

# Theoretical and Experimental Research of Elasto-Plastic Behaviour of Engineering Structures

*edited by*

**Tomislav S. Igić & Dragoslav Stojić**

*University of Nis*

*Faculty of Civil Engineering and Architecture*

*Nis, Serbia and Montenegro*

**ISBN 86-80295-71-X**

---

*Odlukom Nastavno – naučnog veća  
Gradjevinsko – arhitektonskog fakulteta Univerziteta  
u Nišu broj 8/33 od 1. februara 2006. godine  
odobreno je štampanje monografije pod nazivom:  
“Teorijsko – eksperimentalna istraživanja elasto – plastičnog  
ponašanja inženjerskih konstrukcija“.*

**Published by**

**University of Nis  
Civil Engineering and Architectural Faculty of Nis**

**All Rights Reserved**

© 2006 University of Nis

**Civil Engineering and Architectural Faculty of Nis.**

**No part of the material protected by this copyright notice  
may be reproduced or utilized in any form or by any means,  
without written permission from the copyright owner.**

**Printed by „GIP Timok“ in Knjazevac, Serbia.**

# SLOJEVITI KONAČNI ELEMENT ZASNOVAN NA OPŠTOJ LAMINATNOJ TEORIJI PLOČA

Đorđe Vuksanović, Marina Četković

Civil Engineering Faculty,  
University of Belgrade

**Abstract:** A LAYERWISE FINITE ELEMENT BASED ON A GENERALIZED LAMINATED PLATE THEORY *In this paper a plate bending element based on Generalized layerwise plate theory (GLPT) is formulated. The finite element accounts for transverse shear deformation and layer-wise description of in-plane displacement components and a constant transverse displacement through the thickness. Mathematical model allows independent in-plane and through the thickness interpolations, thus requiring less numerical operations than conventional 3D elasticity model. Basic element equations are derived using displacement-based finite element formulation. Starting from assumed displacement field, shear stresses are computed by satisfying constitutive equations of laminae, traction free boundary conditions and 3D equilibrium equations of laminate. Deformation and stresses are analyzed in simply supported statically loaded plate. The obtained results had shown excellent agreement with closed form solution of GLPT.*

**Keywords:** laminated plates, finite element, static load, numerical assesment

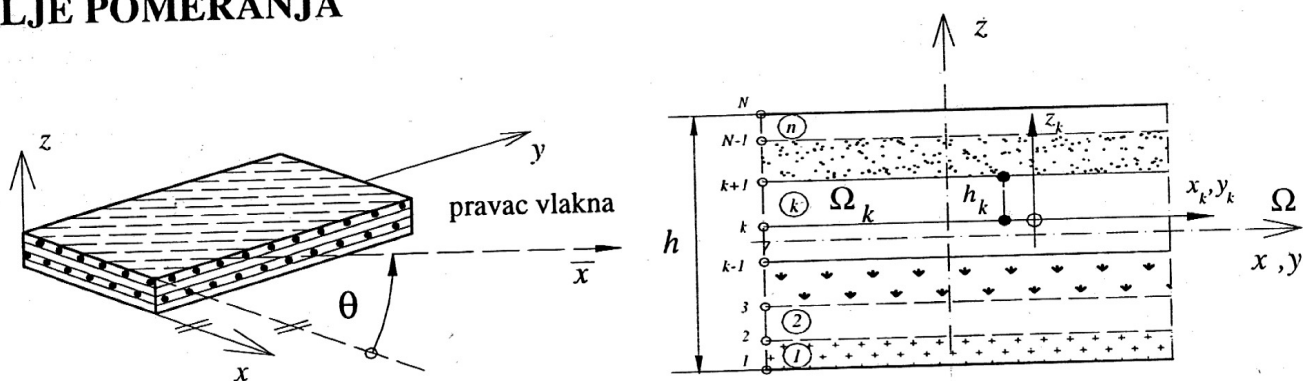
## 1. UVOD

Optimalno projektovanje i analiza konstruktivnih elemenata sačinjenih od kompozitnih materijala, kao što su oni u automobilskoj, avio industriji, brodogradnji, a od nedavno i svemirskoj industriji, zahteva detaljno poznavanje anizotropnog ponašanja materijala, teorije konstrukcija i teorije loma. Vlakanaste lamelirane kompozite, koji će biti predmet daljeg razmatranja, karakteriše nagla promena materijalnih karakteristika ne samo u ravni već i po debljini ploče, kao i veoma izražena smičuća deformacija. Takođe, u uslovima proizvodnje i eksploatacije kompozitni materijali su izloženi različitim oblicima oštećenja do kojih dolazi na lokalnom nivou, odnosno na nivou sloja. Kako su 2D modeli ploča u stanju da pruže samo odgovor na globalno ponašanje kompozitnih materijala, formulisana je nova grupa teorija zasnovana na 3D kinematici deformacije poprečnog preseka. Reč je o slojevitim teorijama ploča u koje spada i opšta laminatna teorija ploča (GLPT). Naime, slojevite teorije, ploču posmatraju kao višeslojnu u pravom smislu reči, time što polje pomeranja definišu za svaki od slojeva po debljini ploče. Na ovaj način dobija se mnogo realnija slika krivljenja i smicanja po

debljini ploče. Istovremeno, kako se polje pomeranja pretpostavlja u obliku koji omogućava nezavisnu interpolaciju u ravni i po debljini ploče, slojeviti model ploče zahteva manji nimerički obim posla u odnosu na uobičajeni 3D model elastične teorije.

