1-\frac{b_{NB}}{N}\sum_{i=1}^{n}i\Delta X_i\right)$$

$$-\frac{a_{NB}}{N}\sum_{i=1}^{n}i\Delta X_i;-\frac{b_{A1}}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta X_i;-\frac{a_{A1}}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta X_i;$$

$$-\frac{b_{BN}}{N}\sum_{i=1}^{n}i\Delta X_i;-\frac{a_{BN}}{N}\sum_{i=1}^{n}i\Delta X_i\| \qquad .../5.13/$$

$${}_1A_{2\,8}^*=\|\frac{b_{1A}}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta Y_i;-\left[1-\frac{a_{1A}}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta Y_i;\frac{b_{NB}}{N}\sum_{i=1}^{n}i\Delta Y_i;\right.$$

$$\left(1+\frac{a_{NB}}{N}\sum_{i=1}^{n}i\Delta Y_i\right);\frac{b_{A1}}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta Y_i;\frac{a_{A1}}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta Y_i;$$

$$\frac{b_{BN}}{N}\sum_{i=1}^{n}i\Delta Y_i;\frac{a_{BN}}{N}\sum_{i=1}^{n}i\Delta Y_i\| \qquad .../5.14/$$

$${}_1B_{1\,N}^*=-\|(X_N-X_1);(X_N-X_2);\ldots,(X_N-X_n);\ 0\|$$

$${}_1B_{2\,N}^*=\|(Y_N-Y_1);(Y_N-Y_2);\ldots;(Y_N-Y_n);\ 0\| \qquad .../5.15/$$

$${}_1C_{1\,n}^*=-\|\sin\nu_1;\sin\nu_2;\ldots;\sin\nu_n\|$$

$${}_1C_{2\,n}^*=-\|\cos\nu_1;\cos\nu_2;\ldots;\cos\nu_n\| \qquad .../5.16/$$

Polazeći od/2.11/ može se napisati izraz za srednje greške linearnih odstupanja

$$m_{fy}^2 = \mu_\xi^2 A_1^* Q_\xi A_1 + m_\beta^2 B_1^* Q_\beta' B_1 + \mu_S^2 C_1^* P^{-1} C_1 \qquad .../5.17/$$

$$m_{fx}^2 = \mu_\xi^2 A_2^* Q_\xi A_2 + m_\beta^2 B_2^* Q_\beta' B_2 + \mu_S^2 C_2^* P^{-1} C_2 \qquad .../5.18/$$

gde je:

- $\underset{\theta\theta}{Q_\xi}$ - matrica težinskih koeficijenata koja se uzima iz prethodnog izravnanja trigonometrijske mreže,
- μ_ξ, - srednja greška jedinice težine dobijena pri računanju koordinata trigonometrijskih tačaka

$$\underset{N\,N}{Q_\beta'} = \frac{1}{N} \begin{Vmatrix} N-1, & -1, & -1, & \ldots, & -1 \\ -1, & N-1, & -1, & \ldots, & -1 \\ & & & & \\ -1, & -1, & -1, & \ldots, & N-1 \end{Vmatrix} \qquad .../5.19/$$

matrica kojom se definiše korelativna zavisnost izmedju izravnatih uglova u poligonometrijskom vlaku,

$$P^{-1} = \begin{Vmatrix} S_1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & S_2, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & S_n \end{Vmatrix} \qquad .../5.19a/$$

ili $\quad P^{-1} = E \qquad .../5.19b/$

matrica kojom se definišu recipročne vrednosti težina merenih strana u vlaku; kada su strane merene klasičnim priborom to su same dužine, a kada se strane mere elektronskim daljinomerima to je jedinična matrica.

Radi jednostavnijeg daljeg pisanja usvojimo oznake

$$M_{y_1}^2 = \mu_\xi^2 A_1^* Q_\xi A_1 \,;\; M_{y_2}^2 = m_\beta^2 B_1^* Q_\beta' B_1 ;\; M_{y_3}^2 = \mu_s^2 C_1^* P^{-1} C_1 \qquad .../5.20/$$

$$M_{x_1}^2 = \mu_\xi^2 A_2^* Q_\xi A_2 \,;\; M_{x_2}^2 = m_\beta^2 B_2^* Q_\beta' B_2 ;\; M_{x_3}^2 = \mu_s^2 C_2^* P^{-1} C_2 \qquad .../5.21/$$

Razmatrajmo pojedinačno pojedine uticaje izvora grešaka na linearna odstupanja u poligonometrijskom vlaku.

5.1. UTICAJ GREŠAKA DATIH VELIČINA

Date veličine, koordinate datih tačaka, ispoljavaju svoj uticaj na linearna odstupanja preko matrica A_1 i A_2

$$M_{y_1}^2 = \mu_\xi^2 A_1^* Q_\xi A_1 ; \quad M_{x_1}^2 = \mu_\xi^2 A_2^* Q_\xi A_2 \qquad .../5.22/$$

Označimo koeficijente u odgovarajućim matricama vektorima A_1 i A_2 sa

$$\underset{1\,8}{A_1^*} = \| a_1' ; a_2' ; a_3' ; \cdots ; a_8' \|$$

$$\underset{1\,8}{A_2^*} = \| a_1'' ; a_2'' ; a_3'' ; \cdots ; a_8'' \| \qquad .../5.23/$$

Sada će proizvodi /5.22/ biti

$$M_{y_1}^2 = \mu_\xi^2 [a_1'^2 Q_{11} + 2a_1'a_2' Q_{12} + 2a_1'a_3' Q_{13} + \cdots + 2a_1'a_8' Q_{18} + \\ + a_2'^2 Q_{22} + 2a_2'a_3' Q_{23} + \cdots + 2a_2'a_8' Q_{28} + \\ \cdots \\ + a_8'^2 Q_{88}] \qquad ./5.24/$$

$$M_{x_1}^2 = \mu_\xi^2 [a_1''^2 Q_{11} + 2a_1''a_2'' Q_{12} + 2a_1''a_3'' Q_{13} + \cdots + 2a_1''a_8'' Q_{18} + \\ + a_2''^2 Q_{22} + 2a_2''a_3'' Q_{23} + \cdots + 2a_2''a_8'' Q_{28} + \\ \cdots \\ + a_8''^2 Q_{88}] \qquad .../5.25/$$

gde su:

- Q_{ij} elementi matrice $\underset{88}{Q_\xi}$ kojom se definiše korelativna zavisnost koordinata datih trigonometrijskih tačaka.

Kompletno posmatranje svih ovih izraza, zbog njihove glomaznosti bilo bi veoma teško, pa je potrebno učiniti neke pretpostavke, koje će uprostiti analizu, kao:

- da je poligonometrijski vlak razvučen, sa prolomnim uglovima 180° i jednakih dužina poligonometrijskih strana.

Uz ove pretpostavke biće sve koordinatne razlike jednake tj.

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = \ldots\ldots = \Delta X_n = \Delta X ; \quad \Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \ldots\ldots = \Delta Y_n = \Delta Y$$

pa će koeficijenti dobiti izglede

$$a_1' = -\left(1+\frac{n}{2}\,\Delta X\, b_{A1}\right) \qquad a_1'' = \frac{n}{2}\,\Delta Y\, b_{A1}$$

$$a_2' = -\frac{n}{2}\,\Delta X\, a_{A1} \qquad a_2'' = -\left(1-\frac{n}{2}\,\Delta Y\, a_{A1}\right)$$

$$a_3' = 1-\frac{b_{NB}}{2}\,n\cdot\Delta X \qquad a_3'' = \frac{n}{2}\,\Delta Y\, b_{NB}$$

$$a_4' = -\frac{n}{2}\,\Delta X\, a_{NB} \quad \ldots/5.26/ \qquad a_4'' = 1+\frac{n}{2}\,\Delta Y\, a_{NB} \quad \ldots/5.27/$$

$$a_5' = -\frac{n}{2}\,\Delta X\, b_{A1} \qquad a_5'' = \frac{n}{2}\,\Delta Y\, b_{A1}$$

$$a_6' = -\frac{n}{2}\,\Delta X\, a_{A1} \qquad a_6'' = \frac{n}{2}\,\Delta Y\, a_{A1}$$

$$a_7' = -\frac{n}{2}\,\Delta X\, b_{BN} \qquad a_7'' = \frac{n}{2}\,\Delta Y\, b_{BN}$$

$$a_8' = -\frac{n}{2}\,\Delta X\, a_{BN} \qquad a_8'' = \frac{n}{2}\,\Delta Y\, a_{BN}$$

Poznato je da se trigonometrijske tačke odredjuju metodom presecanja, uglavnom pojedinačno, redje u grupi po dve a još redje se trigonometrijska mreža izravnava cela odjednom. Zato se, sasvim opravdano, može uzeti da matrica Q_ξ ima izgled /5.28/ odnosno da koordinate ma koje dve trigonometrijske tačke nisu medjusobno korelisane dok izmedju koordinata X i Y postoji za istu tačku nekakva korelacija, mada često veoma mala.

$$Q_\xi = \left\|\begin{array}{cccccccc} Q_{y_1y_1} & Q_{y_1x_1} & & & & & & \\ Q_{x_1y_1} & Q_{x_1x_1} & & & & & & \\ & & Q_{y_Ny_N} & Q_{y_Nx_N} & & & & \\ & & Q_{x_Ny_N} & Q_{x_Nx_N} & & & & \\ & & & & Q_{y_Ay_A} & Q_{y_Ax_A} & & \\ & & & & Q_{x_Ay_A} & Q_{x_Ax_A} & & \\ & & & & & & Q_{y_By_B} & Q_{y_Bx_B} \\ & & & & & & Q_{x_By_B} & Q_{x_Bx_B} \end{array}\right\| \quad \ldots/5.28/$$

Pored toga u izraze /5.26/ i /5.27/ unesimo smenu

$$\Delta X = \frac{1}{n} S_{1N} \cos\nu \quad ; \quad \Delta Y = \frac{1}{n} S_{1N} \sin\nu$$

gde je: n broj strana u vlaku, ν -direkcioni ugao dijagonale vlaka posle čega će proizvodi matrica biti

$$\begin{aligned} A_1^* Q_\xi A_1 = {} & [1+2\tfrac{n}{2} S b_{A1}\cos\nu + (\tfrac{n}{2} S b_{A1}\cos\nu)^2] Q_{y_1y_1} + \\ & +2[\tfrac{n}{2} S a_{A1}\cos\nu + (\tfrac{n}{2}S)^2 a_{A1} b_{A1}\cos^2\nu] Q_{y_1x_1} + \\ & +(\tfrac{n}{2} S a_{A1}\cos\nu)^2 Q_{x_1x_1} + (\tfrac{n}{2} S a_{NB})^2\cos^2\nu\, Q_{x_Nx_N} + \qquad .../5.29a/ \\ & +[1-2\tfrac{n}{2} S b_{NB}\cos\nu + (\tfrac{n}{2} S b_{NB}\cos\nu)^2] Q_{y_Ny_N} + \\ & +2[-\tfrac{n}{2} S a_{NB}\cos\nu + (\tfrac{n}{2}S)^2 a_{NB} b_{NB}\cos^2\nu] Q_{y_Nx_N} + \\ & +(\tfrac{n}{2} S b_{A1}\cos\nu)^2 Q_{y_Ay_A} + 2(\tfrac{n}{2} S\cos\nu)^2 a_{A1}b_{A1} Q_{y_Ax_A} + \\ & +(\tfrac{n}{2} S a_{A1}\cos\nu)^2 Q_{x_Ax_A} + (\tfrac{n}{2} S b_{NB}\cos\nu)^2 Q_{y_By_B} + \\ & +2(\tfrac{n}{2}\cos\nu)^2 a_{NB}b_{NB} Q_{y_Bx_B} + (\tfrac{n}{2} S a_{NB}\cos\nu)^2 Q_{x_Bx_B} \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} A_2^* Q_\xi A_2 = {} & (\tfrac{n}{2} S b_{A1}\sin\nu)^2 Q_{y_1y_1} + 2[\tfrac{n}{2} S b_{A1}\sin\nu + \\ & +(\tfrac{n}{2} S\sin\nu)^2 a_{A1}b_{A1}] Q_{y_1x_1} + [1-2\tfrac{n}{2} S a_{A1}\sin\nu + \\ & +(\tfrac{n}{2} S a_{A1}\sin\nu)^2] Q_{x_1x_1} + (\tfrac{n}{2} S b_{NB}\sin\nu)^2 Q_{y_Ny_N} + \\ & +2[\tfrac{n}{2} S b_{NB}\sin\nu + (\tfrac{n}{2}\sin\nu\cdot S)^2 a_{NB}b_{NB}] Q_{y_Nx_N} + \qquad .../5.29b/ \\ & +[1+2\tfrac{n}{2} S a_{NB}\sin\nu + (\tfrac{n}{2} S a_{NB}\sin\nu)^2] Q_{x_Nx_N} + \\ & +(\tfrac{n}{2} S b_{A1}\sin\nu)^2 Q_{y_Ay_A} + 2(\tfrac{n}{2} S\sin\nu)^2 a_{A1}b_{A1} Q_{y_Ax_A} + (\tfrac{n}{2} S a_{A1}\sin\nu)^2 Q_{x_Ax_A} + \\ & +(\tfrac{n}{2} S b_{NB}\sin\nu)^2 Q_{y_By_B} + 2(\tfrac{n}{2} S\sin\nu)^2 a_{NB}b_{NB} Q_{y_Bx_B} + (\tfrac{n}{2} S a_{NB}\sin\nu)^2 Q_{x_Bx_B} \end{aligned}$$

kada se ovo malo sredi dobija se

$$\begin{aligned} A_1^* Q_\xi A_1 = {} & (\tfrac{n}{2}S)^2\cos^2\nu \{[a_{A1}^2(Q_{x_1x_1}+Q_{x_Ax_A}) + 2(Q_{x_1y_1}+Q_{x_Ay_A}) a_{A1}b_{A1} + \\ & +b_{A1}^2(Q_{y_1y_1}+Q_{y_Ay_A})] + [a_{NB}^2(Q_{x_Nx_N}+Q_{x_Bx_B}) + 2a_{NB}b_{NB}(Q_{x_Ny_N}+Q_{x_By_B}) + \\ & +b_{NB}^2(Q_{y_Ny_N}+Q_{y_By_B})]\} + (Q_{y_1y_1}+Q_{y_Ny_N}) - nS\cos\nu(b_{A1}Q_{y_1y_1} + a_{A1}Q_{y_1x_1} + \\ & +b_{NB}Q_{y_Ny_N} + a_{NB}Q_{y_Nx_N}) \qquad .../5.30/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2^* Q_\xi A_2 = {} & (\tfrac{n}{2}S)^2\sin^2\nu \{[a_{A1}^2(Q_{x_1x_1}+Q_{x_Ax_A}) + 2a_{A1}b_{A1}(Q_{y_1x_1}+Q_{y_Ax_A}) + \\ & +b_{A1}^2(Q_{y_1y_1}+Q_{y_Ay_A})] + [a_{NB}^2(Q_{x_Nx_N}+Q_{x_Bx_B}) + 2a_{NB}b_{NB}(Q_{y_Nx_N}+Q_{y_Bx_B}) + \\ & +b_{NB}^2(Q_{y_Ny_N}+Q_{y_By_B})]\} + (Q_{x_1x_1}+Q_{x_Nx_N}) + nS\sin\nu(b_{A1}Q_{y_1x_1} + \\ & +a_{A1}Q_{x_1x_1} + b_{NB}Q_{y_Nx_N} + a_{NB}Q_{x_Nx_N}). \end{aligned}$$

Lako je dokazati da izrazi u srednjim zagradama predstavljaju srednje greške direkcionih uglova. Direkcioni ugao neke trigonometrijske strane može se izraziti u funkciji priraštaja koordinata trigonometrijskih tačaka

$$\nu = \nu_0 + a_{ij}\delta x_i + b_{ij}\delta y_i + a_{ji}\delta x_j + b_{ji}\delta y_i \qquad .../5.31/$$

ili kraće matrično

$$\nu = \nu_0 + A^{*}\xi . \qquad .../5.32/$$

Srednja greška direkcionog ugla biće

$$m_\nu^2 = \mu_\xi^2 A^{*} Q_\xi A \qquad .../5.33/$$

gde je: $A^{*} = \| a_{ij} \; ; \; b_{ij} \; ; \; a_{ji} \; ; \; b_{ji} \|$

$$Q_\xi = \begin{Vmatrix} Q_{x_i x_i} , & Q_{x_i y_i} , & & \\ Q_{x_i y_i} , & Q_{y_i y_i} & & \\ & & Q_{x_j x_j} , & Q_{x_j y_j} \\ & & Q_{x_j y_j} , & Q_{y_j y_j} \end{Vmatrix}$$

Kada se izvrše naznačena množenja matrica dobija se

$$m_\nu^2 = \mu_\xi^2 [a_{ij}^2 (Q_{x_i x_i} + Q_{x_j x_j}) + 2 a_{ij} b_{ij} (Q_{x_i y_i} + Q_{x_j y_j}) + b_{ij}^2 (Q_{y_i y_i} + Q_{y_j y_j})] \qquad .../5.34/$$

Zamenom vrednosti /5.34/ u izrazima /5.30/ uz pretpostavku da su sve trigonometrijske strane jednake i da su mešoviti članovi ($Q_{x_i y_i}$) korelacione matrice Q_ξ jednaki nuli, dobija se srednja greška linearnih odstupanja

$$M_{y_1}^2 = \frac{1}{4} S_{1N}^2 \cos^2\nu (m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_z}^2) + m_{y_1}^2 + m_{y_N}^2 -$$
$$- S_{1N} \cos\nu_1^N (b_{A1} Q_{y_1 y_1} + a_{A1} Q_{y_1 x_1} + b_{NB} Q_{y_N x_N} + a_{NB} Q_{y_N x_N}) \qquad .../5.35/$$

$$M_{x_1}^2 = \frac{1}{4} S_{1N}^2 \sin\nu (m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_z}^2) + m_{x_1}^2 + m_{x_N}^2 +$$
$$+ S_{1N} \sin\nu_1^N (b_{A1} Q_{y_1 x_1} + a_{A1} Q_{x_1 x_1} + b_{NB} Q_{y_N x_N} + a_{NB} Q_{x_N x_N}) \qquad .../5.36/$$

Sabiranjem prethodnih izraza dobija se

$$M_1^2 = M_{y_1}^2 + M_{x_1}^2 = m_{y_1}^2 + m_{x_1}^2 + m_{y_N}^2 + m_{x_N}^2 + \frac{S_{1N}^2}{4} (m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_z}^2) -$$
$$- [\frac{S_{1N}}{S_{NB}} \cos(\nu_{NB} - \nu_{N1}) m_N^2 + \frac{S_{1N}}{S_{A1}} \cos(\nu_{1N} - \nu_{A1}) m_1^2] \qquad .../5.36a/$$

gde je pretpostavljeno da je $m_{y_1} = m_{x_1} = m_1 \quad m_{y_N} = m_{x_N} = m_N$

Kada se usvoji da je $\nu_{1N} = 90^o$ dobija se

$$\cos(\nu_N^B - \nu_N^1) = \cos(\nu_N^B - 270) = -\sin \nu_N^B$$

$$\cos(\nu_{1N} - \nu_{1A}) = \cos(90 - \nu_{1A}) = \sin \nu_{1A} = -\sin \nu_{A1}$$

odnosno

$$M_\varphi^2 + m_{l_1}^2 = m_{x_1}^2 + m_{y_1}^2 + m_{x_N}^2 + m_{y_N}^2 + \left(\frac{S_{1N}}{2}\right)^2 (m_{\nu_P}^2 + m_{\nu_Z}^2) +$$
$$+ \frac{S_{1N}}{S_{NB}} \sin \nu_{NB} m_N^2 + \frac{S}{S_{A1}} \sin \nu_{A1} m_1^2 \quad .../5.36a/$$

Da bi se od linearnih odstupanja f_y i f_x došlo do podužnog i poprečnog odstupanja, odnosno do njihovih srednjih grešaka, dovoljno je u prethodnim izrazima usvojiti da se vlak pruža po pravcu Y-ose tj. da je direkcioni ugao vlaka $\nu = 90^o$

Sa ovom pretpostavkom dobija se

$$M_{l_1}^2 = m_{y_1}^2 + m_{y_N}^2 \quad .../5.37/$$

$$M_{\varphi_1}^2 = \frac{1}{4} S_{1N}^2 (m_{\nu_P}^2 + m_{\nu_Z}^2) + m_{x_1}^2 + m_{x_N}^2 +$$
$$+ \sin \nu_{A1} m_{x_1}^2 + \sin \nu_{NB} m_{x_N}^2 \quad .../5.38/$$

Kako se pravac pružanja vlaka poklapa sa pravcem Y ose, to pod greškama m_{y_1} i m_{y_N} treba podrazumevati položajne greške krajnih datih tačaka po pravcu vlaka. Prema tome, na podužnu grešku vlaka nemaju uticaja dati direkcioni uglovi niti tačke ka kojima su opažani vezni uglovi.

Kod posmatranja srednje greške poprečnog linearnog odstupanja, pod vrednostima m_{x_1} i m_{x_N} srednjih grešaka datih veličina, treba podrazumevati položajnu grešku datih tačaka po pravcu koji je upravan na pravac pružanja vlaka. Iz poslednjeg izraza može se zaključiti:

- Jedan deo greške poprečnog linearnog odstupanja ne zavisi od ugla vezujućih datih trigonometrijskih strana, u odnosu na dijagonalu vlaka. Uz pretpostavku da je trigonometrijska mreža pravilnog oblika i ujednačene tačnosti ovaj deo greške je konstantan.

- Drugi deo greške

$$nS(a_{A1}\, m_{x_1}^2 + a_{NB}\, m_{x_N}^2)$$

zavisi od rasporeda datih veznih strana. Naime, ako predpostavimo da je $m_{x_1} = m_{x_n}$, ako je $\nu_p = \nu_Z \pm 180$ i ako su sve strane u trigonometrijskoj mreži jednake onda se ovaj deo greške gubi. O ovoj činjenici, pri izboru datih vezujućih strana trebalo bi voditi računa.

Prema tome, na poprečno linearno odstupanje utiču:

- početni i završni direkcioni ugao,
- položajne greške početne i završne tačke vlaka posmatrane u pravcu koji je upravan na pravac pružanja vlaka,
- Vezni uglovi: ako je zbir veznih uglova 180^o njihov uticaj nestaje,
- Korelativna zavisnost izmedju koordinata X i Y kako početne tako i završne tačke vlaka. I ovaj uticaj nestaje kada je zbir veznih uglova 180.

Kako je $nS = S_{1N}$ to izraz /5.38/ postaje

$$M_{x_1}^2 = M_{\varphi_1}^2 = \left(\frac{S_{1N}}{2}\right)^2 (m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_Z}^2) + m_{x_1}^2 + m_{x_N}^2 + S_{1N}(a_{A1} m_{x_1}^2 + a_{NB} m_{x_N}^2) \quad .../5.39/$$

Sada se lako može naći srednja greška ukupnog linearnog odstupanja kada se saberu izrazi /5.37/ i /5.39/

$$M_1^2 = m_{x_1}^2 + m_{y_1}^2 + m_{x_N}^2 + m_{y_N}^2 + \left(\frac{S_{1N}}{2}\right)^2 (m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_Z}^2) + $$
$$+ S_{1N}(a_{A1} m_{x_1}^2 + a_{NB} m_{x_N}^2) \quad .../5.40/$$

što je isto kao i /5.36b/

Pošto su dobijeni izrazi za uticaj grešaka datih veličina može se dati kritički osvrt na neke pravilničke odredbe:

- Kod računanja iskrivljenih vlakova, kvalitet izvršenih merenja ceni se preko ukupnog linearnog odstupanja. Pri tome ono ne sme preći granice dozvoljenih odstupanja za podužnu grešku ispruženog vlaka Pravilnik II i III deo član 98. Jasno je da se ovde čini grub previd jer u tim dozvoljenim granicama sadržan je samo jedan manji deo uticaja grešaka datih veličina dok se drugi deo zanemaruje.

Navedimo jedan primer poligonskog vlaka čije su veličine $[\Delta Y]=600$ m $[\Delta X]=1000$ m $S_{1N} = 1116$m $[S] = 1330$ m $N=6$

$f_y=+0,38$ m $f_x = + 0,20$ $f_d = 0,45$ m $/0,44\text{m}=\Delta \ell/$

$l = + 0,38$ m $/\Delta l = 0,44/$ $\varphi = + 0,24$ m $/\Delta\varphi = 0,38/$

Prema tome, ako se ovaj vlak smatra kao ispružen, njegova odstupanja l i φ ulaze u dozvoljene granice, a ako se pak smatra kao iskrivljen izlazi iz dozvoljenih granica.

Ovaj primer jasno ukazuje da se dozvoljeno podužno odstupanje ispruženog vlaka ne može koristiti kao granično ukupno linearno odstupanje izlomljenog vlaka.

Tačno je da se u ispruženom poligonometrijskom vlaku na osnovu podužnog odstupanja l, može ceniti tačnost izvršenih merenja dužina, odnosno da poprečno odstupanje φ ukazuje na tačnost izvršenih uglovnih merenja. Odstupanja iskrivljenog poligonometrijskog vlaka ne pružaju ovu informaciju.

Ispravnije bi bilo, da se za iskrivljeni vlak, kao kriterijum o izvršenim merenjima koristi ukupno linearno odstupanje ali čije će se granice odrediti kao $\Delta d \leq \sqrt{\Delta \ell^2 + \Delta\varphi^2}$

Veliko poprečno odstupanje nastaje kao posledica grešaka merenja uglova. Pri tome se kod njegove raspodele vodi računa o težinama direkcionih uglova pojedinih poligonometrijskih strana. Težine direkcionih uglova poligonometrijskih strana izvode se pod pretpostavkom da su sva uglovna merenja izvršena sa istom tačnošću.

Medjutim, veliko poprečno odstupanje nastaje, dosta često, kao posledica pogrešno izmerenog jednog ugla, redje dva ili tri ugla. Ova greška u dobijenoj vrednosti izmerenog ugla, najčešće nastaje zbog grubo pogrešnog signalisanja neke tačke ili grube greške centrisanja teodolita. Veoma čest slučaj velikog poprečnog odstupanja javlja se zbog pogrešnih koordinata tačke ka kojoj je meren vezni ugao. Kod ovog slučaja, uglovno odstupanje f_β nalazi se u dozvoljenim granicama, te njegova raspodela na pojedine merene uglove samo će pokvariti ostale dobro izmerene uglove. Zato se može preporučiti; kada su merenja u vlaku dobro izvršena, a ipak se pojave velika odstupanja, treba pokušati da se pronadje greška merenja na način kako se pronalazi gruba greška u poligonometrijskom vlaku.

Prethodni izrazi, o uticaju grešaka datih veličina, izvedeni su pod pretpostavkom da je vlak oslonjen na trigonometrijske tačke, odnosno za glavni vlak. Mnogo više ima vlakova koji su oslonjeni na neke druge poligonometrijske tačke tj. sporednih vlakova. Kod ovakvog vezivanja vlakova redovan je slučaj, izuzev veoma retkih strogih izravnanja, da se prvo izvrši izravnanje merenih uglova a zatim koordinatnih razlika. Prema tome, početni i završni direkcioni ugao nisu medjusobno korelisani ili imaju beznačajnu korelaciju /zanemarljivu/. Takodje su nezavisne koordinate početne i završne tačke vlaka kao i koordinate Y i X jedne tačke.

Zanemarujući zavisnost koordinata datih tačaka i datih direkcionih uglova, diferencijali odstupanja f_y i f_x biće

$$
\begin{aligned}
df_y &= dy_N - dy_1 - \frac{1}{N} d\nu_p \sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta X_i - \frac{1}{N} d\nu_z \sum_{i=1}^{n} i\Delta X_i - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}(X_N - X_i)\, d\beta' - \sum_{i=1}^{n} \sin\nu_i\, dS_i \\
df_x &= dx_N - dx_1 + \frac{1}{N} d\nu_p \sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta Y_i + \frac{1}{N} d\nu_z \sum_{i=1}^{n} i\Delta Y_i + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}(Y_N - Y_i)\, d\beta' - \sum_{i=1}^{n} \cos\nu_i\, dS_i
\end{aligned}
\qquad \ldots/5.41/
$$

pri čemu su izrazi /5.7/ uvršteni u /5.4/.

