XXIII konferencija za nacrtnu geometriju
i inženjersku grafiku

MoNGeometrija 2006

The 23rd Conference on Descriptive Geometry and Engineering Graphics

MoNGeometrija 2006

ZBORNIK RADOVA

Proceedings

-naučni skup sa međunarodnim učešćem-

Novi Sad, 22.-24. septembar 2006.

VUELMD 2 VHUELD

ORGANIZACIONI ODBOR (ORGANIZING COMMITTEE)

1. Dr Ratko Obradović, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, predsednik organizacionog Odbora
   (Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Conference Chairman)
2. Dr Radovan Štulić, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
   (Faculty of Technical Sciences, Novi Sad)
3. Dr Radojka Gligorić, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad
   (Faculty of Agricultural Engineering, Novi Sad)
4. Dr Nevena Pušić, Prirodno matematički fakultet, Novi Sad
   (Faculty of Science, Novi Sad)
5. Dr Tima Segedinac, Viša tehnička škola, Novi Sad
   (Upper Technical School, Novi Sad)
6. Marija Zuber, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
   (Faculty of Technical Sciences, Novi Sad)
7. Vesna Stojaković, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
   (Faculty of Technical Sciences, Novi Sad)
8. Željko Baričić, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
   (Faculty of Technical Sciences, Novi Sad)
9. Nebojša Jakica, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
   (Faculty of Technical Sciences, Novi Sad)

NAUČNI ODBOR (SCIENTIFIC COMMITTE / BOARD)

1. Dr Lazar Dovniković, FTN, Novi Sad, počasni predsednik Odbora
   (Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Honorary Chairman)
2. Dr Radovan Štulić, FTN, Novi Sad, potpredsednik Odbora
   (Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Vice-Chairman)
3. Dr Ratko Obradović, FTN, Novi Sad
   (Faculty of Technical Sciences, Novi Sad)
4. Dr Irena Čomić, FTN, Novi Sad
   (Faculty of Technical Sciences, Novi Sad)
5. Dr Jovanka Nikić, FTN Novi Sad
   (Faculty of Technical Sciences, Novi Sad)
6. Dr Radojka Gligorić, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad
   (Faculty of Agricultural Engineering, Novi Sad)
7. Dr Nevena Pušić, Prirodno matematički fakultet, Novi Sad
   (Faculty of Science, Novi Sad)

10.Dr Tima Segedinac Viša tehnička škola, Novi Sad
   (Upper Technical School, Novi Sad)

Recenzenti / Reviewers:
1. Dr Lazar Dovniković
2. Dr Radovan Štulić
3. Dr Ratko Obradović

Tehnička obrada teksta /Text formatting:
1. Dr Ratko Obradović
2. Vesna Stojaković
3. Nebojša Jakica
4. Željko Baričić

Urednik / Editor
Doc. dr Ratko Obradović

Izdavač / Publisher:
Fakultet tehničkih nauka
Trg Dositeja Obradovića 6
21121 Novi Sad
Srbija
http://www.ftn.ns.ac.yu/

ISBN 86-7892-007-6

Tiraž / Number of copies printed: 100 kompakt diskova / CD

PREDGOVOR

Veoma smo zadovoljni činjenicom da ove godine na našem Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu imamo priliku da ugostimo drage kolege i prijatelje iz zemlje i inostranstva, koji su se u velikom broju odazvali pozivu na XXIII konferenciju za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku MoNGeometrija 2006.

Primljena su i u Zborniku radova prikazana 33 naučna rada, od kojih su četiri rada iz inostranstva, jedan iz Austrije (Beča) od profesora dr Helmuta Štahela (Hellmuth STACHEL), dva iz Republike Makedonije, prof. dr Risto TAŠEVSKI i Sofija SIDORENKO i jedan rad iz Republike Mađarske (Budimpešta) od autora dr Katalin BOGNÁR-MÁTHÉ, dr Attila BÖLCSKEI i Csilla SÖRÖS.

U Zborniku radova su prikazani originalni naučni radovi kao i pregledni radovi koji obuhvataju tri ključne teme Konferencije:

1. NACRTNA GEOMETRIJA
2. TEORIJSKA GRAFIKA I PRIMENJENA GEOMETRIJA
3. EDUKACIJA U GEOMETRIJI I INŽENJERSKOJ GRAFICI

Sve tehničke poslove oko pripreme Zbornika radova obavili su članovi organizacionog Odbora. Nadamo se da je naporan rad urodio plodom i da smo dobili kvalitetnu i preglednu, ovog puta elektronsku verziju Zbornika radova. Na prelazak sa štampanog materijala na kompakt diskove prvo su nas navela iskustva naših kolega sa Fakulteta tehničkih nauka, koji sve češće prave isključivo elektronske verzije Zbornika radova. Sa druge strane, cena realizacije ovakvog Zbornika je gotovo deset puta manja od štampane verzije. Stoga se nadamo da nam nećete zameriti što smo se odlučili na ovakav korak.

Kod formatiranja smo koristili program Microsoft Word pomoću kojeg smo kreirali ceo dokument. Iz ovako formatiranog dokumenta, svaki autor će moći bilo koji deo Zbornika lako da pretvori u štampanu verziju.

Preliminarni pregled pristiglih radova uradio je naučni odbor, nakon toga Odbor za recenziju uradio je detaljne recenzije i pozitivno je ocenio sve pristigle radove, uz manje korekcije pojedinih radova.

Veliku zahvalnost dugujemo Autonomnoj pokrajini Vojvodini, odnosno Pokrajinskom sekretarijatu za nauku i tehnološki razvoj, koji nas je finansijski podržao. Time nam je omogućeno da tehnički realizujemo Konferenciju i bez ove pomoći to svakako ne bismo mogli.