U ovom radu biće formulisan konačni element zasnovan na opštoj laminatnoj teoriji ploča. Reč je o izoparametarskom elementu od koga se zahteva da zadovolji samo  $C^0$  kontinuitet pomeranja na granicama elemenata. Interpolacija polja pomeranja po debljini ploče biće ostvarena linearnim 1D Lagrange-ovim konačnim elementom sa dva čvora, dok će se za interpolaciju u ravni primeniti kvadratni 2D Lagrange-ov konačni element sa devet čvorova. Element je namenjen statičkoj analizi debelih laminatnih ploča sa vlaknima proizvoljne orijentacije (*general laminates*).

## 2. POLJE POMERANJA



Slika 1. Višeslojna kompozitna ploča

Analizirana je laminatna ploča sastavljena od  $n$  ortotropnih slojeva. Broj  $k$  označava redni broj sloja, počevši od donje površine ploče. Globalni koordinatni sistem  $(x, y, z)$  je usvojen u srednjoj ravni, dok je lokalni koordinatni sistem  $(x_k, y_k, z_k)$  usvojen na donjoj površini svakog slojeva. Debljina ploče je  $h$ , dok je  $h_k$  debljina sloja  $k$ .

Komponente pomeranja  $(u_1, u_2, u_3)$  u tački  $(x, y, z)$  pretpostavljamo u obliku:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + U(x, y, z) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + V(x, y, z) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

gde su  $(u, v, w)$  komponente pomeranja tačke  $(x, y, 0)$  u srednjoj ravni ploče, a  $U, V$  su funkcije definisane kao:

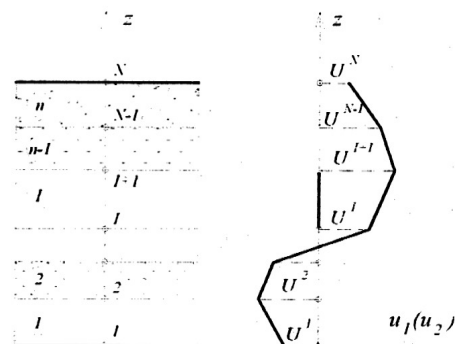


$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= \sum_{I=1}^N U^I(x, y) \cdot \Phi^I(z) \\
 V(x, y, z) &= \sum_{I=1}^N V^I(x, y) \cdot \Phi^I(z)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

gde su  $U^I, V^I$  komponente pomeranja u I-toj ravni ploče, a  $\Phi^I(z)$  je 1D Lagrange-ova interpolaciona funkcija (linearna, kvadratna ili kubna). Na dalje ćemo usvojiti linearnu interpolaciju polja pomeranja po debljini ploče, pa će odgovarajuće interoplacione funkcije biti oblika:

$$\begin{aligned}
 \Phi^1(z) &= \Psi_1^{(1)}(z) \quad z_1 \leq z \leq z_2 \\
 \Phi^I(z) &= \begin{cases} \Psi_2^{(I-1)}(z) & z_{I-1} \leq z \leq z_I \\ \Psi_I^{(I)}(z) & z_I \leq z \leq z_{I+1} \end{cases} \quad (I = 2, 3, \dots, N-1) \\
 \Phi^N(z) &= \Psi_I^{(N)}(z) \quad z_{N-1} \leq z \leq z_N
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

gde je:  $\Psi_1^{(k)} = 1 - \frac{\bar{z}}{h_k}$   $\Psi_2^{(k)} = \frac{\bar{z}}{h_k}$   $0 \leq \bar{z} \leq h_k$



Slika 2. Polje pomeranja po debljini ploče

### 3. KONSTITUTIVNE JEDNAČINE LAMINATA

Neka su rezultante napona definisane sledećim izrazima:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz & \begin{Bmatrix} N^I_{xx} \\ N^I_{yy} \\ N^I_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \Phi^I dz \\
 \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz & \begin{Bmatrix} Q^I_x \\ Q^I_y \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \frac{d\Phi^I}{dz} dz
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Konstitutivne jednačine za ceo laminat biće oblika:

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{N}^0\} &= [\mathbf{A}] \{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} + \sum_{I=1}^N [\mathbf{B}^I] \{\boldsymbol{\varepsilon}^I\} \\
 \{\mathbf{N}^I\} &= [\mathbf{B}^I] \{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} + \sum_{J=1}^N [\mathbf{D}^{JI}] \{\boldsymbol{\varepsilon}^J\}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

gde su:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{N}^0\} &= \{N_{xx} \quad N_{yy} \quad N_{xy} \quad Q_x \quad Q_y\}^T && \text{vektor sila u srednjoj ravni ploče} \\ \{\mathbf{N}^I\} &= \{N_{xx}^I \quad N_{yy}^I \quad N_{xy}^I \quad Q_x^I \quad Q_y^I\}^T && \text{vektor sila u I-toj ravni ploče} \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T && \text{vektor deformacija u srednjoj ravni ploče} \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}^I\} &= \left\{ \frac{\partial U^I}{\partial x} \quad \frac{\partial V^I}{\partial y} \quad \frac{\partial U^I}{\partial y} + \frac{\partial V^I}{\partial x} \quad U^I \quad V^I \right\}^T && \text{vektor deformacija u I-toj ravni ploče} \end{aligned}$$