Pošto su članovi izraza /5.41/, koji zavise od datih veličina, medjusobno nezavisni to se može odmah preći na srednje greške linearnih odstupanja

$$M_{y_1}^2 = m_{y_1}^2 + m_{y_N}^2 + \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta X_i\right]^2 m_{\nu_p}^2 + \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} i\Delta X_i\right)^2 m_{\nu_z}^2 \qquad .../5.42/$$

$$M_{x_1}^2 = m_{x_1}^2 + m_{x_N}^2 + \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta Y_i\right]^2 m_{\nu_p}^2 + \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} i\Delta Y_i\right)^2 m_{\nu_z}^2 \qquad .../5.43/$$

Ako se pretpostavi da je vlak razvučen i sa jednakim stranama tj. daje $\Delta X_1 = \Delta X_2 = \ldots = \Delta X_n = \Delta X$; $\Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \ldots \Delta Y_n = \Delta Y$ dobija se

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta X_i = \frac{1}{N}\cdot\Delta X_i\sum_{i=1}^{n}(N-i)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta X_i = \frac{1}{2}(X_N - X_1) \qquad .../5.44/$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(N-i)\Delta Y_i = \frac{1}{2}(Y_N - Y_1)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} i\Delta Y_i = \frac{1}{2}(Y_N - Y_1)$$

odnosno

$$M_{y_1}^2 = m_{y_1}^2 + m_{y_N}^2 + \frac{1}{4}(X_N - X_1)^2(m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_z}^2) \qquad .../5.45/$$

$$M_{x_1}^2 = m_{x_1}^2 + m_{x_N}^2 + \frac{1}{4}(Y_N - Y_1)^2(m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_z}^2) \qquad .../5.46/$$

Kada se usvoji da se vlak pruža duž Y-ose, srednje greške odstupanja f_y i f_x postaju srednje greške podužnog i poprečnog linearnog odstupanja

$$M_l^2 = m_{y_1}^2 + m_{y_N}^2 \qquad .../5.47/$$

$$M_\varphi^2 = m_{x_1}^2 + m_{x_N}^2 + \left(\frac{S_{1N}}{2}\right)^2(m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_z}^2) \qquad .../5.48/$$

odnosno srednja greška ukupnog linearnog odstupanja

$$M_1^2 = m_{y_1}^2 + m_{x_1}^2 + m_{y_N}^2 + m_{x_N}^2 + \left(\frac{S_{1N}}{2}\right)^2(m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_z}^2) \qquad .../5.49/$$

gde m_{y_i} i m_{x_i} predstavljaju podužne i poprečne greške datih tačaka u odnosu na pravac vlaka.

Analizirajući ove greške može se zaključiti:

- Izraz za deo srednje greške podužnog linearnog odstupanja nezavisan je od toga da li se vlak vezuje za trigonometrijske ili poligonometrijske tačke. Vrednost tog dela greške zavisi samo od podužnih grešaka datih tačaka u odnosu na pravac vlaka.

- Za deo poprečne greške ovde se dobija nešto jednostavniji izraz nego kad se vlak vezuje za trigonometrijske tačke. Naime, ovde se gubi član koji zavisi od veznih uglova i korelativne zavisnosti koordinata datih tačaka.

Važno je uočiti da će na podužno linearno odstupanje sporednog vlaka imati uticaja poprečne greške poligonometrijskih tačaka vlaka na koje se sporedni vlak oslanja, dok će na poprečno odstupanje imati uticaj podužne greške poligonometrijskih tačaka datog vlaka. Pri rekognosciranju poligonometrijske mreže nastoji se da vlaci budu pravilno razvijeni tj. da su sporedni vlakovi približno upravni na glavne vlakove. Samim tim sračunate podužne i poprečne greške položaja tačaka u glavnom vlaku, manifestovaće se kao poprečna i podužna greška u odnosu na pravac sporednog vlaka.

5.2. UTICAJ GREŠAKA MERENJA UGLOVA

Realna je pretpostavka da će na merenje uglova imati uticaja slučajne greške merenja $\delta\beta_i$ i sistematske greške C_i koja nastaje kao greška instrumenta i kao uticaj terenskih atmosferskih uslova merenja. Prilikom izravnanja uglova za uslov datih direkcionih uglova veći deo ove greške raspoređjuje se na sve uglove podjednako.

Prema teoriji grešaka, ukoliko sve sistematske greške nisu jednake, nego imaju jedan konstantan, zajednički, sistematski deo a drugi varira kao promenljiva greška, tada se, prilikom raspodele odstupanja konstantni deo sa popravkama odstrani a promenljivi deo ostaje i ulazi u slučajne greške.

Ipak pretpostavimo da je i posle izravnanja uglova ostala jedna mala sistematska greška C. Tako se greška popravljene vrednosti izmerenog ugla može predstaviti kao

$$d\beta_i' = \delta\beta_i' + C \qquad .../5.50/$$

Zato se u izrazima /5.10/, umesto $\delta\beta$ može uneti $d\beta_i' = \delta\beta_i' + C$ pa će se dobiti

$$(dfy)_\beta = -\sum_{i=1}^{n}(X_N - X_i)(\delta\beta_i' + C) = -\sum_{i=1}^{n}(X_N - X_i)\delta\beta_i' - \sum_{i=1}^{n}(X_N - X_i)C \qquad .../5.51/$$

$$(dfx)_\beta = \sum_{i=1}^{n}(Y_N - Y_i)(\delta\beta_i' + C) = \sum_{i=1}^{n}(Y_N - Y_i)\delta\beta_i' + \sum_{i=1}^{n}(Y_N - Y_i)C \qquad .../5.52/$$

ili kraće matrično

$$(dfy)_\beta = B_1^* \beta' + C\sum_{i=1}^{n} -(X_N - X_i) \qquad .../5.51a/$$

$$(dfx)_\beta = B_2^* \beta' + C\sum_{i=1}^{n} (Y_N - Y_i) \qquad .../5.52a/$$

Polazeći od poslednjih izraza mogu se napisati srednje greške linearnih odstupanja f_y i f_x, koje nastaju kao posledica slučajnih i sistematskih grešaka merenja uglova. Radi kraćeg pisanja označimo ove greške sa My_2 i Mx_2.

$$My_2^2 = \eta_\beta^2 B_1^* Q_\beta' B_1 + \lambda_o^2 \Big(\sum_{i=1}^{n} X_N - X_i\Big)^2 \qquad .../5.53/$$

$$Mx_2^2 = \eta_\beta^2 B_2^* Q_\beta' B_2 + \lambda_o^2 \Big(\sum_{i=1}^{n} Y_N - Y_i\Big)^2 \qquad .../5.54/$$

gde je: B_1^* i B_2^* dato izrazom /5.14/

$$ {}_{N}Q_\beta' = \frac{1}{N} \begin{Vmatrix} N-1, & -1, & -1, & ----, & -1 \\ -1, & N-1, & -1, & ----, & -1 \\ ---- & ---- & ---- & ---- & ---- \\ -1, & -1, & -1, & ----, & N-1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 1, & 1, & 1, & ----, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & ----, & 1 \\ ---- & ---- & ---- & ---- & ---- \\ 1, & 1, & 1, & ----, & 1 \end{Vmatrix} \frac{1}{N}$$

$$ {}_{N}Q_{\beta_N}' = E - \frac{1}{N} C$$

Obzirom na prethodno imaćemo

$$My_2^2 = \eta_\beta^2 \Big(B_1^* B_1 - \frac{1}{N} B_1^* C B_1\Big) + \lambda_o^2 \Big(\sum_{i=1}^{n} X_N - X_i\Big)^2 \qquad .../5.55/$$

$$Mx_2^2 = \eta_\beta^2 \Big(B_2^* B_2 - \frac{1}{N} B_2^* C B_2\Big) + \lambda_o^2 \Big(\sum_{i=1}^{n} Y_N - Y_i\Big)^2 \qquad .../5.56/$$

gde su proizvodi

$$B_1^* B_1 = \sum_{i=1}^{n}(X_N - X_i)^2 \; ; \; \frac{1}{N} B_1^* C B_1 = \frac{1}{N}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_N - X_i\Big)^2$$

$$B_2^* B_2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_N - Y_i)^2 \; ; \; \frac{1}{N} B_2^* C B_2 = \frac{1}{N}\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_N - Y_i\Big)^2 \qquad .../5.57/$$

Ako pretpostavimo da su svi uglovi u vlaku 180^{0} tj. da je vlak ispružen i da su sve strane u vlaku jednake imaćemo

$$\sum_{i=1}^{n}(X_N-X_i)^2=\Delta X^2\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{S_{1N}^2}{n^2}\cos^2\nu\sum_{i=1}^{n}i^2=S_{1N}^2\cos^2\nu\frac{N(2N-1)}{6(N-1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_N-Y_i)^2=S_{1N}^2\sin^2\nu\cdot\frac{N(2N-1)}{6(N-1)}$$

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n}X_N-X_i\right)^2=\frac{1}{N}\cos^2\nu\cdot S_{1N}^2\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4n^2}=S_{1N}^2\cos^2\nu\cdot\frac{N}{4}$$

Sa ovim zamenama dobija se

$$My_2^2=\eta_\beta^2 S_{1N}^2\cos^2\nu\left[\frac{N(N+1)}{12(N-1)}\right]+\lambda_0^2 S_{1N}^2\cos^2\nu\frac{N}{4} \qquad .../5.58/$$

$$Mx_2^2=\eta_\beta^2 S_{1N}^2\sin^2\nu\left[\frac{N(N+1)}{12(N-1)}\right]+\lambda_0^2 S_{1N}^2\sin^2\nu\cdot\frac{N}{4} \qquad .../5.59/$$

Uporedjujući izraze /5.58/ i /5.59/ sa izrazima /5.37/ i /5.38/ vidimo da se uticaj sistematskih grešaka merenja uglova na linearna odstupanja f_y i f_x odražava kao greška datih direkcionih uglova.

Usvojimo li da se pravac vlaka poklapa sa pravcem Y- ose tj. da je direkcioni ugao vlaka 90^{0}, tada linearna odstupanja f_y i f_x prelaze u podužno i poprečno linearno odstupanje. Kada se ovo uvrsti u /5.58/ i /5.59/ dobija se

$$M\ell_2^2=0 \qquad .../5.60/$$

$$M\varphi_2^2=\eta_\beta^2 S_{1N}^2\frac{N(N+1)}{12(N-1)}+\lambda_0^2 S_{1N}^2\cdot\frac{N}{4} \qquad .../5.61/$$

odnosno slučajna i sistematska greška neće imati nikakav uticaj na podužno odstupanje u ispruženom poligonskom vlaku, nego samo na poprečno odstupanje.

5.2.1. SLUČAJ KADA JE MERENJE VRŠENO SA VIŠE PRIBORA

Slučajne greške merenja uglova, kada se radi o više pribora iste tačnosti, ostaju iste dok se sistematske greške menjaju, od pribora do pribora. Promena sistematske greške nastaće i izmenom vremena opažanja (pre i posle podne). Zato ćemo i u izrazu /5.51/ posmatrati samo drugi deo, koji se odnosi na uticaj sistematskih grešaka merenja uglova.

$$(dfy)_C = -\sum_{i=1}^{n}(X_N - X_i)C_j \qquad j = 1,2,\dots,K$$
$$(dfx)_C = -\sum_{i=1}^{n}(Y_N - Y_i)C_j \qquad j = 1,2,\dots,K \qquad \dots/5.62/$$

Uzećemo slučaj da je u jednom vlaku bilo k izmena uslova merenja tj. da je u vlaku izmereno

k_1-uglova jednim instrumentom /od 1. do k_1 stanice/

k_2-uglova drugim instrumentom /od k_1+1 do k_2 stanice/

---

k_k-uglova k-tim instrumentom (od k_{k+1}+1 do n stanice)

Napišimo izraz /5.62/ u razvijenom obliku

$$(dfy)_C = -\{[(X_N - X_1) + (X_N - X_2) + \dots + (X_N - X_{K1})]C_1 + [(X_N - X_{K+1}) + (X_N - X_{K1+2}) + \dots (X_N - X_{K2})]C_2 + \dots + [(X_N - X_{K_{K-1}+1}) + (X_N - X_{K_{K-1}+2}) + \dots + (X_N - X_n)]C_K\} \qquad \dots/5.63/$$

pretpostavimo da je vlak razvučen i sa jednakim stranama tj.

$$X_N - X_i = n\Delta X \;;\; X_N - X_i = (n - i + 1)\Delta X$$

odnosno

$$(dfy)_C = -\{[n + (n-1) + \dots + (n - K_1)]\Delta X C_1 + [(n - K_1 + 1) + (n - K_1 + 2) + \dots + (n - K_1 + K_2)]\Delta X C_2 + [(n - K_1 + K_2 + \dots + K_{K-1} + 1) \dots + 2 + 1]\Delta X C_K\}$$

ili kada se ovo malo uredi dobiće se

$$(dfy)_C = -\Delta X\left\{\left[nK_1 - \frac{K_1(K_1-1)}{2}\right]C_1 + \left[(n - K_1)K_2 - \frac{K_2(K_2-1)}{2}\right]C_2 + \dots + \left[(n - K_1 - K_2 - \dots - K_{K-1})K_K - \frac{(K_K-1)K_K}{2}\right]C_K\right\}$$

$$(dfx)_C = -\Delta Y\left\{\left[nK_1 - \frac{(K_1-1)K_1}{2}\right]C_1 + \left[(n - K_1)K_2 - \frac{K_2(K_2-1)}{2}\right]C_2 + \dots + \left[(n - K_1 - K_2 - \dots - K_{K-1})K_K - \frac{(K_K-1)K_K}{2}\right]C_K\right\} \dots/5.64/$$

Odgovarajuća srednja greška biće

$$(M_2^2)_\lambda = \{[n\cdot k_1 - \frac{k_1(k_1-1)}{2}]^2 \lambda_1^2 + [(n-k_1)k_2 - \frac{k_2(k_2-1)}{2}]^2 \lambda_2^2 +$$
$$+ \cdots + [(n-k_1-k_2-\cdots-k_{k-1})k_k -$$
$$- \frac{k_k(k_k-1)}{2}]^2 \lambda_k^2\} (\frac{S_{1N}}{n})^2 \qquad .../5.65/$$

Ako pretpostavimo da vlak ide duž Y - ose, greške po pravcu ose Y i X postaće podužno i poprečno linearno odstupanje. Poslednji izrazi pokazuju da će u tom slučaju podužno odstupanje biti nula, a ukupno odstupanje ispoljiće se kao poprečno odstupanje. To znači da konstantna sistematska greška merenja uglova izaziva, kod razvučenog vlaka, samo poprečno odstupanje.

Izraz /5.65/ je dosta glomazan ali objektivno pokazuje uticaj sistematskih grešaka merenja uglova na ukupno linearno odstupanje f_d.

Uzmimo slučaj da je u vlaku svakim instrumentom izmeren isti broj uglova.

$$k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_n = \frac{n}{k} \qquad .../5.66/$$

Radi kratkoće pri pisanju uvedimo oznake

$$a_1 = [nk_1 - \frac{k_1(k_1-1)}{2}]\cdot\frac{1}{n}$$
$$a_2 = [(n-k_1)k_2 - \frac{k_2(k_2-1)}{2}]\cdot\frac{1}{n}$$
$$a_3 = [(n-k_1-k_2)k_3 - \frac{k_3(k_3-1)}{2}]\cdot\frac{1}{n} \qquad .../5.67/$$

$$a_k = [(n-k_1-k_2-\cdots-k_{k-1})k_k - \frac{k_k(k_k-1)}{2}]\cdot\frac{1}{n}$$

ili uopšte

$$a_i = [(n-\sum_{j=1}^{k} k)k_i - \frac{k_i(k_i-1)}{2}]\cdot\frac{1}{n}$$

Kada se prednje oznake uvedu u izraze /5.65/ dobija se

$$(M_2)^2 = [a_1^2\lambda_1^2 + a_2^2\lambda_2^2 + \cdots + a_k^2\lambda_k^2]\cdot S_{1H}^2 \qquad .../5.68/$$

Uz pretpostavku da je vlak razvučen, i uvažavajući /5.66/, za koeficijente a_i dobijamo sledeće oznake

$$na_1 = \frac{1}{2K^2}[2n^2K-(n-K)n]$$

$$na_2 = \frac{1}{2K^2}[2n^2(K-1)-n(n-K)] \qquad .../5.69/$$

$$na_K = \frac{1}{2K^2}[2n^2(K-K+1)-(n-K)n]$$

ili uopšte

$$na_i = \frac{1}{2K^2}[2n^2(K-i)-n(n-K)] \qquad .../5.70/$$

Greške $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_K = \lambda$ uzećemo da su medjusobno jedanke i nezavisne pa je

$$(M_2^2)_\lambda = \lambda^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_K^2)S_{1N}^2 \qquad .../5.71/$$

Sada, koristeći /5.69/ i /5.70/, može se naći suma, za dati broj promena pribora, prilikom merenja uglova

$$\text{za } K=1;\ \sum_{i=1}^{K} a_i^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2+2n+1}{4}$$

$$\text{za } K=2;\ \sum_{i=1}^{K} a_i^2 = \left(\frac{3n+2}{8}\right)^2 + \left(\frac{n+2}{8}\right)^2 = \frac{10n^2+16n+8}{64}$$

$$\text{za } K=3;\ \sum_{i=1}^{K} a_i^2 = \left(\frac{5n+3}{18}\right)^2 + \left(\frac{3n+3}{18}\right)^2 + \left(\frac{n+3}{18}\right)^2 = \frac{35n^2+54n+27}{324} \qquad .../5.72/$$

$$\text{za } K=t;\ \sum_{i=1}^{K} a_i^2 = \left[\frac{(2t-1)n+t}{2t^2}\right]^2 + \left[\frac{(2t-3)n+t}{2t^2}\right]^2 + \cdots + \left[\frac{3n+t}{2t^2}\right]^2 + \left[\frac{n+t}{2t^2}\right]^2$$

Sa povećanjem broja promena uslova merenja <u>k</u> smanjuje se vrednost $\sum_{i=1}^{K} a_i^2$; tj. smanjuje se uticaj sistematske greške merenja uglova na grešku ukupnog linearnog odstupanja, ali se ne smanjuje srazmerno broju grupa

$$\frac{1}{2}a_1^2 < \sum_{i=1}^{2} a_i^2\ ;\ \frac{1}{3}a_1^2 < \sum_{i=1}^{3} a_i^2\ ;\ \cdots\ \frac{1}{k}a_1^2 < \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$$\frac{1}{2}a_1^2 = \frac{1}{64}(8n^2+16n+8) < \frac{1}{64}(10n^2+16n+8)$$

$$.../5.73/$$

$$\frac{1}{3}a_1^3=\frac{1}{324}(27n^2+54n+27)<\frac{1}{324}(35n^2+54n+27)$$

$$\frac{1}{4}a_1^2=\frac{1}{1024}(64n^2+128n+64)<\frac{1}{1024}(84n^2+128n+64) \text{ itd.}$$

Poslednji izrazi pokazuju da se promenom uslova pri merenju uglova, sistematski uticaj umanjuje manje nego pri merenju dužina, gde se smanjenje sistematskog uticaja postiže srazmerno broju grupa.

Ako se u izrazima /5.72/ umesto broja strana n uvede broj uglova N=1+n može se pogodnom transformacijom dobiti

$$\sum_{i=1}^{K}a_i^2=\frac{1}{4K^2}\{K^3N^2+2(N-1)^2\left[(K-1)^2+(K-3)^2+(K-5)^2+\dots\right]\} \qquad .../5.75/$$

gde vrednosti sabiraka u srednjim zagradama, koje se kvadriraju, ne mogu biti brojevi manji od jedan.

Iz /5.73/ vidi se da uticaj sistematskih grešaka ne opada linearno sa povećanjem broja promena uslova nego se uvećava za jedan sabirak.

Promena uslova merenja stvara serijske sistematske greške merenja uglova, čiji se konstantni deo odstranjuje izravnanjem uglova za uslov datih direkcionih uglova, dok se promenljivi, ne tako mali, deo uklapa u slučajne greške. Preostali deo sistematskih grešaka utiče kao slučajna greška datih direkcionih uglova.

Ako bi se pak zadržali isti uslovi merenja, čime bi svi uglovi bili opterećeni istom sistematskom greškom, konstantna sistematska greška, koja bi ovde činila skoro celu sistematsku grešku, eliminisala bi se popravkama merenih uglova. Eventualna mala kolebanja sistematskih grešaka, koja nastaju zbog promena atmosferskih uslova, utapaju se u slučajne greške merenja uglova.

5.3. UTICAJ GREŠAKA MERENJA DUŽINA

Na tačnost i veličinu linearnih odstupanja, kako po pravcu koordinatnih osa tako i na podužno linearno odstupanje, imaju uticaja i greške merenja dužina.

Merene dužine opterećene su:

- slučajnim greškama merenja δ_i
- λS_i sistematskim greškama srazmernim merenoj dužini i
- λ_o konstantnom sistematskom greškom koja je za sve izmerene dužine jednaka i ne zavisi od dužine

$$dS_i = \delta_i + \lambda S_i + \lambda_o \qquad .../5.76/$$

Slučajne greške merenja dužina zavisiće od pribora koji je korišćen za merenje dužina; ako se koristi klasičan pribor za merenje dužina onda ona raste srazmerno kvadratnom korenu iz merene dužine, a ako se merenje vrši elektronskim daljinomerima, njena vrednost ne zavisi od merene dužine, približno je konstantna, ali joj znak unapred nije odredjen.

Promenljiva sistematska greška srazmerna merenoj dužini zavisi od pribora sa kojim se vrši merenje kao i od lica koje vrši merenje. Kao mogući izvori ovih grešaka mogu se navesti:

- pogrešna dužina radne mere (pantljike) koja ima sistematski karakter. Na primer svaki metar označen na pantljici duži je ili kraći od njegove nominalne vrednosti,
- netačno odredjena multiplikaciona konstanta optičkog daljinomera, gde se unose i lične greške operatora,
- netačna frekvencija daljinomera kao i pogrešno odredjena brzina nosećeg talasa.

- Konstantna sistematska greška λ_o javlja se kao neuračunata adiciona konstanta ili pogrešno odredjena vrednost adicione konstante kako optičkog tako i elektronskog daljinomera.

Posmatrajmo posebno uticaj grešaka merenja dužina na linearna odstupanja f_y i f_x i njih izdvojimo iz izraza /5.10/

$$(dfy)_s = -\sum_{i=1}^{n} \sin\nu_i dS_i$$

$$(dfx)_s = -\sum_{i=1}^{n} \cos\nu_i dS_i \qquad .../5.77/$$

Zamenom /5.76/ u /5.77/ dobija se

$$(dfy)_s = -\sum_{i=1}^{n} \sin\nu_i(\delta_i + \lambda_i S + \lambda_{o_i})$$

$$(dfx)_s = -\sum_{i=1}^{n} \cos\nu_i(\delta_i + \lambda_i S + \lambda_{o_i}) \qquad .../5.78/$$

Zatim pretpostavimo da su sve strane u vlaku merene istim priborom i od strane istog operatora. U tom slučaju promenljive sistematske greške λ_i i λ_{o_i} postaju konstante λ i λ_o za ceo vlak pa se poslednji izrazi mogu preurediti

$$(dfy)_s = -[\sum_{i=1}^{n} \sin\nu_i\delta_i + \lambda(Y_N - Y_1) + \lambda_o\sum_{i=1}^{n} \sin\nu_i]$$

$$(dfx)_s = -[\sum_{i=1}^{n} \cos\nu_i\delta_i + \lambda(X_N - X_1) + \lambda_o\sum_{i=1}^{n} \cos\nu_i] \qquad .../5.79/$$

Pošto su izrazima /5.79/ sabirci na desnoj strani medjusobno nezavisni to se može odmah preći na srednje greške linearnih odstupanja $(m_{fy})_s$ i $(m_{fx})_s$, koje ćemo kraće označiti sa My_3 i Mx_3.

$$My_3^2 = \sum_{i=1}^{n} \sin^2\nu_i \eta_{si}^2 + \lambda^2(Y_N - Y_1)^2 + \lambda_o^2(\sum_{i=1}^{n} \sin\nu_i)^2 \qquad .../5.80/$$

$$Mx_3^2 = \sum_{i=1}^{n} \cos^2\nu_i \eta_{si}^2 + \lambda^2(X_N - X_1)^2 + \lambda_o^2(\sum_{i=1}^{n} \cos\nu_i)^2 \qquad .../5.81/$$

Srednja slučajna greška merenja dužina zavisi od načina merenja dužina.

a) <u>Ako su dužine merene klasičnim priborom</u> tj, pomoću pantljike ili pomoću optičkog daljinomera, tada je srednja slučajna greška merenja dužine

$$m_{s_i}^2 = \mu_s^2 S_i \qquad \ldots/5.82/$$

srazmerna kvadratnom korenu iz merene dužine pa će srednje greške linearnih odstupanja biti

$$M_{y_3}^2 = \mu_s^2 \sum_{i=1}^{n} S_i \sin^2 \nu_i + \lambda^2 (Y_N - Y_1)^2 + \lambda_o^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \sin \nu_i\right)^2 \qquad \ldots/5.83/$$

$$M_{x_3}^2 = \mu_s^2 \sum_{i=1}^{n} S_i \cos^2 \nu_i + \lambda^2 (X_N - X_1)^2 + \lambda_o^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \cos \nu_i\right)^2 \qquad \ldots/5.84/$$

Za razvučen vlak dobija se

$$M_{y_3}^2 = \mu_s^2 S_{1N} \sin^2 \nu + \lambda^2 (Y_N - Y_1)^2 + \lambda_o^2 n^2 \sin^2 \nu \qquad \ldots/5.85/$$

$$M_{x_3}^2 = \mu_s^2 S_{1N} \cos^2 \nu + \lambda^2 (X_N - X_1)^2 + \lambda_o^2 n^2 \cos^2 \nu \qquad \ldots/5.86/$$

Kada se usvoji da razvučen vlak ide po pravcu Y-ose dobijaju se podužno i poprečno linearno odstupanje, odnosno njihove srednje greške

$$M_{l_3}^2 = \mu_s^2 S_{1N} + \lambda^2 S_{1N}^2 + n^2 \lambda_o \qquad \ldots/5.87/$$

$$M_{\varphi_3}^2 = 0 \qquad \ldots/5.88/$$

Kako prednji izrazi pokazuju, greške merenja dužina imaju uticaj samo na podužno odstupanje u poligonometrijskom vlaku, dok poprečno odstupanje od njih ne zavisi. Takodje su ova dva odstupanja medjusobno nezavisna.

Srednja greška ukupnog linearnog odstupanja dobiće se sumirajući dva poslednja izraza

$$M_3^2 = \mu_s^2 S_{1N} + \lambda^2 S_{1N}^2 + n^2 \lambda_o^2 \qquad \ldots/5.89/$$

Analizirajući izraze /5.81/ i /5.80/ dolazimo do sledećeg:

- slučajna greška merenja dužina, na odstupanja f_y i f_x ne deluje srazmerno merenoj dužini nego srazmerno projekciji te greške na koordinatne ose Y i X.

b) <u>Dužine merene elektronskim daljinomerom</u> imaju slučajne greške merenja dužina približno konstantne, tj. nezavisne od same dužine ali unapred neodredjenog znaka

$$\eta_{si}^2 = \mu_s^2 \qquad .../5.90/$$

Sa ovom zamenom izrazi /5.80/ i /5.81/ dobijaju oblik

$$M_{y_3}^2 = \mu_s^2 \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \nu_i + \lambda^2 (Y_N - Y_1)^2 + \lambda_o^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \sin \nu_i\right)^2 \qquad .../5.91/$$

$$M_{x_3}^2 = \mu_s^2 \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \nu_i + \lambda^2 (X_N - X_1)^2 + \lambda_o^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \cos \nu_i\right)^2 \qquad .../5.92/$$

I ovde se vidi da slučajna greška merenja dužine neće, na odstupanja f_y i f_x delovati celom svojom veličinom nego u onom iznosu kolika je projekcija te greške na koordinatne ose Y i X.

Usvojimo li da je vlak razvučen i da se poklapa sa prevcem Y-ose, tada se dobijaju srednje greške podužnog i poprečnog linearnog odstupanja

$$M_{\ell_3}^2 = n \mu_s^2 + \lambda^2 S_{1N}^2 + \lambda_o^2 n^2 \qquad .../5.93/$$

$$M_{\varphi_3}^2 = 0 \qquad .../5.94/$$

kao i srednja greška ukupnog linearnog odstupanja

$$M_3^2 = n \mu_s^2 + \lambda^2 S_{1N}^2 + \lambda_o^2 n^2 \qquad .../5.95/$$

gde je: n - broj strana u vlaku.