ORGANIZACIONI ODBOR KONFERENCIJE

Sadržaj

PRAVILNE KONKAVNE KUPOLE DRUGE VRSTE

Mr Marija Obradović[41]

Rezime

Pod pojmom kupole podrazumeva se poliedar koji se sastoji od dva pravilna poligona: n-tougaonika i 2n-tougaonika u paralelnim ravnima, povezanih naizmenicnim nizom kvadrata i jednakostranicnih trouglova, odn. Dzonsonova tela J3, J4 i J5. Medjutim, moguce je formirati i takvu kupolu koja bi za polazni n-tougaonik imala i poligon kod kojeg je n ≥ 6, a ciji bi omotac cinili nizovi jednakostranicnih trouglova, formirajuci pri tome nekonveksni poledar. Nacin formiranja ovakve kupole zasniva se na nabiranju mreze od mxn trouglova koja obrazuje traku, cijim se presavijanjem dobija deltaedarski omotac. Opisane su kupole koje nastaju nabiranjem omotaca koji se sastoji od dva niza (7xn) jednakostranicnih trouglova, te su zato nazvane kupolama druge vrste i koje mogu imati polazne poligone od n=4, do n=10. Dati su i osnovni parametri ovih tela i njihovo geometrijsko tumacenje.

Ključne reči: poliedar, poligon, kupola, mreža, omotač.

1. UVOD

Postaviti definiciju nekog pojma u današnje vreme postaje veoma težak i problematičan zadatak, budući da se one uglavnom zadržavaju na već poznatim saznanjima o posmatranom pojmu, tako da svako novo zahteva proširenje date definicije. Problem se pojavljuje kao konstanta u svakom iole studioznijem pokušaju da se neki (konkretno – geometrijski) pojam sagleda iz što šire i univerzalnije perspektive. Kada

---

[41]Marija Obradović, magistar, asistent, Građevinski fakultet, Beograd

govorimo o kupolama kao geometrijskim telima, definicije obuhvataju svega tri poznata poliedra, Dzonsonova (N.W. Johnson) tela J3, J4 i J5, prikazana na **sl.1**. Radi se o konveksnim poliedrima koji se sastoje od dva pravilna poligona n-tougaonika i 2n-tougaonika u paralelnim ravnima, povezanih naizmenicnim nizom kvadrata i jednakostranicnih trouglova.

J3 J4 J5

Slika 1

U ovom slučaju, n-tougaonici su od n=3 do n=5, pri čemu se dakle ne odmiče od geometrije Arhimedovih tela i Dekartovog principa o deficitu ugla za konveksna tela. Samim tim, ako bi smo govorili o kupolama koje bi bile nekonveksne, u najširem smislu (koji obuhvata i konkavne, a takođe i kvazi-konkavne strukture[42]), dolazimo do jednog nedefinisanog prostora, koje zahteva- ili uvodjenje novih termina u ionako prekomplikovani geometrijskli glosarijum, ili proširenje starih definicija. U do sada poznatim sistematizacijama, kao poliedar sa geometrijskom strukturom i zakonitostima najsrodnijim kupoli, pojavljuju se *kuploid*, koji za poligone osnova ima upravo zvezdaste, nekonveksne poligone (pentagram, heksagram...), tako da prividna konkavnost njegovih strana nastaje kao posledica njihove intersekcije. Medjutim, u konkretnom slučaju kojim se ovaj rad bavi, ne radi se o takvoj vrsti tela, već o konkavnim telima kod kojih ne postoji intersekcija strana mimo ivica posmatranog tela, a čiji su elementarni poligoni, koji učestvuju u građi samog tela – pravilni i konveksni.

[42]...kao one koje u svoju geometriju uključuju zvezdaste poligone, čije ivice zapravo zaklapaju ugao manji od π, gledano iz unutrašnjeg prostora, pa su usled ove logičke aporije – Solomonski nazvane “nekonveksnim”, kao širim pojmom u odnosu na “konkavne” koje nedvosmisleno poštuju definiciju: poligon ili poliedar je konkavan ukoliko postoje dve susedne strane između kojih je (diedralni) ugao veći od 180³/#gledano iz unutrašnjeg prostora.

2. POLAZNE PRETPOSTAVKE

Posmatrajući većinu do sada sistematizovanih poliedarskih grupa, polazeći od Platonovih tela, preko Arhimedovih do Dzonsonovih tela ili čak i Stjuartovih toroida, primećujemo poštovanje odredjenih kriterijuma koji se tiču geometrijskih pravilnosti uočljivih na datim poliedrima. Osim konveksnosti (u slučju Stjuartovih poledara – kvazi-konveksnosti[43]), redovnjo se javljaju i sledeće karakteristike, kao što su: *jednakoivičnost, pravilnostranos*t (sve strane su pravilni poligoni), *ravanska simetrija* – u značajnom broju slučajeva to je čak multilaterana radijalna simetrija, *nedegenerisanost* tj. da se po jednoj ivici seku samo dve strane, da ne postoji komplanarnost susednih strana i da ne postoje dva koincidentna temena, i *sagledljivost svih strana iz spoljašnjeg prostora*. (Ako bi smo posmatrane grupe poliedara sada proširili na još 4 nekonveksna pravilna Kepler-Poansoova tela, videli bi smo da poslednji kriterijum samo delimično važi, jer postoji delimična nevidljivost pojedinih strana ovih tela, medjutim, ona ionako ne bi bila od bitne važnosti za ovo istraživanje, jer se ovde ne postavlja pitanje kuploida sa zvezdastim poligonima osnova.)

Postavljajući pitanje: zbog čega ni jedan od poliedara iz posmatranih grupa ne uključuje u svoju geometriju takve poligone kao što su heptagon (sedmougao) ili nonagon (devetougao), dolazimo do ekskluzivnosti ovih ravnih likova, koje je detaljno proučavao Ferma[44], dokazavši konstruktibilnost pravilnog poligona u zavisnosti od broja njegovih temena (strana):

Pravilan n-tostranik je moguće konstruisati šestarom i lenjirom ako i samo ako:

1. *n je Fermaov prost broj*[45]
2. *n je potencija broja 2*

---

[43] Kvazi-konveksan – izraz koji je američki profesor Boni Stjuart (Bonie M. Stewart) uveo da bi okarakterisao grupu poliedara - toroida koje je proučavao, a koji se sastoje od spoljašnjeg - konveksnog poliedra iz kojeg je izdubljen unutrašnji poliedar ekvivalentne visine.

[44] Pjer de Ferma (Fermat Pierre de -1601-1665) francuski advokat koji se u slobodno vreme bavio matematikom; pripisuju mu se nezavisna otkrića analitičke geometrije, verovatnoće i mnogih nikada objavqenih teorema. Uprkos tome, važi za jednog od najvećih matematičara svih vremena.

