

## UPOREDNA ANALIZA REZULTATA DOBIJENIH PRIMENOM ORTOGONALNIH I NEORTOGONALNIH MREŽA U MODELIMA PROSTORNOG TEČENJA – DEO 1

Mr Dejana ĐORĐEVIĆ, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu  
e-mail: dejana@grf.bg.ac.yu

### REZIME

Razmatra se primena ortogonalnih i neortogonalnih mreža u modelima prostornog tečenja. Za analizu je izabrano rečno ušće, jer je na ušću tečenje izrazito prostorno, a korito ima složen oblik. Na kvalitet rezultata dobijenih numeričkim simulacijama pored pravilnog izbora numeričke metode, bitno utiče i izbor tipa računске mreže. Neortogonalna mreža se svojim oblikom bolje prilagođava čvrstoj granici od ortogonalne, pa je pogodnija za predstavljanje računskih oblasti složenog oblika kakvo je ušće. Cilj rada je da se kroz uporednu kvalitativnu analizu rezultata utvrde razlike između dva tipa računskih mreža. Poređenje rezultata je obavljeno na osnovu tipa sekundarnog strujanja koje nastaje na ušću i nizvodno od ušća pri različitim odnosima inercijalnih sila reke i pritoke.

**Cljučne reči:** prostorno tečenje, ortogonalna i neortogonalna mreža, rečno ušće

### 1 UVOD

Dobro je poznato da jednačine kojima se opisuje kretanje fluida (Navije-Stoksove jednačine) u opštem slučaju nemaju analitičko rešenje i da se moraju rešavati primenom neke od numeričkih metoda. Takođe je poznato da primena numeričkih metoda podrazumeva odgovarajuću diskretizaciju razmatrane oblasti strujanja. U zavisnosti od dimenzionalnosti problema to su: poprečni preseki postavljeni na određenom međusobnom rastojanju (linijsko tečenje), računске mreže u ravni (ravansko tečenje) ili prostorne računске mreže (prostorno tečenje). Računске mreže zavisno od ugla pod kojim se seku stranice mreže, mogu biti ortogonalne i neortogonalne. Ortogonalne pravolinijske

mreže pogodne su za predstavljanje računskih oblasti jednostavnog oblika kao što su pravolinijske deonice pravougaonog ili složenog pravougaonog poprečnog preseka. Za predstavljanje računskih oblasti složenih oblika (u osnovi i/ili poprečnom preseku) pogodnije je koristiti ortogonalne krivolinijske ili neortogonalne mreže, jer se one svojim oblikom bolje prilagođavaju granicama oblasti strujanja. Od pravilnog izbora računске mreže umnogome zavisi kvalitet dobijenih rezultata.

Prostorne mreže mogu se prilagoditi obliku oblasti strujanja u potpunosti (u horizontalnoj i vertikalnim ravnima) ili delimično (samo u horizontalnoj ravni). Shodno tome, kod prostornih računskih mreža se, pored ortogonalnosti i neortogonalnosti u horizontalnoj ravni, može govoriti i o ortogonalnosti i neortogonalnosti u vertikalnim ravnima (poprečnim i uzdužnim presecima). O uticaju ortogonalnosti mreže u horizontalnoj ravni na kvalitet rezultata numeričkih simulacija dosta se zna iz modela ravanskog tečenja. U ovom radu razmatra se samo uticaj ortogonalnosti/neortogonalnosti mreže u vertikalnim ravnima, a dopušta se da mreža u horizontalnoj ravni (bez obzira na njen oblik u vertikalnim ravnima) bude neortogonalna gde oblik čvrste granice to nameće. U skladu sa tim, nadalje će se pod pojmom ortogonalne/neortogonalne prostorne mreže podrazumevati mreža koja se u horizontalnoj ravni prilagođava obliku čvrste granice, a u vertikalnim ravnima je ortogonalna, odnosno neortogonalna.