5.3.1. STRANE U VLAKU MERENE SU SA VIŠE PRIBORA I OD ISTO TOLIKOG BROJA OPAŽAČA

Uzmimo slučaj da su u jednom poligonometrijskom vlaku sa <u>n</u> strana, merenja strana vršena sa više (<u>k</u>) pribora i od strane istog tolikog broja opažača. Uz navedene pretpostavke izrazi /5.62/ i /5.63/ imaće sledeći izgled

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\nu_i dS_i=\sum_{i=1}^{n}\sin\nu_i\delta_i+\lambda_1\sum_{i=1}^{n_1}\Delta Y_i+\lambda_2\sum_{i=n+1}^{n_2}\Delta Y_i+\dots+\lambda_k\sum_{i=n_{k+1}}^{n}\Delta Y_i+\lambda_{o_1}\sum_{i=1}^{n}\sin\nu_i+\dots+\lambda_{o_k}\sum_{i=n_{k+1}}^{n}\sin\nu_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\nu_i dS_i=\sum_{i=1}^{n}\cos\nu_i\delta_i+\lambda_1\sum_{i=1}^{n_1}\Delta Y_i+\dots+\lambda_k\sum_{i=n_{k+1}}^{n}\Delta Y_i+\lambda_{o_1}\sum_{i=1}^{n}\cos\nu_i+\dots+\lambda_{o_k}\sum_{i=n_{k+1}}^{n}\cos\nu_i \qquad \dots./5.96/$$

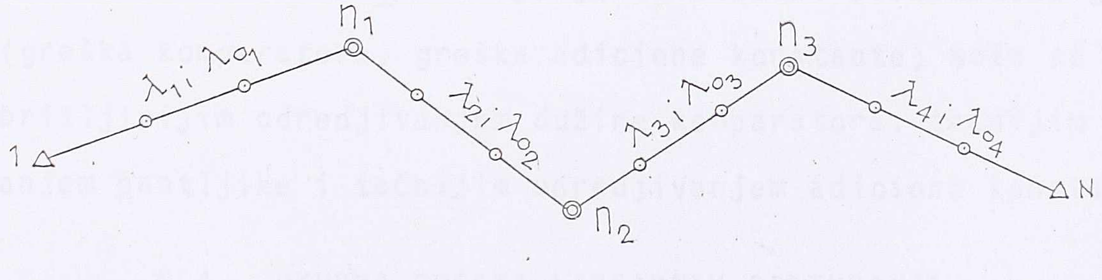
Koristeći izraze /5.96/ uz uvažavanje izraza /5.65/ može se naći srednja greška linearnih odstupanja nastala zbog uticaja grešaka u merenje dužina.

$$M_{Y_3}^2=\mu_S^2\sum_{i=1}^{n}\Delta Y_i\sin^2\nu_i+\lambda_1^2\Big(\sum_{i=1}^{n}\Delta Y_i\Big)^2+\dots+\lambda_k^2\Big(\sum_{i=n_{k+1}}^{n}\Delta Y_i\Big)^2+$$
$$+\lambda_{o_1}^2\Big(\sum_{i=1}^{n_1}\sin\nu_i\Big)^2+\dots+\lambda_{o_k}^2\Big(\sum_{i=n_{k+1}}^{n}\sin\nu_i\Big)^2 \qquad \dots./5.97/$$
$$M_{X_3}^2=\mu_S^2\sum_{i=1}^{n}\Delta X_i\cos^2\nu_i+\lambda_1^2\Big(\sum_{i=1}^{n_1}\Delta X_i\Big)^2+\dots+\lambda_k^2\Big(\sum_{i=n_{k+1}}^{n}\Delta X_i\Big)^2+$$
$$+\lambda_{o_1}^2\Big(\sum_{i=1}^{n_1}\sin\nu_i\Big)^2+\dots+\lambda_{o_k}^2\Big(\sum_{i=n_{k+1}}^{n}\cos\nu_i\Big)^2$$

Uticaj grešaka merenja dužina na ukupnu linearnu grešku biće

$$M_3^2=\mu_S^2 S_{1N}+\lambda_1^2 S_{1N}^2+\dots+\lambda_k^2 S_{n_kN}^2+\lambda_{o_1}^2 n_1^2+\lambda_{o_k}^2 n_k^2 \qquad \dots/5.98/$$

Kada se u /5.97/ usvoji da je direkcioni ugao strana vlaka 90^{0} podužna greška vlaka imaće istu vrednost kao ukupna greška vlaka dok će poprečna greška biti jednaka nuli



sl. 2.1

Prema poslednjem izrazu uticaj promenljivih sistematskih grešaka raste srazmerno zbiru kvadrata rastojanja izmedju krajnjih tačaka, kod kojih je vršena izmena pribora i opažača.

Pod pretpostavkom da je vlak razvučen, sa jednakim stranama i da je svakim priborom izmeren isti broj strana u vlaku, dobiće se jednostavniji izraz za uticaj grešaka merenja strana na ukupno linearno odstupanje ili podužno odstupanje

$$\lambda_i = \lambda ; \ \lambda_{oi} = \lambda_o ; \ S_{1,n_1} = S_{n_1,n_2} = \cdots = S_{n_k n} = \frac{S_{1N}}{K} \qquad .../5.99/$$

$$n_1 = n_2 = \cdots = \frac{n}{K} \quad S_{in_1}^2 = \frac{1}{K^2} S_{1N}^2 \qquad .../5.100/$$

$$M_S^2 = \mu_S^2 S_{1N} + \frac{1}{K} \lambda^2 S_{1N}^2 + \frac{1}{K} \lambda_o^2 n^2 \qquad .../5.101/$$

Na osnovi poslednjeg izraza, možemo zaključiti da uticaj promenljive i konstantne sistematske greške opada sa povećanjem broj promena uslova merenja. Zato je ovaj izraz važan za praksu.

Pošto je iz ekonomskih razloga nemoguće izvršiti veliki broj izmena uslova merenja, može se preporučiti, da merenja dužina u jednom smeru vrši jedna ekipa i to ujutru, a u drugom smeru druga ekipa i to posle podne.

Da bi se uticaj konstantne sistematske greške smanjio potrebno je imati vlakove sa dužim stranama, čime bi se smanjio broj izmerenih strana n. Smanjenje konstantne sistematske greške λ_o (greška komparatora, greška adicione konstante) može se postići brižljivijim odredjivanjem dužine komparatora, tačnijim komparisanjem pantljike i tačnijim odredjivanjem adicione konstante.

5.4. UKUPNA GREŠKA LINEARNIH ODSTUPANJA

Ukupna greška linearnih odstupanja može se dobiti kada se sumiraju uticaji pojedinih izvora grešaka. Da bi se dobio izraz podesan za praktičnu upotrebu potreno je koristiti one izraze pri kojima su uvažavane sledeće pretpostavke:

- da je trigonometrijska mreža sastavljena iz niza jednakostraničnih trouglova,

- da su trigonometrijske tačke pojedinačno odredjene te da su njihove koordinate nezavisne tj. da nisu u korelativnoj zavisnosti,

- da su koordinate jedne trigonometrijske ili poligonometrijske tačke, na koju se vlak oslanja, medjusobno nezavisne i

- da je poligonometrijski vlak razvučen i sa jednakim stranama.

Uz prednje pretpostavke dobija se

$$M_Y^2 = m_{fy}^2 = \frac{1}{4} S_{1N}^2 \cos^2\nu (m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_z}^2) + m_{Y_1}^2 + m_{Y_N}^2 + \cos\nu(\cos\nu_{A1} m_{Y_1}^2 + \cos\nu_{NB} m_{Y_N}^2) + \eta_\beta^2 S_{1N}^2 \cos^2\nu \frac{N(N+1)}{12(N-1)} + \lambda_{o_\beta}^2 S_{1N}^2 \cos^2\nu \frac{N}{4} + \mu_S^2 S_{1N} \sin^2\nu + \lambda^2 (Y_N - Y_1)^2 + \lambda_{o_S}^2 n^2 \sin^2\nu \qquad .../5.102/$$

$$M_X^2 = m_{fx}^2 = \frac{1}{4} S_{1N}^2 \sin^2\nu (m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_z}^2) + m_{X_1}^2 + m_{X_N}^2 + \sin\nu(\sin\nu_{A1} m_{X_1}^2 + \sin\nu_{NB} m_{X_N}^2) + \eta_\beta^2 S_{1N}^2 \sin^2\nu \frac{N(N+1)}{12(N-1)} + \lambda_{o_\beta}^2 S_{1N}^2 \sin^2\nu \frac{N}{4} + \mu_S^2 S_{1N} \cos^2\nu + \lambda^2 (X_N - X_1)^2 + \lambda_{o_S}^2 n^2 \cos^2\nu \qquad .../5.103/$$

Kada se usvoji da se pravac pružanja vlaka poklapa sa Y-osom dobijaju se srednje greške podužnog i poprečnog linearnog odstupanja

$$M_\ell^2 = m_{\ell_1}^2 + m_{\ell_N}^2 + \mu_S^2 S_{1N} + \lambda^2 S_{1N}^2 + \lambda_{o_S}^2 n^2 \qquad .../5.104/$$

$$M_\varphi^2 = \frac{1}{4} S_{1N}^2 (m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_z}^2) + m_{\varphi_1}^2 + m_{\varphi_N}^2 + (\sin\nu_{A1} m_{X_1}^2 + \cos\nu_{A1} m_{X_N}^2) + \eta_\beta^2 S_{1N}^2 \frac{N(N+1)}{12(N-1)} + \lambda_{o_\beta}^2 S_{1N}^2 \frac{N}{4} \qquad .../5.105/$$

Ako se kod izbora datih trigonometrijskih strana obrati pažnja da te strane budu približno upravne na dijagonalu vlaka dobiće se nešto jednostavniji izraz; taj izraz odgovara vezivanju vlaka za poligonometrijski vlak.

$$M_\ell^2 = m_{e_1}^2 + m_{e_N}^2 + \mu_S^2 S_{1N} + \lambda^2 S_{1N}^2 + n^2 \lambda_{o_S}^2 \qquad .../5.106/$$

$$M_\varphi^2 = \frac{1}{4} S_{1N}^2 (m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_z}^2) + m_{\varphi_1}^2 + m_{\varphi_N}^2 + $$
$$+ \eta_\beta^2 \cdot S_{1N}^2 \frac{N(N+1)}{12(N-1)} + \lambda_{o_\beta}^2 S_{1N}^2 \frac{N}{4} \qquad .../5.107/$$

Može se usvojiti da su greške datih tačaka približno iste i da je njihova elipsa grešaka bliska krugu poluprečnika $r = m_\xi$. Sa ovim pretpostavkama dobija se

$$M_\ell^2 = \mu_S^2 S_{1N} + \lambda^2 S_{1N}^2 + n^2 \lambda_{o_S}^2 + 2m_\xi^2 \qquad .../5.108/$$

$$M_\varphi^2 = \frac{1}{4} S_{1N}^2 (m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_z}^2) + 2m_\xi^2 + \eta_\beta^2 S_{1N}^2 \frac{N(N+1)}{12(N-1)} + \lambda_{o_\beta}^2 S_{1N}^2 \frac{N}{4} \qquad .../5.109/$$

Preostala sistematska greška merenja uglova λ_{o_β} vrlo je mala pogotovu ako u toku merenja nisu nastale neke veće promene. Sa dosta razloga taj se član može odbaciti jer se njegov uticaj manifestuje kao greška datih direkcionih uglova, a i za iste vrednosti grešaka $\lambda_{o_\beta} = \eta_\beta$ oko tri puta je manja od uticaja slučajne greške merenja uglova. Kada pored ovoga usvojimo oznake

$$\frac{m_{\nu_p}^2}{m_\beta^2} = b_p \quad ; \quad \frac{m_{\nu_z}^2}{m_\beta^2} = b_z \qquad .../5.110/$$

dobijaju se dosta uprošćene formule za greške podužnog i poprečnog linearnog odstupanja

$$M_\ell^2 = \mu_S^2 S_{1N} + \lambda^2 S_{1N}^2 + n^2 \lambda_{o_S}^2 + 2m_\xi^2 \qquad .../5.111/$$

$$M_\varphi^2 = m_\beta^2 \left(\frac{S_{1N}}{2}\right)^2 \left[\frac{N(N+1)}{3(N-1)} + b_p + b_z\right] + 2m_\xi^2 \qquad .../5.112/$$

Prethodni izrazi važe za slučaj kada su merenja vršena klasičnim priborom.

Ako se merenja vrše elektronskim daljinomerom, menja se samo član koji se odnosi na slučajne greške merenja dužina, pa se dobijaju sledeći izrazi

$$M_{\ell}^2 = \eta_s^2 n + \lambda^2 S_{1N}^2 + n^2 \lambda_{o_s}^2 + 2m_\xi^2 \qquad .../5.113/$$

$$M_\varphi^2 = m_\beta^2 \left(\frac{S_{1N}}{2}\right)^2 \left[\frac{N(N+1)}{3(N-1)} + b_p + b_z\right] + 2m_\xi^2 \qquad .../5.114/$$

Da bi se dobile granične greške - dozvoljena odstupanja, treba vrednosti srednjih grešaka pomnožiti sa nekim koeficijentom t koji zavisi od toga koliki procenat izvršenih merenja želimo da bude u granicama dozvoljenih grešaka. Tako se dobijaju

$$\Delta \ell = t\sqrt{\mu_s^2 S_{1N} + \lambda^2 S_{1N}^2 + n^2 \lambda_{o_s}^2 + 2m_\xi^2} \qquad .../5.115/$$

$$\Delta \varphi = t\sqrt{m_\beta^2 \left(\frac{S_{1N}}{2}\right)^2 \left[\frac{N(N+1)}{3(N-1)} + b_p + b_z\right] + 2m_\xi^2} \qquad .../5.116/$$

granice dozvoljenih odstupanja za podužnu i poprečnu grešku vlaka za slučaj merenja dužina klasičnim priborom ako se dužine mere elektronskim daljinomerom menja se izraz /5.115/ i dobija

$$\Delta \ell = t\sqrt{m_s^2 \cdot n + \lambda^2 S_{1N}^2 + \lambda_{o_s}^2 n + 2m_\xi^2} \qquad .../5.117/$$

VI DEO

MOGUĆNOST NALAŽENJA SISTEMATSKE I SLUČAJNE GREŠKE UGLOVNIH MERENJA NA OSNOVU UGLOVNIH ODSTUPANJA ZATVORENIH POLIGONA I POLIGONSKIH VLAKOVA

Uglovna odstupanja zatvorenim poligonima i poligonskim vlacima mogu nam pružiti informaciju o greškama merenja uglova i greškama datih direkcionih uglova.

6.1. Odstupanja zatovrenih poligona

Uglovna odstupanja u zatvorenim poligonima nastaju kao posledica delovanja isključivo grešaka u merenju uglova, kako slučajnih tako i sistematskih.

Za zatovreni poligon imali bi uglovno odstupanje

$$f_\beta = (n \pm 2)180^\circ - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_n) \qquad .../6.1/$$

Odgovarajuća srednja greška ovog uglovnog odstupanja bila bi:

$$m_{f_\beta}^2 = n \cdot \eta_\beta^2 + n^2 \lambda_{o\beta}^2 \qquad .../6.2/$$

Koristeći jednakost /6.2/ mogle bi se naći vrednosti η_β^2 i $\lambda_{o\beta}^2$ iz samo dva zatvorena poligona. Ova rešenja bila bi jednoznačna ali i veoma nepouzdana jer bi bila odredjena samo iz neophodnog broja podataka.

U mreži imamo na raspolaganju veći broj poligona, odakle svakako možemo dobiti objektivniju ocenu grešaka η_β^2 i $\lambda_{o\beta}^2$ Sistematske greške $\lambda_{o\beta_i}^2$ neće biti potpuno iste u svim poligonima nego će imati neku svoju srednju vrednost $\lambda_{o\beta}$. Razlika $\lambda_{o\beta} - \lambda_{o\beta_i}$ ponašaće se kao slučajne greške i utopiće se u slučajne greške. Takodje i srednje kvadratne slučajne greške η_{β_i} u svim poligonima neće biti iste. Za praksu je od interesa da se nadje njena srednja vrednost.

Prema tome, sa srednjim vrednostima η_β i $\lambda_{o\beta}$ neće za svaki vlak jednakost /6.2/ biti zadovoljena, nego će se pojaviti neke popravke

$$\begin{aligned} v_1 &= n_1\eta_\beta^2 + n_1^2\lambda_{o\beta}^2 - f_{\beta_1}^2 \\ v_2 &= n_2\eta_\beta^2 + n_2^2\lambda_{o\beta}^2 - f_{\beta_2}^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= n_n\eta_\beta^2 + n_n^2\lambda_{o\beta}^2 - f_{\beta n}^2 \end{aligned} \qquad .../6.3/$$

U izrazima /6.3/ pretpostavlja se da su svi uglovi u zatvorenom poligonu mereni jednim instrumentom i uz iste spoljne uslove, te da su greške η_β i $\lambda_{o\beta}$ za sve uglove iste.

Ukoliko u jednom poligonu izvršeno merenje uglova sa više (k) instrumenata i pod k spoljnih prilika onda će jednačine popravaka /6.3/ imati oblik

$$v_i = n_{1i}\eta_{\beta_1}^2 + n_{2i}\eta_{\beta_2}^2 + \cdots + n_{ki}\eta_{\beta k}^2 + n_{1i}^2\lambda_{o\beta_1}^2 + n_{2i}^2\lambda_{o\beta_2}^2 + \cdots + n_{ki}^2\lambda_{o\beta k}^2 - f_{\beta i}^2 \qquad .../6.4/$$

gde je: $n_{1i} + n_{2i} + \cdots + n_{ki} = n_i$

Za nalaženje vrednosti $\eta_{\beta i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ i $\lambda_{o\beta i}$ sada je neophodno imati najmanje 2k zatvorenih poligona.

PITANJE TEŽINA

Težine popravaka, koje ovde predstavljaju "merenja" mogu se odrediti polazeći od samih jednačina popravaka

$$v_i = n_i\eta_\beta^2 + n_i^2\lambda_{o\beta}^2 - f_\beta^2$$

odnosno srednja greška uglovnog odstupanja, prema /6.2/, bila bi

$$m_{f_{\beta i}}^2 = n_i\eta_\beta^2 + n_i^2\lambda_{o\beta}^2$$

Odavde se može naći težina ovog odstupanja

$$\frac{1}{p_{f_\beta}} = \eta_\beta^2\left[n_i + \left(\frac{\lambda_{o\beta}}{\eta_\beta}\right)^2 n_i^2\right] \qquad .../6.5/$$

Ako se usvoji da je η_β srednja greška jedinice težine dobiće se

$$\frac{1}{p_\beta} = n_i\left[1 + \left(\frac{\lambda_{o\beta}}{\eta_\beta}\right)^2 n_i\right] \qquad .../6.6/$$

Uz pretpostavku da je drugi član poslednjeg izraza zanemarljivo mali $\eta_\beta^2 \gg \lambda_{o\beta}^2$ može se uusvojiti da je

$$p_{f\beta} = \frac{1}{\eta_i} \qquad \text{.../6.7/}$$

Težine popravaka v_i, u kojima su slobodni članovi kvadrati odstupanja, odrediće se kao kvadrati težina odstupanja (saglasno izrazu /3.41/.).

Sa tim težinama mogu se odrediti vrednosti η_β i $\lambda_{o\beta}$ pa zatim, za težinu odstupanja f_β kao konačan izraz, usvojiti /6.6/

Ukoliko se za $\lambda_{o\beta}^2$ dobije negativna vrednost, ili nula, to će biti pokazatelj da nema delovanja sistematskih grešaka.

Sa sračunatom sistematskom greškom trebalo bi popraviti sve merene uglove u mreži. Zbog toga nije od interesa sračunati samo njen kvadrat odnosno njenu apsolutnu vrednost nego odrediti i njen znak. Iz statističke analize uglovnih odstupanja f_β u zatvorenim poligonima može se sistematski uticaj odrediti kao prvi moment rasporeda odstupanja. Pri tome će se dobiti vrednost sistematske greške, koja se neće mnogo razlikovati od one sračunate u /6.8/, a i njen znak. Vrednost sistematske greške, odredjena po metodi najmanjih kvadrata, imaće veću težinu od njene prosečne vrednosti. Za definitivnu vrednost sistematske greške usvojiće se vrednost dobijena po kvadratnoj metodi a znak će odgovarati znaku prvog momenta.

Direkcioni ugao zajedničke strane, može se popraviti za sistematski uticaj bez prethodnog popravljanja pojedinih merenih uglova. Posle ovoga uglove u poligonskim vlacima nije potrebno posebno popravljati za sistematski uticaj, jer će se pri uobičajenom računanju popravaka za merene uglove u poligonskim vlacima i ova popravka pravilno raspodeliti.

Pri strogom izravnanju poligonskog vlaka kod homogenizacije, težina, treba kao srednju grešku merenog ugla koristiti vrednost

$$m_\beta^2 = \eta_\beta^2 + \lambda_\beta^2 \qquad .../6.8/$$

Primera radi uzeto je 10 zatvorenih poligona poligonske mreže Vranja te je iz njih dobijeno $\eta_\beta^2 = 45,34$ $\eta_\beta = 6,737''$ i $\lambda_{o\beta}^2 = 2,252$ odnosno $\lambda_{o\beta} = 1,501''$. Znak sistematske greške, odredjen kao znak prvog momenta, bio je pozitivan.

6.2. ODSTUPANJE POLIGONSKIH VLAKOVA

Uglovno odstupanje poligonskih vlakova dobija se po formuli

$$f_\beta = \nu_z - \nu_p - \sum_{i=1}^{N} \beta_i \pm N \cdot 180^\circ \qquad .../6.9/$$

Pri ovome možemo usvojiti pretpostavke

- da su svi uglovi u poligonometrijskim vlakovima mereni jednim teodolitom i od strane jednog opažača, tj da su svi uglovi opterećeni istom srednjom slučajnom i sistematskom greškom,

- da su svi uglovi mereni nezavisno i

- da su dati direkcioni uglovi nezavisni i da za njih postoje sračunate srednje greške.

Polazeći od /6.9/ može se napisati

$$m_{f_\beta}^2 = N \cdot \eta_\beta^2 + N^2 \lambda_{o\beta}^2 + m_{\nu_p}^2 + m_{\nu_z}^2 \qquad .../6.10/$$

Koristeći izraze iz [3] može se napisati

$$m_{\nu_p}^2 = \eta_\beta^2 b_p \qquad m_{\nu_z}^2 = \eta_\beta^2 b_z \qquad .../6.11/$$

posle čega izraz /6.12/ dobija oblik

$$m_{f_\beta}^2 = (N + b_p + b_z)\, \eta_\beta^2 + N^2 \lambda_{o\beta}^2 \qquad .../6.12/$$

Koristeći isto rasudjivanje kao pri prelasku od /6.2/ na /6.3/ dobiće se

$$V_i = (N_i + b_{pi} + b_{zi})\eta_\beta^2 + N_i^2\lambda_{o\beta}^2 - f_{\beta i}^2$$ .../6.13/

odakle se primenom metode najmanjih kvadrata može odrediti η_β^2 i $\lambda_{o\beta}^2$.

Pri tome će težine pojedinih popravaka biti odredjene prema izrazu /6.7/, odnosno saglasno izrazu (3.41)

6.3. KRITERIJUM ZANEMARIVANJA DELOVANJA SISTEMATSKIH GREŠAKA

Poznato je da u jednačini

$$m_{f\beta}^2 = n\cdot\eta_\beta^2 + n^2\lambda_{o\beta}^2 = n\cdot\eta_\beta^2\left(1 + \frac{n\lambda_{o\beta}^2}{\eta_\beta^2}\right)$$

prvi deo izraza na desnoj strani znaka jednakosti predstavlja uticaj slučajnih grešaka merenja uglova, dok drugi deo predstavlja uticaj delovanja sistematskih grešaka.

Uvedimo smenu

$$\frac{1}{K^2} = \frac{n\lambda_{o\beta}^2}{\eta_\beta^2}$$ .../6.14/

pa će se dobiti

$$m_{f\beta}^2 = n\cdot\eta_\beta^2\left(1 + \frac{1}{K^2}\right)$$ .../6.15/

Kako je drugi sabirak u zagradi mali to se za približnu vrednost kvadratnog korena može usvojiti

$$m_{f\beta} = \eta_\beta\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2K}\right)$$ .../6.18/

Usvojili se da je k=7 dobija se

$$\frac{1}{2K^2} = \frac{1}{98}$$ .../6.19/

Sada se sa rizikom 1% odnosno verovatnoćom 99% može tvrditi da će biti

$$m_{f\beta} = \eta_\beta\sqrt{n}$$ .../6.20/

Za broj k koji je veći od 7 verovatnoća ovog tvrdjenja biće još veća, a rizik još manji.

Rešavajući jednakost /6.16/ dobija se

$$\lambda_{o\beta}^2 \leq \frac{\eta_\beta^2}{n \cdot k^2} \qquad \lambda_{o\beta} \leq \frac{\eta_\beta}{k\sqrt{n}} \qquad \text{.../6.21/}$$

Prema tome, granica do koje se može zanemariti uticaj sistematskih grešaka zavisi od broja k i od broja izmerenih uglova u jednom vlaku odnosno poligonu.

Koristeći dobijene podatke za mrežu vranja $\lambda_{o\beta}=1{,}''501$, $\eta_\beta^2=6{,}737$ za k=7 (rizik 1%) imaćemo

$$\sqrt{n} \leq \frac{\eta_\beta}{k\lambda_{o\beta}} \leq 1$$

odnosno, pri tim uslovima merenja, sistematske greške ispoljavaju svoj značajan uticaj i kod merenja jednog ugla.

Da bi se mogao zanemariti uticaj sistematskih grešaka kod računanja direkcionog ugla zajedničke strane čvorne tačke mora biti ispunjen uslov

$$\lambda_{o\beta} \leq \frac{\eta_\beta}{k\sqrt{n}} \qquad \text{.../6.22/}$$

Kada se dobije značajan uticaj sistematskih grešaka merenja uglova, potrebno je podrobnijom analizom tačnosti merenja uglova utvrditi moguće izvore grešaka. Ako se raspolaže podacima izvršenih merenja, moguće je vrednost konstantne sistematske greške uvrstiti kao nepoznatu u izravnanje te rezultate izravnanja dobiti oslobodjene uticaja sistematskih grešaka.

Odredjivanje slučajnih i sistematskih grešaka merenja uglova iz zatovrenih poligona može se vršiti samo ako su mereni uglovi, koji ulaze u pojedine poligone, medjusobno nezavisni. Ako medju uglovima postoji korelativna zavisnost, nju treba uzeti u obzir. Zato se kod korišćenja zatvorenih poligona moraju koristiti poligoni koji nemaju zajedničkih vlakova; pri tome se ne vodi računa o korelativnoj zavisnosti.

VII DEO

MOGUĆNOST ODREDJIVANJA SLUČAJNIH I SISTEMATSKIH GREŠAKA MERENJA DUŽINA I UGLOVA KAO I GREŠAKA DATIH VELIČINA NA OSNOVU PODUŽNIH I POPREČNIH LINEARNIH ODSTUPANJA U POLIGONOMETRIJSKIM VLACIMA

Linearna odstupanja u poligonometrijskim vlakovima mogu nam pružiti informaciju o uzrocima njihovog nastajanja. Pojedinačna odstupanja ne govore ništa o svom nastanku ali kada se izvrši analiza cele mreže može se izvesti zaključak koji su to uzroci, koji utiču na pojavu odstupanja i u kom iznosu. Uzroci pojave linearnih odstupanja jesu greške merenja uglova i dužina kao i greške datih veličina, odnosno greške početnog i završnog direkcionog ugla kao i greške koordinata datih tačaka.

Linearna odstupanja f_y i f_x po pravcu koordinatnih osa medjusobno su veoma zavisna. Ona nastaju kao rezultat istovremenog delovanja svih izvora grešaka, te se ne mogu iskoristiti za uočavanje uticaja pojedinih izvora grešaka.

Medjutim u ispruženim poligonometrijskim vlakovima računaju se i linearna odstupanja koja predstavljaju projekciju vektora ukupnog linearnog odstupanja na dijagonalu vlaka, podužno linearno odstupanje l, kao i projekciju ukupnog linearnog odstupanja na pravac koji je upravan na dijagonalu vlaka, poprečno linearno odstupanje φ.

7.1. ODREDJIVANJE SLUČAJNIH I SISTEMATSKIH GREŠAKA MERENJA DUŽINA KAO I PODUŽNIH GREŠAKA DATIH TAČAKA NA OSNOVU PODUŽNIH ODSTUPANJA U POLIGONOMETRIJSKIM VLACIMA

U ispruženim poligonometrijskim vlakovima podužno linearno odstupanje nastaje kao rezultat delovanja kako slučajnih i sistematskih grešaka merenja dužina tako i grešaka datih veličina tj. koordinata datih tačaka.

Greške merenja uglova i greške datih direkcionih uglova na podužno linearno odstupanje kod ispruženih vlakova nemaju nikakav uticaj.

Kod analiziranja srednjih grešaka podužnih linearnih odstupanja treba razlikovati dva slučaja:

1. Kada su dužine merene klasičnim priborom (pantljikom), kako je to pokazano u /5.111/

$$M_l^2 = \mu_s^2 S_{1N} + \lambda_s^2 S_{1N}^2 + \lambda_{os}^2 n^2 + 2m_\xi^2 \qquad .../7.1/$$

2. Kada je merenje dužina izvršeno elektronskim daljinomerom srednja greška podužnog linearnog odstupanja data je izrazom

$$M_l^2 = \mu_s^2 n + \lambda_s^2 S_{1N}^2 + \lambda_{os}^2 n^2 + 2m_\xi^2 \qquad .../7.2/$$

Kod slučaja merenja dužina klasičnim priborom, pretpostavljeno je da su sva merenja dužna opterećena:

- slučajnim greškama merenja μ_s koje idu sa korenom iz merene dužine,

- sistematskim greškama merenja $\lambda_s S_i$ koje su srazmerne merenoj dužini i

- konstantnom sistematskom greškom λ_{os} , koja ne zavisi od same dužine nego od pribora kojim je izvršeno merenje.