[45] Fermaov prost broj je takav broj za koji važi: $F_n = 2^{2^n} + 1$

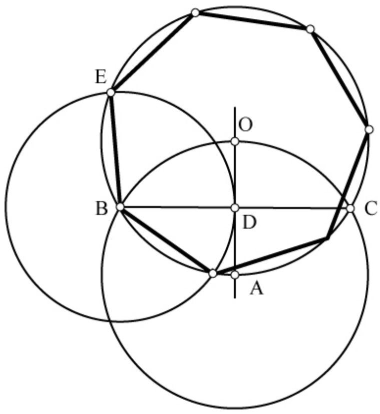
3. *n je proizvod potencije broja 2 i različitih Fermaovih prostih brojeva.*

Zato pravilni 7-mougaonik nije moguće konstruisati, jer je 7 prost broj, ali ne i Fermaov prost broj, a 9-tougaonik nije moguće konstruisati zato jer je 9 kvadrat Fermaovog broja 3 (niti je prost, niti je u potenciji broja 2), 15-tougao je moguće konstruisati, jer je proizvod brojeva 3 i 5, a 3 i 5 su različiti Fermaovi prosti brojevi.

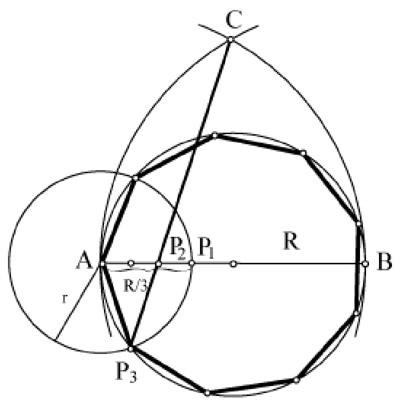
S obzirom na nerešivost problema trisekcije ugla klasičnim priborom (koji je i bio jedino orudje antičkih geometričara[46]) i samim tim aritmeticku neuhvatljivost geometrije 7-mougla i 9-tougla, ovi poligoni su i bili ostavljani po strani. Naravno, ovo ne znači da heptagon i nonagon kao pravilni poligoni ne mogu učestvovati u strukturi poliedra, koji bi ispoštovao sve gore navedene kriterijume geometrijskih pravilnosti.

Budući da je Ferma dokazao da egzaktne konstrukcije ovih poligona nisu moguće, postoji niz približnih metoda za njihovu konstrukciju od kojih su sve date na **slici 2.**

slika 2



d,#približna konstrukcija heptagona



d,#približna konstrukcija heptagona

---

[46] Izbeci cemo imena Platona i Arhimeda, jer imenovana tela nose nazive prema najčuvenijim radovima dvojice velikoh umova antičkog doba. Istorijska istračivanja su, međutim, dokazala da se otkriće 5 pravilnih poliedara pripisuje Tetetusu, a za otkriče Arhimedovih tela je zapravo zaslučan Papos.

#

Dakle, postavlja se pitanje generisanja takvog poliedra koji bi uključivao heptagon ili nonagon kao sastavne poligone, uz dopunjavajuće poligone koji bi takođe bili pravilni, a koji bi ispunjavao uslove ravanske simetrije, nedegenerisanosti i egzaktne uklopljivosti strana u konvergentnu strukturu - koja zatvara celoviti prostor, ograničavajući telo.

Tragajući za ovakvim rešenjem, pojavljuje se čitav niz srodnih poliedara, koji unekoliko poštuju način generisanja kupole (Dzonsonovih tela), s tim što izostaje kriterijum konveksnosti i što se u omotaču ovih tela pojavljuju dva poligonska niza (umesto naizmeničnih kvadrata i jednakostraničnih trouglova[47]) sastavljena isključivo od jednakostraničnih trouglova. Zbog ovih osobina, kupole o kojima će biti reč, nazvane su *konkavnim kupolama druge vrste*. One obuhvataju kupole kod kojih se kao primarni poligon osnove može pojaviti poligon sa n= 4-10. Dakle, 7x2=14 tela bi poštovalo istu genezu i geometrijsku logiku, dok bi kod trougaone kupole druge vrste došlo do degeneracije i usled komplanarnosti strana, ovo bi telo zapravo postalo poznati Arhimedov *trunkovani tetraedar*.

3. GENEZA KONKAVNIH KUPOLA DRUGE VRSTE

Još u 16-tom veku, čuveni Nemački renesansni slikar Albreht Direr ispitivao je mogućnosti nastanka poliedara savijanjem ravne mreže. Međutim, nekonveksni (uže: konkavni) poliedri, budući da sačinjavaju beskonačno veliku familiju, bili su veoma retko predmet istraživanja naučnika, zbog toga što je sam problem uvođenja reda i odabira kriterijuma za sistematizaciju ovako široke grupe tela zaista kompleksan.

Ako bi smo, poštovanjem pretpostvki iznetih u prethodnom poglavlju, pokušali da oformimo poliedar ili grupu poliedara, koji bi mogli uključivati poligone kakav je 7-mougaonik ili 9-tougaonik, jedno od rešenja ima upravo polaznu ideju u sklapanju poliedra korišćenjem njegove mreže.