Konstitutivne matrice glase:

$$[\mathbf{A}] = [A_{pq}] = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_{pq}^{(k)}] dz, \quad p, q = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$[\mathbf{B}] = [B_{pq}^I] = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_{pq}^{(k)}] \Phi^I dz, \quad p, q = 1, 2, 3$$

$$[\mathbf{B}] = [\bar{B}_{pq}^I] = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_{pq}^{(k)}] \frac{d\Phi^I}{dz} dz, \quad p, q = 4, 5$$

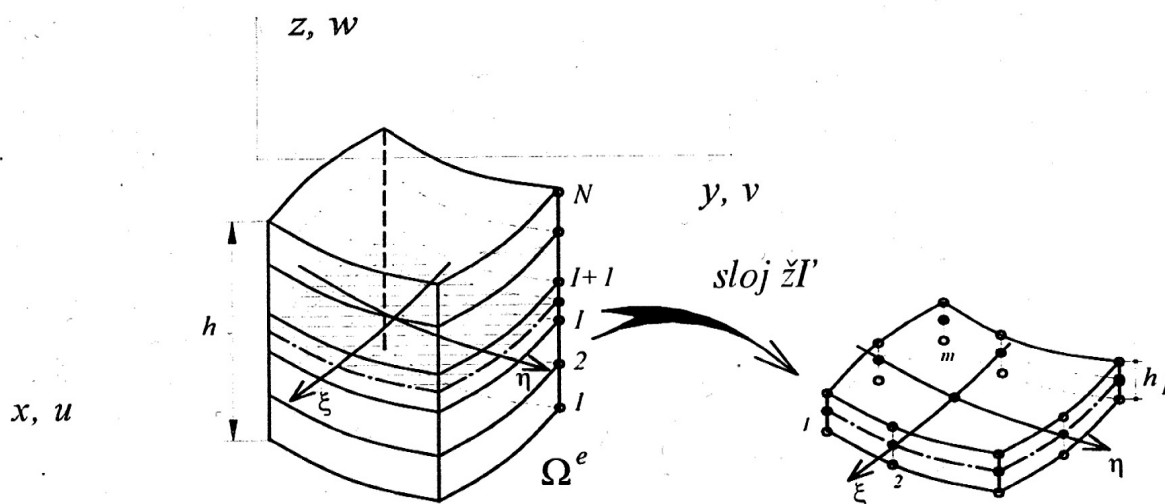
$$[\mathbf{D}] = [D_{pq}^{JI}] = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_{pq}^{(k)}] \Phi^J \Phi^I dz, \quad p, q = 1, 2, 3$$

$$[\mathbf{D}] = [\bar{D}_{pq}^{JI}] = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_{pq}^{(k)}] \frac{d\Phi^J}{dz} \frac{d\Phi^I}{dz} dz, \quad p, q = 4, 5$$

Uslov ravnoteže dobijen iz principa virtualnih pomeranja iskazan je sledećom jednačinom:

$$0 = \int_{\Omega} \left( \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}^0\}^T \{\mathbf{N}^0\} + \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}^I\}^T \{\mathbf{N}^I\} - q \delta w \right) dA \quad (6)$$

## 4. MODEL KONAČNOG ELEMENTA

Slika 3. Konačni element ploče sa  $m$  čvorova i  $n$  slojeva

Konačni element ploče sastoji se iz srednje ravni ploče i ravni u čvorovima  $I = 1, N$  po debljini ploče. Za osnovne nepoznate u čvorovima usvojene su komponente pomeranja  $(u, v, w)$  u srednjoj ravni i komponente pomeranja  $(U^I, V^I)$  u  $I$ -toj ravni ploče. Dakle, od osnovnih nepoznatih se zahteva da ispune samo  $C^0$  kontinuitet na granicama susednih elementa.

## 4.1. Polje pomeranja

Polje generalisanih pomeranja u funkciji osnovnih nepoznatih u čvorovima konačnog elementa  $\Omega^e$  sa  $m$  čvorova i  $n$  slojeva prikazanog na slici 3, može se prikazati na sledeći način:

— za srednju ravan ploče:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m u_j \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m v_j \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m w_j \Psi_j \end{Bmatrix}^e = \sum_{j=1}^m [\Psi_j]^e \{d_j\}^e \quad (7)$$

— za I-tu ravan po debljini ploče:

$$\begin{Bmatrix} U^I \\ V^I \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m U_j^I \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m V_j^I \Psi_j \end{Bmatrix}^e = \sum_{j=1}^m [\bar{\Psi}_j]^e \{\mathbf{d}_j^I\}^e \quad (8)$$

gde su:

