

## PREGLED I OCENA ANALITIČKIH MODELA UŠĆA

mr Dejana ĐORĐEVIĆ  
Građevinski fakultet u Beogradu

### REZIME

Na spojevima otvorenih tokova strujnice postaju zakrivljene, jer vertikalno ubrzanje fluidnih delića nije zanemarljivo u odnosu na ubrzanje zemljine teže, pa su to mesta gde ne važe osnovne pretpostavke na kojima se zasnivaju jednačine linijskog tečenja. Stoga se te jednačine ne mogu koristiti za određivanje dubina uzvodno od ušća koje su neophodne za uređenje rečnih ušća ili projektovanje mreža drenažnih kanala. Od sredine 1940-tih do danas za ove potrebe izvedeno je, bilo isključivo teorijskim razmatranjima, bilo kombinacijom teorijskih razmatranja i laboratorijskih ogleda, oko desetak analitičkih izraza različitog nivoa detaljnosti. Svi izrazi su izvedeni za ušća sa jednakim kotama dna svih kanalâ na mestu njihovog spajanja, a većina njih važi za uslove mirnog tečenja. U ovom radu detaljno se razmatraju tri novija modela izvedena za uslove mirnog tečenja od kojih se dva (modeli Gurama i ost. i Hsua i ost.) zasnivaju na Tejlorovoj pretpostavci o jednakosti uzvodnih dubina i važe za ušća korita jednakih širina, dok treći model (model Šabajeka i ost.) dozvoljava da uzvodne dubine i širine koritâ budu različite. Ukazuje se na nedostatke pri izvođenju modela zasnovanih na pretpostavci o jednakosti uzvodnih dubina i ocenjuje se uticaj spornih članova kroz poređenje sa rezultatima postojećih merenja. Pokazuje se da su uz odgovarajuće izmene pojedinih modela, relativne greške svih modela nalaze u granicama greške merenja, pri čemu se najmanja greška dobija primenom modela Šabajeka i ost. Utvrđeno je da je greška koja se čini uzimanjem ugla uliva  $\alpha$  umesto ugla skretanja toka na ušću  $\delta$  u uslovima ustaljenog tečenja zanemarljiva. Buduća istraživanja treba da utvrde vezu  $\delta=f(\alpha, q)$ , gde je  $q$  odnos protoka pritoke i reke.

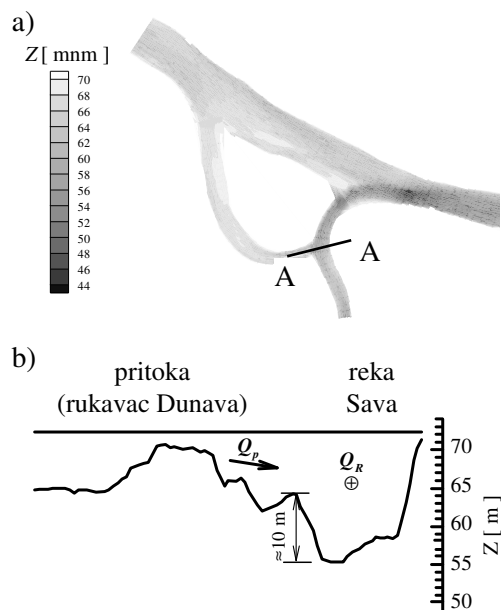
**Ključne reči:** ušće, linijsko tečenje, analitički model

### 1. UVOD

Rečna ušća i spojevi kanala (u daljem tekstu „ušća“) su delovi toka gde je, usled međudejstva sustičućih struja, tečenje izrazito prostorno. Zbog nagle promene pravca te-

čenja, strujnice su u vodoravnim ravnima na ušću izrazito zakrivljene (ugao skretanja toka na ušću  $\delta$  odstupa od ugla uliva  $\alpha$ ). Sem toga, vertikalna ubrzanja fluidnih delića ovde nisu zanemarljiva u poređenju sa ubrzanjem zemljine teže, pa pored već pomenute zakrivljenosti strujnica u vodoravnoj ravni postoji i vertikalna zakrivljenost, tako da raspored pritiska po dubini toka nije hidrostatički. Iz navedenih razloga, ušća se, u modelima linijskog tečenja, moraju razmatrati izdvojeno od delova toka u kojima su zadovoljene osnovne pretpostavke na kojima se ovi modeli zasnivaju. Drugim rečima, ušća se u modelima linijskog tečenja moraju razmatrati kao unutrašnji granični uslov.

Pokušaji da se, primenom osnovnih zakona mehanike fluida na kontrolnu zapreminu ušća omeđenu poprečnim preseccima reke i njenih pritoka/sastavnica, dođe do izraza koji daju analitičku vezu između dubinâ uzvodno i nizvodno od ušća (analitički modeli ušća) datiraju iz sredine 1940-tih godina. Tada je Tejlor [13], po analogiji sa spojevima cevi pod pritiskom, izveo analitički izraz za spojeve tokova sa slobodnom površinom i dobijene rezultate proverio na pojednostavljenom modelu ušća sa horizontalnim dnom. Zanimljivo je da se svi poniji analitički modeli ušća – modeli Vebera i Gritida, Hagera [7, 8], Ramamurtija i ost. [12], Gurama i ost. [5, 6] i Hsua i ost. [9, 10], izuzev modela Šabajeka i ost. [13], zasnivaju na Tejlorovoj pretpostavci o jednakosti uzvodnih dubina (u reci i pritoci), kao i to da nijedan od komercijalnih programa za proračun linijskog tečenja ne koristi neki od raspoloživih analitičkih modela za proračun ušća kao unutrašnjeg graničnog uslova [11]. Štaviše, u većini programa uzvodne dubine se u mirnom režimu izjednačavaju sa već sračunatom dubinom u reci nizvodno od ušća. Takođe je važno napomenuti da su postojeći analitički modeli izvedeni za ušća bez izdignutog dna uzvodnih koritâ. Ovaj detalj je značajan s obzirom na to da su terenska snimanja korita na velikom broju ušća [3, 4] pokazala da na rekama sa dnom od nevezanog materijala dno jednog ili oba uzvodna korita može



Slika 1. a) Topografija dna na ušću reka Save i Dunav u Beogradu; b) presek A-A kroz ušće na kojem se vidi da je dno rukavca reke Dunav izdignuto iznad dna reke Save

biti izdignuto iznad dna reke (slika 1). Autor ovog članka je u svojoj doktorskoj disertaciji [4] izveo uopšteni analitički model ušća i pokazao da postojeći analitički modeli za ušća bez izdignutog dna pritokâ zapravo predstavljaju poseban slučaj u kojem je razlika kotâ dna pritoke i reke  $\Delta z_p = 0$ .