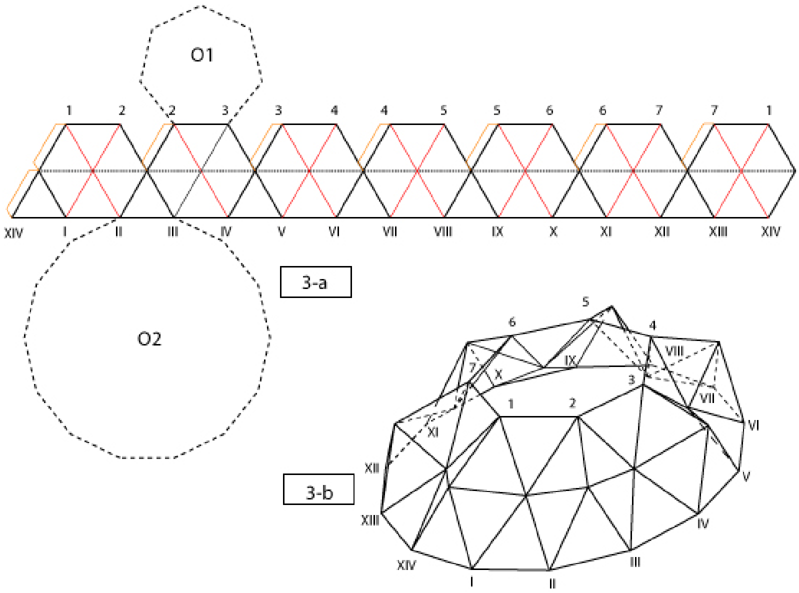
---

[47] Dzonson je tela koja su po strukturi vema srodna kupolama, ali čiji se omotač sastoji od niza koji čine udvojeni jednakostranični trouglovi, naizmenično uklopljeni sa petouglovima – nazvao rotundama. Tim pre naziv “kupola” prigoduje telima koja su predmet rada, jer se može govoriti o strukosti nizova trouglova koji obrazuju omotač, čime se određuje i vrsta kupole.

Na **slici 3-a** dat je izgled mreže omotača, koja se sastoji od dvoredne trake jednakostraničnih trouglova, obrazovane tako da se savijanjem i lepljenjem odgovarajućih ivica mreže može dobiti zatvoreni, prstenasti fragment poliedarske površi[48] (**slika 3-b**). Primećujemo da su trouglovi u ovoj mreži raspoređeni u takvom poretku da obrazuju šestougaonike, međusobno spojene veznim trouglovima. Broj ovih jediničnih «šestougaonika» odrediće i broj n osnove I (O1), koja će biti jedan od bazisa (na pr. gornji) budućeg poliedra. Takođe, može se primetiti da je sa suprotne strane mreže broj ivica, uključujući i dodate ivice veznih trouglova – dvostruko veći, tako da one daju broj 2n, koji će odrediti poligon osnove II (O2), drugog bazisa poliedra. Naravno, da bi smo mogli da savijemo i sklopimo ovakvu mrežu, a znajući da je 6 jednakostraničnih trouglova obrazovanih oko zajedničkog temena nemoguće sklopiti u konveksnu poliedarsku temenu figuru (jer je deficit ugla u ovakvom sklopu jednak 0), dolazimo do zaključka da će formirani fragment poliedarske površi iz date mreže – obavezno biti konkavan, tj. da će ovakav omotač imati temena koja su udubljena unutar samog budućeg tela. Jednakoivičnost ovakve strukture omogučava da se dati fragment može dopuniti pravilnim n-tostranim poligonima O1 i O2, čime se zatvara unutrašnji prostor ovakve poliedarske površi, a sama na ovaj način formirana struktura (koja se može shvatiti i kao površ koja ograničava telo) poprima geometriju koja sledi morfološku logiku Dzonsonovih kupola J3, J4 i J5, pa je iz ovog razloga nazvana: konkavnom kupolom II vrste.

---

[48] Ponovo se mora pozvati na različitost brojnih definicija u tumačenju samog pojma poliedra, od kojih neke pod poliedrom podrazumevaju telo, neke površ koja pri tome mora biti konvergentna i zatvarati celoviti prostor, dok neke, najnovije, pod poliedarskom površi podrazumevaju čak i otvorene površi koje na pr. referiraju topologiji prirodnog terena. Zanimljava zapažanja i analize na ovu temu mogu se pročitati u članku prof. Branka Grunbauma: "Are Your Polyhedra the Same as My Polyhedra?" Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift. B. Aronov, S. Basu, J. Pach, and Sharir, M., eds. Springer, New York 2003, pp. 461 – 488.



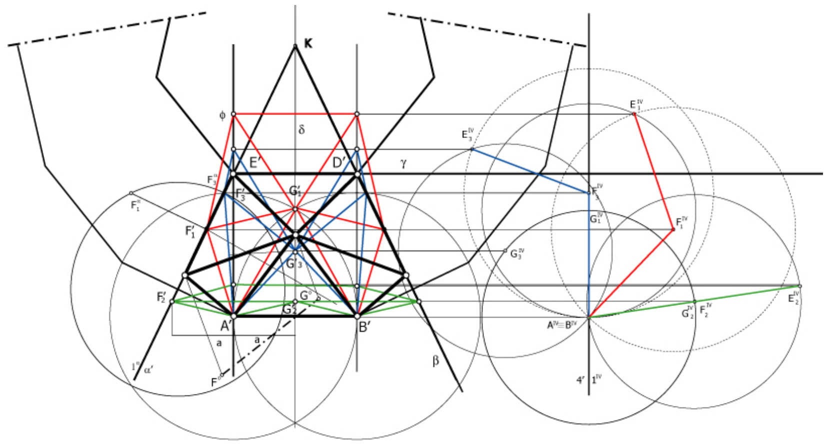
slika 3

Da bi se jasnije sagledala geometrija ovakvog poliedra, pogledajmo na koji način bi smo mogli da definišemo parametre ovog tela.

Na **slici 4** prikazan je samo jedan segment omotača tela, koji prikazuje jediničnu ćeliju ABCDEGF koja učestvuje u njegovoj građi, a koja je sačinjena od 6 jednakostraničnih trouglova formiranih oko zajedničkog temena, označenog kao G. Da bi smo mogli da definišemo željene parametre, neophodno je da postavimo prethodne polazne uslove koje ovakav prostorni heksaedar mora da ispunjava, kako bi radijalnim nizanjem njemu identičnih ćelija oko ose ***k***, mogla biti zatvorena geometrijska celina koja bi odgovarala omotaču pravilne konkavne kupole II vrste:

1) Ravni α i β određene su osom ***k*** koja spaja centroide osnova O1 i O2 i susednim temenima osnove O1 (E i D), tako da je ugao između njih jednak $2\pi/n$ (pri čemu je n broj temena osnove O1).
2) Prostorni heksaedar ABCDEFG je ravanski simetričan u odnosu na ravan δ, simetralnu ravan ivica AB i ED.
3) Teme F pripada ravni α, a teme C ravni β

4) Temena A i B pripadaju osnovi O2.



