

Универзитет у Београду
Грађевински факултет
Одсек за геодезију

мр Олег Р. Одаловић, дипл. геод. инж.

**МЕТОДОЛОГИЈА ОДРЕЂИВАЊА ГРОИДА
ВИСОКЕ РЕЗОЛУЦИЈЕ ЦЕНТИМЕТАРСКЕ ТАЧНОСТИ
ЗА ТЕРИТОРИЈУ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ**

Докторска дисертација

Београд, 2005.

ГД 18655

Универзитет у Београду
Грађевински факултет
Одсек за геодезију

мр Олег Р. Одаловић, дипл. геод. инж.

**МЕТОДОЛОГИЈА ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА
ВИСОКЕ РЕЗОЛУЦИЈЕ ЦЕНТИМЕТАРСКЕ ТАЧНОСТИ
ЗА ТЕРИТОРИЈУ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ**

Докторска дисертација

Београд, 2005.

НИР... СКОПЈЕ
УИ
и. Бр. 136510



Чланови комисије:

Датум одбране: _____

МЕТОДОЛОГИЈА ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА ВИСОКЕ РЕЗОЛУЦИЈЕ ЦЕНТИМЕТАРСКЕ ТАЧНОСТИ ЗА ТЕРИТОРИЈУ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

АПСТРАКТ

Дисертација је посвећена одређивању геоида за територију Републике Србије, односно методологији одређивања геоида високе резолуције центиметарске тачности.

Теорија потенцијала Земљине теже, методе одређивања геоида, домаћа и светска достигнућа у овој области приказани су кроз првих 5 поглавља, а посебна пажња посвећена је *remove-restore* методи.

Кроз нумеричка истраживања детаљно су разматране дуготаласне, средњеталасне и краткоталасне карактеристике ундулација на територији Србије, а сагласно релевантним и расположивим подацима. Дуготаласна карактеристика ундулација третирана је кроз прилагођени глобални геопотенцијални модел EGM96, средњеталасна интегралним моделом геодезије на бази детаљног гравиметријског премера, а краткоталасна на основу дигиталног модела терена резолуције 1 лучне секунде и то применом резидуалног модела терена.

Примењен је концепт сферне апроксимације и одређивања аномалијских висина, а накнадно су одређене елипсодне корекције и ундулације геоида.

Упоређењем одређених ундулација са ундулацијама одређених методом GPS/нивелман показано је да се, на основу расположивих података, трансформација елипсоидних висина у ортометријске може извршити са максималним одступањем од ± 5 cm и то за 90% територије Србије.

Кроз закључна разматрања указано је на могуће разлоге дециметарских одступања и дат је низ предлога за будућа одређивања центиметарског геоида високе резолуције Србије.

Кључне речи: геоид, квазигеоид, елипсоид, ундулација, аномалијска висина, елипсоидна висина, ортометријска висина, *remove-restore*.

METHODOLOGY OF GEOID DETERMINATION OF HIGH RESOLUTION AND CENTIMETER LEVEL ACCURACY IN SERBIA

ABSTRACT

Dissertation is committed to geoid determination for the territory of Republic of Serbia, i.e. methodology of geoid determination of high resolution and centimeter level accuracy.

Theory of gravity potential, methods of geoid determination, achievements in this field thought out the World have been shown within the first five chapters and special attention has been paid to remove-restore procedure.

By numerical researches long, medium and short wavelength characteristics of undulations have been considered in details thought out the territory of Serbia, and according to relevant and available data. Long wavelength characteristic has been treated by usage of adapted global geopotential model EGM96, medium wavelength by integrated model of geodesy on basis of detailed gravimetric survey and short wavelength on basis of digital terrain model with resolution of 1 arc second and by usage of residual model of terrain.

The concept of spherical approximation and anomaly heights determination has been used, and further on ellipsoidal correction and geoid undulations have been determined.

By comparison of determined undulations with the ones determined by the method of GPS/leveling has been showed, that on the basis of available data, transformations of ellipsoid height into orthometric can be done with the maximum discrepancies of ± 5 cm for 90% territory of Serbia.

By conclusive considerations possible reasons of the decimeter level discrepancies have been shown and a serial of recommendations for the future determination of Serbia high resolution centimeter level geoid.

Key words: geoid, quasigeoid, ellipsoid, undulation, anomaly heights, ellipsoid height, orthometric height, remove-restore.

ПРЕДГОВОР

У последње две деценије предложен је велики број метода у циљу одређивања геоида за локална подручја, односно подручја континента или држава.

Сви предлози базирају се на Стоксовој методи, редовима Молоденског или на интегралном (операционом) приступу, а посебна пажња посвећује се remove-restore методи у којој се геоид одређује путем дуготаласних, средњеталасних и краткоталасних карактеристика ундулација геоида.

Разлог овог великог интересовања свакако је масовна употреба глобалног система за позиционирање (Global Positioning System - GPS) који је успостављен од стране америчког министарства одбране.

Применом GPS могуће је релативно једноставно одредити елипсоидне висине тачака, а познавање геоида односно квазигеоида омогућава да се класичне и напорне геодетске методе могу у значајној мери заменити једноставном трансформацијом елипсоидних висина у ортометријске односно нормалне висине.

Предмет научног истраживања ове дисертације представља управо облик геоида /квазигеоида, референтних површи физички дефинисаних ортометријских/нормалних висина са циљем да се:

прецизно дефинише методологија одређивања њихових облика за територију Републике Србије, на начин који ће обезбедити квалитет неопходан да се за највећи део практичних потреба може извршити једноставна трансформација сателитски одређених елипсоидних висина у систем ортометријских/нормалних висина.

Полазна хипотеза дисертације је следећа:

геоид центиметарске тачности може се одредити ако се при примени remove-restore методе посебна пажња посвети:

- оптималној расподели, врсти, броју и квалитету података на основу којих се геоид/квазигеоид одређује,
- адекватној употреби глобалног геопотенцијалног модела и његова адаптација тренду садржаном у подацима,
- прецизној дефиницији резолуције и квалитета дигиталних модела терена и густина са аспекта гравитационог утицаја топографских маса,
- моделским и нумеричким побољшањима алгоритама садржаним у remove-restore методи.

Дисертација је подељена у седам поглавља од којих су прва четири посвећена теорији потенцијала Земљине теже, методологији одређивања геоида и светским достигнућима у

овој области, а у последња два поглавља приказана су нумеричка истраживања извођена за потребе дисертације као и низ закључака и препорука за будућа одређивања.

У поглављу ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ кратко су описане основе теорије: увођење потенцијала у изучавање теже Земље, затим раздвајање проблема одређивања потенцијала на одређивање спољашњег и унутрашњег потенцијала, увођење аномалијског потенцијала и његових функционала, све до дефиниције проблема граничних вредности теорије потенцијала.

У поглављу ПАРАМЕТАРСКИ И ИНТЕГРАЛНИ ПРИСТУП ПРИ РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ приказани су начини решавања проблема, кроз решење првог граничног проблема, Стоксову теорију и теорију Молоденског, као и интегрални (операциони) приступ.

Методе које се данас користе у одређивању геоида приказане су у поглављу МЕТОДОЛОГИЈА ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА, а посебна пажња посвећена је remove-restore методи и одређивању геоида путем одређивања таласних карактеристика.

Поглавље ПРИМЕРИ ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА У СВЕТУ И СРБИЈИ посвећено је одређивањима која су извршена у последњих 5 година, као што су геоид Земље који је одређен на бази примене глобалног геопотенцијалног модела, геоид Аустрије, геоид Сједињених Америчких Држава и ретким одређивањима геоида у Србији.

Коначно, поглавље НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА посвећено је методологији одређивања геоида за територију Републике Србије, а сви прорачуни извршени су коришћењем програмског пакета за моделирање поља убрзања Земљине теже – GRAVSOFT (Tscherning, 2002) за који се може рећи да представља званичан софтвер Међународне асоцијације за геодезију (International Association of Geodesy - IAG).

ПРИЗНАЊА

Овај рад, који је настао као производ петогодишњих истраживања, у теоријском, експерименталном и нумеричком делу у значајној мери зависи је од помоћи великог броја људи.

Пре свега, своју захвалност дугујем проф. др Наталији Братуљевић Машановић за дугогодишњу подршку, стрпљење и разумевање, који су имали велики значај у мом истраживачком раду, не само у оквиру последњих пет година, већ у готово претходне две деценије.

Такође, посебну захвалност дугујем и проф. др Радовану Мркићу за интересовање, подстрек и савете који су ми значајно помогли и то не само у оквиру научних истраживања.

Захвалност на саветима при избору теме и дефинисању наслова овог рада, помоћи при обезбеђивању литературе, непрекидно интересовање и благовременим примедбама које су значајно допринеле да се рад обради и прикаже у оваквом обиму и облику, дугујем доц. др Драгану Благојевићу.

У току истраживања све неопходне податке о нивелманским мрежама, астрогеодетским одређивањима, гравиметријском премери и низу других релевантних података и чињеница преузео сам од доц. др Синише Делчева и проф. др Мирослава Старчевића, па им се због тога посебно захваљујем.

Захвалност дугујем и проф. др Ивану Алексићу на саветима и сарадњи, посебно у оквиру експерименталног дела овог рада. Његова подршка, разумевање и иницијатива за истраживачки рад, значајно су допринели да се обезбеде неопходни подаци и информације, који су ми омогућили да рад прикажем у оваквом облику.

Посебно, захваљујем се члановима Сектора за основне геодетске радове Републичког геодетског завода, на сарадњи у последње три године, а захвалност такође дугујем и члановима Војногеографског Института Војске Србије и Црне Горе, који су ми несебично уступили податке неопходне за формирање дигиталног модела терена Србије.

Коначно, највећу захвалност дугујем својим најближима.

Београд, 2005.

Олег Одаловић

САДРЖАЈ

1	УВОД	1
2	ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ	4
2.1	ПОТЕНЦИЈАЛ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ.....	4
2.2	СПОЉАШЊИ И УНУТРАШЊИ ПОТЕНЦИЈАЛ	7
2.3	ПОТЕНЦИЈАЛ НОРМАЛНЕ ЗЕМЉЕ	8
2.4	АНОМАЛИЈСКИ ПОТЕНЦИЈАЛ	9
2.5	ПРИРОДНЕ И ГЕОДЕТСКЕ КООРДИНАТЕ.....	10
2.6	УНДУЛАЦИЈА ГЕОИДА И УГАО ОДСТУПАЊА ВЕРТИКАЛЕ	12
2.7	АНОМАЛИЈСКА ВИСИНА	14
2.8	АНОМАЛИЈА УБРЗАЊА И ПОРЕМЕЋАЈНО УБРЗАЊЕ	15
2.9	АНОМАЛИЈЕ СЛОБОДНОГ ВАЗДУХА И УГАО ОДСТУПАЊА ВЕРТИКАЛЕ У ТАЧКАМА НА ФИЗИЧКОЈ ПОВРШИ ЗЕМЉЕ	17
2.10	ДИРИХЛЕОВ, НОЈМАНОВ И ТРЕЋИ ПРОБЛЕМ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА	18
3	ПАРАМЕТАРСКИ И ИНТЕГРАЛНИ ПРИСТУП ПРИ РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ	20
3.1	ПАРАМЕТАРСКИ ПРИСТУП	20
3.1.1	РЕШЕЊЕ ПРВОГ ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА.....	21
3.1.2	СТОКСОВО РЕШЕЊЕ	22
3.1.3	РЕШЕЊЕ МОЛОДЕНСКОГ.....	25

3.2	ОПЕРАЦИОНИ ИЛИ ИНТЕГРАЛНИ ПРИСТУП.....	30
3.2.1	КОНЦЕПТ ПРИСТУПА.....	30
3.2.2	РЕШЕЊА ИНТЕГРАЛНОГ МОДЕЛА	36
3.2.3	РЕШЕЊА ОСНОВНОГ МОДЕЛА.....	37
3.2.4	РЕШЕЊА ПОСЕБНИХ МОДЕЛА.....	40
4	МЕТОДОЛОГИЈА ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА	41
4.1	ТЕРЕСТРИЧКЕ МЕТОДЕ	42
4.1.1	ОДРЕЂИВАЊЕ УНДУЛАЦИЈЕ ПРИМЕНОМ АСТРОГЕОДЕТСКОГ НИВЕЛМАНА.....	42
4.1.2	ОДРЕЂИВАЊЕ УНДУЛАЦИЈЕ ПРИМЕНОМ СТОКСОВЕ ФОРМУЛЕ	45
4.2	САТЕЛИТСКЕ МЕТОДЕ ОДРЕЂИВАЊА.....	48
4.2.1	МЕТОДЕ БАЗИРАНЕ НА АЛТИМЕТРИЈСКИМ ИЛИ ГРАДИОМЕТРИЈСКИМ РЕЗУЛТАТИМА ОПАЖАЊА	49
4.2.2	ОДРЕЂИВАЊЕ УНДУЛАЦИЈЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ОПАЖАЊА ПУТАЊЕ САТЕЛИТА.....	51
4.3	ПРИМЕНА ИНТЕГРАЛНОГ МОДЕЛА	51
4.3.1	ЕМПИРИЈСКЕ КОВАРИЈАНСЕ ФУНКЦИОНАЛА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА	52
4.3.2	АНАЛИТИЧКА ФУНКЦИЈА КОВАРИЈАНСИ	53
4.4	КОМБИНОВАНЕ МЕТОДЕ	55
4.5	REMOVE-RESTORE МЕТОДА	57
4.6	ДУГОТАЛАСНА КАРАКТЕРИСТИКА.....	60
4.7	КРАТКОТАЛАСНА КАРАКТЕРИСТИКА.....	61
4.7.1	УТИЦАЈ ВИДЉИВИХ ТОПОГРАФСКИХ МАСА И ЕЈРИЈЕВ МОДЕЛ	61
4.7.2	ЕЈРИЈЕВ ИЗОСТАТИЧКИ МОДЕЛ.....	62
4.7.3	РЕЗИДУАЛНИ МОДЕЛ ТЕРЕНА.....	64
4.7.4	ПОДЕЛА ТОПОГРАФСКИХ МАСА НА ТЕЛА ПРАВИЛНОГ ГЕОМЕТРИЈСКОГ ОБЛИКА	66
4.7.5	ИЗРАЗИ ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ КРАТКОТАЛАСНИХ КАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦИОНАЛА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА.....	67

4.8	СРЕДЊЕТАЛАСНА КАРАКТЕРИСТИКА.....	69
4.8.1	СТОКСОВА ФОРМУЛА, РЕШЕЊЕ МОЛОДЕНСКОГ И REMOVE - RESTORE МЕТОДА.....	69
4.8.2	ИНТЕГРАЛНИ МОДЕЛ И REMOVE - RESTORE МЕТОДА.....	70
5	ПРИМЕРИ ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА У СВЕТУ И ДОСАДАШЊА ОДРЕЂИВАЊА У СРБИЈИ	72
5.1	ГЛОБАЛНИ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИ МОДЕЛ EGM96	72
5.2	КВАЗИГЕОИД ЕВРОПЕ EGG97	74
5.3	ОДРЕЂИВАЊА ЛОКАЛНИХ ГЕОИДА	76
5.4	ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА У СРБИЈИ	78
6	НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА	83
6.1	ПРИКУПЉАЊЕ ПОДАТАКА.....	83
6.1.1	ДЕТАЉНИ ГРАВИМЕТРИЈСКИ ПРЕМЕР	83
6.1.2	ПРИКУПЉЕНИ ПОДАЦИ ЗА ПОТРЕБЕ ФОРМИРАЊА ДИГИТАЛНОГ МОДЕЛА ТЕРЕНА.....	86
6.1.3	ЕЛИПСОИДНЕ ВИСИНЕ ТАЧАКА ФУНДАМЕНТАЛНИХ РЕПЕРА НВТ2 И ОРТОМЕТРИЈСКЕ ВИСИНЕ ТАЧАКА РМС.....	87
6.1.4	РЕЗУЛТАТИ АСТРОНОМСКИХ ОДРЕЂИВАЊА ЛАТИТУДЕ И ЛОНГИТУДЕ	89
6.2	ПРИПРЕМА ПОДАТАКА	90
6.2.1	ТРАНСФОРМАЦИЈА ВИСИНА ТАЧАКА ДЕТАЉНОГ ГРАВИМЕТРИЈСКОГ ПРЕМЕРА	91
6.2.2	ТРАНСФОРМАЦИЈА ВРЕДНОСТИ УБРЗАЊА ИЗ ПОТСДАМСКОГ У СИСТЕМ ISGN71.....	93
6.2.3	ТРАНСФОРМАЦИЈА КООРДИНАТА ТАЧАКА У WGS84	98
6.3	ФОРМИРАЊЕ ФИНАЛНИХ СКУПОВА И ОДАБИРАЊЕ ПОДАТАКА.....	95
6.3.1	КРЕИРАЊЕ ДИГИТАЛНОГ МОДЕЛА ТЕРЕНА	95
6.3.2	РАЧУНАЊЕ АНОМАЛИЈА СЛОБОДНОГ ВАЗДУХА.....	96
6.3.3	ОДРЕЂИВАЊЕ УНДУЛАЦИЈА НА БАЗИ ПОЗНАВАЊА ОРТОМЕТРИЈСКИХ И ЕЛИПСОИДНИХ ВИСИНА ТАЧАКА	99
6.3.4	АНАЛИЗА И ОДАБИРАЊА ПОДАТАКА.....	99

6.4	ОДРЕЂИВАЊЕ ДУГОТАЛАСНИХ КАРАКТЕРИСТИКА АНОМАЛИЈА СЛОБОДНОГ ВАЗДУХА И АНОМАЛИЈСКИХ ВИСИНА	101
6.5	ПРИЛАГОЂАВАЊЕ ГЛОБАЛНОГ МОДЕЛА EGM96	104
6.5.1	ПРИЛАГОЂАВАЊЕ ГЛОБАЛНОГ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНОГ МОДЕЛА.....	105
6.5.2	ПРИЛАГОЂАВАЊЕ МОДЕЛА EGM96 ТЕРИТОРИЈИ СРБИЈЕ	107
6.5.3	ПРИМЕНА МОДЕЛА EGM96T	113
6.6	ОДРЕЂИВАЊЕ КРАТКОТАЛАСНИХ КАРАКТЕРИСТИКА АНОМАЛИЈА УБРЗАЊА.....	114
6.7	РЕЗИДУАЛНЕ АНОМАЛИЈЕ	115
6.8	ЕМПИРИЈСКЕ КОВАРИЈАНСЕ И АНАЛИТИЧКА ФУНКЦИЈА КОВАРИЈАНСИ	118
6.9	СРЕДЊЕТАЛАСНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ АНОМАЛИЈСКИХ ВИСИНА.....	119
6.10	КРАТКОТАЛАСНА И ДУГОТАЛАСНА КАРАКТЕРИСТИКА АНОМАЛИЈСКИХ ВИСИНА У ТАЧКАМА ПРЕДИКЦИЈЕ.....	121
6.11	УКУПНА АНОМАЛИЈСКА ВИСИНА, ЕЛИПСОИДНА КОРЕКЦИЈА И ОДРЕЂИВАЊЕ ГЕОИДА	124
6.12	КОМБИНОВАНО РЕШЕЊЕ	127
6.12.1	ФОРМИРАЊЕ И АНАЛИЗА РАЗЛИКА ГРАВИМЕТРИЈСКИХ И GPS/dh УНДУЛАЦИЈА.....	127
6.12.2	МОДЕЛИРАЊЕ РАЗЛИКА И КОМБИНОВАНО РЕШЕЊЕ.....	129
7	ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА	133
7.1	КОРИШЋЕНИ ПОДАЦИ	133
7.2	ПОДАЦИ У ПРОЦЕСУ ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА	135
7.3	ПРЕПОРУКЕ ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ ГЕОИДА СРБИЈЕ	136
7.4	МЕЂУНАРОДНА САРАДЊА.....	137
8	ЛИТЕРАТУРА	140

БИОГРАФИЈА

СПИСАК КОРИШЋЕНИХ СКРАЋЕНИЦА

EGG97	-	Гравиметријски геонид Европе 1997 (European Gravimetric Geoid 1997)
EGM96	-	Геопотенцијални модел (Earth Geopotential Model 1996)
EGM96T	-	Прилагођени геопотенцијални модел
EUVN	-	Европска вертикална референтна мрежа (European Vertical Reference Network)
ETRS89	-	Европски терестрички референтни систем 1989 (European Terrestrial Referent System 1989)
GGM	-	Глобални геопотенцијални модел
GPS	-	Глобални систем за позиционирање (Global Positioning System)
GRS80	-	Геодетски референтни систем 1980 (Geodetic Referent System 1980)
IAG	-	Међународно удружење за геодезију (International Association of Geodesy)
IM	-	Интегрални модел
TOPO	-	Ознака за утицај топографских маса
UELN	-	Уједињена европска нивелманска мрежа (United European Leveling Network)
WGS84	-	Светски геодетски систем 1984 (World Geodetic System 1984)
ВГИ	-	Војно Географски Институт, Војска Србије и Црне Горе
ДГП	-	Детаљни гравиметријски премер
ДМТ	-	Дигитални модел терена
ИГ	-	Институт за Геодезију, Грађевински факултет, Универзитет у Београду
НВТ2	-	Мрежа нивелмана високе тачности 2
НВТ1	-	Мрежа нивелмана високе тачности 1
РМС	-	Референтна мрежа Србије
СГУ	-	Савезна геодетска управа Социјалистичке Федеративне Републике Југославије

СПИСАК КОРИШЋЕНИХ ОЗНАКА

Правоугле координате

X, Y, Z	-	Осе правоуглог координатног система
x, y, z	-	Правоугле просторне координате

Геодетске координате

B	-	Геодетска латитуда
L	-	Геодетска лонгитуда

Географске координате

Φ	-	Астрономска латитуда
Λ	-	Астрономска лонгитуда

Сферне координате

θ	-	Поларно растојање
λ	-	Геоцентрична лонгитуда
r	-	Радијус вектор

Висине

h	-	Елипсоидна висина
H^O	-	Ортометријска висина
H^N	-	Нормална висина
N	-	Ундулација геоида
ζ	-	Аномалијска висина

Потенцијали

V	-	Потенцијал убрзања гравитационе силе
Φ	-	Потенцијал убрзања центрифугалне силе Земљине ротације
W	-	Потенцијал убрзања силе Земљине теже
U	-	Нормални потенцијал
T	-	Аномалијски потенцијал

Густине

ρ	-	Густина
κ	-	Површинска густина

Вектори, компоненте, интензитети

\vec{F}	-	Вектор гравитационе силе
\vec{r}	-	Вектор положаја
\vec{F}	-	Вектор силе Земљине теже
\vec{f}	-	Вектор центрифугалне силе Земљине ротације
\vec{g}	-	Вектор убрзања гравитационе силе или силе Земљине теже
ξ, η	-	Компоненте одступања вертикала
Δg	-	Аномалија убрзања силе Земљине теже
Δg	-	Интензитет аномалије убрзања силе Земљине теже

Коефицијенти

A_{nm}, B_{nm}	-	Коефицијенти сферно хармониског развоја
J_{nm}, K_{nm}	-	Коефицијенти сферно хармонијског развоја

Оператори

E	-	Оператор математичког очекивања
M	-	Оператор хомогено-изотропног очекивања
\bar{E}	-	Оператор укупног очекивања
$L^{\Delta g}, L^{\xi}, \dots$	-	Оператор линеарних функционала

Полупречници

R	-	Полупречник терестричке сфере
R_B	-	Полупречник Бјерхамерове сфере

Остале ознаке

m	-	Маса
ω	-	Угаона брзина Земљине ротације

l	-	Растојање
Ω	-	Тело
S	-	Површ
ds	-	Елемент лука
c_n	-	Степене варијансе
\hat{c}_n	-	Оцењене вредности степених варијанси (емпиријске степене варијансе)
c	-	Теренска корекција
A, t, n ...	-	Матрице и вектори
ψ	-	Сферно растојање

СПИСАК ТАБЕЛА

Табела 6.1	Оцењене вредности коефицијената квадрикe	91
Табела 6.2	Оцењене вредности поправака	92
Табела 6.3	Разлике нормалних и ортометријских висина након трансформације	92
Табела 6.4	Основни статистички подаци аномалија слободног ваздуха и атмосферске корекције	97
Табела 6.5	Основни статистички подаци ундулација и аномалијских висина	99
Табела 6.6	Фреквенције разлика ΔH	100
Табела 6.7	Основни статистички подаци аномалија слободног ваздуха	100
Табела 6.8	Основни статистички подаци аномалија и аномалијских висина одређених применом глобалног геопотенцијалног модела EGM96	102
Табела 6.9	Основни статистички подаци резидуалних аномалија и резидуалних аномалијских висина	104
Табела 6.10	Карактеристике прилагођених модела који су формирану у оквиру истраживања	108
Табела 6.11	Основни статистички подаци разлика $\Delta\zeta$ кроз итерације (подела $0.5^\circ \times 0.5^\circ$) (вредности разлика приказане су у метрима)	108
Табела 6.12	Основни статистички подаци разлика $\Delta\zeta$ кроз итерације (подела $10' \times 10'$) (вредности разлика приказане су у метрима)	109
Табела 6.13	Основни статистички подаци разлика $\Delta\zeta$ кроз итерације (поделе $5' \times 5'$) (вредности разлика приказане су у метрима)	109
Табела 6.14	Основни статистички подаци разлика $\Delta g''$ и ζ''	114
Табела 6.15	Основни статистички подаци краткоталасних карактеристика резидуалних аномалија	115
Табела 6.16	Основни статистички подаци резидуалних аномалија (са глобалним моделом EGM96)	117
Табела 6.17	Основни статистички подаци резидуалних аномалија (са глобалним моделом EGM96T)	117
Табела 6.18	Основни статистички подаци средњеталасних карактеристика аномалијских висина	121
Табела 6.19	Основни статистички подаци краткоталасних и дуготаласних карактеристика аномалијских висина	123
Табела 6.20	Основни статистички подаци аномалијских висина	124

Табела 6.21	Основни статистички подаци разлика ундулација и аномалијских висина и финалне вредности ундулација	126
Табела 6.22	Основни статистички подаци разлика ΔN	127
Табела 6.23	Основни статистички подаци резидуала $R = N - N_{GPS/dh} - \Delta N^M$	130
Табела 6.24	Основни статистички подаци - комбиновано решење	131

СПИСАК СЛИКА

Слика 1.1	Ундулација геоида	2
Слика 1.2	Аномалијска висина	3
Слика 2.1	Вектори сила у геоцентричном правоуглом координатном систему	4
Слика 2.2	Конвергенција нивоских површи	6
Слика 2.3	Ортометријске висине и геоид	7
Слика 2.4	Нивоски елипсоид	9
Слика 2.5	Локални координатни систем и јединична сфера	10
Слика 2.6	Географске координате	11
Слика 2.7	Геодетске координате	11
Слика 2.8	Ундулација геоида	12
Слика 2.9	Угао одступања вертикале	13
Слика 2.10	Телуроид	14
Слика 2.11	Квазигеоид	15
Слика 2.12	Однос вектора убрзања Земљине и нормалне теже	16
Слика 2.13	Вектори убрзања Земљине и нормалне теже у тачки на физичкој површи Земље	17
Слика 2.14	Тело Ω унутар површи S	18
Слика 3.1	Растојање l	25
Слика 3.2	Сферна апроксимација	27
Слика 4.1	Одступање вертикале у правцу произвољног азимута	43
Слика 4.2	Компоненте одступања вертикале у правцу произвољног азимута	44
Слика 4.3	Одређивање ундулација астрогеодетским нивелманом	44
Слика 4.4	Подела геоида на фигуре правилног облика	46
Слика 4.5	Когоид	48
Слика 4.6	Сателитска алтиметрија (Ritell And Rapp, 1977, s. 74)	50
Слика 4.7	Рачунање емпиријских коваријанси функционала	53
Слика 4.8	Шематски приказ основног концепта remove-restore методе	58
Слика 4.9	Шематски приказ remove-restore методе	59
Слика 4.10	Видљиве топографске масе (Forsberg, 1985, с. 343)	62
Слика 4.11	Уобичајени графички приказ Ејријевог изостатичког модела (Forsberg, 1985, с. 343)	63
Слика 4.12	Ивични ефекти на функционале аномалијског потенцијала у случају примене Ејријевог модела када се разматра утицај маса правилне призме са квадратном основом константне густине и одговарајуће компензације. Основа призме је три стотине километара, а висина призме хиљаду метара. На слици је приказан утицај у централном профилу (Forsberg and Tscherning, 1981, с. 7845)	64

Слика 4.13	Референтна или средња елевациона површ	65
Слика 4.14	Тачка унутар маса након попуњавања долина	66
Слика 4.15	Расподела топографских маса применом дигиталног модела терена на призме са правоугаоном основом	67
Слика 4.16	Призма са правоугаоном основом константне густине	68
Слика 5.1	Део датотеке глобалног геопотенцијалног модела EGM96	73
Слика 5.2	Тачност глобалног модела	73
Слика 5.3	Геоид Земље одређен применом глобалног геопотенцијалног модела EGM96	74
Слика 5.4	Разлике између аномалијских висина EGG97 и аномалијских висина одређених применом GPS/dh методе у систему ETRS89 и EUVN/UELN	75
Слика 5.5	Геоид Аустрије (еквидистанца 20 ст)	77
Слика 5.6	Геоид USA	78
Слика 5.7	Геоид Бошковића	79
Слика 5.8	Геоид Муминагића	80
Слике 5.9	Положај тест подручја	81
Слика 5.10	Општи облик геоида на првом тест подручју	81
Слике 5.11	Општи облик геоида на другом тест подручју	82
Слика 6.1	Гравиметријска мрежа првог реда	84
Слика 6.2	Основна гравиметријска мрежа (Братуљевић и др., 1995)	85
Слика 6.3	Просторни распоред тачака ДП	87
Слика 6.4	Просторни распоред фундаменталних репера НВТ2 (плави симбол) и тачака РМС (црвени симбол) на којима су одређиване елипсоидне, односно ортометријске висине	88
Слика 6.5	Просторни распоред тачака астрогеодетских одређивања	90
Слика 6.6	Распоред заједничких репера мреже НВТ1 и НВТ2	92
Слика 6.7	Општи облик површи атмосферских корекција (еквидистанца 0.05 mgal)	97
Слика 6.8	Општи облик површи аномалија слободног ваздуха (еквидистанца 20 mgal)	98
Слика 6.9	Хистограм аномалија слободног ваздуха	99
Слика 6.10	Општи облик површи дуготаласних карактеристика аномалија слободног ваздуха (еквидистанца 20 mgal)	102
Слика 6.11	Општи облик површи аномалијских висина (црним симболима означене су тачке у којима су вредности срачунате)(еквидистанца 0.5 m)	103
Слика 6.12	Општи облик површи резидуалних аномалијских висина (еквидистанца 0.5 m)	104
Слика 6.13	Промене степених варијанси кроз итерације	111
Слика 6.14	Укупна промена степених варијанси	112
Слика 6.15	График степених варијанси прилагођеног модела EGM96T	112
Слика 6.16	Општи облик површи разлика ζ " (еквидистанца 0.5 m)	113
Слика 6.17	Општи облик површи резидуалних аномалија одређених применом РМТ и EGM96T (еквидистанца 20 mgal)	116
Слика 6.18	Хистограм резидуалних аномалија одређених применом РМТ и EGM96T	117
Слика 6.19	Хистограм резидуалних аномалија одређених применом ТК и EGM96T	118
Слика 6.20	Емпиријске коваријансе и аналитичка функција коваријанси	119
Слика 6.21	Просторни распоред резидуалних аномалија које се користе у предикцији	120
Слика 6.22	Општи облик површи средњеталасних карактеристика аномалијских висина (еквидистанца 0.1 m)	121

Слика 6.23	Општи облик површи краткоталасних карактеристика аномалијских висина (еквидистанца 0.2 m)	122
Слика 6.24	Општи облик површи дуготаласних карактеристика аномалијских висина (еквидистанца 0.5 m)	123
Слика 6.25	Општи облик површи укупних аномалијских висина (квазигеоид) (еквидистанца 0.2 m)	125
Слика 6.26	Општи облик површи разлика ундулација геоида и аномалијских висина (еквидистанца 0.05 m)	126
Слика 6.27	Општи облик површи разлика ΔN^T (еквидистанца 0.1 m)	128
Слика 6.28	Просторни распоред тачака ДГП у непосредној близини Бугарске границе (плави симбол – положај репера на којем су установљене значајне разлике)	128
Слика 6.29	Распоред тачака за уклапање (плави симбол) и независну контролу (црвени симбол)	130
Слика 6.30	Општи облик површи резидуала R (еквидистанца 0.05 cm)	131
Слика 6.31	Општи облик површи комбинованог решења (еквидистанца 0.2 m)	132

1 УВОД

За фигуру у простору којом би се дефинисао облик тела Земље К. Ф. Гаус (C. F. Gauss) је 1827. године предложио затворену површ која је у свакој својој тачки управна на правац вектора Земљине теже и која се поклапа са површи дефинисаном средњим нивоом идеално мирних мора и океана. Како се 72% читаве физичке површи Земље налази под морима и океанима, усвајање управо њихове средње и идеално мирне површи, природан је пут решавања проблема одређивања облика тела Земље.

По предлогу немачког физичара Листинга (J. B. Listing) из 1872. године, површ коју је дефинисао Гаус, назива се **геоид** (Moritz, 1990).

У којој мери је Гаусова идеја о начину дефинисања облика тела Земље имала значаја може се закључити из следећег (Torge, 2001):

геодезија је наука која се бави одређивањем фигуре и спољашњег гравитационог поља Земље и других небеских тела, праћењем њихових промена у времену, из резултата опажања предузетих на физичкој површи или у простору ван поменутих тела.

Код проблема дефинисања облика тела Земље геоид се јавља само као један од три могућа концепта (Моритз, 1990). Осим геоидом, фигуру тела Земље могуће је дефинисати физичком површи Земље или усвајањем модела нормалне односно идеалне Земље, на пример Земље чија је физичка површ обртни елипсоид.

Сва три поменута концепта изучавају се једновремено и уско су повезана при дефинисању и решавању проблема граничних вредности теорије потенцијала Земљине теже.

Као што је већ напоменуто, у класичним дефиницијама геоид је нивоска површ која се поклапа са физичком површи идеално мирних мора и океана, међутим, дефиниције које се тичу високе тачности уводе услов минимума одступања између поменутих површи, и то у само одређеној епохи (Torge, 2001).

У геодезији геоид је усвојен за референтну површ физички дефинисаних висина, а потреба за његовим познавањем у практичним геодетским радовима нарочито је изражена масовном употребом сателитских система за позиционирање, посебно Глобалног система за позиционирање (Global Positioning System - GPS) успостављеног од стране америчког министарства одбране. Применом GPS релативно је једноставно одредити елипсоидну висину тачака на физичкој површи Земље (h), а у циљу трансформације елипсоидних висина у ортометријске (H^o) довољно је применити теоријски дефинисану везу:

$$H^o = h - N$$



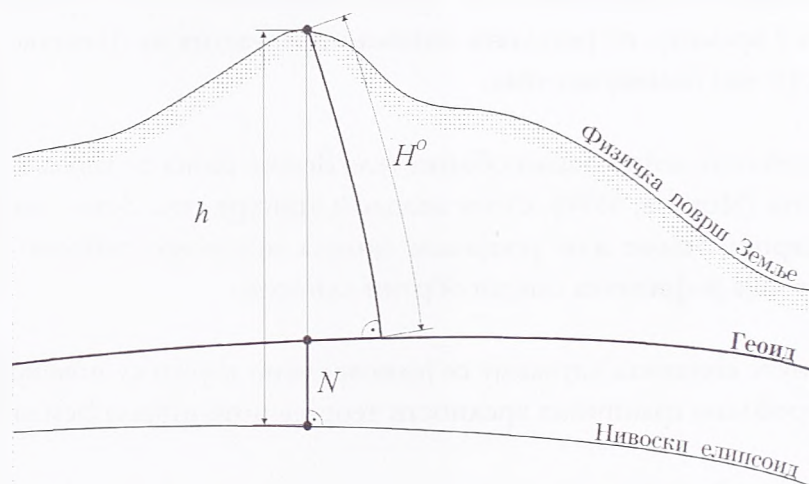
где је N елипсоидна висина тачке геоида или ундулација геоида (слика 1.1) (Heiskanen and Moritz, 1967).

Приказана трансформација омогућава да се у многим геодетским радовима класичне методе одређивања ортометријских висина готово у потпуности замене методом “GPS нивелмана” (у даљем тексту GPS /dh).

Из наведеног разлога последњих деценија чине се значајни напори у циљу одређивања геоида центиметарске тачности, посебно локалних геоида.

Под локалним геоидом назива се само један део геоида коме на физичкој површи Земље одговара површ која прекрива релативно мало подручје, примера ради подручје површине $10 \times 10 \text{ km}$ или површ која прекрива подручје читаве државе, или континента.

Једном усвојено подручје назива се **локалним**, а у првом наведеном случају најчешће се дефинише меридијанима и паралелама које га ограничавају.



Слика 1.1 Ундулација геоида

Одређивање локалног геоида подразумева одређивање ундулација геоида у одређеном броју тачака које се налазе унутар локалног подручја. Број и распоред тачака на којима се ундулације одређују дефинишу резолуцију геоида, а она мора бити таква да се на основу одређених ундулација може одредити ундулација у било којој тачки локалног подручја применом интерполације, такође са тачношћу центиметарског нивоа.

Локални геоид одређен под наведеним условима назива се геоидом високе резолуције центиметарске тачности.

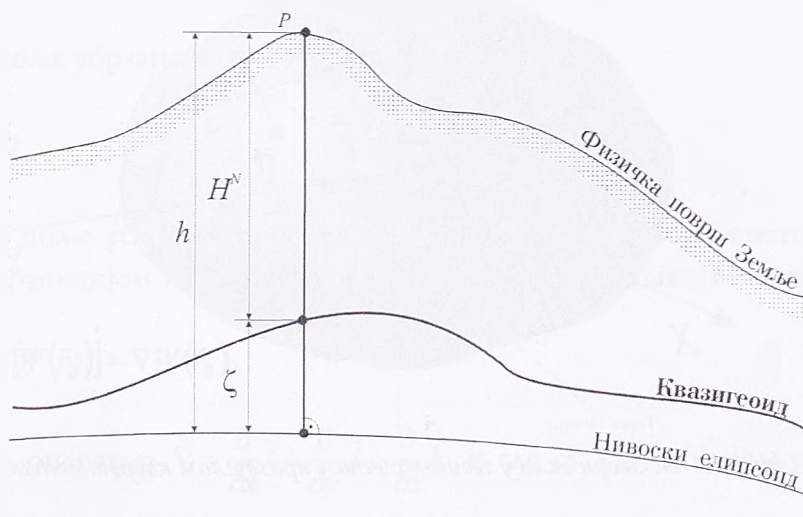
Један од многих проблема који се јављају при одређивању геоида је непознавање распореда густине маса Земљине коре. Сва одређивања у геодезији односе се на физичку површ Земље, а цела теорија одређивања геоида заснована је на претпоставци да се резултати одређивања односе на геоид. Из тог разлога неопходно је вршити редукацију резултата одређивања.

У поступку редукције потребно је познавати густине Земљине коре у свакој њеној тачки, а како то за сада није могуће неопходно је уводити претпоставке о распоредима густина, што само додатно компликује решавање проблема одређивања геоида.

Како би елиминисао потребу за увођењем хипотеза Молоденски, М. С. 1945. године предложио је један сасвим други начин одређивања облика тела Земље при чему је увео појам квазигеоида (Heiskanen and Moritz, 1967), нормалних H^N и аномалијских висина ζ , при директном одређивању саме физичке површи Земље. Познавањем аномалијских висина могуће је извршити трансформацију елипсоидних висина тачака у систем физички дефинисаних нормалних висина:

$$H^N = h - \zeta$$

али за разлику од геоида, квазигеоид, као референтна површ нормалних висина, није нивоска површ што у значајној мери умањује његов значај.



Слика 1.2 Аномалијска висина

Управо облик геоида и квазигеоида представља предмет истраживања ове докторске дисертације, док је циљ дисертације прецизно дефинисање методологије одређивања геоида/квазигеоида високе резолуције за територију Србије који ће обезбедити да се за највећи део практичних потреба може извршити једноставна трансформација елипсоидних висина у ортометријске, односно нормалне висине.

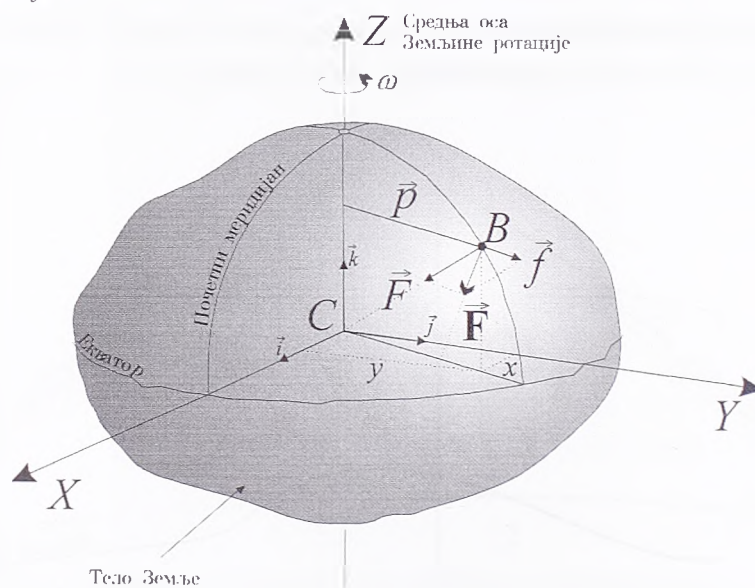
У Србији до сада није било одређивања геоида путем којег би трансформација елипсоидних висина у ортометријске на центиметарском нивоу тачности била могућа. Једина два публикована одређивања су локални геоид генерала С. П. Бошковића из 1952. године (Бошковић, 1952) и локални геоид А. Муминагића из године 1967. године (Muminagić, 1967), који представљају астрогеодетска решења при чему се ундулације односе на Беселов елипсоид.

2 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

2.1 ПОТЕНЦИЈАЛ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

На тело B , масе m_B , које се налази на физичкој површи Земље и које учествује у Земљиној ротацији делују две силе: гравитациона сила Земље (\vec{F}) и центрифугална сила која настаје као последица Земљине ротације (\vec{f}) (у наставку текста само центрифугална сила). Укупна сила, резултанта гравитационе и центрифугалне, назива се Земљиним тежом (слика 2.1):

$$\vec{F} = \vec{F} + \vec{f}.$$



Слика 2.1 Вектори сила у геоцентричном правоуглом координатном систему

У векторском облику, у правоуглом геоцентричном координатном систему, тежа је дефинисана једначином облика:

$$\vec{F}(\vec{r}_B) = k m_B \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_B|^3} (\vec{r} - \vec{r}_B) d\Omega + m_B \vec{p} \omega^2,$$

односно једначином

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}_B) = \vec{g}(\vec{r}_B) m_B,$$

где је $\vec{g}(\vec{r}_B)$ вектор убрзања Земљине теже

$$\vec{g}(\vec{r}_B) = k \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_B|^3} (\vec{r} - \vec{r}_B) d\Omega + \vec{p} \omega^2$$

и где је k универзална гравитациона константа, ρ густина, Ω област интеграције (тело Земље), ω утаона брзина Земљине ротације и \vec{p} вектор управан на осу Земљине ротације чији се интензитет може одредити из израза

$$|\vec{p}| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где су x и y правоугле координате тачке B у правоуглом геоцентричном координатном систему.

Свакој тачки простора може се придружити један вектор Земљине теже и тако дефинисати њено векторско поље, односно, свакој тачки простора може се придружити један вектор убрзања и тако дефинисати векторско поље убрзања.

Лако је уочити да се наведена векторска поља међусобно разликују по фактору размере, односно по присуству масе m_B у једначини за силу, одакле следи да је за познавање геометријских особина векторског поља Земљине теже довољно познавати геометријске особине векторског поља убрзања.

За векторско поље убрзања важи (Vaniček, 1986, с. 82)

$$\text{rot}[\vec{g}(\vec{r}_B)] = 0,$$

односно, векторско поље убрзања је безвртложно па следи да мора постојати скаларно поље задато неком функцијом $W(\vec{r}_B)$ такво да је градијент поља једнак вектору убрзања:

$$\vec{g}(\vec{r}_B) = \text{grad}[W(\vec{r}_B)] = \nabla W(\vec{r}_B),$$

где је ∇ Хамилтонов оператор $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ и где су \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} јединични вектори координатних оса правоуглог геоцентричног система.

Функција $W(\vec{r}_B)$ којом се скаларно поље дефинише назива се **потенцијалном функцијом** или **потенцијалом убрзања Земљине теже** и дефинисана је збиром скаларних функција облика:

$$W = V + \Phi,$$

где је W потенцијал убрзања гравитационе силе Земље, а Φ потенцијал убрзања центрифугалне силе Земљине ротације.

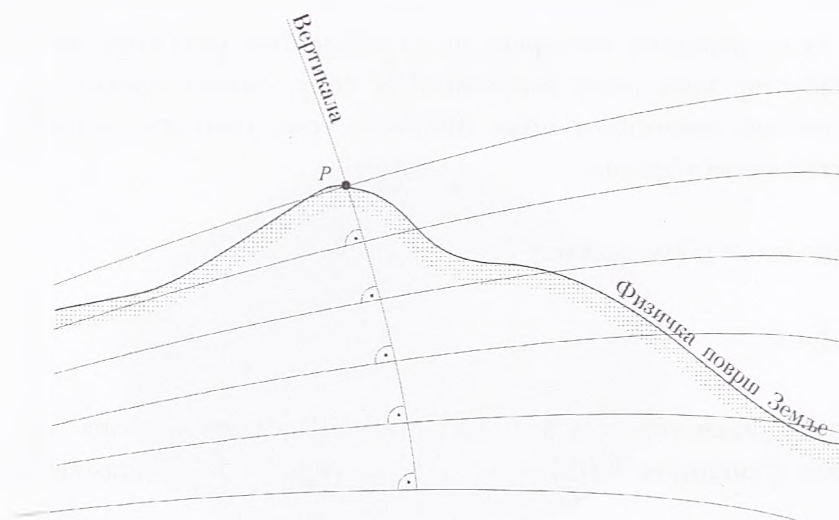
У векторском облику, у геоцентричном правоуглом координатном систему, потенцијал убрзања дефинисан је изразом (Heiskanen and Moritz, 1967):

$$W = W(\vec{r}_B) = k \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_B|} d\Omega + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2.1)$$

где су x и y правоугле координате центра масе тела B .

У геометријском смислу потенцијал је могуће третирати применом нивоских површи и вертикала.

Нивоске површи су површи дуж којих нема промене потенцијала, а вертикале линије које имају особину да се правац тангенте у свакој њиховој тачки поклапа са правцем градијента скаларног поља тј. са правцем вектора убрзања силе Земљине теже.



Слика 2.2 Конвергенција нивоских површи

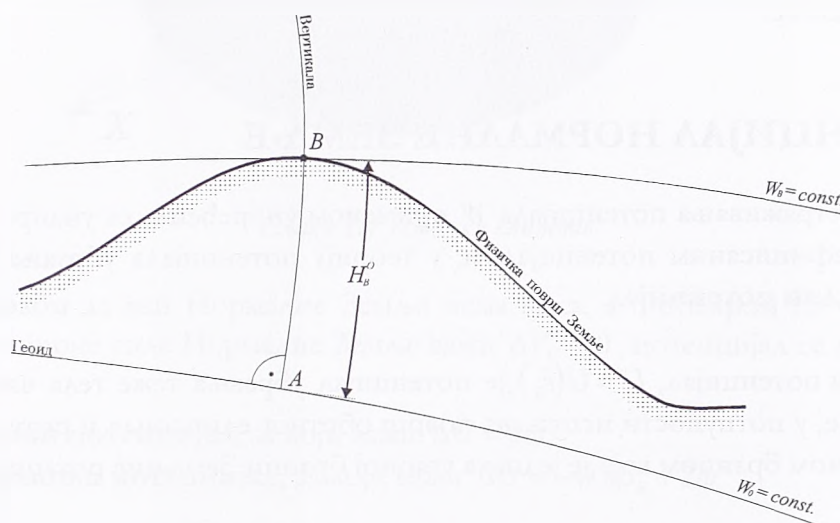
Њихове особине и међусобни однос могуће је утврдити коришћењем прираштаја потенцијала између две бесконачно блиске нивоске површи од којих су од навећег значаја следеће:

- због непрекидне промене силе теже следи непрекидна промена растојања између нивоских површи, односно нивоске површи међусобно конвертирају (слика 2.2), од екватора ка половима,
- најкраће растојање између две произвољно блиске нивоске површи представља одсечак вертикале који је истовремено управан на обе нивоске површи, одакле се, с обзиром на непаралелност нивоских површи, може закључити да је вертикала просторна крива;
- нивоске површи никада се не пресецају нити додирују,
- и кроз сваку тачку вертикале пролази по једна нивоска површ.