S obzirom na to da je do sada mnogo više zanimanja pokazano za tečenje u mirnom, nego za tečenje u mešovitom režimu (kojim su se bavili samo Ramamurti i ost. [12] i Hager [8]), u ovom radu će se dati samo osvrt na analitičke modele koji važe u mirnom režimu tečenja. Iz razmatranja će biti izostavljeni pionirski modeli Tejlora [14] i Vebera i Gritida, jer oni ne uzimaju u obzir uticaj zakrivljenosti strujnica na gubitke energije na ušću, kao i Hagerov analitički model [7, 8], jer ugao skretanja toka na ušću  $\delta$  procenjuje na osnovu merenja brzine u jednoj tački nizvodnog preseka pritoke ne uzimajući u obzir neravnomernost rasporeda brzine po širini i dubini preseka. Težište ovog rada biće stavljeno na modele koji pri proceni ugla  $\delta$  uzimaju u obzir neravnomernost njegovog rasporeda po širini preseka (Guram i ost.) odnosno, po celom nizvodnom preseku pritoke (Hsu i ost.) i na model Šabajeka i ost. koji dozvoljava da dubine uzvodno od ušća budu različite, što ga čini pogodnijim za primenu u modelima neustaljenog tečenja.

Ciljevi rada su sledeći: 1) da se ukaže na neke nedosljednosti pri izvođenju modela Gurama i ost. i Hsua i ost.; 2) da se, kroz poređenje sa rezultatima postojećih merenja, oceni uticaj spornih članova na veličinu odstupanja računskih od izmerenih dubina i 3) da se u uslovi- ma ustaljenog tečenja uporede modeli koji se zasnivaju na pretpostavci o jednakim uzvodnim dubinama (Guram i ost. i Hsu i ost.) sa modelom kod kojeg se te dve dubine dobijaju rešavanjem sistema od dve jednačine (Šabajek i ost.).

U nastavku se najpre navode osnovne pretpostavke od kojih se pošlo pri izvođenju ovih analitičkih modela, prikazuju se sheme proračuna i navode konačni izrazi za računanje dubina/nivoa uzvodno od ušća, a potom se prelazi na poređenje i ocenu ovih modela.

## 2. PRIKAZ ANALITIČKIH MODELA

*Model Gurama i ost.* [5] koristi sledeće pretpostavke:

- 1° Tečenje je ustaljeno.
- 2° Dubine toka uzvodno od ušća su jednake ( $h_p = h_R$ ).
- 3° U graničnim presecima glavnog kanala strujnice su pravolinijske i paralelne, a vrednost koeficijenta neravnomernosti količine kretanja jednaka je jedinici.
- 4° Granini presek pritoke pomera se na liniju ušća koja spaja njegovo uzvodno i nizvodno teme, pri emu se neravnomernost količine kretanja u ovom preseku uzima u obzir preko koeficijenta:

$$C_{I_p} = (V_n / V_p) (\cos \delta / \cos \alpha) \quad (1)$$

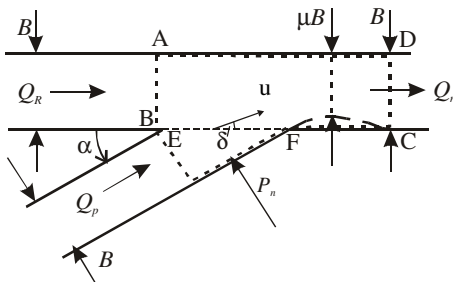
gde su  $V_p$  i  $V_n$  brzine u pritoci i reci nizvodno od ušća. Shema proračuna data je na slici 2. U izvođenju analitičkog modela polazi se od jednačine održanja mase i jednačine održanja količine kretanja za kontrolnu zapreminu ABCD. Kombinovanjem ove dve jednačine dobija se jednačina za računanje dubinâ uzvodno od ušća u bezdimenzionalnom obliku:

$$\bar{Z}^3 - \bar{Z}(1 + 2Fr_n) + 2Fr_n [(1 - q)^2 + q \cos \delta] = 0 \quad (2)$$

gde je:  $\bar{Z} = h_p / h_n$ ,  $q = Q_p / Q_n$ , a  $Fr_n = Q_n^2 / (gB_n^2 h_n^3)$  Jednačina (2) predstavlja analitički model Gurama i ost. i omogućava da se na osnovu poznatih protoka i poznate dubine nizvodno od ušća odrede uzvodne dubine, jer je  $h_R = h_p$ .

Ono što, međutim, nije sasvim jasno jeste način na koji je u ovom modelu uzeta u obzir neravnomernost raspo-

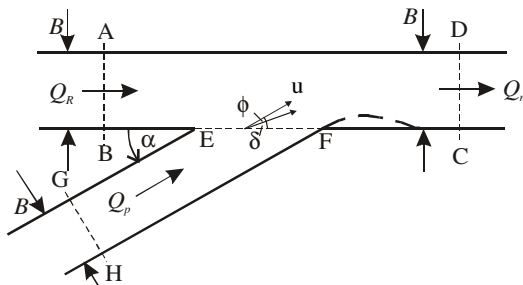
reda količine kretanja na ušću, tj. način na koji je određen koeficijent  $C_{fp}$ . Naime, neravnomernost rasporeda količine kretanja na ušću ispoljava se kroz odstupanje ugla skretanja toka  $\delta$  od ugla uliva  $\alpha$  i trebalo bi je obuhvatiti samo odnosom kosinusa ova dva ugla. Dodatno množenje ovog odnosa odnosom brzina (ili protoka) reke nizvodno od ušća i pritoke je nepotrebno, jer je promena brzine  $V_p$ , zbog povećane širine poprečnog preseka pritoke na ušću već uzeta u obzir preko ugla skretanja toka  $\delta$ , što se pokazuje prilikom izvođenja izraza (2). To potvrđuju i rezultati proračuna prostorno-tečenja na ušćima [4].