slika 4

Da bi smo odgovorili na pitanje – kako pronaći visinu ovakve kupole, odnosno visinsku razliku između ravni osnova O1 i O2, treba uvideti da je problem koji se javlja višeg stepena i nije egzaktno rešiv klasičnim priborom – šestarom i lenjirom, bilo da se radi o heptagonalnoj, nonagonalnoj, ili bilo kojoj od konstruktibilnih osnova n=4, 5, 6, 8 ili 10. Razlog leži u tome što se prostorni heksaedar ABCDEFG ponaša kao mehanizam, čije će tačke prilikom svog kretanja opisivati krive poznate kao *klizne krive*[49], krive višeg reda, koje se javljaju najmanje kao kvartike, a često i kao sekstike ili oktike. Tako da, ako želimo da odredimo trajaktoriju koju opisuje teme E (odn. D, zbog ravanske simetrije) po ravni ϕ koja prolazi temenom osnove O1 i ortogonalna je na ivicu AB (=*a*), treba da definišemo kretanje ovog mehanizma, uz poštovanje gore navedenih uslova. Dakle, osim datih polaznih pretpostavki 1) - 4), pretpostavimo i da:

5) prostorni heksaedar se kreće oko ivice AB koja bi bila fiksirana osa
6) teme E se kreće po ravni ϕ, paralelnoj ravni simetrije δ
7) centralno teme G prostornog heksaedra je udubljeno/ ispupčeno, gledano iz spoljašnjeg prostora

---

[49] A.A. Savelov – *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.- str.214-240.

Poslednja napomena je bitna utoliko što, u zavisnosti od ovog uslova dobijamo i različite konačne visine kupole, kao šro se može i eksperimentalno proveriti kroz izradu modela od kartona.

Polazeći od ovih pretpostavki, možemo iterativnim putem potražiti položaje tačke E_n na ravni ϕ, u zavisnosti od pretpostavljenog početnog položaja centralnog temena G_n.

Na **slici 5** vidimo konačan ishod jednog ovakvog postupka, gde se celokupna dobijena trajaktorija temena E sagledava u transformacijskoj ravni 4^{IV}, postavljenoj paralelno ravni ϕ u kojoj se kriva trajaktorije nalazi, a koja je, dakle, ortogonalna na ivicu AB osnove O2. Postupak za nalaženje položaja temena E[50], zasniva se na preseku pramena lopti *r=a* sa centrima u temenima G_n, sa identičnom loptom centra A, što će dati seriju krugova sa centrima na kružnoj trajaktoriji temena G. Ovi će krugovi u preseku sa ravni α, dati položaje temena F_n, iz kojih zatim, postavljanjem novih lopti *r=a* - određujemo presečne krugove sa početnom loptom temena G_n. Dobijeni krugovi u preseku sa ravni ϕ, daju traženi položaj temena En. Naravno, u svakoj od iteracija, dobijamo po dva rešenja za temena F i E, od čega jedno od rešenja za teme F odgovara varijanti za ispupčeno, a drugo za udubljeno teme G, dok će u slučaju temena E, jedno rešenje uvek biti isto – poklapaće se sa temenom A, jer ovo teme takođe leži u simetralnoj ravni ivice FG, koja je spojnica centara presečnih lopti, a istovremeno je na ravni ϕ.

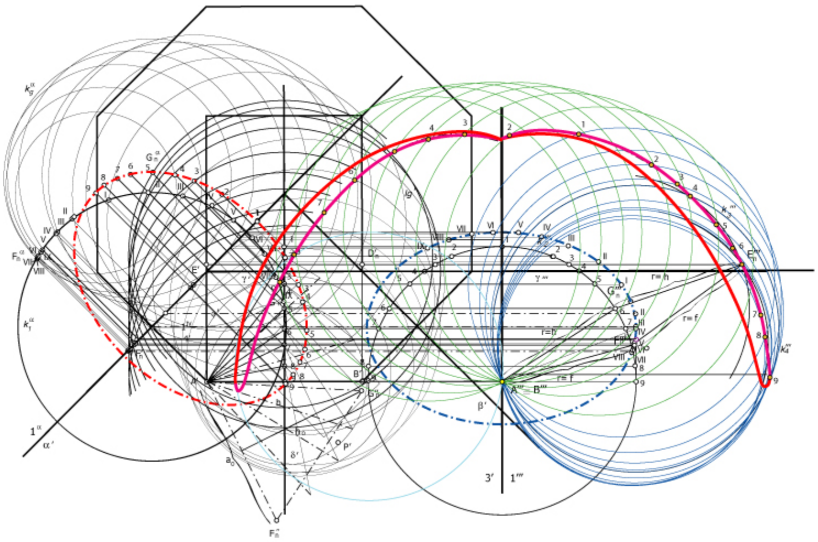
Trajaktorija temena E dobija se spajanjem ovih iterativno dobijenih tačaka, a grafički dobijeno rešenje svedoči da se radi o zatvorenoj krivoj, koja će u preseku sa zračno viđenom ravni γ u kojoj se teme E nalazi, dati 4 rešenja, po 2 sa svake strane usvojene ravni osnove O2 (dakle, za položaj osnove O1 sa gornje ili donje strane date osnove O2), i to: 2 za slučaj udubljenog i 2 za slučaj ispupčenog centralnog temena G.

Kao što se može videti sa slike 5, dobijena kriva nalikuje ravnoj projekciji Vivijanijeve krive, što bi u opštem slučaju bila

---

[50] Kompletan postupak, sa 3 konstruktivne varijante rešenja, detaljnim objašnjenjima i tumačenjima, dat je u doktorskoj disertaciji istog autora, *Konstruktivno - geometrijska obrada toroidnih deltaedra sa pravilnom poligonalnom osnovom*, poglavlje V – koja je u trenutku pisanja rada u pripremi.

kvartika, s tim da se u samopresečnoj (dvostrukoj) tački posmatrane trajaktorije javlja dvostruki šiljak (kuspidalna tačka), što će savakako podići red ove krive[51], potvrdivši da ne postoji egzaktno konstruktivno rešenje koje se može ostvariti klasičnim geometrijskim priborom, što međutim, ne isključuje moguća rešenja primenom drugih savremenih metoda, od kompjuterske grafike, do numeričkih iteracija, koje bi dale veoma približna rešenja, sa greškom na 7-moj decimali, što je za praktično izvođenje – zanemarljivo.