Посебно, нивоска површ која се поклапа са средњом идеално мирном површином мора и океана назива се **геоид**:

$$W(x, y, z) = W_0 = \text{const.},$$

Геоид је још од стране Гауса предложен као површ којом се дефинише облик тела Земље, а тек касније, по предлогу Листинга, површ је названа геоид. С обзиром да је нивоска површ, геоид је идеалан као основа за физички дефинисани систем висина, из ког разлога је и усвојен као референтна површ ортометријских висина (слика 2.3)



Слика 2.3 Ортометријске висине и геоид

2.2 СПОЉАШЊИ И УНУТРАШЊИ ПОТЕНЦИЈАЛ

У једначини 2.1 фигурише густина тела Земље што представља ограничавајући фактор како за теоријска разматрања тако и за практичну примену једначине. Међутим, може се показати да за друге изводе потенцијала убрзања гравитационе силе Земље и друге изводе потенцијала центрифугалне силе Земљине ротације важи:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k \rho, \quad \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2\omega^2,$$

одакле следи да за потенцијал W мора бити испуњено

$$\Delta W = \Delta V + \Delta \Phi = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -4k\pi\rho + 2\omega^2.$$

Ако се усвоје претпоставке да око тела Земље нема маса (атмосфере и других маса), када је потенцијал убрзања гравитационе силе Земље хармонијска функција ван тела Земље $\Delta V = 0$, претходна једначина постаје:

$$\Delta W = \Delta V + \Delta \Phi = 0 + 2\omega^2 = 2\omega^2.$$

Уведена претпоставка омогућава да се потенцијал W при даљим теоријским и практичним разматрањима подели на (Heiskanen and Moritz, 1967):

- спољашњи потенцијал, за који важи $\Delta W = 2\omega^2$
- и унутрашњи потенцијал, за који важи $\Delta W = -4k\rho + 2\omega^2$.

У готово свим анализама присутним у физичкој геодезији проучава се и одређује спољашњи потенцијал. Како је потенцијал убрзања центрифугалне силе аналитичка функција једноставног облика, која је у потпуности одређена након усвајања вредности за угаону брзину Земљине ротације, може се рећи да се одређивање спољашњег потенцијала убрзања Земљине теже даље своди на одређивање спољашњег потенцијала убрзања гравитационе силе Земље.

2.3 ПОТЕНЦИЈАЛ НОРМАЛНЕ ЗЕМЉЕ

У циљу истраживања потенцијала W применом упоређења, са унапред у потпуности математички дефинисаним потенцијалом, у теорију потенцијала убрзања Земљине теже уводи се **нормални потенцијал**.

Нормални потенцијал, $U = U(\vec{r}_B)$, је потенцијал убрзања теже тела чија маса, једнака маси тела Земље, у потпуности испуњава површ обртног елипсоида и ротира око мале осе елипсоида угаоном брзином која је једнака угаоној брзини Земљине ротације, при чему се:

- центар масе тела поклапа са центром масе Земље,
- а мала оса елипсоида са средњом осом Земљине ротације.

Тело коме се, под наведеним условима, придружује нормални потенцијал често се назива **нормалном Земљом**, тежа нормалне Земље **нормалном тежом**, а њено убрзање убрзањем **нормалне теже** или **нормалним убрзањем**:

$$\vec{y} = \text{grad}(U).$$

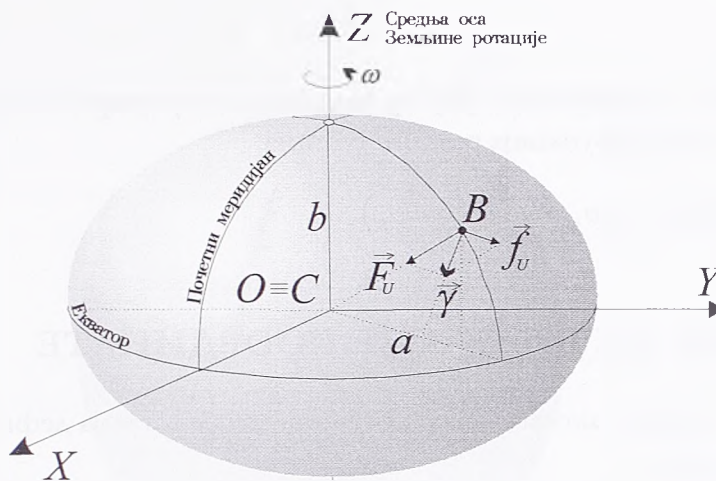
Површи дуж којих нема промене потенцијала су нивоске површи нормалног потенцијала, а линије сила нормалног поља називају се **нормалним вертикалама**.

Распоред маса и густина нормалне Земље (ρ_E) такав је да нормално поље поседује обртну симетрију, а сама површ обртног елипсоида нивоска је површ нормалног поља, и назива се **нивоским елипсоидом** (слика 2.4).

Као и код потенцијала убрзања теже Земље за нормални потенцијал важи:

$$U = U(\vec{r}_B) = V_U + \Phi_U$$

где је V_U потенцијал убрзања гравитационе силе нормалне Земље, Φ_U потенцијал убрзања центрифугалне силе која настаје као последица ротације нормалне Земље.



Слика 2.4 Нивоски елипсоид

Под претпоставком да ван Нормалне Земље нема маса, а с обзиром да и за потенцијал убрзања гравитационе силе Нормалне Земље важи $\Delta V_U = 0$, потенцијал се дели на:

- спољашњи потенцијал, за који важи $\Delta U = 2\omega^2$
- и унутрашњи потенцијал, за који важи $\Delta U = -4\pi\rho_E + 2\omega^2$.

Вредност нормалног потенцијала на површи нивоског елипсоида U_0 , једнака је вредности потенцијала убрзања теже (стварног потенцијала) на површи геоида $U_0 = W_0 = C = const$, док се мала и велика полуоса елипсоида дефинишу тако да нивоски елипсоид представља онај елипсоид који најбоље апроксимира површ геоида у геометријском смислу (Moritz, 1980).

Може се показати да је нормални потенцијал у потпуности дефинисан са следећа 4 параметра: малом осом елипсоида b , великом осом елипсоида a , угаоном брзином ω и вредношћу потенцијала на површи елипсоида U_0 .

2.4 АНОМАЛИЈСКИ ПОТЕНЦИЈАЛ

Увођењем нормалног потенцијала проблем одређивања стварног потенцијала раздваја се на проблем одређивања (дефинисања) нормалног потенцијала и на проблем одређивања потенцијала њихове разлике, **аномалијског потенцијала** T :

$$T = W - U.$$

Како је аномалијски потенцијал могуће представити у облику

$$T = V + \Phi - (V_U + \Phi_U), \quad (2.2)$$

и како су сагласно дефиницијама потенцијали Φ и Φ_U у свакој тачки простора једнаки следи да је аномалијски потенцијал хармонијска функција ван маса тела Земље

$$\Delta T = 0,$$

(2.3)

док је у тачкама које су истовремено унутар тела Земље и унутар тела елипсоида функција чији је збир других извода функција разлика густина:

$$\Delta T = -4k\pi\rho + 4k\pi\rho_E = -4k\pi(\rho - \rho_E).$$

2.5 ПРИРОДНЕ И ГЕОДЕТСКЕ КООРДИНАТЕ

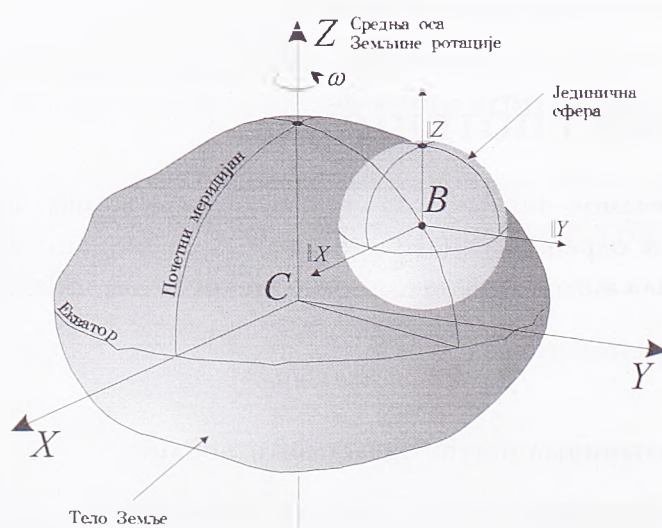
Први корак у анализи аномалијског потенцијала представља дефинисање природних и геодетских координата.

При дефинисању природних координата тачке B која се налази на физичкој површи Земље, посматра се локални правоугли координатни систем са координатним почетком у тачки B и са осама које су паралелне са осам геодетског координатног система (слика 2.5). Тачка B истовремено представља и центар јединичне сфере.

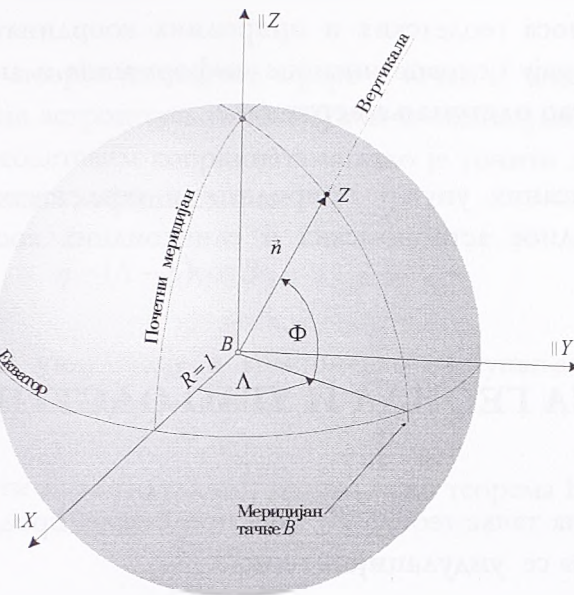
На површ јединичне сфере пресликавају се усвојени почетни меридијан, екватор и меридијан тачке B тако да је положај тачке одређен географским координата (слика 2.6):

- географском латитудом Φ , углом којег у равни меридијана тачке B граде раван екватора и правац вертикале тачке B , и
- географском лонгитудом B , углом у равни екватора који међусобно граде раван почетног меридијана и раван меридијана тачке B .

Географска латитуда и лонгитуда представљају две координате природних координата, док се за трећу координату, којом се једнозначно дефинише положај у простору усваја вредност потенцијала у тачки B или ортометријска висина тачке B .



Слика 2.5 - Локални координатни систем и јединична сфера

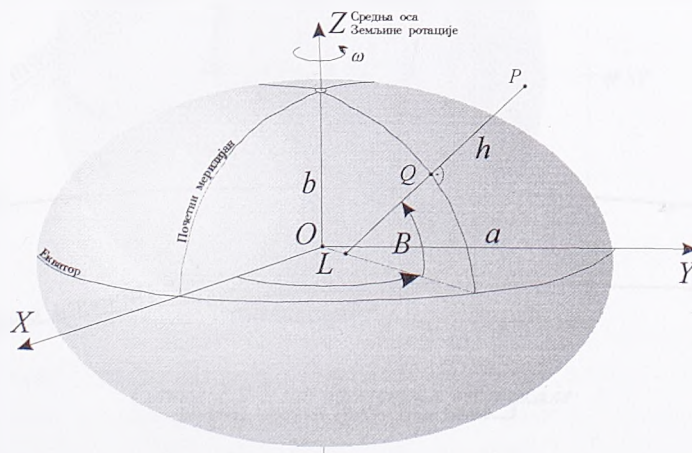


Слика 2.6 Географске координате

При дефинисању геодетских координата посматра се површ обртног елипсоида у геоцентричном координатном систему (слика 2.7). Нормала на површ елипсоида, кроз тачку P која се налази на физичкој површи Земље, продире површ елипсоида у тачки Q . Одсечак нормале од тачке P до тачке Q ,

$$h = \overline{PQ},$$

назива се геодетском или елипсоидном висином. Угао између елипсоидне нормале и равни екватора, мерен у равни меридијана тачке P , је геодетска латитуда, а угао између равни меридијана тачке P и равни почетног меридијана, у равни екватора, је геодетска лонгитуда. Геодетске латитуде за тачке северно и јужно од равни екватора узимају вредности од 0 до 90° , а геодетске лонгитуде за тачке источно и западно од почетног меридијана вредности од 0 до 180° .



Слика 2.7 Геодетске координате



Одређивањем односа геодетских и природних координата могуће је дефинисати величине које представљају основне носиоце информација о аномалијском потенцијалу: ундулацију геоида и угао одступања вертикале.

Однос висина дефинисаних унутар природних и геодетских координата дефинише ундулацију геоида, а однос астрономских и елипсоидних координата угао одступања вертикале.

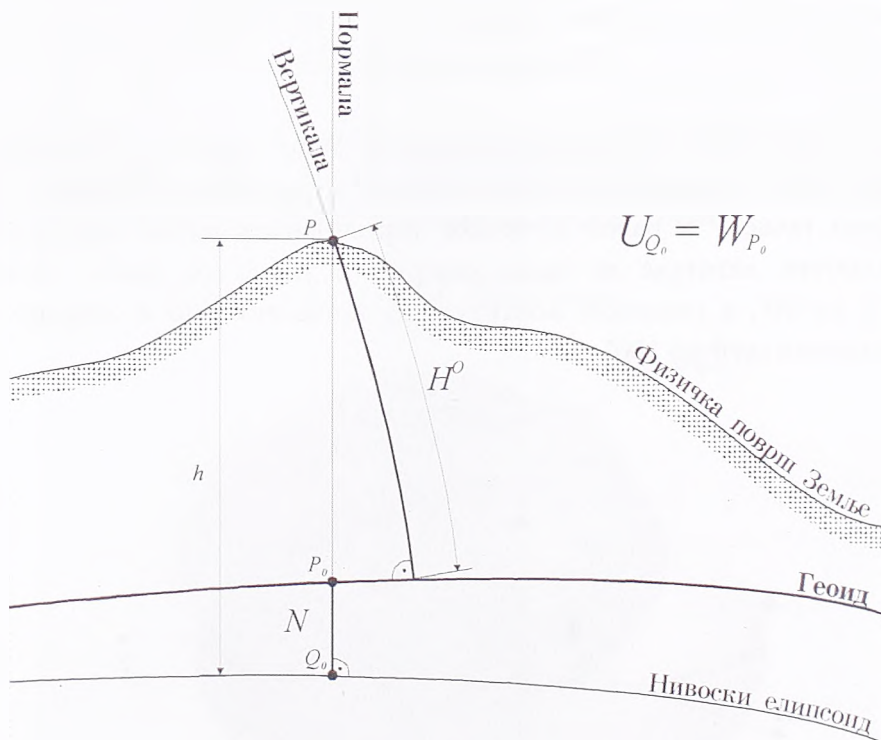
2.6 УНДУЛАЦИЈА ГЕОИДА И УГАО ОДСТУПАЊА ВЕРТИКАЛЕ

Елипсоидна висина тачке геоида P_0 , која представља продор нормале тачке P кроз геоид (слика 2.8), назива се **ундулацијом геоида**.

Са тачношћу која задовољава све данашње потребе може се рећи да ундулација геоида представља разлику елипсоидне и ортометријске висине:

$$N = h - H^o,$$

Угао који међусобно граде нормала и вертикала у тачки P_0 на геоиду назива се **углом одступања вертикале**, θ .



Слика 2.8 Ундулација геоида

Одступање вертикала најчешће се приказује својим компонентама на површи јединичне сфере са центром у тачки P_0 (слика 2.9): компонентом у правцу меридијана тачке P_0 (правац север-југ) и компонентом у правцу првог вертикала (правац исток-запад).

Како вертикала продире површ јединичне сфере у тачки Z чије су координате на јединичној сфери дефинисане астрономском латитудом и лонгитудом, а координате продора Z' нормале кроз сферу геодетским координатама лако је уочити да је одступање у правцу меридијана и првог вертикала дефинисано са:

$$\xi = \Phi - B, \quad \eta = (\Lambda - L) \cos B.$$

Наведени изрази за ундулацију и компоненте одступања вертикале представљају разлику геометријски дефинисаних величина.

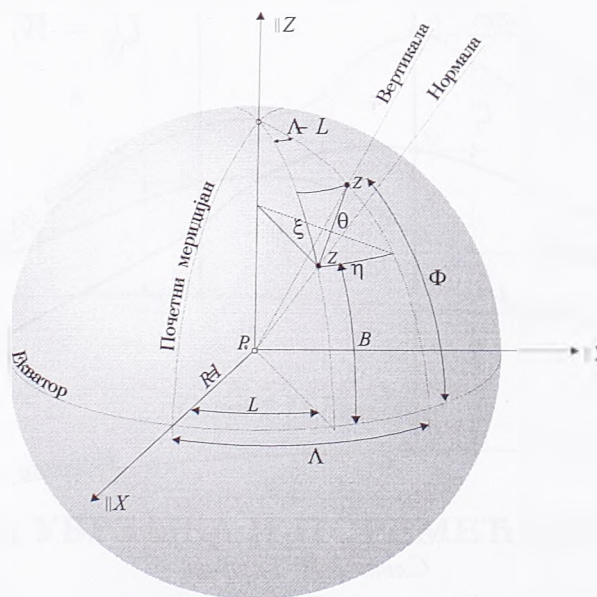
Међутим, може се показати да за ундулацију геоида важи теорема Брунса,

$$N = \frac{T_{P_0}}{\gamma_{Q_0}} \tag{2.4}$$

односно да за компоненте одступања вертикале важе изрази:

$$\xi = -\frac{d(T_{P_0}/\gamma_{Q_0})}{ds_M}, \quad \eta = -\frac{d(T_{P_0}/\gamma_{Q_0})}{ds_{PV}}, \tag{2.5}$$

где је ds_M дужина лука у правцу меридијана, а ds_{PV} дужина лука у правцу првог вертикала.



Слика 2.9 Угао одступања вертикале

Другим речима, с једне стране чисто геометријски дефинисане величине могу се представити као линеарна комбинација потенцијала T и његових првих парцијалних

извода, односно ундулацију геоида и компоненте одступања вертикале можемо третирати као функционале аномалијског потенцијала:

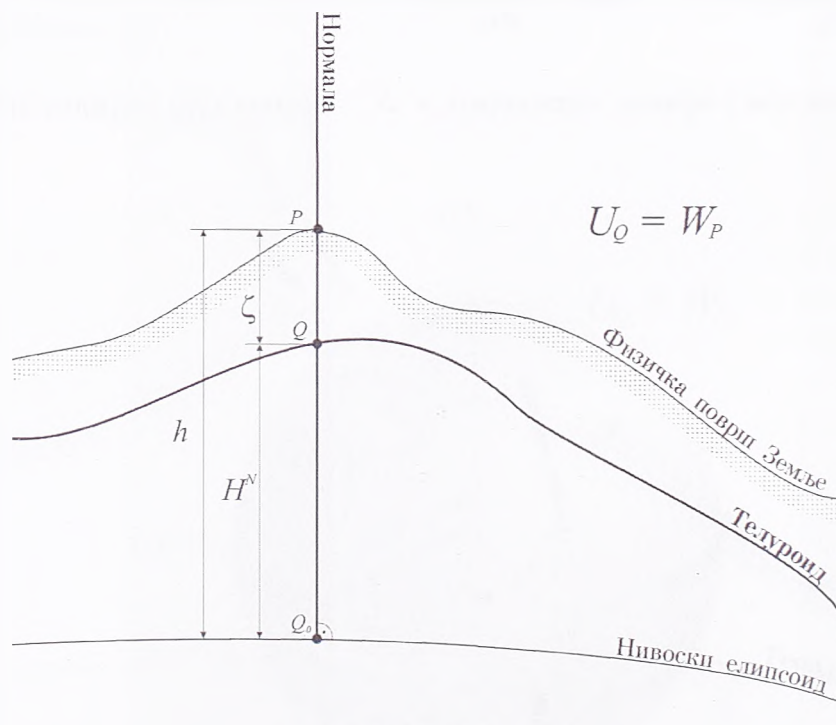
$$t = L'[T],$$

где је L' оператор линеарних функционала (линеарни оператор).

Поред ундулације геоида и угла одступања вертикале временом је дефинисан и низ других функционала који носе информације о аномалијском потенцијалу, а све у циљу одређивања спољашњег потенцијала убрзања Земљине теже

2.7 АНОМАЛИЈСКА ВИСИНА

Телуроид је површ коју чини скуп тачака једнозначно придружених тачкама физичке површи Земље, при чему се једнозначност обезбеђује тако што се на нормали нивоског елипсоида која пролази кроз тачку P физичке површи Земље (слика 2.10) одабира она тачка Q (тачка телуроида) у којој је вредност нормалног потенцијала једнака вредности стварног потенцијала у тачки P , $W_P = U_Q$.



Слика 2.10 Телуроид

Растојање између тачака P и Q , мерено по вертикали тачке P , назива се аномалијском висином, ζ_p , а елипсоидна висина тачке Q је **нормална висина тачке P** , H_p^N . Са слике 2.10 очигледно је да важи:

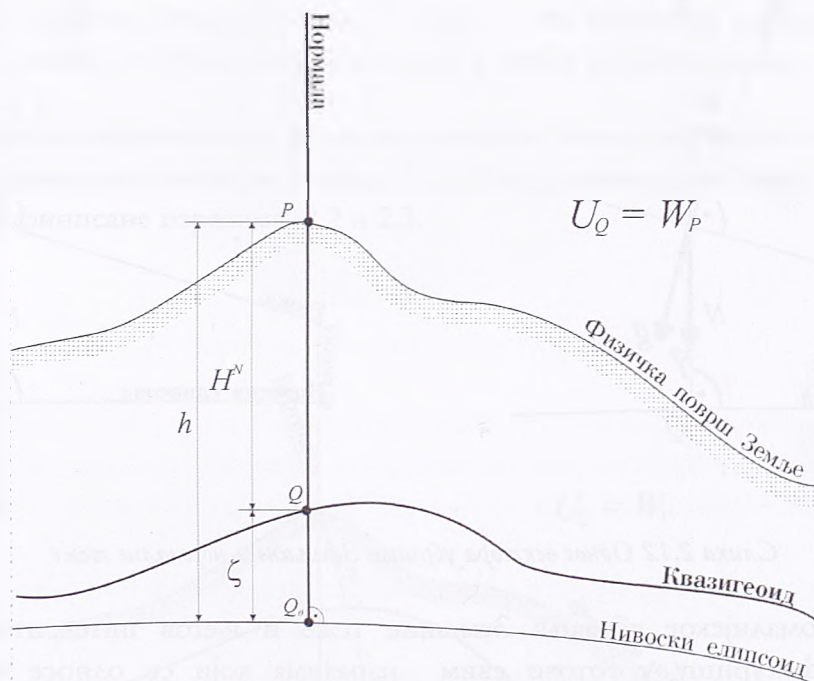
$$\zeta_P = h_P - H_P^N,$$

где је h_P елипсоидна висина тачке.

Како није уобичајено да се за висину једне тачке користи део нормале који не доспева до саме тачке на физичкој површи Земље, нормалну висину могуће је пренети дуж нормалне вертикале тако да тачка Q прелази у тачку P , а тачка Q_0 која се налази на елипсоиду у неку тачку Q'_0 (слика 2.11). Геометријско место тачака Q'_0 добијених описаним поступком (померањем нормалне висине дуж вертикале за сваку тачку физичке површи Земље) назива се **квазигеоид**.

Као и за ундулацију геоида могуће је показати да и за аномалијску висину важи Брунсова формула:

$$\zeta = \frac{T_P}{\gamma_Q}.$$



Слика 2.11 Квазигеоид

2.8 АНОМАЛИЈА УБРЗАЊА И ПОРЕМЕЋАЈНО УБРЗАЊЕ

У тачки P_0 на површи геоида (слика 2.12), градијент аномалијског потенцијала је градијент разлике стварног и нормалног потенцијала,

$$\bar{\delta}_P = \text{grad}(T_P) = \text{grad}(W_P - U_P) = \text{grad}(W_P) - \text{grad}(U_P) = \bar{g}_P - \bar{\gamma}_P$$

и назива се вектором поремећајног убрзања силе Земљине теже, а његов интензитет поремећајно убрзање

$$\delta_p = g_p - \gamma_p.$$

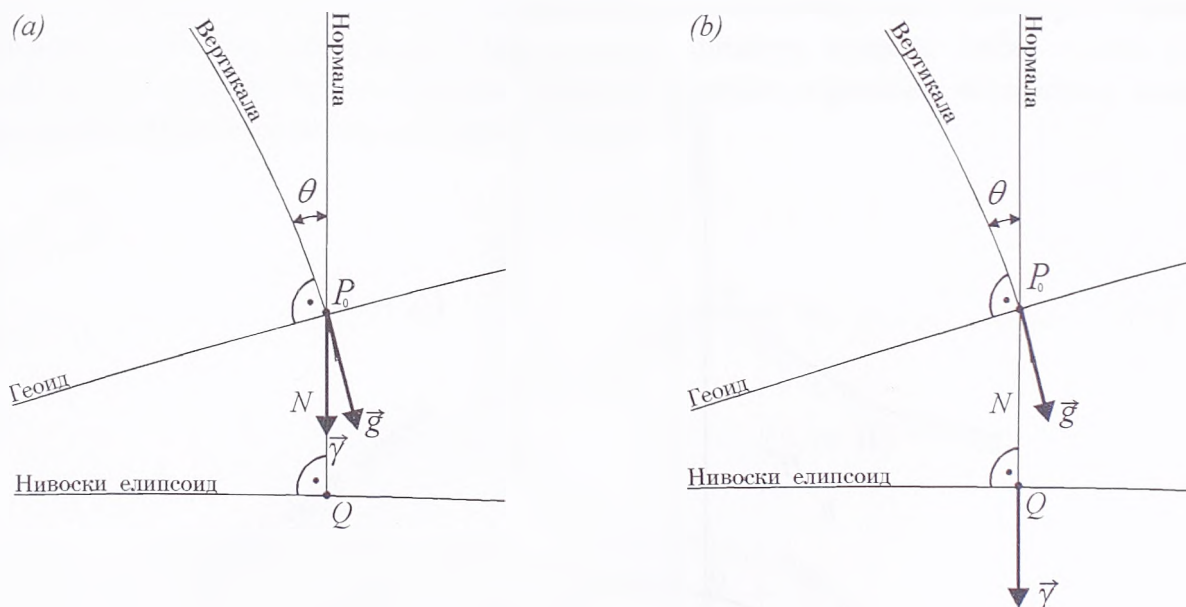
У истој тачки могуће је дефинисати и вектор аномалијског убрзања силе Земљине теже:

$$\overline{\Delta g} = \text{grad}(W_p) - \text{grad}(U_Q) = \bar{g}_p - \bar{\gamma}_Q,$$

који представља разлику вектора \bar{g}_p и вектора убрзања нормалне теже у тачки Q која се налази на елипсоиду. Интензитет вектора аномалијског убрзања који је дефинисан изразом:

$$\Delta g = g_p - \gamma_Q,$$

назива се аномалијом убрзања Земљине теже, или само аномалијом убрзања.



Слика 2.12 Однос вектора убрзања Земљине и нормалне теже

Вектор аномалијског убрзања Земљине теже и његов интензитет представљају величине које фигуришу у готово свим изразима који се односе на аномалијски потенцијал, и за разлику од вектора поремећајног убрзања и његовог интензитета представљају директну везу између геоида и нивоског елипсоида.

Може се показати да за поремећајно убрзање важи

$$\delta g = L^{\otimes}[T] = \left(-\frac{\partial}{\partial n}\right)T = -\frac{\partial T}{\partial n}, \quad (2.6)$$

а за аномалију убрзања,

$$\Delta g = L^{\Delta g} [T] = \left(-\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{1}{\gamma} \right) T = -\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{1}{\gamma} T \quad (2.7)$$

Израз 2.7 назива се фундаменталном једначином физичке геодезије.

2.9 АНОМАЛИЈЕ СЛОБОДНОГ ВАЗДУХА И УГАО ОДСТУПАЊА ВЕРТИКАЛЕ У ТАЧКАМА НА ФИЗИЧКОЈ ПОВРШИ ЗЕМЉЕ

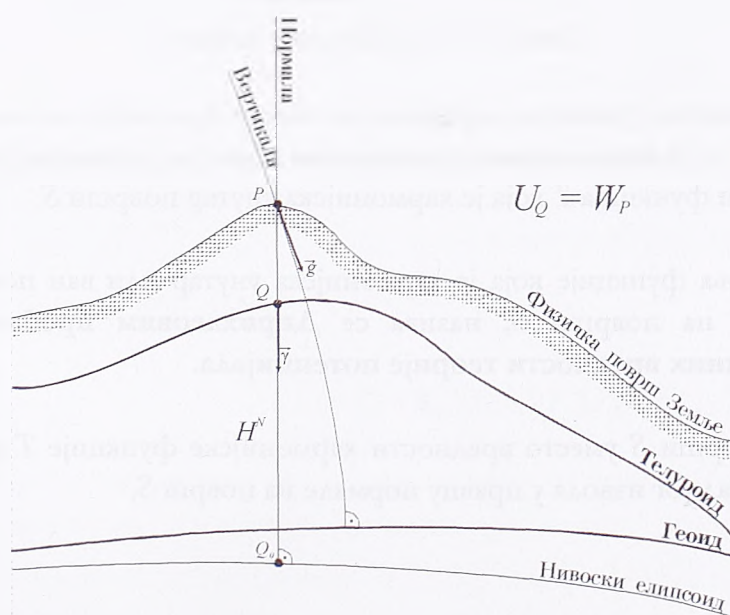
Аномалију убрзања и угао одступања вертикале могуће је дефинисати и у тачки на физичкој површи Земље.

Вектор облика

$$\overline{\Delta g} = \overline{g}_P - \overline{\gamma}_Q$$

где је \overline{g}_P вектор убрзања Земљине теже у тачки P на физичкој површи Земље (слика 2.13), а вектор $\overline{\gamma}_Q$ вектор убрзања нормалне теже у тачки Q на телуроиду.

Угао одступања вертикале на физичкој површи Земље дефинише се на исти начин као и угао одступања вертикале на геоиду, а за обе величине важе везе са аномалијским потенцијалом дефинисане изразима 2.2 и 2.3.



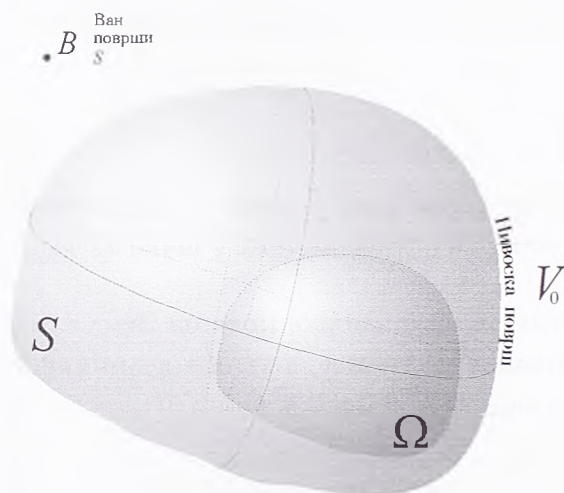
Слика 2.13 Вектори убрзања Земљине и нормалне теже у тачки на физичкој површи Земље

2.10 ДИРИХЛЕОВ, НОЈМАНОВ И ТРЕЋИ ПРОБЛЕМ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА

Све приказане везе између потенцијала T и његових функционала и у теорији и практичним применама користе се на основу теорема Стоукса:

функција која је хармонијска ван површи S може се једнозначно одредити из њених вредности задатих на површи S ;

другим речима потенцијал T који је хармонијска функција ван S , може се јединствено одредити из његових вредности познатих на површи S .



Слика 2.14 Тело Ω унутар површи S

Потврда да хармонијска функција одређена из њених вредности познатих на површи S увек постоји дата је **Дирихлеовим принципом** када се разматра функција T која је хармонијска ван или функција T која је хармонијска унутар површи S .

Проблем одређивања функције која је хармонијска унутар или ван површи S , из њених вредности задатих на површи S , назива се **Дирихлеовим проблемом** или **првим проблемом граничних вредности теорије потенцијала**.

Ако су на површи S уместо вредности хармонијске функције T познате вредности њеног првог парцијалног извода у правцу нормале на површи S ,

$$\frac{\partial T}{\partial n}, \quad (2.8)$$

онда се проблем одређивања функције T назива **Нојмановим (Neumann)** или другим проблемом граничних вредности теорије потенцијала.

Трећи проблем граничних вредности подразумева одређивање хармонијске

функције T када су на S познате вредности линеарне комбинације

$$kT + h \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (2.9)$$

где су k и h константе.

Упоредба израза за функционале аномалијског потенцијала и израза за граничне вредности следи да се коришћењем резултата одређивања функционала аномалијског потенцијала и решавањем поменутих граничних проблема може одредити аномалијски потенцијал T , а сагласно Брунсовој теорему ундулације геоида N или аномалијске висине ζ .

3 ПАРАМЕТАРСКИ И ИНТЕГРАЛНИ ПРИСТУП ПРИ РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

При решавању проблема граничних вредности теорије потенцијала, односно при решавању проблема одређивања аномалијског потенцијала, данас је могуће користити два приступа (Moritz, 1980):

- параметарски приступ или
- операциони, односно интегрални приступ.

Параметарски приступ подразумева формирање и примену математичких модела у којима је аномалијски потенцијал представљен као функција једног или низа параметара, а затим уклапање модела у реалне оквире коришћењем резултата опажања само једне величине.

Ако је аномалијски потенцијал у формираном моделу представљен као директна функција једне величине, односно параметра који се опажа, модели се називају **непосредним** или **директним**, а ако је представљен као функција низа параметара који су у функцији једне величине која се опажа модели се називају **посредним** или **индиректним** (Zhiling, 2000).

Без обзира да ли се користи посредни или непосредни математички модел подразумева се да су резултати опажања само једне величине познати у свим тачкама области за коју се модел формира.

Операциони приступ, за разлику од параметарског, подразумева једновремено одређивање аномалијског потенцијала из резултата опажања низа величина који су преузети само у коначном броју тачака.

3.1 ПАРАМЕТАРСКИ ПРИСТУП

Први и трећи проблем граничних вредности теорије потенцијала Земљине теже, историјски посматрано, имали су највише значаја у теоријским и практичним разматрањима.

Решење првог проблема граничних вредности теорије потенцијала пример је индиректног параметарског приступа, док решења Стокса и редови Молоденског, као примери параметарског приступа, подразумевају да су вредности убрзања теже познати

- на површи геоида у случају Стоксовог решења,

- односно на физичкој површи Земље у случају редова Молоденског.

Оригинално, поменута решења применом директног параметарског приступа базирана су на фундаменталној једначини физичке геодезије (2.7) али у сферној апроксимацији (апроксимација елипсоида сфером):

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{r}T = -\Delta g \quad (3.1)$$

где је r радијус вектор или вектор положаја у сферним координатама.

3.1.1 РЕШЕЊЕ ПРВОГ ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА

Решење првог проблема граничних вредности теорије потенцијала најчешће се изучава када су вредности потенцијала познате на сфери, а само одређивање аномалијског потенцијала T базирано је на изразима 2.2 и 2.3 из којих следи:

$$\Delta T = \Delta V - \Delta V_u \quad (3.2)$$

Наиме, сагласно теореме Стокса, свака функција која је хармонијска ван неке површи S , у овом случају сфере S , може се једнозначно одредити из њених вредности на површи S . Применом Фуријеове методе раздвајања променљивих, када су на сфери полупречника R познате вредности

$$V_S = V(R, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\cos \theta),$$

за потенцијал гравитационе силе Земље следи

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\cos \theta), \quad (3.3)$$

где су n и m из скупа целих бројева, A_{nm} , B_{nm} коефицијенти сфернохармонијског развоја, а $P_{nm}(\cos \theta) = P_{nm}(t)$ Лежандрове функције облика:

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n.$$

Са друге стране, за нормални потенцијал, такође у функцији сферних хармоника важи:

$$V_U = \frac{kM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}^U \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right], \quad (3.4)$$

где је

$$J_{2n}^U = (-1)^{n+1} \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left(1 - n + 5n \frac{J_{20}^U}{e^2} \right),$$

и где је J_{20} дефинисано са

$$J_{20}^U = \frac{A-C}{Ma^2},$$

где су A и C моменти инерције у односу на X и Z осу геоцентричног координатног система, M маса Земље и a велика полуоса елипсоида.

По дефиницији нормалног потенцијала маса елипсоида једнака је маси тела Земље, а све приказане једначине, како је већ наведено, односе се на геоцентрични координатни систем па следи да у разлици 3.2, а у функцији сферних хармоника неће постојати чланови нултог и првог реда:

$$T = \frac{kM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [(A_{nm} - A_{nm}^U) \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\cos \theta).$$

3.1.2 СТОКСОВО РЕШЕЊЕ

Упоређењем израза (2.7) и (3.1) очигледно следи да је:

$$k = \frac{2}{r} \text{ и } h = 1,$$

односно Стокс је решавањем трећег граничног проблема теорије потенцијала одредио аномалијски потенцијал, када је линеарна комбинација аномалијског потенцијала и његовог првог парцијалног извода позната у виду вредности аномалија убрзања на површи геоида.

Може се показати да су изразом (Heiskanen and Moritz, 1967)

$$\Delta g(r, \theta, \lambda) = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \left(\frac{r_A^2 - R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{2R}{r^2} \cos \psi \right) \Delta g(R, \theta, \lambda) d\sigma, \quad (3.5)$$

дефинисане вредности аномалија убрзања у тачкама ван сфере $r = R$ из вредности аномалија убрзања познатих у тачкама на сфери $r = R$, што омогућава да се гранични услов:

$$-\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T = \Delta g,$$

може третирати и решавати као парцијална диференцијална једначина.

Ако се лева и десна страна помноже са r^2 , а затим интеграле у границама од r до ∞ , добија се једначина облика

$$-\int_r^{\infty} \left[r^2 \frac{\partial T}{\partial r} + 2rT \right] dr = \int_r^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T) dr = \int_r^{\infty} r^2 \Delta g dr,$$

односно

$$-r^2 T \Big|_r^{\infty} = r^2 T \Big|_r^{\infty} = r^2 T - \lim_{r \rightarrow \infty} (r^2 T) = - \int_{\infty}^r r^2 \Delta g dr.$$

Како је

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n = \frac{R^3}{r^3} T_2 + \frac{R^4}{r^4} T_3 + \dots = \frac{1}{r^2} \left(\frac{R^3}{r} T_2 + \frac{R^4}{r^2} T_3 + \dots \right),$$

следи

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r^2 T) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{R^3}{r} T_2 + \frac{R^4}{r^2} T_3 + \dots \right) = 0,$$

једначина постаје

$$r^2 T = - \int_{\infty}^r r^2 \Delta g dr.$$

Заменом Δg у једначини са 3.5 следи

$$r^2 T = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\int_{\infty}^r \left(-\frac{r^3 - R^2 r}{l^3} + 1 + \frac{3R}{r} \cos \psi \right) \Delta g \right] d\sigma,$$

а како је (Heiskanen and Moritz, 1967, с.93)

$$\int_{\infty}^r \left(-\frac{r^3 - R^2 r}{l^3} + 1 + \frac{3R}{r} \cos \psi \right) \Delta g = \frac{2r^2}{l} + r - 3l - R \cos \psi \left(5 + 3 \ln \left(\frac{r - R \cos \psi + l}{2r} \right) \right),$$

следи

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\frac{2r^2}{l} + r - 3l - R \cos \psi \left(5 + 3 \ln \left(\frac{r - R \cos \psi + l}{2r} \right) \right) \right] d\sigma.$$

Увођењем смене

$$S(r, \psi) = \frac{2R}{l} + \frac{R}{r} - 3 \frac{Rl}{r^2} - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos \psi \left(5 + 3 \ln \left(\frac{r - R \cos \psi + l}{2r} \right) \right),$$

једначина постаје

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(r, \psi) \Delta g d\sigma.$$

На површи терестричке сфере, $r = R$ и $l = 2R \sin \frac{\psi}{2}$ (слика 3.1), могуће је функцију приказати у облику:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g d\sigma,$$

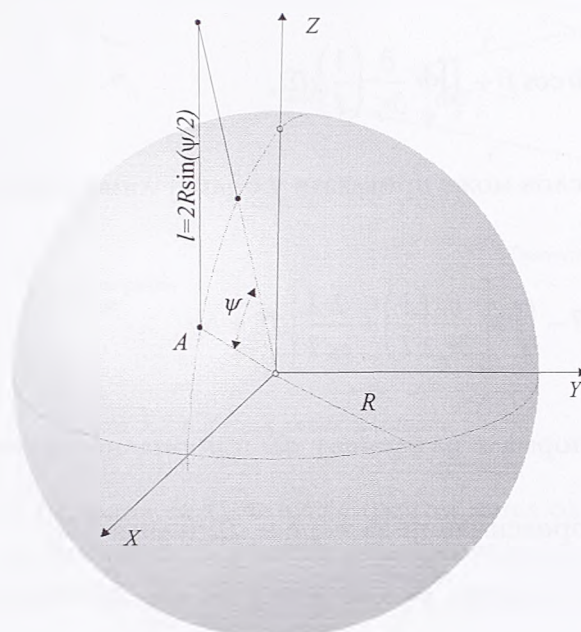
где је $S(\psi)$ Стоксова функција:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \left(\frac{\psi}{2} \right)} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right).$$

Коришћењем Брунсове теореме добија се једначина облика

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g d\sigma,$$

која се назива формулом Стокса.



Слика 3.1 Растојање l

3.1.3 РЕШЕЊЕ МОЛОДЕНСКОГ

За разлику од основне једначине физичке геодезије, која се користи при извођењу Стоксове формуле, код приступа Молоденског аномалије се односе на тачке физичке површи Земље, а аномалијски потенцијал на телуроид.

Увођењем аномалија на физичкој површи Земље и телуроида Σ , проблем који је Молоденски поставио, може се дефинисати на следећи начин:

одредити ону функцију T која је хармонијска ван Σ , такву да на Σ задовољава гранични услов 3.1.

Молоденски је аномалијски потенцијал представио у облику потенцијала масе Φ кондензоване на телуроиду:

$$T = \iint_{\Sigma} \frac{\Phi}{l} d\Sigma.$$

Како је потенцијал у овом облику већ хармонијска функција, следи да се решење проблема

Молоденског добија одвајањем оног решења из скупа свих могућих које задовољава дефинисани гранични услов.

Парцијални извод аномалијског потенцијала у правцу спољашње нормале на елемент телуроида $d\Sigma$ дефинисан је са

$$\frac{\partial T}{\partial r_p} = -2\pi\Phi \cos \beta + \iint_{\Sigma} \Phi \frac{\partial}{\partial r_p} \left(\frac{1}{l} \right) d\Sigma,$$

тако да се гранични услов може приказати у облику линеарне интегралне једначине:

$$2\pi\Phi \cos \beta - \iint_{\Sigma} \Phi \left[\frac{\partial}{\partial r_p} \left(\frac{1}{l} \right) + \frac{2}{r_p} \frac{1}{l} \right] d\Sigma = \Delta g,$$

где је β угао између нормале на елемент $d\Sigma$ и нормалне вертикале.

Увођењем сферне апроксимације за r_p , l и $d\Sigma$ (слика 3.2):

$$r_p = h_p + R, \quad r = h + R,$$

$$l = \sqrt{r_p^2 + r^2 - 2r_p r \cos \psi}, \quad d\Sigma = r^2 \sec \beta d\sigma,$$

добија се једначина

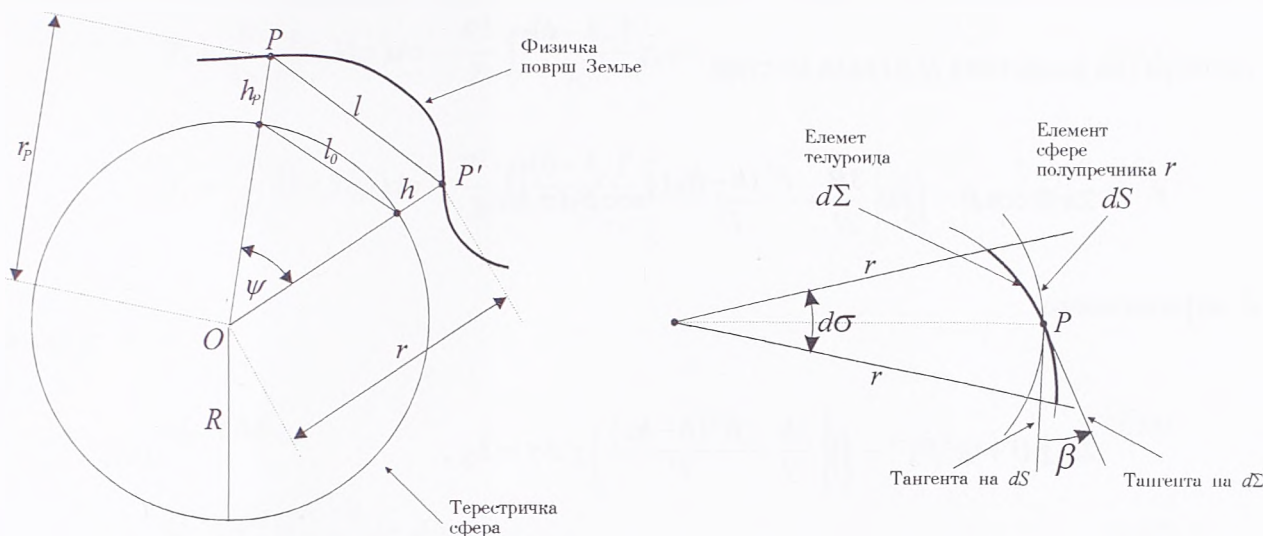
$$2\pi \Phi \cos \beta - \iint_{\sigma} \Phi \left[\frac{3}{2l} + \frac{r^2 - r_p^2}{2rl^3} \right] \frac{r^2}{r_p} \sec \beta d\sigma = \Delta g, \quad (3.6)$$

која представља основну интегралну једначину проблема Молоденског у сферној апроксимацији (Moritz, 1980, 357), а аномалијски потенцијал могуће је приказати у облику:

$$T = \iint_{\sigma} \frac{\Phi}{l} r^2 \sec \beta d\sigma.$$

Ако се радијус вектор прикаже у облику

$$r = R + h = R \left(1 + \frac{h}{R} \right),$$



Слика 3.2 Сферна апроксимација

а након тога занемари вредност члана h/R , чини се грешка мања од грешке која се уводи при коришћењу сферне апроксимације. Сагласно томе, интегралну једначину могуће је након **раванске апроксимације**, а без утицаја на тачност, трансформисати у једноставнији облик.