Navedene sistematske greške imaju u sebi, za svaku izmerenu dužinu, jedan konstantni deo i jedan promenljivi. Konstantan deo ispoljava se kao sistematska greška, dok se promenljivi deo sistematske greške utapa u slučajne greške i deluje, zajedno sa nom, kao slučajna greška.

Matematičko očekivanje kvadrata podužnog odstupanja biće prema /3.31/, jednako kvadratu srednje greške podužnog linearnog odstupanja

$$l_i^2 = M_{l_i}^2 \qquad .../7.3/$$

odnosno:

1. Za slučaj merenja dužina klasičnim priborom (pantljikom)

$$l_i^2 = \mu_S^2 S_{1N_i} + \lambda_{S_i}^2 S_{1N_i}^2 + \lambda_{os_i}^2 n_i^2 + 2m_{\xi_i}^2 \qquad .../7.4/$$

2. Za slučaj kada su dužine merene elektronskim daljinomerom

$$l_i^2 = \mu_S^2 n + \lambda_{S_i}^2 S_{1N_i}^2 + \lambda_{os_i}^2 n_i^2 + 2m_\xi^2 \qquad .../7.5/$$

Kada se za vrednosti pojedinih srednjih grešaka usvoji neka prosečna vrednost za čitavu mrežu jednačine /7.4/ i /7.5/ neće biti zadovoljene nego će se pojaviti neka popravka

$$v_i = \mu_S^2 S_{1N_i} + \lambda_S^2 S_{1N_i}^2 + \lambda_{os}^2 n_i^2 + 2m_\xi^2 - l_i^2 \qquad .../7.6/$$

za dužine koje su merene klasičnim priborom odnosno

$$v_i = \mu_S^2 n + \lambda_S^2 S_{1N_i}^2 + \lambda_{os}^2 n_i^2 + 2m_\xi^2 - l_i^2 \qquad .../7.7/$$

za dužine izmerene elektronskim daljinomerom.

Poslednje dve jednačine, odnosno čitav sistem jednačina koje su date izrazima /7.6/ i /7.7/ treba posmatrati kao jednačine popravaka u posrednom izravnanju. Primenom metode najmanjih kvadrata mogu se uz jednačina popravaka odrediti nepoznate greške

7.1.1. PITANJE TEŽINA

Težine pojedinih slobodnih članova u jednačinama popravaka mogu se odrediti kada se podje od izraza /7.1/ i /7.2/, a saglasno izrazu /3.41/

$$\frac{1}{p_l} = \mu_\xi^2 \left[S_{1N} + \left(\frac{\lambda_s}{\mu_s}\right)^2 S_{1N}^2 + \left(\frac{\lambda_{os}}{\mu_s}\right)^2 n^2 + 2\left(\frac{m_\xi}{\mu_s}\right)^2 \right] \qquad .../7.8/$$

$$\frac{1}{p_l} = \mu_\xi^2 \left[n + \left(\frac{\lambda_s}{\mu_s}\right)^2 S_{1N}^2 + \left(\frac{\lambda_{os}}{\mu_s}\right)^2 n^2 + 2\left(\frac{m_\xi}{\mu_s}\right)^2 \right] \qquad .../7.9/$$

Pod pretpostavkom da je slučajna greška merenja jedne strane dominantna u odnosu na ostale greške, odnosno da su ostale greške zanemarljivo male u odnosu na ovu grešku, može se za težinu podužnog linearnog odstupanja usvojiti

$$p_l = \frac{1}{S_{1N}} \qquad .../7.10/$$

$$p_l = \frac{1}{n} \qquad .../7.11/$$

Vrednosti težina date izrazima /7.10/ i /7.11/ važe za merenje dužina obavljena klasičnim priborom i elektronskim daljinomerom. Ove vrednosti mogu se usvojiti kao prvo približenje do stvarnih i objektivnih težina. Konačne vrednosti težina treba odrediti prema izrazima

$$\frac{1}{p_l} = S_{1N} + \left(\frac{\lambda_s}{\mu_s}\right)^2 S_{1N}^2 + \left(\frac{\lambda_{os}}{\mu_s}\right)^2 n^2 + 2\left(\frac{m_\xi}{\mu_s}\right)^2 \qquad .../7.12/$$

$$\frac{1}{p_l} = n + \left(\frac{\lambda_s}{\mu_s}\right)^2 S_{1N}^2 + \left(\frac{\lambda_{os}}{\mu_s}\right)^2 n^2 + 2\left(\frac{m_\xi^2}{\mu_s}\right) \qquad .../7.13/$$

tek pošto se sračunaju vrednosti srednjih grešaka slučajnih, sistematskih i datih veličina.

7.2. ODREDJIVANJE GREŠAKA MERENJA UGLOVA I POPREČNIH GREŠAKA DATIH TAČAKA NA OSNOVU POPREČNIH ODSTUPANJA POLIGONOMETRIJSKIH VLAKOVA

Slučajne greške merenja uglova u ispruženim poligonometrijskim vlakovima imaju uticaj na poprečno linearno odstupanje vlaka. Pored toga na poprečno linearno odstupanje vlaka imaju uticaj greške datih direkcionih uglova kao greške koordinata datih tačaka, i to onaj deo položajne greške datih tačaka koji predstavlja njenu projekciju upravnu na pravac vlaka.

Kod glavnih poligonometrijskih vlakova, kao početni i završni direkcioni ugao vlaka, koriste se direkcioni uglovi datih trigonometrijskih strana. Može se usvojiti da ovi uglovi u jednoj mreži imaju približno ujednačenu tačnost. Kod sporednih vlakova početni i završni direkcioni ugao su direkcioni uglovi poligonometrijskih strana koji, kako je poznato, imaju u mreži različitu tačnost zavisno od položaja strane u vlaku. Tačnost, odnosno težina ovih direkcionih uglova, može se prema [3] izraziti preko koeficijenata b_p i b_z.

Sistematske greške merenja uglova u poligonometrijskom vlaku, dobrim delom se otklanjaju kroz popravke merenih uglova pri raspodeli uglovnog odstupanja f_β . Preostali deo sistematskih grešaka jednim delom utapa se u slučajne greške dok jedan deo deluje kao greške datih direkcionih uglova.

Na taj način u izrazu /5.112/ za srednju grešku poprečnog linearnog odstupanja, pojavljuje se samo uticaj slučajnih grešaka merenja uglova i uticaj grešaka koordinata datih tačaka

$$M_\varphi^2 = \eta_\beta^2 \left(\frac{S_{1N}}{2}\right)^2 \left[\frac{N(N+1)}{3(N-1)} + b_p + b_z\right] + 2m_\xi^2 \qquad \ldots/7.14/$$

Kako je matematičko očekivanje kvadrata poprečnog linearnog odstupanja prema /3.31/, jednako kvadratu njegove srednje greške to se za i- ti vlak može napisati da je

$$\varphi_i^2 = \eta_{\beta i} \left(\frac{S_{1N_i}}{2}\right)^2 \left[\frac{N(N+1)}{3(N-1)} + b_p + b_z\right] + 2m_\xi^2 \qquad \ldots/7.15/$$

Kada se usvoji pretpostavka da svi mereni uglovi u vlakovima imaju istu tačnost odnosno istu srednju grešku η_β i da sve date tačke u svim vlacima imaju istu tačnost koordinata po obema osama m_ξ to za ove srednje greške neće biti ispunjena jednakost /4.15/ nego će se pojaviti neka odstupanja

$$v_i = \eta^2_{\beta_i}\left(\frac{S_{1N}}{2}\right)^2\left[\frac{N_i(N_i+1)}{3(N_i-1)}+b_{p_i}+b_{z_i}\right]+2m^2_\xi \qquad .../7.16/$$

Ovih jednačina odstupanja biće onoliko koliko ima i ispruženih vlakova u mreži.

Primenom metode najmanjih kvadrata, može se od ovih jednačina odstupanja formirati sistem normalnih jednačina od dve nepoznate, čijim će se rešavanjem dobiti nepoznate srednje greške

7.2.1. PITANJE TEŽINA

Jednačine popravaka /7.16/ posmatrane kao greške "merenja" nemaju jednake težine. Njihove težine mogu odrediti polazeći od izraza / .14/ a saglasno izrazu (3.41)

$$M^2_\varphi = \eta^2_\beta\left(\frac{S_{1N}}{2}\right)\left[\frac{N(N+1)}{3(N-1)}+b_p+b_z\right]+2m^2_\xi$$

$$\frac{1}{p_\varphi} = \eta^2_\beta\left\{S^2_{1N}\left[\frac{N(N+1)}{12(N-1)}+\frac{b_p}{4}+\frac{b_z}{4}\right]+2\left(\frac{m_\xi}{\eta_\beta}\right)^2\right\} \qquad .../7.17/$$

Kada se iz velikog broja vlakova odrede vrednosti nepoznatih η^2_β i m^2_ξ može se naći vrednost /7.17/.

Ako su greške datih koordinata zanemarljivo male može se težina poprečnog linearnog odstupanja naći kao

$$\frac{1}{p_\varphi} = S^2_{1N}\left[\frac{N(N+1)}{3(N-1)}+\frac{b_p}{4}+\frac{b_z}{4}\right] \qquad .../7.18/$$

Koristeći izraze /7.12/, /7.13/ i /7.17/ dobiće se težine linearnih odstupanja, u kojima će biti sadržan uticaj grešaka merenja i uticaj grešaka datih veličina.

Saglasno jednačini /3.41/ mogu se naći težine jednačina popravaka $p_v = (p_f)^2$.

VIII DEO

SREDNJA GREŠKA POLOŽAJA ČVORNE TAČKE

Čvorna tačka u poligonometrijskoj mreži veoma često se koristi. Naročito, u poslednje vreme, kod premera naselja i gradova, u retku trigonometrijsku mrežu, umeće se, umesto trigonometrijskih tačaka, grupa čvornih tačaka. Zato je potrebno objektivniji uvid u tačnost položaja čvornih tačaka. Pri tome je važno sagledati sve pojedine uticaje kako slučajnih i sistematskih grešaka merenja dužina, slučajnih grešaka uglova, tako i uticaje grešaka koordinata datih tačaka.

Koordinate čvorne tačke, kako je poznato, računaju se kao opšta aritemtička sredina:

$$Y=\frac{Y_1P_1+Y_2P_2+\cdots Y_KP_K}{[p]}$$
$$X=\frac{X_1P_1+X_2P_2+\cdots X_KP_K}{[p]} \qquad \ldots/8.1/$$

gde je:

$$Y_1=Y_A+\sum_{i=1}^{n_1} S_i\sin\nu_i \qquad X_1=X_A+\sum_{i=1}^{n_1} S_i\cos\nu_i$$
$$Y_2=Y_B+\sum_{i=1}^{n_2} S_i\sin\nu_i \qquad X_2=X_B+\sum_{i=1}^{n_2} S_i\cos\nu_i$$
$$Y_k=Y_K+\sum_{i=1}^{n_K} S_i\sin\nu_i \qquad X_k=X_K+\sum_{i=1}^{n_K} S_i\cos\nu_i$$

Predpostavićemo da su rezultati merenja dužina opterećeni slučajnim greškama, sistematskim greškama srazmernim dužini i konstantnom sistematskom greškom:

$$S_i'=S_i+\lambda S_i+\lambda_0 \qquad \ldots/8.2/$$

Koristeći prethodne izraze mogu se naći diferencijali koordinatnih razlika

$$dy=\frac{p_1}{[p]}dY_A+\frac{p_2}{[p]}dY_B+\cdots+\frac{p_K}{[p]}dY_K+\frac{p_1}{[p]}\sum_{i=1}^{n_1}\sin\nu_i dS_i+$$

$$+\frac{p_2}{[p]}\sum_{i=1}^{n_2}\sin\nu_i dS_i+\cdots+\frac{p_K}{[p]}\sum_{i=1}^{n_K}\sin\nu_i dS_i+\lambda\left\{\frac{p_1}{[p]}\sum_{i=1}^{n_1}S_i\sin\nu_i+\right.$$

$$+\frac{p_2}{[p]}\sum_{i=1}^{n_2}S_i\sin\nu_i+\cdots+\left.\frac{p_K}{[p]}\sum_{i=1}^{n_K}S_i\sin\nu_i\right\}+\lambda_o\left\{\frac{p_1}{[p]}\sum_{i=1}^{n_1}\sin\nu_i+\right.$$

$$+\frac{p_2}{[p]}\sum_{i=1}^{n_2}\sin\nu_i+\cdots+\left.\frac{p_K}{[p]}\sum_{i=1}^{n_K}\sin\nu_i\right\}+\frac{p_1}{[p]}\sum_{i=1}^{n_1}(X-X_i)d\beta_i+$$

$$+\frac{p_2}{[p]}\sum_{i=1}^{n_2}(X-X_i)d\beta_i+\cdots+\frac{p_K}{[p]}\sum_{i=1}^{n_K}(X-X_i)d\beta_i+$$

$$+\frac{p_1}{[p]}(X-X_A)d\nu_{p_1}+\frac{p_2}{[p]}(X-X_B)d\nu_{p_2}+\cdots+\frac{p_K}{[p]}(X-X_K)d\nu_{p_K}$$

.../8.3/

$$dx=\frac{p_1}{[p]}dX_A+\frac{p_2}{[p]}dX_B+\cdots+\frac{p_K}{[p]}dX_K+\frac{p_1}{[p]}+\sum_{i=1}^{n_1}\cos\nu_i dS_i+$$

$$+\cdots+\frac{p_K}{[p]}\sum_{i=1}^{n_K}\cos\nu_i dS_i+\lambda\left\{\frac{p_1}{[p]}\sum_{i=1}^{n_1}S_i\cos\nu_i+\frac{p_2}{[p]}\sum_{i=1}^{n_2}\cos\nu_i S_i+\right.$$

$$+\cdots+\left.\frac{p_K}{[p]}\sum_{i=1}^{n_K}S_i\cos\nu_i\right\}+\lambda_o\left\{\frac{p_1}{[p]}\sum_{i=1}^{n_1}\cos\nu_i+\frac{p_2}{[p]}\sum_{i=1}^{n_2}\cos\nu_i+\right.$$

$$+\cdots+\left.\frac{p_K}{[p]}\sum_{i=1}^{n_K}\cos\nu_i\right\}-\frac{p_1}{[p]}\sum_{i=1}^{n_1}(Y-Y_i)d\beta_i-\frac{p_2}{[p]}\sum_{i=1}^{n_2}(Y-Y_i)d\beta_i-$$

$$-\cdots-\frac{p_K}{[p]}\sum_{i=1}^{n_K}(Y-Y_i)d\beta_i-\frac{p_1}{[p]}(Y-Y_1)d\nu_{p_1}-\frac{p_2}{[p]}(Y-Y_B)d\nu_{p_2}-$$

$$-\cdots-(Y-Y_K)d\nu_{p_K}$$

.../8.4/

Radi daljeg jednostavnijegpisanja usvojićemo sledeće oznake:

$$a_i=\frac{p_i}{[p]}\ ;\ d_1=\sum_{j=1}^{K}\frac{p_j}{[p]}\sum_{i=1}^{n_j}S_i\sin\nu_i\ ;\ e_2=\sum_{j=1}^{K}\frac{p_j}{[p]}\sum_{i=1}^{n_j}\cos\nu_i\ ;$$

$$d_2=\sum_{i=1}^{K}\frac{p_j}{[p]}\sum_{i=1}^{n_j}S_i\cos\nu_i\ ;\ e_1=\sum_{j=1}^{K}\frac{p_j}{[p]}\sum_{i=1}^{n_j}\sin\nu_i$$

.../8.5/

posle čega imamo:

$$dy=dY_A\cdot a_1+a_2dY_B+\cdots+a_KdY_K+a_1\sum_{i=1}^{n_1}\sin\nu_i dS_i+$$

$$+\cdots+a_K\sum_{i=1}^{n_K}\sin\nu_i dS_i+\lambda d_1+\lambda_o e_1+a_1\sum_{i=1}^{n_1}(X-X_i)d\beta_i+\cdots+$$

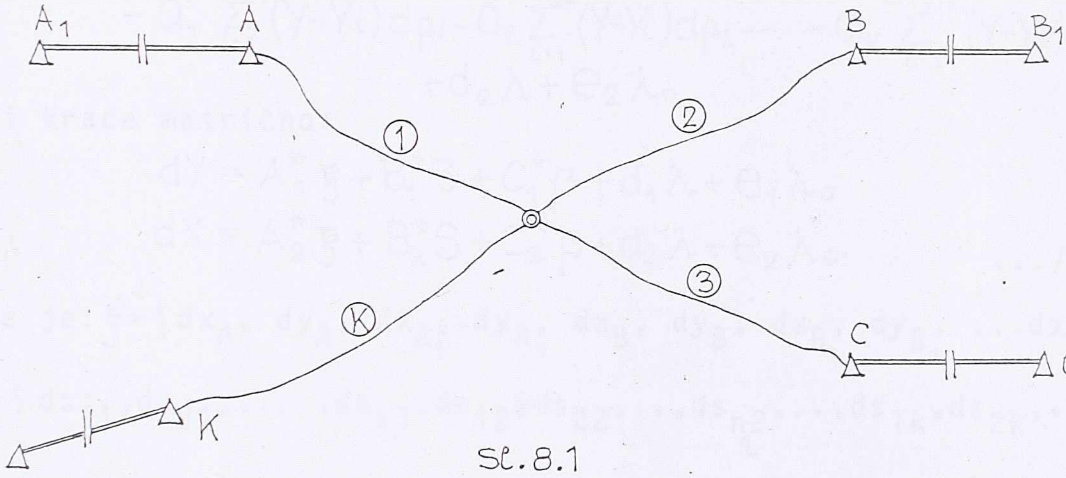
$$+a_K\sum_{i=1}^{n_K}(X-X_i)d\beta_i+a_1(X-X_A)d\nu_{p_1}+a_2(X-X_B)d\nu_{p_2}+$$

.../8.3a/

$$+a_K(X-X_K)d\nu_{p_K}$$

$$dX = a_1 dX_A + a_2 dX_B + \cdots + a_K dX_K + a_1 \sum_{i=1}^{n_1} \cos\nu_i dS_i + \cdots + a_K \sum_{i=1}^{n_K} \cos\nu_i dS_i +$$
$$+ \lambda d_2 + \lambda_o e_2 - a_1 \sum_{i=1}^{n_1} (Y-Y_i) d\beta_i - \cdots - a_K \sum_{i=1}^{n_K} (Y-Y_i) d\beta_i -$$
$$- a_1 (Y-Y_A) d\nu_\beta - a_2 (Y-Y_B) d\nu_{P_2} - \cdots - a_K (Y-Y_K) d\nu_{P_K} \qquad \ldots /8.4a/$$

Na grešku položaja čvorne tačke ne utiču samo date tačke na koje se vlakovi, koji se sustiču u čvornoj tački, neposredno oslanjaju nego i date tačke ka kojima su opažani vezni uglovi /Sl. 8.1/



Sl.8.1

Prema [18] diferencionih uglova mogu se izraziti u funkciji koordinata krajnih tačaka:

$$d\nu_i^j = a_{ij} dX_i + b_{ij} dY_i + a_{ji} dX_j + b_{ji} dY_j \qquad \ldots /8.6/$$

posle čega se dobija:

$$dY = dX_A\, a_1 \cdot a_{AA_1}(X-X_A) + dY_A\, a_1 [1 + b_{AA_1}(X-X_A)] +$$
$$+ dX_{A_1} a_1 a_{A_1A}(X-X_A) + dY_{A_1} a_1 b_{A_1A}(X-X_A) +$$
$$+ dX_B\, a_2 a_{BB_1}(X-X_B) + dY_B\, a_2 [b_{BB_1}(X-X_B) + 1] +$$
$$+ dX_{B_1} a_2 a_{B_1B}(X-X_B) + dY_{B_1} a_2 b_{B_1B}(X-X_B) +$$
$$\text{-------------------------------------} \qquad \ldots /8.7/$$
$$+ dX_K a_K a_{KK_1}(X-X_K) + dY_K a_K [1 + b_{KK_1}(X-X_K)] +$$
$$+ dX_{K_1} a_K a_{K_1K}(X-X_K) + dY_{K_1} a_K b_{K_1K}(X-X_K) +$$
$$+ a_1 \sum_{i=1}^{n_1} \sin\nu_i dS_i + a_2 \sum_{i=1}^{n_2} \sin\nu_i dS_i + \cdots + a_K \sum_{i=1}^{n_K} \sin\nu_i dS_i +$$
$$+ a_1 \sum_{i=1}^{n_1} (X-X_i) d\beta_i + a_2 \sum_{i=1}^{n_2} (X-X_i) d\beta_i + \cdots + a_K \sum_{i=1}^{n_K} (X-X_i) d\beta_i$$
$$+ d_1 \lambda + e_1 \lambda_o$$

$$\begin{aligned}dx = & dX_A a_1[1-a_{AA_1}(Y-Y_A)]-dY_A a_1 b_{AA_1}(Y-Y_A)-\\ & -dX_{A_1}a_1 a_{A_1A}(Y-Y_A)-dY_{A_1}a_1 b_{A_1A}(Y-Y_A)+\\ & +dX_B a_2[1-a_{BB_1}(Y-Y_B)]-dY_B a_2 b_{BB_1}(Y-Y_B)-\\ & -dX_{B_1}a_2 a_{B_1B}(Y-Y_B)-dY_{B_1}a_2 b_{B_1B}(Y-Y_B)+\\ & ------------------------\\ & +dX_K a_K[1-a_{KK_1}(Y-Y_B)]-dY_K a_K b_{KK_1}(Y-Y_K)-\\ & -dX_{K_1}a_K a_{K_1K}(Y-Y_K)-dY_{K_1}a_K b_{K_1K}(Y-Y_K)+\\ & +a_1\sum_{i=1}^{n_1}\cos\nu_i dS_i+a_2\sum_{i=1}^{n_2}\cos\nu_i dS_i+\dots+a_K\sum_{i=1}^{n_K}\cos\nu_i dS_i-\\ & -a_1\sum_{i=1}^{n_1}(Y-Y_i)d\beta_i-a_2\sum_{i=1}^{n_2}(Y-Y_i)d\beta_i-\dots-a_K\sum_{i=1}^{n_K}(Y-Y_i)d\beta_i+\\ & +d_2\lambda+e_2\lambda_o\end{aligned} \qquad .../8.8/$$

ili kraće matrično:

$$\begin{aligned}dY &= A_1^*\xi+B_1^*S+C_1^*\beta+d_1\lambda+e_1\lambda_o\\ dX &= A_2^*\xi+B_2^*S+C_2^*\beta+d_2\lambda+e_2\lambda_o\end{aligned} \qquad .../8.9/$$

gde je: $\xi^* = \| dx_A, dy_A, dx_{A_1}, dy_{A_1}, dx_B, dy_B, dx_{B_1}, dy_{B_1}, \dots dx_K, dy_K, dx_{K_1}, dy_{K_1}$

$S^* = \| ds_{11}, ds_{21}, \dots, ds_{n_1 1}, ds_{12}, ds_{22}, \dots, ds_{n_2 2}, \dots, ds_{1k}, ds_{2k}, \dots, ds_{n_k k} \|$ /8.11/

$$B_1^* = \left\| \begin{matrix} a_1\sin V_{11},\dots, a_1\sin V_{n_1 1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots a_2\sin V_{12},\dots, a_2\sin V_{n_2 2} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{matrix} \right\| \qquad .../8.12/$$

$a_k\sin_k\nu, \dots, a_k\sin V_{n_k k}$

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} a_1 a_{AA_1}(X-X_A) \\ a_1[1+b_{AA_1}(X-X_A)] \\ a_1 a_{A_1A}(X-X_A) \\ a_1 b_{A_1A}(X-X_A) \\ a_2[1+b_{BB_1}(X-X_B)] \\ a_2 a_{B_1B}(X-X_B) \\ a_2 b_{B_1B}(X-X_B) \\ ------ \end{matrix} \right\| \qquad A_2 = \left\| \begin{matrix} a_1[1-a_{AA_1}(Y-Y_A)] \\ -a_1 b_{AA_1}(Y-Y_A) \\ a_1 a_{A_1A}(Y-Y_A) \\ a_2[1-a_{BB_1}(Y-Y_B)] \\ -a_2 b_{BB_1}(Y-Y_B) \\ -a_2 a_{B_1B}(Y-Y_B) \\ -a_2 b_{B_1B}(Y-Y_B) \\ ------ \end{matrix} \right\| \qquad .../8.10/$$

$$A_1=\left\|\begin{matrix} a_k a_{kk_1}(X-X_k)\\ a_k[1+b_{kk_1}(X-X_k)].\\ a_k a_{k_1k}(X-X_k)\\ a_k b_{k_1k}(X-X_k)\end{matrix}\right\| \quad A_2=\left\|\begin{matrix} a_k[1-a_{kk_1}(Y-Y_k)]\\ -a_k b_{kk_1}(Y-Y_k)\\ -a_k a_{k_1k}(Y-Y_k)\\ -a_k b_{k_1k}(Y-Y_k)\end{matrix}\right\| \quad \ldots\ldots(8.10)$$

$$B_2^*=\left\|\begin{matrix} a_1\cos V_{11},\ldots,a_1\cos V_{n1},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_2\cos V_{12},\ldots,a_2\cos V_{n_22},\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_k\cos V_{1k},\ldots,a_k\cos V_{n_kk}\end{matrix}\right\| \quad \ldots/8.13/$$

$$\beta^*=\left\|\begin{matrix} d\beta_{11}\ \ d\beta_{21}\ldots d\beta_{n_11}\ -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!- \\ -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\ d\beta_{12},\ d\beta_{22}\ldots\ldots d\beta_{n_22}\ -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!- \\ -\!- \\ -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\ d\beta_{1k}\ \ d\beta_{2k}\ldots d\beta_{n_kk}\end{matrix}\right\| \quad \ldots/8.14/$$

$$C_1^*=\left\|\begin{matrix} a_1(X-X_{11})\,a_1(X-X_{21})\cdots a_1(X-X_{n_11})\ -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!- \\ -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\ a_2(X-X_{12})\cdots a_2(X-X_{n_22})\ -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!- \\ -\!- \\ -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\ a_k(X-X_{1k})\cdots a_k(X-X_{n_kk})\ -\!- \end{matrix}\right\| \quad \ldots./8.15/$$

$$C_2^*=\left\|\begin{matrix} a_1(Y-Y_{11})\ldots\ldots a_1(Y-Y_{n_11})\ -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!- \\ -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\ a_2(Y-Y_{12})\cdots a_2(Y-Y_{n_22})\ -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!- \\ -\!- \\ -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\ a_k(Y-Y_{1k})\cdots a_k(Y-Y_{n_kk})\ -\!- \end{matrix}\right\| \quad \ldots./8.16/$$

Polazeći od izraza /8.9/, mogu se na osnovu /17/ neposredno napisati izrazi za srednje greške koordinata čvorne tačke:

$$m_y^2 = \mu_\xi^2 A_1^* Q_\xi A_1 + \mu_S^2 B_1^* Q_S B_1 + \eta_\beta^2 C_1^* Q_{\beta'} C_1 + d_1^2 \lambda^2 + e_1^2 \lambda_o^2 \qquad .../8.17/$$

$$m_x^2 = \mu_\xi^2 A_2^* Q_\xi A_2 + \mu_S^2 B_2^* Q_S B_2 + \eta_\beta^2 C_2^* Q_{\beta'} C_2 + d_2^2 \lambda^2 + e_2^2 \lambda_o^2 \qquad .../8.18/$$

Matrica Q_ξ dobija se prilikom izravnanja triangulacije, Q_S je matrica recipročnih vrednosti težina a njen izgled zavisiće od toga da li su dužine merene klasičnim priborom ili elektronskim daljinomerom. Matrica $Q_{\beta'}$ definiše zavisnost izravnatih uglova u vlaku.

Poslednji izrazi pružaju pouzdanu i kompletnu ocenu tačnosti ali bi, zbog svoje glomaznosti i obimnosti, teško našli primenu u praksi. Njihova primena iziskivala bi obimnija računanja nego računanje koordinata tačaka. Oni se mogu uprostiti uz sledeće pretpostavke:

- da su date tačke, kao i dati direkcioni uglovi medjusobno nezavisni,

- da date tačke na koje se vlakovi neposredno ne oslanjaju, nego su ka njima opažani vezni uglovi, nemaju uticaja na tačnost položaja čvorne tačke.

Uz prednje predpostavke, a polazeći od /8.3a/ i /8.4a/ mogu se naći srednje greške koordinata čvorne tačke. Osim toga posmatraće se izdvojeno uticaji pojedinih izvora grešaka na tačnost položaja čvorne tačke.