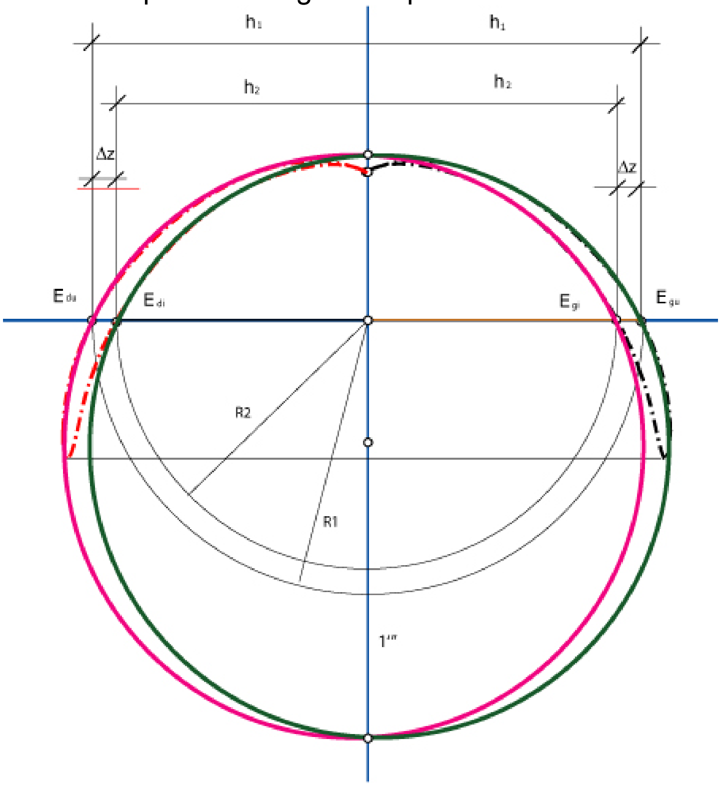


slika 5

Za samu konstruktivno - geometrijsku primenu, možemo pribeći aproksimaciji ove krive jednostavnijom i operativnijom krivom - krugom, koji bi dao grafičko rešenje u granicama prihvatljive greške. Potrebno je da se, umesto brojnih iteracija, izaberu tri karakteristične tačke, Koje bi dale krug sa najmanjim odstupanjem od dobijene faktičke krive trajaktorije.

[51] U doktorskoj disertaciji Š10Ć daju se potvrde teze da se radi o krivoj osmog reda- oktici, s tim što obim ovog rada ne dozvoljava šire digresije na ovu temu, niti je dokaz same teze od presudnog značaja za dalje zaključke.

Na **slici 6** data je aproksimacija dobijene krive krugom, na kojoj se jasno može sagledati da krug u velikoj meri superponira krivu u okolini očekivanog rešenja, i da je stoga ovakav metod opravdan za grafičku primenu.



slika 6

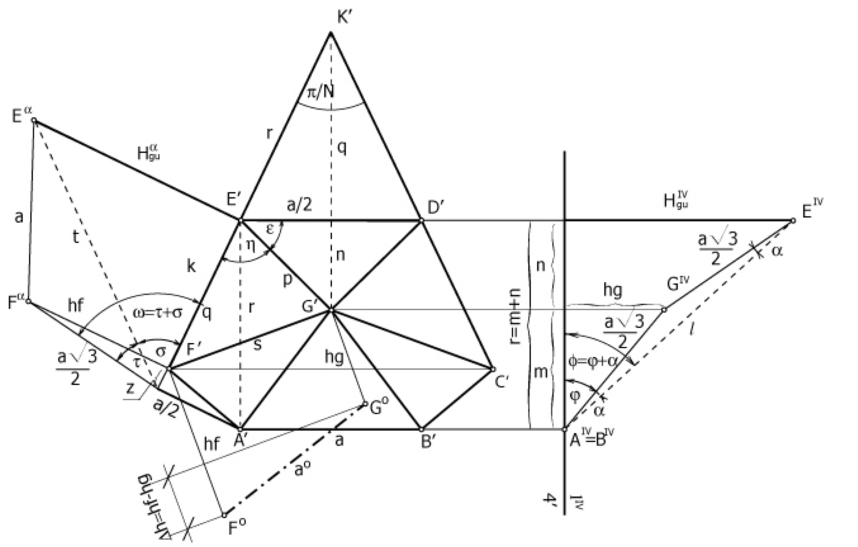
Na osnovu iznetih uvida možemo zaključiti da je primena datog približnog postupka praktično opravdana, jer ujedno daje rešenja za oba slučaja – i za ispupčeno i za udubljeno centralno heksaedarsko teme G, već na osnovu samo 3 odabrane polazne tačke, od kojih se, što je veoma bitno, sve tri moraju odnositi na istu varijantu centralnog temena G[52]. Sa slike 6 vidimo da će

1. [52] Prilikom odabira polaznih temena Gn, odn. Fn – ne sme se prenebregnuti pretpostavka o tome da li je posmatrani prostorni heksaedar sa udubljenim ili ispupčenim centralnim temenom G, jer u suprotnom dolazi do zamene tačaka na delu krive – trajaktorije i

visinske razlike između temena osnove O1 i O2 biti različite za Δz, u zavisnosti od toga da li će centralno teme G biti udubljeno – pri čemu dobijamo veću visinu h_1, ili ispupčeno, pri čemu dobijamo manju visinu h_2.

Znajući visinu kupole, problem nalaženja ostalih metričkih odnosa i parametara postaje trivijalan, i rešava se nekim od klasičnih nacrtno-geometrijskih postupaka – transformacijom i rotacijom.

Osim Konstruktivno-geometrijskog metoda u rešavanju problema nalaženja visine jedne pravilne konkavne kupole II vrste, može se pribeći i analitičkim metodama, pa se putem postavljanja odgovarajućeg algoritma, mogu primeniti iterativni numerički postupci putem nekog od kompjuterskih softvera (autor je primenila MicroSoft Excell). U ovom radu, kao ilustracija, dat je matematički algoritam, postavljen prema **slici 7**, za nalaženje parametara konkavne kupole II vrste kod koje je centralno teme G heksaedarskog skopa jednakostraničnih trouglova – udubljeno.



slika 7

---

nemogućnosti postizanja rešenja. Uprkos tome, konstrukcija koja se primenjuje i zasniva na ovim trima tačkama – daje rešenje i za jednu i za drugu varijantu kupole!