Раванска апроксимација подразумева следеће:

$$r_p = r = R,$$

након чега је могуће писати:

$$\frac{r^2}{r_p} = R, \quad r^2 - r_p^2 = (r - r_p)(r + r_p) = 2R(h - h_p),$$

док за растојање l следи:

$$l^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(1 + \frac{h + h_p}{R} + \frac{h_p h}{R^2} \right) + (h - h_p)^2$$

односно, након одбацивања чланова $\frac{h + h_p}{R}$ и $\frac{h_p h}{R^2}$,

$$l = l_0 \sqrt{1 + \left(\frac{h - h_p}{l_0} \right)^2}$$

где је

$$l_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2}.$$

Интегрална једначина (3.6) сада постаје

$$2\pi \Phi \cos \beta - \iint_{\sigma} \Phi \left[\frac{3R}{2l} + \frac{R^2(h-h_p)}{l^3} \right] \sec \beta d\sigma = \Delta g ,$$

и дефинитивно

$$2\pi \chi (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)^{-1} - \iint_{\sigma} \left[\frac{3R}{2l} + \frac{R^2(h-h_p)}{l^3} \right] \chi d\sigma = \Delta g , \quad (3.7)$$

где је

$$\chi = \Phi \sec \beta .$$

Једначина (3.7) представља основну интегралну једначину проблема Молоденског у раванској апроксимацији (Moritz, 1980, s. 358). Увођењем густине χ аномалијски потенцијал може се записати у облику:

$$T = R^2 \iint_{\sigma} \frac{\chi}{l} d\sigma .$$

Решавањем једначине по непознатој χ , Молоденски је добио решења у облику интегралне једначине (Moritz, 1971):

$$\chi_n = \frac{1}{2\pi} G_n + \frac{3}{16\pi^2} \iint_{\sigma} G_n S(\psi) d\sigma , \quad (3.8)$$

а за аномалијски потенцијал решење у облику степеног реда (Moritz, 1971):

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} T_n , \quad (3.9)$$

где су:

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_0 S(\psi) d\sigma , \quad (3.10)$$

$$T_1 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_1 S(\psi) d\sigma , \quad (3.11)$$

$$T_2 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_2 S(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{2} \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)}{l_0^3} \chi_0 d\sigma, \quad (3.12)$$

$$T_3 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_3 S(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{2} \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)^2}{l_0^3} \chi_1 d\sigma, \quad (3.13)$$

...

и где је

$$G_0 = \Delta g, \quad (3.14)$$

$$G_1 = R^2 \iint_{\sigma} \frac{h-h_p}{l_0^2} \chi_0 d\sigma, \quad (3.15)$$

$$G_2 = R^2 \iint_{\sigma} \frac{h-h_p}{l_0^3} \chi_1 d\sigma - \frac{3R}{4} \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)^2}{l_0^3} \chi_0 d\sigma + 2\pi\chi_0 \text{tg}^2 \beta, \quad (3.16)$$

$$G_3 = R^2 \iint_{\sigma} \frac{h-h_p}{l_0^3} \chi_2 d\sigma - \frac{3R}{4} \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)^2}{l_0^3} \chi_1 d\sigma - \\ - \frac{3}{2} R^2 \iint_{\sigma} \frac{(h-h_p)^3}{l_0^5} \chi_0 d\sigma + 2\pi\chi_1 \text{tg}^2 \beta, \quad (3.17)$$

...

На основу (3.14) одређује се χ_0 из (3.8), затим G_1 из (3.15), а након тога из χ_1 (3.8), па затим G_2 из (3.15), и тако до жељеног n . На овај начин могуће је одредити све непознате G_i , $i = 1, \dots, n$ које фигуришу у реду којим је дефинисан аномалијски потенцијал, па самим тим и аномалијски потенцијал T .

Може се показати да је ред (3.9) конвергентан, као и то да су на овај начин добијена решења јединствена (Moritz, 1980, s. 428-434).

Након одређеног аномалијског потенцијала аномалијске висине могуће је одредити применом Брунсове формуле, при чему се у практичним применама најчешће користе само прва два члана реда (у даљем делу текста формула Молоденског):

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} (\Delta g + G_1) d\sigma,$$

Веома битно је поменути следеће. Коришћењем израза за ундулацију геоида и аномалијску висину као разлике елипсоидних и ортометријских висина, односно нормалних висина може се показати да важи:

$$N = \zeta + \frac{\Delta g_B}{\bar{\gamma}} H^0, \quad (3.18)$$

где је Δg_B вредност Бугеове аномалије у којој је одређена аномалијска висина,

$$\Delta g_B = g - 2\pi k \rho H^0 + F - \gamma, \quad (3.19)$$

$\bar{\gamma}$ средња вредност нормалне теже дуж одсечка вертикале од нивоског елипсоида до телуроида и где су g мерена вредност убрзања, ρ густина, H^0 ортометријска висина, F поправка за слободан ваздух, γ нормално убрзање.

Другим речима, из одређених аномалијских висина могуће је одредити ундулацију геоида. Међутим, обрнуто не важи што није тешко закључити упоређењем решења Стокса и редова Молоденског.

3.2 ОПЕРАЦИОНИ ИЛИ ИНТЕГРАЛНИ ПРИСТУП

3.2.1 КОНЦЕПТ ПРИСТУПА

Параметарске методе одређивања ундулације геоида описане у претходном поглављу подразумевају одвојено решавање проблема позиционирања тачака и проблема одређивања аномалијског потенцијала.

Положај тачака, при одређивању функционала аномалијског потенцијала сматра се познатим, а сами функционали приказују се у облику функција положаја. Одвојено решавања поменутих проблема последица је ограничења коришћених математичких модела. Из истог разлога, раздвојен је и проблем позиционирања.

Како математички модели нису омогућавали заједничку обраду резултата одређивања геометријски и физички дефинисаних величина, проблем позиционирања раздваја се на пројектовање и реализацију:

- хоризонталних мрежа (дводимензионалне мреже, $2D$), мрежа унутар којих се одређују позиције тачака у односу на одређени референтни елипсоид путем одређивања две координате (примера ради геодетска латитуда B и геодетска лонгитуда L), и
- нивелманских мрежа (једnodимензионалне мреже, $1D$), мрежа унутар којих се одређују елипсоидне висина тачака h , или физички дефинисане висине: геопотенцијалне коте, динамичке, ортометријске или нормалне висине.

Комбинацијом $2D+1D$, путем уређене тројке бројева B, L, h одређује се једнозначан положај тачака у односу на усвојени обртни елипсоид.

Након поделе проблема позиционирања утицај поља силе Земљине теже различито

се и третира. При реализацији нивелманских мрежа утицај поља представља полазну основу путем које се формирају мреже физички дефинисаних висина, док се у формирању $2D$ мрежа уводе корекције за утицај поља.

У оба наведена случаја истините вредности мерених величине третирају се као нелинеарне функције непознатих величина, односно $2D$ или $1D$ координата тачака:

$$L = F(\mathbf{x}),$$

где је L истинита вредност мерене величине, F функција везе, \mathbf{x} вектор непознатих координата.

До непознатих координата тачака долази се путем "чисто геометријског изравњања". Успоставља се веза између истините вредности мерених величина и резултата мерења,

$$L = l' - \varepsilon = F(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}),$$

након чега се функција везе линеаризује у околини приближних вредности координата, чиме се за q резултата опажања долази до функционалног модела облика:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f},$$

где је l' резултат опажања, ε случајна грешка опажања, \mathbf{x}_0 вектор приближних вредности координата тачака, $\delta \mathbf{x}$ вектор прираштаја вектора \mathbf{x}_0 приближних вредности координата тачака, \mathbf{v} вектор поправака, \mathbf{A} матрица парцијалних извода функција веза, \mathbf{f} разлика приближних вредности мерених величина и резултата опажања

Након формираног функционалног модела, уводе се претпоставке о стохастичким особинама резултата опажања, односно, дефинише се стохастички модел, а сама решења облика:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{A}^T \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{f},$$

добивају се на бази класичног услова минимума:

$$\hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{K}_l^{-1} \hat{\mathbf{v}} = \text{минимум},$$

где је \mathbf{K}_l матрица коваријанси.

Постоје многи предлози у циљу дефинисања математичких модела за истовремено одређивања координата тачака и функционала аномалијског потенцијала убрзања Земљине теже.

Предлог о успостављању референтног система унутар којег се положај тачака геодетске мреже дефинише помоћу три координате (тродимензионални приступ, $3D$) дао

је Брунс 1878. године. При реализацији система Брунс предлаже дефинисање две групе линија. Прву групу представљају линије које међусобно повезују тачке и које се реализују терестричким мерењима. Другу групу представљају линије које дефинишу правац вертикале у свакој тачки мреже. На овај начин дефинише се фигура у простору која се зове Брунсов полиедар. Да би једна таква фигура била у потпуности дефинисана у простору неопходно је свакој тачки придружити пет параметара: три координате, на пример x , y , z координате геоцентричног координатног система и два параметра која дефинишу правац вертикале и за које се обично узимају астрономски одређена латитуда и лонгитуда тачке.

Маруси (*Marussi*) је 1949. године предложио коришћење природних координата Φ , Λ и W при дефинисању $2D$ мрежа, а Волф (*Wolf*) се у радовима објављеним 1963. године враћа на Брунсову идеју и уводи пет непознатих на свакој тачки мреже. У тако дефинисан тродимензионални приступ Хајц (*Heitz*) 1973. уводи ортометријске висине.

Иако се у већини наведених приступа проблем позиционирања решава дефинисањем једног математичког модела, готово све наведене величине су и даље геометријске по карактеру. Наиме, ниједан од приступа не подразумева и решавање проблема одређивања спољашњег гравитационог поља, односно функционала аномалијског потенцијала.

Први покушај дефинисања обједињеног математичког модела за истовремено одређивање тродимензионалних координата тачака и параметара потенцијала убрзања силе Земљине теже чине Ег (*Egg*) и Краруп (*Krarup*) 1973. године (Landau, 1988; Barzaghi, 1984).

У раду под насловом Интегрална геодезија (*Integrated Geodesy*), Ег и Краруп, дефинишу модел кога називају моделом интегралне геодезије (*Model of Integrated Geodesy*), и који подразумева заједничку обраду свих расположивих информација при одређивању позиција тачака и параметара потенцијала убрзања Земљине теже. (У раду Хелмута Морица (*Helmut Moritz*) Операциони приступ у Физичкој Геодезији (*Operational Approach to Physical Geodesy*), објављеном 1978 године, за приступ Ега и Крарупа користи се термин операциона геодезија (*Operational Geodesy*)).

За разлику од $2D+1D$ или $3D$ приступа, при интегралном приступу :

- истинита вредност величине која се опажа третира се као функција непознатих параметара: једног, два или три вектора положаја \mathbf{x} (вектора координата) и потенцијала убрзања силе Земљине теже $W(\mathbf{x})$:

$$L = F(\mathbf{x}, W(\mathbf{x})),$$

- резултати опажања мерених величина сматрају се ослобођеним од утицаја периодичних промена величина које се опажају, и приступ
- не подразумева било какве редукције чиме се елиминише увођење претпоставки о густинама маса Земљиног тела.

Дефинисањем математичког модела, модела интегралне геодезије, његовог функционалног и стохастичког дела, и применом методе најмањих квадрата могуће је оценити непознате величине.

Примена методе најмањих квадрата у функционалном делу математичког модела подразумева линеарне функције веза између истините вредности мерених величина и непознатих параметара. Увођењем приближних вредности непознатих параметара нелинеарне функције везе се линеаризују развојем у Тејлоров ред, у околини приближних вредности, при чему се задржавају само линеарни чланови развоја (нулти и први члан).

Приближну вредност вектора положаја,

$$\mathbf{x}_0^T = [x_0 \quad y_0 \quad z_0],$$

могуће је одредити коришћењем терестричких, астрономских или сателитских метода, док се за приближну вредност стварног потенцијала, $W_0(\mathbf{x})$ усваја вредност нормалног потенцијала:

$$W_0(\mathbf{x}) \approx U(\mathbf{x}).$$

Након увођења приближних вредности, непознате параметре могуће је приказати у облику збира приближних вредности и прираштаја:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x},$$

$$W(\mathbf{x}) = W_0(\mathbf{x}) + \delta W(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}),$$

где је $\delta \mathbf{x}$ вектор прираштаја вектора положаја, $\delta \mathbf{x}^T = [\delta x \quad \delta y \quad \delta z]$, $T(\mathbf{x})$ аномалијски потенцијал.

Очигледно, проблем одређивања стварног потенцијала и при интегралном приступу раздваја се на дефинисање нормалног и одређивање аномалијског. Међутим, као приближну вредност стварног потенцијала могуће је усвојити вредност било којег познатог референтног потенцијала, примера ради референтног потенцијала дефинисаног коефицијентима сферно хармонијског развоја, који су одређени методама сателитске геодезије. Одабирањем нормалног потенцијала за референтни, омогућено је упоређење резултата одређивања параметара аномалијског потенцијала путем модела интегралне геодезије са резултатима добијеним применом метода које се базирају на нормалном потенцијалу.

Полазна нелинеарна функција везе, након увођења приближних вредности, облика је:

$$L = F(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}, U(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x})).$$

С друге стране, истиниту вредност мерене величине могуће је приказати у облику разлике

$$L = l' - \varepsilon,$$

где је l' резултат опажања, ε случајна грешка опажања.

Из последње две једначине следи

$$l' - \varepsilon = F(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}, U(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x})),$$

односно

$$l' = F(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}, U(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x})) + \varepsilon.$$

Развијањем у Тејлоров ред у околини приближне вредности \mathbf{x}_0 , и задржавањем само нултог и првог члана развоја добија се линеарна функција везе облика

$$l' = F(\mathbf{x}_0, U) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0 \delta z + L[T] + \varepsilon,$$

односно

$$\delta l' = \mathbf{a}^T \delta \mathbf{x} + L[T] + \varepsilon,$$

где је $\delta l'$ разлика резултата опажања и приближне вредности $F(\mathbf{x}_0, U)$, $L[T]$ функционал аномалијског потенцијала, \mathbf{a} вектор парцијалних извода функције F у околини приближне вредности вектора положаја:

$$\mathbf{a}^T = [a_x \quad a_y \quad a_z].$$

Једначина представља линеарну једначину опажања када мерена величина зависи од једног вектора положаја. Може се показати да се за све величине које се опажају у геодезији након линеаризације добија линеарна једначина наведеног облика, при чему се разлика јавља само у броју и садржају елемената вектора \mathbf{a} и $\delta \mathbf{x}$ и облику функционала аномалијског потенцијала (Moritz, 1980, s. 132). На основу тога може се написати, за q резултата опажања, систем линеарних једначина:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{t} + \mathbf{n}, \quad (3.20)$$

где је $\mathbf{l}_{(q \times 1)}$ вектор разлика резултата опажања и приближних вредности, $\mathbf{A}_{(q \times n)}$ матрица коефицијената уз прираштаје вектора положаја и низа непознатих параметара (коефицијент рефракције, параметар размере,...) - матрица уз непознате детерминистичке параметре, $\mathbf{x}_{(n \times 1)}$ вектор прираштаја детерминистичких параметара, $\mathbf{R}_{(q \times k)}$ матрица коефицијената уз вектор функционала аномалијског потенцијала, $\mathbf{t}_{(k \times 1)}$ вектор функционала аномалијског потенцијала, $\mathbf{n}_{(q \times 1)}$ вектор случајних грешака и где је n број елемената вектора прираштаја детерминистичких параметара, а k број елемената вектора

сигнала.

Систем једначина (3.18) представља **функционални део модела интегралне геодезије**, односно **функционални модел колокације са параметрима** (Moritz, 1980, s. 111).

Вектор случајних грешака назива се вектором **шума**, а вектор функционала вектором **сигнала**. **Стохастички део модела интегралне геодезије** базиран је на претпоставкама које се односе на елементе ова два вектора:

- елементи вектора шума и елементи вектора сигнала сматрају се случајним величинама,
- укупно очекивање елемената једнако је нули, односно елементи вектора шума и елементи вектора сигнала су центриране случајне величине

$$\bar{E}[n_i] = EM[n_i] = E[n_i] = 0, \quad i = 1, \dots, q,$$

$$\bar{E}[t_j] = EM[t_j] = M\{t_j\} = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

- укупно очекивање производа $n_i t_j$ такође је једнако нули, одакле следи да су елементи међусобно независни

$$\bar{E}[n_i t_j] = EM[n_i t_j] = E[n_i] M\{t_j\} = 0,$$

- коваријансе елемената су познате и дефинисане изразима

$$C_{n_i n_i} = \bar{E}[n_i n_i] = EM[n_i n_i] = E[(n_i)^2],$$

$$C_{n_i n_j} = \bar{E}[n_i n_j] = EM[n_i n_j] = E[n_i n_j],$$

$$C_{t_i t_i} = \bar{E}[t_i t_i] = EM[t_i t_i] = M\{(t_i)^2\},$$

$$C_{t_i t_j} = \bar{E}[t_i t_j] = EM[t_i t_j] = M\{t_i t_j\},$$

при чему се коваријансе и унакрсне коваријансе елемената вектора сигнала морају изводити из **базне** или **основне функције коваријанси** за коју се усваја функција коваријанси аномалијског потенцијала.

Употребљене ознаке имају следећа значења E оператор математичког очекивања; математичко очекивање елемената вектора шума, M оператор хомогено-изотропног очекивања; очекивања елемената вектора сигнала (Moritz, 1980, s. 9),

$$M\{t\} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi} t(\theta, \lambda) \sin \theta \, d\alpha \, d\lambda \, d\theta,$$

\bar{E} оператор укупног очекивања; математичко очекивање елемената вектора шума и хомогено-изотропно очекивање елемената вектора сигнала.

Како се применом интегралног модела подразумева да се сва одређивања односе на физичку површ Земље, односно како приступ не подразумева било какве редукције, следи да се применом интегралног модела одређују функционали аномалијског потенцијала који се и односе на физичку површ Земље и на површ телуроида: аномалијске висине, аномалије слободног ваздуха, компоненте одступања вертикала Молоденског итд.

Интегрални приступ у потпуности је у складу са тренутним захтевима готово свих геодетских радова, нарочито од појаве GPS који по природи представља тродимензионални приступ. Применом GPS одређују се правоугле геоцентричне координате x, y, z у систему Светском геодетском систему 1984 (World Geodetic System 1984 - WGS84) или геодетске B, L, h у односу на елипсоид придружен систему. Висине су геометријски дефинисане и у циљу њихове трансформације у систем физички дефинисаних висина, ортометријских или нормалних висина, неопходно је познавати геоид, односно квазигеоид центиметарске тачности.

3.2.2 РЕШЕЊА ИНТЕГРАЛНОГ МОДЕЛА

Функционални део модела интегралне геодезије могуће је посматрати као збир:

- **детерминистичког дела** - Ax , дела који се односи на прираштаје непознатих детерминистичких параметара,
- **и стохастичког дела** - Rt , дела који се односи на елементе вектора сигнала.

Различитим третманом дефинисаних делова могуће је модел анализирати на три различита начина, односно анализирати три различита модела:

- **основни или потпуни модел**

$$l = Ax + Rt + n,$$

модел чијим се решавањем добијају оцене непознатих детерминистичких параметара и оцене елемената вектора сигнала,

и посебни модели

- **модел без детерминистичког дела**

$$l = Rt + n, Ax = 0,$$

модел предикције елемената вектора сигнала, и

- **модел без стохастичког дела**

$$\mathbf{l} = \mathbf{Ax} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{Rt} = 0,$$

модел чијим се решавањем добијају само оцене непознатих детерминистичких параметара.

Код интегралног приступа, оцена непознатих величина основног модела, заснива се на проширењу класичног услова минимума који се примењује код $1D$, $2D$ или $3D$ приступа. Наиме, поставља се услов да збир позитивно дефинитних квадратних форми

$$\hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \hat{\mathbf{n}} \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{t}}^T \mathbf{C}_{tt}^{-1} \hat{\mathbf{t}},$$

$$\mathcal{R} = \hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{t}}^T \mathbf{C}_{tt}^{-1} \hat{\mathbf{t}},$$

буде мањи од било којег другог збира облика:

$$\bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathbf{n}}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{C}_{tt}^{-1} \bar{\mathbf{t}},$$

где су $\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}$ и $\bar{\mathbf{t}}$ оне вредности вектора прираштаја параметара и вектора сигнала које задовољавају једначину модела $\mathbf{l} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Rt} + \hat{\mathbf{n}}$ и $\mathbf{l} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Rt} + \bar{\mathbf{n}}$ и где су \mathbf{C}_{nn} и \mathbf{C}_{tt} матрице коваријанси вектора шума и вектора сигнала.

Услов се при постављању проблема најчешће приказује у облику

$$\mathcal{R} = \mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{n} + \mathbf{t}^T \mathbf{C}_{tt}^{-1} \mathbf{t} = \text{минимум},$$

и назива се **хибридним условом минимума** или **принципом минимума колокације са параметрима**, а саме оцене непознатих могуће је одредити применом методе Лагранжових мултипликатора.

3.2.3 РЕШЕЊА ОСНОВНОГ МОДЕЛА

Лагранжова функција у случају основног модела облика је:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} [\mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{n} + \mathbf{t}^T \mathbf{C}_{tt}^{-1} \mathbf{t}] - \mathbf{k}^T (\mathbf{Ax} + \mathbf{Rt} + \mathbf{n} - \mathbf{l})$$

а њени екстремуми одређују се из услова да тотални диференцијал првог реда функције у тачкама екстремума буде једнак нули:

$$dL = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right) d\mathbf{x} + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{t}} \right) d\mathbf{t} + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}} \right) d\mathbf{n} = 0.$$

Први парцијални изводи функције дефинисани су изразима

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{n} - \mathbf{k}^T,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{t}^T \mathbf{C}_{tt}^{-1} \mathbf{t} - \mathbf{k}^T \mathbf{R},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{k}^T \mathbf{A},$$

одакле следи систем једначина

$$\mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} - \mathbf{k}^T = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{t}^T \mathbf{C}_{tt}^{-1} - \mathbf{k}^T \mathbf{R} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{k}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Решавањем прве и друге једначине система по \mathbf{n} и \mathbf{t} :

$$\mathbf{n} = \mathbf{C}_{nn} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{C}_{tt} \mathbf{R}^T \mathbf{k},$$

и њиховом заменом у једначину модела, добија се једначина облика

$$\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{R}\mathbf{C}_{tt}\mathbf{R}^T + \mathbf{C}_{nn})^{-1} \mathbf{k},$$

из које за вектор мултипликатора следи

$$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{C}}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x})$$

где је

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{R}\mathbf{C}_{tt}\mathbf{R}^T + \mathbf{C}_{nn}.$$

Оцена вектора прираштаја детерминистичких параметара одређује се из треће једначине система користећи израз:

$$\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{l} - \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{l},$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{l},$$

након чега је могуће одредити и оцене вектора шума и вектора сигнала (Hein, 1983):

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{C}_{nn} \bar{\mathbf{C}}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}),$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{C}_{tt} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}).$$

Може се показати да су приказана решења управо она у којима полазна Лангражева функција достиже свој минимум као и то да су решења **непомерена**.

Посебно, интегрални модел има имплицитно уграђену предикцију функционала у произвољној тачки територије за коју се модел формира, односно применом модела могуће је одредити оцене произвољног броја функционала аномалијског потенцијала. Тада су решења за све непознате функционале, дефинисане сада као чланове вектора \mathbf{s} са $k + m$ елемената

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix},$$

где је \mathbf{u} вектор од m додатних функционала, облика

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{l},$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{C}_{st} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}),$$

где је

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{R} \mathbf{C}_{tt} \mathbf{R}^T + \mathbf{C}_{nn},$$

$$\mathbf{C}_{st} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{tt} \\ \mathbf{C}_{ut} \end{bmatrix}.$$

Тачност решења може се одредити применом израза

$$\bar{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s^T] = (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1},$$

$$\bar{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T] = \mathbf{C}_{tt} \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1}) \right] \mathbf{R} \mathbf{C}_{tt},$$

$$\bar{E}_{xt}[\boldsymbol{\varepsilon}_s \boldsymbol{\varepsilon}_t^T] = -(\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{C}_{tt},$$

док се за случај предикције додатних сигнала користе

$$\bar{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T] = (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1},$$

$$\bar{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s^T] = \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{C}_{st} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1}) \mathbf{R} \mathbf{C}_{ss},$$

$$\bar{E}[\varepsilon_x \varepsilon_s^T] = -A(A^T \bar{C}^{-1} A)^{-1} A^T \bar{C}^{-1} R C_{ss}.$$

За оцене непознатих вектора \mathbf{x} , \mathbf{t} или \mathbf{s} , чије су оцене тачности дефинисане приказаним изразима, може се показати да представљају **најбоље линеарне непомерене оцене** (Moritz, 1980, s.129).

3.2.4 РЕШЕЊА ПОСЕБНИХ МОДЕЛА

Решења посебних модела добијају се из решења основног модела када се усвоји $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, односно $R\mathbf{t} = \mathbf{0}$ одакле следи:

- За модел без детерминистичког дела $\mathbf{l} = R\mathbf{t} + \mathbf{n}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ решења су облика

$$\hat{\mathbf{t}} = C_{tt} R^T \bar{C}^{-1} \mathbf{l},$$

$$\hat{\mathbf{s}} = C_{st} R^T \bar{C}^{-1} \mathbf{l},$$

$$\bar{C} = R C_{tt} R^T + C_{nn} \text{ и } C_{st} = \begin{bmatrix} C_{st} \\ C_{st} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{l} = A\mathbf{x} + \mathbf{n}$, $R\mathbf{t} = \mathbf{0}$,

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T \bar{C}^{-1} A)^{-1} A^T \bar{C}^{-1} \mathbf{l}, \quad \text{где је } \bar{C} = C_{nn}.$$

4 МЕТОДОЛОГИЈА ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА

Приказана решења граничних проблема подразумевају да су резултати одређивања функционала аномалијског потенцијала познати на читавој површи Земље (геоида), и то:

- у свим тачкама (решење Молоденског и решење Стокса)
- или само у коначном броју тачака (интегрални приступ).

Јасно је да наведене услове приступа Стокса и приступа Молоденског није могуће практично испунити, а и захтев за познавањем резултата у коначном броју тачака најчешће није испуњен и односи се на релативно ретка одређивања глобалног геоида.

У практичним геодетским применама најчешће се располаже са резултатима одређивања функционала на само једном делу физичке површи Земље, а њиховим коришћењем могуће је одредити само део геоида, односно локални геоид.

Под локалним геоидом назива се само један део геоида коме на физичкој површи Земље одговара површ која:

- прекрива релативно мало подручје, примера ради подручје површине $10 \times 10 \text{ km}$,

или површ

- која прекрива подручје читаве државе, континента.

Једном усвојено подручје назива се **локалним**, а у првом случају најчешће се дефинише меридијанима и паралелама које га ограничавају.

Одређивање локалног геоида подразумева одређивање ундулација геоида у одређеном броју тачака које се налазе унутар локалног подручја.

Број и распоред тачака на којима се ундулације одређују дефинишу **резолуцију** геоида, а она мора бити таква да се на основу одређених ундулација може одредити ундулација у било којој тачки локалног подручја применом интерполације, такође са тачношћу центиметарског нивоа.

Локални геоид одређен под наведеним условима назива се **геоидом високе резолуције центиметарске тачности**, а на исти начин могуће је дефинисати и **квазигеоид високе резолуције**, када се уместо ундулације геоида разматрају аномалијске висине.

Методологија одређивања геоида, односно скуп метода које ће при одређивању геоида бити примењене, зависи од података са којима се у тренутку одређивања располаже, а саме методе одређивања могуће је поделити с обзиром на порекло података на: **терестричке** и **сателитске** методе.

Код терестричких метода могу се издвојити

- астро-геодетски нивелман, (комбинација астрономских и геодетских одређивања)
- гравиметријска метода, метода примене Стоксове формуле (или редова Молоденског при одређивању квазигеоида),

а код сателитских метода методе, које се базирају на резултатима

- алтиметријских опажања,
- градиометријских опажања,
- или резултатима опажања путања сателита.

Посебно се издваја интегрални модел путем којег је могуће искористити све расположиве податке без обзира на њихово порекло.

Комбинацијом поменутих метода дефинишу се и користе **комбиноване** методе одређивања ундулација.

4.1 ТЕРЕСТРИЧКЕ МЕТОДЕ

4.1.1 ОДРЕЂИВАЊЕ УНДУЛАЦИЈЕ ПРИМЕНОМ АСТРОГЕОДЕТСКОГ НИВЕЛМАНА

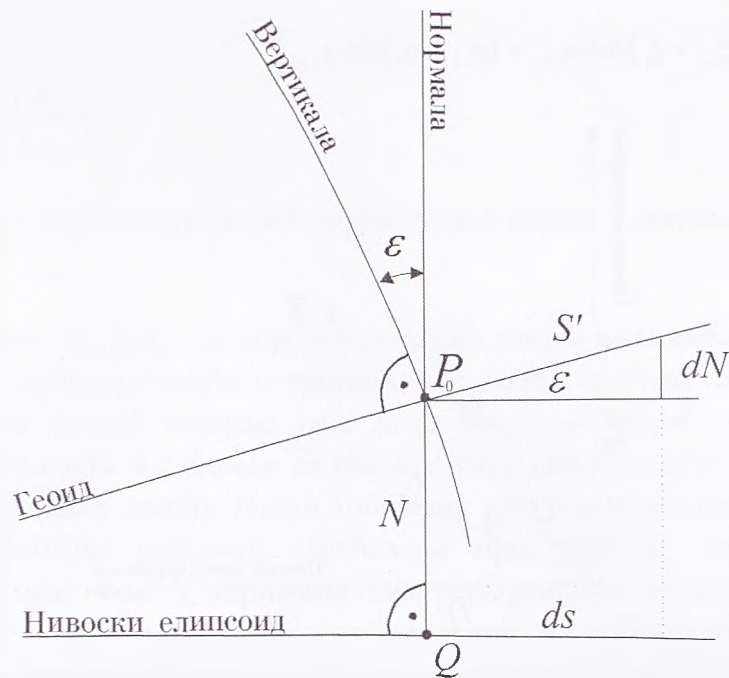
Елипсоидну разлику висина између било које две тачке P_0 и P_1 које се налазе на геоиду,

$$\Delta N_{P_0}^{P_1} = N_{P_0} - N_{P_1},$$

могуће је одредити из познатих вредности одступања вертикала дуж произвољне криве S' на геоиду која спаја тачке P_0 и P_1 . Наиме, ако се кроз вертикалу тачке P_0 (слика 4.1) провуче раван која сече површ елипсоида и геоида под произвољним азимутом α , тада се промена елемента ундулације dN са променом елемента растојања ds у посматраној равни може приказати у облику производа:

$$dN = -\varepsilon ds,$$

где је ε компонента одступања вертикале у равни пресека.



Слика 4.1 Одступање вертикале у правцу произвољног азимута

Ако су компоненте одступања познате у свим тачкама дуж криве S' тада се разлика ундулација може одредити интеграћењем леве и десне стране једначине:

$$\Delta N_{P_0}^{P_1} = N_{P_1} - N_{P_0} = - \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon ds.$$

С обзиром да је компонента одступања вертикале у правцу произвољног азимута α дефинисана са (слика 4.2) :

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha,$$

једначина за разлику ундулација постаје:

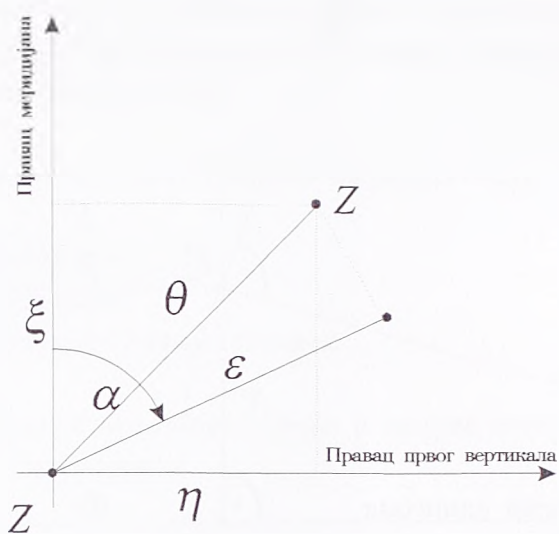
$$\Delta N_{P_0}^{P_1} = - \int_{P_0}^{P_1} (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) ds.$$

При практичним радовима разлика ундулација између тачака P_1 и P_n у којима је познато одступање вертикала одређује се нумеричком интеграцијом. Ако су тачке P_1 и P_n спојене линијом која пролази кроз n тачака P_i , у којима је одступање вертикале такође познато (слика 4.3), висинску разлику $\Delta N_{P_1}^{P_n}$ могуће је срачунати применом израза:

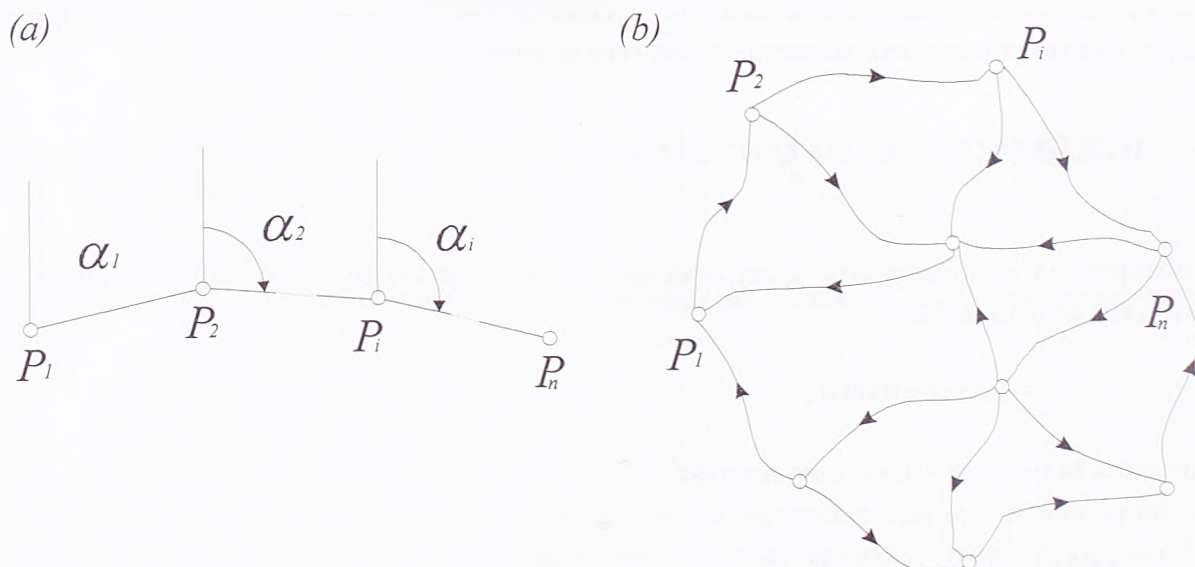
$$\Delta N_{P_1}^{P_n} = - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i ds_i,$$

где је

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} [(\xi_{i-1} + \xi_i) \cos \alpha_{i-1,i} + (\eta_{i-1} + \eta_i) \sin \alpha_{i-1,i}] \quad (4.1)$$



Слика 4.2 Компоненте одступања вертикале у правцу произвољног азимута



Слика 4.3 Одређивање ундулација астрогеодетским нивелманом

Очигледно применом овог поступка могуће је одредити разлике ундулација између сваког пара тачака дуж профила $P_1 P_n$.

У случају када се површ нивоског елипсоида апроксимира сфером израз за ундулацију трансформише се у облик

$$\Delta N = -0.45 \sum_{i=1}^n [(\xi_{i-1} + \xi_i) \Delta B + (\eta_{i-1} + \eta_i) \Delta L \cos B_m], \quad (4.2)$$

где је

$$B_m = \frac{B_l + B_{l+1}}{2},$$

и где се N добија у сантиметрима када се одступања изразе у секундама а разлике ΔB и ΔL у минутима.

Ако су у тачкама P_i , $i = 1, \dots, n$ које су на површи геоида распоређене као на слици 4.3 позната одступања вертикала могуће је применити следећи поступак. Свака тачка повеже се са једном или више тачака линијама тако да се формира мрежа слична нивелманској мрежи, а затим применом 4.2 одреде се разлике ундулација између почетне и завршне тачке за сваку дефинисану линију. Након добијених вредности разлика ундулација могуће је применити изравнање резултата одређивања при чему је потребно познавати ундулацију барем једне тачке. У хоризонталним референтним мрежама обично се усваја тачка координатног почетка мреже у којој су ундулација N , компоненте одступања ξ и η познати по дефиницији (класичан геодетски датум). Када се одреде једнозначне вредности ундулација применом линеарне интерполације, могуће је одредити довољан број тачака за формирање линија истих ундулација, односно одредити површ геоида.

4.1.2 ОДРЕЂИВАЊЕ УНДУЛАЦИЈЕ ПРИМЕНОМ СТОКСОВЕ ФОРМУЛЕ

За разлику од астрогеодетског нивелмана применом Стоксове формуле одређују се директно вредности ундулација и могуће је срачунати ундулацију у свакој тачки геоида.

Геоид се дели на k фигура правилног геометријског облика (слика 4.4, било у форми под (a) или (b)) и за сваку фигуру одреди се, на основу вредности аномалија убрзања унутар фигура, средња вредност аномалија убрзања $\overline{\Delta g_k}$.

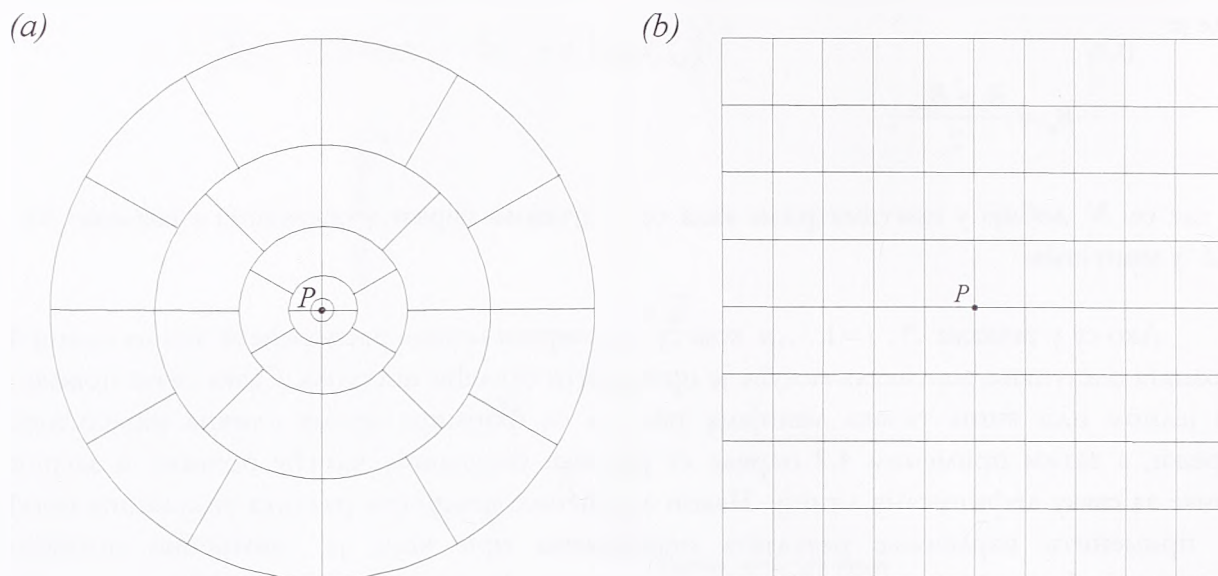
Ундулације, након поделе и одређивања аномалија $\overline{\Delta g_k}$, одређују се нумеричком интеграцијом

$$N = \sum_k c_k \overline{\Delta g_k},$$

где су c_k коефицијенти дефинисани изразом

$$c_k = \frac{R}{4\pi G} \iint_{q_k} S(\psi) d\sigma,$$

где је G унапред усвојена константна вредност нормалног убрзања и који очигледно не зависе од вредности аномалија и при чему се за сваки начин поделе геоида на фигуре правилног геометријског облика добијају различите вредности коефицијената c_k (Heiskanen and Moritz, 1967, s. 119-120).



Слика 4.4 Подела геоида на фигуре правилног облика

Теоријски посматрано неопходно је ундулације одређивати коришћењем средњих вредности аномалија које су правилно распоређене по читавом геоиду, међутим практично је то веома тешко остварити. Из тог разлога поред одређивања ундулација применом Стоксовог решења увек се разматра и вредност грешке ограничене нумеричке интеграције (*truncation error*) (Featherstone, 1998, s. 154).

У последње две деценије посебна пажња посвећује се примени брзих Фуријеових трансформација (Fast Fourier Transformation – FFT) при решавању Стоксове формуле, при чему се уместо средњих аномалија које се примењују код приказаног класичног приступа, примењује дигитални модел аномалија.

Најчешће се користе једнодимензионалне Фуријеове трансформације (1D FFT) када се Стоксова формула, након модификације у циљу нумеричке интеграције, приказује у облику

$$N(\varphi_p, \lambda_p) = \frac{\Delta\varphi\Delta\lambda R}{4\pi\gamma} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \Delta g(\varphi_n, \lambda_m) \cos \varphi_n S(\psi(\varphi_p, \lambda_p, \varphi_n, \lambda_m)),$$

где је функција језгра дата са

$$S(\psi(\varphi_p, \lambda_p, \varphi, \lambda)) = \frac{1}{s} - 6s + 1 - 5(1 - 2s^2) - 3(1 - 2s^2)\ln(s + s^2),$$

и где је

$$s^2 = \sin^2 \frac{\varphi_p - \varphi}{2} + \sin^2 \frac{\lambda_p - \lambda}{2} \cos \varphi_p \cos \varphi.$$

Користећи се чињеницом да је функција језгра иста за све вредности на једној паралели али различита за тачке на различитим латитудама претходни израз може се представити у облику конволуције у правцу исток-запад. Коришћењем 1D трансформације ундулације геоида могу бити за сваку паралелу рачунате применом израза (Ye Cai Li, 1993):

$$N(\varphi_p, \lambda) = \frac{\Delta\varphi\Delta\lambda R}{4\pi\gamma} \sum_{n=0}^{N-1} F_1^{-1} \{ F_1 \{ \Delta g(\varphi_n) \cos \varphi_n \} F_1 \{ S(\varphi_p, \varphi_n, \Delta\lambda) \} \},$$

где је F_1 директна, а F_1^{-1} инверзна Фуријеова трансформација.

Постоји значајан број радова у којима се у циљу одређивања ундулација геоида примењују 1D или 2D FFT, при чему се предлажу и модификације примене у циљу елиминисања ефеката циркуларне конволуције као и у циљу смањивања грешака ограничене нумеричке интеграције путем модификације функције језгра.

Поступцима који су наведени (класичан приступ или примена Фуријеових трансформација) могуће је одредити и аномалијске висине при чему се фигуре правилног геометријског облика, односно дигитални модели аномалија, формирају на физичкој површи Земље.

Посебно, претпоставка да изнад геоида нема маса, као и захтев да су аномалије познате на површи геоида, доводи до потребе за редукцијом измереног интензитета убрзања теже када се морају уводити хипотезе о густинама топографских маса (у физичкој геодезији масе изнад геоида до физичке површи Земље).

Сама редукција састоји из два корака. У првом кораку топографске масе се отклањају, затим кондензују на геоид или премештају унутар геоида, а у другом кораку се увођењем поправке за слободан ваздух добија вредност убрзања на геоиду, када је могуће одредити аномалију на геоиду.

Први корак редукције доводи до промене потенцијала, односно до промене геоида. То значи да се применом Стоксове формуле не одређује геоид већ **когеоид (коундулације)**, а сам ефекат регуларизације назива се **индиректним ефектом редукције** (слика 4.5).

Ако се промена потенцијала која настаје као последица регуларизације означи са δT^C за аномалијски потенцијал следи

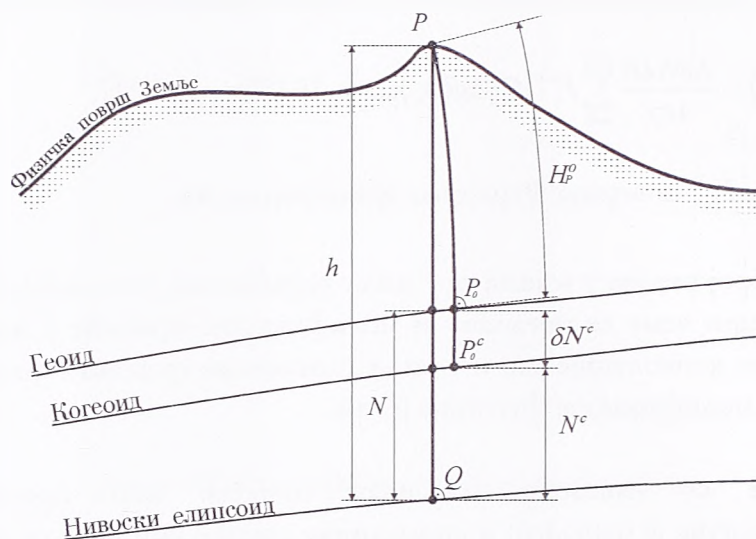
$$T = T^C + \delta T^C,$$

одакле применом Брунсове формуле следи

$$N = N^C + \delta N^C,$$

где је са δN^C означена вредност индиректног ефекта.

Дакле, да би се применом Стоксове формуле одредиле ундулације геоида мора се посебна пажња посветити начину регуларизације и накнадном моделирању индиректног ефекта.



Слика 4.5 Когеоид

4.2 САТЕЛИТСКЕ МЕТОДЕ ОДРЕЂИВАЊА

Вештачке сателите који се користе у геодезији генерално је могуће поделити на сателите ниске и сателите високе орбите.

Сателити високе орбите углавном се користе за одређивање позиција тачака унутар усвојеног референтног система, а сателити ниске орбите за преузимање информација о потенцијалу убрзања Земљине теже.

Нивоске површи потенцијала убрзања гравитационе силе Земље, ван тела Земље, немају правилан геометријски облик и могу се описати сферним хармоницима (Moritz, 1980)

$$V = \frac{kM}{r_A} \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r_A} \right)^n \sum_{m=0}^n [J_{nm} R_{nm}(\theta_A, \lambda_A) + K_{nm} S_{nm}(\theta_A, \lambda_A)] \right\}.$$

Када се тела на које гравитациона сила Земље делује налазе на великим растојањима од тела Земље, вредност другог члана израза занемарљиво је мала у односу на вредност првог члана, а очигледно да са даљим повећањем растојања вредност другог члана тежи нули. Из тог разлога у тачкама које се налазе на великим растојањима од тела Земље могуће је потенцијал приказивати у облику:

$$V = \frac{kM}{r_A},$$

или другим речима, потенцијал гравитационе силе Земље на великим растојањима радијално је поље гравитационе силе Земље. Већ на растојањима неколико десетина хиљада километара нивоске површи добијају облик који је веома близак облику и односу концентрично постављених сфера. У таквим условима једноставније је моделирати утицај поља убрзања, а саме путање сателита готово се поклапају са теоријски дефинисаним путањама - Кеплеровим елипсама.

С друге стране, сателити на ниским орбитама пресецају управо оне нивоске површи чији геометријски облик значајно зависи од неправилног облика Земљиног тела и распореда густина њених маса. Инструменти који се налазе на сателитима у стању су да преузму информације поменутих неправилности у виду резултата опажања параметара стварног потенцијала, а опажањем њихових орбита и анализом резултата одступања од теоријски дефинисаних орбита могуће је одредити коефицијенте сферно хармонијског развоја.

Као пример може се навести TOPEX/POSEIDON сателит чија је висина путање 1366 km и чији је основни разлог лансирања одређивање површи мора и океана применом резултата опажања алтиметра који се налази на сателиту (Gysen, 1997) и GPS сателити чија је висина лета 20200 km и који се примарно користе за одређивање позиција тачака унутар референтног геодетског система WGS84.

4.2.1 МЕТОДЕ БАЗИРАНЕ НА АЛТИМЕТРИЈСКИМ ИЛИ ГРАДИОМЕТРИЈСКИМ РЕЗУЛТАТИМА ОПАЖАЊА

Основни концепт одређивања ундулације применом резултата алтиметријских одређивања приказан је на слици 4.6.

Алтиметром, који се налази на сателиту чија је орбита позната унутар усвојеног геоцентричног референтног система, одређује се растојање између сателита и тачке P која се налази на површи океана и то дуж нормале на нивоски елипсоид која пролази кроз тачку P , односно тачку s у којој се сателит налази. Како је положај тачке P' у односу на површ нивоског елипсоида геометријски дефинисан и једнозначно се може одредити путем математичких релација, елипсоидну висину тачке P могуће је приказати у облику (Rummel, 1977, s. 74):

$$h = \rho_s - a - \rho_{P'} + \frac{\rho_{P'}}{8} \left(1 - \frac{\rho_{P'}}{\rho_s} \right) e^4 \sin^2 2B_{P'},$$

где је ρ_s растојање од центра масе Земље до сателита у тренутку одређивања алтиметром, a резултат одређивања алтиметра, $\rho_{P'}$ растојање од центра масе Земље до тачке P' , $B_{P'}$ геодетска латитуда тачке P' .

4.2.2 ОДРЕЂИВАЊЕ УНДУЛАЦИЈЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ОПАЖАЊА ПУТАЊЕ САТЕЛИТА

На основу резултата опажања путања сателита одређују се коефицијенти сферно хармонијског развоја потенцијала убрзања гравитационе силе Земље V , само до одређеног степена и реда, а затим на основу дефинисаних релација између потенцијала V и аномалијског потенцијала T , и сви други функционали аномалијског потенцијала.