8.1 UTICAJ GREŠAKA KOORDINATA DATIH TAČAKA

Ovaj uticaj, radi kraćeg pisanja, označimo sa:

$$m_{y_1}^2 = a_1^2 m_{y_A}^2 + a_2^2 m_{y_B}^2 + \cdots + a_K^2 m_{y_K}^2 + a_1^2 (X - X_A)^2 m_{\nu_{P_1}}^2 +$$
$$+ a_2^2 (X - X_B)^2 m_{\nu_{P_2}}^2 + \cdots + a_K^2 (X - X_K)^2 m_{\nu_{P_K}}^2 \qquad .../8.20/$$

$$m_{x_1}^2 = a_1^2 m_{x_A}^2 + a_2^2 m_{x_B}^2 + \cdots + a_k^2 m_{x_k}^2 + a_1^2 (Y-Y_A)^2 m_{\nu_{p_1}}^2 +$$
$$+ a_2^2 (Y-Y_B)^2 m_{\nu_{p_2}}^2 + \cdots + a_k^2 (Y-Y_K)^2 m_{\nu_{p_k}}^2 \qquad ../8.21/$$

odnosno uz smene /8.5/

$$m_{y_1}^2 = \frac{1}{[p]^2} \sum_{i=A,B...K} p_i^2 m_{y_i}^2 + \frac{1}{[p]^2} \sum_{i=A,B...K} (X-X_i)^2 p_i^2 m_{\nu_{p_i}}^2 \qquad .../8.20a/$$

$$m_{x_1}^2 = \frac{1}{[p]^2} \sum_{i=A,B...C} p_i^2 m_{x_i}^2 + \frac{1}{[p]^2} \sum_{i=A,B...K} (Y-Y_i)^2 p_i^2 m_{\nu_{p_i}}^2 \qquad .../8.21a/$$

Pored toga predpostavimo da su težine svih vlakova iste

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_K = p \qquad .../8.22/$$

kao i da su date tačke iste tačnosti

$$m_{y_A} = m_{y_B} = \cdots = m_{y_K} = m_y \qquad .../8.23/$$

$$m_{x_A} = m_{x_B} = \cdots = m_{x_K} = m_x \qquad .../8.24/$$

pa se dobija

$$m_{y_1}^2 = \frac{1}{K} m_y^2 + \frac{1}{K^2} m_\nu^2 \sum_{i=A,B...K} (X-X_i)^2 \qquad .../8.25/$$

$$m_{x_1}^2 = \frac{1}{K} m_x^2 + \frac{1}{K^2} m_\nu^2 \sum_{i=A,B...K} (Y-Y_i)^2$$

$$m_1^2 = \frac{1}{K} (m_x^2 + m_y^2) + \frac{1}{K^2} m_\nu^2 \sum_{i=A,B...K} S_i^2 \qquad .../8.26/$$

Ako su dužine dijagonala svih vlakova koji se u čvornoj tački sustiču, jednake

$$S_A = S_B = \cdots = S_K = S \qquad .../8.27/$$

dobiće se jednostavniji izraz za srednju grešku položaja čvorne tačke

$$m_1^2 = \frac{1}{K} (m_x^2 + m_y^2) + \frac{1}{K} S^2 \cdot m_\nu^2 \qquad .../8.28/$$

Date veličine ispoljavaju svoj uticaj na položaj čvorne tačke. Prema /8.28/ ovaj uticaj smanjivaće se sa povećanjem broja vlakova koji se u čvornoj tački sustiču. Greške datih direkcionih uglova imaće manji uticaj na položaj čvorne tačke kada se u čvornoj tački sustiče više vlakova. Što su dužine dijagonala vlakova veće, utoliko će dati direkcioni uglovi ispoljavati više svoj uticaj.

8.2 UTICAJ GREŠAKA MERENJA DUŽINA

Na položaj čvorne tačke utiču i greške merenja dužina. Ove greške mogu se podeliti na slučajne, sistematske srazmerne dužini i konstantne sistematske greške. Slučajne greške merenja dužina, zavisno od sredstva sa kojim se vrši merenje, mogu delovati po zakonu:

$$\eta_s = \mu_s \sqrt{s} \qquad \dots/8.29/$$

ili

$$\eta_s = \mu_s \qquad \dots/8.30/$$

8.2.1. UTICAJ SLUČAJNIH GREŠAKA MERENJA DUŽINA

Deo greške koordinata čvorne tačke koji potiče od slučajnih grešaka merenja dužina označimo sa m_{y_2} i m_{x_2}, a dobićemo ga polazeći od /8.3a/ i /8.4a/

$$\begin{aligned} m_{y_2}^2 = {} & a_1^2(\sin^2\nu_{11}\eta_{s11}^2 + \sin^2\nu_{21}\eta_{s21}^2 + \dots + \sin^2\nu_{n_1 1}\eta_{sn_1 1}^2) + \\ & + a_2^2(\sin^2\nu_{12}\eta_{s12}^2 + \sin^2\nu_{22}\eta_{s22}^2 + \dots + \sin^2\nu_{n_2 2}\eta_{sn_2 2}^2) + \\ & + a_k^2(\sin^2\nu_{1k}\eta_{s1k}^2 + \sin^2\nu_{2k}\eta_{s2k}^2 + \dots + \sin^2\nu_{n_k k}\eta_{sn_k k}^2) \end{aligned} \qquad \dots/8.31/$$

$$\begin{aligned} m_{x_2}^2 = {} & a_1^2(\cos^2\nu_{11}\eta_{s11}^2 + \cos^2\nu_{21}\eta_{s21}^2 + \dots + \cos^2\nu_{n_1 1}\eta_{sn_1 1}^2) + \\ & + a_2^2(\cos^2\nu_{12}\eta_{s12}^2 + \cos^2\nu_{22}\eta_{s22}^2 + \dots + \cos^2\nu_{n_2 2}\eta_{sn_2 2}^2) + \\ & + a_k^2(\cos^2\nu_{1k}\eta_{s1k}^2 + \cos^2\nu_{2k}\eta_{s2k}^2 + \dots + \cos^2\nu_{n_k k}\eta_{sn_k k}^2) \end{aligned} \qquad \dots/8.32/$$

Prethodni izrazi, koji daju uticaj slučajnih grešaka merenja dužina na tačnost položaja čvorne tačke, mogu se uprostiti pod pretpostavkom:

- da su vlakovi, koji se u čvornoj tački sustiču, razvučeni

- da su sve poligonometrijske strane u svim vlakovima medjusobno jednake dužine:

$$S_{11} = \cdots = S_{n_1 1} = S_{i_2} = S \qquad .../8.33a/$$

- da su jedanke težine pojedinih vlakova:

$$p_1 = p_2 = \cdots\cdots = p_K = p \qquad .../8.33b/$$

$$m_{y_2}^2 = \frac{1}{K^2} \eta_s^2 \sum_{i=1}^{K} n_i \sin^2 \nu_i$$

$$m_{x_2}^2 = \frac{1}{K^2} \eta_s^2 \sum_{i=1}^{K} n_i \cos^2 \nu \qquad .../8.34/$$

$$m_2'^2 = \frac{1}{K^2} \eta_s^2 \sum_{i=1}^{K} n_i \qquad .../8.34a/$$

Ako je u svim vlakovima podjednak broj strana:

$$n_1 = n_2 = \cdots n_K = n \qquad .../8.35/$$

dobija se jednostavan izraz za uticaj slučajnih grešaka merenja dužina na tačnost položaja čvorne tačke:

$$m_2^2 = \frac{1}{K} n \eta_s^2 \qquad .../8.36/$$

Kad slučajne greške deluju po zakonu /8.29/ dobiće se:

$$m_2^2 = \frac{1}{K} \mu_s^2 \cdot S \qquad .../8.37/$$

odnosno

$$m_2^2 = \frac{1}{K} n \cdot \mu_s^2 \qquad .../8.38/$$

za slučaj da se slučajne greške pokoravaju zakonu /8.30/.

Uticaj slučajnih grešaka merenja dužina opada kada se broj vlakova, koji se u čvornoj tački sustiču, povećava dok se sa povećanjem broja strana u pojedinim vlakovima odnosno ukupnom dužinom pojedinih vlakova uvećava.

Uvodeći smenu /8.5/ u izraze /8.31/ i /8.32/ uz predpostavku o razvučenosti vlaka dobija se:

$$m_{y_2}^2 = \frac{\mu_s^2}{[p]^2} \left(p_1^2 S_1 \sin^2 \nu_1 + \cdots + p_K^2 S_K \sin^2 \nu_K \right) \qquad .../8.39/$$

$$m_{x_2}^2 = \frac{\mu_s^2}{[p]^2}(p_1^2 S_1 \cos^2\nu_1 + \cdots + p_k^2 S_k \cos^2\nu_k) \qquad .../8.40/$$

$$m_2^2 = \frac{\mu_s^2}{[p]^2}(p_1^2 S_A + p_2^2 S_B + \cdots + p_k^2 S_k) \qquad .../8.41/$$

Kada se slučajne greške merenja pokoravaju zakonu /8.29/ ili /8.30/, pa se zatežine unesu odgovarajući izrazi dobija se:

$$m_2^2 = \mu_s^2 \frac{1}{[p]} \qquad .../8.42/$$

Ovim je pokazano da se kod ocene tačnosti položaja čvorne tačke na uobičajeni način, vodi računa samo o slučajnim greškama merenja dužina.

8.2.2 UTICAJ SISTEMATSKIH GREŠAKA MERENJA DUŽINA

Ove greške mogu biti srazmerne merenoj dužini λ ili konstantne λ_0 odnosno nezavisne od dužine.

Uticaj sistematskih grešaka srazmernih dužini na tačnost položaja, čvorne tačke dobiće se polazeći od /8.3a/ i /8.4a/, njega označimo sa

$$m_{y_3}^2 = d_1^2 \lambda^2 \qquad .../8.43/$$
$$m_{x_3}^2 = d_2^2 \lambda^2$$

Koristeći smenu /8.5/ i /8.27/ dobija se:

$$d_1 = \frac{S}{K} \sum_{i=1}^{n} \sin\nu_i \; ; \quad d_2 = \frac{S}{K} \sum_{i=1}^{K} \cos\nu_i \qquad .../8.44/$$

Ako su vlakovi pravilno rasporedjeni oko čvorne tačke odnosno ako je razlika $\nu_{i+1} - \nu_i = \alpha = \text{const.}$, u /18/ je pokazano da je

$$\sum_{i=1}^{K} \sin\nu_i = 0 \; ; \quad \sum_{i=1}^{K} \cos\nu_i = 0 \qquad .../8.45/$$

pa pod tim uslovima, sistematske greške λ merenja dužina, neće imati uticaja na tačnost položaja čvorne tačke.

Uticaj konstantne sistematske greške na tačnost položaja čvorne tačke dobiće se polazeći od /8.3a/ i /8.4a/

$$m_{Y_4}^2 = e_1^2 \lambda_o^2$$
$$m_{X_4}^2 = e_2^2 \lambda_o^2 \qquad .../8.46/$$

Kada se iskoriste izrazi /8.5/ i /8.27/, dobija se

$$e_1 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \sin \nu_i \; ; \quad e_2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \cos \nu_i \qquad .../8.47/$$

Na osnovu poslednjeg izraza, a u vezi sa izrazom /8.46/, može se zaključiti, da konstantna sistematska greška merenja dužina neće ispoljiti svoj uticaj na tačnost položaja čvorne tačke, ako su vlakovi oko nje pravilno rasporedjeni i ako imaju isti broj strana.

8.3. UTICAJ GREŠAKA MERENJA UGLOVA

Uglovi koji se koriste pri računanju koordinata čvorne tačke nisu medjusobno nezavisne veličine, jer su u procesu izravnanja postali medjusobno zavisni, čija se korelativna zavisnost može izraziti matricom reda $(n_1 + n_2 + \cdots + n_K)$.

Svi uglovi u svim vlacima medjusobno su zavisni ali uvažavati kompletnu zavisnost tj. korelacionu matricu reda $(n_1 + n_2 + \cdots + n_K)$ bio bi veoma obiman posao. Osim toga korelativna zavisnost medju uglovima koji ne pripadaju istom vlaku, veoma je mala pa je iz praktičnih razloga treba zanemariti. Prema tome, za računanje položajne greške čvorne tačke smatraćemo da su medjusobno korelisani samo uglovi koji pripadaju istom vlaku. Korelaciona matrica izravnatih uglova u vlaku biće:

$$Q_{\beta i}'=\frac{1}{N_i}\left\|\begin{array}{cccc} N_i-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & N_i-1 & \dots & -1 \\ \hline -1 & -1 & \dots & N-1 \end{array}\right\| \qquad \dots /8.49/$$

Prema /17/ proizvod matrice $Q_{\beta'}$ *i* vektora biće $A^*=\|a_1\,a_2\,a_3\dots a_N\|$

$$A^*Q_\beta' A=[aa]-\frac{1}{N_i}[a]^2 \qquad \dots /8.50/$$

Uticaj grešaka merenja uglova na položaj čvorne tačke, ako se pri tome uvažava sve prethodno rečeno, a polazeći od /8.3a/ i /8.4a/

$$(m_Y^2)_\beta=\left\{a_1'^2\sum_{i=1}^{n}(X-X_i)^2-\frac{1}{n_1}\left[a_1'\sum_{i=1}^{n_1}(X-X_i)\right]^2\right\}\eta_\beta^2+a_2'^2\sum_{i=1}^{n_2}(X-X_i)^2- \qquad \dots /8.51/$$

$$-\frac{1}{n_2}\left[a_2'\sum_{i=1}^{n_2}(X-X_i)\right]^2\Big\}\eta_\beta^2+\dots+\left\{a_k'^2\sum_{i=1}^{n_k}(X-X_i)^2-\frac{1}{n_k}\left[a_k'\sum_{i=1}^{n_k}(X-X_i)\right]^2\right\}\eta_\beta^2$$

$$(m_X^2)_\beta=\left\{a_1'^2\sum_{i=1}^{n_1}(Y-Y_i)^2-\frac{1}{n_1}\left[a_1'\sum_{i=1}^{n_1}(Y-Y_i)\right]^2\right\}\eta_\beta^2+\Big\{a_2'^2\sum_{i=1}^{n_2}(Y-Y_i)^2-$$

$$-\frac{1}{n_2}\left[a_2'\sum_{i=1}^{n_2}(Y-Y_i)\right]^2\Big\}\eta_\beta^2+\dots+\left\{a_k'^2\sum_{i=1}^{n_k}(Y-Y_i)^2-\frac{1}{n_k}\left[a_k'\sum_{i=1}^{n_k}(Y-Y_i)\right]^2\right\}\eta_\beta^2 \qquad \dots /8.52/$$

Ako su u jednom vlaku sve strane medjusobno jednake i ako je vlak razvučen: imaćemo

$$(m_Y^2)_\beta=\left\{a_1'^2\Delta X_1^2(1^2+2^2+\dots+n_1^2)-\frac{1}{n_1}a_1'^2\Delta X_1^2(1+2+\dots+n_1)^2\right\}\eta_\beta^2+$$

$$+\left\{a_2'^2\Delta X_2^2(1^2+2^2+\dots+n_2^2)-\frac{1}{n_2}a_2'^2\Delta X_2^2(1+2+\dots+n_2)^2\right\}\eta_\beta^2+$$

$$+\left\{a_k'^2\Delta X_k^2(1^2+2^2+\dots+n_k^2)-\frac{1}{n_k}a_k'^2\Delta X_k^2(1+2+\dots+n_k)^2\right\}\eta_\beta^2 \qquad \dots /8.53/$$

$$(m_X^2)_\beta=\left\{a_1'^2\Delta Y_1^2(1^2+2^2+\dots+n_1^2)-\frac{1}{n_1}a_1'^2\Delta Y_1^2(1+2+\dots+n_1)^2\right\}\eta_\beta^2+$$

$$+\left\{a_2'^2\Delta Y_2^2(1^2+2^2+\dots+n_2^2)-\frac{1}{n_2}a_2'^2\Delta Y_1^2(1+2+\dots+n_2)^2\right\}\eta_\beta^2+$$

$$+\left\{a_k'^2\Delta Y_k^2(1^2+2^2+\dots+n_k^2)-\frac{1}{n_k}a_k'^2\Delta Y_k^2(1+2+\dots+n_2)^2\right\}\eta_\beta^2+ \qquad \dots /8.54/$$

odnosno smenom:

$$(1^2+2^2+\cdots+n^2)-\frac{1}{n}(1+2+\cdots\cdots+n)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-$$
$$-\frac{n(n+1)^2}{4}=\frac{n(n+1)(4n+1)}{12} \qquad \ldots/8.55/$$

doboja se:

$$(m_y^2)_\beta=\{a_1'^2\Delta x_1^2\frac{1}{12}n_1(n_1+1)(4n_1+1)+\frac{1}{12}a_2'^2\Delta x_2^2 n_2(n_2+1)(4n_2+1)+$$
$$+\cdots+\frac{1}{12}a_k'^2\Delta x_k^2 n_k(n_k+1)(4n_k+1)\}\eta_\beta^2 \qquad \ldots/8.56/$$

$$(m_x^2)_\beta=\{a_1'^2\Delta y_1^2\frac{1}{12}n_1(n_1+1)(4n_1+1)+\frac{1}{12}a_2'^2\Delta y_2^2 n_2(n_2+1)(4n_2+1)+$$
$$+\cdots+\frac{1}{12}a_k'^2\Delta y_k^2 n_k(n_k+1)(4n_k+1)\}\eta_\beta^2 \qquad \ldots/8.57/$$

Uvažavajući predpostavku da su u razvučenom vlaku i strane medjusobno jednake koefidijenti a_i biće:

$$a_i=\frac{\frac{1}{n_i}}{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j}}\ ; \quad a_i^2=\frac{1}{n_i^2(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j})^2} \qquad \ldots/8.58/$$

Kada se poslednji izraz uvrsti u /8.56/ i /8.57/ dobija se za pojedine vlakove

$$\frac{1}{12}a_i^2 n_i(n_i+1)(4n_i+1)=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n_i^2}\cdot\frac{1}{(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j})^2}(n_i+1)(4n_i+1)=$$
$$=\frac{1}{(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j})^2}\left(\frac{n_i}{3}+\frac{5}{12}+\frac{1}{12n_i}\right)\approx\frac{1}{(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j})^2}\cdot\frac{4n_i+5}{12} \qquad \ldots/8.59/$$

Kako broj uglova u vlaku ne može biti manji od 3, to se član $\frac{1}{12n_i}\leq\frac{1}{36}$ može zanemariti. Sada će izrazi za srednje greške biti dosta uprošćeni a smatraćemo da su svi uglovi u vlakovima mereni istom tačnošću.

$$(m_y^2)_\beta=\frac{1}{(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j})^2}\left\{\frac{4n_1+5}{12}\Delta x_1^2+\frac{4n_2+5}{12}\Delta x_2^2+\cdots+\frac{4n_k+5}{12}\Delta x_k^2\right\}\eta_\beta^2$$

$$(m_x^2)_\beta=\frac{1}{(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j})^2}\left\{\frac{4n_1+5}{12}\Delta y_1^2+\frac{4n_2+5}{12}\Delta y_2^2+\cdots+\frac{4n_k+5}{12}\Delta y_k^2\right\}\eta_\beta^2$$
$$\ldots/8.60/$$

gde je: Δx_i i Δy_i prosečna koordinatna razlika u i-tom vlaku

n_i - broj strana u i-tom vlaku.

Prosečna koordinatna razlika u i-tom vlaku može se izraziti kao

$$\Delta X_i = \frac{X - X_i}{n_i} \quad ; \quad \Delta Y_i = \frac{Y - Y_i}{n_i}$$

.../8.61/

pa će izrazi /8.60/ dobiti novi oblik:

$$(m_Y^2)_\beta = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j}\right)^2} \left\{ \frac{4n_1+5}{12n_1^2}(X - X_1)^2 + \frac{4n_2+5}{12n_2^2}(X - X_2)^2 + \dots + \frac{4n_k+5}{12n_k^2}(X - X_k)^2 \right\} \eta_\beta^2$$

$$(m_X^2)_\beta = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j}\right)^2} \left\{ \frac{4n_1+5}{12n_1^2}(Y - Y_1)^2 + \frac{4n_2+5}{12n_2^2}(Y - Y_i)^2 + \dots + \frac{4n_k+5}{12n_k^2}(Y - Y_k)^2 \right\} \eta_\beta^2$$

.../8.62/

ili napisano skraćeno:

$$(m_Y^2)_\beta = \frac{\eta_\beta^2}{\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j}\right)^2} \cdot \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{k} \frac{4n_i+5}{n_i^2}(X - X_i)^2$$

$$(m_X^2)_\beta = \frac{\eta_\beta^2}{\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j}\right)^2} \cdot \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{k} \frac{4n_i+5}{n_i^2}(Y - Y_i)^2$$

.../8.63/

Uticaj grešaka merenja uglova na položajnu grešku čvorne tačke biće:

$$M_\beta^2 = \frac{\eta_\beta^2}{\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_i}\right)^2} \cdot \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{k} \frac{4n_i+5}{n_i^2} S_{iN}^2$$

.../8.64/.

Ako se predpostavi još da je broj merenih uglova u svim vlacima jednak dobiće se vrlo jednostavan izraz za sredju položajnu grešku čvorne tačke nastalu zbog grešaka uglova

$$M_\beta^2 = \eta_\beta^2 \cdot \frac{4n+5}{12} S_{iN}^2$$

../8.64

Ako pri merenju uglova nema sistematskih grešaka onda se svugde može uneti smena $\eta_\beta = m_\beta$ /8.65/

8.4. UKUPNA SREDNJA GREŠKA KOORDINATA ČVORNE TAČKE

Ukupna greška koordinata čvorne tačke može se naći kada se sumiraju svi pojedini uticaji koji su imali uticaja na tačnost položaja čvorne tačke, i pri tome usvoji da je $m_\beta = \eta_\beta$

$$M_y^2=\frac{1}{[p]^2}\sum_{i=1}^{K} p_i^2 m_{y_i}^2+\frac{m_\beta^2}{[p]^2}\sum_{i=1}^{K} p_i^2(X-X_i)^2 b_{p_i}+\frac{1}{[p]^2}\mu_s^2\sum_{i=1}^{K} p_i \sin^2\nu_i+$$
$$+\eta_\beta^2\cdot\frac{1}{12[p]^2}\sum_{i=1}^{K}\frac{4n_i+5}{n_i^2}(X-X_i)^2+d_1^2\lambda^2+e_1^2\lambda_o^2 \quad \text{..../8.65/}$$

$$M_x^2=\frac{1}{[p]^2}\sum_{i=1}^{K} p_i^2 m_{x_i}^2+\frac{m_\beta^2}{[p]^2}\sum_{i=1}^{K} p_i^2(Y-Y_i)^2 b_{p_i}+\frac{1}{[p]^2}\mu_s^2\sum_{i=1}^{K} p_i \cos^2\nu_i+$$
$$+\eta_\beta^2\cdot\frac{1}{12[p]^2}\sum_{i=1}^{K}\frac{4n_i+5}{n_i^2}(Y-Y_i)^2+d_2^2\lambda^2+e_2^2\lambda_o^2 \quad \text{.../8.66/}$$

Ukupna položajna greška čvorne tačke biće

$$M^2=\frac{1}{[p]^2}\sum_{i=1}^{K} p_i^2 M_i^2+\frac{m_\beta^2}{[p]^2}\sum_{i=1}^{K} p_i^2 S_i^2 b_p+\frac{1}{[p]}\mu_s^2+$$
$$+m_\beta^2\frac{1}{12[p]^2}\sum_{i=1}^{K}\frac{4n_i+5}{n_i^2}S_i^2+\lambda^2(d_1^2+d_2^2)+\lambda_o^2(e_1^2+e_2^2) \quad \text{.../8.67/}$$

Kada se i ovde učine pretpostavke:

- da je tačnost koordinata datih tačaka konstantna,

- da su svi vlaci sa prelomnim uglovima 180° i pravilno rasporedjeni,

- da svi vlaci imaju podjednak broj strana izmerenih istom tačnošću, dobiće se jednostavnije formule za ocenu tačnosti položaja čvorne tačke:

$$M_y^2=\frac{1}{K}m_{y_\xi}^2+\frac{m_\beta^2}{K^2}\sum_{i=1}^{K}(X-X_i)^2 b_{p_i}+\frac{1}{K[p]}\mu_s^2\sum_{i=1}^{K}\sin^2\nu_i+$$
$$+\frac{m_\beta^2}{12[p]^2}\sum_{i=1}^{K}\frac{4n_i+5}{n_i^2}(X-X_i)^2 \quad \text{.../8.68/}$$

$$M_x^2=\frac{1}{K}m_{x_\xi}^2+\frac{m_\beta^2}{K^2}\sum_{i=1}^{K}(Y-Y_i)^2 b_{p_i}+\frac{1}{K[p]}\mu_s^2\sum_{i=1}^{K}\cos^2\nu_i+$$
$$+\frac{m_\beta^2}{12[p]^2}\sum_{i=1}^{K}\frac{4n_i+5}{n_i^2}(Y-Y_i)^2 \quad \text{.../8.69/}$$

$$M_2=\frac{1}{K}M_\xi^2+\frac{m_\beta^2}{K^2}\sum_{i=1}^{K}S_i^2 b_{p_i}+\frac{1}{[p]}\mu_s^2+$$
$$+\frac{m_\beta^2}{12[p]^2}\sum_{i=1}^{K}\frac{4n_i+5}{n_i^2}S_i^2 \quad \text{.../8.70/}$$

IX D E O

POLOŽAJNA GREŠKA MA KOJE /R-te/ TAČKE U UMETNUTOM POLIGONOMETRIJSKOM VLAKU

Uzećemo u razmatranje slučaj kada se vlak, izravnava po prostoj metodi, kako se u praksi najčešće radi. Pri takvom izravnanju dobiće se koordinate svih poligonometrijskih tačaka u vlaku.

Do istih koordinata moglo bi se doći i jednim, malo dužim, putem. Naime, možemo svaku tačku vlaka smatrati kao čvornu u kojoj se sustiču dva vlaka koji polaze od datih tačaka. Svakako da ovakav način računanja nema nikakav praktičan značaj jer je duži a daje iste rezultate kao prosta metoda. Teorijski značaj je u tome što se sva izvodjenja u vezi tačnosti koordinata i položaja čvorne tačke mogu uprošćeno primeniti na ocenu tačnosti poligonometrijskih tačaka.

I ovde usvojim uobičajene oznake:

1 - početna tačka vlaka,
N - završna tačka vlaka,
N - broj uglova u vlaku,
$n = N-1$ - broj strana u vlaku
a_p i a_z - koeficijenti koji se odnose na deo vlaka od početka odnosno od kraja vlaka do R-te tačke vlaka čiji se položaj ocenjuje.

Ovi koeficijenti imaće vrednosti

$$a_p = \frac{P_p}{P_p + P_z} = \frac{S_z}{S_p + S_z}$$

$$a_z = \frac{P_z}{P_p + P_z} = \frac{S_p}{S_p + S_z} \qquad .../9.1/$$

za slučaj da su dužine merene pantljikom.

Kada se dužine mere elektronskim daljinomerom koeficijenti će imati izgled

$$a_p = \frac{n-r}{n} \qquad a_z = \frac{r}{n} \qquad \ldots/9.2/$$

U slučaj poligonometrijskog vlaka koeficijenti uticaja sistematskih grešaka (promenljivih i sistematskih) imaće izgled:

$$d_1 = \frac{p_p}{p_p+p_z}(Y_R-Y_1) - \frac{p_z}{p_p+p_z}(Y_N-Y_R)$$

$$d_2 = \frac{p_p}{p_p+p_z}(X_R-X_1) - \frac{p_z}{p_p+p_z}(X_N-X_R) \qquad /9.3/$$

$$e_1 = \frac{p_p}{p_p+p_z}\sum_{i=1}^{r}\sin\nu_i - \frac{p_z}{p_p+p_z}\sum_{i=r+1}^{n}\sin\nu_i \qquad \ldots/9.4/$$

$$e_2 = \frac{p_p}{p_p+p_z}\sum_{i=1}^{r}\cos\nu_i - \frac{p_z}{p_p+p_z}\sum_{i=r+1}^{n}\cos\nu_i$$

Vrednosti ovih koeficijenata biće isti bez obzira da li se merenja vrše pantljikom ili elektronskim daljinomerom.

Slično kao i kod čvorne tačke, može se i ovde razmatrati ukupan uticaj svih izvora grešaka na tačnost položaja tačke vlaka. To bi nas dovelo do veoma glomaznih izraza koji bi u praksi teško našli primenu. Zato ćemo pretpostaviti da su dati direkcioni uglovi nezavisni medjusobno kao i da su nezavisni od koordinata datih tačaka. Takodje ćemo smatrati da su koordinate datih tačaka nezavisne. Ova pretpostavka je sasvim realna kod sporednih vlakova jer se glavni vlaci na koje se sporedni oslanjaju obično izravnavaju po prostoj metodi tj. odvojeno uglovi i koordinate.

Radi jednostavnosti razmatrajmo pojedinačno uticaje pojedinih izvora grešaka.