Slika 2. Shema proračuna u modelu Gurama i ost. [5]

*Model Hsua i ost.* [10]. Autori ovog modela koristili su sledeće pretpostavke:

- 1° Tečenje je ustaljeno.
- 2° U graničnim presecima uzvodno i nizvodno od ušća vlada hidrostatički raspored pritiska.
- 3° Sila trenja se može zamenariti.
- 4° Odnosi koeficijenata neravnomernosti brzine  $\alpha_R/\alpha_n$  i  $\alpha_p/\alpha_n$  su međusobno jednaki i uzimaju vrednost  $\approx 1$ . Isto važi i za odnose koeficijenata neravnomernosti količine kretanja:  $\beta_R/\beta_n = \beta_p/\beta_n = \beta_t/\beta_n \approx 1$ .
- 5° Dubine u pritoci i reci uzvodno od ušća su jednake  $h_p = h_R$ , a isto važi i za dubine vode u uzvodnom graničnom preseku pritoke (GH) i nizvodnom preseku prtoke (EF)  $h_p = h_t$  (slika 3).



Slika 3. Shema proračuna u modelu Hsua i ost. [10]

Shema proračuna prikazana je na slici 3. U izvođenju analitičkog izraza pošlo se od: 1) jednačine održanja mase, 2) jednačine održanja količine kretanja za kontrolnu zapreminu ABCD i 3) jednačine održanja količine kretanja za kontrolnu zapreminu EFGH. Bezdimenzionalni oblik izraza za proračun uzvodnih dubina glasi:

$$\bar{Z}^3 - \bar{Z} \left( 2 \frac{\beta}{\alpha} Fr_n + 1 \right) + 2 \frac{\beta}{\alpha} Fr_n [(1-q)^2 + q^2 \cos \alpha] = 0 \quad (3)$$

gde je:  $\bar{Z} = h_p/h_n$ ,  $q = Q_p/Q_n$ , a  $Fr_n = \alpha_n Q_n^2 / (gB^2 h_n^3)$ . Kao što se vidi, model Hsua i ost. (3) u proračunu uzvodnih dubina uopšte ne uzima u obzir neravnomernost rasporeda količine kretanja u nizvodnom preseku pritoke.

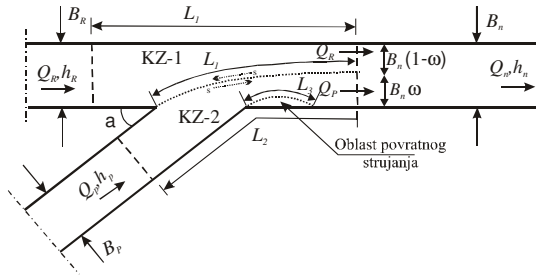
*Model Šabajeka i ost.* [13]. Za razliku od prethodna dva modela, u ovom modelu i širine kanala uzvodno od ušća i uzvodne dubine mogu biti različite. To je omogućeno podelom prostora između graničnih preseka ušća na dve kontrolne zapremine od kojih svaka svojim uzvodnim delom zahvata po jedno korito (pritoke ili reke), a nizvodno se prostire do nizvodnog graničnog preseka (slika 4). Počevši od uzvodnog temena ušća, ove dve zapremine razdvojene su slojem smicanja duž kojeg, sa svake strane, deluje sila smicanja  $S$ . Osnovne pretpostavke od kojih su autori pošli pri izvođenju ovog modela su:

- 1° Tečenje je ustaljeno.
- 2° Sva korita su pravougaonog poprečnog preseka.
- 3° Zanemaruju se vertikalna ubrzanja fluidnih delića, tako da se može smatrati da važi hidrostatički raspored pritiska po vertikali.
- 4° U graničnim presecima raspored brzine je ravnomeran, tj. koeficijenti neravnomernosti brzine i količine kretanja jednaki su jedinici.
- 5° Unutar kontrolnih zapremina zanemaruju se promene u poprečnom pravcu izazvane dejstvom centrifugalne sile na ušću, jer se smatra da su male u poređenju sa srednjim profilskim vrednostima.

Jednačine ovog modela čine jednačine održanja količine kretanja u pravcu toka za dve kontrolne zapremine

1- kontrolna zapremina (KZ-1) reke

$$-\rho Q_R V_R + \rho Q_R V_n = P_R - P_{nR} + P_{BR} + G_R - S - T_R \quad (4)$$



Slika 4. Shema proračuna u metodi Šabajeka i ost. [13]

2- kontrolna zapremina (KZ-2) pritoke

$$-\rho Q_p V_p + \rho Q_p V_n = P_p - P_{np} + P_{Bp} + G_p - S - T_p - S_v \quad (5)$$

Jednačine (4) i (5) se uz pomoć jednačine održanja mase mogu prevesti u bezdimenzionalan oblik:

$$\begin{aligned} q_R - \frac{q_R^2}{\omega_R \bar{Z}_R} - \frac{1}{8Fr_n} \left[ \omega_R (3\bar{Z}_R^2 - 2\bar{Z}_R \bar{Z}_p - \bar{Z}_p^2) + \right. \\ \left. + q_R (\bar{Z}_R^2 + 2\bar{Z}_R \bar{Z}_p + \bar{Z}_p^2 - 4) \right] - \\ - \frac{1}{2Fr_n} \left( \frac{L_R S_0}{h_n} \right) (\omega_R \bar{Z}_R + q_R) + \\ + K^* \left[ \left( \frac{q_R}{\omega_R \bar{Z}_R} \right)^2 - \left( \frac{q_p}{\omega_p \bar{Z}_p} \right)^2 \right] (\bar{Z}_R + \bar{Z}_p) (2q_R q_p) + \\ + \frac{L_g g}{B_n C_s^2} \left( 1 + \frac{B_n}{h_n} q_R \right) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} q_p - \frac{q_p^2}{\omega_p \bar{Z}_p} - \frac{1}{8Fr_n} \left[ \omega_p (3\bar{Z}_p^2 - 2\bar{Z}_p \bar{Z}_R - \bar{Z}_R^2) + \right. \\ \left. + q_p (\bar{Z}_p^2 + 2\bar{Z}_p \bar{Z}_R + \bar{Z}_R^2 - 4) \right] - \\ - \frac{1}{2Fr_n} \left( \frac{L_p S_0}{h_n} \right) (\omega_p \bar{Z}_p + q_p) + \\ + K^* \left[ \left( \frac{q_R}{\omega_R \bar{Z}_R} \right)^2 - \left( \frac{q_p}{\omega_p \bar{Z}_p} \right)^2 \right] (\bar{Z}_R + \bar{Z}_p) (2q_R q_p) + \\ + \frac{L_g g}{B_n C_s^2} \left( 1 + \frac{B_n}{h_n} q_p \right) + K \frac{q_p^2}{\omega_p^2 \bar{Z}_p} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

gde su  $C_s$  Šezijev koeficijent, a  $K^*$  i  $K$  koeficijenti koji zavise od ugla uliva  $\alpha$  i određuju se na osnovu sledećih izraza:

$$K^* = -0.0015\alpha + 0.30 \quad \text{i} \quad K = 0.0092\alpha - 0.1855 \quad (8)$$