Када би тело Земље било правилног геометријског облика и распореда густине маса којим се обезбеђује ротациона симетрија поља убрзања гравитационе силе Земље, путање сателита биле би веома блиске Кеплеровим елипсама чији је положај у простору дефинисан са шест орбиталних параметара (Heiskanen and Moritz, 1967, s. 332-356).

Одступања од елипси у наведеном идеалном случају настају као последице негравитационих утицаја: отпора ваздуха, притиска Сунчевог зрачења, електромагнетних и релативистичких ефеката итд., па следи да се потенцијал убрзања резултанте сила које делују на сателит може приказати у облику збира:

$$V = \frac{kM}{r} + R,$$

где је R поремећајни потенцијал, односно укупни потенцијал убрзања гравитационих и негравитационих утицаја.

Путања сателита у пољу тако дефинисаног поремећајног потенцијала назива се *поремећајном путањом*, а сваку њену тачку могуће је дефинисати на основу орбиталних параметара и њихових прираштаја који настају као последице гравитационих и негравитационих утицаја. Негравитационе утицаје могуће је посебно моделирати и елиминисати, након чега се постојање поремећајног потенцијала R може сматрати последицом само гравитационих утицаја.

На основу резултата опажања поремећајних путања могуће је оценити вредности орбиталних параметара, а затим на основу математичких веза између познатих вредности прираштаја орбиталних параметара и коефицијената сферно хармонијског развоја и саме вредности коефицијената (Heiskanen and Moritz, 1967, s. 332-356).

Скуп на овај начин одређених коефицијената сферно хармонијског развоја потенцијала гравитационе силе назива се **глобалним геопотенцијалним моделом**.

4.3 ПРИМЕНА ИНТЕГРАЛНОГ МОДЕЛА

Интегрални модел чије су основне поставке приказане у поглављу 3.2 у потпуности зависи од начина дефинисања облика аналитичких функција коваријанси, што уједно представља и основни проблем примене.

Након одређивања аналитичког облика функција коваријанси, који треба да представља најбољу апроксимацију емпиријских коваријанси функционала аномалијског потенцијала, примена модела је релативно једноставна и своди се на решавање матричних једначина приказаних у поглављу 3.2.

4.3.1 ЕМПИРИЈСКЕ КОВАРИЈАНСЕ ФУНКЦИОНАЛА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА

Теоријска вредност коваријансе било која два функционала аномалијског потенцијала s и t дефинисана је функцијом коваријанси на површи сфере (Moritz, 1980):

$$C(\psi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} s(\theta, \lambda) t(\theta', \lambda') \sin \theta d\theta d\lambda d\alpha,$$

при чему се подразумева да су функционали познати у свим тачкама физичке површи Земље односно јединичне или терестричке сфере.

При практичним радовима располаже се само са дискретним скупом резултата опажања s'_i и t'_j , $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$ функционала аномалијског потенцијала s и t , па је при одређивању коваријанси неопходно применити нумеричку интеграцију. Коваријансе одређене применом нумеричке интеграције из резултата опажања називају се емпиријским коваријансама. У поступку одређивања емпиријских коваријанси физичка површ Земље подели се на блокове A_k , $k=1, \dots, l$ (слика 4.7) ограничене меридијанима и паралелама при чему се "ширине" и "висине" блокова ΔB_k и ΔL_k одређују с озбиром на распоред и број резултата опажања. Ако се резултату опажања s'_i придружи део површине физичке површи Земље A_i унутар којег се опажање налази, а на исти начин опажању t'_j део физичке површи Земље A_j , тада се емпиријска коваријанса може срачунати из израза:

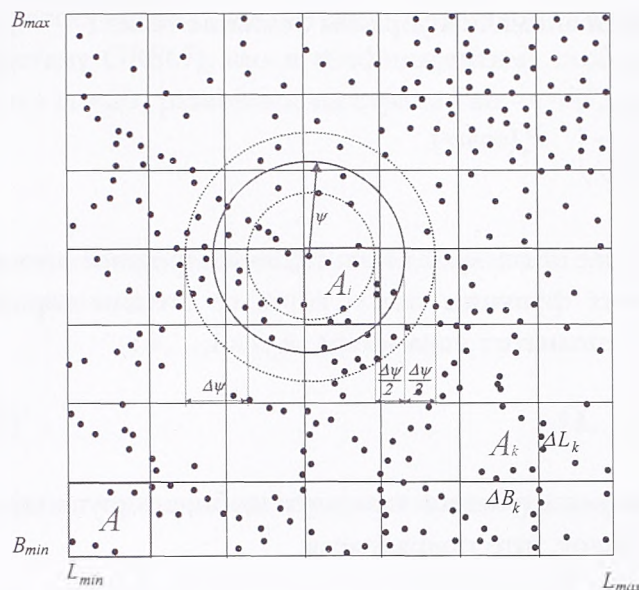
$$C(\psi) = \frac{\sum s'_i t'_j A_i A_j}{\sum A_i A_j},$$

где је ψ сферно растојање између тачака на које се односе опажања s'_i и t'_j .

У практичним применама вредност сферног растојања дефинише се из услова

$$\psi - \frac{\Delta\psi}{2} < \psi_{ij} < \psi + \frac{\Delta\psi}{2},$$

при чему се интервал $\Delta\psi$, као и у случају интервала ΔB и ΔL , усваја у зависности од распореда и броја резултата опажања.



Слика 4.7 Рачунање емпиријских коваријанси функционала

4.3.2 АНАЛИТИЧКА ФУНКЦИЈА КОВАРИЈАНСИ

Једном одређена функција коваријанси мора да задовољи низ захтева: мора да буде дефинисана и непрекидна за подручје за које се одређује, реална функција чије су променљиве такође из скупа реалних бројева, хармонијска у свим тачкама дефинисаности, хомогено-изотропна, позитивно дефинитна и такође она која на површи сфере представља најбољу апроксимацију емпиријских коваријанси.

У основи разликују се две врсте аналитичких функција коваријанси: **глобалне и локалне функције коваријанси**.

Глобалне функције коваријанси одређују се коришћењем резултата опажања функционала аномалијског потенцијала "који су правилно распоређени по читавој површи Земље", а локалне функције коваријанси коришћењем резултата опажања која прекривају локално подручје.

Може се рећи да су готово сви изрази за локалне функције коваријанси, који се данас користе при одређивању средњеталасних карактеристика функционала, само посебни облици израза који су изведени при одређивању глобалних функција коваријанси.

Све горе наведене услове које глобалне функције коваријанси морају испуњавати веома је тешко постићи при практичним одређивањима. Ово се посебно односи на особину хомогености која зависи од распореда и броја резултата опажања функционала аномалијског потенцијала. При теоријским разматрањима увек се говори само о изотропним функцијама коваријанси, а провера особине хомогености представља посебан проблем код одређивања глобалних (или локалних) функција коваријанси.

Полазну основу за одређивање глобалних функција коваријанси представља просто-

рна функција коваријанси аномалија убрзања Земљине теже:

$$C_{\Delta g_r, \Delta g_\varrho} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{R^2}{r_p r_\varrho} \right)^{n+2} P_n(\cos \psi),$$

а први корак дефинисање низа модела за степене варијансе аномалија убрзања, c_n , односно низа нелинеарних функција путем којих се степене варијансе представљају као функције степена n и непознатих параметара $A_i, i=1, \dots, k$:

$$c_n = c_n(n, A_i, i=1, \dots, k).$$

Након дефинисања модела степених варијанси добијене функције коваријанси анализирају се на глобалном нивоу, што подразумева:

- упоређење вредности моделираних степених варијанси са вредностима емпиријских степених варијанси, односно варијанси које се могу одредити коришћењем коефицијената глобалног геопотенцијалног модела путем израза (Rapp, 1977, с. 316):

$$\hat{c}_n = \left(\frac{kM}{a^2} \right)^2 (n-1)^2 \sum_{n=2}^{N_{\max}} (\bar{J}_{nm}^{\prime 2} + \bar{K}_{nm}^{\prime 2}),$$

где је N_{\max} максимални степен глобалног геопотенцијалног модела, a велика полуоса усвојеног нивоског елипсоида.

- као и упоређење функција у погледу једноставности затворених облика.

Функције чије степене варијансе "прате понашање" емпиријски одређених варијанси као и функције са једноставнијим затвореним обликом уклапају се у емпиријски одређене варијансе. Применом методе најмањих квадрата на бази функције одабране за степене варијансе, одређују се непознати параметри за сваки од модела при чему се емпиријске степене варијансе сматрају "мереним величинама".

Након одређивања глобалне функције коваријанси аномалија убрзања, одређују се глобална функција коваријанси аномалијског потенцијала и све остале функције коваријанси неопходне за примену интегралног модела које следе из примене "закона преноса коваријанси" на функцију коваријанси аномалијског потенцијала.

Један од најзначајнијих радова о одређивању глобалних функција коваријанси је рад К.К. Чернинга (С.С. Tscherning) и Р.Х. Рапа (R.H. Rapp): "Затворени изрази за функције коваријанси аномалија убрзања, ундулацију геоида и одступање вертикала изведени из модела степених варијанси аномалија убрзања" (С.С. Tscherning and R.H. Rapp: Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations and Deflections of the Vertical Implied by Anomaly Degree Variance Models). При одређивању функција Чернинг и Рап располагали су са 2253122 "результата опажања" аномалија убрзања,

релативно правилно распоређених по читавој физичкој површи Земље (аномалија слободног ваздуха у систему GRS67), као и коефицијентима глобалног геопотенцијалног модела степена и реда $n = m = 20$, развијеног од стране Рап - а 1973. године (Tscherning and Rapp, 1974, с. 15).

Применом описаног поступка одређивања функција Чернинг и Рап дефинисали су укупно 5 модела од којих се четврти модел:

$$c_n = \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+B)},$$

готово искључиво користи у примени интегралног модела у циљу одређивања ундулације геоида.

За локалну функцију коваријанси аномалијског потенцијала усваја се функција која се добија када се од глобалне функције коваријанси одузму сви чланови реда од $n=2$ закључно до $n=n_l$, при чему се степен n_l назива **редом локалне функције коваријанси** (Tscherning and Rapp, 1974, с. 62; Schwarz, 1980; Schwarz, 1984). Усвајање наведене функције коваријанси за локалну следи из чињенице да су први чланови реда глобалне функције константни на локалном подручју, и да се одузимањем првих чланова глобалне функције долази до функције која описује стохастичке особине резидуалних резултата опажања који прекривају локално подручје (Moritz, 1980, с. 194).

Локална функција сматра се одређеном када се из резултата опажања са локалног подручја (локалних емпиријских коваријанси) одреде ред локалне функције коваријанси и непознати параметри усвојеног аналитичког облика, односно непознати параметри усвојеног модела степених варијанси.

Одређивање реда локалне функције и непознатих параметара модела степених варијанси представља основни проблем примене интегралног модела при одређивању функционала аномалијског потенцијала, и постоји низ предлога који указују на начине одређивања реда функције и уклапање коваријанси.

4.4 КОМБИНОВАНЕ МЕТОДЕ

Комбиноване методе одређивања геоида, као што је већ напоменуто, представљају комбинацију наведених терестричких и сателитских метода, и управо су оне методе које се данас користе при одређивањима ундулације геоида или аномалијских висина.

Разлог комбиновања једноставно је разумети након кратке анализе наведених терестричких и сателитских метода:

- применом астро-геодетског нивелмана јављају се велике грешке при одређивању ундулација интерполацијом због готово увек недовољне густине тачака у којима су одређиване компоненте одступања вертикала, односно због мале резолуције одређеног геоида. Линеарна веза између прираштаја одступања вертикале и прираштаја ундулације која представља основу методе захтева (условно речено) кратка растојања, растојања до 20 km између тачака у којима су одређиване компоненте одступања, што такође редовно није случај у практичним применама.
- код примене Стоксове формуле, за разлику од астро-геодетског нивелмана, могуће је одредити ундулацију у свакој тачки геоида, односно геоид произвољне резолуције, али се при нумеричкој интеграцији располаже најчешће са аномалијама убрзања познатим само на једном делу површи геоида; поред тога из самих вредности аномалија убрзања могуће је одредити само утицај регионалних и локалних неслагања тела Земље и тела нормалне Земље;
- на основу опажања поремећајних путања сателита данас се одређују коефицијенти сферно хармонијског развоја закључно до степена и реда 70, што је довољно за описивање само глобалних неслагања тела Земље и тела нормалне Земље; резолуција одређених ундулација такође је веома мала (једна тачка на приближно 2.6 степени),
- сателитска алтиметрија користи се готово искључиво за територије под морима и океанима, због мале тачности алтиметријских одређивања у тачкама физичке површи Земље на континентима.

Очигледно комбинацијом метода могуће је елиминисати неке од недостатака сваке поједине методе.

Комбинацијом резултата опажања поремећајних путања сателита, резултата одређивања аномалија слободног ваздуха, алтиметријских одређивања и узимањем у обзир утицаја топографских маса одређују се коефицијенти сферно хармонијског развоја до закључно степена и реда 360, односно глобални геопотенцијални модели високог степена и реда. За разлику од само сателитских решења, висок степен и ред овако одређених модела обезбеђује далеко већу резолуцију одређених ундулација (једна тачка на 0.5 степени), при чему се постиже тачност од неколико дециметара. На овај начин одређене ундулације могуће је користити као прва приближења за даља одређивања.

Обрадом резултата одређивања аномалија убрзања, компоненти одступања вертикала и алтиметријски одређених ундулација, сматрајући да је прво приближење одређено на описани начин, могуће је одредити ундулације на дециметарском нивоу тачности. При обрадама резултата користе се описане методе астро-геодетског нивелмана, примена Стоксове формуле или редова Молоденског, у комбинацији са брзим Фуријеовим или Хартлијевим трансформацијама, а могућа је и заједничка обрада свих расположивих података применом интегралног модела (колокације).

Такође се користе и комбинације наведених метода и модела (Lyszkowitz, 1993), а тек је узимањем у обзир и утицаја топографских маса на функционале аномалијског потенцијала могуће одредити ундулације чија је тачност центиметарског нивоа.

Комбиновање поменутих метода при одређивању ундулација геоида или аномалијских висина назива се **remove-restore** методом или **remove-restore** техником.

4.5 REMOVE-RESTORE МЕТОДА

Пре детаљног описа саме remove-restore методе неопходно је претходно дефинисати неколико основних појмова везаних за практично одређивање ундулација геоида/аномалијских висина, а то су:

- карактеристике функционала аномалијског потенцијала,
- и тачке предикције.

Сваки функционал t аномалијског потенцијала могуће је представити у облику збира дуготаласне, средњеталасне и краткоталасне карактеристике:

$$t = t' + t'' + t''' ,$$

а свака од карактеристика, сагласно својој резолуцији, подразумева одређен степен промене укупне вредности функционала.

Посебно, за ундулацију геоида/аномалијску висину може се рећи следеће:

- промена дуготаласне карактеристике, при резолуцији од преко 50 km па до 100 km, мења укупну вредност на нивоу од неколико метара,
- промена средњеталасне карактеристике, при резолуцији од неколико десетина километара, мења укупну вредност на нивоу од неколико дециметара,
- а краткоталасна карактеристика, при резолуцији од неколико километара, подразумева промене укупне вредности од неколико центиметара.

Наведене карактеристике посматрају се и одређују у две групе тачака:

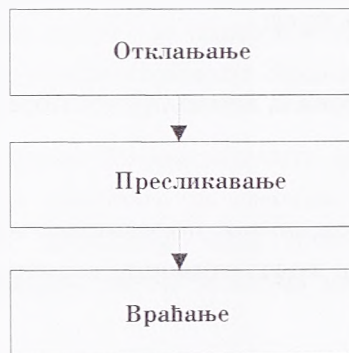
- тачке на којима су мерени функционали аномалијског потенцијала, односно тачке мерења.
- и тачке на којим се одређују аномалијске висине, односно тачке одређивања.

Концепт remove-restore при одређивању ундулације геоида, а не улазећи у детаље око карактеристика, може се кратко описати на следећи начин (слика 4.8):

- **отклањање** - на бази познавања физичких особина функционала

аномалијског потенцијала из резултата опажања отклони се онај део који је могуће релативно лако унапред математички моделирати,

- **пресликавање** - из преосталог дела резултата опажања, а на бази теоријски дефинисаних веза између аномалијског потенцијала и његових функционала, одреде се ундулације геоида/аномалијских висина
- и **враћање** - одређивање оног дела ундулација који настаје као последица дела резултата опажања који је елиминисан у фази отклањања и његово додавање на вредности које су одређене у фази пресликавања.



Слика 4.8 Шематски приказ основног концепта remove-restore методе

Не разматрајући сада на који начин се свака поједина карактеристика одређује (не улазећи у потпуно дефинисање неке од методологија) remove-restore метода може се описати на следећи начин (слика 4.9):

1. У тачкама мерења функционала t аномалијског потенцијала одреде се дуготаласне карактеристике мереног функционала t' ,
2. а затим и краткоталасне карактеристике t'' .
3. Формирају се разлике

$$t'' = t - t' - t'''$$

које се често називају резидуалним функционалима (примера ради резидуалне аномалије, резидуалне компоненте одступања вертикале,...).

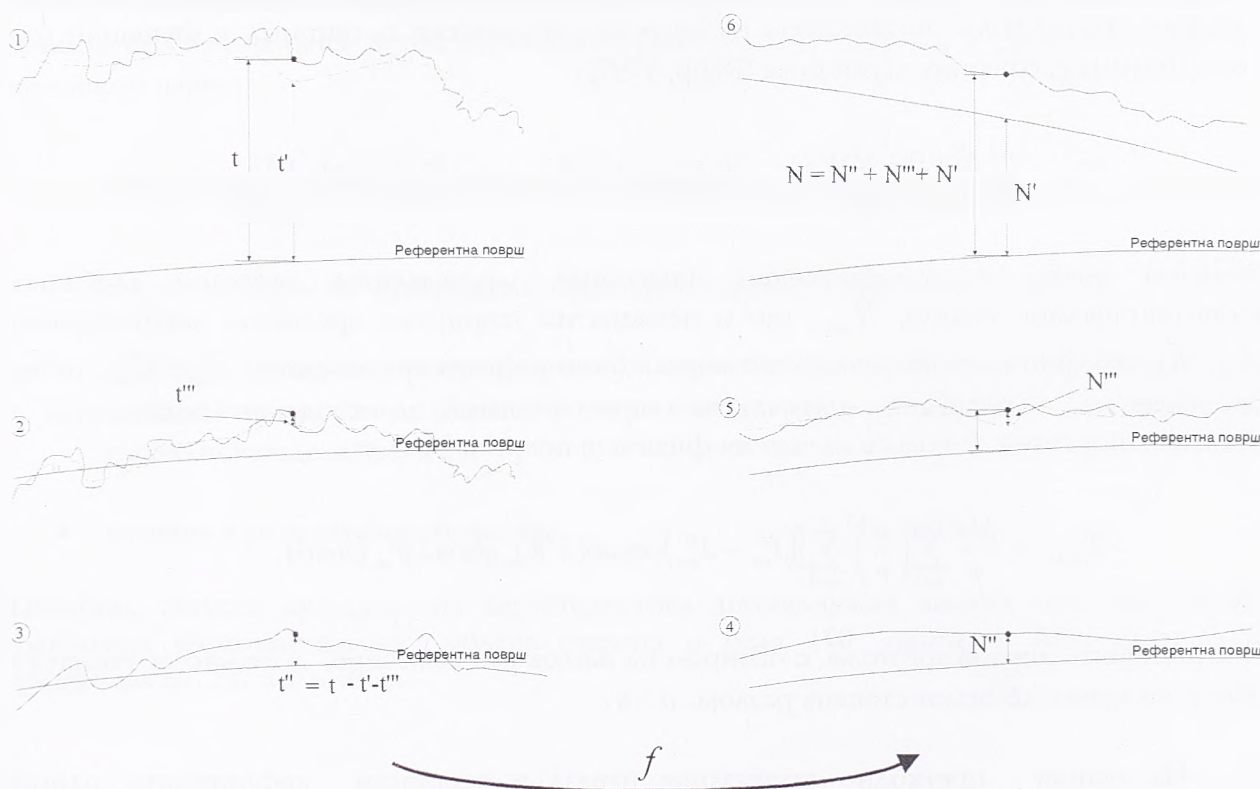
4. Применом теоријски дефинисаних веза f између функционала аномалијског потенцијала у тачкама одређивања одреди се онај део ундулација који одговара резидуалним функционалима:

$$t_R \xrightarrow{f} N'' = N_R,$$

5. а затим се одређују краткоталасне карактеристике ундулација N'' ,
6. као и њене дуготаласне карактеристике ундулација и финално се укупна

ундулација добија у облику збира:

$$N = N_R + N''' + N'.$$



Слика 4.9 Шематски приказ remove-restore методе

Описани поступак одређивања ундулација remove-restore методом, који важи и за све друге функционале аномалијског потенцијала (аномалијске висине, аномалије убрзања,...) важи у општем случају, а прецизно дефинисање њеног тока зависи свакако од одабране методологије, односно скупа метода путем којих се одређују карактеристике функционала аномалијског потенцијала.

Оно што је потребно напоменути је следеће: део отклањања remove-restore мора бити такав да се његовом применом обезбеде резидуалне вредности резултата опажања функционала аномалијског потенцијала, односно:

- да имају средњу вредност која је приближно једнака нули,
- као и то да је стандардна девијација резидуалних вредности мања од стандардне девијације резултата мерења.

Другим речима, резидуалне вредности резултата морају испуњавати услов центрираности, а њихова површ мора бити погодна за пресликавање, односно предикцију.

4.6 ДУГОТАЛАСНА КАРАКТЕРИСТИКА

Дуготаласна карактеристика одређује се коришћењем глобалних геопотенцијалних модела.

Основни израз којим се долази до вредности дуготаласних карактеристика функционала аномалијског потенцијала је израз за аномалијски потенцијал у функцији (ортонормираних) сферних хармоника (Rapp, 1997) :

$$T = \frac{kM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda + \bar{K}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos\theta).$$

Заменом знака ∞ у претходној једначини максималним степеном глобалног геопотенцијалног модела, N_{\max} , као и непознатих теоријских вредности коефицијената \bar{J}_{nm} , \bar{K}_{nm} коефицијентима глобалног модела (емпиријским вредностима) \bar{J}'_{nm} , \bar{K}'_{nm} , добија се израз за одређивање дуготаласне карактеристике аномалијског потенцијала у произвољној тачки P која се налази на физичкој површи Земље:

$$T_{GGM} = \frac{kM}{r} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos\theta).$$

Коефицијенте нормалног поља, с обзиром на њихов ред величине, довољно је узимати у обзир зајучно до осмог степена развоја, $n = 8$.

На основу претходно приказаног израза и теоријски дефинисаних односа аномалијског потенцијала и његових линеарних функционала следе изрази за дуготаласне карактеристике функционала. Примера ради:

- аномалија убрзања

$$\Delta g_{GGM} = \frac{kM}{r^2} \sum_{n=2}^{N_{\max}} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos\theta),$$

- компонента одступања вертикале у правцу меридијана (Hein, 1988, с. 31)

$$\xi_{GGM} = \frac{kM}{M_r \gamma r} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \frac{\bar{P}_{nm}(\cos\theta)}{\partial\theta},$$

- компонента одступања вертикале у правцу првог вертикала (Hein, 1988, с. 31)

$$\eta_{GGM} = -\frac{kM}{N_r \gamma r \cos\phi} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [-m(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \sin m\lambda + m\bar{K}'_{nm} \cos m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos\theta).$$

Посебно, дуготаласна карактеристика аномалијских висина одређује се на основу Брунсове теореме:

$$\zeta_{GGM} = \frac{kM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}^U_{nm}) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos\theta).$$

Вредности функционала аномалијског потенцијала, одређене у дискретном броју тачака путем приказаних израза, дефинишу "површи" које се споро мењају од тачке до тачке, а резолуција овим путем одређених карактеристика може се приближно одредити применом израза

$$\Delta B \approx \Delta L \approx \frac{180^\circ}{N_{\max}},$$

Тачност са којом ће дуготаласне карактеристике бити одређене зависи од:

- квалитета опажачког материјала који се користио при одређивању глобалног геопотенцијалног модела, односно од тачности са којом су одређени коефицијенти глобалног модела, као и од
- степена и реда глобалног модела.

Посебно, тачност дуготаласних карактеристика аномалијских висина при коришћењу глобалних геопотенцијалних модела степена и реда 180, односно 360, креће се у границама од 2m до ≈ 40 cm.

4.7 КРАТКОТАЛАСНА КАРАКТЕРИСТИКА

Краткоталасна карактеристика последица је постојања топографских маса и може се одредити на више начина.

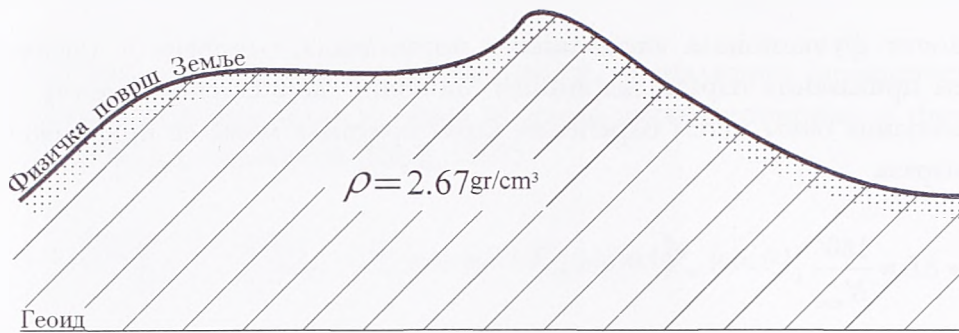
При разматрању гравитационог утицаја топографских маса на функционале аномалијског потенцијала најчешће се полази од концепта "видљивих маса" (слика 4.9) (Forsberg, 1985, с. 343).

4.7.1 УТИЦАЈ ВИДЉИВИХ ТОПОГРАФСКИХ МАСА И ЕЈРИЈЕВ МОДЕЛ

Када се краткоталасне карактеристике одређују разматрањем утицаја "видљивих" маса, свих маса изнад површи геоида, могуће је посебно разматрати случајеве утицаја локалних и утицаја удаљених видљивих маса.

Утицај локалних маса није исти за све функционале аномалијског потенцијала. Примера ради, у пределима са средње израженом топографијом локални ефекат на ундулације геоида/аномалијске висине реда је неколико центиметара, док у случају

компоненти одступања вертикала достиже вредност у распону од 10 до 20 секунди.



Слика 4.10 Видљиве топографске масе (Forsberg, 1985, с. 343)

Различити локални ефекти допуштају и различит третман топографије при одређивању краткоталасних карактеристика, односно један начин моделирања топографије при одређивању, примера ради, компоненти одступања вертикала, а сасвим други начин моделирања при одређивању ундулација геоида-аномалијских висина.

На регионалном нивоу, када се узимају у обзир видљиве масе и до неколико стотина километара удаљене од тачке у којима се одређују краткоталасне карактеристике, утицај видљивих маса изузетно је велики, без обзира о ком функционалу је реч. Штавише, утицај је далеко већи и од вредности самих функционала.

4.7.2 ЕЈРИЈЕВ ИЗОСТАТИЧКИ МОДЕЛ

У циљу одређивања краткоталасних карактеристика функционала мора се утицај видљивих маса комбиновати са једним од изостатичких модела. Најчешће се користи Ејријев изостатички модел (слика 4.11).

Краткоталасне карактеристике одређене коришћењем Ејријевог модела, наравно у комбинацији са глобалним геопотенцијалним моделом, задовољавају у потпуности поставке remove-restore методе; разидуални резултати, у општем случају, поседују средњу вредност која је веома блиска нули, а њихова стандардна девијација је значајно мања од стандардне девијације оригиналних резултата опажања.

Међутим, Ејријевим моделом уводи се низ хипотеза о распореду густина, а поред тога дефинисање граница које одређују које ће масе бити узимане у обзир при рачунању утицаја компликују сам поступак одређивања краткоталасних карактеристика:

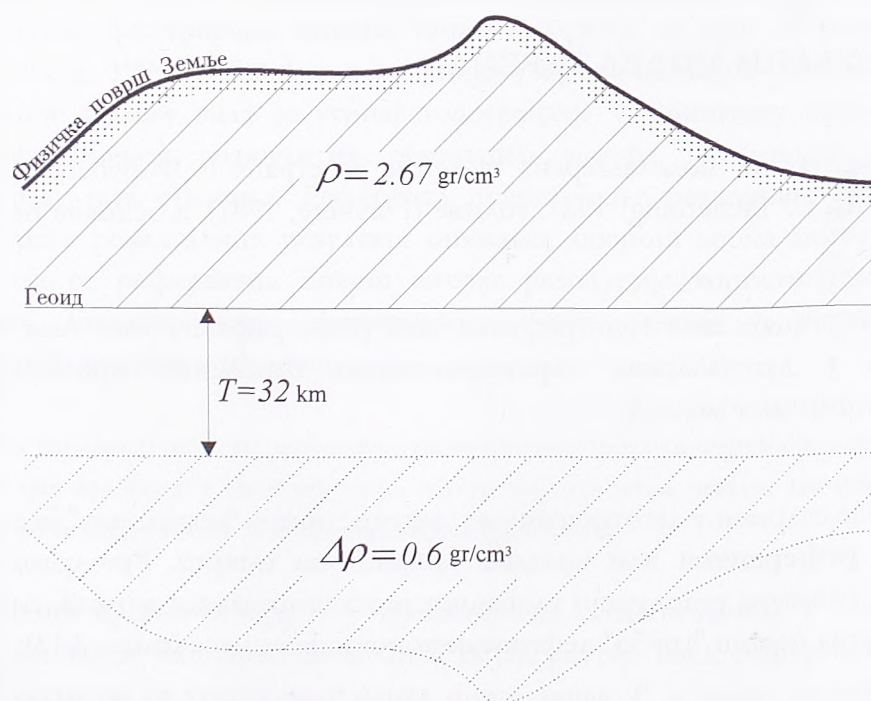
- растојање од тачке у којој се одређује краткоталасна карактеристика функционала до границе којом се дефинишу које ће масе бити узете у обзир при одређивању самих вредности карактеристика зависе од изражености топографских маса, односно од топографије подручја у којима се одређују краткоталасне

карактеристике,

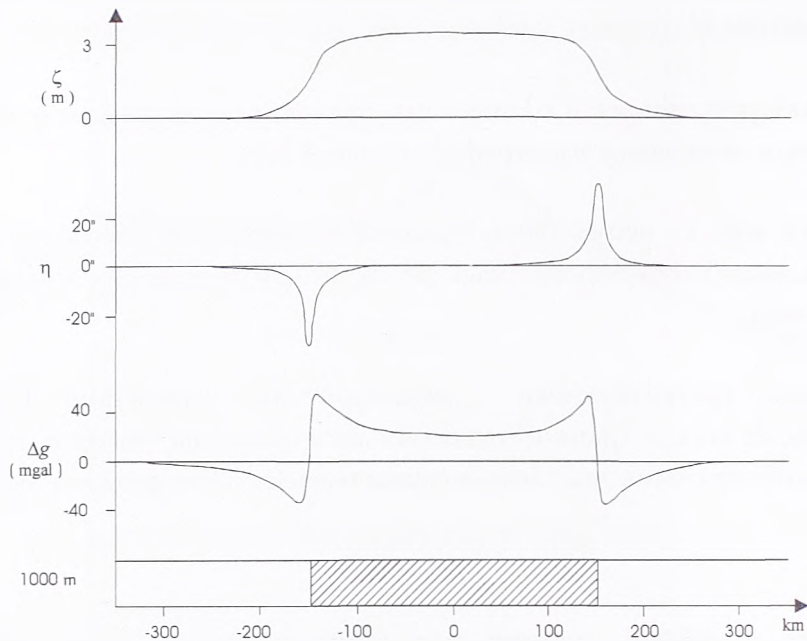
- границе подручја зависе и од ивичних ефеката који се појављују при наглим "прекидима" при описивању топографије (слика 4.12),
- код тачака које су веома близу границама државе захтев за познавањем висина удаљених маса (топографских маса унутар подручја суседних држава) готово никада није испуњен,
- одређивање краткоталасних карактеристика применом Ејријевог модела компликује се када се границе удаљених маса налазе на таквом растојању да се мора узимати у обзир облик тела Земље (закривљеност њене физичке површи).

и посебно,

- узимањем у обзир сувише удаљених топографских маса добијају се краткоталасне карактеристике које садрже и део утицаја који је већ садржан у дуготаласним карактеристикама одређених на бази глобалних геопотенцијалних модела (Forsberg, 1998).



Слика 4.11 Уобичајени графички приказ Ејријевог изостатичког модела (Forsberg, 1985, с. 343)

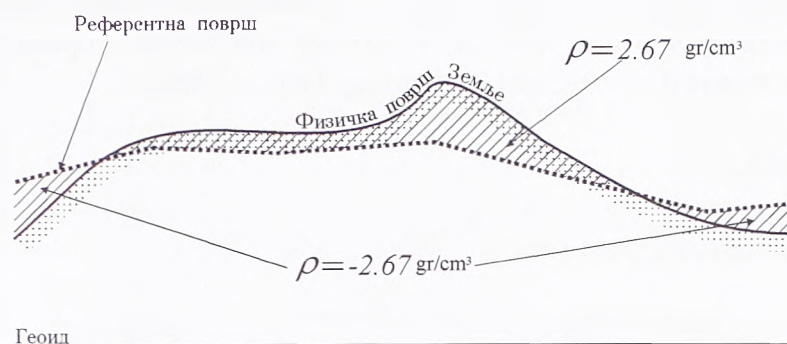


Слика 4.12 Ивични ефекти на функционале аномалијског потенцијала у случају примене Ејријевог модела када се разматра утицај маса правилне призме са квадратном основом константне густине и одговарајуће компензације. Основа призме је три стотине километара, а висина призме хиљаду метара. На слици је приказан утицај у централном профилу (Forsberg and Tscherning, 1981, с. 7845)

4.7.3 РЕЗИДУАЛНИ МОДЕЛ ТЕРЕНА

Појам резидуалног модела терена уведен је од стране Р. Форсберга (R. Forsberg) и К.К. Чернинга (C. S. Tscherning) 1981. године (Forsberg, 1981), а основне поставке модела су следеће:

- један део утицаја свих топографских маса (топографских маса тела Земље), већ је садржан у дуготаласним карактеристикама одређеним применом глобалног геопотенцијалног модела;
- део који је садржан у дуготаласним карактеристикама "ограничен" је са површи која се зове **референтна** или **средња елевациона површ**. Резолуција референтне површи одговара резолуцији глобалног геопотенцијалног модела, одакле следи да референтна површ "грубо" дефинише топографске масе (слика 4.13);
- преостале топографске масе изнад референтне површи су масе константне густине (најчешће $\rho = 2.67 \text{ gr/cm}^3$), а "долине", чији је утицај елиминисан отклањањем дуготаласних карактеристика, "попуњававају се" масама са негативним предзнаком (најчешће $\rho = -2.67 \text{ gr/cm}^3$),



Слика 4.13 Референтна или средња елевациона површ

Овако дефинисан модел терена поседује низ предности у односу на Ејријев модел (Forsberg and Tscherning, 1981, с. 7844):

- користи се само једна хипотеза о густинама топографских маса,
- утицај удаљених маса је константан и најчешће занемарљив,
- готово у потпуности елиминише потребу за одређивањем утицаја закривљености Земље или се овим путем допушта његово једноставније моделирање.

Поред наведеног неопходно је напоменути и следеће: применом резидуалног модела терена могуће је "слободно" дефинисање резолуције референтне површи коришћењем посебног поступка филтрирања висина тачака подручја за које се резидуални модел формира (Forsberg, 1994, с. 9). Ако резолуција површи одговара резолуцији глобалног геопотенцијалног модела тада је утицај топографије у принципу правилно одређен. Међутим, дефинисањем различитих резолуција могуће је мењати карактеристике резидуалних резултата опажања. Референтна површ мање резолуције доводи до веома "глатких" површи резидуалних резултата опажања, површи веома погодних у погледу предикције, док се референтна површ високе резолуције користи у циљу добијања краткоталасних карактеристика функционала чији утицај у укупној вредности функционала није нарочито изражен.

Основни проблем који се јавља код резидуалног модела терена и којег је релативно лако решити настаје када у тачкама које остају унутар маса, након попуњавања долина, аномалијски потенцијал више није хармонијска функција.

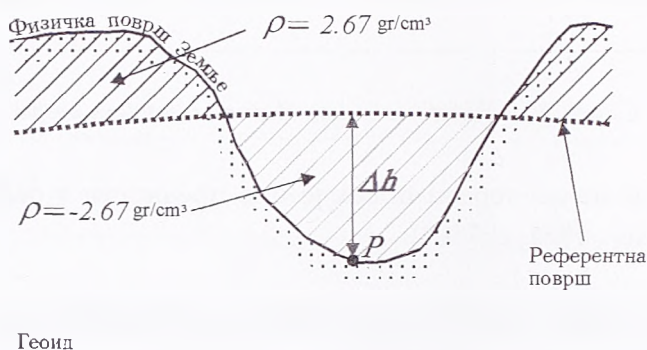
Решење наведеног проблема могуће је превазићи на следећи начин. У околини тачке P (слика 4.14), која након "попуњавања долина" остаје унутар маса, референтна површ је без значајних промена па се утицај масе изнад нивоа тачке P и испод референтне површи може посматрати као утицај Бугеове плоче.

Кондензовањем маса плоче, тако да формирају материјалну површ (раван) која се налази испод тачке P , неће се учинити значајна промена потенцијала ван референтне површи, али се може рећи да је у тачки P аномалијски потенцијал сада хармонијска функција. Ефекти кондензације "попуњавајућих" маса на компоненте одступања вертикала и

аномалијске висине занемарљиво су мали у односу на саму вредност њихових краткоталасних карактеристика, док се у случају аномалије убрзања мора увести хармонијска корекција (Forsberg and Tscherning, 1981, с. 7846):

$$\delta_{\Delta g} = -4\pi k \rho \Delta h,$$

где је ρ густина "попуњавајућих маса".



Слика 4.14 Тачка унутар маса након попуњавања долина

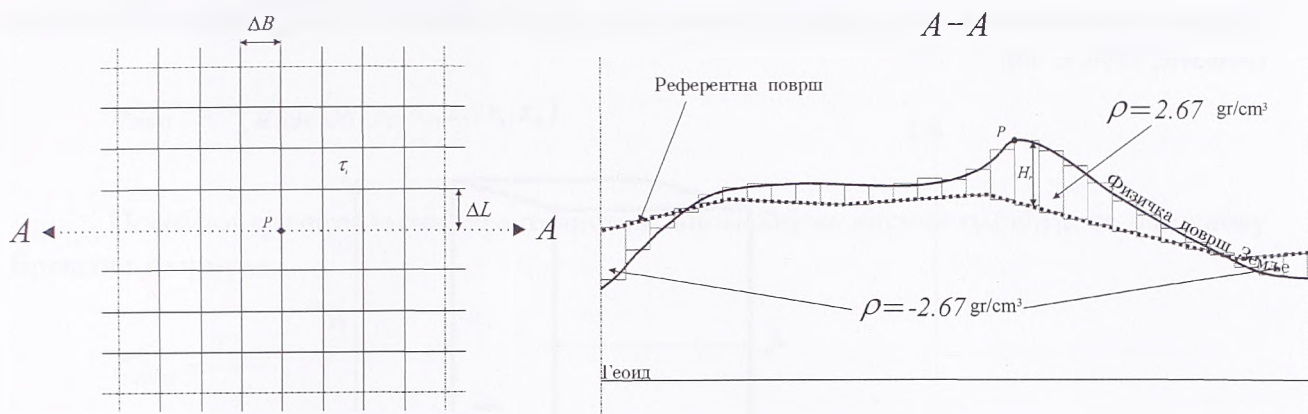
4.7.4 ПОДЕЛА ТОПОГРАФСКИХ МАСА НА ТЕЛА ПРАВИЛНОГ ГЕОМЕТРИЈСКОГ ОБЛИКА

При практичном одређивању краткоталасних карактеристика функционала аномалијског потенцијала поступак одређивања исти је без обзира на примењени модел густина топографских маса:

- топографске масе, око тачке P у којој се краткоталасна карактеристика одређује, деле се на тела правилног геометријског облика τ_i , $i = 1, \dots, n$ (тела чији су гравитациони утицаји дефинисани једначинама затвореног облика);
- одређује се онај део краткоталасне карактеристике t_L^i посматраног функционала који настаје као последица сваког појединачног елемента τ_i ,
- а затим и укупна краткоталасна карактеристика посматраног функционала путем нумеричке интеграције:

$$t_L = \sum_{i=1}^n t_L^i.$$

Подела топографских маса, након појаве електронских рачунара, искључиво је диктирана применом дигиталних модела терена (ДМТ). Тела τ_i до којих се долази оваквом поделом маса су **призме** са најчешће правоугаоном (квази-правоугаоном) основом, при чему су стране основе дефинисане корацима дигиталног модела, ΔB и ΔL (слика 4.15). За случај коришћења резидуалног модела терена један од профила топографских маса након поделе на призме приказан је на слици 4.15.



Слика 4.15 Расподела топографских маса применом дигиталног модела терена на призме са правоугаоном основом

Висине призми могуће је одредити из израза

$$H_p = \frac{\sum_{i=1}^4 H_i^O - H_i^{\text{Ref}}}{4},$$

где су H_i^O ортометријске висине темена горње основе призме, H_i^{Ref} ортометријске висине темена доње основе призме (ортометријске висине тачака референтне површи).

Како је референтна површ дуж целе основе призме константна може се писати

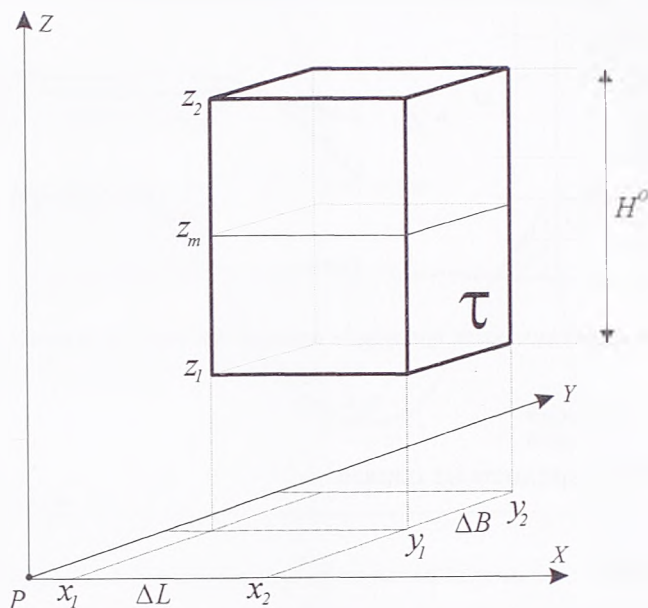
$$H_p = \frac{\sum_{i=1}^4 H_i^O}{4} - H^{\text{Ref}}.$$

Сви подаци потребни за одређивање гравитационог утицаја призме, а самим тим и комплетног топографског утицаја, дефинисани су дигиталним моделом терена. Наиме, висине тачака референтне површи одређују се коришћењем висина дигиталног модела терена путем елиминације одређеног броја његових врста и колона или путем линеарне (квадратне) интерполације, колокације као и другим методама.

4.7.5 ИЗРАЗИ ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ КРАТКОТАЛАСНИХ КАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦИОНАЛА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА

Након одређивања свих параметара (параметри ΔB , ΔL и H_p) који дефинишу призму константне густине у геометријском смислу могуће је одредити израз за потенцијал убрзања гравитационе силе призме, а на основу њега и гравитационе утицаје призме на функционале аномалијског потенцијала. Ако се правоугли координатни систем, са

координатним почетком у тачки P , дефинише као на слици 4.16, тада је потенцијал убрзања гравитационе силе призме, у правоуглим координатама x , y и z , дефинисан изразом (Petrović, 1996, с. 50):



Слика 4.16 Призма са правоугаоном основом константне густине

$$T_{\text{ТОРО}}^{\tau} = k\rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{r} dx dy dz = k\rho \left[xy \ln(z+r) + xz \ln(y+r) + yz \ln(x+r) - \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{yz}{xr} - \right. \\ \left. - \frac{y^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{xz}{yr} - \right. \\ \left. - \frac{z^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{xx}{zr} \right] \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{y_1}^{y_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2}$$

где је

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

На основу приказаног израза следи утицај на убрзања силе Земљине теже (Forsberg and Tscherning, 1981, с. 7847):

$$g_{\text{ТОРО}}^{\tau} = g_{\text{ТОРО}}^{\tau}(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = \\ = -\frac{\partial T_{\text{ТОРО}}^{\tau}}{\partial z} = k\rho \left[x \ln(y+r) + y \ln(x+z) - z \operatorname{arctg} \frac{xy}{zr} \right] \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{y_1}^{y_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2},$$

а заменом положаја координата и утицај на компоненте одступања вертикала:

$$\xi_{\text{ТОРО}}^{\tau_i} = \frac{1}{\gamma} g_{\text{ТОРО}}^{\tau_i}(z_1, z_2, x_1, x_2, y_1, y_2),$$

$$\eta_{\text{ТОРО}}^{\tau_i} = \frac{1}{\gamma} g_{\text{ТОРО}}^{\tau_i}(y_1, y_2, z_1, z_2, x_1, x_2).$$

Посебно, краткоталасна карактеристика аномалијске висине одређује се на основу Брунсове формуле:

$$\xi_{\text{ТОРО}}^{\tau_i} = \frac{T_{\text{ТОРО}}^{\tau_i}}{\gamma}.$$

Како се коришћењем резидуалног модела терена одређује утицај маса које су релативно близу тачака опажања, призме је могуће сматрати паралелним, али тек након спуштања призме испод хоризонта тачке P за вредност (Forsberg and Tscherning, 1981, с. 7848):

$$\Delta z = \frac{r^2}{2R},$$

где је r хоризонтално растојање центра основе призме од тачке рачунања, R полупречник терестричке сфере.

Приказани изрази су веома компликовани па се у циљу смањења потребног времена за прорачуне уводе апроксимативне формуле и смањује се укупан број призми повећавањем њихових основа, односно корака дигиталног модела, за удаљене зоне.

4.8 СРЕДЊЕТАЛАСНА КАРАКТЕРИСТИКА

Средњеталасну карактеристику ундулација геоида / аномалијских висина могуће је одредити применом Стоксовог решења, решења Молоденског или интегралним моделом. Наравно, поред наведених решења постоји и низ других предлога, међутим наведене методе најчешће се користе.

Разлог овоме лежи у чињеници да се, у случају Стоксовог решења и решења Молоденског, располаже са великим бројем резултата опажања убрзања Земљине теже, док интегрални модел омогућава комбиновање свих релевантних расположивих података.

4.8.1 СТОКСОВА ФОРМУЛА, РЕШЕЊЕ МОЛОДЕНСКОГ И REMOVE - RESTORE МЕТОДА

Стоксова формула и решење Молоденског примењују се искључиво при одређивању гравиметријског геоида, односно када се располаже само са резултатима гравиметријских

премера, наравно коришћењем резидуалних резултата који су последица примене remove-restore методе.

У случају примене решења Молоденског процес remove-restore методе одговара оном који је шематски приказаном на слици 4.9, док се у случају примене формуле Стокса процес методе донекле мења. Разлог промене процеса лежи у потреби за познавањем аномалија убрзања на геоиду, односно због регуларизације при редукцији резултата мерења интензитета убрзања теже.

При примени регуларизације, као што је већ напоменуто, масе изнад геоида се отклањају, кондензују на површ геоида или пребацују унутар геоида након чега изнад геоида нема маса, а њихов утицај садржан је у самој вредности аномалије. Из тог разлога се у процесу remove-restore методе неће директно појавити одређивање краткоталасних карактеристика. С друге стране, регуларизација доводи до појаве индиректног ефекта, одакле следи да се након одређивања средњеталасних карактеристика мора додатно моделирати индиректни ефекат.

Поред свега наведеног, решења добијена овим путем представљају решења у сферној апроксимацији па следи, да се након читавог процеса, одређеним ундулацијама мора додати и вредност елипсоидне корекције.