Ovaj će algoritam važiti za svaku osnovu koja bi se mogla pojaviti kao poligon O1, od kvadrata do dekagona. Trougao je poligon koji je izostavljen iz ove sistematizacije, jer bi, iako bi algoritam u potpunosti važio i za ovu osnovu, došlo do degeneracije poliedra, tj. pojavile bi se susedne komplanarne strane, o čemu je već bilo reči.

Za osnove čiji broj temena premašuje n=10, morala bi se potražiti druga rešenja, jer bi ortogonalno rastojanje *r* od ivica osnova O1 do O2 premašivalo vrednost a√3, dakle dvostruku visinu jednakostraničnog trougla, što znači da bi u omotaču takve kupole raspored trouglova bio drugačiji, pa bi se eventualno moglo govoriti o pravilnim konkavnim kupolama III i viših vrsta. Dakle, na osnovu slike 7, možemo primeniti sledeći algoritam:

H1 – pretpost. **– traženo**
a=1

r= $\dfrac{\frac{a}{2}}{\sin(\frac{\pi}{N})}$ r= $\dfrac{0.5}{\sin(\frac{\pi}{N})}$

q= $\dfrac{\frac{a}{2}}{tg(\frac{\pi}{N})}$ q= $\dfrac{0.5}{tg(\frac{\pi}{N})}$

---

l= $\sqrt{H^2 + r^2}$

cosα= $\dfrac{l}{\sqrt{3}}$;α=arccos($\dfrac{l}{\sqrt{3}}$)

cos(φ+α)= $\dfrac{r}{l}$; φ+α=arccos($\dfrac{r}{l}$)

φ=(φ+α)-α

hg= $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi$

m= $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi$

n= r-m

p= $\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + n^2}$ p= $\sqrt{0.25 + n^2}$

cosε= $\dfrac{\frac{a}{2}}{p}$ ε=arccos($\dfrac{0.5}{p}$)

η=π-($\dfrac{\pi}{2}$ - $\dfrac{\pi}{N}$)-ε

η= $\dfrac{\pi}{2}$ + $\dfrac{\pi}{N}$ -ε

t= $\sqrt{H^2 + q^2}$

cosσ= $\dfrac{q}{t}$ σ=arccos($\dfrac{q}{t}$)

$$\cos\tau=\frac{t^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}{t\sqrt{3}}$$

$$\tau=\arccos\frac{t^2-0.25}{t\sqrt{3}}$$

(proizlazi iz kosinusne teoreme)

$\omega=\sigma+\tau$
(za osnove od 3 do 5: $\omega=\pi-\sigma-\tau$)

$$hf=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega$$

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega$$

$k=q-z$

$s^2=p^2+k^2-2pk\cos\eta$
$\Delta h=hf-hg$
$1=s^2+\Delta h^2$
$\Delta=1-s^2-\Delta h^2$

Primenom iterativnog postupka dolazimo do veličina, metričkih odnosa i svih parametara unutar jedne konkavne kupole II vrste. Ovaj postupak, korišćenjem savremenih softvera, koji čitav proces obradjuju u vremenu od jednog «click»-a, daje čak prednosti nad rešavanjem složene algebarske formule, jer se istovremeno dobijaju vrednosti SVIH veličina.

Kompletan listing parametara dat je samo za **heptagonalnu** konkavnu kupolu II vrste, a paralelno, date su i visine za sve ostale kupole, koje pripadaju ovoj grupi.

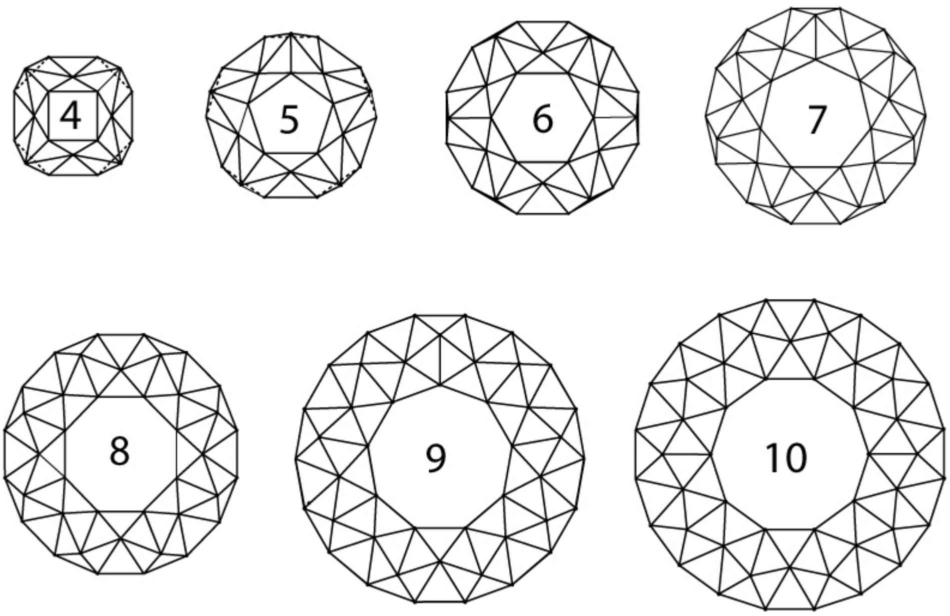
N=	**7**	ε=	0.774158	
H=	1.271407		44.35596^0	
r=	1.152382	η=	1.245438	71.35833^0
q=	1.038261			
l=	1.715943	t=	1.641481	
		σ=	0.886001	50.76412^0
α=	0.136486	τ=	0.535961	30.70829^0
	7.820066^0	ω=	1.421962	81.47241^0
φ+α=	0.834466			
	47.81136^0	hf=	0.856451	
φ=	0.69798	z=	0.128419	
	39.99129^0			
hg=	0.55657	k=	0.909842	
m=	0.663499			
n=	0.488884	s²=	0.91007	
		Δh=	0.299882	
p=	0.699291	1=	0.999999	
		Δ=	**0.000001**	