Bezdimenzionalne veličine u jednačinama (6) i (7) su:

$$\begin{aligned} q_R = \frac{Q_R}{Q_n}, \quad q_p = \frac{Q_p}{Q_n}, \quad \bar{Z}_R = \frac{h_R}{h_n}, \quad \bar{Z}_p = \frac{h_p}{h_n}, \\ \omega_R = \frac{B_R}{B_n}, \quad \omega_p = \frac{B_p}{B_n}, \quad Fr_n = \frac{Q_n^2}{g B_n^2 h_n^3} \end{aligned} \quad (9)$$

U ovom modelu uticaj neravnomernosti rasporeda količine kretanja na ušću obuhvaćen je posredno preko sila smicanja od kojih jedna deluje na graničnoj površini između dve kontrolne zapremine, a druga na površi koja ograničava nizvodni vrlog unutar kontrolne zapremine na strani pritoke.

Keservani i ost. [11] su uporedili ova tri modela koristeći podatke iz laboratorijskih ogleda Hsua i ost. [9, 10] i podatke iz ogleda Vebera i Gritida, ali nisu dali osvrt na moguće uzroke uočenih razlika. U nastavku će se najpre ukazati na neke nedoslednosti prilikom izvođenja modela Gurama i ost. i Hsua i ost., a potom će se, kroz poređenje sa rezultatima merenja, dati ocena uticaja spornih članova na veličinu odstupanja računskih od izmerenih dubina. Za ocenu su korišćeni rezultati merenja Hsua i ost. [10] za tri ugla uliva  $\alpha = \{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$  da bi se utvrdilo da li se uticaj spornih članova menja sa promenom vrednosti ovog ugla. Osim modelâ Gurama i ost. i Hsua i ost., sa merenjima su upoređeni i rezultati modela Šabajeka i ost.

### 3. POREĐENJE ANALITIČKIH MODELA

Kao mera odstupanja rezultata modela od izmerenih vrednosti koristiće se relativna greška:

$$\Delta = \frac{\bar{Z}_{mer} - \bar{Z}_{mod}}{\bar{Z}_{mer}} \cdot 100 \quad [\%] \quad (10)$$

Može se lako pokazati da se izostavljanjem spornog odnosa brzina  $V_n/V_p$  iz izraza (1) model Gurama i ost. svodi na model Hsua i ost. – izraz (3) u kojem je ugao uliva zamenjen uglom skretanja toka na ušću:

$$\bar{Z}^3 - \bar{Z}(1 + 2Fr_n) + 2Fr_n \left[ (1-q)^2 + q \cos \delta \right] = 0, \quad (11)$$

$$\bar{\delta} = 0.85\alpha$$

Izraz (11) predstavlja ispravku originalnog modela Gurama i ost. i nosiće oznaku (Gur-i). Razlika relativnih grešaka originalnog modela Gurama i ost. ( $\Delta_{Gur-o}$ ) i ispravljenog modela ( $\Delta_{Gur-i}$ ) u tom slučaju predstavlja uticaj spornog člana  $V_n/V_p$  na rezultate modela. U originalnom modelu Gurama i ost. ugao skretanja toka računa se prema izrazu  $\delta = \sigma \alpha$ , gde se  $\sigma$  može shvatiti kao pokazatelj neravnomernosti količine kretanja u nizvodnom preseku pritoke. Guram i ost. su, na osnovu svojih ogle-da, utvrdili da vrednost ovog pokazatelja iznosi  $\sigma = 0.85$ . Ako se, međutim, ugao skretanja toka  $\delta = 0.85\alpha$  u jednačini (11) zameni vrednošću  $\bar{\delta}$ , koja je dobijena osred-njavanjem izmerenih uglova skretanja toka iz ogle-da Hsua i ost. po poprečnom preseku (takav model nosiće oznaku Gur- $\bar{\delta}$ ), tada razlika relativnih grešaka ispravljenog mo-dela ( $\Delta_{Gur-i}$ ) i istog modela sa izmenjenim uglom skreta-nja toka ( $\Delta_{Gur-\bar{\delta}}$ ) predstavlja uticaj pokazatelja  $\sigma$  na re-zultate modela. Štaviše, promena vrednosti ove razlike sa promenom ugla uliva  $\alpha$  može da ukaže na opravda-nost ili neopravdanost pretpostavke Gurama i ost. o je-dinstvenoj vrednosti ovog pokazatelja, tj. pretpostavke da je njegova vrednost nezavisna od ugla uliva.

Nedoslednost Hsua i ost. prilikom izvođenja analitičkog izraza (3), koji će nositi oznaku Hsu-o, ogle-da se u strukturi člana  $q^2 \cos \alpha$  u uglastoj zagradi. Ovaj član bi, poštujući jednačine održanja količine kretanja za kon-trone zapremine ABCD i EFGH i jednačinu održanja mase, od kojih se pošlo prilikom izvođenja modela, tre-balo da glasi  $q^2 \cos \delta / \cos(\alpha - \delta)$ . Ispravljeni model Hsua i ost. (Hsu-i) sa ovom izmenom postaje:

$$\bar{Z}^3 - \bar{Z} \left( 2 \frac{\beta}{\alpha} Fr_n + 1 \right) + 2 \frac{\beta}{\alpha} Fr_n \left[ (1-q)^2 + q^2 \frac{\cos \delta}{\cos(\alpha - \delta)} \right] = 0 \quad (12)$$

Poređenjem izraza (12) i (3) uočava se da je odnos  $\cos \delta / \cos(\alpha - \delta)$ , kojim bi se uzela u obzir neravnomernost raspodele količine kretanja i smanjenje brzine  $V_p$  u nizvodnom preseku pritoke, u originalnom modelu Hsua i ost. sveden na vrednost kosinusa ugla uliva  $\alpha$ . To je mo-guće samo ako je ugao skretanja toka  $\delta$  jednak uglu uliva  $\alpha$ :

$$\text{za } \delta = \alpha \Rightarrow \frac{\cos \delta}{\cos(\alpha - \delta)} = \cos \alpha \quad (13)$$