4.8.2 ИНТЕГРАЛНИ МОДЕЛ И REMOVE - RESTORE МЕТОДА

За разлику од примене Стоксове формуле или решења Молоденског, при примени интегралног модела у remove-restore методи могуће је користити све релевантне расположиве податке.

Саму методу могуће је објаснити прилагођавањем резултата опажања условима примене интегралног модела, односно анализом тренда који поседују резултати опажања функционала на локалном подручју.

Основни услов интегралног модела је центрираност аномалијског потенцијала и његових функционала:

$$M\{T\} = 0,$$

односно,

$$M\{t\} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi} t(\theta, \lambda) \sin \theta \, d\alpha \, d\lambda \, d\theta = 0,$$

који (с обзиром да је у претходној једначини површ интеграције читава површ сфере) неће бити испуњени на само једном делу сфере, односно у локалном подручју. Другим речима, резултати опажања функционала у тачкама локалног подручја поседују тренд и тек је након моделирања и елиминације тренда могуће применити интегрални модел.

Другим речима,

- након одређивања тренда функционала аномалијског потенцијала на бази познавања детерминистичких особина функционала (одређивањем дуготаласних и краткоталасних карактеристика),
- могуће је формирати резултате опажања ослобођене тренда (центриране резидуалне резултате опажања),
- извршити предикцију аномалијских висина (применити интегрални модел у циљу добијања оцена средњеталасних карактеристика аномалијских висина у тачкама предикције), а затим
- одредити и одговарајући утицај претходно елиминисаног тренда на аномалијске висине (одредити дуготаласну и средњеталасну карактеристику аномалијских висина на локалном подручју)
- након чега је могуће добити укупне вредности аномалијских висина.

Елиминацију тренда, као што је већ напоменуто, могуће је изводити само на бази познавања детерминистичких особина аномалијског потенцијала и његових функционала, а не путем "уобичајених" статистичких метода. Примера ради, елиминација тренда одузимањем средње вредности резултата опажања функционала од сваког појединог резултата опажања нарушава детерминистичке особине аномалијског потенцијала (Gábor, 1992).

Сагласно основним поставкама интегралног модела не изводе се никакве редукције резултата па следи да се применом модела одређују аномалијске висине, а до ундулација се може доћи применом израза 3.18.

Међутим, може се приступити и на други начин и извршити редукцију. У том случају мења се процес remove-restore на исти начин као што је већ и наведено код примене Стоксове формуле: директно одређивање краткоталасних карактеристика не појављује се у процесу, а додатно се мора моделирати утицај индиректног ефекта.

Како се и интегралним моделом који је приказан подразумева сферна апроксимација, следи да се након читавог процеса одређеним ундулацијама мора додати и вредност елипсоидне корекције.

5 ПРИМЕРИ ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА У СВЕТУ И ДОСАДАШЊА ОДРЕЂИВАЊА У СРБИЈИ

При сагледавању досадашњих одређивања геоида у свету могуће је извршити поделу на одређивање:

- глобалног геоида,
- геоида континената, посебно геоида Европе,
- локалних геоида (геоида територије појединих држава),

а оно што је заједничко за сва одређивања је учешће великог броја држава и институција.

Последње две деценије одређивања су на свим нивоима значајно интензивирани, како у циљу практичних примена тако у циљу даљих научних истраживања.

5.1 ГЛОБАЛНИ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИ МОДЕЛ EGM96

Глобални геопотенцијални модел EGM96 чија је основна намена подршка референтном систему WGS84, као и примена у истраживањима у области океанографије и геофизике, развијен је од стране низа институција у Сједињеним Америчким Државама (United States of America - USA):

- NASA - National Aeronautics and Space Agency ,
- NIMA - National Imagery and Mapping Agency,
- OSU - Ohio State University.

Основни подаци који су коришћени при одређивању коефицијената сферно хармонијског развоја потенцијала убрзања Земљине теже су резултати

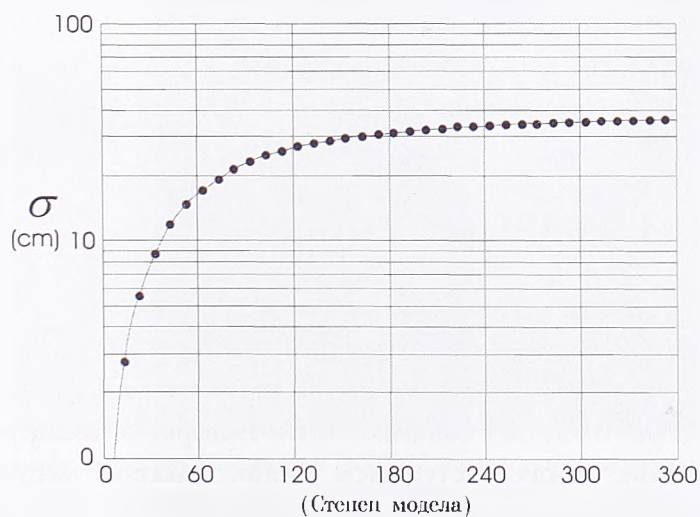
- опажања путање кретања преко 20 сателита,
- алтиметријских резултата опажања,
- опажања гравиметријских премера држава које су уступиле своје податке на коришћење ауторима модела,
- док се за описивање утицаја топографских маса користио глобални модел топографских маса GTOPO, такође развијен од стране NIMA.

Степен и ред модела су $N_{max}=M_{max}=360$, па је сагласно томе резолуција аномалијског потенцијала и његових линеарних функционала одређених коришћењем модела 0.5 степени. Упоредо са развијањем модела NASA и NIMA су отвориле и службену EGM96 интернет страну са које је могуће преузети све податке који су коришћени при развијању модела, као и сам модел који је архивиран у облику текстуалне датотеке.

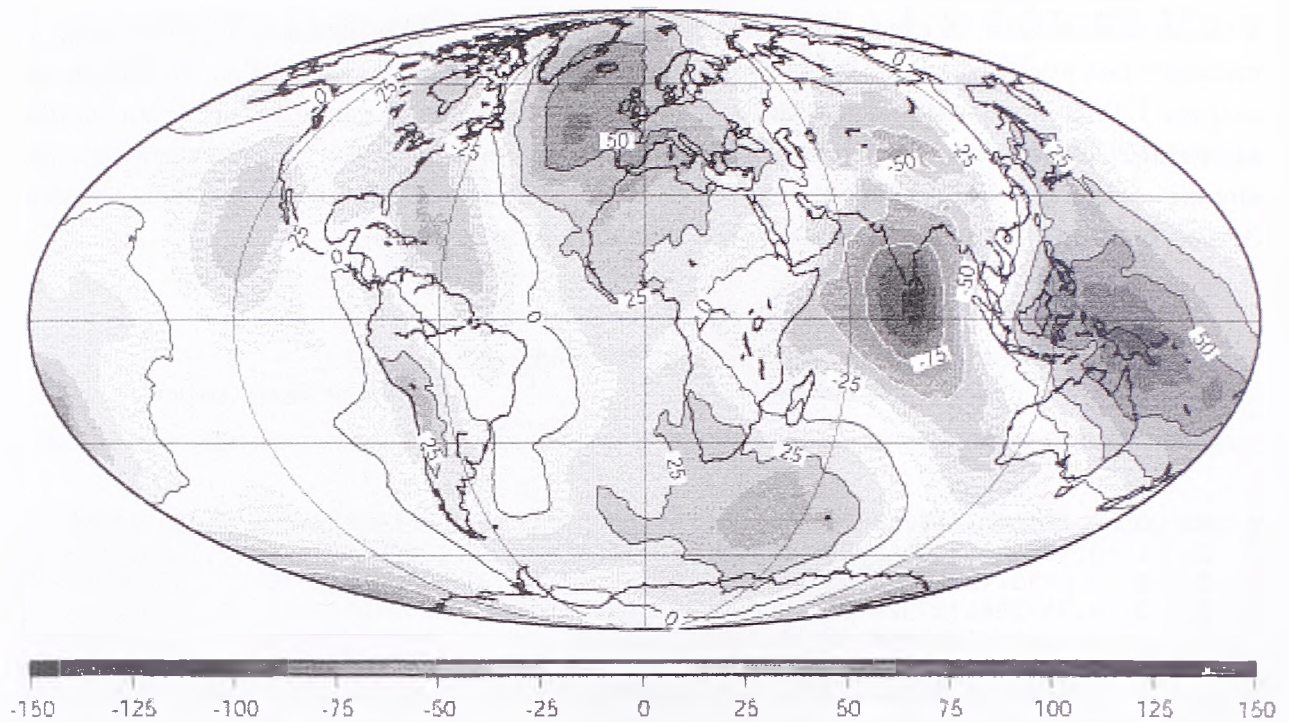
У датотеци модела за сваки пар вредности оцењених коефицијената $\bar{J}'_{nm}, \bar{K}'_{nm}$, дати су степен и ред коефицијената као и оцене њихових стандардних девијација.. Модел укупно садржи 130676 коефицијената и исто толико оцењених вредности њихових стандардних девијација. Један део датотеке модела приказан је на слици 5.1. Тачност аномалијске висине одређене коришћењем модела EGM96 у произвољној тачки физичке површи Земље, оцењена од стране аутора модела, износи 0.36 m (слика 5.2) .

Степен и ред		Коефицијенти		Оцене стандардних девијација	
n	m	\bar{J}'_{nm}	\bar{K}'_{nm}	$\hat{\sigma}_{J'}$	$\hat{\sigma}_{K'}$
2	0	-0.484165371736E-03	0.000000000000E+00	0.35610635E-10	0.00000000E+00
2	1	-0.186987635955E-09	0.119528012031E-08	0.10000000E-29	0.10000000E-29
2	2	0.243914352398E-05	-0.140016683654E-05	0.53739154E-10	0.54353269E-10
3	0	0.957254173792E-06	0.000000000000E+00	0.18094237E-10	0.00000000E+00
3	1	0.202998882184E-05	0.248513158716E-06	0.13965165E-09	0.13645882E-09
3	2	0.904627768605E-06	-0.619025944205E-06	0.10962329E-09	0.11182866E-09
3	3	0.721072657057E-06	0.141435626958E-05	0.95156281E-10	0.93285090E-10
4	0	0.539873863789E-06	0.000000000000E+00	0.10423678E-09	0.00000000E+00
4	1	-0.536321616971E-06	-0.473440265853E-06	0.85674404E-10	0.82408489E-10
4	2	0.350694105785E-06	0.662671572540E-06	0.16000186E-09	0.16390576E-09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Слика 5.1 Део датотеке глобалног геопотенцијалног модела EGM96



Слика 5.2 Тачност глобалног модела



Слика 5.3 Геоид Земље одређен применом глобалног геопотенцијалног модела EGM96

Такође коришћењем интернета, тачније интернет стране Међународног сервиса за геоид (International Geoid Service – IGeS), могуће је преузети низ глобалних геопотенцијалних модела креираних у последњих неколико деценија претходног века од стране разних аутора.

Модел Р.Х. Рапа из 1991. године, OSU91, степена је и реда као и модел EGM96, $N_{\max} = M_{\max} = 360$. Може се рећи да је OSU91 готово искључиво коришћен при одређивању глобалних компоненти функционала аномалијског потенцијала уз обавезну сагласност аутора модела, све до публиковања модела EGM96. Тек након изласка модела EGM96 и модел OSU91 постаје доступан за све потенцијалне кориснике.

5.2 КВАЗИГЕОИД ЕВРОПЕ EGG97

Гравиметријски квазигеоид Европе одређен је 1997. године од стране Међународног удружења за геодезију (International Association of Geodesy – IAG), односно међународне комисије за убрзање теже и геоид, подкомисије за европски геоид (The International Gravity And Geoid Commission of IAG, Sub commission for Europe). У оквиру пројекта учествовао је велики број европских држава, уступањем својих података међународном удружењу, односно центру за обраду података који се налази на Институту за геодезију, Универзитата у Хановеру.

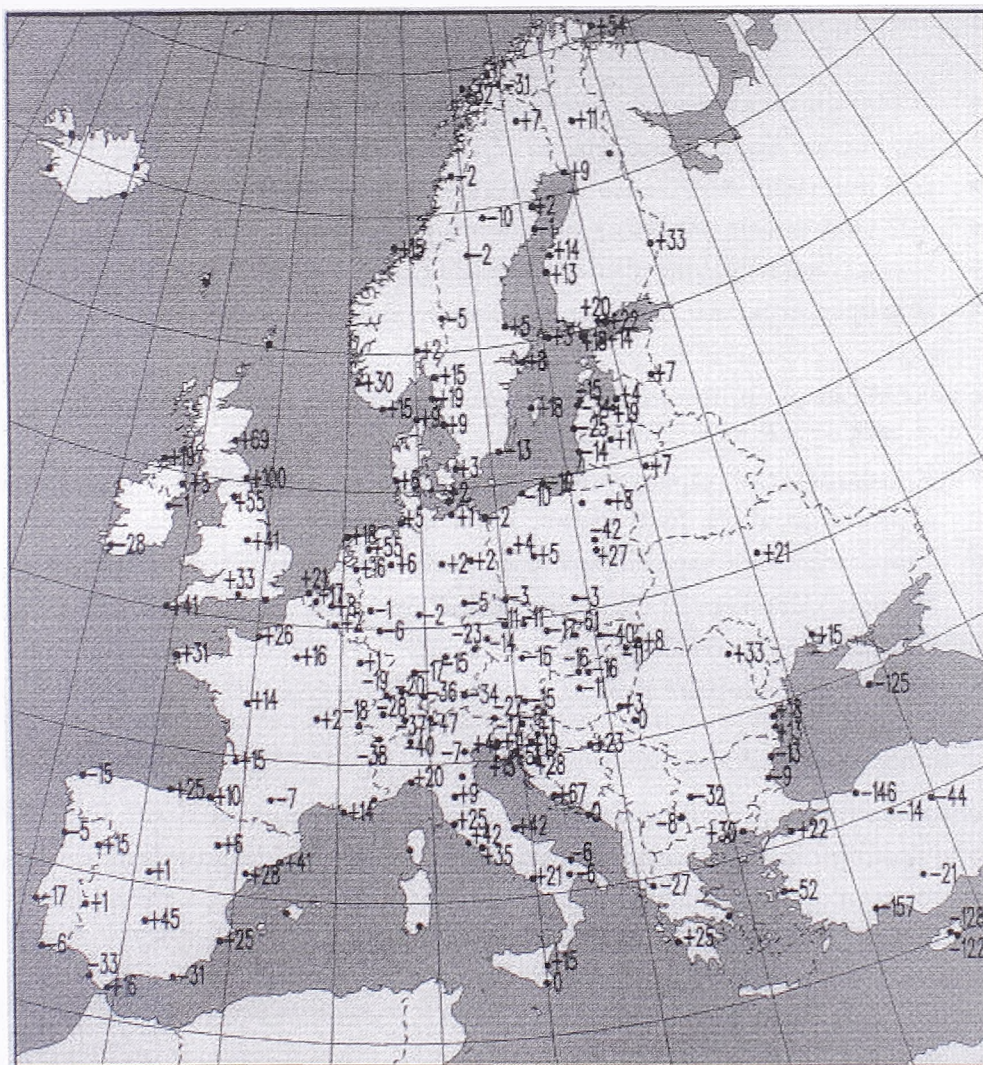
Квазигеоид је одређен применом remove-restore методе из:

- гравиметријских мерења

- дигиталних модела терена просечне резолуције од 200 m,
- глобалног геопотенцијалног модела EGM96,

при чему је средњеталасна карактеристика одређивана применом 1D FFT.

Провера квалитета извршена је применом GPS/dh методе при чему су координате тачака упоређења одређиване у Европском Терестричком Референтном Систему 89 (European Terrestrial Reference System 1989 - ETRS89), а нормалне висине висине тачака у систему Европске Вертикалне Референтне Мреже (EUropean Vertical Reference Network - EUVN) , односно Јединствене Европске Нивелманске мреже (United European Leveling Network – UELN).



Слика 5.4 Разлике између аномалијских висина EGM97 и аномалијских висина одређених применом GPS/dh методе у систему ETRS89 и EUVN/UELN

Одређени квазигеоид је доступан корисницима (комерцијално коришћење), а 2004. године покренут је нови пројекат чији би продукт требало да буде квазигеоид Европе 2004.

5.3 ОДРЕЂИВАЊА ЛОКАЛНИХ ГЕОИДА

Одређивања локалних геоида, за разлику од глобалног геоида и геоида континената, веома су честа и може се рећи да се у свим државама света геоид данас интензивно одређује.

Постоји велики број различитих методологија које се користе при одређивању при чему је remove-restore метода увек њихов саставни део, а разлике које се појављују готово увек су последица података који се користе у одређивању или територије коју држава покрива.

Одређивања која се посебно издвајају су геоид Аустрије и геоид USA.

Геоид Аустрије одређен је коришћењем (Etker, 2003)

- 86000 аномалија убрзања које покривају читаву територију Аустрије, као и одређеног броја аномалија са територија суседних држава,
- 650 познатих одступања вертикала, (укупно 1300 компоненти одступања)
- 102 ундулације одређене применом GPS/dh методе,
- глобалним геопотенцијалним моделом EGM96
- и дигиталним моделом терена резолуције 44 m x 49 m.

Ундулације су одређиване применом remove-restore методе при чему су:

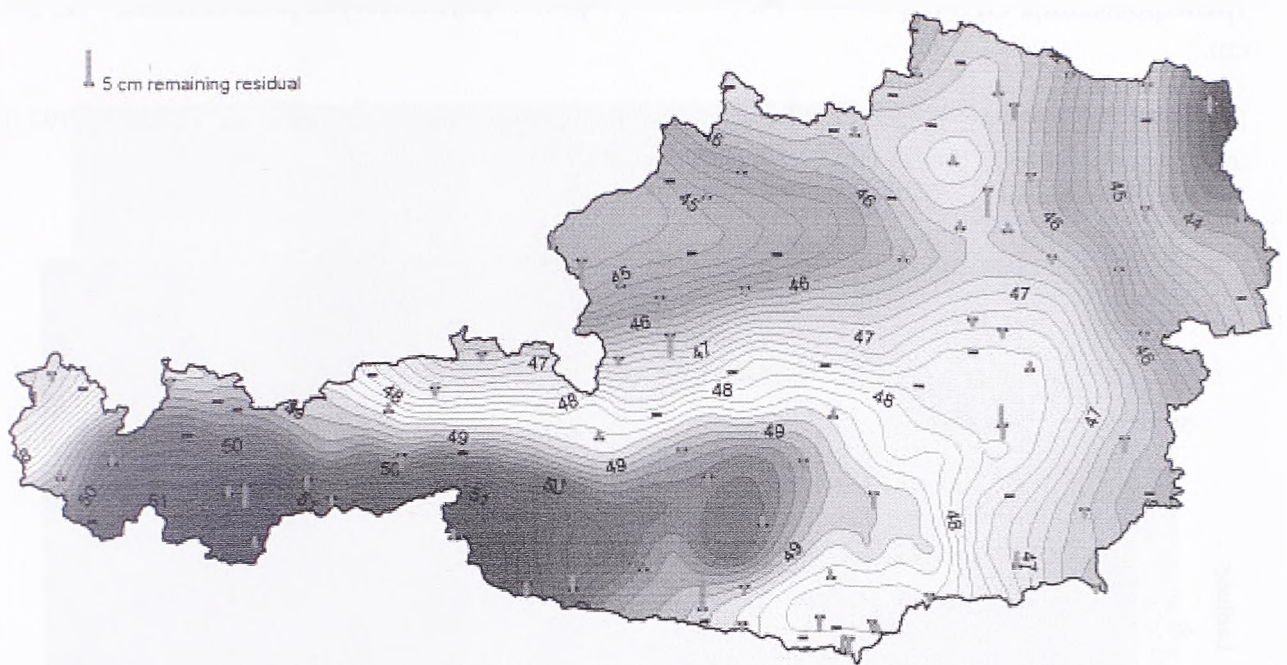
- Краткоталасне карактеристике одређиване применом Ејријевог модела, са параметрима $\rho = 2670 \text{ kg/m}^3$, $\Delta\rho = 400 \text{ kg/m}^3$ и $T = 30 \text{ km}$.
- Средњеталасне карактеристике одређиване применом колокације, на бази 4. Модела Чернинга и Рапа, из 5796 аномалија убрзања и 650 парова компоненти одступања вертикала,
- Дуготаласне карактеристике применом глобалног геопотенцијалног модела EGM96.

Након одређивања геоид је на бази 102 GPS /dh ундулације уклопљен у ETRS89, односно формирано је комбиновано решење приказано на слици 5.5. Након уклапања одређене су вредности преосталих резидуала чија је средња вредност износила 1.4 cm.

Геоид USA 1999. године одређен је на бази

- 2.6 милиона аномалија убрзања,
- низа дигиталних модела са резолуцијама које се крећу у распону од 3 до 30 лучних секунди,

и 6169 ундулација одређених применом GPS /dh методе, при чему су дефинисана два решења: чисто гравиметријско решење под ознаком G99SSS и комбиновано решење GEOID99.



Слика 5.5 Геоид Аустрије (еквидистанца 20 cm)

При одређивању G99SSS геоида коришћена је remove-restore метода али применом Фајеових аномалија (извршена редукција):

$$\Delta g = g - 0.3086 \cdot 10^{-5} H + c - \gamma$$

где је g мерена вредност убрзања, $0.3086 \cdot 10^{-5} H$ поправка за слободан ваздух, H висина тачке, c класична теренска корекција и γ нормално убрзање. Дуготаласне карактеристике контролисане су применом модела EGM96, а средњеталасне применом Стоксове формуле кроз 1D FFT. Након одређивања средњеталасних карактеристика одређен је индиректни ефекат применом израза

$$\delta N = -\frac{\pi k \rho H^2}{\gamma},$$

а ундулације у сферној апроксимацији N_S добијене су применом израза

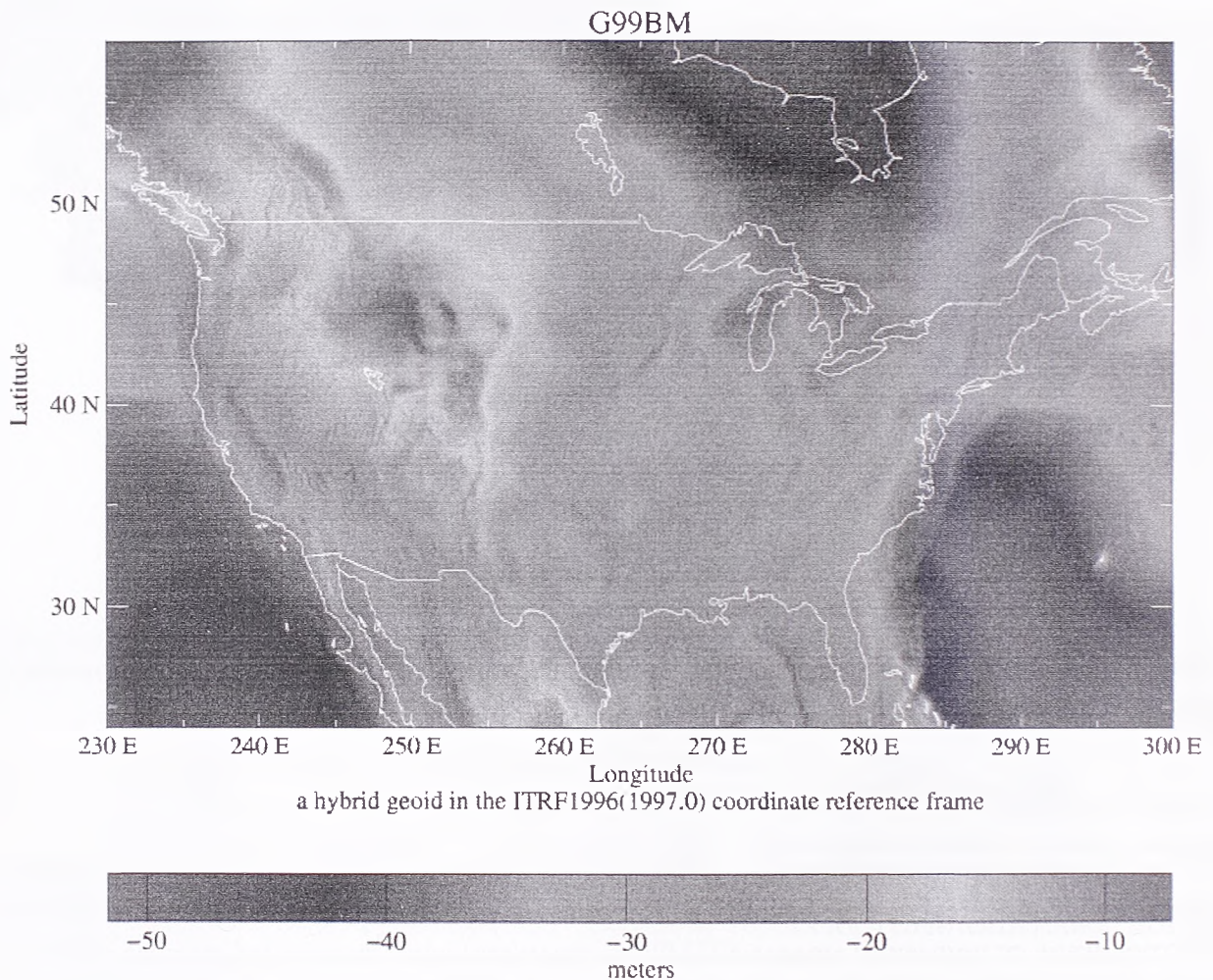
$$N_S = N_{FFT} + N_{EGM96} + \delta N.$$

На одређене ундулације додата је вредност елипсоидне корекције након чега су добијене финалне вредности ундулација.

Након одређивања гравиметријских ундулација геоид је уклопљен у GPS/dh применом колокације и добијено је решење GEOID99. Након уклапања, по ауторима модела,

трансформација GPS одређених ундулација у ортометријске могућа је са тачношћу од ± 4.6 cm.

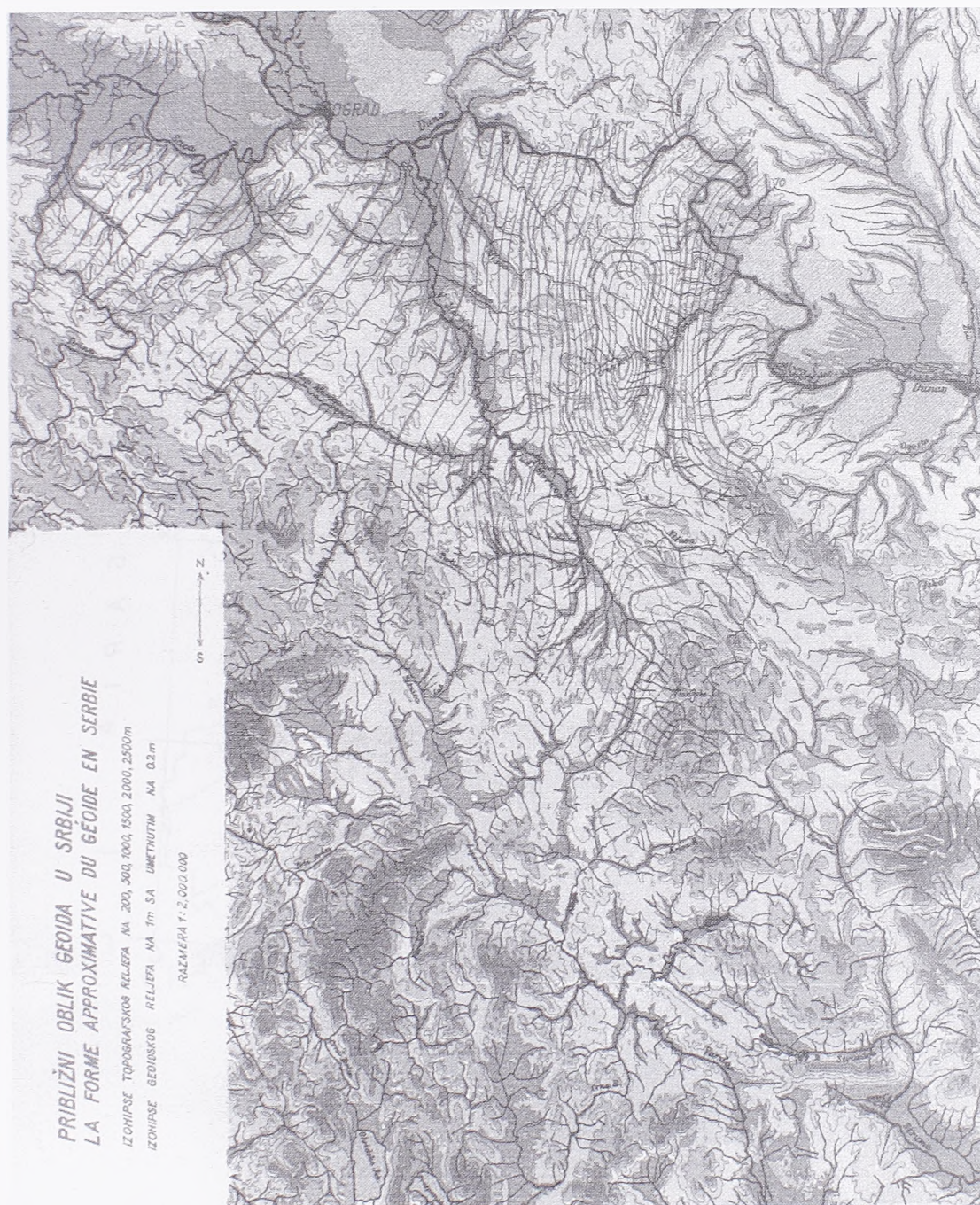
Поред наведених решења одређене су и ундулације које се односе на ITRF96(1997.0), приказане на слици 5.6 (геоид под ознаком G99BM).



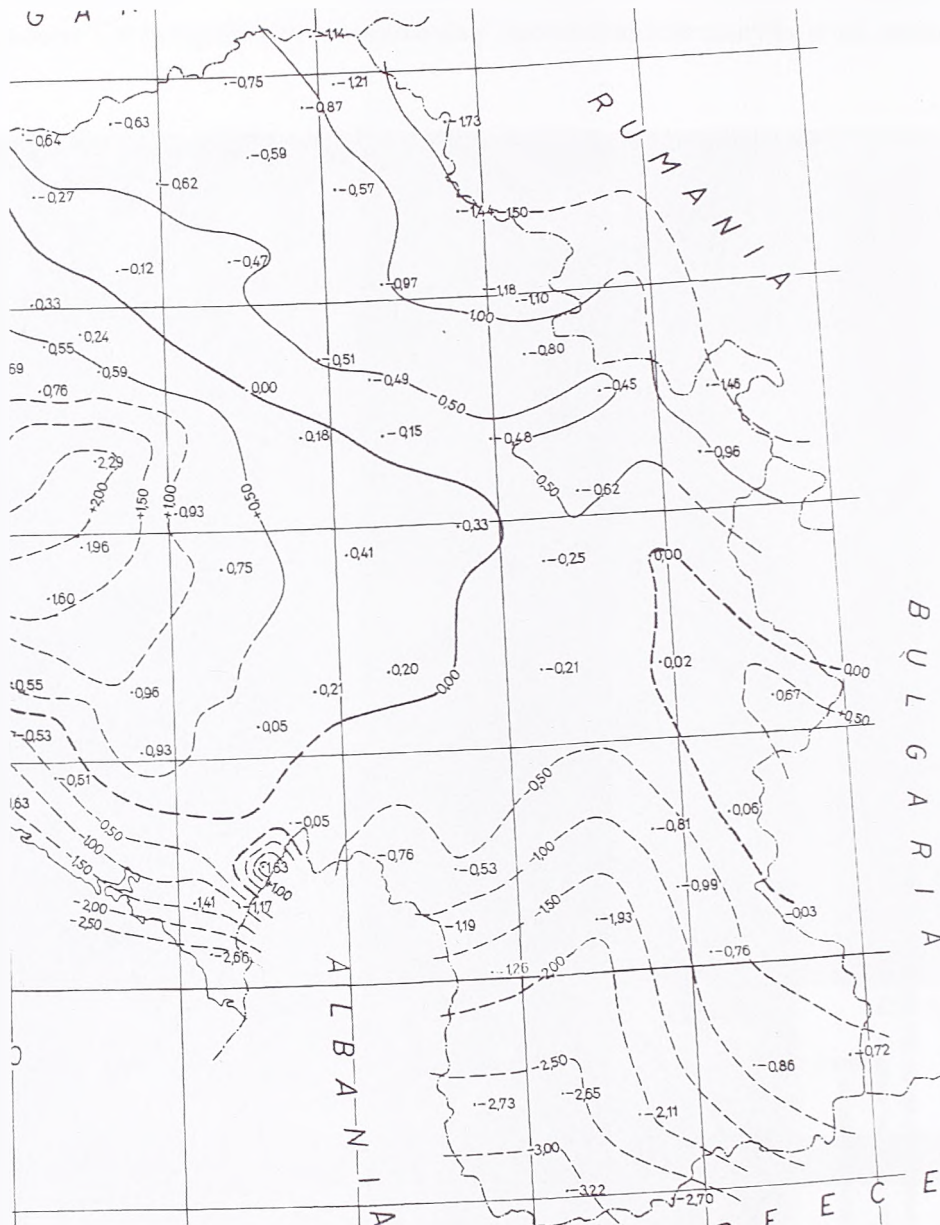
Слика 5.6 Геоид USA

5.4 ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА У СРБИЈИ

На територији Србије до сада није било званичних одређивања геоида у применом remove-restore методе, а сва досадашња одређивања су геоид генерала С. П. Бошковића из 1952. године за један део територије Србије (слика 5.7), и локални геоид А. Муминагића из 1967. године за територију СФР Југославије (слика 5.8), која представљају чисто астрогеодетска решења и при чему се одређене ундулације односе на Беселов елипсоид.



Слика 5.7 Геоид Бошковића



Слика 5.8 Геоид Муминагића

У оквиру магистарских теза:

О. Одаловић

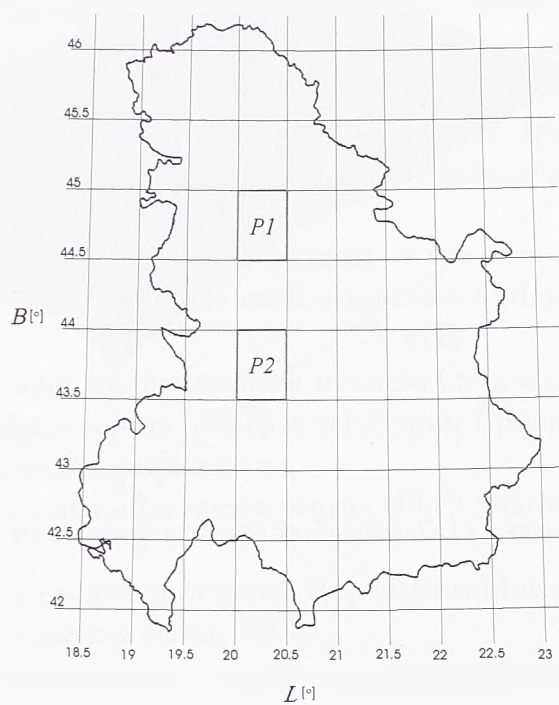
“Одређивање локалног геоида високе резолуције применом модела интегралне геодезије”, Грађевински факултет, Универзитет у Београду, Београд, 2000.

Ј. Васовић

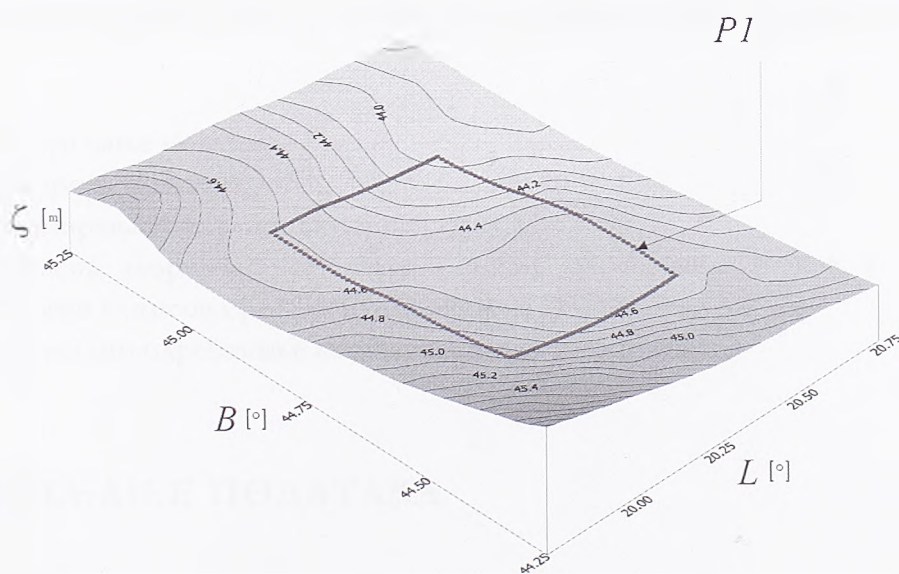
“Примена брзих Фуријеових трансформација за одређивање локалног геоида високе резолуције”, Грађевински факултет, Универзитет у Београду, Београд, 2000.,

урађене су анализе које показују могућност одређивања дециметарски тачног геоида/квасигеоида на локалним тест подручјима (слике 5.9, 5.10 и 5.11).

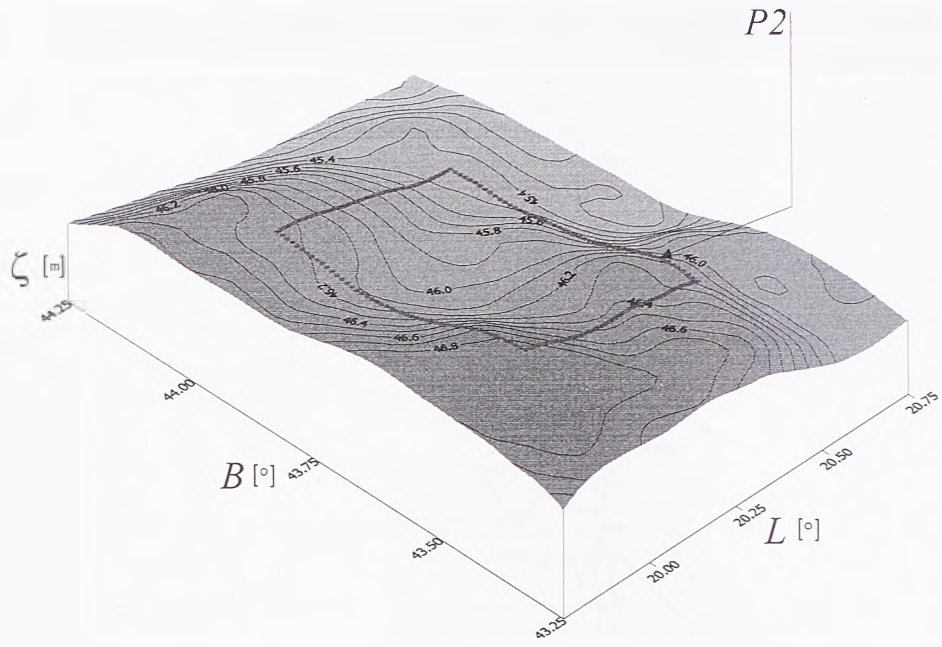
Управо та чињеница била је основа за дефинисање основних хипотеза ове дисертације.



Слика 5.9 Положај тест подручја



Слика 5.10 Општи облик геоида на првом тест подручју



Слика 5.11 Општи облик геоида на другом тест подручју

6 НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА

Нумеричка истраживања базирана су на теоријским разматрањима која су приказана у претходним поглављима, а као финални продукт истраживања одређен је геоид Србије који се односи на нивоски елипсоид система WGS84, као и комбиновано решење које се односи на датум висина који је усвојен при реализацији мреже Другог Нивелмана Високе Тачности (НВТ2) Социјалистичке Федеративне Републике Југославије (СФРЈ).

Истраживања су у основи извођена посредним или непосредним коришћењем расположивих података о готово свим геодетским основама у Србији, а посебно на основу:

- резултата детаљног гравиметријског премера Србије (ДГП),
- дигиталног модела терена (ДМТ) за територију Србије посебно креираног за потребе нумеричких истраживања,
- елипсоидних висина низа тачака репера НВТ2 (Републички геодетски завод, 2004)
- ортометријских висина низа тачака Референтне Мреже Србије (РМС) (Републички геодетски завод, 2004)
- астрономских одређивања латитуде и лонгитуде на територији Србије (Делчев, 2002),
- глобалног геопотенцијалног модела EGM96 и глобалног дигиталног модела терена GTOPO.

Сам ток истраживања грубо може се поделити на неколико фаза од којих се посебно издавају:

- прикупљање података,
- припрема података,
- формирање финалног скупа података,
- примена теоријских поставки у циљу одређивања геоида у односу на нивоски елипсоид референтног система WGS84,
- и финално одређивање комбинованог решења.

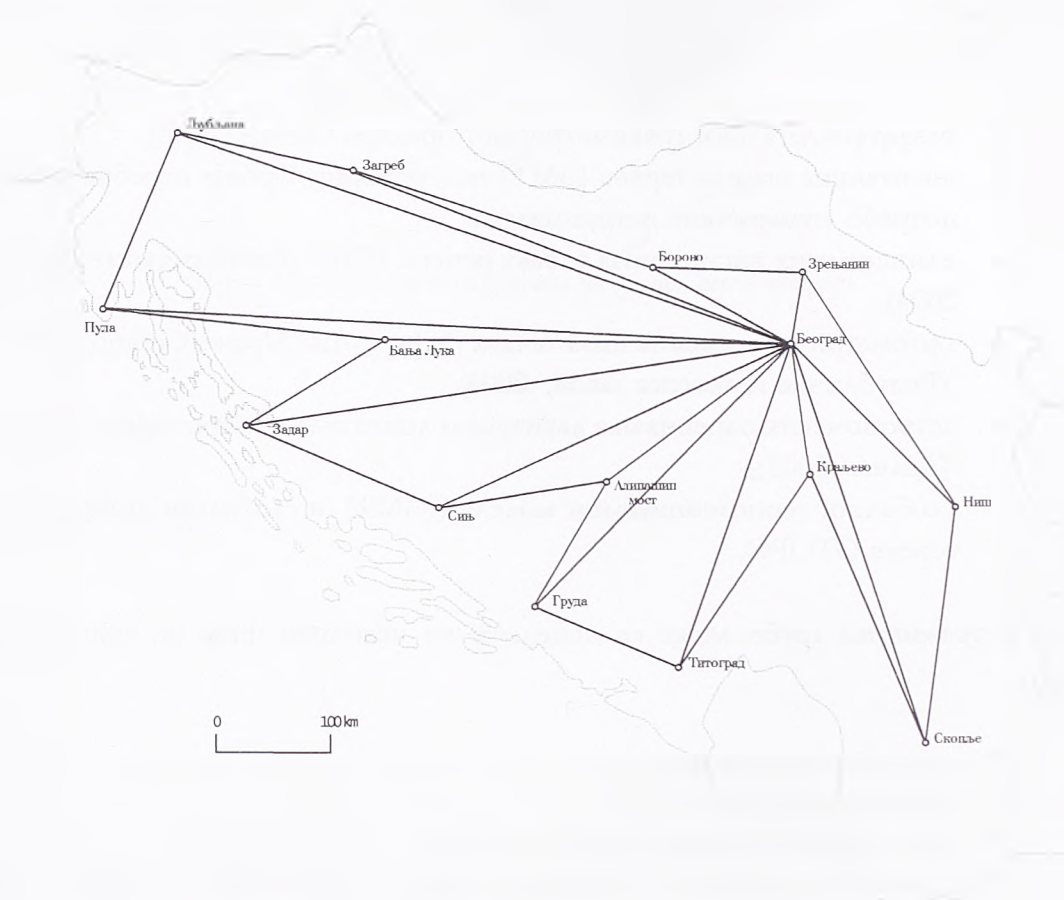
6.1 ПРИКУПЉАЊЕ ПОДАТАКА

6.1.1 ДЕТАЉНИ ГРАВИМЕТРИЈСКИ ПРЕМЕР

Организована гравиметријска одређивања на територији СР Југославије започета су 1951. године, и у основи представљају део гравиметријских одређивања СФР Југославије. Одређивања су иницирана од стране Географског Института ЈНА и Главне геодетске управе тадашње ФНРЈ. Може се рећи да је у периоду од наредних двадесет година, од 1951. године до средине осамдесетих, извршен већи део свих одређивања, као и то да су се сва

накнадна одређивања односила на локална геофизичка испитивања.

У периоду од 1951. до 1953. године извршени су калибрациони радови, односно одређени су апсолутни ниво и размера гравиметријских одређивања, а упоредо са калибрационим радовима формирана је и гравиметријска мрежа 1. реда (слика 6.1):



Слика 6.1 Гравиметријска мрежа првог реда

Мрежа 1. реда представљала је веома добру основу за све врсте гравиметријских радова, али се у циљу извођења детаљног премера приступило њеном прогушћавању, односно формирању гравиметријске мреже 2. реда. Мрежа 2. реда такође је по свом квалитету задовољавала све тадашње стандарде, али је развијана парцијално, без одређеног глобалног плана, углавном за потребе одређених институција.

Успостављање тачне и хомогене основе за све врсте практичних и научних примена омогућено је формирањем основне гравиметријске мреже, која је у потпуности реализована у периоду од 1964. до 1967. године (слика 6.2).



Слика 6.2 Основна гравиметријска мрежа (Братуљевић и др., 1995)

Упоредо са формирањем референтних гравиметријских мрежа непрекидно је вршен и детаљни гравиметријски премер, односно локални и регионални гравиметријски премер.

При рачунању утицаја топографије за све тачке детаљног премера рачунате су теренске корекције у полупречнику од 20 km. За тачке које су по положају задовољавале потребе регионалних геолошко-геофизичких испитивања, односно општи регионални критеријум од једне тачке на десет квадратних километара, утицај топографије рачунат је до полупречника од 171.5 km. У првом наведеном случају тачке се сматрају тачкама локалног гравиметријског премера, а у другом тачкама регионалног гравиметријског премера. Утицај топографије ван полупречника 171.5 km није узиман у обзир јер је утицај маса ван полупречника 171.5 km на било коју тачку у Југославији мањи од 0.2 mgal (Bilibajkić, 1979).

Детаљним премером омогућено је решавање низа геолошких и геодетских задатака, а сам премер вршиле су разне институције. На територији Србије 1984. године било је преко 80000 детаљних гравиметријских тачака, односно просечно око 1 тачка на површини једног квадратног километра, при чему се мора напоменути следеће:

- Координате тачака детаљног премера одређиване су разним методама.

Положај тачака дефинисан је везивањем за геодетску основу, а у случајевима када није било геодетске основе развијањем бусолних или полигонских влакова који су се ослањали на тригонометријске тачке, па чак директном идентификацијом на картама 1:25000.

- У погледу висина тачака може се рећи да је њихова референтна површ нулта нивоска површ која пролази кроз репер у Трсту (референтна површ Првог Нивелмана Високе Тачности, НВТ1). При одређивању висина, у равним пределима висинске разлике одређиване су применом геометријског, а у планинским применом тригонометријског нивелмана при чему је везивање вршено на репере свих редова, а у појединим случајевима и на тригонометријске тачке;
- Убрзања теже при свим наведеним гравиметријским одређивањима односе се на референтни ниво дефинисан вредношћу апсолутног убрзања силе Земљине теже на тачки у Потсдаму.

Подаци ДГП (слика 6.3), који су коришћени при нумеричким истраживањима овог рада, архивирани су у облику текстуалне датотеке у којој се за укупно 85372 тачке налазе подаци о координатама тачака, њиховим висинама и вредностима убрзања.