N=	**4**
h_1=	1.57828a
N=	**5**
h_1=	1.500668 a
N=	**6**
h_1=	1.399926 a
N=	**7**
h_1=	1.271407 a
N=	**8**
h_1=	1.105524 a
N=	**9**
h_1=	0.88092 a
N=	**10**
h_1=	0.52381 a

N=	**4**
h_2=	1.4116693 a
N=	**5**
h_2=	1.376382 a
N=	**6**
h_2=	1.300128 a
N=	**7**
h_2=	1.187735 a
N=	**8**
h_2=	1.033347 a
N=	**9**
h_2=	0.817384 a
N=	**10**
h_2=	0.467022 a

Sada, kada poznajemo veličine ovih tela, možemo ih grafički prikazati na raznolike načine, počevši od konstruktivno-geometrijskog metoda i korišćenja klasičnog geometrijskog pribora, ili korišćenjem savremenih kompjuterskih grafičkih softvera, koji će sa poznatim numeričkim koordinatama veoma jednostavno generisati bilo koje od razmatranih tela.

Kao što se može izvesti iz prethodnog teksta, ovakvih kupola ima ukupno 14: 7 visine h_1, sa udubljenim temenom G prostornog heksaedra i 7 visine h_2, sa ispupčenim temenom G. Na slici 8 mogu se pogledati ilustracije podgrupe pravilnih konkavnih kupola II vrste, sa većom visinom - h1 – njihove osnove, tj. ortogonalne projekcije na ravan paralelnu osnovama O1 i O2.



slika 8

Dakle, zaključujemo da je invarijantno za svakog predstavnika ove grupe, da ima dva pravilna poligona u paralelnim ravnima, jedan dvostruko većeg broja temena od prethodnog, i deltaedarski[53] omotač formiran od dvoredne trake jednakostraničnih trouglova, koja zatvara prstenastu konkavnu poliedarsku strukturu.

4. ZAKLJUČAK

Poznavanjem geometrijskih svojstava pravilnih konkavnih kupola II vrste, možemo anticipirati i postojanje srodnih poliedarskih struktura, koje bi se oslanjale na geometriju ovih tela, kao bazičnih.

Na prvom mestu, to bi bile bikupole, tela nastala spajanjem bazisa dve kupole. Po pravilu, spajanje se vrši tako što se osnova O2, dakle ona sa brojem temena 2n u odnosu na O1, usvoji kao zajednički spojni poligon novog tela, tako da ona zapravo više ne postoji kao pljošt (strana) tela, već kao njegov dijametralni ravni presek. Govoreći o bikupolama, treba napomenuti da je moguće formirati:

1. ortobikupole (dve kupole spojene tako da su ravanski simetrične u odnosu na O2)
2. žirobikupole (kupole spojene tako da su centralno simetrične u odnosu na centroid O2)
3. elongirane ortobikupole (ortobikupola je produžena tako da je izmedju osnova O2 dodat segment – pojas kvadrata)
4. elongirane žirobikupole (žirobikupola je produžena tako da je izmedju osnova O2 dodat segment – pojas kvadrata)
5. žiroelongirane bikupole (kupole su spojene tako da je izmedju njihovih osnova O2 dodat segment – pojas jednakostraničnih trouglova – 2n-tostrana antiprizma)

   što ukupno čini još 5x14=70 tela, sa prethodnih 14, ukupno 84 tela bazirana na geometriji opisanih kupola. Uz to, inkavernacijom poligona osnove O1, novom deltaedarskom strukturom, koguće je formirati i nova tela, koja sada već ne bi bila kuple, već toroidne poliedarske forme, u slučaju da je unutrašnje jezgro takođe deltaedarska forma, a spoljašnji omotač ekvivalentan omotaču bvikupole – telo bi se moglo nazvati
6. toroidni deltaedar.

Ove poliedarske forme, osim svoje geometrijske pravilnosti i zanimljivosti za proučavanje, mogu se primeniti kao prostorne

---

[53] Deltaedar (delta – grčko slovo Δ; εδρα – baza, osnova), poliedar čije su sve strane jednakostranični trouglovi.

strukture realizovane u nekom od primenljivih konstruktivnih sistema i biti na taj način primenjene i u arhitektonskoj praksi[54].

Literatura:

#
1. Grunbaum B.: *Are your polyhedra the same as my polyhedra?,* Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift. B. Aronov, S. Basu, J. Pach, and Sharir, M., eds. Springer, New York 2003, pp. 461 – 488.
2. Edwards H. M.: *Fermat's Last Theorem*, Scientific American, October 1978.
3. Johnson N.W. : *Convex Solids with Regular Faces*, Canadian Journal of mathematics, 18, division of University of Toronto Press, Toronto, Canada, 1966.
4. Pappus*, Codex Vaticanus Graecus* (prevod: Ivor Thomas), "Greek Mathematical Works, Volume II (Aristarchus to Pappus of Alexandria), Loeb Classical Library, Harvard University Press, Cambridge, 1941, strane 195-197
5. Pugh A.: *Polyhedra, a Visual Approach*, University of California Press,Berkley, USA,1976.
6. Hu R.: *Constructing a Heptagon*, Nexus Network Journal/ Architecture and Mathematics, Vol.3. Summer 2001.

Internet literatura:

7. Gettys T.: *Notes on Spherical and Convex Polyhedral Geometry*, Combinatorial geometry page, http://www.merrimack.edu/čthull/combgeom/combgeom.html
8. Hart G.: *Encyclopedia of polyhedra*, http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html 1996-2000.
9. Michon G.: *The Final Answer*, http://home.att.net/čnumericana/answer/polyhedra.htm, 2000-2004.
10. McNeill J.: *Johnson'sPolyhedra* , http://www.acnoumea.nc/maths/amc/polyhedr/p_Johnson_.htm, 2003-2004

Neobjavljeno:

11. Obradović M.: *"Konstruktivno-geometrijska obrada toroidnih deltaedara sa pravilnom poligonalnom osnovom" - doktorska disertacija u pripremi.*

[54] Primeri primene toroidnih deltaedara i njihovih fragmenata u arhitekturi, mogu se pogledati u poglavlju VIII doktorske disertacije Konstruktivno-geometrijska obrada toroidnih deltaedara sa pravilnom poligonalnom osnovom", istog autora.