$\{\mathbf{d}_j\}^e = \{u_j^e \quad v_j^e \quad w_j^e\}^T$  vektor pomeranja koji odgovara čvoru  $j$  elementa  $\Omega^e$  u srednjoj ravni ploče

$\{\mathbf{d}_j^I\}^e = \{U_j^I \quad V_j^I\}^T$  vektor pomeranja koji odgovara čvoru  $j$  elementa  $\Omega^e$  u I-toj ravni ploče

$\Psi_j^e$  interpolacione funkcije u čvoru  $j$ , elementa  $\Omega^e$

$$[\Psi_j]^e = \begin{bmatrix} \Psi_j^e(x_j^e, y_j^e) & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_j^e(x_j^e, y_j^e) & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_j^e(x_j^e, y_j^e) \end{bmatrix}, \quad [\bar{\Psi}_j]^e = \begin{bmatrix} \Psi_j^e(x_j^e, y_j^e) & 0 \\ 0 & \Psi_j^e(x_j^e, y_j^e) \end{bmatrix}$$

## 4.2. Polje deformacija

Za pretpostavljene linearne veze deformacija i pomeranja imaćemo:

— za srednju ravan ploče:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_b \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_{bj}] \\ [\mathbf{H}_{sj}] \end{bmatrix} \{\mathbf{d}_j\}^e = \sum_{j=1}^m [\mathbf{H}_j] \{\mathbf{d}_j\}^e \quad (9)$$

— za I-tu ravan po debljini ploče:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^I\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_b^I \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s^I \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{H}}_{bj}] \\ [\bar{\mathbf{H}}_{sj}] \end{bmatrix} \{\mathbf{d}_j^I\}^e \quad (10)$$

gde su:

$$[\mathbf{H}_{bj}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, [\bar{\mathbf{H}}_{bj}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} \end{bmatrix}, [\mathbf{H}_{sj}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} \end{bmatrix}, [\bar{\mathbf{H}}_{sj}] = \begin{bmatrix} \Psi_j^e & 0 \\ 0 & \Psi_j^e \end{bmatrix}$$

### 4.3. Model konačnog elementa

Ako pretpostavimo da su  $\{\delta \mathbf{d}\} \neq 0$ ,  $\{\delta \mathbf{d}^I\} \neq 0$ , iz jednačine (6) možemo dobiti model konačnog elementa zasnovan na opštoj laminatnoj teoriji u sledećem obliku:

$$[\mathbf{K}]^e \{\Delta\}^e = \{\mathbf{f}\}^e \quad (11)$$

gde su:

$$[\mathbf{K}]^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} [\mathbf{H}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{H}] & \sum_{I=1}^N [\mathbf{H}]^T [\mathbf{B}^I] [\bar{\mathbf{H}}] \\ \sum_{I=1}^N [\bar{\mathbf{H}}]^T [\mathbf{B}^I] [\mathbf{H}] & \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N [\bar{\mathbf{H}}]^T [\mathbf{D}^{JI}] [\bar{\mathbf{H}}] \end{bmatrix} d\Omega^e \quad \text{matrica krutosti elementa } \Omega^e$$

$$\{\mathbf{f}\}^e = \int_{\Omega^e} [\Psi]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \end{Bmatrix} d\Omega^e \quad \text{vektor čvornih sila elementa } \Omega^e$$

$$\{\Delta\}^e = \left\{ \begin{Bmatrix} \{\mathbf{d}\} \\ \sum_{I=1}^N \mathbf{d}^I \end{Bmatrix} \right\}^e \quad \text{vektor pomeranja čvornih tačaka elementa } \Omega^e$$

### 4.4. Polje napona konačnog elementa

Polje napona u ravni  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})$  za sloj  $k$  dobijamo iz konstitutivnih jednačina sloja. S obzirom da su globalne interpolacione funkcije  $\Phi^I$  za sloj  $k$  definisane preko lokalni



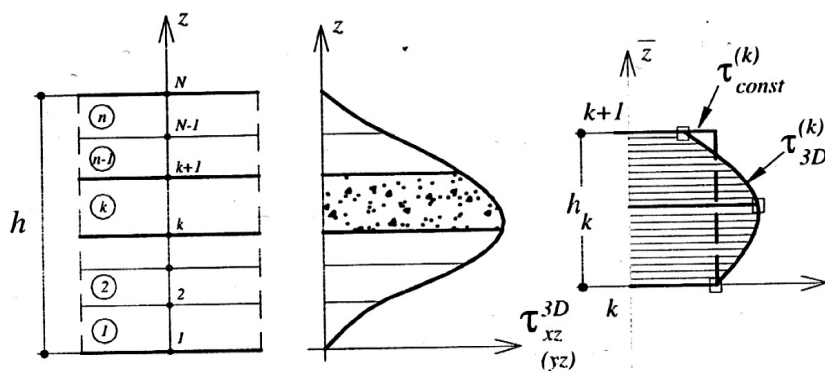
interpolacionih funkcija  $\Psi_1^{(k)}$  i  $\Psi_2^{(k)}$ , to možemo govoriti o naponima u ravni za gornju i donju tačku sloja  $k$ :

$$\begin{aligned} \{\sigma_b\}_D^{(k)e} &= [\mathbf{Q}_b]^{(k)} \sum_{j=1}^m [\mathbf{H}_{b_j}] \{\mathbf{d}_j\}^e + [\mathbf{Q}_b]^{(k)} \sum_{j=1}^m [\overline{\mathbf{H}}_{b_j}] \{\mathbf{d}_j^I\}^e \\ \{\sigma_b\}_I^{(k)e} &= [\mathbf{Q}_b]^{(k)} \sum_{j=1}^m [\mathbf{H}_{b_j}] \{\mathbf{d}_j\}^e + [\mathbf{Q}_b]^{(k)} \sum_{j=1}^m [\overline{\mathbf{H}}_{b_j}] \{\mathbf{d}_j^{I+I}\}^e \end{aligned} \quad (12)$$