9.1. UTICAJ GREŠAKA DATIH VELIČINA

Uticaj grešaka datih veličina može se naći kada se iskoriste izrazi:

$$(m_{Y_R}^2)_\xi = a_p^2 m_{Y_1}^2 + a_z^2 m_{Y_N}^2 + m_\beta^2 [a_p^2 (X_R - X_1)^2 b_p + a_z^2 (X_N - X_R)^2 b_z] \qquad .../9.5/$$

$$(m_{X_R}^2)_\xi = a_p^2 m_{X_1}^2 + a_z^2 m_{X_N} + m_\beta^2 [a_p^2 (Y_R - Y_1)^2 b_p + a_z^2 (Y_N - Y_R)^2 b_z] \qquad .../9.6/$$

$$(M_R^2)_\xi = a_p^2 M_1^2 + a_z^2 M_N^2 + m_\beta^2 [a_p^2 S_{1R}^2 b_p + a_z^2 S_{RN}^2 b_z] \qquad .../9.7/$$

Za razvučen vlak i jednakih strana; mogu se za koeficijent a_p i a_z usvojiti vrednosti date izrazom /9.2/

$$(m_{Y_R}^2)_\xi = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 m_{Y_1}^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2 m_{Y_N}^2 + m_\beta^2 \left[\frac{r(n-r)}{n^2}\right]^2 (b_p + b_z)(X_N - X_1)^2 \qquad .../9.8/$$

$$(m_{X_R}^2)_\xi = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 m_{X_1}^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2 m_{X_N}^2 + m_\beta^2 \left[\frac{r(n-r)}{n^2}\right]^2 (b_p + b_z)(Y_N - Y_1)^2 \qquad .../9.9/$$

$$(M_R^2)_\xi = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 M_1^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2 M_N^2 + m_\beta^2 \left[\frac{r(n-r)}{n^2}\right]^2 (b_p + b_z)\, S_{1N}^2 \qquad .../9.10/$$

Formule indentične sa prethodnim izrazima izvedene su u [16] pod brojem /8.176/.

Uticaj grešaka koordinata datih tačaka biće najmanji na sredini vlaka. To se može pokazati kada se pretpostavi da su date tačke jednake tačnosti. Za usvojenu pretpostavku imamo:

$$(M_R^2)_\xi = M^2 \left[\left(\frac{n-r}{n}\right)^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2\right] + m_\beta^2 \left[\frac{r(n-r)}{n^2}\right]^2 (b_p + b_z) S_{1N}^2 \qquad .../9.11/$$

Veličina u zagradi zavisi od rednog broja strane u vlaku pa nju treba anlizirati

$$f_r = \frac{n^2 - 2nr + 2r^2}{n^2} \qquad f'_r = \frac{4r - 2n}{n^2}$$

$$f'_{(r)} = 0 \quad \text{za} \quad r = \frac{n}{2} \qquad f''_{(r=\frac{n}{2})} > 0 \qquad .../9.12/$$

Analiza pokazuje da izraz $f_r = \frac{n^2 - 2nr + 2r^2}{n^2}$ ima svoj minimum u sredini vlaka, tj. uticaj grešaka datih veličina biće najmanji na položaj tačke koja se nalazi u sredini vlaka.

Zatim se može analizirati uticaj grešaka početnog i završnog direkcionog ugla, na tačnost položaja tačke zavisno od njenog mesta u vlaku. U tom uticaju, za jedan odredjeni vlak, kao konstantne vrednosti, pojavljuju se m_β, b_p, b_z, i S_{1N} dok od položaja tačke u vlaku zavisi deo:

$$f_r = \left[\frac{r(n-r)}{n^2}\right]^2 \qquad f'_r = 2\frac{r(n-r)(n-2r)}{n^4}$$

$$f'_r = 0 \quad za\ r=0,\ \ r=n \ \ i \ \ r=\frac{n}{2}$$

$$f''_{(r=0)} > 0 \quad \text{ima minimum} \quad f_{(r=0)} = 0$$

$$f''_{(r=n)} > 0 \quad \text{ima minimum} \quad f_{(r=n)} = 0 \qquad \ldots/9.13/$$

$$f''_{(r=\frac{n}{2})} < 0 \quad \text{ima maksimum} \quad f_{(r=\frac{n}{2})} = \frac{1}{16}$$

Na osnovu prednje analize može se zaključiti:

- uticaj grešaka početnog i završnog direkcionog ugla na početnoj i završnoj tački vlaka (kako se i očekuje) jednak je nuli,

- taj uticaj raste simetrično od krajeva vlaka ka njegovoj sredini, da bi u sredini imao svoj maksimum gde je vrednost funkcije $f_r = 1/16$

9.2. UTICAJ GREŠAKA MERENJA DUŽINA

9.2.1. Uticaj slučajnih grešaka merenja dužina

Kao polazne jednačine za razmatranje ovog uticaja mogu nam poslužiti izrazi /8.31/ i /8.32/

$$(m_{Y_R})^2_\eta = a_p^2 \sum_{i=1}^{r} \eta^2_{S_i} \sin^2 \nu_i + a_z^2 \sum_{i=r+1}^{n} \eta^2_{S_i} \sin^2 \nu_i$$

$$(m_{X_R})^2_\eta = a_p^2 \sum_{i=1}^{r} \eta^2_{S_i} \cos^2 \nu_i + a_z^2 \sum_{i=r+1}^{n} \eta^2_{S_i} \cos^2 \nu_i$$

Pretpostavimo da je vlak razvučen i jednakih strana pri čemu će za koeficijente važiti izrazi /9.2/, dobićemo izraze za srednje greške.

$$(m_{Y_R})^2_\eta = \sin^2\nu \left[\left(\frac{p_p}{p_p+p_z}\right)^2 \mu_s^2 \sum_{i=1}^{r} S_i + \left(\frac{p_z}{p_p+p_z}\right)^2 \mu_s^2 \sum_{i=r+1}^{n} S_i\right]$$

$$(m_{X_R})^2_\eta = \cos^2\nu \left[\left(\frac{p_p}{p_p+p_z}\right)^2 \mu_s^2 \sum_{i=1}^{r} S_i + \left(\frac{p_z}{p_p+p_z}\right)^2 \mu_s^2 \sum_{i=r+1}^{n} S_i\right]$$

odnosno:

$$(m_{Y_R})^2_\eta = \mu_s^2 \sin^2\nu \, \frac{r(n-r)}{n^2} S_{1N} \qquad \ldots..(9.14)$$

$$(m_{X_R})^2_\eta = \mu_s^2 \cos^2\nu \, \frac{r(n-r)}{n^2} S_{1N} \qquad \ldots..(9.15)$$

$$(M_R)_n^2 = \mu_s^2 \frac{r(n-r)}{n^2} S_{1n} \qquad .../9.16/$$

pri čemu je:

μ_s - srednja greška jedinice težine merenja dužina

$p_p = \frac{1}{S_1 + S_2 + \cdots + S_r}$ $p_z = \frac{1}{S_{r+1} + S_{r+2} + \cdots + S_n}$ - težine za slučaj merenja dužina pantljikom, a kada se dužine mere elektronskim daljinomerom, važiće sledeće vrednosti:

$$p_p = \frac{1}{r} \qquad p_z = \frac{1}{n-r}$$

Uvažavajući prednje oznake mogu se dobiti srednje greške koordinata i položajna greška R-te tačke poligonskog vlaka:

$$(m_{Y_R})_n^2 = \mu_s^2 \sin^2 \nu \frac{r(n-r)}{n} \qquad .../9.17/$$

$$(m_{X_R})_n^2 = \mu_s^2 \cos^2 \nu \frac{r(n-r)}{n} \qquad .../9.18/$$

$$(M_R)_n^2 = \mu_s^2 \frac{r(n-r)}{n} \qquad ...(9.19)$$

gde je:

μ_s - srednja slučajna greška merenja dužine elektronskim daljinomerom.

Na osnovu izraza /9.16/ može se zaključiti da greška položaja tačke u vlaku zavisi, od broja tačaka u vlaku, od dužine vlaka, od položaja tačke u vlaku i srednje greške jedinice težine merenja dužina. Kod merenja elektronskim daljinomerom greška položaja zavisi od: srednje greške merenja dužina i položaja tačke u vlaku ali ne i od ukupne dužine vlaka.

9.2.2. UTICAJ SISTEMATSKIH GREŠAKA MERENJA DUŽINA

Sistematske greške utiču na tačnost položaja tačke vlaka. Njihov uticaj može se naći kada se iskoristi formula /8.44/ i /8.47/.

Koeficijenti njihovog uticaja, za slučaj poligonskog vlaka biće dati u izrazima: /9.3/ i /9.4/.

Uz pretpostavku da je vlak razvučen i jednakih strana koeficijenti d_1, d_2, e_1 i e_2 imaće vrednosti jednake nuli.

Poništavanje uticaja delovanja sistematskih grešaka merenja dužina natačnost položaja tačke poligonometrijskog vlaka, kada su sve strane u razvučenom vlaku jednake, realno je očekivati. Naime, raspodela linearnih odstupanja f_y i f_x u poligonometrijskom vlaku vrši se srazmerno dužinama poligonometrijskih strana, pa se time odstranjuje uticaj promenljive sistematske greške, bez obzira da li su strane u vlaku iste dužine ili različite. Za slučaj različitih dužina poligonometrijskih strana, pojaviće se, jedan sasvim mali praktično zanemarljiv, preostali uticaj konstantne sistematske greške merenja dužina.

9.3. UTICAJ GREŠAKA MERENJA UGLOVA

Do uticaja grešaka merenja uglova, može se doći na isti način kao i kod čvorne tačke.

Za R-tu tačku vlaka može se iz izraza /8.3/ i /8.4/ izdvojiti uticaj grešaka merenja uglova

$$dY_\beta = \frac{p_p}{p_p+p_z}\sum_{i=1}^{r}(X_R-X_i)\,d\beta_i + \frac{p_z}{p_p+p_z}\sum_{i=r+1}^{N}(X_i-X_R)\,d\beta_i \qquad .../9.20/$$

$$dX_\beta = \frac{p_p}{p_p+p_z}\sum_{i=1}^{r}(Y_R-Y_i)\,d\beta_i + \frac{p_z}{p_p+p_z}\sum_{i=r+1}^{N}(Y_i-Y_R)\,d\beta_i \qquad .../9.21/$$

Matrica kojom se definiše korelativna zavisnost merenih i izravnatih uglova data je izrazom /8.49/ a odgovarajući proizvodi izrazom /8.50/.

Koristeći izraze /9.20/ i /9.21/ može se dobiti uticaj grešaka merenja uglova na koordinate R-te tačke vlaka.

$$(m_{Y_R})_\beta^2 = \eta_\beta^2\left\{\left(\frac{p_p}{p_p+p_z}\right)^2\left[\sum_{i=1}^{r}(X_R-X_i)\right]^2 + \left(\frac{p_z}{p_p+p_z}\right)^2\left[\sum_{i=R+1}^{N}(X_i-X_R)\right]^2 + \frac{1}{N}\left[\frac{p_p}{p_p+p_z}\sum_{i=1}^{r}(X_R-X_i) + \frac{p_z}{p_p+p_z}\sum_{i=R+1}^{N}(X_i-X_R)\right]^2\right\} \qquad .../9.22/$$

$$(m_{x_R})^2_\beta = \eta^2_\beta \left\{ \left(\frac{p_p}{p_p+p_z}\right)^2 \cdot \left[\sum_{i=1}^{r}(y_R - y_i)\right]^2 + \left(\frac{p_p}{p_p+p_z}\right)^2 \cdot \left[\sum_{i=R+1}^{N}(y_i - y_R)\right]^2 + \frac{1}{N}\left[\frac{p_p}{p_p+p_z}\sum_{i=1}^{r}(y_R - y_i) + \frac{p_z}{p_p+p_z}\sum_{i=R+1}^{N}(y_R - y_i)\right]^2 \right\} \qquad /9.22/$$

Uz pretpostavku da je vlak razvučen i jednakih strana i da su sve strane merene istom tačnošću koeficijenti a_p i a_z biće dati izrazom /9.2/. Za izraze /9.22/ tada dobijamo:

$$(m_{y_R})^2_\beta = \eta^2_\beta \Delta x^2 \left\{ \left[\left(\frac{n-r}{n}\right)^2 \cdot \frac{r(r+1)(2r+1)}{6} + \left(\frac{r}{n}\right)^2 \cdot \frac{(n-r)(n-r+1)(2n-2r+1)}{6} \right] - \frac{1}{n+1}\left[\frac{n-r}{n}\cdot\frac{r(r+1)}{2} - \frac{r}{n}\cdot\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}\right]^2 \right\} \qquad .../9.23/$$

$$(m_{x_R})^2_\beta = \eta^2_\beta \Delta y^2 \left\{ \left[\left(\frac{n-r}{n}\right)^2 \frac{r(r+1)(2r+1)}{6} + \left(\frac{r}{n}\right)^2 \cdot \frac{(n-r)(n-r+1)(2n-2r+1)}{6} \right] - \frac{1}{n+1}\left[\frac{n-r}{n}\cdot\frac{r(r+1)}{2} - \frac{r}{n}\cdot\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}\right]^2 \right\} \qquad .../9.24/$$

Uvodjenjem smene:

$$\Delta y = \frac{y_N - y_1}{n} \qquad \Delta x = \frac{x_N - x_1}{n} \qquad .../9.25/$$

u prethodni izraz i njegovim sredjivanjem dobija se:

$$(m_{y_R})^2_\beta = \left(\frac{\eta''_\beta}{\rho''}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_N - x_1}{n}\right)^2 \cdot \left\{\frac{r(n-r)}{12n} \cdot \left[\frac{r(n-r)(n+4)}{n+1} + 2\right]\right\} \qquad .../9.26/$$

$$(m_{x_R})^2_\beta = \left(\frac{\eta''_\beta}{\rho''}\right)^2 \cdot \left(\frac{y_N - y_1}{n}\right)^2 \cdot \left\{\frac{r(n-r)}{12n} \cdot \left[\frac{r(n-r)(n+4)}{n+1} + 2\right]\right\} \qquad .../9.27/$$

$$(M_R)^2_\beta = \left(\frac{\eta''_\beta}{\rho''}\right)^2 \left(\frac{S_{1N}}{n}\right)^2 \left\{\frac{r(n-r)}{12n} \cdot \left[\frac{r(n-r)(n+4)}{n+1} + 2\right]\right\} \qquad .../9.28/$$

U poslednjim izrazima koeficijent uz η_β dosta je glomazan pa bi ga za praktičnu primenu trebalo utabličiti. Njegove vrednosti biće prilično male. Zato je pogodno postaviti uslov da se srednje greške dobijaju u cm pri čemu će se $(x_N - x_1)$ izražavati u kilometrima.

Označimo koeficijent:

$$B_R = \left(\frac{1}{n \cdot 206\,265''}\right)^2 \left\{\frac{r(n-r)}{12n}\left[\frac{r(n-r)(n+4)}{n+1} + 2\right]\right\} \qquad .../9.29/$$

$$(B_R)_\beta = \eta''^2_\beta \cdot B_R$$

pa će izraz za srednje greške dobiti pogodan oblik

$$(m_{Y_R})^2_{\beta(cm)} = \eta''^2_\beta \, B_R \cdot (X_N - X_1)^2_{(km)} \qquad .../9.30/$$

$$(m_{X_R})^2_{\beta(cm)} = \eta''^2_\beta \, B_R \, (Y_N - Y_1)^2_{(km)} \qquad .../9.31/$$

$$(M_R)^2_{\beta(cm)} = \eta''^2_\beta \, B_R \, S^2_{1N} \, (km) \qquad .../9.32/$$

Koeficijenti B_R ujedno predstavljaju uticaj grešaka merenja uglova na kvadrat srednje greške koordinata i položaja u slučaju kada je $\eta_\beta = 1''$ a dužina 1 km.

9.4 UKUPNA SREDNJA GREŠKA KOORDINATA I POLOŽAJA R-te TAČKE POLIGONSKOG VLAKA

Ukupna greška dobiće se sumiranjem pojedinih uticaja

$$m^2_{Y_R} = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 m^2_{Y_1} + \left(\frac{r}{n}\right)^2 m^2_{Y_N} + \left(\frac{m''_\beta}{\rho''}\right)^2 \left[\frac{r(n-r)}{n^2}\right]^2 (b_p + b_z)(X_N - X_1)^2 +$$
$$+ \mu_s^2 \frac{r(n-r)}{n^2} S_{1N} \sin^2\nu + \left(\frac{m''_\beta}{\rho''}\right)^2 \left(\frac{X_N - X_1}{n}\right)^2 \cdot \frac{r(n-r)}{12n} \left[\frac{r(n-r)(n+4)}{n+1} + 2\right] \qquad .../9.33/$$

$$m^2_{X_R} = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 m^2_{X_1} + \left(\frac{r}{n}\right)^2 m^2_{X_N} + \left(\frac{m''_\beta}{\rho''}\right)^2 \left[\frac{r(n-r)}{n^2}\right]^2 (b_p + b_z)\left[(Y_N - Y_1)\right]^2 +$$
$$+ \mu_s^2 \frac{r(n-r)}{n^2} S_{1N} \cos^2\nu + \left(\frac{m''_\beta}{\rho''}\right)^2 \left(\frac{Y_N - Y_1}{n}\right)^2 \frac{r(n-r)}{12n} \left[\frac{r(n-r)(n+4)}{n+1} + 2\right] \qquad .../9.34/$$

$$M^2_R = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 M^2_1 + \left(\frac{r}{n}\right)^2 M^2_N + \left(\frac{m''_\beta}{\rho''}\right)^2 \left[\frac{r(n-r)}{n^2}\right]^2 (b_p + b_z) \, S^2_{1N} +$$
$$+ \mu_s^2 \frac{r(n-r)}{n^2} S_{1N} + \left(\frac{m_\beta}{\rho''}\right)^2 \cdot \left(\frac{S_{1N}}{n}\right)^2 \cdot \frac{r(n-r)}{12n} \left[\frac{r(n-r)(n+4)}{n+1} + 2\right] \qquad .../9.35/$$

gde je

$$M^2_1 = m^2_{X_1} + m^2_{Y_1} \qquad M^2_N = m^2_{X_N} + m^2_{Y_N}$$

Poslednji izrazi izvedeni su uz pretpostavke koje uvažavane i pri izvodjenju uticaja pojedinih izvora grešaka:

- da su date tačke nezavisne,
- da su dati direkcioni uglovi nezavisni,
- da je vlak ispružen,
- da su dužine u vlaku jednake i merene istom tačnošću.

Izrazi koji bi se dobili bez ovih pretpostavki bili bi veoma glomazni i ne bi našli primenu u praksi. Mora se priznati da ni uprošćeni (poslednji) izrazi nisu kratki i jednostavni za računanje. Zato pojedine koeficijente u njima, treba utabličiti, te olakšati postupak računanja srednjih grešaka.

Uvedimo oznake:

$$A_{Rp}=\left(\frac{n-r}{n}\right)^2 \quad A_{Rz}=\left(\frac{r}{n}\right)^2 \quad C_{R\mu}=\mu_s^2\frac{r(n-r)}{n^2} \quad C_{Re}=\frac{r(n-r)}{n}$$

Sa uvedenim oznakama srednje greške dobiće jednostavniji izgled

$$m_{Y_R}^2=A_{Rp}m_{Y_1}^2+A_{Rz}m_{Y_N}^2+C_{R\mu}S_{1N(km)}\sin^2\nu+B_R(X_N-X_1)^2_{(km)}+$$
$$+C_{R\mu}^2\left(\frac{m_\beta''}{\rho''}\right)^2(b_p+b_z)(X_N-X_1)^2_{(km)} \qquad .../9.37/$$

$$m_{X_R}^2=A_{Rp}m_{X_1}^2+A_{Rz}m_{X_N}^2+C_{R\mu}S_{1N(km)}\cos^2\nu+B_R(Y_N-Y_1)^2_{(km)}+$$
$$+C_{R\mu}^2\left(\frac{m_\beta''}{\rho''}\right)^2(b_p+b_z)(Y_N-Y_1)^2_{(km)} \qquad .../9.38/$$

$$M_R^2=A_{Rp}M_1^2+A_{Rz}M_N^2+B_R S_{1N(km)}^2+C_{R\mu}S_{1N(km)}+$$
$$+C_{R\mu}^2\left(\frac{m_\beta''}{\rho''}\right)^2(b_p+b_z)S_{1N(km)}^2 \qquad .../9.39/$$

Prethodni izrazi važe za slučaj merenja dužina pantljikom.

Kada se dužine mere elektronskim daljinomerom izgled srednjih grešaka promeniće se samo u delu koji zavisi od slučajnih grešaka merenja dužina, dok će ostali članovi ostati isti.

$$m_{Y_R}^2=A_{Rp}m_{Y_1}^2+A_{Rz}m_{Y_N}^2+C_{Re}\mu_s^2\sin^2\nu+B_R(X_N-X_1)^2_{(km)}+$$
$$+C_{R\mu}\left(\frac{m_\beta''}{\rho''}\right)^2(b_p+b_z)(X_N-X_1)^2_{(km)} \qquad .../9.40/$$

$$m_{X_R}^2=A_{Rp}m_{X_1}^2+A_{Rz}m_{X_N}^2+C_{Re}\mu_s^2\cos^2\nu+B_R(Y_N-Y_1)^2_{(km)}+$$
$$+C_{R\mu}\left(\frac{m_\beta''}{\rho''}\right)^2(b_p+b_z)(Y_N-Y_1)^2_{(km)} \qquad .../9.41/$$

$$M_R^2=A_{Rp}M_1^2+A_{Rz}M_N^2+C_{Re}\mu_s^2+B_R S_{1N(km)}^2+$$
$$+C_{R\mu}\left(\frac{m_\beta''}{\rho''}\right)^2(b_p+b_z)S_{1N(km)}^2 \qquad .../9.42/$$

Prethodni izrazi pružaju mogućnost da se dobije srednja greška koordinata i položaja ma koje tačke glavnog poligonometrijskog vlaka. Zatim se može ići sukcesivno do ma koje tačke u ma kom vlaku. Tako se može za ma koju tačku, bilo kojeg vlaka, dobiti položajna greška, a da se pri tome vodi računa o greškama merenja i datih veličina počev od triangulacije pa do te tačke.

9.5. PODUŽNA I POPREČNA GREŠKA POLOŽAJA MA KOJE (R-te) TAČKE VLAKA

Podužna greška R-te tačke vlaka može se dobiti ako se usvoji da se pravac pružanja vlaka poklapa sa pravcem u ose. Tada je $\nu = 90^o$ $\Delta xi = 0$, $\Delta Y_i = S_i$

Do ovih grešaka može se doći polazeći od izraza/9.33/ i /9.34/

$$m^2_{R\nu} = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 m^2_{Y_1} + \left(\frac{r}{n}\right)^2 m^2_{Y_N} + \mu_s^2 \frac{r(n-r)}{n^2} S_{1N} \qquad .../9.43/$$

$$m^2_{R\varphi} = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 m^2_{X_1} + \left(\frac{r}{n}\right)^2 m^2_{X_N} + \left(\frac{m''_\beta}{\rho''}\right)^2 \left[\frac{r(n-r)}{n^2}\right]^2 (b_p + b_z) S^2_{1N} + $$
$$+ \left(\frac{m''_\beta}{\rho''}\right)^2 \left(\frac{S_{1N}}{n}\right)^2 \frac{r(n-r)}{12n}\left[\frac{r(n-r)(n+4)}{n+1} + 2\right] \qquad .../9.44/$$

ili ukupna greška

$$M^2 = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 M_1^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2 M_N^2 + \left(\frac{m''_\beta}{\rho''}\right)^2 \left[\frac{r(n-r)}{n^2}\right]^2 (b_p + b_z) S^2_{1N} +$$

$$+ \mu_s^2 \frac{r(n-r)}{n^2} S_{1N} + \left(\frac{m''_\beta}{\rho''}\right)^2 \left(\frac{S_{1N}}{n}\right)^2 \frac{r(n-r)}{12n}\left[\frac{r(n-r)(n+4)}{n+1} + 2\right] \qquad .../9.45/$$

gde je $M_1^2 = m^2_{X_1} + m^2_{Y_1}$ $\qquad M_N^2 = m^2_{X_N} + m^2_{Y_N}$

Pod greškama datih tačaka m_{Y_1} i m_{Y_N} treba podrazumevati projekcije položajnih grešaka datih tačaka na dijagonalu vlaka, dok su greške m_{X_1} i m_{X_N} projekcije položajnih grešaka datih tačaka na pravac upravan na dijagonalu vlaka.

Kada se iskoriste koeficijenti /9.36/ dobija se

$$m_{R_\ell}^2 = A_{R_p} m_{y_1}^2 + A_{R_z} m_{y_N}^2 + C_{R\mu} S_{1N} \qquad \ldots\ldots (9.46)$$

$$m_{R_\varphi}^2 = A_{R_p} m_{x_1}^2 + A_{R_z} m_{x_N}^2 + B_R S_{1N}^2 + C_{R\mu}^2 \frac{m_\beta''}{\rho''} (b_p + b_z) S_{1N}^2 \qquad \ldots\ldots (9.47)$$

$$M_R^2 = A_{R_p} M_1^2 + A_{R_z} M_N^2 + C_{R\mu} S_{1N} + B_R S_{1N}^2 + + C_{R\mu}^2 \left(\frac{m_\beta''}{\rho''}\right)^2 (b_p + b_z) S_{1N}^2 \qquad \ldots\ldots (9.48)$$

Prethodni izrazi važe za slučaj kada su dužine merene pantljikom.

Ako su dužine merene elektronskim daljinomerom greške će imati izgled

$$m_{R_\ell}^2 = A_{R_p} m_{y_1}^2 + A_{R_z} m_{y_N}^2 + C_{Re} \mu_s^2 \qquad \ldots\ldots (9.49)$$

$$m_{R_\varphi}^2 = A_{R_p} m_{x_1}^2 + A_{R_z} m_{x_N}^2 + B_R \cdot S_{1N}^2 + C_{R\mu}^2 \left(\frac{m_\beta''}{\rho''}\right)^2 (b_p + b_z) S_{1N}^2 \qquad \ldots\ldots (9.50)$$

$$M_R^2 = A_{R_p} M_1^2 + A_{R_z} M_N^2 + C_{Re} \mu_s^2 + B_R S_{1N}^2 + + C_{R\mu}^2 \left(\frac{m_\beta''}{\rho''}\right)^2 (b_p + b_z) S_{1N}^2 \qquad \ldots\ldots (9.51)$$

Izrazi /9.49/ i /9.50/, pružaju mogućnost da se sračunaju projekcije položajnih grešaka ma koje poligonometrijske tačke na pravac dijagonale vlaka i pravac upravan na dijagonalu vlaka. Ove greške, u daljem tekstu, nazivaće se podužna i poprečna greška položaja tačke.

X D E O

OCENA TAČNOSTI NADMORSKE VISINE ČVORNOG REPERA

Nadmorska visina čvornog repera računa se po poznatim formulama:

$$H=\frac{H_1p_1+H_2p_2+\cdots+H_rp_r}{[p]} \qquad .../10.1/$$

gde je:
$$H_1 = H_a + h_1$$
$$H_2 = H_b + h_2 \qquad .../10.2/$$

$$H_r = H_r + h_r$$

Kada si izraz /10.2/ uvrsti u /10.1/ dobija se:

$$H=\frac{H_ap_1+H_bp_2+\cdots+H_r'p_r}{[p]}+\frac{h_1p_1+h_2p_2+\cdots+h_rp}{[p]} \qquad .../10.3/$$

Odgovarajući diferencijal nadmorske visine čvornog repera bio bi

$$dH=\frac{1}{[p]}(p_1dH_a+p_2dH_b+\cdots+p_rdH_r)+\frac{1}{[p]}(p_1dh_1+p_2dh_2+\cdots+p_rdh_r) \qquad .../11.4/$$

Sada se može učiniti pretpostavka da su visinske razlike, dobijene nivelanjem, opterećene slučajnim i sistematskim greškama i to da na svaku visinsku razliku, pored slučajne greške, deluju dve vrste sistematskih grešaka: jedne, koje su srazmerne dužini nivelmanskog vlaka i druge koje su srazmerne nivelanoj visinskoj razlici.

Sistematske greške srazmerne dužini mogu nastati kao posledice delovanja refrakcije, zakrivljenosti zemlje i nejednake dužine vizure kod čitanja letve na nižoj i višoj veznoj tački.

Sistematske greške srazmerne visinskoj razlici javljaju se kao posledica sistematskih grešaka, podele letve ili zbog neujednačenih podela na letvi sistematskog karaktera.

Uzrok ovoj vrsti sistematskih grešaka je i uticaj refrakcije, koja ima suprotne zakrivljenosti ka višoj i nižoj veznoj tački.