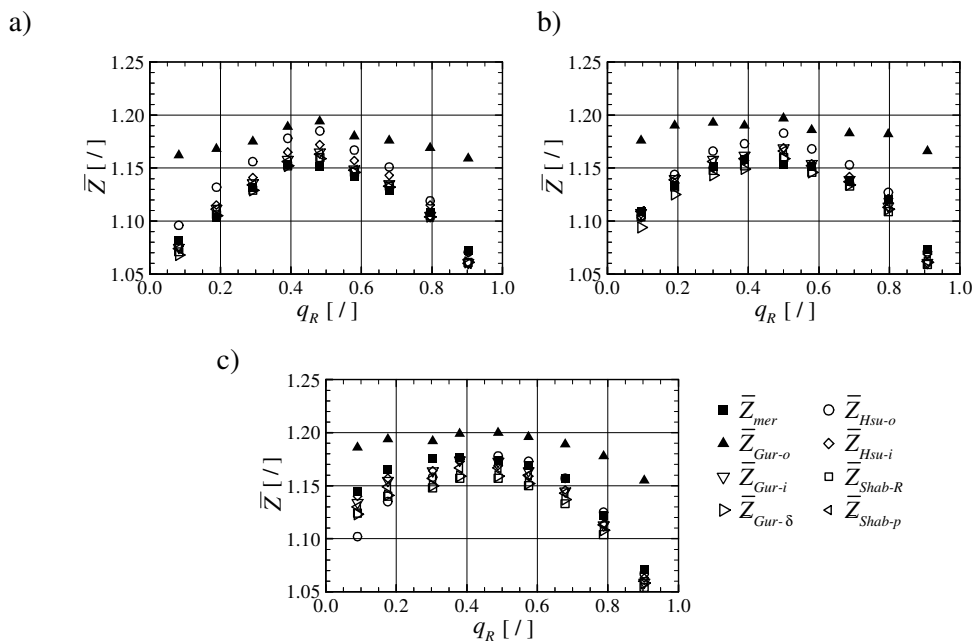
čime je pokazano da model Hsua i ost. ne uzima u obzir neravnomernost rasporeda količine kretanja i smanjenja brzine na ušću pritoke u proračunima uzvodnih dubina.

Poređenje relativnih grešaka ispravljenog modela Gu-rama i ost. u kojem se koristi merodavna vrednost ugla skretanja toka na ušću ( $\Delta_{Gur-\bar{\delta}}$ ) i originalnog modela Hsua i ost. ( $\Delta_{Hsu-o}$ ) datog izrazom (3), ukazaće kolika se greška čini ako se u proračunu zanemari uticaj neravno-mernosti rasporeda količine kretanja u nizvodnom pre-seku pritoke. Na kraju, poređenjem relativnih grešaka ispravljenog modela Gurama i ost. u kojem se koristi vrednost ugla skretanja  $\bar{\delta}$  ( $\Delta_{Gur-\bar{\delta}}$ ) i ispravljenog modela Hsua i ost. ( $\Delta_{Hsu-i}$ ), koji je dat izrazom (12), utvrdiće se da li u proračunima treba zasebno uzimati u obzir sma-njenje brzine pritoke na ušću (uticaj člana  $1/\cos(\alpha - \delta)$ ), ili je to smanjenje već obračunato preko ugla skretanja toka  $\bar{\delta}$ .

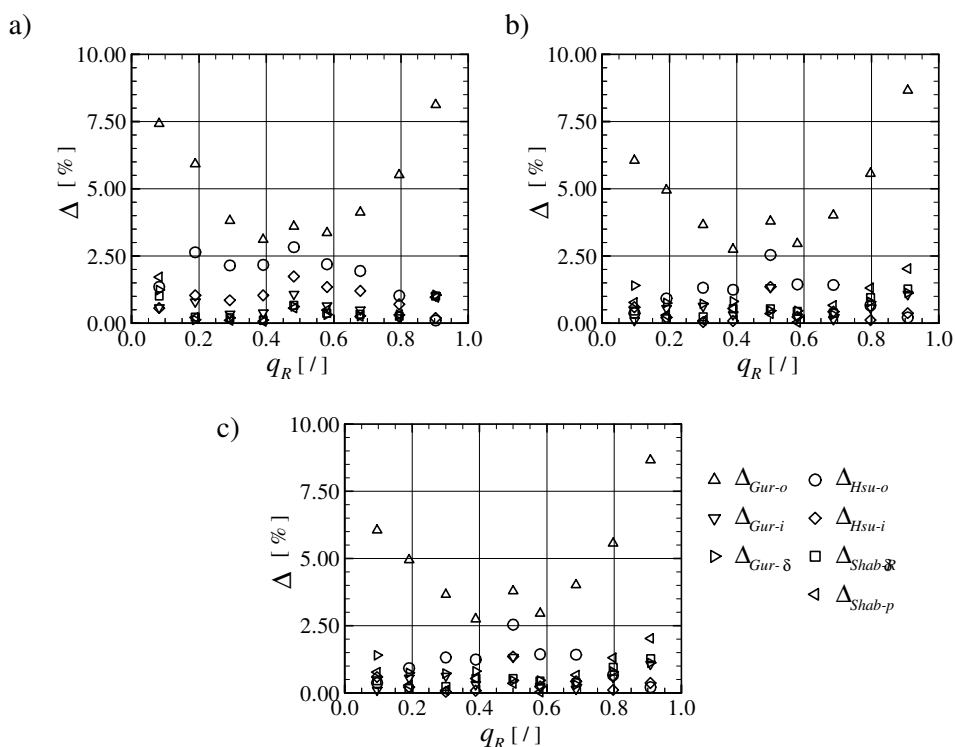
Rezultati proračuna za originalne i izmenjene verzije modela Gurama i ost. i Hsua i ost., kao i rezultati Šaba-jeka i ost. sa zanemarenim silama težine i trenja (jer je u ogle-dima dno bilo horizontalno, a zidovi i dnâ kanalâ su bili glatki), prikazani su na slici 5. Na slikama 6 i 7 upo-ređene su relativne greške ovih modela.

Na njima se odmah uočava značajno odstupanje origin-alnog modela Gurama i ost. u odnosu na rezultate svih ostalih modela – originalnih i ispravljenih, što nedvo-smisljeno pokazuje da u ovom modelu postoje članovi koji narušavaju pravilan matematički opis unosa količi-ne kretanja iz pritoke u reku. Takođe se uočava da se vrednosti relativne greške svih ostalih modela nalaze u rasponu  $\pm 3\%$  (slika 6), što je u granicama greške mere-nja nivoa i sa praktičnog, inženjerskog stanovišta pred-stavlja zadovoljavajuće slaganje sa merenjima. Ovaj uzan raspon promene relativne greške različitih analitičkih modela ukazuje i na to da se na nivou cele kontrolne za-premine omeđene uzvodnim presecima reke i pritoke i nizvodnim presekom reke, pravi zanemarljivo mala greška ukoliko se umesto ugla skretanja toka  $\delta$  u proračunima koristi ugao uliva  $\alpha$ , tako da sva naredna razmatranja imaju isključivo teorijski značaj.