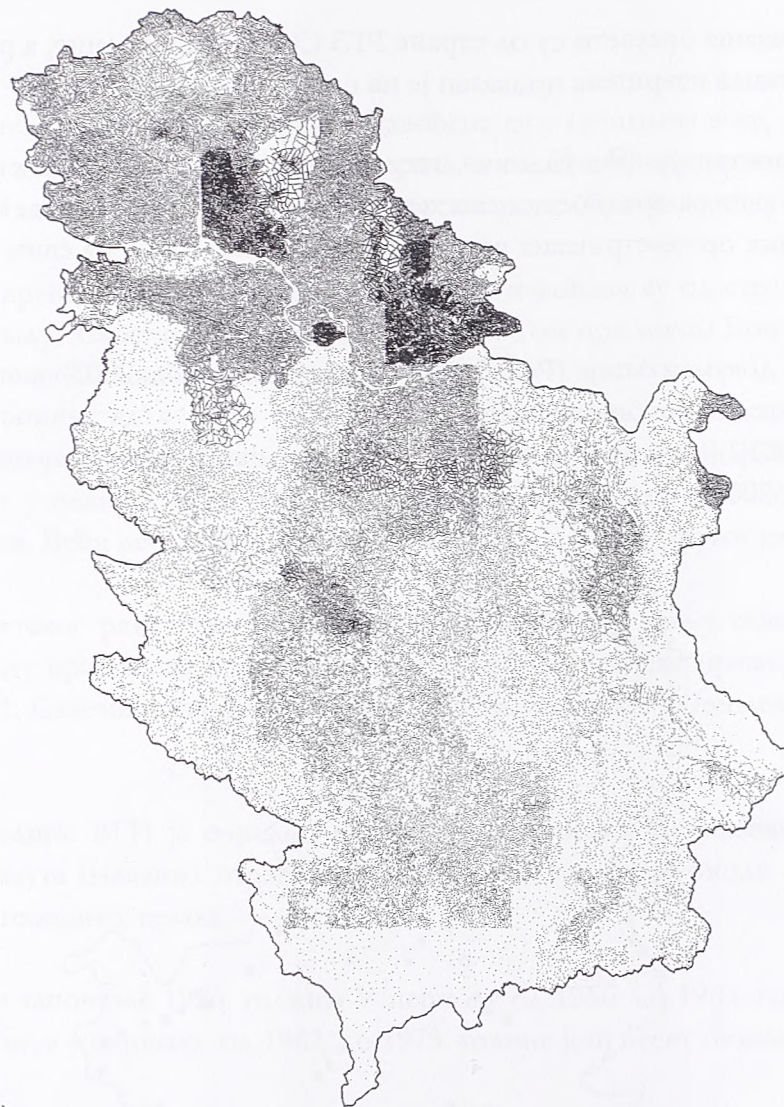
Процењено је да тачност одређивања убрзања на тачкама ДГП није била већа од 0.25 mgal (Старчевић, 2002).

6.1.2 ПРИКУПАЉЕНИ ПОДАЦИ ЗА ПОТРЕБЕ ФОРМИРАЊА ДИГИТАЛНОГ МОДЕЛА ТЕРЕНА

Подаци који су коришћени у циљу формирања дигиталног модела терена су производ пројекта Војногеографског Института Војске Србије и Црне Горе (ВГИ) "Дигитални модел терена Србије и Црне Горе за војне потребе" који је започет 2002. године.

У току реализације пројекта извршена је трансформација висинске представе дефинисане на картама 1:25000 у дигитални облик, а љубазношћу ВГИ подаци трансформације уступљени су у циљу научних истраживања. По прелиминарним анализама које су урађене у ВГИ утврђено је да се овим путем обезбедио материјал из којег је могуће креирати дигитални модел терена чија је тачност само у изразитим планинским пределима мања од 10 m.

Подаци су преузети 2004. године у облику текстуалних датотека у којима је сиров материјал архивиран у облику низа тачака, при чему су за сваку тачку познате координате у Гаус-Критеровој пројекцији (елипсоид Бесела) и висине.



Слика 6.3 Просторни распоред тачака ДГП

6.1.3 ЕЛИПСОИДНЕ ВИСИНЕ ТАЧАКА ФУНДАМЕНТАЛНИХ РЕПЕРА НВТ2 И ОРТОМЕТРИЈСКЕ ВИСИНЕ ТАЧАКА РМС

У оквиру редовних активности Републичког геодетског завода (РГЗ), Сектора за основне геодетске радове (СОГР), у периоду од 2002. до 2004. године одређене су:

- елипсоидне висине тачака за укупно 39 фундаменталних репера мреже НВТ2 применом методе сателитског позиционирања ослањањем на најближе тачке РМС,
- и ортометријске висине тачака за 71 тачку РМС применом методе геометријског нивелмана ослањањем на најближе репере НВТ2.

Резултати одређивања преузети су од стране РГЗ СОГР 2004. године, а распоред тачака на којима су одређивања извршена приказан је на слици 6.4.

Увидом у документацију (Републички геодетски завод, 2004) утврђено је да је на 6 фундаменталних репера вредност оцена тачности елипсоидних висина мања од 5 cm, док је тачност њихових ортометријских висина унутар мреже НВТ2 на свим реперима већа од 1 cm.

За тачке РМС из документације (Републички геодетски завод, 2003) може се уочити да је максимална грешка елипсоидне висине тачака 2.47 cm, а да тачност ортометријских висина репера НВТ2 (Институт за геодезију, 1992) и тачака није мања од 2 cm (Републички геодетски завод, 2004).



Слика 6.4 : Просторни распоред фундаменталних репера НВТ2 (плави симбол) и тачака РМС (црвени симбол) на којима су одређиване елипсоидне, односно ортометријске висине

6.1.4 РЕЗУЛТАТИ АСТРОНОМСКИХ ОДРЕЂИВАЊА ЛАТИТУДЕ И ЛОНГИТУДЕ

Астрогеодетска одређивања у Србији извођена су у прошлом веку, а веома мали део и почетком 2002. године на територији Београда, а одређивања у прошлом веку могу се поделити на одређивања пре и после другог светског рата (Братуљевић, 1995).

Астрогеодетска одређивања пре другог светског рата извођена су од стране С. Бошковића и публикована у раду “Скретање вертикала у Србији”. Том приликом Бошковић је одредио латитуде и азимуте на 30 тачака на територији Србије.

Пре другог светског рата, прецизније између два рата, астрогеодетска одређивања је изводио ВГИ при чему је у оквиру Међународних одређивања лонгитуда 1926. и 1933. године одређено 40 тачака. Већи део ових одређивања избуљен је у току другог светског рата.

После другог светског рата астрогеодетска одређивања, а у циљу обезбеђења солидне основе за правилну оријентацију наше основне тригонометријске мреже, изводиле су три институције: ВГИ, Савезна геодетска Управа (СГУ) и Институт за геодезију Грађевинског факултета (ИГ).

До 1960. године ВГИ је одредио четрнаест двоструких Лапласових азимута и пет једностранних азимута излазних страна основних мрежа, а у периоду од 1961. до 1969. одређено је и 68 геоидних тачака.

СГУ радове започиње 1956. године. У периоду од 1956. до 1964. године одређене су 24 Лапласове тачке, а у периоду од 1962. до 1973. године још десет геоидних тачака.

Крајње тачке основице Параћин, астрономску тачку Народна опсерваторија Београд и Тест полигон Рударско-геолошког факултета Авала, одредио је ИГ, чији су чланови у оквиру пројекта “Геодетски референтни оквир Београда”, Министарства за науку и технологију Републике Србије, у 2002. години одредили на територији ширег подручја Београда још 4 тачке.

Посебно, астрогеодетска одређивања извођена су и на Астрономској опсерваторији (АО) у којој постоји дуга традиција вршења астрогеодетских одређивања у оквиру њених сталних служби - Службе латитуде и Службе астрономског времена и лонгитуде (Братуљевић, 1995).

Од свих поменутих података при нумеричким истраживањима на располагању су били само подаци ВГИ и СГУ (слика 6.5) и то само они са територије Републике Србије.

Потребно је напоменути да су астрогеодетска мерења која је радио ИГ тачности која је већа од 0.3”, а да је у оквиру студије “Референтне геодетске мреже” наведен низ активности

које се морају спровести пре адекватног дефинисања тачности осталих поменутих астрогеодетских података.



Слика 6.5 Просторни распоред тачака астрогеодетских одређивања

6.2 ПРИПРЕМА ПОДАТАКА

Припрема података подразумевала је низ трансформација у циљу добијања датумски хомогеног опаљачког материјала:

- трансформација висина тачака детаљног гравиметријског премера из система висина у употреби (Први Нивелман Високе Тачности – НВТ1) у систем ортометријских и нормалних висина мреже НВТ2,
- трансформација вредности убрзања из Потсдамског система у систем ISGN71,

- трансформација координата тачака прикупљеног података у систем WGS84, а на бази познатих параметара трансформације Бесел - WGS84.

6.2.1 ТРАНСФОРМАЦИЈА ВИСИНА ТАЧАКА ДЕТАЉНОГ ГРАВИМЕТРИЈСКОГ ПРЕМЕРА

Трансформација висина у употреби у систем ортометријских и нормалних висина базирана је на заједничким реперима мрежа НВТ1 и НВТ2.

Разлике ортометријских и нормалних висина са висинама у употреби, за укупно 390 заједничких репера (слика 6.6), апроксимиране су са површи другог степена облика, односно функцијом облика

$$\Delta H^{O(N)} = H^{O(N)} - H^I = f(B, L) = k_1 B^2 + k_2 B L + k_3 L^2 + k_4 B + k_5 L + k_6$$

где је $\Delta H^{O(N)}$ разлика висина, $H^{O(N)}$ ортометријска, односно нормална висина репера у мрежи НВТ2, H^I висина репера у мрежи НВТ1, B, L геодетске координате репера у односу на Беселов елипсоид, $k_i, i=1, \dots, 6$ непознати коефицијенти.

Непознати коефицијенти одређени су применом методе најмањих квадрата (оцењене вредности коефицијената, $\bar{k}_i, i=1, \dots, 6$ приказане су у табели 6.1), а за сваку тачку детаљног премера коришћењем оцењених вредности коефицијената одређена је поправка висина за прелаз у систем ортометријских, односно нормалних висина мреже НВТ2 (карактеристични подаци поправака приказани су у табели 6.2).

Додавањем поправака на висине тачака добијена су два скупа података за детаљни гравиметријски премер, скуп координата и убрзања са ортометријском висином и скуп координата и убрзања са нормалном висином. У табели приказани су основни статистички подаци разлика новоодређених ортометријских и нормалних висина ДГП. Како максимална разлика висина утиче на промену аномалија убрзања у износу од 0.015 mgal, за све даље прорачуне усвојене су нормалне висине.

Табела 6.1 Оцењене вредности коефицијената квадрикe

Разлика	\bar{k}_1	\bar{k}_2	\bar{k}_3	\bar{k}_4	\bar{k}_5	\bar{k}_6
$\Delta H^O = H^O - H^I$	-0.45910927	-1.1979136	-0.20706832	0.15912540	0.17791961	0.31176263
$\Delta H^N = H^O - H^I$	-0.10315058	-0.7113583	-0.02715326	0.09813552	0.14738530	0.31480582



Слика 6.6 Распоред заједничких репера мреже HBV1 и HBV2

Табела 6.2 Оцењене вредности поправака

Оцењене Поправке	Минимална вредност [m]	Максимална вредност [m]	Средња вредност [m]
$\overline{\Delta H}^O$	-0.35	-0.24	-0.31
$\overline{\Delta H}^N$	-0.36	-0.27	-0.32

Табела 6.3 Разлике нормалних и ортометријских висина након трансформације

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна девијација
$H^N - H^O$ [m]	85372	- 0.01	0.04	0.004	0.007

6.2.2 ТРАНСФОРМАЦИЈА ВРЕДНОСТИ УБРЗАЊА ИЗ ПОТСДАМСКОГ У СИСТЕМ ISGN71

"Међународна асоцијација за геодезију и геофизику усвојила је на *XV* генералном заседању у Москви 1971. године мрежу основних гравиметријских тачака размештених широм света са одговарајућим вредностима апсолутног убрзања силе Земљине теже, под називом Међународна стандардна гравиметријска мрежа ISGN71 (International Gravity Standardization Network 1971). На тај начин је мрежа "тачних" вредности убрзања силе теже заменила стари Потсдамски систем базиран на вредности апсолутног убрзања само једне тачке". (Братуљевић и др., 1995)

У ISGN71 укључене су и тачке наше основне гравиметријске мреже, што свакако мења апсолутни ниво и размеру мреже. Апсолутни ниво мреже мења се за око 15 mgal, а размера мреже за око 1%. Вредност убрзања силе Земљине теже на тачки основне мреже у Београду у систему ISGN71 одређена је са тачношћу од око 0.06 mgal.

Трансформацију вредности убрзања тачака детаљног гравиметријског премера из једног у други систем могуће је извршити применом израза (Благојевић, 1998)

$$g'_{ISGN71} = 980592.54 + 1.001427(g'_{Potsdam} - 980593.66),$$

где је 980592.54 mgal вредност убрзања силе Земљине теже у тачки у Београду у систему ISGN71, 1.001427 фактор размере између Потсдамског и ISGN71 система и 980593.66 mgal вредност убрзања силе Земљине теже на тачки Београд у Потсдамском систему.

6.2.3 ТРАНСФОРМАЦИЈА КООРДИНАТА ТАЧАКА У WGS84

Трансформација је изведена на следећи начин:

- елипсоидне координате тачака које се односе на Беселов елипсоид трансформисане су у координате правоуглог координатног система придруженог Беселовом елипсоиду:

$$(B, L, h)_{\text{Бесел}} \rightarrow (X, Y, Z)_{\text{Бесел}},$$

при чему су се уместо елипсоидних висина тачака користиле њихове ортометријске (нормалне) висине

- на основу познатих параметара трансформације, извршена је датумска трансформација:

$$(X, Y, Z)_{\text{Бесел}} \rightarrow (X, Y, Z)_{\text{WGS84}},$$

- а затим су одређене елипсоидне координате тачака у односу на елипсоид

придружен $WGS84$:

$$(X, Y, Z)_{WGS84} \rightarrow (B, L, h)_{WGS84}$$

Након трансформације, придружене су координатама B^{WGS84} и L^{WGS84} нормалне висине, тако да је финално биле на располагању тројке бројева

$$(B^{WGS84}, L^{WGS84}, H^N).$$

Изрази коришћени у трансформацијама су следећи:

- $(B, L, h)_{\text{Бесел}} \rightarrow (X, Y, Z)_{\text{Бесел}}$:

$$x = (V + h) \cos B \cos L,$$

$$y = (V + h) \cos B \sin L,$$

$$z = \left(\frac{b^2}{a^2} V + h \right) \sin L,$$

где је

$$V = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}},$$

- $(X, Y, Z)_{\text{Bessel}} \rightarrow (X, Y, Z)_{WGS84}$ (Hofmann-Wellenhof, 1994):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS84} = \mathbf{t} + \mu \mathbf{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{Бесел}},$$

где је \mathbf{t} вектор координата координатног почетка координатног система придруженог Беселовом елипсоиду у координатном систему $WGS84$

$$\mathbf{t} = [t_x \quad t_y \quad t_z]^T,$$

μ - параметар размере, \mathbf{R} матрица ротације координатних оса,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 & \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \\ -\cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \\ \sin \alpha_2 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ углови ротација око координатних оса.

- $(X, Y, Z)_{WGS84} - (B, L, h)_{WGS84}$:

$$B = \arctg \frac{z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e'^2 a \cos^3 \theta}, \quad L = \arctg \frac{y}{x}, \quad h = \frac{p}{\cos B} - N,$$

где је

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{za}{pb}.$$

Параметри неопходни за трансформацију преузети су из Републичког геодетског завода (Републички геодетски завод, 2004).

6.3 ФОРМИРАЊЕ ФИНАЛНИХ СКУПОВА И ОДАБИРАЊЕ ПОДАТАКА

Ова фаза нумеричких истраживања подразумевала је

- креирање дигиталног модела терена,
- рачунање аномалија слободног ваздуха,
- одређивање ундулација на бази познавања ортометријских и елипсоидних висина тачака,
- анализу података и одабирање адекватног скупа података за даља нумеричка истраживања и то у погледу тачности, просторног распореда и броја.

6.3.1 КРЕИРАЊЕ ДИГИТАЛНОГ МОДЕЛА ТЕРЕНА

У оквиру нумеричких истраживања креиран је дигитални модел резолуције једне лучне секунде у оба правца, искључиво коришћењем података који су преузети од стране ВГИ.

Модел је креиран коришћењем опште аритметичке средине

$$H_{DMT}^O = \frac{p_1 H_1^O + \dots + p_n H_n^O}{\sum_{i=1}^n p_i},$$

где је n број тачака чије се висине користе при одређивању висине тачке модела, а p_i тежине дефинисане реципрочном вредношћу квадрата растојања L_i . За број n усвојено је да максимално може износити 16, а одабирање тачака извршено је на следећи начин:

- у тачки модела чија се висина одређује дефинише се правоугли координатни систем у равни са координатним почетком у самој тачки,
- у сваком квадранту координатног система одабирају се само оне 4 које су најближе тачки модела чија се висина одређује.

6.3.2 РАЧУНАЊЕ АНОМАЛИЈА СЛОБОДНОГ ВАЗДУХА

Вредности аномалија слободног ваздуха, узимајући у обзир утицај атмосфере, могуће је одредити из израза

$$\Delta g^{FA} = g' + \delta_A - \gamma_H^B,$$

где је g' резултат мерења убрзања Земљине теже, δ_A атмосферска корекција, γ_H^B вредност убрзања нормалне теже на телуroidу.

Вредност атмосферске корекције може се срачунати из (Torge, 1989)

$$\delta_A [\mu\text{ms}^{-2}] = 8.74 - 9.9 \cdot 10^{-4} H_{[m]} + 3.56 \cdot 10^{-8} H_{[m]}^2,$$

док се вредност убрзања нормалне теже на телуroidу одређује из (Moritz, 1984)

$$\gamma_H^B = \gamma_0 - F \cdot H^N,$$

где је γ_0 вредност нормалне теже на елипсоиду за тачку латитуде B , k однос полуоса елипсоида и убрзања на полу и екватору дефинисана изразом, e први бројни ексцентрицитет, F градијент нормалне. Све приказане величине могу се одредити применом израза

$$\gamma_0 = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}}, \quad k = \frac{b \gamma_p}{a \gamma_e},$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

$$F = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right) = -0.3086 \text{ mgal/m}.$$

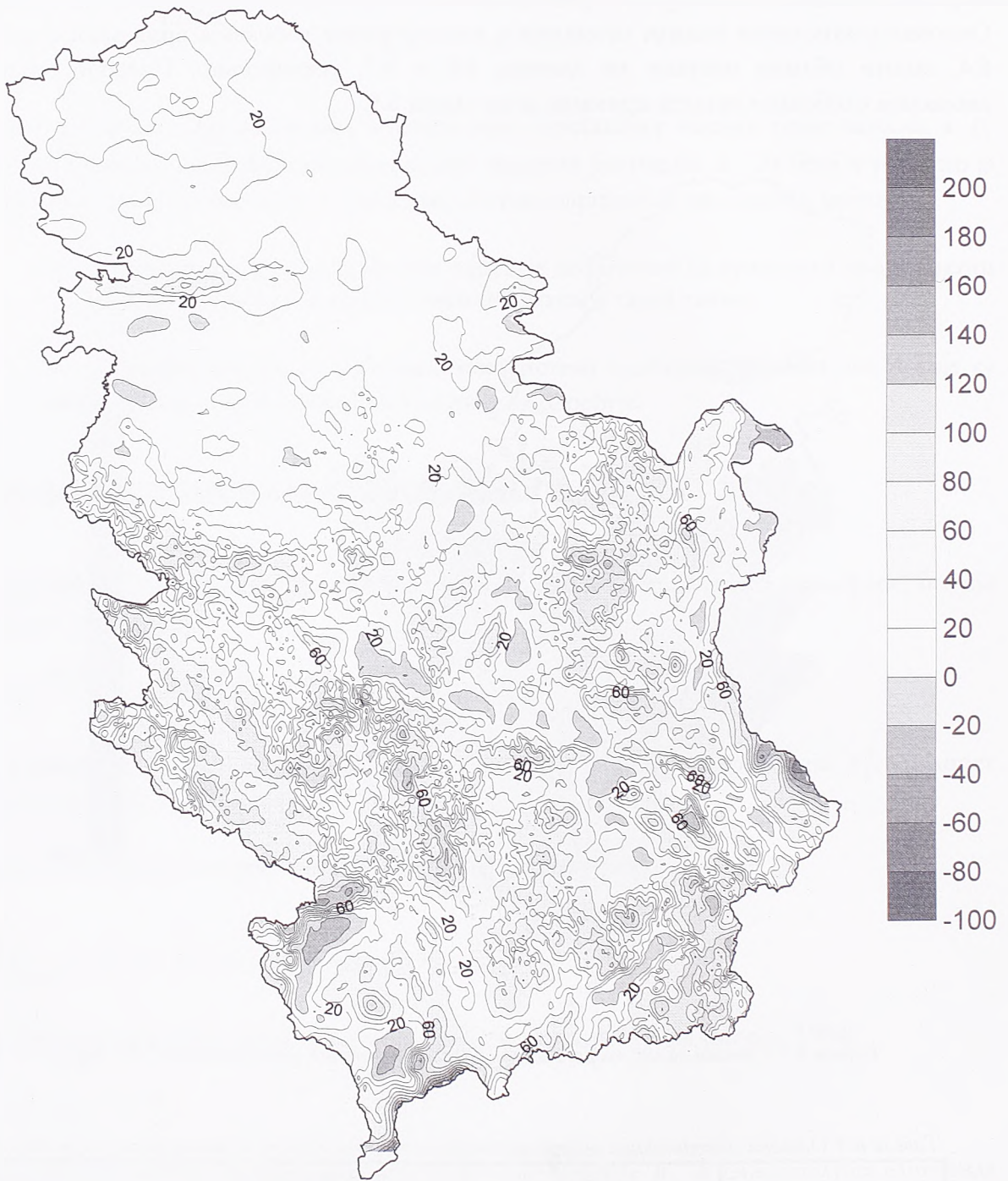
Коришћењем наведених израза одређене су аномалије слободног ваздуха за све тачке ДГП. Основни статистички подаци аномалија и атмосферских корекција приказани су у табели 6.4, општи облици површи на сликама 6.8 и 6.7, респективно. Посебно, хистограм аномалија слободног ваздуха приказан је на слици 6.9.



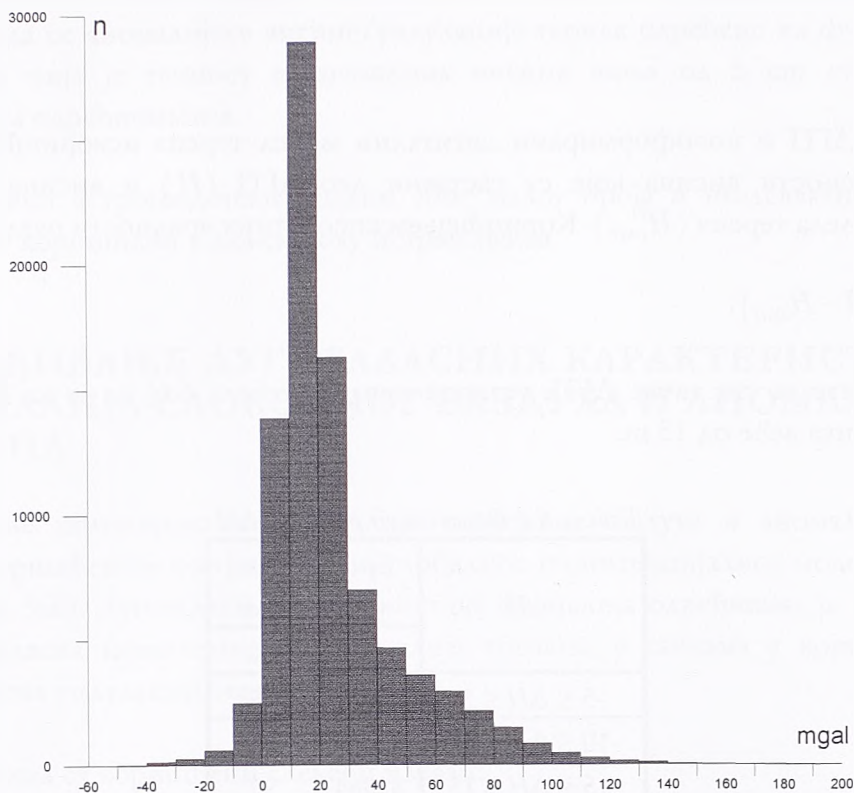
Слика 6.7 Општи облик површи атмосферских корекција (еквидистанца 0.05 mgal)

Табела 6.4 Основни статистички подаци аномалија слободног ваздуха и атмосферске корекције

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна девијација
δg_{ATM} [mgal]	85372	0.63	0.86	0.84	0.03
Δg^{FA} [mgal]	85372	-41.89	210.31	26.54	23.23



Слика 6.8 Општи облик површи аномалија слободног ваздуха (еквидистанца 20 mgal)



Слика 6.9 Хистограм аномалија слободног ваздуха

6.3.3 ОДРЕЂИВАЊЕ УНДУЛАЦИЈА НА БАЗИ ПОЗНАВАЊА ОРТОМЕТРИЈСКИХ И ЕЛИПСОИДНИХ ВИСИНА ТАЧАКА

Коришћењем израза

$$N_{GPS/dh} = h - H^O, \quad \zeta_{GPS/dh} = h - H^N$$

срчунате су аномалијске висине и ундулације геоида за укупно 39 репера и 76 тачака РМС. Основни статистички подаци ових одређивања приказани су у табели 6.5.

Табела 6.5 Основни статистички подаци ундулација и аномалијских висина

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна девијација
$N_{GPS/dh}$ [m]	115	42.80	46.40	44.36	0.86
$\zeta_{GPS/dh}$ [m]	115	42.80	46.41	44.36	0.87

6.3.4 АНАЛИЗА И ОДАБИРАЊА ПОДАТАКА

Анализе и одабирање података базиране су на међусобној сагласности података, квалитету, броју и просторном распореду.

Подаци ДГП и новоформирани дигитални модел терена искоришћени су у циљу провере сагласности висина које су саставни део ДГП (H) и висина које следе из дигиталног модела терена (H_{DMT}^O). Коришћењем апсолутних вредности разлика

$$\Delta H = |H - H_{DMT}^O|.$$

које су срачунате за све тачке ДГП, установљено је (табела 6.6) да је за 3% тачака ДГП срачуната разлика веће од 15 m.

Табела 6.6 Фреквенције разлика ΔH

ΔH	Број разлика у интервалу	
	N	%
$-5 \leq \Delta H \leq 5$	70656	83
$-10 \leq \Delta H \leq 10$	80250	94
$-15 \leq \Delta H \leq 15$	82864	97
$\Delta H > 15$	2508	3

С обзиром на начин на који су одређиване координате тачака ДГП, као и због недостатака информација о томе како је датотека података ДГП формирана, у даљим истраживањима нису коришћени они подаци премера за које вредност разлике прелази 15 m.

Основни статистички подаци за сада укупно 82864 одабраних аномалија слободног ваздуха приказани су у табели 6.7.

Табела 6.7 Основни статистички подаци аномалија слободног ваздуха

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна девијација
Δg^{FA} [mgal]	82864	-41.90	210.31	25.94	22.64

Дигитални модел терена, чије су се висине у погледу одабирања аномалија сматрале условно тачним вредностима, усвојен је у даљим истраживањима као основа за одређивање краткоталасних карактеристика ундулација геоида/аномалијских висина, с тим да се за одређивање утицаја топографских маса које се налазе ван граница Србије користи глобални дигитални модел терена GTOPO.

У погледу ундулација одређених на бази познавања ортометријских и елипсоидних висина усвојено је да се у даљим истраживањима

- користе све аномалијске висине/ундулација геоида одређене овим путем када се моделира њихова дуготаласна карактеристика,

- као и то да се аномалијске висине/ундулације геоида одређене на фундаменталним реперима чија је тачност елипсоидних висина мања од 5 cm не користе при финалним одређивањима.

Прикупљени астрогеодетски подаци због малог броја и неадекватног просторног распореда нису коришћени у даљем току истраживања.

6.4 ОДРЕЂИВАЊЕ ДУГОТАЛАСНИХ КАРАКТЕРИСТИКА АНОМАЛИЈА СЛОБОДНОГ ВАЗДУХА И АНОМАЛИЈСКИХ ВИСИНА

Дуготаласне карактеристике аномалија слободног ваздуха и аномалијских висина одређене су коришћењем коефицијената глобалног геопотенцијалног модела EGM96 (до степена и реда 360). Дуготаласна карактеристика аномалија одређивана је у свим тачкама ДГП, а дуготаласна карактеристика аномалија убрзања у тачкама у којима је методом GPS/dh одређена ундулација геоида.

При прорачунима су коришћени следећи изрази:

$$\Delta g_{GGM} = \frac{kM}{r^2} \sum_{n=2}^{360} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}^U_{nm}) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (6.1)$$

$$\zeta_{GGM} = \frac{kM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{360} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}^U_{nm}) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (6.2)$$

где је kM производ универзалне гравитационе константе и масе Земље, n, m тренутни степен и ред, a велика полуоса нивоског елипсоида система WGS84, γ нормално убрзање у тачки ДГП, r, θ, λ сферне координате тачака ДГП, \bar{J}'_{nm} , \bar{K}'_{nm} коефицијенти глобалног геопотенцијалног модела EGM96, \bar{J}^U_{nm} ортонормирани коефицијенти сферно хармонијског развоја нормалног поља WGS84, $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ ортонормиране Лежандрове функције,

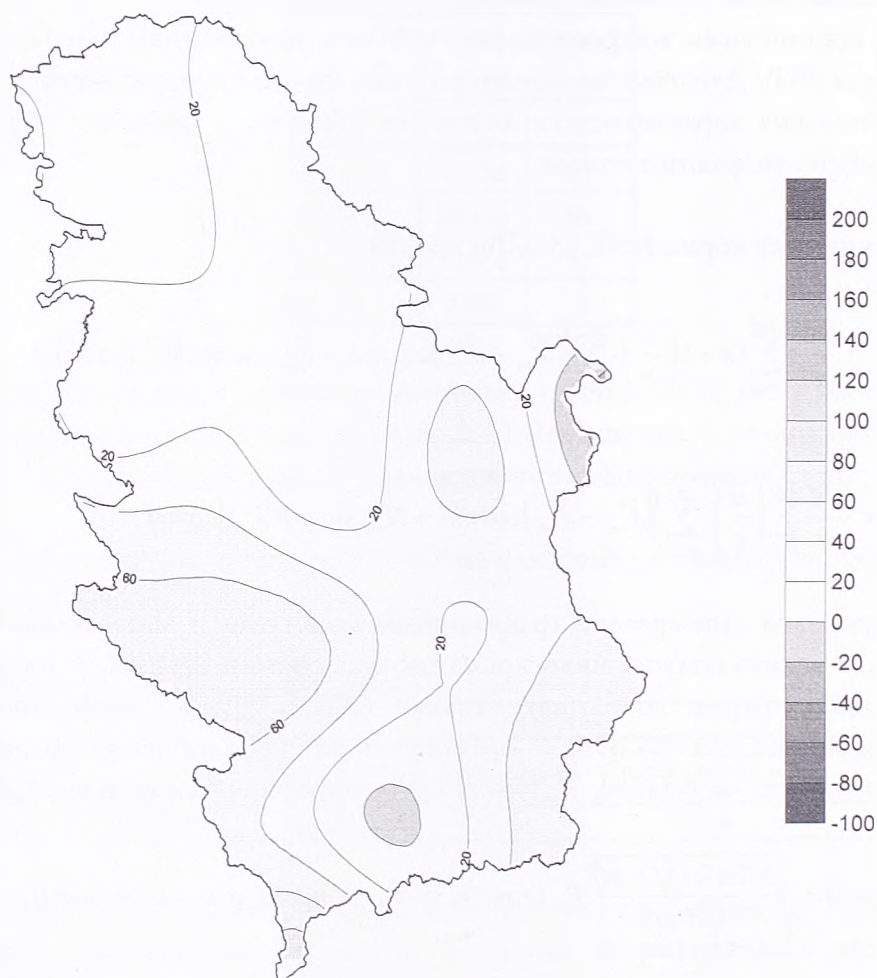
$$\bar{P}_{nm}(\cos \theta) = \sqrt{\frac{k(2n+1)(l-m)!}{(l+m)!}} P_{nm}(\cos \theta), \quad k=1 \text{ за } m=0 \text{ и } k=2 \text{ за } m \neq 0,$$

$$P_{nm}(\cos \theta) = P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^m \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n,$$

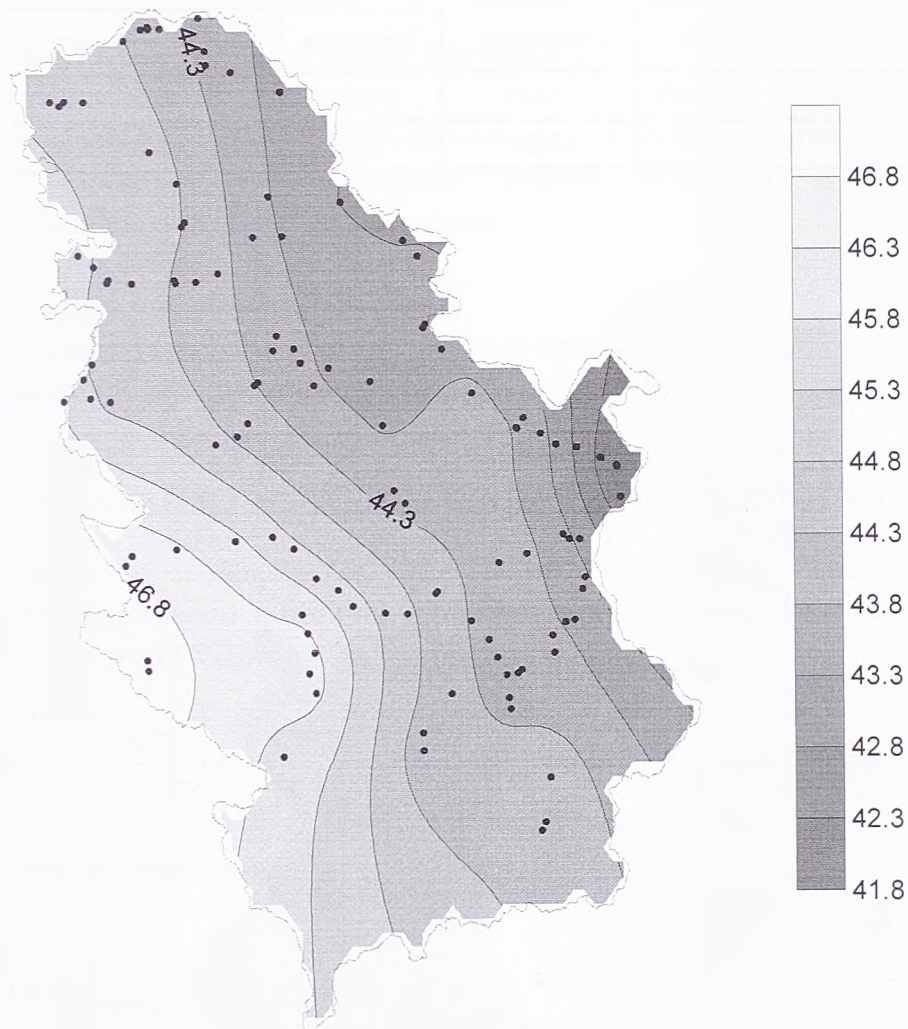
Основни статистички подаци Δg_{GGM} и ζ_{GGM} приказани су у табели 6.8, а општи облици површи на сликама 6.10 и 6.11.

Табела 6.8 Основни статистички подаци аномалија и аномалијских висина одређених применом глобалног геопотенцијалног модела EGM96

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна девијација
Δg_{GGM} [mgal]	82604	-24.15	91.09	23.90	17.34
ζ_{GGM} [m]	115	41.82	47.05	44.47	1.03



Слика 6.10 Општи облик површи дуготаласних карактеристика аномалија слободног ваздуха (еквидистанца 20 mgal)



Слика 6.11 Општи облик површи аномалијских висина (црним симболима означене су тачке у којима су вредности сфачунате)(еквидистанца 0.5 m)

Како је први корак remove-restore методе отклањање дуготаласних карактеристика из резултата мерења функционала аномалијског потенцијала формиране су разлике $\Delta g''$,

$$\Delta g'' = \Delta g^{FA} - \Delta g_{GGM},$$

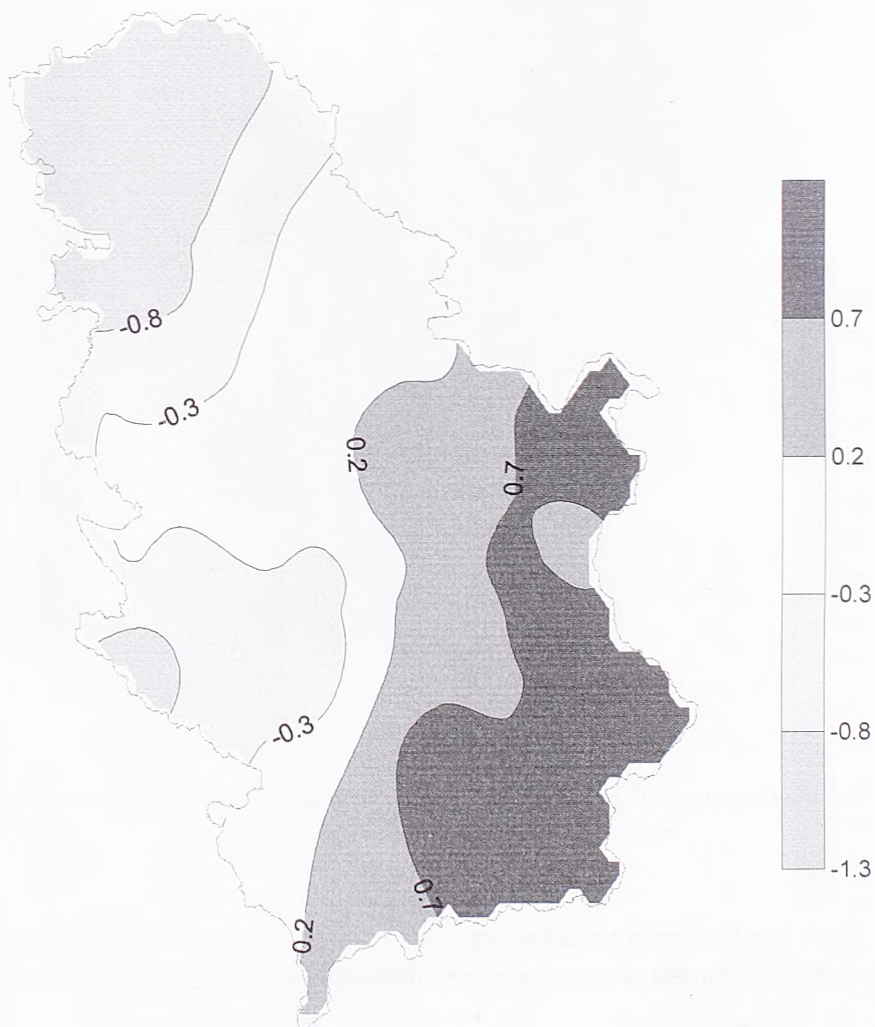
Исти поступак примењен је и на познате вредности аномалијских висина одређених применом GPS/dh методе,

$$\zeta'' = \zeta_{GPS/dh} - \zeta_{GGM}.$$

Основни подаци разлика $\Delta g''$ и ζ'' приказани су у табели 6.9, а општи облик површи разлика ζ'' на слици 6.12.

Табела 6.9 Основни статистички подаци резидуалних аномалија и резидуалних аномалијских висина

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна девијација
$\Delta g''$ [mgal]	82604	-94.84	162.32	2.05	20.89
ζ'' [m]	115	-1.23	1.09	-0.11	0.72



Слика 6.12 Општи облик површи резидуалних аномалијских висина (еквидистанца 0.5 m)

6.5 ПРИЛАГОЂАВАЊЕ ГЛОБАЛНОГ МОДЕЛА EGM96

Из резултата приказаних у табели 6.9 могуће је уочити следеће:

- средња вредност аномалија слободног ваздуха значајно се приближила услову центрираности, од 23.90 mgal до 2.5 mgal,

- стандардна девијација оригиналних аномалија је мања по вредности од стандардне девијације новодобијених за 17%,

што је у потпуности у складу са теоријским поставкама remove-restore методе.

Такође, са слике 6.12 лако је уочити тренд у разликама ζ'' .

Како резултати одређивања аномалија слободног ваздуха нису учествовали у одређивању коефицијената глобалног геопотенцијалног модела извршено је прилагођавање коефицијената модела територији Србије у циљу:

- даљег центрирања аномалија убрзања,
- умањења ефекта увећања стандардне девијације
- и елиминације дела тренда из разлика ζ'' .

6.5.1 ПРИЛАГОЂАВАЊЕ ГЛОБАЛНОГ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНОГ МОДЕЛА

Средњу аномалију слободног ваздуха са неког дела Земљине површи S , величине $\Delta B \times \Delta L$, могуће је применом глобалног геопотенцијалног модела, максималног степена N_{\max} , одредити из израза (WEBER, 1988)

$$\overline{\Delta g}_{GGM} = \frac{kM}{r^2} \sum_{n=2}^{N_{\max}} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \beta_n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}^U_{nm}) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta),$$

где је β_n функција дефинисана изразом (Sjoberg, 1980)

$$\beta_n = \frac{1}{1 - \cos \psi_0} \int_{\cos \psi_0}^1 P_n(t) dt$$

где су $P_n(t) = P_n(\cos \theta)$ Лежандрови полиноми

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

и где је ψ_0 пречник кружног подручја на јединичној сфери σ . Разлику средње аномалије добијене терестричким гравиметријским одређивањима $\overline{\Delta g}$ и аномалије $\overline{\Delta g}_{GGM}$,

$$\delta = \overline{\Delta g} - \overline{\Delta g}_{GGM},$$

могуће је развити у сфернохармонисјки ред при чему за прираштаје коефицијената следе изрази облика

$$\begin{Bmatrix} \delta \bar{J}_{nm}'' \\ \delta \bar{K}_{nm}'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{\bar{r}^2}{kM} \left(\frac{\bar{r}}{a}\right)^n \frac{1}{(n-1)\beta_n} \delta \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) d\sigma$$

где је \bar{r} средњи геоцентрични радијус дела елипсоида који одговара делу Земљине површи S .

Када се располаже са l разлика δ горњи израз може се представити у облику модификације,

$$\begin{Bmatrix} \delta \bar{J}_{nm}'' \\ \delta \bar{K}_{nm}'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^l \frac{\bar{r}_i^2}{kM} \left(\frac{\bar{r}_i}{a}\right)^n \frac{1}{(n-1)\beta_{n,i}} \delta_i \iint_{\Delta\sigma_i} \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) d\sigma, \quad i=1, \dots, l,$$

а како је елемент сфере облика $d\sigma = \sin\theta d\theta$, а свако $\Delta\sigma_i$ ограничено са λ_E, λ_W и θ_S, θ_N , следи (PAUL, 1978):

$$\begin{Bmatrix} \delta \bar{J}_{nm}'' \\ \delta \bar{K}_{nm}'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^l \frac{\bar{r}_i^2}{kM} \left(\frac{\bar{r}_i}{a}\right)^n \frac{1}{(n-1)\beta_{n,i}} \delta_i \int_{\lambda_W}^{\lambda_E} \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} d\lambda \int_{\theta_S}^{\theta_N} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \sin\theta d\theta.$$

Овим путем добијени прираштаји коефицијената додати на вредност оригиналних чине нови скуп коефицијената,

$$\begin{Bmatrix} \bar{J}_{nm}'' \\ \bar{K}_{nm}'' \end{Bmatrix}_T = \begin{Bmatrix} \bar{J}_{nm}' \\ \bar{K}_{nm}' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \bar{J}_{nm}'' \\ \delta \bar{K}_{nm}'' \end{Bmatrix},$$

и могу се сматрати прилагођеним територији са које су одређиване разлике δ . Коришћењем нових коефицијената средње аномалије сада се одређују из израза.

$$\overline{\Delta g}_{GGM} = \frac{kM}{r^2} \sum_{n=2}^{N_{\max}} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \beta_n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}_{nm}'' - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda + \bar{K}_{nm}'' \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos\theta),$$

а аномалијске висине из

$$\zeta_{GGM} = \frac{kM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}_{nm}'' - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda + \bar{K}_{nm}'' \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos\theta).$$

За разлику од оригиналног скупа коефицијената који је ограничен са максималним степеном и редом (у случају EGM96 $N_{\max} = M_{\max} = 360$) овим поступком, у сагласности са величином елемента S који дефинише степен и ред модела, могуће је одредити и чланове развоја већег степена и реда од оригиналних. Поред наведеног, а у циљу што бољег

прилагођавања, поступак је могуће изводити у више наврата (у итерацијама), формирајући после сваког циклуса нове разлике δ , при чему је неопходно увести критеријум (или критеријуме) у циљу ограничења броја итерација.

6.5.2 ПРИЛАГОЂАВАЊЕ МОДЕЛА EGM96 ТЕРИТОРИЈИ СРБИЈЕ

Поступком описаном у претходном поглављу извршен је низ прилагођавања глобалног геопотенцијалног модела EGM96 за територију Србије, при чему је усвојено да се итерације изводе уважавајући следећи критеријум.

После сваке итерације у свим тачкама у којима су познате аномалијске висине $\zeta_{GPS/dh}$ (укупно 115 тачака) одређиваће се аномалијске висине применом новодобијеног скупа коефицијената. Дакле, након сваке итерације располагаће се са два скупа аномалијских висина: скупом $(\zeta_{GPS/dh})_i$ и скупом $(\zeta_{GGM}^z)_i$ где $i=1, \dots, 115$ и где је z ознака итерација, из којих се могу формирати разлике

$$\Delta\zeta_i^0 = (\zeta_{GGM}^0)_i - (\zeta_{GPS/dh})_i$$

за нулту итерацију, односно разлике

$$\Delta\zeta_i^z = (\zeta_{GGM}^z)_i - (\zeta_{GGM}^{z-1})_i$$

за сваку наредну.

Итерација у којој буду важиле следеће неједнакости

$$|\overline{\Delta\zeta}| = \left| \frac{1}{115} \sum_{i=1}^{115} \Delta\zeta_i^z \right| \leq 1cm, \quad \sigma_{\Delta\zeta^z} = \sqrt{\frac{1}{115-1} \sum_{i=1}^{115} (\Delta\zeta_i^z - \overline{\Delta\zeta})^2} \leq 1cm,$$

сматраће се последњом, а скуп добијених коефицијената сматраће се коефицијентима прилагођеног модела.

Поред дефинисаног критеријума извршени су прорачуни поделом територије Србије на подручја величине $0.5^\circ \times 0.5^\circ$, $10' \times 10'$ и $5' \times 5'$, а за коефицијенте који подлежу промени, односно одређивању прираштаја, усвојена су три критеријума:

- минимални степен који подлеже промени дефинисан је изразом $n_{\min} = 180/\theta$ где је θ величина територије за прилагођавање,
- за максимални степен фиксирани су вредности 360, 540 и 720,
- коефицијенти до степена и реда 70 неће се мењати (сателитско решење) а промена ће се вршити до степена 360, 540 и 720.

Из свих недених критеријума очигледно је да је у оквиру истраживања формирано укупно 12 модела (табела 6.10).

Табела 6.10 Карактеристике прилагођених модела који су формирану у оквиру истраживања

Подручје	Величина подручја поделе	Степен и ред модела који се формира	Први коефицијент који подлеже промени	
Србија ($\approx 4.9^\circ \times 4.9^\circ$)	$0.5^\circ \times 0.5^\circ$	360	37	71
		360	37	71
	540			
	$5' \times 5'$	360	37	71
		540		
		720		

Сви модели добијени су у 6 итерација, а основни статистички подаци разлика $\Delta\zeta$ приказани су редом у табелама 6.11, 6.12 и 6.13. Из података приказаних у табелама могуће је уочити да се са моделом при подручју поделе на $10' \times 10'$, са степеном $N_{\max} = 360$, и првим коефицијентом који мења вредност $n_{\min} = 37$, постиже далеко најбоље приближење GPS/dh аномалијском висинама. Посебно за тај модел праћено је понашање степених варијанси аномалија, а са слике 6.13 могуће је уочити да је разлика промене у последњим итерацијама занемарљива (распон разлика износи 0.000557 mgal^2).

Поменути модел усвојен је као финални модел прилагођен територији Србије (у даљем делу текста модел са ознаком EGM96T).