Tako se diferencijali nivelanih visinskih razlika mogu predstaviti kao:

$$dh_i = \delta_i + \lambda_s S_i + \lambda_h h_i \qquad .../10.5/$$

Diferencijal definitivne visine čvornog repera biće

$$dH = \frac{1}{[p]}\left(p_1 dH_a + p_2 dH_b + \cdots + p_r dH_r\right) + \frac{1}{[p]}\left(p_1\delta_1 + p_2\delta_2 + \cdots + p_r\delta_r\right) + \frac{1}{[p]}\lambda_s\left(p_1 S_1 + p_2 S_2 + \cdots + p_r S_r\right) + \frac{1}{[p]}\lambda_h\left(p_1 h_1 + p_2 h_2 + \cdots + p_r h_r\right) \qquad .../10.6/$$

Težine visinskih razlika u geometrijskom nivelmanu najčešće se računaju kao recipročne vrednosti dužina nivelmanskih strana

$$p_i = \frac{1}{S_i} \qquad .../10.7/$$

čime se dobija

$$dH = \frac{1}{[p]}\left(p_1 dH_a + p_2 dH_b + \cdots + p_r dH_r\right) + \frac{1}{[p]}\sum_{i=1}^{r} p_i\delta_i + \lambda_s\frac{r}{[p]} + \lambda_h\frac{1}{[p]}\left(h_1 p_1 + h_2 p_2 + \cdots + h_r p_r\right) \qquad .../10.8/$$

Poslednji izraz može se kraće napisati u matričnom obliku

$$dH = A^*\xi + B^*\delta + \lambda_s\frac{r}{[p]} + \lambda_h\frac{1}{[p]}\sum_{i=1}^{r} h_i p_i \qquad .../10.9/$$

gde je

$$A^* = \frac{1}{[p]}\left\| p_1,\ p_2 \cdots p_r \right\|$$

$$\xi^* = \left\| dH_a \quad dH_b \cdots dH_r \right\| \qquad .../10.10/$$

$$B^* = A^*$$

Sada se može napisati srednja greška nadmorske visine čvornog repera:

$$M_H^2 = \mu_\xi^2 A^* Q_\xi A + \mu_h^2 B^* Q_h B + \lambda_s^2\left(\frac{r}{[p]}\right)^2 + \lambda_h^2\left(\frac{1}{[p]}\sum_{i=1}^{r} h_i p_i\right)^2 \qquad .../10.11/$$

10.1. UTICAJ GREŠAKA VISINA DATIH REPERA

Uticaj grešaka visina datih tačaka može se naći ako se iz poslednjeg izraza izdvoji prvi sabirak na desnoj strani.

Radi jednostavnijeg izvodjenja usvojimo pretpostavku da su nadmorske visine datih repera medjusobno nezavisne. Samim tim njihova korelaciona matrica biće dijagonalna matrica oblika:

$$Q_\xi = \begin{Vmatrix} Q_{aa} & & & & \\ & Q_{bb} & & & \\ & & Q_{cc} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & Q_{rr} \end{Vmatrix} \qquad .../10.12/$$

pa će odgovarajući proizvodi biti:

$$M_1^2 = \mu_\xi^2 A^* Q_\xi A = \frac{1}{[p]^2}\left(p_1^2 m_{Ha}^2 + p_2^2 m_{Hb}^2 + \dots + p_r^2 m_{Hr}^2\right) \qquad .../10.13/$$

Poslednji izraz predstavlja uticaj grešaka visina datih repera na tačnost nadmorske visine čvornog repera. U tome izrazu mogu se učiniti dalja uprošćenja pod pretpostavkom da su svi dati reperi iste tačnosti i da su sve visine nivelmanskih strana sa istim težinama:

$$m_{Ha} = m_{Hb} = \dots = m_{Hr} = m_\xi \qquad p_i = \text{const} = p$$

Tako se na kraju dobija dosta jednostavan izraz za srednju grešku visine čvornog repera:

$$M_1^2 = \frac{1}{n} m_\xi^2 \qquad .../10.14/$$

10.2. UTICAJ SLUČAJNIH GREŠAKA MERENJA VISINSKIH RAZLIKA

Uticaj slučajnih grešaka merenja visinskih razlika može se naći kada se izdvoji, iz izraza /10.11/, deo koji se odnosi na slučajne greške merenja. Njega ćemo, radi kraćeg pisanja, označiti sa M_2

$$M_2^2 = \mu_h^2 B^* Q_h B \qquad .../10.15/$$

gde je:

$$Q_h=\begin{Vmatrix} \frac{1}{p_1} & & & \\ & \frac{1}{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{p_r} \end{Vmatrix} \qquad .../10.16/$$

odgovarajući proizvod bio bi:

$$M_2^2=\mu_h^2\frac{1}{[p]} \qquad .../10.17/$$

Poslednji izraz identičan je sa onim koji se u praksi koristi kod ocene tačnosti nadmorske visine čvornog repera. Samim tim se, kod ocene tačnosti nadmorske visine čvornog repera, zanemaruju svi ostali uticaji osim uticaja slučajnih grešaka merenja.

10.3. UTICAJ SISTEMATSKIH GREŠAKA MERENJA

Ovaj uticaj može se dobiti ako se iz izraza /10.11/ izdvoje odgovarajući uticaji sistematskih grešaka. Zato prvo posmatrajmo onaj deo koji se odnosi na sistematske greške srazmerne dužini nivelmanskog vlaka i njega označimo sa M_3

$$M_3^2=\lambda_s^2\left(\frac{r}{[p]}\right)^2 \qquad .../10.18/$$

Pod pretpostavkom, da su težine svih nivelmanskih strana jednake

$$p_1=p_2=\cdots=p_r=p=\frac{1}{S} \qquad .../10.19/$$

dobićemo:

$$M_3^2=\lambda_s^2 S^2 \qquad .../10.20/$$

Poslednji izraz pokázuje, da uticaj ove sistematske greške neće zavisiti od broja nivelmanskih vlakova, koji se sustiču u čvornom reperu nego od prosečne dužine nivelmanskog vlaka.

Uticaj sistematskih grešaka koje su srazmerne nivelanoj visinskoj razlici označimo sa M_4

.../10.21/

$$M_4^2 = \left(\frac{1}{[p]}\sum h_i p_i\right)^2 \lambda_h^2 \qquad .../10.21/$$

Kako je

$$h_i p_i = \frac{h_i}{S_i} = tg\,\alpha_i \qquad .../10.22/$$

pad terena, to će ovaj uticaj biti naročito izražen kod onih repera od kojih nivelmanski vlak ide po terenu velikog pada (uspona). Kod čvornih repera koji su na istoj visini sa datim reperima ovaj uticaj nestaje, kao i kod čvornih repera koji su na nekoj srednjoj visini datih repera.

Prema tome ovaj uticaj bio bi

$$M_4^2 = \lambda_h^2 \left(\frac{1}{[p]}\sum_{i=1}^{r} tg\,\alpha_i\right)^2 \qquad .../10.23/$$

Ako se usvoji pretpostavka da su težine svih visinskih razlika medjusobno jednake i da sve visinske razlike imaju iste padove /uspone/ terena dobiće se jednostavniji izraz

$$M_4^2 = h^2 \lambda_h^2 \qquad .../10.24/$$

10.4 UKUPNA GREŠKA NADMORSKE VISINE ČVORNOG REPERA

Ukupna greška nadmorske visine čvornog repera dobiće se sumiranjem pojedinih uticaja. Kada se izrazi /10.14/, /10.17/, /10.20/ i /10.24/ , koji predstavljaju uticaje pojedinih izvora grešaka, sumiraju, dobiće se

$$M_4^2 = \frac{1}{r} m_\xi^2 + \mu_h^2 \frac{S}{r} + S^2 \lambda_s^2 + h^2 \lambda_h^2 \qquad .../10.25/$$

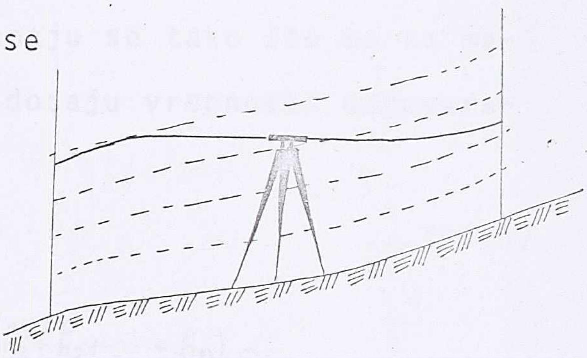
Na osnovu prethodnog izraza može se zaključiti sledeće:

- uticaj grešaka datih veličina, ne zavisi od dužina nivelmanskih strana. Smanjenje ovog uticaja postiže se povećanjem broja vlakova i to ide srazmerno kvadratnom korenu iz broja vlakova.

- Uticaj slučajnih grešaka merenja raste srazmerno kvadratnom korenu iz prosečne dužine strane, dok se smanjenje ovog uticaja postiže srazmerno korenu iz broja vlakova.

- Uticaj sistematskih grešaka nivelanja, koje su proporcionalne dužini nivelmanske strane, ostaje nepromenjen bez obzira na broj vlakova koji se u čvornom reperu sustiču. Ovaj uticaj može se umanjiti pravilnim izborom stanica i veznih tačaka kao i vodeći računa da se nivelanje vrši po povoljnom vremenu.

Sistematske greške nivelanja srazmerne visinskoj razlici nastaju zbog sistematskih grešaka podele letve kao i zbog uticaja refrakcije koja ima suprotne krivine ka višem i nižem terenu. Iz ove slike vidi se da refrakcija na negnutom terenu daje sistematsku grešku nivelanja srazmernu visinskoj razlici i dužini vizure.



XI D E O

OCENA TAČNOSTI NADMORSKIH VISINA REPERA U UMETNUTOM NIVELMANSKOM VLAKU

Nadmorske visine repera u umetnutom nivelmanskom vlaku računaju se na osnovu popravljenih visinskih razlika. Popravljene visinske razlike računaju se tako što se na merene vrednosti visinskih razlika dodaju vrednosti odgovarajućih popravaka:

$$h_i' = h_i + v_i \qquad \ldots/11.1/$$

gde je:

$$v_i = \frac{f_h}{[S]} S_i = \frac{(H_B + H_A) - (h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_n)}{[S]} S_i \qquad \ldots/11.2/$$

Sračunate vrednosti visina imaće izraze:

$$H_1 = H_A\left(1 - \frac{S_i}{[S]}\right) + H_B \cdot \frac{S_i}{[S]} + h_1\left(1 - \frac{S_1}{[S]}\right) - \frac{S_1}{[S]}(h_2 + h_3 + \cdots + h_n)$$

$$H_2 = H_A\left(1 - \frac{S_1+S_2}{[S]}\right) + H_B\frac{S_1+S_2}{[S]} + h_1\left(1 - \frac{S_1+S_2}{[S]}\right) + h_2\left(1 - \frac{S_1+S_2}{[S]}\right) - \frac{S_1+S_2}{[S]}(h_3 + h_4 + \cdots + h_n)$$

$$H_3 = H_A\left(1 - \frac{S_1+S_2+S_3}{[S]}\right) + H_B\frac{S_1+S_2+S_3}{[S]} + h_1\left(1 - \frac{S_1+S_2+S_3}{[S]}\right) + h_2\left(1 - \frac{S_1+S_2+S_3}{[S]}\right) + h_3\left(1 - \frac{S_1+S_2+S_3}{[S]}\right) - \frac{S_1+S_2+S_3}{[S]}(h_4 + \cdots + h_n) \qquad \ldots/11.3/$$

$$H_n = H_A\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{[S]}\right) + H_B\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{[S]} + (h_1 + h_2 + \cdots + h_n)\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{[S]}\right) - h_N\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{[S]}$$

Radi kraćeg pisanja uvedimo oznake

$$K_1 = \frac{S_1}{[S]}$$

$$K_2 = \frac{S_1+S_2}{[S]}$$

$$K_3 = \frac{S_1+S_2+S_3}{[S]} \qquad \ldots/11.4/$$

$$K_n = \frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{[S]}$$

posle čega se dobijaju jednostavniji izrazi za nadmorske visine repera:

$$
\begin{aligned}
H_1 &= H_a(1-K_1)+H_b K_1+h_1(1-K_1)+K_1(h_2+h_3+\dots+h_n+h_N)\\
H_2 &= H_a(1-K_2)+H_b K_2+h_1(1-K_2)+h_2(1-K_2)-K_2(h_3+\dots+h_n+h_N)\\
H_3 &= H_a(1-K_3)+H_b K_3+h_1(1-K_3)+h(1-K_3)+h(1-K_3)-K_3(h_4+h_5+\dots+h_N)\\
&- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -\\
H_n &= H_a(1-K_n)+H_b K_n+(1-K_n)(h_1+h_2+\dots+h_n)-K_n\cdot h_N
\end{aligned}
\qquad .../11.5/
$$

Poslednji izrazi mogu se mnogo kraće napisati kada se to izrazi u matričnom obliku

$$H = A^{*}\xi + B^{*}h \qquad .../11.6/$$

Odavde se, prema [17] može direktno preći na srednju grešku nadmorske visine ma kog repera u nivelmanskom vlaku.

$$m_H^2 = \mu_\xi^2 A^{*} Q_\xi A + \mu_h^2 B^{*} Q_h B \qquad .../11.7/$$

gde je: ${}_{1}H^{*}_{n} = \| H_1, H_2, H_3, \dots, H_n \|$

${}_{1}\xi^{*}_{2} = \| H_a, H_b \|$

${}_{1}h^{*}_{N} = \| h_1, H_2, h_3, \dots, h_n, h_N \|$

$$
{}_{n}A^{*}_{2} = \left\| \begin{matrix} 1-k_1, & k_1 \\ 1-k_2, & k_2 \\ 1-k_3, & k_3 \\ \text{---------} & \\ 1-k_n, & k_n \end{matrix} \right\|
$$

$$
{}_{n}B^{*}_{N} = \left\| \begin{matrix} 1-k_1, & -k_1, & -k_1, & \dots, & -k_1, & -k_1 \\ 1-k_2, & 1-k_2, & -k_2, & \dots, & -k_2, & -k_2 \\ 1-k_3, & 1-k_3, & 1-k_3, & \dots, & -k_3, & -k_3 \\ \text{------} & \text{------} & \text{------} & \text{------} & \text{------} & \text{------} \\ 1-k_n, & 1-k_n, & 1-k_n, & \dots, & 1-k_n, & -k_n \end{matrix} \right\| \qquad ../11.8/
$$

$$
{}_{N}Q_{h\,N} = \left\| \begin{matrix} s_1, & & & \\ & s_2, & & \\ & & s_3, & \\ \text{------} & \text{------} & \text{------} & \text{------} \\ & & & s_n \end{matrix} \right\|
$$

$$Q_{\xi} = \begin{Vmatrix} Q_{aa} , Q_{ab} \\ Q_{ab} \quad Q_{bb} \end{Vmatrix}$$

Matrica Q_{ξ} kao i srednja greška jedinice težine μ_{ξ} , uzimaju se iz prethodnog izravnanja nivelmanske mreže na koju se vlak oslanja.

Da bi se dobila kompletna ocena tačnosti položaja ma kog repera, potrebno je posmatrati sve pojedine uticaje koji imaju udela u tačnosti visine repera. Zbog toga posmatrajmo pojedinačno pojedine izvore grešaka.

11.1. UTICAJ GREŠAKA VISINA DATIH REPERA

Uticaj grešaka visina datih repera na koje se nivelmanski vlak oslanja predstavljen je sabirkom $\mu^2_{\xi} A^* Q_{\xi} A$ u izrazu /11.7/. Kada se izvrše naznačena množenja, matrica dobija se matrica:

$$M_1^2 = \mu^2_{\xi} = \begin{Vmatrix} Q_{11}, & Q_{12}, & Q_{13}, & \ldots, & Q_{1n} \\ Q_{21}, & Q_{22}, & Q_{23}, & \ldots, & Q_{2n} \\ Q_{31}, & Q_{32}, & Q_{33}, & \ldots, & Q_{3n} \\ \hline Q_{n1}, & Q_{n2}, & Q_{n3}, & \ldots, & Q_{nn} \end{Vmatrix} \qquad \ldots/11.9/$$

gde se pojedini članovi matrice /11.9/ mogu uopšteno napisati

$$Q_{i,j} = /1-k_i/x/1-k_j/Q_{aa} + /k_i+k_j-k_ik_j/Q_{ab} + k_ik_jQ_{bb} \quad \ldots/11.10/$$

Medjutim ovi članovi ne govore mnogo o uticaju grešaka datih visina na visine repera u umetnutom vlaku. Zato učinimo pretpostavku; da je nivelmanski vlak sa jednakim stranama tj.

$$S_1 = S_2 = S_3 = \ldots = S_n = S_N = S$$

čime će se dobiti jednostavniji izgledi koeficijenata

$$k_i = \frac{iS}{NS} = \frac{i}{N} \qquad 1-k_i = \frac{N-i}{N} \qquad .../11.11/$$

Kada se izrazi /11.11/ unesu u /11.10/ dobijaju se jednostavniji izrazi koeficijenta korelacije Q_{ij}

$$Q_{ij} = \frac{1}{N^2} \, /N-i/ \, /N-j/Q_{aa} + \left[/N-i/j + /N-j/i \right] Q_{ab} + ijQ_{bb} \qquad .../11.12/$$

Kod koeficijenata /11.12/ matrice /11.9/ dijagonalni članovi daju nam mogućnost ocene tačnosti dok mešoviti članovi daju korelativnu zavisnost visina pojedinih repera u nivelmanskom vlaku. Tako dijagonalni članovi imaju izgled

$$Q_{ii} = \left[/N-i/^2 Q_{aa} + 2i/N-i/ \, Q_{ab} + i^2 \, Q_{bb} \right] \frac{1}{N^2} \qquad .../11.13/$$

Poslednji izraz pruža mogućnost da se izvrši analiza uticaja grešaka datih veličina, tj. visina datih repera, na visine pojedinih repera u umetnutom nivelmanskom vlaku. Veličina ovog uticaja zavisiće od mesta repera u vlaku tako da se redni broj repera u vlaku može uzeti kao nezavisna promenljiva u izrazu /11.13/ čijim se diferenciranjem dobija.

$$Q_{ii}' = \frac{2}{N^2} \left[i(Q_{aa} + Q_{bb} - 2Q_{ab}) - N(Q_{aa} - Q_{ab}) \right] = 0 \qquad .../11.14/$$

odakle je

$$i = \frac{N(Q_{aa} - Q_{ab})}{Q_{aa} + Q_{bb} - 2Q_{ab}} \qquad .../11.14a/$$

Pretpostavimo da su dati reperi iste tačnosti $Q_{aa} = Q_{bb}$ ali da izmedju njih postoji $Q_{ab} \neq 0$ korelativna zavisnost čime se dobija da je

$$i = \frac{N}{2} \qquad .../11.15/$$

Analiza pokazuje da Q_{ii} ima svoj minimum za vrednost $i = \frac{N}{2}$ odnosno visina repera koji se nalazi u sredini vlaka biće manje opterećena greškama visina datih repera od ma kog drugog repera u vlaku. Tako se za $i = \frac{N}{2}$ dobija

$$Q_{ii}=\frac{1}{N^2}Q_{\xi}\left[\left(N-\frac{N}{2}\right)^2+\left(\frac{N}{2}\right)^2\right]=0{,}5\,Q_{\xi}$$

Uz učinjene pretpostavke dobiće se jdnostavni izrazi za uticaj grešaka visina datih repera na visinu ma kog repera u vlaku:

$$M_1^2=\mu_{\xi}^2\frac{1}{N}\left[(N-i)^2+i^2\right] \qquad \ldots/11.16/$$

Sledeća tabela daje zavisnost uticaja grešaka datih veličina od položaja repera u vlaku

Tabela 11.1

i \ N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,50	0,56	0,63	0,68	0,72	0,76	0,78	0,80	0,82
2		0,56	0,50	0,52	0,56	0,59	0,63	0,65	0,68
3			0,63	0,52	0,50	0,51	0,53	0,56	0,58
4				0,68	0,56	0,51	0,50	0,51	0,52
5					0,72	0,59	0,53	0,51	0,50 =T
6						0,76	0,63	0,56	0,52
7							0,78	0,65	0,58
8								0,80	0,68
9									0,82

Koristeći prednju tabelu može se naći deo srednje greške nadmorske visine repera u vlaku koji potiče od grešaka datih veličina:

$$M_1^2=\mu_{\xi}^2\,Q_{aa}\,T=m_{\xi}^2\,T \qquad \ldots/11.17/$$

Prethodna tabela jasno ukazuje da uticaj grešaka datih veličina opada idući od krajeva vlaka ka sredini, a na sredini vlaka dostiže polovinu vrednosti srednje greške datih repera.

Koristeći izraz /11.12/ može se naći koliku korelativnu zavisnost, izmedju nadmorskih visina pojedinih repera u vlaku, daju visine datih repera. Pri tome ćemo pretpostaviti da su dati reperi medjusobno nezavisni tj. da je $Q_{ab} = 0$

$$N^2Q_{ij}=/N-i/\ /N-j/Q_{aa} + ijQ_{bb} \qquad ..../11.18$$

Ako usvojimo da su dati reperi iste tačnosti tj. da su im jednaki težinski koeficijenti $Q_{aa}=Q_{bb}=Q_{\xi}$ dobićemo:

$$Q_{ij}=\frac{1}{N^2}[N^2-N(i+j)+2ij]Q_{\xi}$$

Prema poslednjem izrazu vidi se da dati reperi uslovljavaju medju traženim reperima dosta veliku korelativnu zavisnost. Ova zavisnost je utoliko veća:

- što je u vlaku veći broj repera,
- što su reperi bliži jedan drugom i
- što su reperi bliži jednom kraju vlaka

Za	Q_{ij}		
N = 5	2	3	4
1	0,56	0,44	0,32
2		0,48	0,44
3			0,56

Tabela 11.2

Tabela 11.3

Za	Q_{ij}					
N = 8	2	3	4	5	6	7
1	0,69	0,59	0,50	0,41	0,31	0,22
2		0,56	0,50	0,44	0,38	0,31
3			0,50	0,47	0,44	0,41
4				0,50	0,50	0,50
5					0,56	0,59
6						0,69

Prethodna tvrdjenja jasno se vide iz prethodnih tabela gde su prikazani ovi koeficijenti za 4 i 7 repera u vlaku.

11.2. UTICAJ GREŠAKA MERENJA VISINSKIH RAZLIKA

Do uticaja grešaka merenja visinskih razlika na tačnost visine ma kog repera u vlaku može se doći polazeći od izraza /11.7/ pri čemu će se uticaj grešaka merenja visinskih razlika označiti sa M_2

$$M_2 = \mu_h^2 B^* Q_h B \qquad \text{..../11.20/}$$

gde je matrica B data izrazom /11.8/ matrica Q_h je matrici recipročnih vrednosti težina nivelanih visinskih razlika. Pošto su nivelane visinske razlike medjusobno nezavisne, to će ona biti dijagonalna matrica

$$Q_h = P^{-1} \begin{Vmatrix} S_1 & & & & & \\ & S_2 & & & & \\ & & S_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & S_n & \\ & & & & & S_N \end{Vmatrix} \qquad \text{.../11.21/}$$

Ako se usvoji da su sve nivelmanske strane medjusobno jednake tj. da je

$$S_1 = S_2 = S_3 = \ldots = S_n = S \qquad \text{.../11.22/}$$

dobija se

$$B^* Q_h B = \frac{1}{N} \begin{Vmatrix} N-1, & N-2, & N-3, & \ldots, & N-n \\ N-2, & 2(N-2), & 2(N-3), & \ldots, & 2(N-n) \\ N-3, & 2(N-3), & 3(N-3), & \ldots, & 3(N-n) \\ \hline N-n & 2a(N-n), & 3(N-n), & \ldots, & n(N-n) \end{Vmatrix}$$

Matrica kojom se definiše korelativna zavisnost izmedju pojedinih repera u vlaku, nastala zbog grešaka nivelanja, dobija se veoma jednostavno. Uzmimo dva primera: Neka je broj nivelmanskih strana u vlaku $N=11$ odnosno da u vlaku ima 10 repera

$$B^{*}Q\,B = \frac{1}{11}\left\| \begin{matrix} 10, & 9, & 8, & 7, & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1 \\ 9, & 18, & 16, & 14, & 12, & 10, & 8, & 6, & 4, & 2 \\ 8, & 16, & 24, & 28, & 28, & 25, & 12, & 19, & 6, & 3 \\ 7, & 14, & 21, & 28, & 24, & 20, & 16, & 12, & 8, & 4 \\ 6, & 12, & 18, & 24, & 30, & 25, & 20, & 15, & 10, & 5 \\ 5, & 10, & 25, & 20, & 25, & 30, & 24, & 18, & 12, & 6 \\ 4, & 8, & 12, & 16, & 20, & 24, & 28, & 21, & 14, & 7 \\ 3, & 6, & 9, & 12, & 15, & 18, & 21, & 24, & 16, & 8 \\ 2, & 4 & 6, & 8, & 10, & 12, & 14, & 16, & 18, & 9 \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10 \end{matrix} \right\|$$

Tabela 11.4

i drugi primer: neka u vlaku ima sedam strana odnosno 6 repera

$$B^{*}Q\,B = \frac{1}{7}\left\| \begin{matrix} 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1 \\ 5, & 10, & 8, & 6, & 3, & 2 \\ 4, & 8, & 12, & 9, & 6, & 3 \\ 3, & 6, & 9, & 12, & 8, & 4 \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 5 \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \end{matrix} \right\|$$

Tabela 11.5

Na prethodne dve matrice lako se uočava zakonitost. Naime matrica težinskih koeficijenata za $n=6$ repera /7 nivelmanskih strana/ dobija se kao deo matrice za $n=10$ repera tako što se od njenog gornjeg desnog i donjeg levog dela izdvoje dve trouglaste (gornja i donja) matrice od po 6 kolona (redova) koje se spoje u jednu kvadratnu matricu.

Za ocenu tačnosti interesantni su članovi na glavnoj dijagonali. Oni se mogu dobiti jednostavno po obrascu

$$Q_r = \frac{1}{p_r} = \frac{1}{N} r(N-r)S \qquad .../11.23/$$

što predstavlja recipročnu vrednost težine (težinski koeficijent) nepoznate kote.

11.3 UKUPNA GREŠKA NADMORSKE VISINE MA KOG REPERA U VLAKU

Greška nadmorske visine ma kog repera u vlaku može se dobiti sumirajući pojedine uticaje /11.16/ i /11.23/

$$M_{H_r}^2 = m_\xi^2 \frac{(N-r)^2 + r^2}{N^2} + \mu_h^2 S \cdot \frac{r(N-r)}{N} \qquad .../11.24/$$

Na taj način, može se sukcesivnim postupkom, vrlo jednostavno, doći do srednjih grešaka nadmorskih visina repera u svim vlakovima. Do srednjih grešaka nadmorskih visina čvornih repera može se doći iz posrednog izravnanja ili iz opštih aritmetičkih sredina.

Ako početni i završni reper nemaju istu tačnost onda se srednja greška visine ma kog repera u nivelmanskom vlaku može sračunati prema izrazu

$$M_{H_r}^2 = m_{H_P}^2 \frac{(N-r)^2}{N^2} + m_{H_Z}^2 \frac{r^2}{N^2} + \mu_h^2 S \frac{r(N-r)}{N} \qquad .../11.24a/$$

Iz samih izraza za srednje greške visina repera vidi se, da su pri njihovom izvodjenju uzimane u obzir greške datih repera, i slučajne greške nivelanja dok o sistematskih greškama nije vodjeno računa.

Svaki reper u nivelmanskom vlaku može se smatrati kao čvorni reper u kojem se sustiču dva nivelmanska vlaka koji polaze od datih repera. Visinske razlike od početnog (završnog) repera kao i dužine sabiraju se u jednu vrednost kao podatak dobijen merenjem

$$h_p = \sum_{i=1}^{r} h_i \qquad h_z = \sum_{i=r+1}^{N} h_i$$
$$S_p = \sum_{i=1}^{r} S_i \qquad S_z = \sum_{i=r+1}^{N} h_i \qquad \ldots/11.25/$$

Jasno je da se ovakvim računanjem, što se u praksi ne čini, reperi posmatraju kao pojedinačni a ne kao vezani u vlak. Pri tome se čini pretpostavka, da su svi reperi medjusobno nezavisni, što nije realno ali u znatnoj meri olakšava željeno dokazivanje

$$H_r = \frac{(H_p + h_p)p_p + (H_z - h_z)p_z}{p_p + p_z} \qquad \ldots/11.26/$$

$$H_r = H_p\left(\frac{p_p}{[p]}\right) + H_z\left(\frac{p_z}{[p]}\right) + \frac{h_p p_p + h_z p_z}{[p]} \qquad \ldots/11.27/$$

Odgovarajuća srednja greška, koristeći /10.11/ bila bi

$$M_{H_r}^2 = m_{H_p}^2\left(\frac{p_p}{[p]}\right)^2 + m_H^2\left(\frac{p_z}{[p]}\right)^2 + \frac{\mu_h^2}{[p]} + \lambda_s^2 \frac{r^2}{[p]^2} + \lambda_h^2 \frac{1}{[p]^2}(tg\alpha_p + tg\alpha_z)^2 \ldots/11.28/$$

$$M_{H_r}^2 = m_{H_p}^2\left(\frac{S_z}{S_z+S_p}\right)^2 + \left(\frac{S_p}{S_z+S_p}\right)^2 m_{H_z}^2 + \mu_h^2 \frac{S_p S_z}{S_p+S_z} + $$
$$+ \lambda_s^2 4\left(\frac{S_p S_z}{S_p+S_z}\right)^2 + \lambda_h^2 \frac{(tg\alpha_1 + tg\alpha_2)^2}{[p]^2} \qquad \ldots/11.29/$$

Prethodni izrazi važili bi za slučaj nivelanja visinskih razlika po terenu povoljnom za nivelanje. Za nepovoljan teren bilo bi

$$p_1 = \frac{1}{\Delta^2 p}; \quad p_z = \frac{1}{\Delta^2 z} \qquad /11.30/$$

$$M_{H_r}^2 = m_{H_p}^2\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta^2 p + \Delta^2 z}\right)^2 + m_{H_z}^2\left(\frac{\Delta^2 p}{\Delta^2 p + \Delta^2 z}\right)^2 + \mu_h^2 \frac{\Delta^2 p\, \Delta^2 z}{\Delta^2 p + \Delta^2 z} + \qquad \ldots/11.31/$$
$$+ \lambda_s^2 4\left(\frac{\Delta^2 p\, \Delta^2 z}{\Delta^2 p + \Delta^2 z}\right)^2 + \lambda_h^2\left(\frac{\Delta^2 p\, \Delta^2 z}{\Delta^2 p + \Delta^2 z}\right)^2 \cdot (tg\alpha_1 + tg\alpha_2)^2$$

Pod pretpostavkom:

Pod pretpostavkom:

- da su sve strane u vlaku, a samim tim i težine, jednake

- da nivelmanski vlak ide po terenu jednolikog pada tj. da je $tg\alpha_1 = - tg\alpha_2$

dobija se srednja greška nadmorske visine za ma koji (r-ti) reper u nivelmanskom vlaku,

$$M_{H_r}^2 = \frac{(N-r)^2}{N^2} m_{H_p}^2 + \left(\frac{r}{N}\right)^2 m_{H_z}^2 + \mu_\ell^2 S \frac{r(N-r)}{N} + 4\lambda_S^2 \left[S \frac{r(N-r)}{N}\right]^2 \qquad .../11.32/$$

i to za vlak koji ide po terenu povoljnom za nivelanje.