Kada je reč o smičućim naponima ( $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ ), sračunatim iz konstitutivnih jednačina, oni će predstavljati prosečne smičuće napone za sloj  $k$ :

$$\{\sigma_s\}_{const}^{(k)e} = [\mathbf{Q}_s]^{(k)} \sum_{j=1}^m [\mathbf{H}_{s_j}] \{\mathbf{d}_j\}^e + [\mathbf{Q}_s]^{(k)} \sum_{j=1}^m [\overline{\mathbf{H}}_{s_j}] \left( \{\mathbf{d}_j^{I+I}\}^e - \{\mathbf{d}_j^I\}^e \right) / h_k \quad (13)$$

Gore prikazani naponi (13) ne zadovoljavaju granične uslove na gornjoj i donjoj površini ploče, niti uslove ravnoteže međulaminarnih napona. Do tačnih vrednosti smičućih napona, koji će zadovoljiti pomenute uslove dolazimo pretpostavljajući zakon promene smičućih napona ( $\tau_{xz}^{(k)}, \tau_{yz}^{(k)}$ ) u svakom od slojeva po debljini ploče. Ako usvojimo da se smičući naponi unutar sloja menjaju po kvadratnoj paraboli, za  $n$  slojeva imaćemo  $3n$  nepoznatih koeficijenata, do kojih dolazimo iz sledećih  $3n$  jednačina:



Slika 5. Smičući naponi koji zadovoljavaju 3D uslove ravnoteže

(1) Dve jednačine dobijamo iz uslova da smičući naponi postanu jednaki nula na donjoj gornjoj površini ploče:

$$\tau^{(1)}(\bar{z} = 0) = \tau^{(n)}(\bar{z} = h_n) \quad (14)$$

(2) Zadovoljenjem uslova kontinuiteta međulaminarnih napona dobijamo još  $n-1$  jednačinu:

$$\tau^{(k-1)}(\bar{z} = h_{k-1}) = \tau^{(k)}(\bar{z} = 0), \quad (14)_2$$

(3) Pretpostavljajući da su prosečni naponi unutar sloja jednaki smičućim naponima sračunati iz konstitutivnih jednačina dobijamo  $n$  jednačina:

$$\frac{1}{h_k} \int_0^{h_k} \tau^{(k)}(\bar{z}) d\bar{z} = \tau_{const.}^{(k)}, \quad (14)_3$$

(4) Sračunavajući skok na granici susednih slojeva, uz zadovoljenje 3D uslova ravnoteže dobijamo  $n-1$  jednačinu:

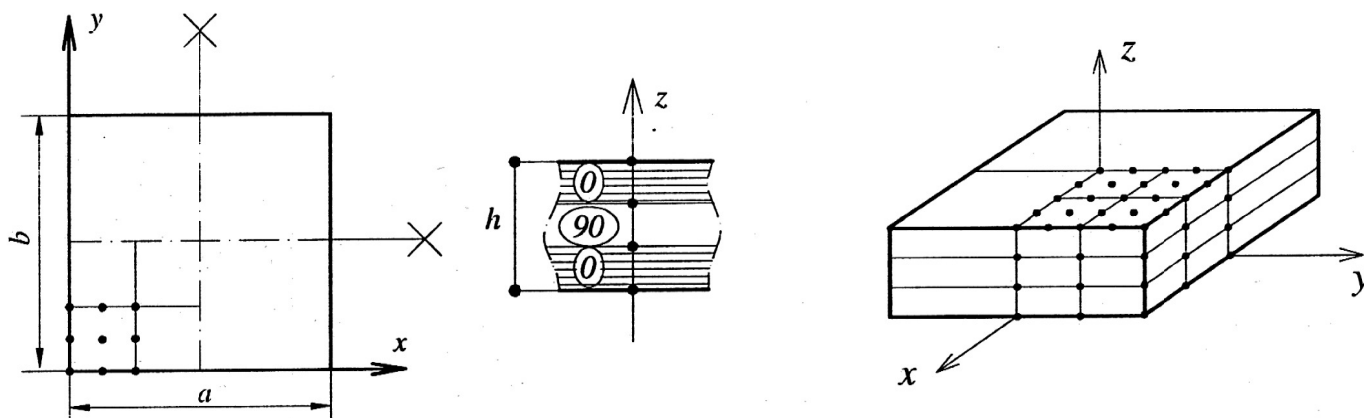
$$\frac{\partial \tau^{(k-1)}(\bar{z} = h_{k-1})}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \tau^{(k)}(\bar{z} = 0)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \tau_{3D}^{(k-1)}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{3D}^{(k)}}{\partial z}. \quad (14)_4$$