Табела 6.11 Основни статистички подаци разлика $\Delta\zeta$ кроз итерације (подела $0.5^\circ \times 0.5^\circ$) (вредности разлика приказане су у метрима)

$N_{\max} = 360, n_{\min} = 37$							
Статистика	EGM96	Итерација					
		0	1	2	3	4	5
Минимум	-1.09	-1.09	-0.77	-0.74	-0.73	-0.74	-0.74
Максимум	1.23	1.23	0.84	0.82	0.81	0.81	0.81
Распон	2.32	2.32	1.60	1.55	1.54	1.55	1.55
Средња вредност	0.11	0.11	0.18	0.20	0.20	0.19	0.18
Стандардна девијација	0.72	0.72	0.39	0.38	0.37	0.37	0.37
$N_{\max} = 360, n_{\min} = 71$							
Статистика	EGM96	Итерација					
		0	1	2	3	4	5
Минимум	-1.09	-1.09	-0.97	-0.88	-0.84	-0.81	-0.80
Максимум	1.23	1.23	0.95	0.90	0.88	0.88	0.88
Распон	2.32	2.32	1.91	1.77	1.71	1.68	1.67
Средња вредност	0.11	0.11	0.14	0.16	0.17	0.18	0.18
Стандардна девијација	0.72	0.72	0.49	0.44	0.43	0.42	0.42

Табела 6.12 Основни статистички подаци разлика $\Delta\zeta$ кроз итерације (подела $10' \times 10'$)
(вредности разлика приказане су у метрима)

$N_{\max} = 360, n_{\min} = 37$							
Статистика	EGM96	Итерација					
		0	1	2	3	4	5
Минимум	-1.09	-0.54	-0.39	-0.33	-0.31	-0.30	-0.30
Максимум	1.23	0.88	0.88	0.88	0.87	0.86	0.85
Распон	2.32	1.41	1.26	1.21	1.18	1.16	1.15
Средња вредност	0.11	0.23	0.30	0.33	0.34	0.34	0.34
Стандардна девијација	0.72	0.36	0.31	0.30	0.29	0.28	0.28
$N_{\max} = 360, n_{\min} = 71$							
Статистика	EGM96	Итерација					
		0	1	2	3	4	5
Минимум	-1.09	-1.09	-0.88	-0.72	-0.63	-0.59	-0.55
Максимум	1.23	1.23	1.00	0.97	0.96	0.95	0.94
Распон	2.32	2.32	1.87	1.68	1.58	1.53	1.48
Средња вредност	0.11	0.11	0.11	0.15	0.18	0.20	0.21
Стандардна девијација	0.72	0.72	0.51	0.44	0.41	0.40	0.39
Подела $10' \times 10'$, $N_{\max} = 540, n_{\min} = 37$							
Статистика	EGM96	Итерација					
		0	1	2	3	4	5
Минимум	-1.09	-1.09	-0.54	-0.46	-0.43	-0.42	-0.41
Максимум	1.23	1.23	0.86	0.87	0.86	0.86	0.85
Распон	2.32	2.32	1.41	1.33	1.30	1.28	1.27
Средња вредност	0.11	0.11	0.24	0.29	0.31	0.32	0.32
Стандардна девијација	0.72	0.72	0.34	0.31	0.29	0.28	0.28
$N_{\max} = 540, n_{\min} = 71$							
Статистика	EGM96	Итерација					
		0	1	2	3	4	5
Минимум	-1.09	-1.09	-0.83	-0.72	-0.66	-0.63	-0.61
Максимум	1.23	1.23	0.99	0.96	0.94	0.93	0.93
Распон	2.32	2.32	1.83	1.68	1.60	1.57	1.54
Средња вредност	0.11	0.11	0.11	0.15	0.17	0.19	0.20
Стандардна девијација	0.72	0.72	0.49	0.43	0.40	0.39	0.38

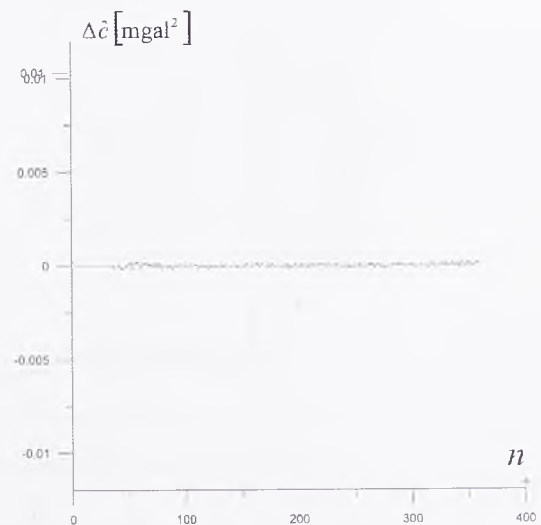
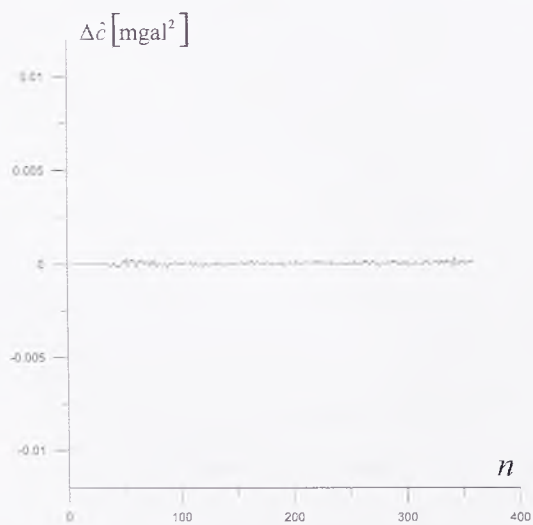
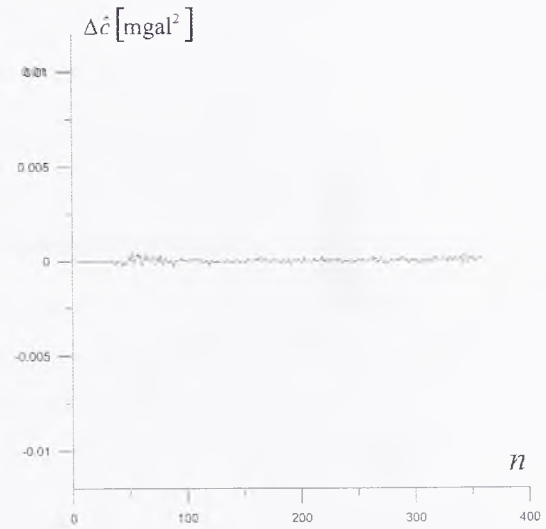
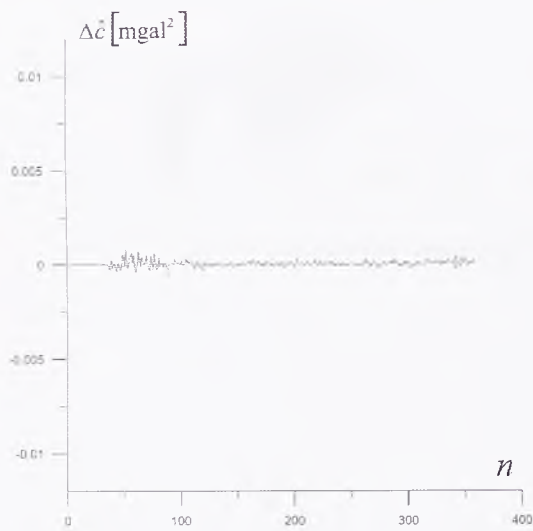
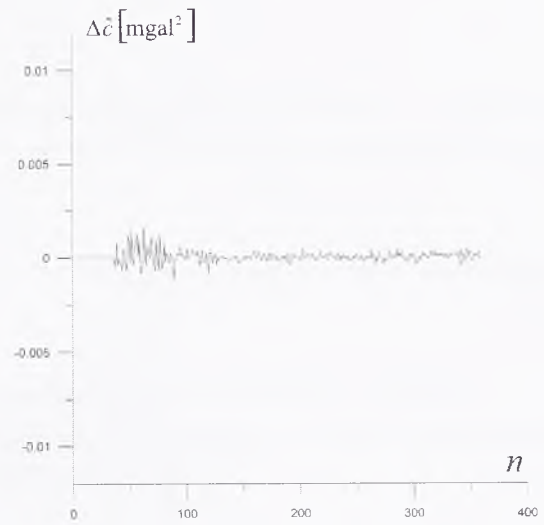
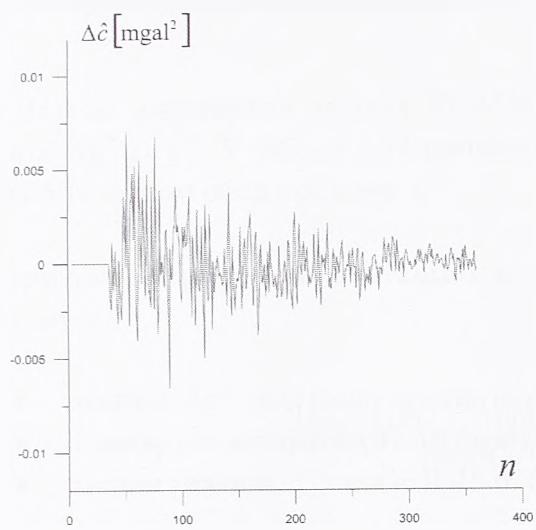
Табела 6.13 Основни статистички подаци разлика $\Delta\zeta$ кроз итерације (подела $5' \times 5'$)
(вредности разлика приказане су у метрима)

$N_{\max} = 360, n_{\min} = 37$							
Статистика	EGM96	Итерација					
		0	1	2	3	4	5
Минимум	-1.09	-1.09	-0.57	-0.41	-0.34	-0.30	-0.27
Максимум	1.23	1.23	0.92	0.92	0.93	0.94	0.94
Распон	2.32	2.32	1.48	1.32	1.26	1.23	1.20
Средња вредност	0.11	0.11	0.26	0.34	0.37	0.39	0.39
Стандардна девијација	0.72	0.72	0.38	0.34	0.33	0.32	0.32

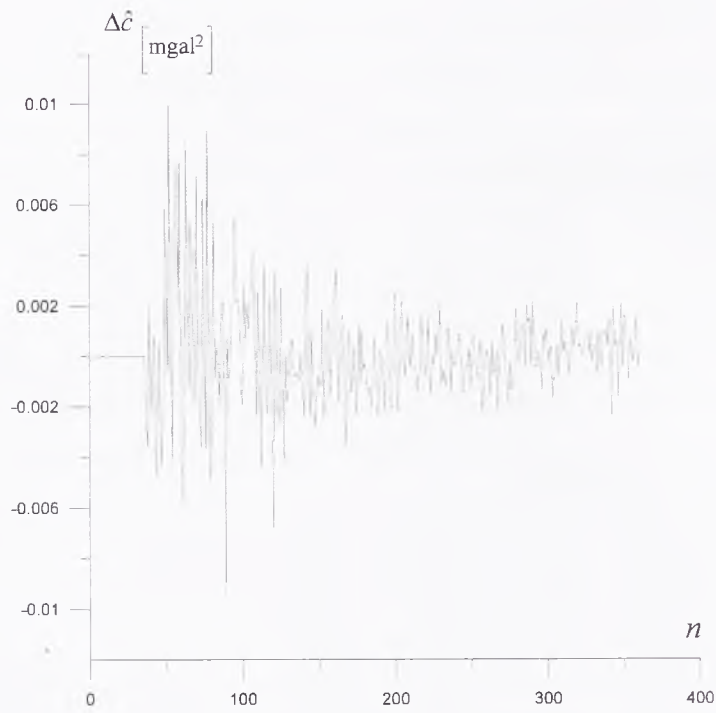
Табела 6.13 Основни статистички подаци разлика $\Delta\zeta$ кроз итерације (подела 5' x 5')

(вредности разлика приказане су у метрима)

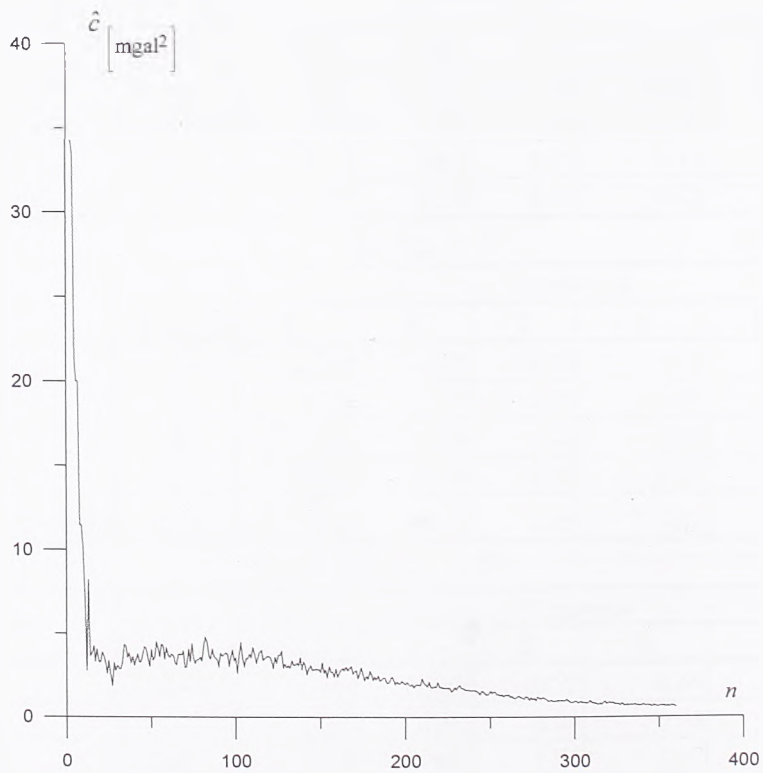
$N_{\max} = 360, n_{\min} = 71$							
Статистика	EGM96	Итерација					
		0	1	2	3	4	5
Минимум	-1.09	-1.09	-0.90	-0.74	-0.65	-0.60	-0.56
Максимум	1.23	1.23	1.02	0.99	0.99	0.99	0.99
Распон	2.32	2.32	1.91	1.72	1.63	1.58	1.54
Средња вредност	0.11	0.11	0.12	0.17	0.20	0.22	0.23
Стандардна девијација	0.72	0.72	0.52	0.46	0.43	0.42	0.41
$N_{\max} = 540, n_{\min} = 37$							
Статистика	EGM96	Итерација					
		0	1	2	3	4	5
Минимум	-1.09	-1.09	-0.51	-0.42	-0.39	-0.38	-0.37
Максимум	1.23	1.23	0.91	0.90	0.89	0.89	0.88
Распон	2.32	2.32	1.42	1.32	1.29	1.27	1.25
Средња вредност	0.11	0.11	0.27	0.33	0.35	0.36	0.36
Стандардна девијација	0.72	0.72	0.37	0.33	0.32	0.31	0.31
$N_{\max} = 540, n_{\min} = 71$							
Статистика	EGM96	Итерација					
		0	1	2	3	4	5
Минимум	-1.09	-1.09	-0.82	-0.70	-0.64	-0.61	-0.58
Максимум	1.23	1.23	1.01	0.98	0.96	0.95	0.95
Распон	2.32	2.32	1.83	1.68	1.60	1.57	1.53
Средња вредност	0.11	0.11	0.12	0.17	0.19	0.21	0.22
Стандардна девијација	0.72	0.72	0.50	0.45	0.42	0.41	0.40
$N_{\max} = 720, n_{\min} = 37$							
Статистика	EGM96	Итерација					
		0	1	2	3	4	5
Минимум	-1.09	-1.09	-1.03	-0.50	-0.44	-0.42	-0.40
Максимум	1.23	1.23	1.17	0.90	0.91	0.91	0.91
Распон	2.32	2.32	2.20	1.40	1.35	1.33	1.31
Средња вредност	0.11	0.11	0.16	0.30	0.33	0.35	0.36
Стандардна девијација	0.72	0.72	0.63	0.35	0.33	0.32	0.31
$N_{\max} = 720, n_{\min} = 71$							
Статистика	EGM96	Итерација					
		0	1	2	3	4	5
Минимум	-1.09	-1.09	-0.87	-0.75	-0.69	-0.65	-0.62
Максимум	1.23	1.23	1.00	0.99	0.98	0.98	0.98
Распон	2.32	2.32	1.87	1.74	1.67	1.63	1.60
Средња вредност	0.11	0.11	0.11	0.15	0.18	0.20	0.21
Стандардна девијација	0.72	0.72	0.51	0.45	0.43	0.42	0.41



Слика 6.13 Промене степених варијанси кроз итерације



Слика 6.14 Укупна промена степених варијанси



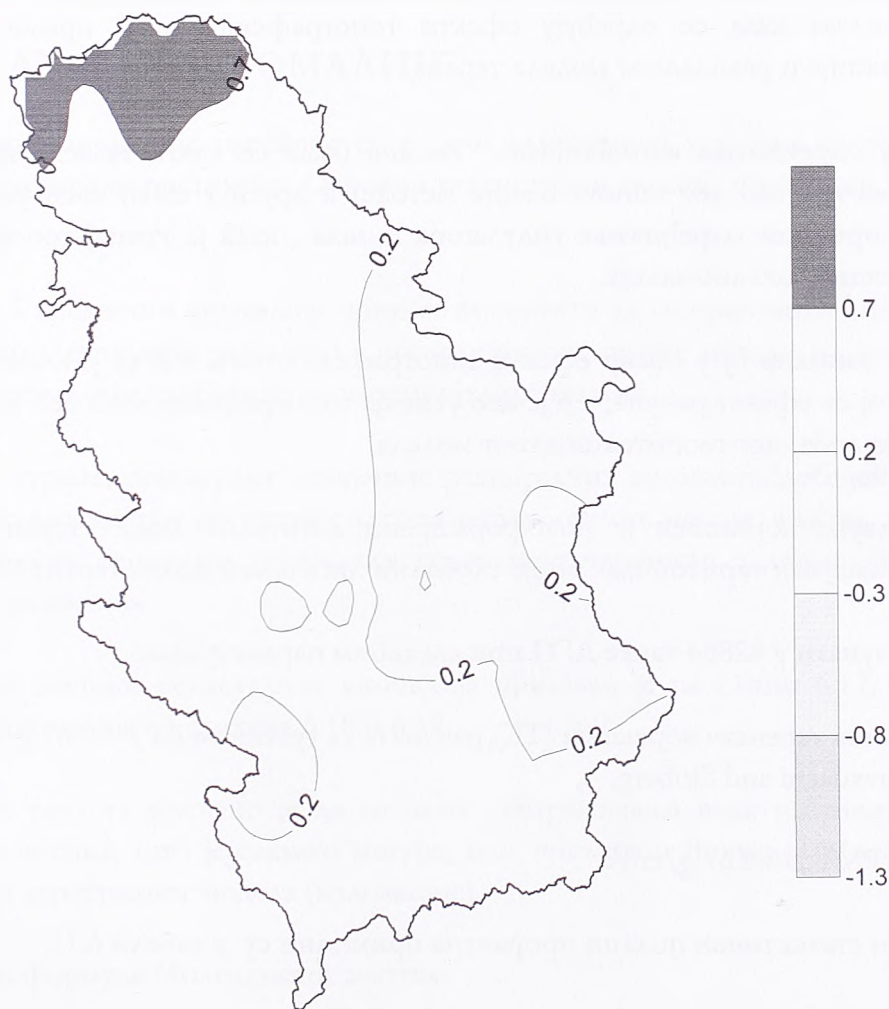
Слика 6.15 График степених варијанси прилагођеног модела EGM96T

6.5.3 ПРИМЕНА МОДЕЛА EGM96T

Након формирања модела EGM96 модел је примењен и поново су формиране разлике $\Delta g''$ и ζ'' . У табели 6.14 приказане су основни статистички подаци разлика, а на слици 6.16 општи облик разлика ζ'' .

Из приказаних резултата очигледно је да су сва три постављена циља истраживања постигнута:

- разлике $\Delta g''$ сада имају средњу вредности 0.66 mgal (2.50 mgal са EGM96)
- стандардна девијација 17.41 mgal (оригиналне 17.34 mgal, са EGM96 20.89 mgal),
- распон разлика ζ'' сада је 1.15 m (са EGM96 2.32 m)



Слика 6.16 Општи облик површи разлика ζ'' (еквидистанца 0.5 m)

Табела 6.14 Основни статистички подаци разлика $\Delta g''$ и ζ''

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна девијација
$\Delta g''$ [mgal]	82604	-91.09	126.65	0.66	17.41
ζ'' [m]	115	-0.30	0.85	0.34	0.28

6.6 ОДРЕЂИВАЊЕ КРАТКОТАЛАСНИХ КАРАКТЕРИСТИКА АНОМАЛИЈА УБРЗАЊА

У циљу одређивања краткоталасних карактеристика примењена су два приказана теоријска прилаза када се одређују ефекти топографских маса: применом класичне теренске корекције и резидалног модела терена.

Први у циљу одређивања аномалијских висина (када се краткоталасна карактеристика директно појављује као део remove-restore методе) и други у циљу евентуалне редукције резултата и директног одређивања ундулација геоида, када је утицај топографије путем теренске корекције део аномалија.

У оба случаја узимани су у обзир ефекти топографских маса које су удаљене и до 100 km од тачке у којој се ефекат рачуна, јер је део утицаја топографских маса већ једном одређен кроз примену глобалног геопотенцијалног модела.

За све прорачуне коришћен је новоформиран дигитални модел терена $1'' \times 1''$, а за топографске масе ван територија Србије глобални дигитални модел терена GTOPO.

Ефекти су рачунати у 82864 тачке ДГП при следећим параметрима:

- класична теренска корекција (ТК) рачуната са густином од $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$ (Nahavandachi and Sjöberg,),
- а код РМТ $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$.

Основни статистички подаци прорачуна приказани су у табели 6.15.

Табела 6.15 Основни статистички подаци краткоталасних карактеристика резидуалних аномалија

Топографске масе све до 100 km		
Статистика	РМТ [mgal]	ТК [mgal]
Минимум	-137.09	-0.08
Максимум	121.52	91.23
Средња вредност	-4.52	3.42
Стандардна девијација	16.22	6.13

Поред наведених прорачуна такође су одређене вредности краткоталасних карактеристика узимајући у обзир масе све до растојања од 171.5 и 200 km, а њиховим упоређењем са вредностима чији су основни статистички подаци приказани у табели 6.15 установљено је да је максимална разлика мања од 0.1 mgal.

6.7 РЕЗИДУАЛНЕ АНОМАЛИЈЕ

Резидуалне аномалије одређене су у свим случајевима у којима се располагало са краткоталасним карактеристикама. Основни статистички подаци приказани су у табелама 6.16 и 6.17.

Увидом у вредности аномалија може се закључити да се применом модела EGM96Т добијају далеко адекватнији резултати у погледу remove-restore методе, од оних који следе применом оригиналног глобалног геопотенцијалног модела.

С друге стране, стандардне девијације резидуалних аномалија добијених применом РМТ су далеко адекватније по питању захтева remove-restore методе, а може се рећи да оба скупа резидуалних аномалија испуњавају услов центрираности у далеко већој мери од оригиналних аномалија.

Општи облик површи резидуалних аномалија приказан је на слици 6.17, а хистограми резидуалних аномалија на сликама 6.18 и 6.19.

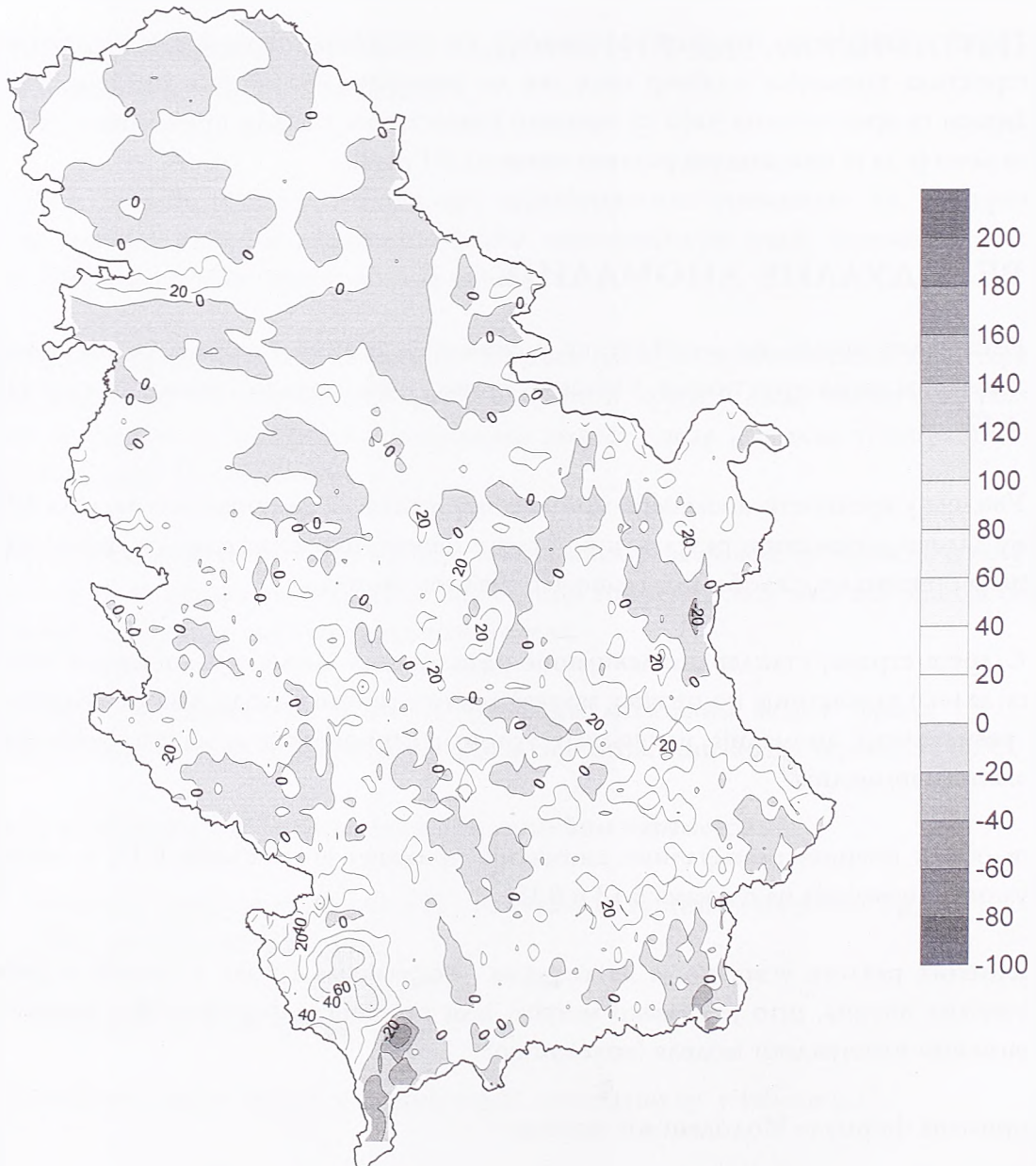
Из наведених разлога усвојено је да се даља истраживања воде у правцу одређивања аномалијских висина, што је свакако могуће, или применом формуле Молоденског, или пак применом интегралног модела (колокације).

Како примена формуле Молоденског захтева:

- посебно моделирање и одређивање другог члана формуле,
- затим, у случају примене Фуријеових трансформација, претходно формирање дигиталног модела аномалија,
- интероплацију, у циљу одређивања аномалијских висина након примене Фуријеових трансформација,

- моделирање ефекта циркуларне конволуције,
- модификацију језгра у циљу смањења ефекта ограничене интеграције (Fhearstone, 1998),

усвојено је да се даља истраживања базирају на примени интегралног модела (колокације)



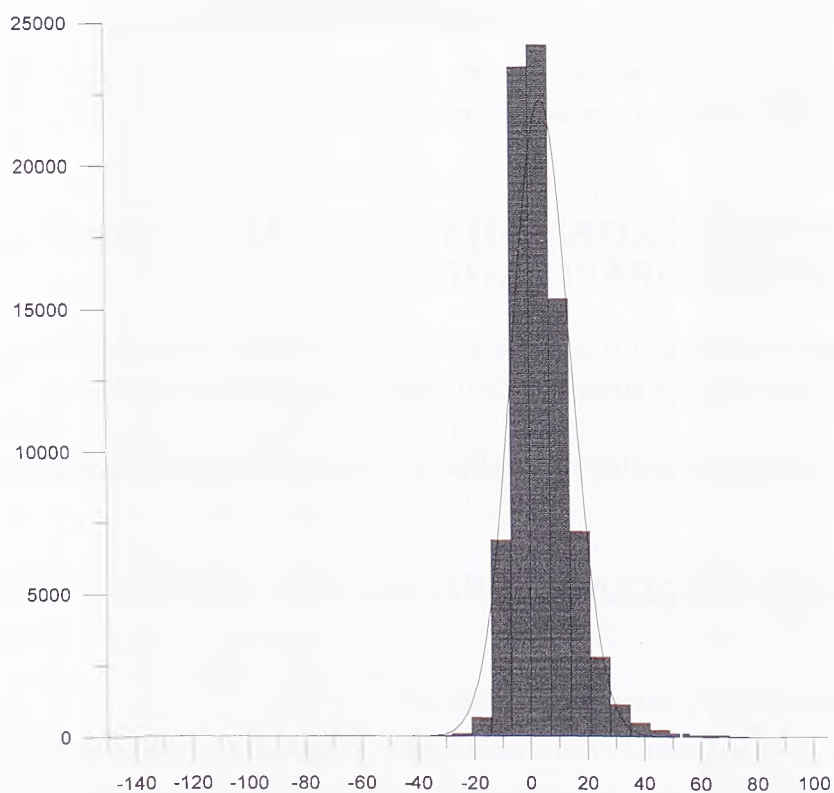
Слика 6.17 Опти облик површи резидуалних аномалија одређених применом PМТ и EGM96T (еквидистанца 20 mgal)

Табела 6.16 Основни статистички подаци резидуалних аномалија
(са глобалним моделом EGM96)

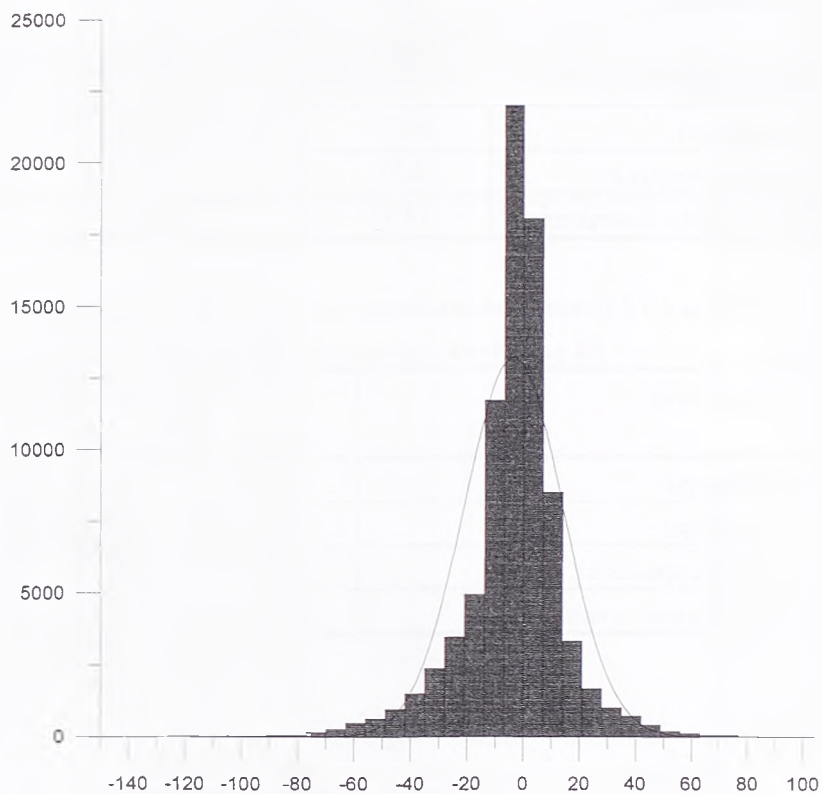
Статистика	PMT [mgal]	TK [mgal]
Минимум	-54.29	-162.34
Максимум	89.30	129.67
Средња вредност	6.57	-1.37
Стандардна девијација	14.97	20.76

Табела 6.17 Основни статистички подаци резидуалних аномалија
(са глобалним моделом EGM96T)

Статистика	PMT [mgal]	TK [mgal]
Минимум	-64.65	-141.03
Максимум	99.45	104.58
Средња вредност	5.18	-2.76
Стандардна девијација	10.39	17.53



Слика 6.18 Хистограм резидуалних аномалија одређених применом PMT и EGM96T



Слика 6.19 Хистограм резидуалних аномалија одређених применом ТК и EGM96Т

6.8 ЕМПИРИЈСКЕ КОВАРИЈАНСЕ И АНАЛИТИЧКА ФУНКЦИЈА КОВАРИЈАНСИ

Емпиријске коваријансе одређене су из свих 82864 података ДП, за корак сферог растојања од $2'$, при чему су коваријансе одређене за укупно 69 интервала.

За аналитичку функцију коваријанси одабран је 4. модел Чернинга и Рапа у облику

$$C = A \sum_{n=1}^{\infty} c_n s^{n+2} P_n(\cos \psi)$$

где је модел степених варијанси дефинисан са

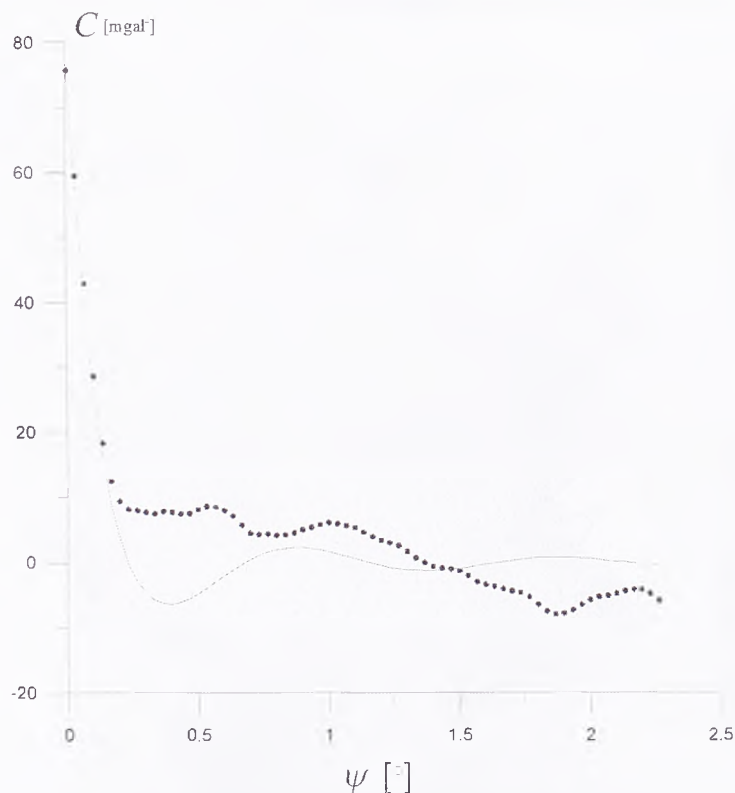
$$c_n = \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+B)}$$

где је ψ сферно растојање, а $s = R_b/R$ однос Бјерхамерове и терестричке сфере. Одређивање аналитичке функције коваријанси овог облика представља у ствари усвајање вредности за непознат параметар B и одређивање параметара n , A и s на основу емпиријских коваријанси.

За параметар B је у оквиру истраживања усвојена вредност 24 (вредност одређена у раду), а на основу итеративног поступка Кнудсена (Knudsen, 1985) одређена су остала 3 непозната параметра при чему су добијене следеће вредности: $n_1 = 360$, $A = 50.23 \text{ mgal}^2$, $s = 0.999868$.

Избор функције последица је низа прорачуна са разним облицима функција које су дефинисали Чернинг и Рап (Одаловић, 2000).

Емпиријске коваријансе и график аналитичке функције коваријанси приказани су на слици 6.20.



Слика 6.20 Емпиријске коваријансе и аналитичка функција коваријанси

6.9 СРЕДЊЕТАЛАСНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ АНОМАЛИЈСКИХ ВИСИНА

При одређивању средњеталасних карактеристика аномалијских висина, а при примени интегралног модела (колокације), неопходно је пре саме примене одредити минимални скуп података из којих ће се висине одређивати као и скуп тачака у којима ће бити одређене средњеталасне карактеристике. Другим речима неопходно је дефинисати податке који се користе у предикцији и тачке у којима ће се вршити предикција.

У оквиру ових истраживања усвојено је следеће:

- Од свих 82864 тачака ДГП, користиће се за предикцију само оне које се налазе на међусобном просечном растојању од 5 km (укупно 4922 аномалије слободног ваздуха) (Tscherning, 1992),
- како се применом интегралног модела може извршити предикција у произвољној тачки територије коју модел покрива усвојено је да се предикција управо врши у тачкама које се користе за предикцију.

На слици 6.21 приказан је просторни распоред аномалија које се користе у предикцији, односно тачака у којима је предикција извршена.



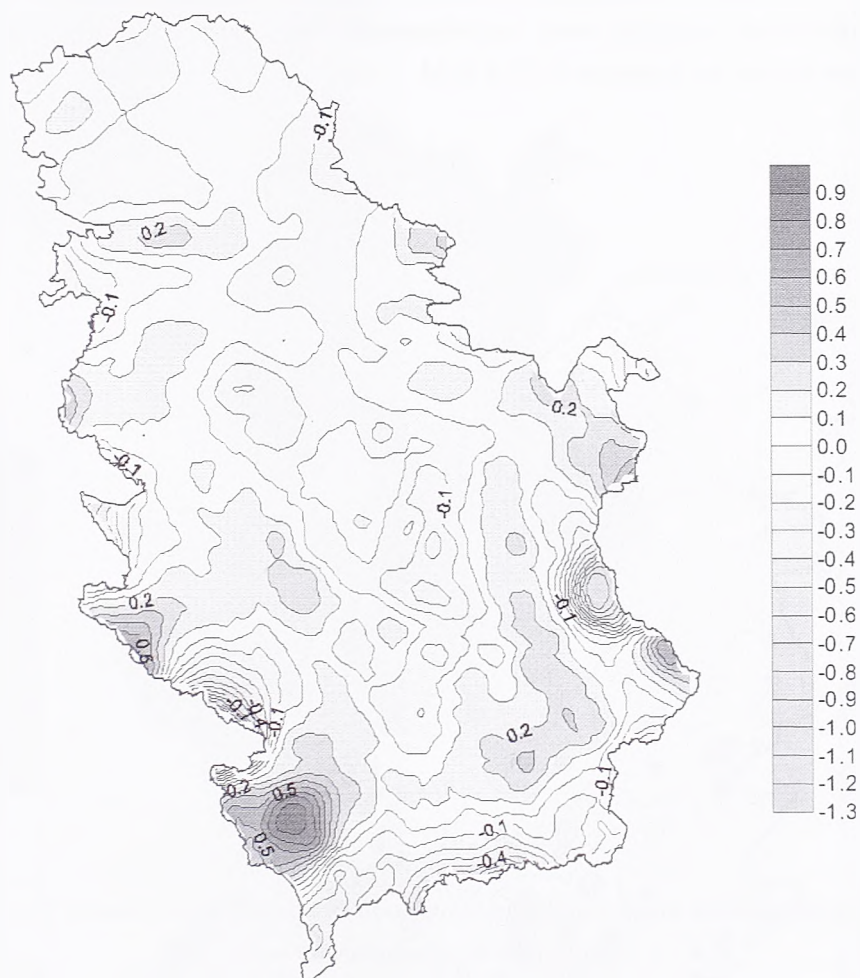
Слика 6.21 Просторни распоред резидуалних аномалија које се користе у предикцији

Пре примене модела усвојено је да максимална тачност резидуалних аномалија не прелази вредност од 0.5 mgal.

Након примене модела добијене су вредности средњеталасних карактеристика чији су основни статистички подаци приказани у табели 6.18, а општи облик површи на слици 6.22. У погледу оцене тачности одређених средњеталасних карактеристика може се рећи да се налази у распону од максимално 1 cm у централним деловима Србије, до 3.5 cm у подручјима близу државне граница.

Табела 6.18 Основни статистички подаци средњеталасних карактеристика аномалијских висина

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна девијација
$\zeta_{\text{ТМ}}$ [m]	4922	-1.61	0.90	0.02	0.19



Слика 6.22 Општи облик површи средњеталасних карактеристика аномалијских висина (еквидистанца 0.1 m)

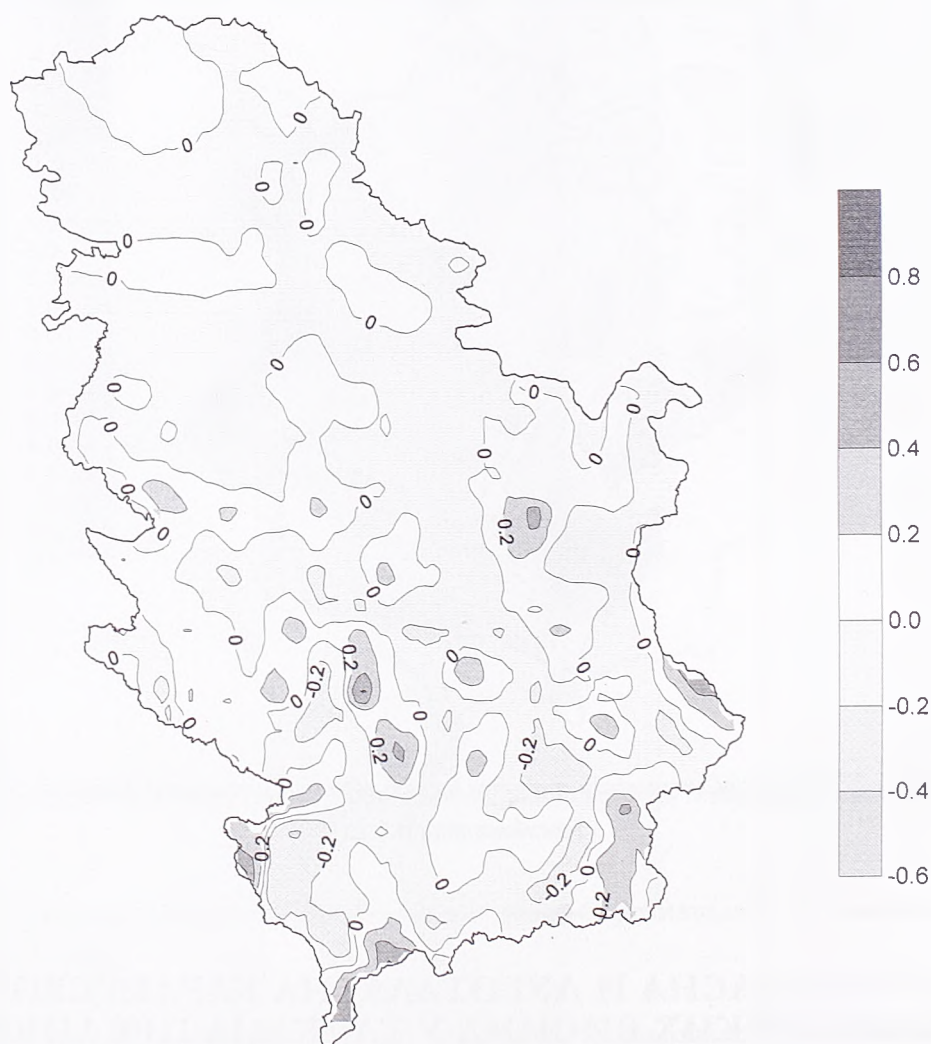
6.10 КРАТКОТАЛАСНА И ДУГОТАЛАСНА КАРАКТЕРИСТИКА АНОМАЛИЈСКИХ ВИСИНА У ТАЧКАМА ПРЕДИКЦИЈЕ

Финални корак remove-restore методе представља одређивање краткоталасних и дуготаласних карактеристика аномалијских висина у тачкама предикције. Њихово одређивање у оквиру истраживања урађено је у сагласности са начином и подацима који су

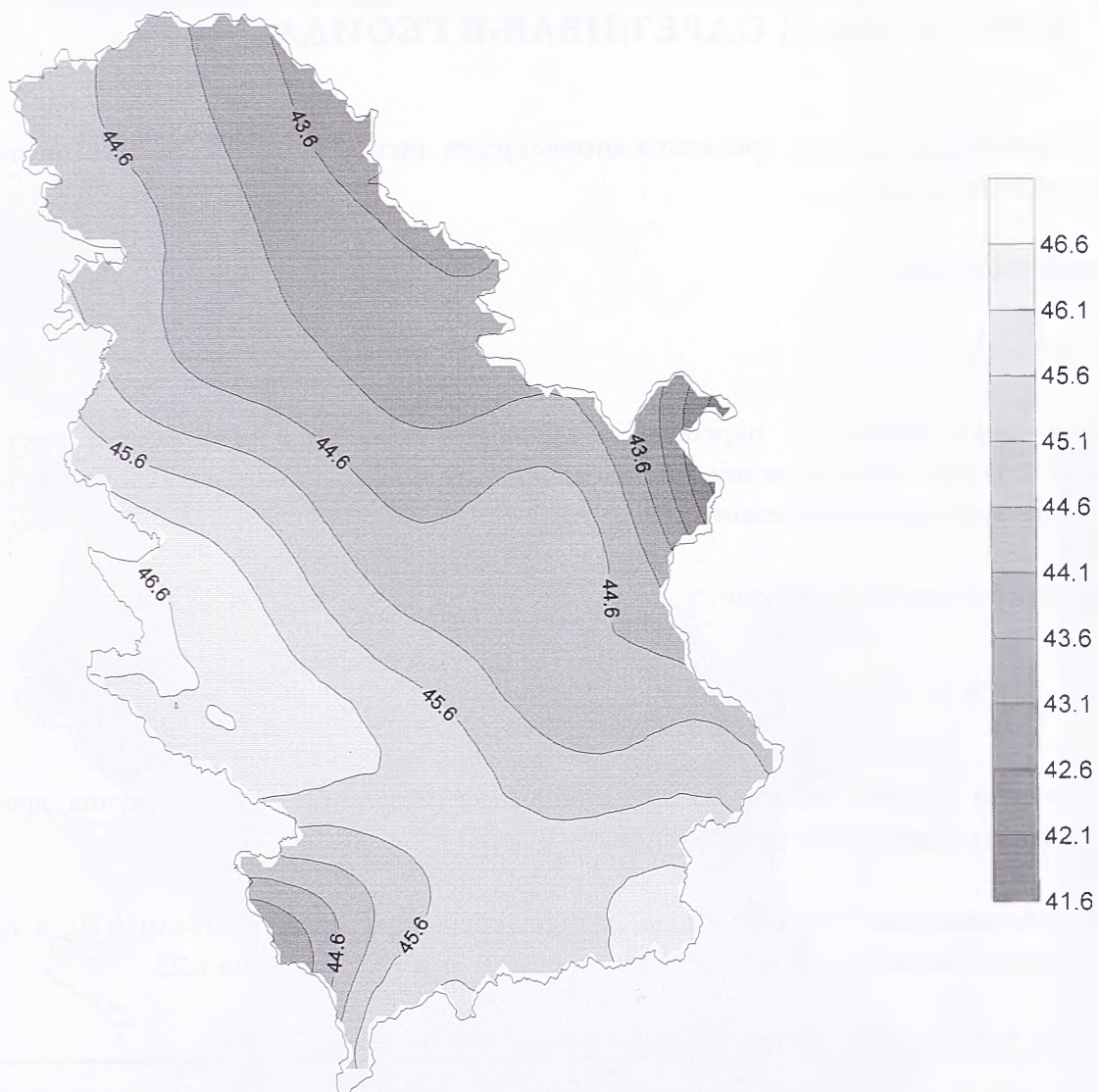
се користили при формирању резидуалних аномалија.

При одређивању краткоталасних карактеристика коришћен је резидуални модел терена, при чему су топографске масе ($\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$) дефинисане дигиталним моделом од једне лучне секунде у оба правца, а за одређивање дуготаласних карактеристика користио се прилагођени глобални геопотенцијални модел EGM96T.

Основни статистички подаци ових одређивања приказани су у табели 6.19, а општи облици површи редом на сликама 6.23 и 6.24.