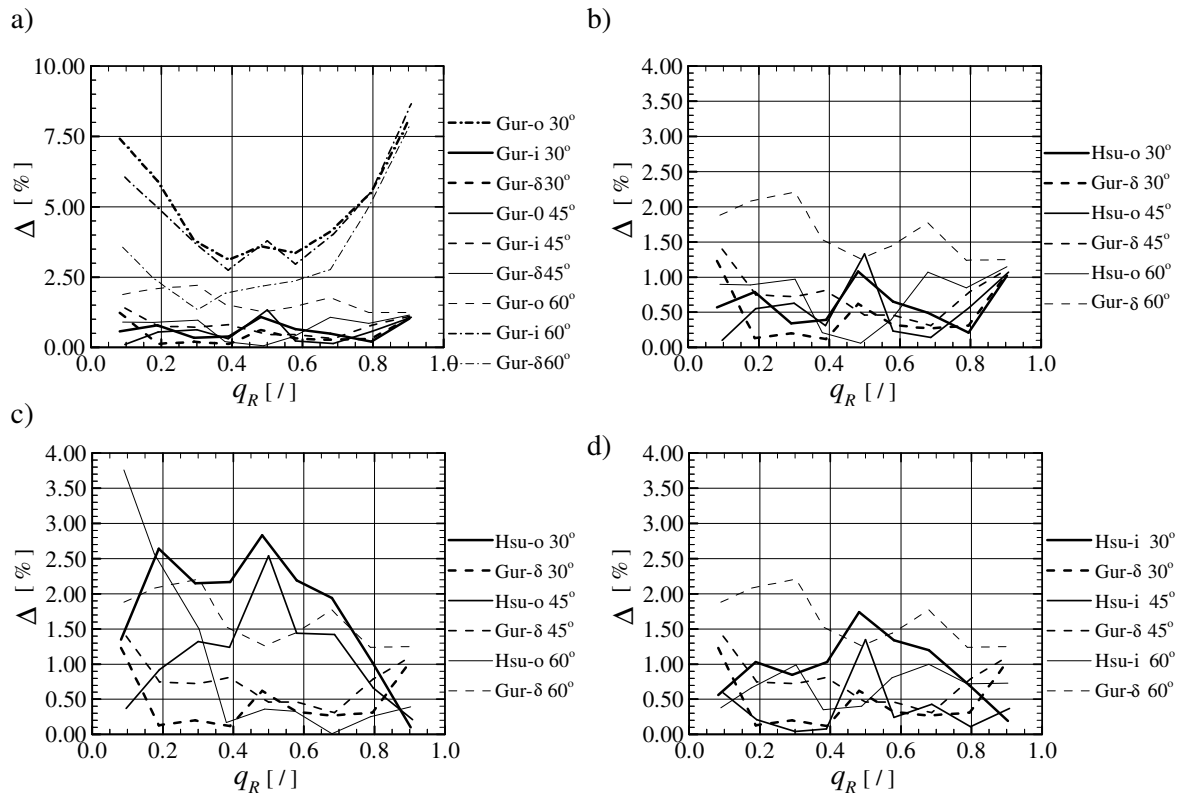
1. Poređenjem rezultata dobijenih primenom izraza (2) i (11) – slike 5 i 7a zaključuje se da se uključivanje od-nosa brzina  $V_n/V_p$  u član kojim se opisuje unos koli-čine kretanja iz pritoke u reku negativno odraža-va na rezultate proračuna u smislu precenjivanja vre-dnosti bezdimenzionalne dubine uzvodno od ušća za 1.5% – 8% u odnosu na izmerene vrednosti (slika 5)



Slika 5. Poređenje originalnih i izmenjenih modela Gurama i ost., Hsua i ost. i modela Šabajeka i ost. sa merenjima Hsua i ost. na ušćima sa uglovima uliva: a)  $\alpha = 30^\circ$ , b)  $\alpha = 45^\circ$  i c)  $\alpha = 60^\circ$ . Veličina  $q_R$  je  $Q_R/Q_n$  – izraz (9).



Slika 6. Relativne greške originalnih i izmenjenih modela Gurama i ost., Hsua i ost. i modela Šabajeka i ost.: a)  $\alpha = 30^\circ$ , b)  $\alpha = 45^\circ$  i c)  $\alpha = 60^\circ$ . Veličina  $q_R$  je  $Q_R/Q_n$  – izraz (9).



Slika 7. a) Poređenje relativnih grešaka originalnog i izmenjenih modela Gurama i ost. – uticaj množioca  $V_n / V_p$ ; b) poređenje relativnih grešaka izmenjenih modela Gurama i ost. u kojima je  $\delta = 0.85\alpha$  ( $\Delta_{Gur-i}$ ) i  $\delta = \bar{\delta}$  ( $\Delta_{Gur-\delta}$ ) – uticaj parametra  $\sigma$ ; c) poređenje relativnih grešaka izmenjenog modela Gurama i ost. u kojem je  $\delta = \bar{\delta}$  ( $\Delta_{Gur-\delta}$ ) i originalnog modela Hsua i ost. ( $\Delta_{Hsu-o}$ ) – uticaj zanemarenja neravnomernosti rasporeda količine kretanja na ušću; d) poređenje relativnih grešaka izmenjenog modela Gurama i ost. u kojem je  $\delta = \bar{\delta}$  ( $\Delta_{Gur-\delta}$ ) i izmenjenog modela Hsua i ost. ( $\Delta_{Hsu-i}$ ) – uticaj člana  $1 - \cos(\alpha - \delta)$ .

i povećanja greške u oceni uzvodne dubine za 2.5% – 7% u odnosu na rešenje dobijeno primenom modela u kojem je ovaj množilac izostavljen iz razmatranja (slika 7a). Time je posredno pokazano da uključiva-nje odnosa  $V_n / V_p$  u član kojim se obračunava uticaj pritoke na promenu količine kretanja na ušću nema nikakvog smisla.