## 5. NUMERIČKI PRIMER

U nastavku će biti prikazani rezultati analize kvadratne ( $a/b=1$ ) troslojne laminatne ploče, šem laminacije  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ , opterećene jednako podeljenim opterećenjem, čiji su slojevi sačinjeni od materijala sledećih karakteristika:

$$E_1 / E_2 = 25, \quad G_{12} / E_2 = G_{13} / E_2 = 0.5, \quad G_{23} / E_2 = 0.2, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

Interpolacija polja pomeranja u ravni ploče ostvarena je linearnim 2D Lagrange-ovim konačnim elementom sa devet čvorova. Posmatrana je  $1/4$  ploče sa mrežama konačnih elemenata u ravni:  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  i  $4 \times 4$  i odnosom  $a/h=2$  (kraće strane prema debljini ploče).



MKE\_9

Slika 4. Mreža konačnih elemenata slobodno oslonjene troslojne laminatne ploče

Tabela 1. Naponi u ravni ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ ) za konačni element i analitičko rešenje

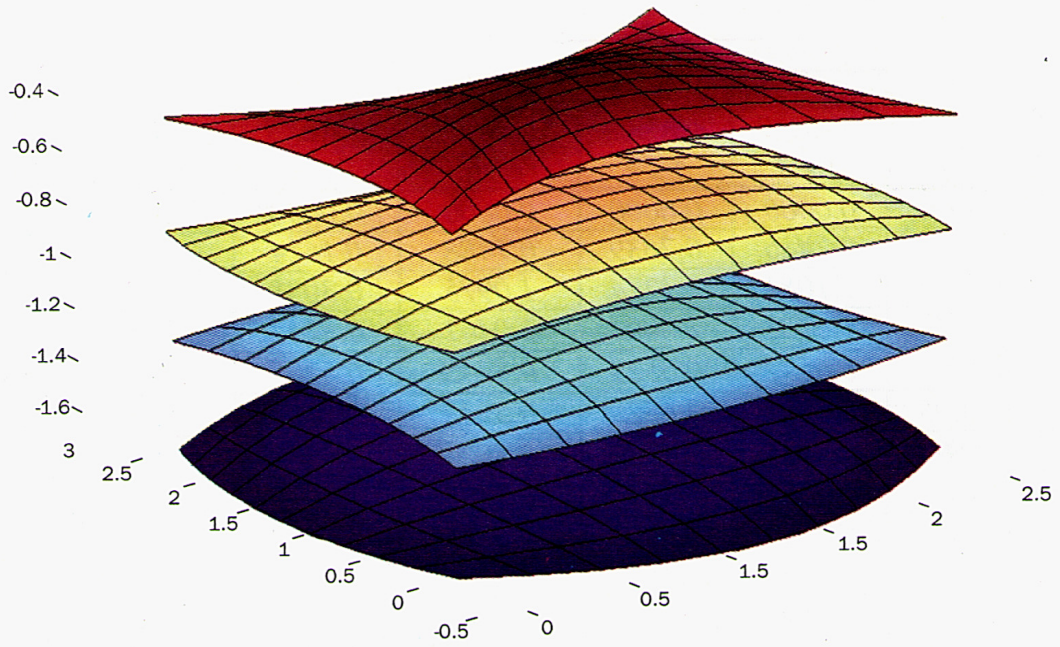
		$\sigma_{xx}$			
a/h	tačka	MKE_9 2 x 2	MKE_9 3 x 3	MKE_9 4 x 4	Analitičko rešenje
2	1 <sup>I</sup>	-4.9800	-4.9512	-4.9427	-4.9054
	2 <sup>II</sup>	3.44876	3.4271	3.4210	3.3964
	2 <sup>I</sup>	0.09974	0.09912	0.09894	0.09825
	3 <sup>II</sup>	-0.09974	-0.09912	-0.09894	-0.09825
	3 <sup>I</sup>	-3.44876	-3.4271	-3.4210	-3.3964
	4 <sup>II</sup>	4.9800	4.9512	4.9427	4.9054
		$\sigma_{yy}$			
2	1 <sup>I</sup>	-0.6549	-0.6517	-0.6511	-0.6475
	2 <sup>II</sup>	-0.1243	-0.12356	-0.1233	-0.1223
	2 <sup>I</sup>	-3.9452	-3.9207	-3.9137	-3.8829
	3 <sup>II</sup>	3.9452	3.9207	3.9137	3.8829
	3 <sup>I</sup>	0.1243	0.1236	0.1233	0.1223
	4 <sup>II</sup>	0.6549	0.6517	0.6511	0.6475
		$\tau_{xy}$			
2	1 <sup>I</sup>	0.5290	0.537674	0.5405	0.5280
	2 <sup>II</sup>	0	-0.002236	-0.003149	-0.002052
	2 <sup>I</sup>	0	-0.002236	-0.003149	-0.002052
	3 <sup>II</sup>	0	0.002236	0.003149	0.002052
	3 <sup>I</sup>	0	0.002236	0.003149	0.0020516
	4 <sup>II</sup>	-0.5290	-0.537674	-0.5405	-0.5280