Za vlak koji ide po terenu nepovoljnom za nivelanje dobija se srednja greška

$$M_{H_r}^2 = m_{H_p}^2 \left(\frac{N-r}{N}\right)^2 + m_{H_z}^2 \left(\frac{r}{N}\right)^2 + \mu_\ell^2 S \frac{r(N-r)}{N} + 4\lambda_S^2 \left[S^2 \frac{r(N-r)}{N}\right]^2 \qquad .../11.33/$$

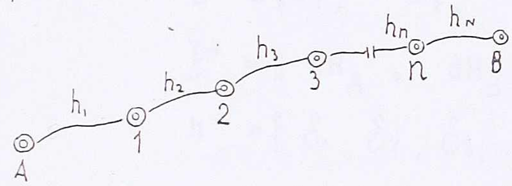
Iz uporedjenja izraza /11.32/ sa izrazom /11.24/ zaključuje se da su oni identični ali s tom razlikom što izraz /11.32/ sadrži i uticaj sistematskih grešaka merenja visinskih razlika. Prema tome on je dosta objektivan kod računanja srednje greške nadmorske visine repera u nivelmanskom vlaku.

XII D E O

12.1 SREDNJA GREŠKA ODSTUPANJA ZBIRA VISINSKIH RAZLIKA U NIVELMANSKOM VLAKU

U umetnutom nivelmanskom vlaku zbir merenih visinskih razlika treba da zadovolji uslov da je jednak razlici visina krajnjih tačaka

$$h_1+h_2+h_3+\dots+h_n+h_N=H_B-H_A \qquad .../12.1/$$



Ovaj uslov neće biti ispunjen kako zbog grešaka u merenju visinskih razlika tako i zbog grešaka nadmorskih visina datih repera. Odstupanje, kako se u praksi radi, označimo sa

$$f_h=(H_B-H_A)-\sum_{i=1}^{N} h_i \qquad .../12.2/$$

Odavde se može naći diferencijal odstupanja

$$d_h=dH_B-dH_A-dh_1-dh_2-dh_3-\dots-dh_n-dh_N \qquad .../12.3/$$

Pretpostavimo da je svaka nivelana visinska razlika h_i opterećena:

- Slučajnom greškom nivelanja δ_i

- Sistematskom greškom nivelanja koja je srazmerna dužini nivelmanske strane $\lambda_s S_i$ i

- Sistematskom greškom koja je srazmerna nivelanoj visinskoj razlici $\lambda_h h_i$

odnosno

$$dh_i=\delta_i+\lambda_s S_i+\lambda_h h_i \qquad .../12.4/$$

Sa ovom smenom dobiće se diferencijal odstupanja

$$df_h = dH_B - dH_A - \sum_{i=1}^{N}\delta_i - \lambda_s \sum_{i=1}^{N} S_i - \lambda_h \sum_{i=1}^{N} h_i \qquad .../12.5/$$

Matrično napisana jednačina bila bi

$$df_h = A^*\xi + B^*h - \lambda_s \sum_{i=1}^{N} S_i - \lambda_h \sum_{i=1}^{N} h_i \qquad .../12.6/$$

gde je:

$$A^* = \| -1, \quad -1 \|$$
$$B^* = \| -1, \quad -1, \quad -1, \ldots, -1 \|$$
$$\xi^* = \| dH_A, \quad dH_B \| \qquad .../12.7/$$
$$h^* = \| \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \delta_N \|$$

Odgovarajuća srednja greška bila bi

$$m_{f_h}^2 = \mu_\xi^2 A^* Q_\xi A + \mu_h^2 B^* Q_h B + \lambda_s^2 \left(\sum_{i=1}^{N} S_i\right)^2 + \lambda_h^2 \left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right)^2 \qquad .../12.8/$$

gde je:

$$Q_\xi = \begin{Vmatrix} Q_{aa}, & Q_{ab} \\ Q_{ab}, & Q_{bb} \end{Vmatrix}$$

$$Q_h = \begin{Vmatrix} \frac{1}{p_1} & & & & \\ & \frac{1}{p_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{p_n} & \\ & & & & \frac{1}{p_N} \end{Vmatrix} \qquad .../12.9/$$

Sada izvršimo naznačena množenja

$$\mu_\xi^2 A^* Q_\xi A = \mu_\xi^2 (Q_{aa} + Q_{bb} - 2Q_{ab}) \qquad .../12.10/$$
$$\mu_h^2 B^* Q_h B = \mu_h^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \qquad .../13.11/$$

Srednja greška odstupanja f_h biće

$$m_{f_h}^2 = \mu_\xi^2 (Q_{aa} - 2Q_{ab} + Q_{bb}) + \mu_h^2 \sum \frac{1}{p_i} + \lambda_s^2 \left(\sum_{i=1}^{N} S_i\right)^2 + \lambda_h^2 \left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right)^2 \qquad .../12.12/$$

Ovaj izraz može se uprostiti ako se pretpostavi da su dati reperi medjusobno nezavisni.

Kada se vlak oslanja na repere čije su nadmorske visine odredjene u postupku posrednog izravnanja nivelmanske mreže, tada se korelaciona matrica Q_{ξ} kao i srednja greška jedinice težine μ_{ξ}^2, preuzimaju iz posrednog izravnanja nivelmanske mreže.

$$m_{f_h}^2 = m_{H_A}^2 + m_{H_B}^2 + \mu_h^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} + \lambda_s^2 \left(\sum_{i=1}^{N} S_i\right)^2 + \lambda_h^2 \left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right)^2 \qquad .../12.13/$$

Kod nivelanja visinskih razlika moraju se razlikovati dva slučaja:

- nivelanje po terenu iste povoljnosti za nivelanje, pri čemu se težine odredjuju kao recipročne vrednosti dužina nivelmanskih strana

$$p_i = \frac{1}{S_i} \qquad .../12.14/$$

-drugi slučaj je, kada se nivelmanski vlak proteže duž terena različite povoljnosti za nivelanje. Tada se težine odredjuju po formuli

$$p_i = \frac{1}{\Delta_i^2} \qquad .../12.15/$$

Za ova dva slučaja dobijaju se odgovarajuće srednje greške odstupanja f_h

$$m_{f_h}^2 = m_{H_A}^2 + m_{H_B}^2 + \mu_h^2 \sum_{i=1}^{N} S_i + \lambda_s^2 \left(\sum_{i=1}^{N} S_i\right)^2 + \lambda_h^2 \left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right)^2 \qquad .../12.16/$$

$$m_{f_h}^2 = m_{H_A}^2 + m_{H_B}^2 + \mu_h^2 \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 + \lambda_s^2 \left(\sum_{i=1}^{N} S_i\right)^2 + \lambda_h^2 \left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right)^2 \qquad .../12.17/$$

Ako se pretpostavi da su dati reperi odredjeni sa istom tačnošću

$$m_{H_A} = m_{H_B} = m_{\xi} \qquad .../12.18/$$

poslednja dva izraza glasiće

$$m_{f_h}^2 = 2 m_{\xi}^2 + \mu_h^2 \sum_{i=1}^{N} S_i + \lambda_s^2 \left(\sum_{i=1}^{N} S_i\right)^2 + \lambda_h^2 \left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right)^2 \qquad .../12.19/$$

$$m_{f_h}^2 = 2m_\xi^2 + \mu_h^2 \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 + \lambda_s^2 \left(\sum_{i=1}^{N} S_i\right)^2 + \lambda_h^2 \left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right)^2 \qquad .../12.20/$$

Od poslednjih izraza može se preći na granična odstupanja, odnosno na dozvoljena odstupanja u nivelmanskom vlaku.

$$\Delta_h = t\sqrt{\mu_h^2 \sum_{i=1}^{N} S_i + \lambda_s^2 \left(\sum_{i=1}^{N} S_i\right)^2 + \lambda_h^2 \left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right)^2 + 2m_\xi^2} \qquad .../12.21/$$

$$\Delta_h = t\sqrt{\mu_h^2 \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 + \lambda_s^2 \left(\sum_{i=1}^{N} S_i\right)^2 + \lambda_h^2 \left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right)^2 + 2m_\xi^2} \qquad .../12.22/$$

12.2. MOGUĆNOST ODREDJIVANJA SLUČAJNIH I SISTEMATSKIH GREŠAKA NIVELANJA I GREŠAKA DATIH VELIČINA NA OSNOVU ODSTUPANJA ZBIRA VISINSKIH RAZLIKA U NIVELMANSKIM VLACIMA

Odstupanje zbira visinskih razlika od njegove teorijske vrednosti samo po sebi predstavlja grešku pa se njegova srednja greška može izjednačiti sa samom vrednošću odstupanja.

Pojedinačna odstupanja ne mogu mnogo da ukažu na moguće izvore grešaka. Zato odstupanja treba analizirati za čitavu mrežu te iz njih pronaći koji su mogući izvori grešaka.

Jedan od mogućih načina kojim se može naći vrednost ovih uticaja jeste da se usvoji pretpostavka:

- da su sva merenja izvršena sa istom slučajnom greškom μ_h koja će biti neka srednja vrednost za čitavu mrežu
- da se za sistematske greške usvoji takodje neka prosečna vrednost λ_s i λ_h
- da su dati reperi pogrešni za neku prosečnu srednju grešku m_ξ.

Prema ovome za svaki nivelmanski vlak može se napisati po jedna jednačina odstupanja oblika

$$v_i = \mu_h^2 [S]_i + \lambda_s^2 [S]_i^2 + \lambda_h^2 [h]_i^2 + 2m_\xi^2 - f_{h_i}^2 \qquad .../12.23/$$

Svakako da će ovih jednačina biti onoliko koliko ima i nivelmanskih vlakova /n/.

Do najverovatnijih vrednosti nepoznatih $\mu_h^2, \lambda_s^2, \lambda_h^2$ i m_ξ^2 možemo doći primenom metode najmanjih kvadrata posle čega ćemo sistem od n jednačina svesti na sistem od četiri normalne jednačine.

Za računanje ovih nepoznatih pogodnije je koristiti odstupanja u nivelmanskim vlacima nego u nivelmanskim poligonima, iz razloga što nam odstupanja nivelmanskih poligona ne mogu pružiti nikakvu informaciju o uticaju grešaka datih repera niti o vrednosti sistematske greške koja je srazmerna nivelanoj visinskoj razlici

Iz odstupanja nivelanskih poligona može se odrediti μ_h^2 i λ_s^2 pa sa tako odredjenim vrednostima ući u izraze /12.23/. Time bi se postiglo da na ove greške nemaju uticaja greške datih veličina koje, zbog svoje neujednačenosti, mogu znatno da iz deformišu. Na taj način, mogu se uticaji pojedinih izvora grešaka sračunati u dve etape.

12.3. PITANJE TEŽINA

Do težina pojedinih jednačina grešaka /12.23/ može se doći polazeći od izraza /12.19/

$$\frac{1}{p_{f_h}} = \mu_h^2 \left\{ [S] + \left(\frac{\lambda_s}{\mu_h}\right)^2 [S]^2 + \left(\frac{\lambda_h}{\mu_h}\right)^2 [h]^2 + 2\left(\frac{m_\xi}{\mu_h}\right)^2 \right\} \qquad .../12.24/$$

Kao prvo približenje može se usvojiti da su težine date poznatim izrazom

$$p_i = \frac{1}{[S]_i} \qquad .../12.25/$$

Pošto se odrede sistematske greške nivelanja i greške datih veličina može se izraz za računanje težina, prema potrebi, proširiti na ostale članove

$$\frac{1}{p_{f_h}} = [S] + \left(\frac{\lambda_s}{\mu_h}\right)^2 [S]^2 + \left(\frac{\lambda_h}{\mu_h}\right)^2 [h]^2 + 2\left(\frac{m_\xi}{\mu_h}\right)^2 \qquad .../12.26/$$

Jasno je da ovo proširenje ima smisla samo u slučaju kada ovi uticaji nisu zanemarljivi.

U jednačinama grešaka /12.23/, kao slobodni članovi figurišu kvadrati odstupanja f_h^2. Saglasno izrazima (3.41) težine jednačina grešaka dobiće se kao

$$p_v = (p_f)^2$$

ZAKLJUČAK

U radu tretirana je veoma aktuelna materija, odredjivanje graničnih grešaka u geodetskim mrežama. Sa razvojem merne tehnike i metoda rada ova problematika dobijaće sve više u značaju. Problem graničnih grešaka-dozvoljenih odstupanja postaje sve značajniji. Njegov značaj naročito se uvećava sa pojavom novih instrumenata i pribora.

Ranije, kada se raspolagalo manje preciznim instrumentima nisu toliko dolazili do izražaja svi izvori slučajnih a naročito sistematskih grešaka merenja. Pored toga, kod razvijanja mreža i merenja u njima, poštovao se princip "od većeg ka manjem". Tako je za dozvoljena odstupanja - granične greške bilo sasvim dovoljno uvažavati prisustvo delovanja slučajnih grešaka merenja i parametar t koji zavisi od usvojene verovatnoće $\Delta = F(\eta_l, t) \qquad t = f(p)$

Novi instrumenti i nove metode rada učinili su da se slučajne greške merenja svedu na najmanju meru. Medjutim uticaj spoljnih prilika i ostalih izvora sistematskih grešaka nije se bitno izmenio. Tako sistematske greške koje su nekada bile beznačajne, danas se sve više ističu, pa u merenjima visoke tačnosti i preciznim merenjima predstavljaju ozbiljnu smetnju daljem povećanju tačnosti merenja.

Merenja izvršena novim preciznim instrumentima uklapaju se u postojeće geodetske mreže odredjene nekada i pre 50 godina. Tačnost merenja izvršenih u datim mrežama često je ispod nivoa tačnosti merenja koja se u njih uklapaju. Zato se neminovno odstupa od principa "od većeg ka manjem". Samim tim, kod definisanja dozvoljenih odstupanja, neophodno je potrebno uvažavati i prisustvo grešaka datih veličina.

U radu je razmatran problem odredjivanja graničnih grešaka - dozvoljenih odstupanja. Istaknut je opšti oblik formule za računanje graničnih grešaka $\Delta = F(\eta, m_\xi, \lambda_0, \lambda, t)$ kojom bi se vodilo računa o :

- uticaju slučajnih grešaka merenja η
- uticaju grešaka datih veličina m_ξ
- uticaju sistematskih grešaka srazmernih merenoj veličini λ
- uticaju konstantne sistematske greške λ_0 . i
- parametru t zavisnom od usvojene verovatnoće

Medjutim, zbog složenosti materije, a naročito zbog nepoznavanja vrednosti pojedinih parametara koji su prisutni u prethodnoj formuli, nije bilo moguće u svim slučajevima dati stroge formule koje bi objektivno vršile selekciju izvršenim merenja. Izvedene stroge formule za granične greške po pravilu su veoma glomazne sa više parametara. često su vrednosti ovih parametara promenljive i unapred nisu poznate. Zbog nepoznavanja vrednosti pojedinih parametara, bilo bi nemoguće sračunati dozvoljena odstupanja. Zato su u radu učinjene odredjene pretpostavke, posle čega su dobijene dosta jednostavne aproksimativne formule koje u praksi mogu naći primenu.

Kriterijumi za granične greške merenja dati su sa ciljem da se preko njih vrši selekcija rezultata izvršenih merenja. Medjutim za istu vrstu merenja, isti pribor i istu metodu rada u raznim evropskim zemljama nisu iste dozvoljene granične greške. Ilustracije radi, mogu se uzeti izrazi za najveće dozvoljene razlike izmedju merenja dužina napred-nazad, poljskom pantljikom po terenu I kategorije za našu državu i SR Nemačku. Tu se jasno uočavaju razlike, ne samo izmedju koeficijenata koji figurišu u navedenim izrazima nego i u strukturi navedenih formula. Zato je u radu učinjen kritički osvrt na izraze za odredjivanje dozvoljenih odstupanja koja su ranije bila ili se i danas koriste u pojedinim evropskim državama.

U poslednje vreme sve je više prisutna pojava da se precizni radovi oslanjaju na radove izvedene sa manjom tačnošću. Zato se greške datih veličina ne mogu više smatrati kao zanemarljive. Zbog toga je pokušano da se da jedno opšte rešenje i postupak kako treba definisati dozvoljena odstupanja uzimajući pri tome u obzir sve uočene izvore grešaka.

Formula $\Delta = F(\eta, m_{\zeta}, \lambda_{..}, \lambda_{t})$ data je u najopštijem obliku i može se primeniti na sva merenja. Medjutim, kod njene konkretizacije može se naići na velike i često nepremostive teškoće, naročito praktične prirode.

Korišćenje opšteg izraza za dozvoljena odstupanja u poligonometrijskim mrežama dalo bi veoma opširne i za praksu nepodesne izraze. Posmatranje uticaja pojedinih izvora grešaka vršeno parcijalno. Pri tome su uvažavane odredjene pretpostavke što je dovelo do jednostavnijih izraza za granične greške-dozvoljena odstupanja. Koristeći ove izraze dolazi se do odredjenih zaključaka:

- Uticaj grešaka koordinata datih tačaka na tačnost položaja poligonometrijskih tačaka najveći je na početku i na kraju vlaka, dok idući ka sredini vlaka ovaj uticaj se smanjuje.

- Greške datih direkcionih uglova imaju najveći uticaj na tačnost položaja tačaka na sredini vlaka dok se idući ka krajevima vlaka ovaj uticaj smanjuje.

- Srednje greške merenja dužina i uglova povećavaju svoje delovanje idući od krajeva ka sredini vlaka.

- Sistematske greške merenja dužina kada je vlak razvučen jednakih strana i kada ide po terenu iste kategorije neće imati uticaja na tačnost položaja poligonometrijskih tačaka u vlaku.

Kod podužnih i poprečnih linearnih odstupanja svi navedeni izvori grešaka imaju svoje uticaje koji sumarno deluju. Njihovi uticaji na podužno i poprečno linearno odstupanje dati su sažeto u izrazima /5.111/ do /5.114/. Tu je važno uočiti da promena opažača i zamena pribora sa priborom iste tačnosti, povoljno utiče na smanjenje podužnog linearnog odstupanja ispruženog vlaka, dok kod poprečnog linearnog odstupanja zbog prethodnog izravnanja vrednosti merenja uglova, bolje je zadržati isti pribor i opažača.

Delovanje grešaka merenja visinskih razlika ima svoj uticaj na tačnost visina kako čvornog repera tako i repera u umetnutom nivelmanskom vlaku. Uticaj slučajnih grešaka nivelanja biće veći kada se u čvornom reperu sustiču dugački nivelmanski vlakovi. Analogno ovome, u nivelmanskom vlaku, uticaj grešaka nivelanja biće veći na nadmorske visine repera koji su bliži sredini vlaka, dok će visine repera koji su bliži datim reperima biti manje opterećene greškama nivelanja.

Sistematske greške nivelanja koje su srazmerne nivelanoj visinskoj razlici kao i one koje su srazmerne dužini nivelmanske strane, pod odredjenim uslovima, kako je to rasmatrano u poglavljima X i XI, neće ispoljavati svoj uticaj na tačnost nadmorskih visina repera u vlaku.

Visine datih repera odredjene su sa nekim greškama. O tim greškama moguće je voditi računa kako pri izravnanju tako i prilikom ocene tačnosti. Pri tome se pretpostavlja da su geodetske tačke solidno stabilizovane i da ne podležu nikakvim pomeranjima. Medjutim, usled "disanja" zemljine kore moguće je pomeranje tačaka po vertikali. Bilo bi poželjno, ako je moguće da se i o ovoj činjenici vodi računa prilikom odredjivanja dozvoljenih visinskih odstupanja u vlacima. Tom pitanju trebalo bi posvetiti posebnu pažnju. Ponekad se zahteva da se sprovede posebno nivelanje u cilju utvrdjivanja pouzdanosti visina datih repera. Greške apsolutnih visina datih repera, naročito će ispoljavati svoje delovanje na nadmorske visine njima bliskih repera dok će od njih udaljeniji reperi manje biti opterećeni greškama datih visina.

U radu je istaknutá činjenica da sistematske greške merenja imaju mali uticaj na položaj tačaka u vlaku. Smanjenje njihovog uticaja postiže se u uobičajenim načinom raspodele odstupanja. Pri tome se sistematske greške iz popravljenih koordinatnih i visinskih razlika uglavnom odstrane. Zato, prilikom uzimanja u obzir greška datih veličina, u njima ne figurišu sistematske greške. Medjutim, u nepopravljenim koordinantnim visinskim razlikama sistematske greške ispoljavaju svoje puno delovanje, te je stoga o njima potrebno voditi računa.

Na kraju, sva odstupanja koja se računaju u poligonometrijskim i nivelmanskim mrežama, pod pretpostavkom da u njima nema grubih grešaka merenja, mogu pružiti nekakvu informaciju o postignutoj tačnosti merenja odnosno o greškama datih veličina. Kolike su greške merenja a kolike su greške datih veličina ne može se saznati iz pojedinačnih odstupanja. Kada se sva ova odstupanja posmatraju za jednu veću mrežu i na njih primeni metoda najmanjih kvadrata može se odrediti vrednost pojedinačnih grešaka.

Svako odstupanje može se smatrati kao jedna jednačina grešaka u kojoj su nepoznate kvadrati srednjih grešaka merenja i srednjih grešaka datih veličina a slobodan član kvadrat samog odstupanja. Ovakvih jednačina grešaka ima onoliko koliko ima i vrednosti odstupanja. Primenom metode najmanjih kvadrata može se od jednačina grešaka formirati sistem normalnih jednačina u kojima će kao nepoznate figurisati kvadrati slučajnih i sistematskih grešaka merenja kao i grešaka datih veličina. Pri formiranju normalnih jednačina veoma je važno izvršiti pravilno računanje težina pojedinih jednačina popravaka. Pitanje težina kvadrata odstupanja načelno je rešeno u poglavlju /3.5/ ovoga rada. Kada se za kvadrate srednjih grešaka dobiju male negativne vrednosti može se smatrati da su vrednosti tih srednjih grešaka jednake nuli odnosno zanemarljive.

Pitanje dozvoljenih odstupanja u geodetskim mrežama nije u ovom radu do kraja rešeno. Namera je bila da se ukaže na put rešavanja problema dozvoljenih odstupanja. Odredjivanje konačnih izraza za dozvoljena odstupanja kao i odredjivanje odgovarajućih koeficijenata u tim izrazima mora biti permanentan rad koji će pratiti razvoj merne tehnike i mogućnosti novih instrumenata.

LITERATURA

/1/ Boljšakov V.D., Markuze JU.I., Gromov E.V. K uravnivaniju ocenke tačnosti i proektovaniju poligonometričaskih setej. Geodezija i earofotosmeka, Moskva 1972. godine sveska 4.

/2/ Boljšakov i dr. Spravočnik geodezista, Moskva 1975. godine.

/3/ Vračarić K. Magistarski rad 1974. god.

/4/ Zajceva N.S. Obobšćenaja formula ošibki položenija punkta. Geodezija i aerofotosemka, Moskva 1968.g.sv.3

/5/ Ivanović B. Teoriska statistika, Beograd 1973. god.

/6/ Instrukcija za topografsko snimane v mašćabi 1:10000, 1:5000 i 1:2000 Sovija 1967. godine

/7/ Instrukcija po proizvodstvu topografo-geodezičeskih rabot, Moskva 1964. god.

/8/ Jovanović M. Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Beograd 1971. god.

/9/ Gradska trigonometrijska mreža, Doktorska disertacija, Jovanović M., Beograd 1963. god.

/10/ Jovanović M. Gradska trigonometrijska mreža, Zbornik geodetskog instituta br. 1, Beograd 1958. god.

/11/ Litvinov B.A. Osnovnie voprosi postroenija i uravnivanija poligonometričeskih setej. Geodezizdat, Moskva 1962. god.

/12/ Macarol S. Praktičana geodezija, Zagreb 1960. god.

/13/ Mitić M. Geodezija I, Beograd 1961. god.

/14/ Mitić M. Geodezija II, Beograd 1961. god.

/15/ Mihailović K. Geodezija II, prvi deo Beograd 1974. god.

/16/ Mihailović K. Geodezija II, drugi deo Beograd 1978. god.

/17/ Mihailović K. Izravnanje korelativno zavisnih veličina, skripta Beograd 1968. god.

/18/ Mihailović K. Predavanja održana na III stepenu studija Geodetskog odseka 1968/69. god.

/19/ Mihailović K. Dozvoljena uglovna odstupanja u poligonometrijskom vlaku. Geodetska služba r.3, Beograd 1972. god.

/20/ Narobe Z. Doktorska disertacija, Zagreb 1965. god.

/21/ Pavlov Ob odnoj ošibke pri isledonanii uglovnih pogrešnostej v poligonometrii . Izvestija VUZ-Geodezija i aerofotosjemka Moskva 1966. god. sveska 2.

/22/ Perović G. Magistarski rad, Beograd 1977. god.

/23/ Savezna geodetska uprava. Osnovni geodetski radovi u FNRJ, Beograd 1953. god.

/24/ Savezna geodetska uprava. Pravilnik za državni premer II-A deo, Osnovni radovi na gradskom premeru, Beograd 1956. god.

/25/ Savezna geodetska uprava. Pravilnik za državni premer II i III deo, Beograd 1958. god.

/26/ Pravilnik o katastarskom premeravnju IV deo: Nivelman Beograd 1930. god.

/27/ Svečnikov N. Prilog razmatranju odredjivanja dozvoljenih odstupanja u poligonometrijskim mrežama, Geodetski list, Zagreb 1961. god. broj 10-12.

/28/ Svečnikov N. Trigonometrijska mreža grada Beograda, Beograd 1961. godine.

/29/ Svečnikov N. Viša geodezija Beograd 1955. godine.

/30/ Sviščev I.S. Geodezija Zemun 1924. god.

/31/ Trevogo I.S. O sotnošenii poprečnogo i prodoljnogo sdvigov v hodah gorodskoj i inenjernoj poligonometrii, Geodezija, kartografija i aerofotosemka, Moskva 1974 god. sv. 19

/32/ Franc A. Geodäsie und Photogrammetrie 1. Teil Beč 1950.g.

/33/ Franc A. Geodäsie und Photogrammetrie 2. Teil Beč 1956.g.

/34/ Fridrih H. Niederen geodäsie, Beč 1910. god.

/35/ Heinz W. Einführung in die Fermessungstechnik, Bon 1971.g.

/36/ čebotarev A.S. Geodezija čast II Moskva 1949. god.

/37/ činklović Nikola. Doktorska disertacija Beograd 1960. g.

/38/ činklović N. Predavanja održana na III stepenu studija na Geodetskom odseku 1968/69 god.

/39/ Böhm J. Vyrovnavacipočet. čast I Theorie chyb, čast III, Systematice shyby a funčni zavislosti. Praha 1958,59 god.

/40/ Anweisung für die Bestimmung von Fermessugspunkten, Unveränderter Nachdruck 1967. god.

/41/ Kosačenko A.A. Ocenka tačnosti geodezičeskih setej s učetom ošibok ishodnih danih. Naučni trudi omskogo ordena Lenjina seljskoholjzajstvenogo instituta Im.S.M. Kirov.1974. god. Omsk.