2. Izrazi (11) i (3) imaju istu strukturu, s tim što je u modelu Gurama i ost. (11) vrednost ugla uliva umanjena za 15%. Zbog toga se i pri poređenju dve verzije modela Gurama i ost. (jedne, Gur-i, u kojoj je  $\delta = 0.85\alpha$  i druge, Gur- $\delta$ , u kojoj je  $\delta = \bar{\delta}$ ) i pri poređenju modela Gur- $\delta$  sa originalnim modelom Hsua i ost. (Hsu-o), uočavaju iste pojave. Tako je za uglove uliva  $\alpha \leq 45^\circ$  odstupanje od izmerenih vrednosti manje ukoliko se za proračun komponente sile inercije pritoke, koja

deluje u pravcu osovine glavnog kanala, umesto ugla uliva  $\alpha$  (3) ili njegove umanjene vrednosti  $0.85\alpha$  (11), koristi prosečna vrednost ugla skretanja toka u nizvodnom preseku pritoke  $\bar{\delta}$  (slike 5, 6 i 7b, c). Pri tom je za  $\alpha = 30^\circ$   $\Delta_{Gur-\delta} < \Delta_{Gur-i} < \Delta_{Hsu-o}$ , dok je za  $\alpha = 45^\circ$   $\Delta_{Gur-\delta} \approx \Delta_{Gur-i} < \Delta_{Hsu-o}$ . Međutim, za  $\alpha = 60^\circ$  situacija je obrnuta,  $\Delta_{Gur-\delta} > \Delta_{Gur-i}$  za sve vrednosti odnosa protoka  $q_R$ , dok je za  $q_R > 0.25$ ,  $\Delta_{Gur-\delta} > \Delta_{Hsu-o}$ . S obzirom na to da su za  $\alpha \leq 45^\circ$  razlike  $\Delta_{Gur-i} - \Delta_{Gur-\delta}$  manje od 1% i da ne prelaze 1.5% za  $\alpha \leq 60^\circ$ , može se reći da je za ušća sa jednakim kotama dna svih kanala na mestu njihovog ukrštanja pretpostavka Gurama i ost. o jedinstvenoj vrednosti parametra  $\sigma$  prihvatljiva.

3. Uticaj smanjenja brzine na ušću pritoke, koji se obračunava preko recipročne vrednosti kosinusa razlike ugla uliva i ugla skretanja toka ( $1/\cos(\alpha - \delta)$ ) može se po-

smatrati na slikama 5, 6 i 7d ( $\Delta_{\text{Gur-}\delta}$  i  $\Delta_{\text{Hsu-i}}$ ). Za razliku od greške  $\Delta_{\text{Gur-}\delta}$ , koja raste sa povećanjem ugla uliva, promena greške  $\Delta_{\text{Hsu-i}}$  ne pokazuje nikakvu pravilnost sa promenom ugla  $\alpha$ . Jedino što se uočava je da se za  $\alpha \geq 45^\circ$  greška  $\Delta_{\text{Hsu-i}}$  zadržava unutar granice od 1%.

Razlozi poveanja greške  $\Delta_{\text{Gur-}}$  sa porastom ugla uliva mogli bi se razmatrati poređenjem brzine promene bezdimenzionalne dubine  $\bar{Z}$  sa porastom ugla za model Gurama i ost. koji koristi srednju vrednost ugla skretanja toka u nizvodnom poprenom preseku pritoke  $\bar{\delta}$  i originalnog modela Hsua i ost. Prvi izvod bezdimenzionalne dubine  $\bar{Z}$  po ( $\bar{Z}$ ) za model Hsua i ost. (3) uz pretpostavku da su sve ostale veličine ( $Fr_n$ ,  $q$ ,  $\beta_n$ ,  $\alpha_n$ ) nepromenljive, definisan je izrazom:

$$\frac{d\bar{Z}}{d\alpha} = \frac{2 \frac{\beta_n}{\alpha_n} Fr_n q^2 \sin \alpha}{3\bar{Z}^2 - \left(1 + 2 \frac{\beta_n}{\alpha_n} Fr_n\right)} \quad (14)$$

a za model Gurama i ost. (11 sa  $\delta = \bar{\delta}$ ) izrazom:

$$\frac{d\bar{Z}}{d\alpha} = \frac{2Fr_n q^2 \sin \bar{\delta} \frac{d\bar{\delta}}{d\alpha}}{3\bar{Z}^2 - (1 + 2Fr_n)} \quad (15)$$

Ako se zanemari činjenica da se u modelu Gurama i ost. pretpostavlja da je  $\alpha_n = \beta_n = 1$ , uočava se da se uzimanjem u razmatranje ugla skretanja toka umesto ugla uliva, u brojiocu izraza (15) pojavljuje još jedan množilac, koji pokazuje promenu ugla  $\bar{\delta}$  sa promenom ugla uliva  $\alpha$ . To navodi na pretpostavku da je ovaj, dodatni član, odgovoran za uočeno povećanje odstupanja rezultata modela (11) u kojem je  $\delta = \bar{\delta}$ , u odnosu na izmerene vrednosti, kada vrednost ugla  $\alpha$  raste. Potvrda ove pretpostavke zahteva, međutim, poznavanje funkcionalne zavisnosti  $\bar{\delta} = f(\alpha)$ , koja još uvek nije utvrđena.

Kada se u razmatranje uvede i uticaj smanjenja brzine u nizvodnom preseku pritoke (12), problem postaje još složeniji, jer funkcija  $d\bar{Z}/d\alpha$  ima mnogo više argumenata:

$$\frac{d\bar{Z}}{d\alpha} = \frac{2Fr_n q^2 \left[ \sin \bar{\delta} \frac{d\bar{\delta}}{d\alpha} - \cos \bar{\delta} \sin(\alpha - \bar{\delta}) \right]}{\cos^2(\alpha - \bar{\delta}) \left[ 3\bar{Z}^2 - \left(1 + 2 \frac{\beta_n}{\alpha_n} Fr_n\right) \right]} \quad (16)$$

Stoga se detaljna teorijska razmatranja moraju odložiti za vreme kada se utvrdi funkcionalna veza  $\bar{\delta} = f(\alpha)$ , a do tada se, za tokove kod kojih je  $Fr < 0.4$ , ravnopravno mogu koristiti izrazi (3), (11), (12), i (6) i (7) bez bojazni da će se napraviti velika greška u oceni uzvodne dubine, uz napomenu da model Šabajeka i ost. za sve vrednosti ugla uliva u najvećem rasponu vrednosti odnosa protoka  $q_R$  daje najmanju grešku.