Tabela 2. Smičući naponi ( $\tau_{xz}^{3D}, \tau_{yz}^{3D}$ ) za konačni element i analitičko rešenje

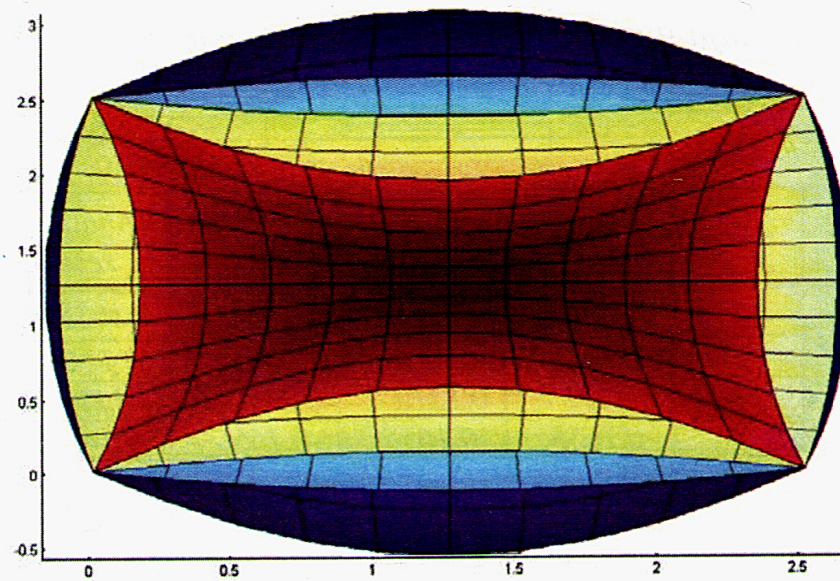
a/h	sloj	tačka	$\tau_{xz}^{3D}$				$\tau_{yz}^{3D}$			
			MKE_9 2 x 2	MKE_9 3 x 3	MKE_9 4 x 4	Analitičko rešenje	MKE_9 2 x 2	MKE_9 3 x 3	MKE_9 4 x 4	Analitičko rešenje
2	1	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
		2	0.7192	0.7486	0.7639	0.7488	0.1624	0.1773	0.1850	0.1870
		3	1.0706	1.1081	1.1274	1.0975	0.3038	0.3236	0.3336	0.3266
		4	1.0540	1.0785	1.0904	1.0462	0.4242	0.4389	0.4458	0.4187
		5	0.6695	0.6597	0.6529	0.5948	0.5235	0.5232	0.5218	0.4633
	2	1	0.6695	0.6597	0.6529	0.5948	0.5235	0.5232	0.5218	0.4633
		2	0.5699	0.5835	0.5902	0.5826	0.9618	1.0021	1.0215	0.9865
		3	0.5367	0.5581	0.5693	0.5785	1.1079	1.1618	1.1881	1.1609
		4	0.5699	0.5835	0.5902	0.5826	0.9618	1.0021	1.0215	0.9865
		5	0.6695	0.6597	0.6529	0.5948	0.5235	0.5232	0.5218	0.4633
	3	1	0.6695	0.6597	0.6529	0.5948	0.5235	0.5232	0.5218	0.4633
		2	1.0540	1.0785	1.0904	1.0462	0.4242	0.4389	0.4458	0.4187
		3	1.0706	1.1081	1.1274	1.0975	0.3038	0.3236	0.3336	0.3266
		4	0.7192	0.7486	0.7639	0.7488	0.1624	0.1773	0.1850	0.1870
		5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 3. Pomeranja u ravni (u,v) za konačni element i analitičko rešenje

a/h	tačka	u			
		MKE_4 4 x 4	MKE_4 6 x 6	MKE_4 8 x 8	Analitičko rešenje
2	1	0.1655	0.1655	0.1655	0.1655
	2	-0.1211	-0.1210	-0.1210	-0.1210
	3	0.1211	0.1210	0.1210	0.1210
	4	-0.1655	-0.1655	-0.1655	-0.1655
		v			
2	1	0.5699	0.5697	0.5697	0.5697
	2	0.1361	0.1361	0.1361	0.1361
	3	-0.1361	-0.1361	-0.1361	-0.1361
	4	-0.5699	-0.5697	-0.5697	-0.5697