Слика 6.23 Општи облик површи краткоталасних карактеристика аномалијских висина (еквидистанца 0.2 m)



Слика 6.24 Општи облик површи дуготаласних карактеристика аномалијских висина (еквидистанца 0.5 m)

Табела 6.19 Основни статистички подаци краткоталасних и дуготаласних карактеристика аномалијских висина

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна девијација
ζ_{GGM} [m]	4922	41.54	46.78	44.96	0.91
ζ_{PMG} [m]	4922	-0.41	0.75	-0.002	0.12

6.11 УКУПНА АНОМАЛИЈСКА ВИСИНА, ЕЛИПСОИДНА КОРЕКЦИЈА И ОДРЕЂИВАЊЕ ГЕОИДА

Одређивање укупних вредности аномалијских висина представља финални продукт remove-restore методе.

Коришћењем збира

$$\zeta = \zeta_{GGM} + \zeta_{PMT} + \zeta_{NM}$$

у свакој тачки предикције одређена је укупна аномалијска висина, а због претходно усвојене сферне апроксимације неопходно је овако одређеним вредностима додати вредности елипсоидних корекција.

Елипсоидне корекције одређене су по изразу (Moritz, 1980; Nsombo, 1998):

$$EK = e^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin^2 B \right) \zeta,$$

где је e први бројни ексцентрицитет, B геодетска латитуда тачке, ζ укупна вредност претходно одређене аномалијске висине.

Применом наведених израза добијене су вредности приказане у табели 6.20, а општи облик површи укупних аномалијских висина представљен је на слици 6.25.

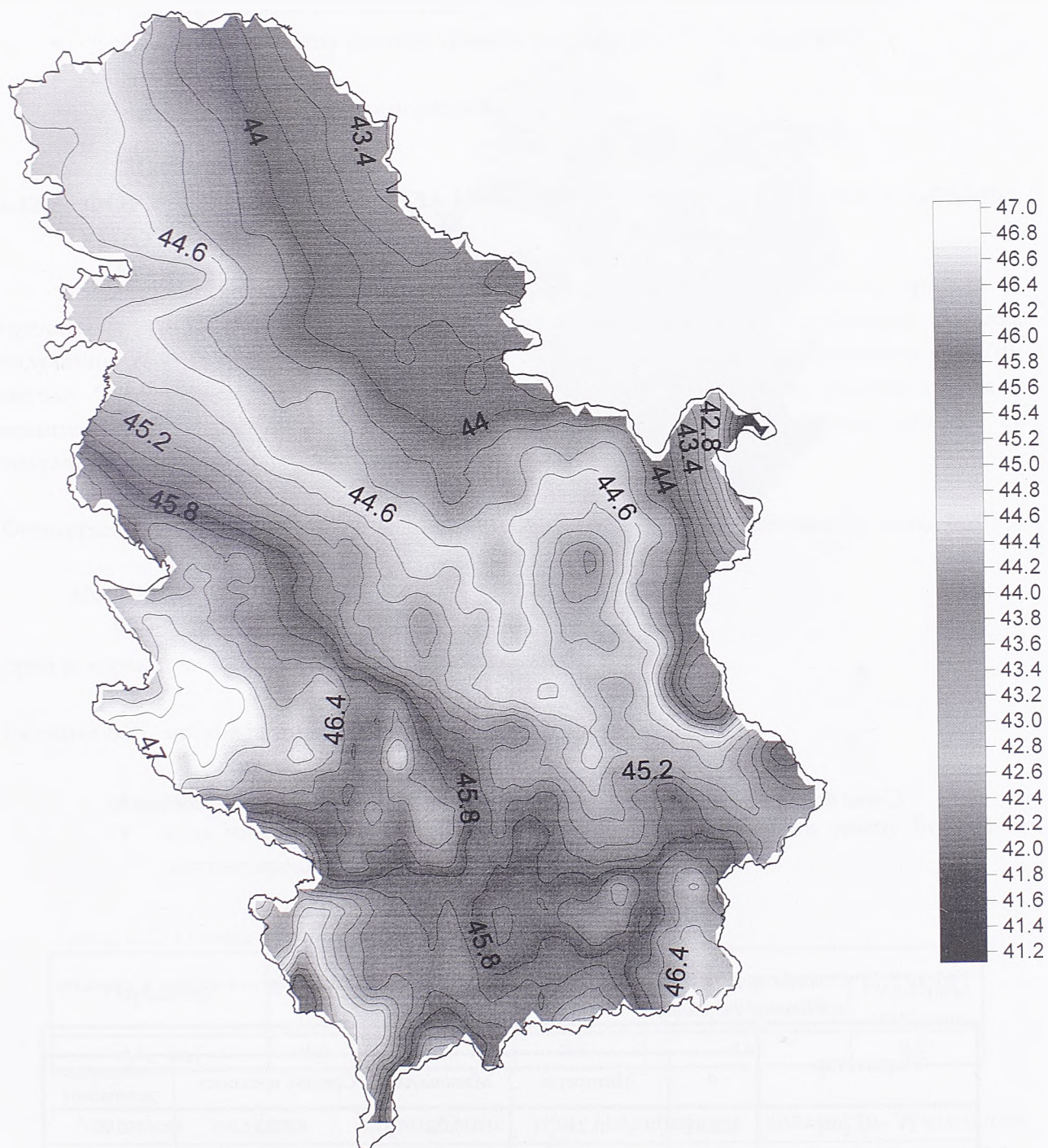
Табела 6.20 Основни статистички подаци аномалијских висина

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна девијација
ζ [m]	4922	41.02	47.09	44.98	0.93

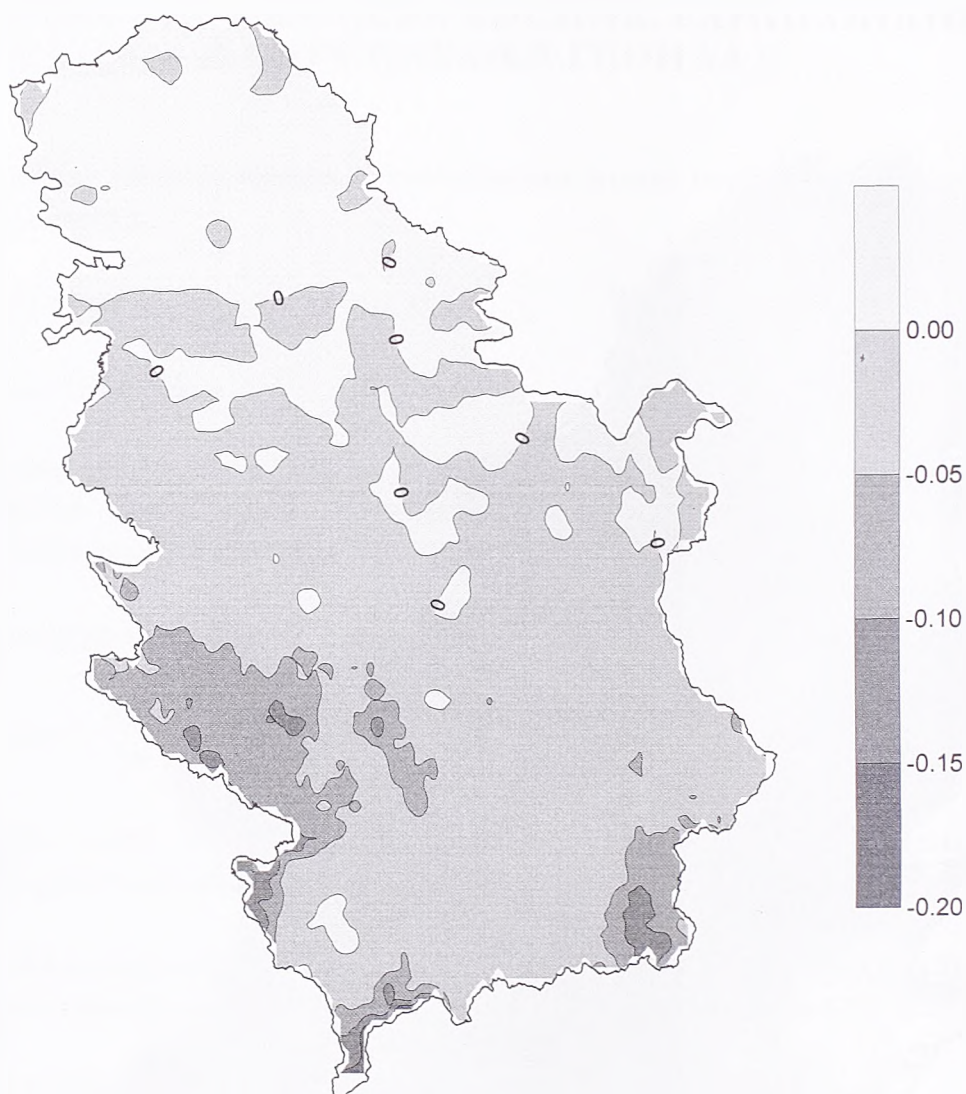
У циљу одређивања ундулација геоида из претходно одређених аномалијских висина потребно је у свакој тачки предикције одредити њихову разлику, применом израза (3.18), при чему је неопходно у свакој тачки предикције познавати Бугеову аномалију.

Како су у овом случају тачке предикције, истовремено и тачке ДГП у којима је вредност убрзања позната применом израза (3.19) одређене су Бугеове аномалије у свим тачкама предикције, а затим и разлике ундулација и аномалијских висина (слика 6.26) и коначно саме вредности ундулација.

Основни статистички подаци ових одређивања приказани су у табели 6.21.



Слика 6.25 Опти облик површи укупних аномалијских висина (квазигеоид) (еквидистанца 0.2 m)



Слика 6.26 Општи облик површи разлика ундулација геоида и аномалијских висина
(еквидистанца 0.05 m)

Табела 6.21 Основни статистички подаци разлика ундулација и аномалијских висина и финалне вредности ундулација

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна девијација
$N - \zeta$ [m]	82864	-0.24	0.02	-0.01	0.02
N [m]	4922	40.99	46.98	44.93	0.92

6.12 КОМБИНОВАНО РЕШЕЊЕ

Комбиновано решење нумеричких истраживања, сагласно искоришћеним подацима, представља комбинацију гравиметријских ундулација и ундулација одређених методом GPS/dh.

Поступак одређивања комбинованог решења такође је извођен у више фаза:

- формирање и анализа разлика гравиметријских и GPS/dh ундулација,
- моделирање разлика
- и одређивање комбинованог решења.

6.12.1 ФОРМИРАЊЕ И АНАЛИЗА РАЗЛИКА ГРАВИМЕТРИЈСКИХ И GPS/dh УНДУЛАЦИЈА

У делу одређивања геоида, у свим фазама remove-restore методе, вршена је предикција свих карактеристика аномалијских висина као и одређивање разлика ундулација геоида у свим тачкама у којима су ундулације одређене применом GPS/dh методе. Формирањем укупних аномалијских висина, као и додавањем разлике геоида и квазигеоида на одређене аномалијске висине, у свих 109 GPS/dh тачака добијене су ундулације геоида N .

Формирање разлика између поменута два скупа у свих 109 тачака (табела 6.22, слика 6.27)

$$\Delta N = N - N_{\text{GPS/dh}}$$

први је корак при добијању комбинованог решења.

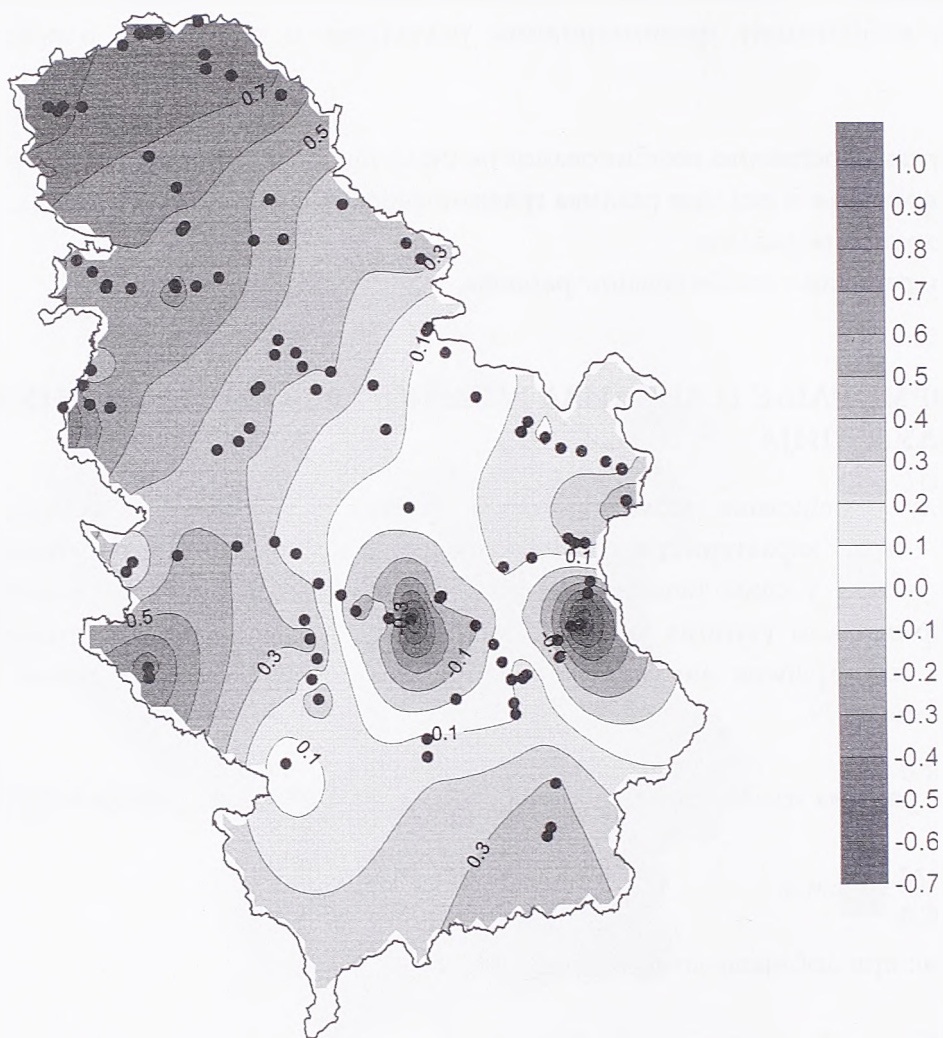
Са слике 6.27 могуће је уочити следеће:

- постоје две тачке у којима су разлике нарочито изражене
- и од истока ка западу постоји позитиван тренд који на северу Војводине достиже вредности од преко 1 m.

Табела 6.22 Основни статистички подаци разлика ΔN

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна девијација
ΔN [m]	109	-0.69	0.87	0.32	0.32

Анализом података коришћених при одређивању вредности ундулација установљено је да значајне разлике које се јављају у пределу са Бутарском границом настају због непостојања гравиметријских података (слика 6.27), а да разлика у централном делу Србије може бити последица грубе грешке при одређивању GPS/dh ундулација.



Слика 6.27 Општи облик површи разлика ΔN (еквидистанца 0.1 m)



Слика 6.28 Просторни распоред тачака ДГП у непосредној близини Бугарске границе (плави симбол – положај репера на којем су установљене значајне разлике)

Тачка у централном делу елиминисана је из даљих прорачуна, а тачка близу Бутарске границе као и све тачке у пограничном подручју биле су предмет разматрања при моделирању разлика.

6.12.2 МОДЕЛИРАЊЕ РАЗЛИКА И КОМБИНОВАНО РЕШЕЊЕ

При моделирању разлика, односно уклапању гравиметријског решења у GPS/dh ундулације, усвојено је да се разлике моделирају само на основу GPS/dh ундулација одређених на фундаменталним реперима, а да се преостале тачке користе за независну контролу.

Сагласно граничним ефектима (пример тачке у непосредној близини Бутарске границе) одређен број тачака при моделирању разлика није коришћен. Усвојени критеријум за елиминацију тачака био је следећи:

- све тачке које се налазе на растојању мањем од 10 km од државне границе неће бити коришћене у моделирању,
- при чему овом критеријуму подлежу само тачке код којих је средњеталасна карактеристика већа од ± 5 cm,
- а посебно се неће користити тачке око којих постоји уочљив недостатак ДГП (без обзира на прва два критеријума).

Наведеним критеријумима из података за уклапање и спољашњу проверу одбачене су 3 ундулације одређене на фундаменталним реперима (остало 30 ундулација за уклапање), 13 ундулација одређених на тачкама РМС близу границе и 4 ундулације одређене у тачкама РМС око којих је уочљив недостатак тачака ДГП (укупно остало 59 тачака за проверу). Просторни распоред тачака одабраних за уклапање и независну проверу приказан је на слици 6.29.

Моделирање и независна провера изведени су на следећи начин.

Коришћењем разлика ундулација одређених на фундаменталним реперима формиран је дигитални модел разлика резолуције 10 km у оба правца. Модел је формиран применом опште аритметичке средине по истом поступку и критеријумима који су коришћени при формирању дигиталних модела терена.

Вредности одступања ΔN^M које следе из модела коришћени су за рачунање резидуала (табела 6.23, слика 6.30):

$$R = N - N_{GPS/dh} - \Delta N^M.$$

Са слике 6.30 лако је уочити да се 90 % вредности преосталих резидуала након уклапања налазе у границама од ± 0.05 cm.

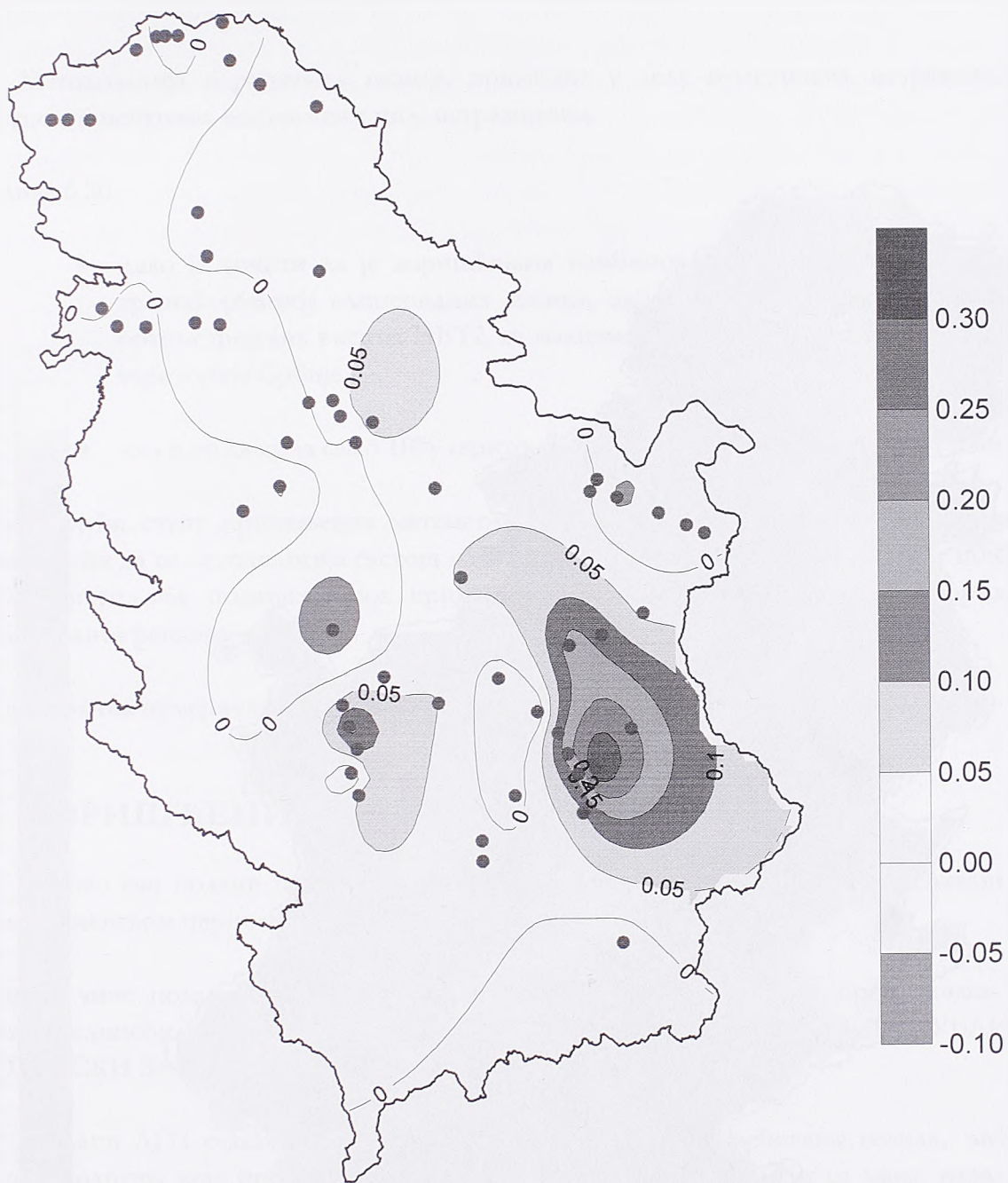


Слика 6.29 Распоред тачака за уклапање (плави симбол) и независну контролу (црвени симбол)

Табела 6.23 Основни статистички подаци резидуала $R = N - N_{GPS\ dh} - \Delta N^{st}$

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна левација
R [m]	60	-0.10	0.32	0.03	0.08

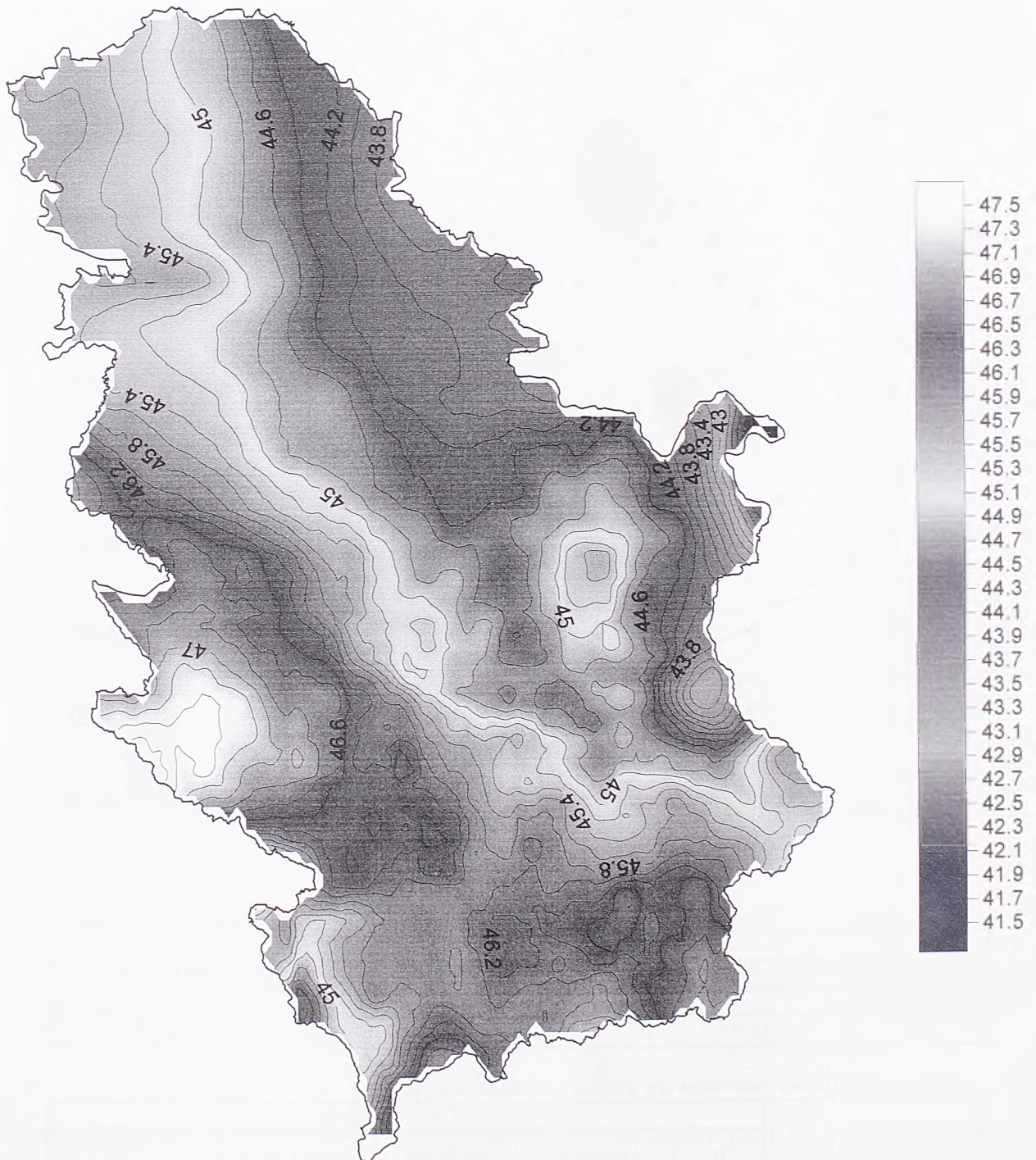
Примењивањем читавог поступка одређивања комбинованог решења за 82864 тачке (у свим тачкама ДГП одређене све карактеристике, разлика геоида и квазигеоида и финално ундулације) добијено је комбиновано решење приказано на слици 6.31, а основни статистички подаци у табели 6.24.



Слика 6.30 Општи облик површи резидуала R (еквидистанца 0.05 cm)

Табела 6.24 Основни статистички подаци - комбиновано решење

Параметар	Статистика				
	n	Минимум	Максимум	Средња вредност	Стандардна девијација
N_k [m]	82864	41.18	47.76	44.98	0.88



Слика 6.31 Опти облик површи комбинованог решења (еквидистанца 0.2 m)

7 ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

Методологија одређивања геоида, приказана у делу нумеричких истраживања, у потпуности испуњава постављени циљ истраживања.

Са слике 6.30

- лако је уочити да је коришћењем комбинованог решења могуће извршити трансформацију елипсоидних висина, одређених применом ГПС, у систем ортометријских висина НВТ2, са максималним одступањем од ± 5 cm за 90% територије Србије,
- као и то да су за само 10% територије одступања на дециметарском нивоу.

Прикључујући скупу примењених математичких метода и све активности истраживања, може се рећи да се методологија састоји од активности који представљају наслове поглавља 6, од прикупљања података, кроз примену remove-restore методе, па до формирања комбинованог решења.

Из приказаних нумеричких истраживања могуће је извести низ закључака.

7.1 КОРИШЋЕНИ ПОДАЦИ

Готово сви подаци прикупљени у циљу нумеричких истраживања одређивани су у дугом временском периоду, током читавог прошлог века.

Изузетак чине подаци о РМС, ортометријским висинама одређеног броја тачака РМС, односно елипсоидним висинама фундаменталних репера мреже НВТ2 (РЕПУБЛИЧКИ ГЕОДЕТСКИ ЗАВОД, 2004)

Подаци ДГП свакако по броју задовољавају потребе одређивања геоида, међутим постоје подручја која нису довољно покривена премером (Предел са мање израженом топографијом значајно су боље покривени ДГП).

Посебан проблем представља квалитет детаљног гравиметријског премера.

Утицај недовољно тачно одређене висине тачака у којима се одређује убрзање теже значајно утиче на финалне вредности ундулација, промена висина тачака за 1 m изазива промену ундулације од приближно 4.2 m (Zhiling, 2000) .

Како су координате тачака детаљног гравиметријског премера одређиване разним начинима (поглавље 6.1.1), па чак и читањем са карата размере 1:25000, може се рећи да квалитет одређених координата није адекватан за потребе одређивања геоида .

Поред наведеног, подаци о убрзању теже не само да су временски застарели већ се у последњих 50 година, у два наврата, у потпуности променила методологија одређивања убрзања. Прву промену спровела је СГУ СФРЈ прикључењем наше мреже мрежи ISGN71, али се ова промена није односила на детаљни премер, а друга промена настала је у последњих 5 година. Наиме, значајним технолошким развојем у области балистичких гравиметара (Hanada, 1996; Robertson, 2003) омогућено је да се референтне гравиметријске мреже формирају на основу тачака на којима је балистичким инструментима одређено убрзање теже.

У поглављу 6.2.1 извршена је трансформација висина тачака ДГП из система висина у употреби (НВТ1) у систем ортометријских и нормалних висина НВТ2.

Циљ трансформације је свакако био да елиминише датумска разлике висина репера НВТ2 и висина тачака ДГП, али и да укаже на проблеме нивелманских мрежа у Србији. Наиме, само је мрежа НВТ2 урађена сагласно свим теоријским поставкама једне савремене нивелманске мреже.

Међутим, њен развој је заустављен одмах након креирања, мрежа није адекватно одржавана и никада није уведена у употребу.

Исто се може рећи и за астрогеодетска одређивања која су веома ретко извођена при чему је број одређивања је безначајан.

За разлику од свих наведених података подаци формиран од стране ВГИ једини задовољавају потребе формирања ДМТ Србије за потребе одређивања геоида.

7.2 ПОДАЦИ У ПРОЦЕСУ ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА

У читавом процесу одређивања ундулација примењен је велики број метода. Као последица примене сваке поједине методе добијани су међурезултати који су донекле диктирали правац даљих истраживања али и одсликавали добре и лоше стране коришћених података као и метода.

Дуготаласну карактеристику аномалија убрзања или аномалијских висина релативно је лако одредити применом глобалног геопотенцијалног модела EGM96 (поглавље 6.4). Међутим, након примене и упоређења са GPS/dh одређеним аномалијским висинама очигледан је тренд у резидуалним аномалијским висинама (слика 6.11).

Разлог постојања тренда свакако лежи у чињеници да примена модела са степеном и редом 360 не може у потпуности одсликати гравитационо поље на територији Србије.

С друге стране у периоду када је модел креиран подаци са територије Србије нису коришћени при одређивању коефицијената модела.

Из поменутих разлога извршено је прилагођавање глобалног модела EGM96 подацима са територије Србије и формиран је модел EGM96T (поглавље 6.5), а тек његовом употребом у значајној мери тренд је елиминисан (слика 6.16). Преостали део тренда може се уочити са слике 6.26.

Краткоталасне карактеристике аномалија убрзања одређиване су применом новоформираног ДМТ за читаву територију Србије резолуције 1” у оба правца.

Његовом применом одређене су краткоталасне карактеристике за два евентуална будућа приступа у истраживању:

- директно одређивање ундулација геоида (редукција резултата убрзања)
- или одређивање аномалијских висина са накнадним преласком на ундулације.

Саме карактеристике одређиване су стандардним поступцима (класична теренска корекција и РМТ), а тек су подаци резидуалних аномалија одредили даљи правац истраживања, при чему се додатно потврдила адекватност поступка формирања EGM96T (поглавље 6.7, табеле 6.16 и 6.17).

- Поред наведеног о резидуалним аномалијама, неопходно је подсетити на неслагања између висина тачака ДГП и вредности њихових висина које следе из ДМТ. У току истраживања један део аномалија “грубо” је елиминисан из даљих прорачуна и предност је дата подацима ДМТ. Међутим увидом у податке који су приказани у наведеним табелама и табели 6.14 може се уочити да је средња вредност резидуалних аномалија убрзања у оба случаја за ред већа од средње вредности аномалија које се добијају само елиминацијом дуготаласне карактеристике.

Ово може указивати на присуство грубих грешака у преосталом скупу аномалија са којима су истраживања настављена али и новоформираном дигиталном моделу не треба сматрати финалним, већ моделом који је креиран само за потребе ових истраживања.

Средњеталасне карактеристике аномалијских висина одређене су применом интегралног модела (колокације), а разлог оваквог избора дат је у поглављу 6.6.

У првом кораку одређене су емпиријске коваријансе, а утицај одступање од услова центрираности код резидуалних аномалија може бити узрок наглим скоковима емпиријских коваријанси (Слика 6.20) при сферним растојањима од приближно 30 km.

Из читавог процеса примене модела, а након дефинисања аналитичке функције коваријанси, добијене су средњеталасне карактеристике, а увидом у добијене вредности може се рећи следеће (слика 6.22): недостатак података суседних држава и неадекватна густина ДГП у граничним подручјима Србије имају за последицу одређивање регионалних

компоненти значајно слабијег квалитета у односу на регионалне компоненте одређене у осталим подручјима.

Другим речима, у областима Србије где су топографске масе нарочито изражене и где нема података (премер суседних држава, планински венци у Србији) или где је ДГП неадекватне густине јављају се нагли екстремуми средњеталасних карактеристика.

Упоређењем ундулација одређених у истраживањима са оним које су одређене применом методе GPS /dh (слика 6.27) може се уочити преостали дуготаласни тренд, али и локална одступања која су једним делом поново последица недостатака података (слика 6.28).

Као други могући разлог локалних одступања може се навести недостатак информација о мрежи НВТ2 у последњих 35 година (неадекватно одржавање), затим локална тектонска померања или евентуалне грешке при одређивањима GPS /dh ундулација.

Коначно, кроз поступак моделирања разлика ундулација, односно формирања комбинованог решења, преостале вредности одступања јасно указују на могући квалитет трансформације елипсоидних висина одређених применом ГПС у ортометријске висине НВТ2 (слика 6.30).

Посебно, за поступак формирања комбинованог решења могу се применити далеко адекватније методе (Kuroshi, 2002; Erker, 2003; Smith, 2001), међутим циљ истраживања је био да што више укаже на постојање и природу разлика које се појављују.

7.3 ПРЕПОРУКЕ ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ ГЕОИДА СРБИЈЕ

Из свега изложеног у прва два дела закључних разматрања може се рећи да је у циљу одређивања геоида центиметарске тачности неопходно:

1. Извршити у потпуности нов гравиметријски премер на територији Србије:

- Формирати референтну гравиметријску мрежу употребом балистичких инструмената;
- Успоставити основну гравиметријску мрежу применом релативних гравиметријских одређивања (употребом релативних гравиметара);
- Извршити гравиметријски премер на читавој територији Србије, на правилно рапорешеним тачкама са просечном резолуцијом од 3 - 5 km.
- При премеру подједнако третирати и равне и планинске пределе Србије, а евентуална даља прогушћења изводити након прелиминарних одређивања ундулација;

2. У што краћем периоду извршити ревитализацију мреже НВТ2:

- Од полигона НВТ2 који су остали након распада бивше Југославије формирати полигоне нове нивелманске мреже Србије;
- Све полигоне ревитализовати (поново успоставити);
- На свим реперима извршити одређивање убрзања теже;
- Извршити прогушћење мреже у циљу коришћења мреже за локалне потребе.

3. У циљу одређивања ундулација применом методе GPS / dh:

- неопходно што већи број тачака РМС повезати са НВТ2, односно тачке РМС третирају као будуће прогушћење мреже НВТ2. Идеалан случај би свакако био да се за све тачке мреже одреде ортометријске висине, али се може рећи да би оптимално било познавати GPS / dh ундулације на сваких 30 km;
- Као и у случају гравиметријског премера даља прогушћавања изводити тек након прелиминарних одређивања ундулација;
- Посебно у ова одређивања укључити и минимално фундаменталне репере НВТ2, а будућа прогушћења НВТ2 радити у складу с потребама прецизног сателитског позиционирања;

4. Обезбедити што већи број астрономских података одређивања компоненти одступања вертикала:

- Као и у случају GPS / dh оптимално једна тачка на 30 km, а
- евантулана прогушћења изводити тек након прелиминарних одређивања ундулација

5. Путем међународне сарадње:

- Обезбедити податке са територија суседних држава;
- Уступити податке са територије Србије при будућим одређивањима глобалних геопотенцијалних модела.

7.4 МЕЂУНАРОДНА САРАДЊА

Поред наведених препорука важно је истаћи и значај међународне сарадње при одређивању геоида, посебно путем активног учешћа у Међународном удружењу за Геодезију.

Комисија 2: Поље Земљине теже (Commission 2. Gravity field), Међународног удружења покрива следеће области:

1. гравиметрија,
2. сателитско опажање поља Земљине теже,
3. моделирање поља Земљине теже,
4. промене поља Земљине теже у времену,
5. одређивање геоида,
6. моделирање и одређивање сателитских орбита.

Основне активности комисије су промоција, подршка и стимулисање међународне сарадње у циљу истраживања поља Земљине теже у простору као и његове промене у времену, посебно за потребе геодезије, навигације, геофизике, геодинамике али и других повезаних научних дисциплина.

Наведене активности спроводе се путем поткомисија:

- Поткомисија 2.1: Гравиметрија и гравиметријске мреже (Gravimetry and Gravity Networks)
- Поткомисија 2.2: Гравитационо поље и одређивање геоида (Spatial and Temporal Gravity Field and Geoid Modeling)
- Поткомисија 2.3: Сателитске мисије у циљу истраживања поља теже (Dedicated Satellite Gravity Mapping Missions)
- Поткомисија 2.4: Одређивање геоида у регионима. (Regional Geoid Determination)

Поткомисије, у свим наведеним областима, формирају посебне истраживачке и радне групе (Study Groups and Working Groups) и покрећу пројекте.

Примера ради:

- Истраживачка група 2.1: Компарисање апсолутних гравиметара (Comparison of Absolute gravimeters)
- Радна група 2.1: Мере, контрола и унапређење квалитета (Quality Measures, Quality Control, and Quality Improvement)
- Пројекат 2.1: Геоид и Земљина тежа Европе (European Gravity and Geoid)

Поред поткомисија, истраживачких и радних група постоје и два посебно посвећена

8 ЛИТЕРАТУРА

Barzaghi, R., B. Betti, and F. Sanso, Integrated Geodesy: A Purely Local Approach, Atti Del 3^o Convegno Annuale Del Gruppo Nazionale Di Geofisica Della Terra Solida, Roma, 1984.

Билибајкић, П., М. Младеновић, С. Мујагић и И. Римац, Тумач за гравиметријску карту СФР – Југославије – Bouguerove Аномалије 1:500000, Савезни геолошки завод, Београд, 1979.

Благојевић, Д., Приватна комуникација, 1998.

Бошковић, С., Скретања вертикала у Србији, Српска академија наука, 1952.

Братуљевић, Н., Р. Мркић, В. Миловановић, С. Делчев, Д. Благојевић, В. Васиљев, Геодетске референтне мреже, Институт за Геодезију, Београд, 1995.

Делчев, С., Приватна комуникација, 2002.

Erker, E., N. Hoggerl, E. Imreck, W. and B. Hofmann Wellenhof, N. Kuhnreiter, The Austrian Geoid – Recent Steps to a New Solution, Austrian Contributions to the XXIII. General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics, June 30 – July 11, 2003, Sapporo, Japan, 2003.

Fhearstone, W. E., J. D. Evans, and J. G. Oliver, A Meissl-modified Vaniček and Kleusberg kernel to reduce the truncation error in gravimetric geoid computations, Journal of Geodesy, 72, p. 154-160, Springer-Verlag, 1998.

Forsberg, R., and C. C. Tscherning, , The Use of Height Data in Gravity Field Approximation by Collocation, Journal of Geophysical Research, VOL. 86, NO. B9, p. 7843-7845, 1981.

Forsberg, R., and C. C. Tscherning, Topographic effect in gravity field modelling for BVP, Internet komunikacija, 1998.

Forsberg, R., Gravity Field Terrain Effect Computation By FFT, Bulletin Géodésique 59, 1985.

Gábor P., Trend Models In The Least-Squares Prediction Of Free-Air Gravity Anomalies, Proceedings of the First Continental Workshop on the Geoid in Europe, p. 224-239, Research Institute of Geodesy, Topography and Cartography, Praha, Czechoslovakia, 1992.

Gysen, H., R. Coleman, On the satellite altimeter crossover problem, Journal of Geodesy, Springer-Verlag, 71, 1997.

Hanada, H., Development Of Aa Absolute Gravimeter With a Rotating Vacuum Pipe And Study Of Gravity Variation, Publ. Natl. Astron. Obs. Japan, Vol. 4, p. 75-134, 1996.

Hein, G., and H. Landau, A Contribution To 3D-Operational Geodesy, Deutsche Geodätische Kommission, München, 1983.

Hofmann-Wellenhof B., & all, Global Positioning System - Theory and Practice, Springer-Verlag, Wien New York, 1994.

Heiskanen, W. A., and H. Moritz., Physical Geodesy, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1967.

Институт за геодезију, Грађевински факултет, Универзитет у Београду, Други Нивелман Високе Тачности Југославије, Београд, 1992.

Knudsen, P., Estimation and modeling of the local empirical covariance function using gravity and satellite altimeter data, Bulletin Géodésique 61, p. 145 - 160, 1987.

Kusche, J., R.Klees, Regularization of gravity field estimation from satellite gravity gradients, Journal of Geodesy, 76, Springer – Verlag, 2002.

Kuroishi, Y., H. Ando, Y.Fukuda, A new hybrid geoid model for Japan, GSIGEO2000, Journal of Geodesy. 76, Springer-Verlag, 2002.

Landau, H., K. Hehl, B. Eissfeller, W. G. Hein, and I. W. Reilly, Operational Geodesy Software Packages, Studiengang Vermessungswesen Universitat Der Bundeswehr Munchen, Munchen, 1988.

Lyszkowitz, A., The Geoid for the Area of Poland, Centrum Badan Kosmicznych PAN, Warszawa, 1993.

Moritz, H., Series Solutions of Molodensky Problem, Deutsche Geodätische Kommission, München, 1971.

Moritz, H., Least-Squares Estimation in Physical Geodesy, Deutsche Geodätische Kommission, München, 1970.

Moritz, H., Advanced Physical Geodesy, Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe, Abacus Press Tundbridge Wells Kent, 1980.

Moritz, H., The Geodetic Reference System 1980, Bulletin Géodésique 58 (“The Geodesist’s Handbook 1984”), p. 388 – 389, 1984.

Moritz, H., The Figure of the Earth, Herbert Wichmann Verlag, GmbH, Karlsruhe, 1990.

Moritz, H., and B. Hofmann-Wellenhof, Geometry, Relativity, Geodesy, Herbert Wichmann Verlag, GmbH, Karlsruhe, 1993.

Muminagić, A., Preliminary Investigation In Establishment Of The Yugoslav First Order Triangulation Network: Orientation, Isostatic Corrections, Astronomic Levelling And The Figure Of The Geoid, Beograd, 1967.

Nahavadachi, H., L. Sjoberg, Precise geoid determinations over Sweden using the Stokes-Helmert method and improved topographic corrections, Journal of Geodesy, 75, Springer – Verlag, 2001.

Nsombo, P., Preliminary Geoid over Zambia, Journal og Geodesy, 72, p. 144-153, Springer-Verlag, 1998.

PAUL, M.K., Recurrence Relations For Integrals Of Associated Legendre Functions, Bulletin Géodésique, 52, p. 177-190, 1978.

О. Одаловић, Одређивање локалног геоида високе резолуције применом модела интегралне геодезије, Магистарски рад, Грађевински факултет, Универзитет у Београду, Београд, 2000.

Petrovic, S., Determination of the potential of homogeneous polyhedral bodies using line integrals, Journal of Geodesy, , 71, p. 44-52, Springer-Verlag , 1996.

Rapp, H.R., Determination of Potential coefficients to degree 52 from 5° Mean Gravity Anomalies, Bulletin Géodésique 51, p. 301 - 323, 1978.

Rapp, H.R., Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height anomaly/geoid undulation difference, Journal of Geodesy, Springer-Verlag , 1997.

Републички геодетски завод, Република Србија, Референтна Мрежа Републике Србије, Елаборат реализације, Свеска А: Технички извештај, Свеска А1: Текст и каталог, Београд, 2003.

Републички геодетски завод, Република Србија, Фундаментални репери у систему WGS84, Елаборат Реализације, Београд, 2004.

Републички геодетски завод, Република Србија, Одређивање тачака државне референтне мреже у систему НВТ2, Свеска 2: Елаборат реализације, Београд, 2004.

Републички геодетски завод, Република Србија, Државна тригонометријска мрежа у систему WGS84, Статус јануар 2004., Свеска 2, Елаборат реализације, Београд , 2004.

Rizos, C., The Role Of The Geoid In High Precision Geodesy And Oceanography, Deutsche Geodätische Kommission, München, 1982.

Robertson, D.S., N.Courtier, D.Winester, Absolute gravimeter helium immersion experiment, Journal of Geodesy, Springer-Verlag, 76, 2003.

Rumell, R., and R. H. Rapp, Undulation And Anomaly Estimation Using Geos-3 Altimeter Data Without Precise Satellite Orbits, Bulletin Géodésique 51, 1977.

Schwarz, K. P., and J. Krynski, Improvement Of The Geoid In Local Areas By Satellite Gradiometry, Bulletin Géodésique 5 1977.

Schwarz, K. P., and G. LaChapelle, Local Characteristics Of The Gravity Anomaly Covariance Function, Bulletin Géodésique 54, 1980.

Schwarz, K. P., Local Gravity Field Aproximation, Division of Surveying Engineering The University of Calgary, Calgary, 1984.

Schwarz, K. P., and M.G. Sideris, Precise Geoid Heights And Their Use In GPS Interferometry, Geodetic Survey of Canada, Calgary, 1985.

Sjoberg L., A Recurrence Relation For The β_n - Function, Bulletin Géodésique, 54, p. 69-72, 1980.

Smith, D. A., D. R. Roman, GEOID99 and G99SSS: 1-arc minute geoid models for the United States, Journal of Geodesy, Springer-Verlag, 2001.

Старчевић, М., Приватна комуникација, 2002.

Torge, W., Gravimetry, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1989.

Tscherning, C. C., and R. H. Rapp, Closed Covariance Expressions For Gravity Anomalies, Geoid Undulations, And Deflections Of The Vertical Implied By Anomaly Degree Variance Models, Reports of the Department of Geodetic Science, Report No. 208, The Ohio State University, Ohio, 1974.

Tscherning, C. C., and R. Forsberg, Harmonics continuation and gridding effects on geoid height prediction, Bulletin Géodésique 54, p. 41-53, 1992.

Tscherning, C. C., Geoid determination by GRAVSOFIT, Inernet komunikacija, 2002.

Vaniček, P., Geodesy, the Concepts, North-Holland Publishing Company - Amsterdam - New York - Oxford, 1982.

Васовић, Ј., Примена брзих Фуријеових трансформација за одређивање локалног геоида високе резолуције, Грађевински факултет, Универзитет у Београду, Београд, 2000.

Weber, G., and H. Zomorrodian, Regional Geopotential Model Improvement For The Iranian Geoid Determination, Bulletin Géodésique, 62, p. 125-141, 1988.

Ye Cai Li, Optimized Spectral Geoid Determination, The University Of Calgary, Calgary, 1993.

Zhiling, F., Refinement of Geodetic Boundary Value Problem Solutions, UCGE Reports, Number 20139, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, Calgary, 2000



БИОГРАФИЈА

- Име:** Олег Р. Одаловић
- Датум и место рођења:** 22.07.1967., Призрен.
- Образовање:** Основна школа 1974-1982., Смедерево, Лазаревац.
Средња школа 1982-1986, Београд.
Војни рок 1987., Словенија.
Дипломирани инжењер геодезије 1994., Одсек за геодезију, Грађевински факултет, Универзитет у Београду.
Магистар техничких наука - 2000., Одсек за геодезију, Грађевински факултет, Универзитет у Београду.
- Академско звање:** Истраживач, 1994., Грађевински факултет, Универзитет у Београду.
Асистент приправник, 1998., Грађевински факултет, Универзитет у Београду
Асистент 2001., Грађевински факултет, Универзитет у Београду
- Професионално искуство**
1996. Геодетске референтне мреже СРЈ - Студија, сарадник на изради програма, нумеричке обраде података и визуелизације, Институт за геодезију, Грађевинског факултета Универзитета у Београду.
- 1997-2000. Мултидисциплинарно изучавање савремених померања Земљине коре на подручју Југославије – Пројекат савезног министарства за развој, науку и животну средину, Основна стратегијска истраживања.
1998. Асистент приправник, Грађевински факултет Универзитета у Београду.
2001. Асистент, Грађевински факултет Универзитета у Београду.
- 2000-2001. Секретар катедре за Геодетске дисциплине, Грађевински факултет, Београд.
2001. Помоћник директора Републичког геодетског завода, Сектор за основне геодетске радове.
2002. Члан Метролошке лабораторије, Грађевински факултет, Београд.
2002. Члан Оснивачког комитета Европске академије наука за урбана окружења-Пројекат EUPOS (EUropean POSition determination System).
- 2002-2004. Геодетски референтни оквир Београда - Основна истраживања, Министарство за науку, технологију и развој.
- 2002-2005. Дистрибуција ГПС података за потребе позиционирања у реалном времену - Технолошки развој, истраживачко развојни пројекат, Министарство за науку, технологију и развој.



ОЗАР МАКРОБНР У БЕС

РД 18695



300136510

COBISS e