#### 4. ZAKLJUČCI

Na osnovu analize objavljenih analitičkih modela ušća, koji su izvedeni za uslove mirnog tečenja, utvrđene su određene nedoslednosti u izvođenju ovih izraza.

- 1) U slučaju modela Gurama i ost. to je uvođenje odnosa brzina  $V_n/V_p$  u izraz za koeficijent neravnomernosti količine kretanja u nizvodnom preseku pritoke ( $C_{lp}$ ). Uvođenje ovog odnosa nema fizičkog objašnjenja i odražava se kroz višestruko povećanje greške u proceni uzvodnih dubina (2.5 do 8 puta) u odnosu na slučaj kada se taj odnos isključuje iz izraza za  $C_{lp}$ .
- 2) Originalni model Hsua i ost. pri proračunu uzvodnih dubina uopšte ne uzima u obzir neravnomernost rasporeda količine kretanja u nizvodnom preseku pritoke, koja se obračunava preko ugla skretanja toka na ušću  $\bar{\delta}$ , iako su autori svojim merenjima pokazali da se vrednost ovog ugla menja sa promenom vrednosti odnosa protoka pritoke i reke.

Uočene nedoslednosti su otklonjene, pri čemu su dobijeni izmenjeni analitički modeli ušća. Rezultati originalnih i izmenjenih modela Gurama i ost. i Hsua i ost. i rezultati modela Šabajeka i ost. upoređeni su sa merenjima Hsua na pojednostavljenom fizičkom modelu ušća sa promenljivim uglom uliva ( $\alpha = \{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$ ). Poređenje je pokazalo značajno odstupanje rezultata originalnog modela Gurama i ost. u odnosu na rezultate svih ostalih modela (originalnih i ispravljenih) za sve razmatrane vrednosti ugla uliva, čime je pokazano da dodatak  $V_n/V_p$  u članu dinamičke jednačine kojim se uzima u obzir sila inercije pritoke narušava pravilan matematički opis unosa količine kretanja iz pritoke u reku.



Relativna greška od  $\pm 3\%$  za sve ostale modele nalazi se u granicama greške merenja dubina/nivoa, što je sa praktičnog, inženjerskog stanovišta, sasvim zadovoljavajuće. Ovako mala relativna greška u proceni uzvodnih dubina u uslovima ustaljenog tečenja pokazuje i to da je za  $Fr < 0.4$  uticaj neravnomernosti rasporeda količine kretanja u nizvodnom preseku pritoke praktično zanemarljiva i da se, radi pojednostavljenja proračuna, umesto ugla  $\bar{\delta}$  u preliminarnim analizama može koristiti i ugao uliva  $\alpha$ .

#### LITERATURA

- [1] Best, J. L., and Reid, I. 1984. Separation zone t open channel junctions. *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 110(11): 1588-1594.
- [2] Best, J. L., and Reid, I. 1987. Closure to "Separation zone t open channel junctions". *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 113(4): 545-548.
- [3] Biron, P., Best, J.L., and Roy, A.G. 1996b. Effects of bed discordance on flow dynamics at open-channel confluences. *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 122(12): 676-682.
- [4] Đorđević, D., 2010. Hidraulička analiza rečnih ušća primenom numeričkih modela, doktorska disertacija, Građevinski fakultet u Beogradu, Beograd, 381 str.
- [5] Gurrām, S.K., Karki, K.S., and Hager, W.H., 1997. Subcritical junction flow, *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 123(5): 447-455.
- [6] Gurrām, S. K. and Karki, S. K. 2000. Discussion of "Subcritical open-channel junction flow". *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 126(1): 87-89.
- [7] Hager, W. H., 1987. Discussion of "Separation zone at open-channel junctions". *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 113(4): 539-543.
- [8] Hager, W. H., 1989. Transitional flow in channel junctions, *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 115(2): 243-259.
- [9] Hsu, C.C., Wu, F.S., and Lee, W.J., 1998a, Flow at 90° equal-width open-channel junction, *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 124(2): 186-191.
- [10] Hsu, C.C., Lee, W.J., and Chang, C.H., 1998b, Subcritical open-channel junction flow, *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 124(8): 847-855.
- [11] Kesserwani, G., Ghostine, R., Vazquez, J., Mosé, R., Abdallah, M., and Ghenaim, A. 2008. Simulation of subcritical flow at open-channel junction. *Advances in Water Resources*, Vol.31, No.2, 287-297. doi: 10.1016/j.advwatres.2007.08.007.
- [12] Ramamurthy, A. S., Carballada, L.B., and Tran, D. M. 1988. Combining open channel flow at right angled junctions. *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 114 (12): 1449-1460.
- [13] Shabayek, S., Steffler, P., and Hicks, F. 2002. Dynamic model for subcritical combining flows in channel junctions. *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 128(9): 821-828.
- [14] Taylor, E. H., 1944. Flow characteristics at rectangular open-channel junctions, *Transactions*, ASCE, 109: 893-912.

## ANALYTICAL MODELS OF CONFLUENCES: A SURVEY AND MODELS' ASSESSMENT

by

Dejana ĐORĐEVIĆ, MSc Civ.Eng.  
Faculty of Civil Engineering, Belgrade

## Summary

Assumptions upon which development of 1D models of free-surface flow rest are not valid at open-channel junctions. Thus, the 1D flow equations cannot be used for calculation of upstream flow depths, or water levels in a dendritic channel network. To facilitate design of river confluences and/or networks of drainage canals, about ten analytical models have been proposed since 1940-ties. Development of these models was either based on the theoretical considerations, or on the combination of the theoretical considerations and laboratory experiments. The models are valid only for the confluences with equal channel-bed elevations (concordant beds confluences), the majority being derived for the subcritical flow. In this paper three models are examined in detail, two of which are based on the assumption of equal upstream flow depths (the models of Gurram et al. and Hsu et al.), whereas the third one allows different upstream flow

depths and different channel widths of the combining channels (the model of Shabayek et al.). The paper indicates some inconsistency in derivation of the equal-depths models and assesses the influence of the inconsistent terms through comparison with the existing experimental data. It is found that, in the steady flow conditions, taking into account the junction angle instead of the flow angle at the tributary entrance to the confluence results in negligible difference in the prediction of upstream flow depth. The future research should reveal how the flow angle  $\delta$  varies with the junction angle  $\alpha$  and the discharge ratio of the tributary and main river flows –  $\delta=f(\alpha, q)$ .

Key words: river confluence, open-channel junction, 1D flow, analytical model

Redigovano 28.09.2011.