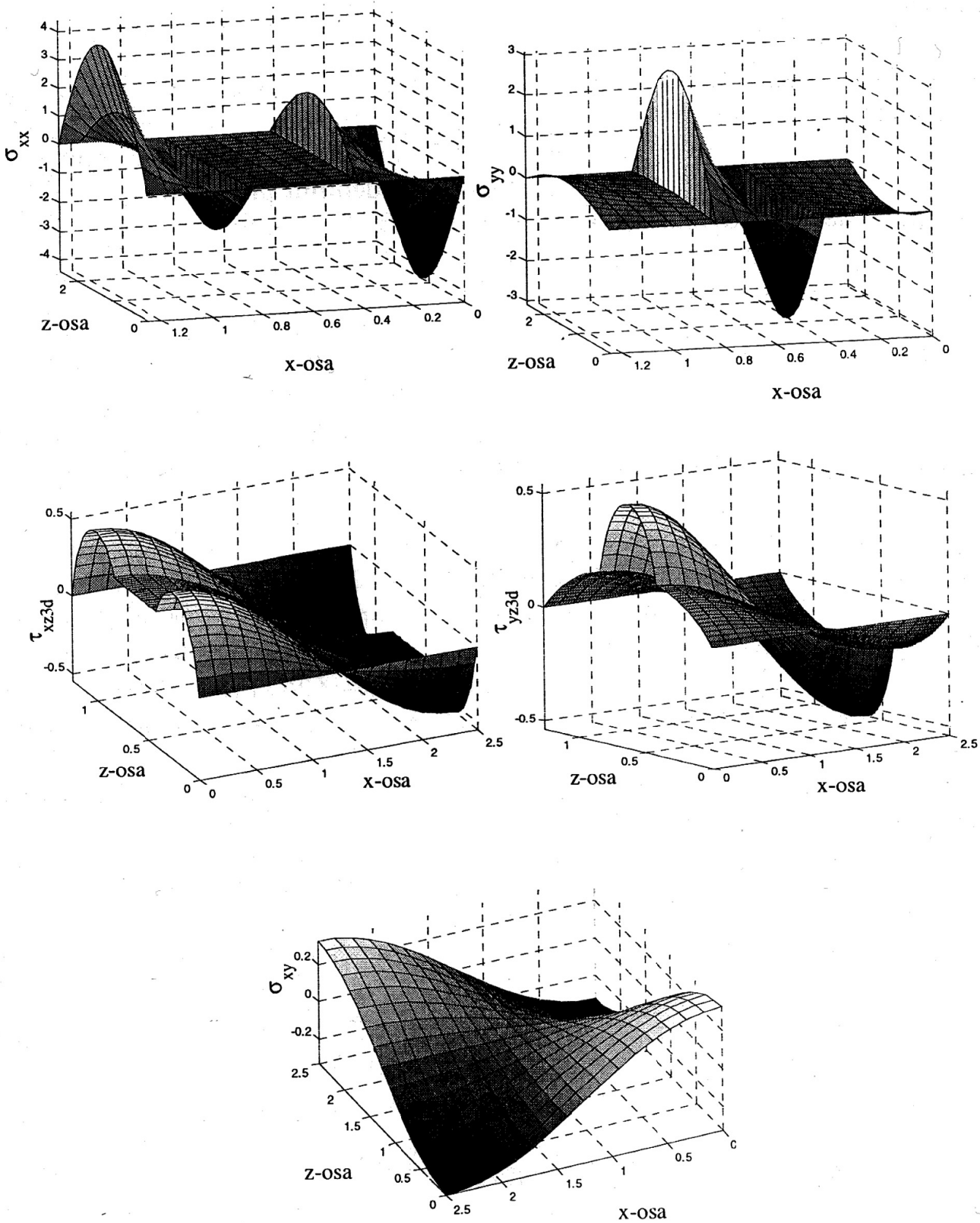


Slika 5. Deformacija troslojne laminatne ploče 0/90/0 (3D)



Slika 6. Deformacija troslojne laminatne ploče 0/90/0 (pogled odozgo)





Slika 7. Raspodela napona u (x,z) ravni troslojne laminatne ploče

## 6. ZAKLJUČAK

Rešenja za polja napona i deformacija prikazanog konačnog elementa konvergiraju ka tačnom rešenju opšte laminatne teorije ploča. Konvergencija je brža za polje pomeranja, u odnosu na polje napona. Kvadratni Lagrange-ov konačni element, primenjen za interpolaciju u ravnoj ploči, u stanju je da da tačnu procenu smičućih napona po debljini ploče. Reč je o smičućim naponima koji istovremeno zadovoljavaju konstitutivne jednačine lamine, granične uslove po naponima i 3D uslove ravnoteže laminata.

## 7. LITERATURA

- [1] Reddy, J. N., A plate bending element based on a generalized laminated plate theory, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, vol. **28**, 2275-2292, 1989
- [2] Vuksanović, Đ., Linear Analysis Of Composite Plates Using Single Layer Higher Order Discrete Models, *Composite Structures*, **48**, 205-211, 2000
- [3] Četković, M., Vuksanović, Đ., A Closed Form Solution Using A Generalized Laminated Plate Theory, *Zbornik radova Građevinskog fakulteta u Subotici-14*, 2005
- [4] Reddy, J. N., *Mechanics Of Laminated Composite Plates*, CRC Press, 1996
- [5] Ochoa, O. O., Reddy, J. N., *Finite Element Analysis Of Composite Laminates*, Kluwer, 1992
- [6] Vuksanović, Đ., Pujević, B., *Teorija savijanja ploča - Numeričke metode i računarski programi*, Nauka, Beograd, 1994
- [7] Četković, M., *Primena metode konačnih elemenata na opštu teoriju laminatnih ploča*, Magistarska teza, Građevinski fakultet, Beograd, 2005.