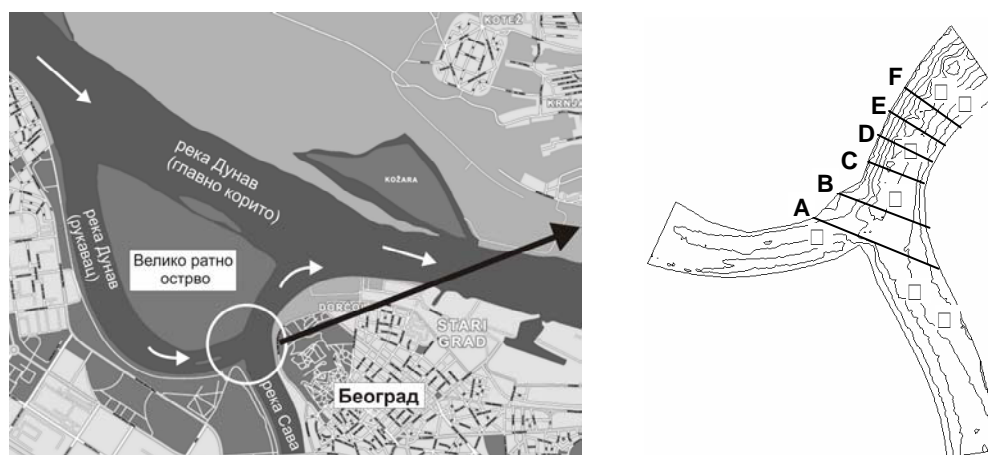
Ovaj rad, kroz uporednu kvalitativnu analizu rezultata dobijenih primenom ortogonalnih i neortogonalnih prostornih računskih mreža, treba da ukaže na to da li se, gde i koliko oni razlikuju. Naravno, poređenje rezultata ima smisla samo tamo gde je tečenje izrazito prostorno. Stoga je za analizu izabrano rečno ušće gde se usled međudejstva susrećućih tokova formira složena

strujna slika i gde zbog stalnog uzajamnog dejstva toka i rečnog dna korito ima složen oblik. Poređenje rezultata obavljeno je na osnovu tipa sekundarnog strujanja koje nastaje na ušću i nizvodno od ušća pri različitim vrednostima odnosa inercijalnih sila reke i pritoke.

## 2 OPIS PROBLEMA

Za uporednu analizu rezultata izabrano je ušće reka Save i Dunav (slika 1). Karakteristična prstenasta mreža vodotoka rezultat je prisustva Velikog ratnog ostrva

koje deli tok reke Dunav na tzv. „glavno korito” i „rukavac“. Predmet ove analize je deo ušća označen na slici 1. To je ušće reke Save (koja u ovom slučaju predstavlja reku) i rukavca reke Dunav (koji predstavlja pritoku). Razmatrano ušće je tipičan primer asimetričnog rečnog ušća sa plićim koritom pritoke, nepromenljivom širinom korita reke i prisustvom eroziona jame nizvodno od ušća. Karakteristike ovog ušća date su u tabeli 1, dok su u tabeli 2 navedene analizirane kombinacije protoka reke i pritoke.



Slika 1. Položaj ušća (levo) i topografija rečnog dna sa položajima karakterističnih poprečnih preseka (desno).

Tabela 1. Karakteristike ušća reka Save i Dunav

Reka	$B$	$\alpha$	Razlika kота dna na ušću
	[ m ]	[ ° ]	[ m ]
Sava (reka)	$\approx 290$	78	10
Rukavac reke Dunav (Pritoka)	275		
Sava (nizvodno od ušća)	$\approx 290$		

Tabela 2. Razmatrane kombinacije protoka reke i pritoke

$p^*$	Sava		Dunav		$D_R = Q_R / Q_P$	$V_R$	$V_P$	$M_R^{**}$
	$Q_R$	$Q_{total}$	$Q_P$					
[ % ]	[ m <sup>3</sup> /s ]				[ - ]	[ m/s ]	[ m/s ]	[ - ]
0.56	600	5700	1130		0.53	0.21	0.46	0.24
6.59	400	2500	385		1.04	0.17	0.19	0.93
4.53	800	2800	455		1.76	0.32	0.22	2.56
2.60	1300	3500	615		2.11	0.49	0.27	3.84
2.59	1555	2480	395		3.94	0.61	0.18	13.34
0.66	2500	2800	400		6.25	0.91	0.17	33.46

\*  $p$  je verovatnoća koincidencije protoka reke i pritoke [8]

\*\* Odnos inercijalnih sila reke i pritoke definisan je izrazom  $M_R = \rho V_R Q_R / \rho V_P Q_P$ .

### 3 NUMERIČKO MODELIRANJE

Proračun prostornog tečenja na razmatranom ušću obavljen je korišćenjem numeričkog modela SSIIM2 [9 i 11] koji rešava jednačinu kontinuiteta i Reynoldsove jednačine primenom poluimplicitne metode konačnih zapremina. Za zatvaranje ovog sistema jednačina SSIIM2 koristi  $k$ - $\varepsilon$  model turbulencije. S obzirom na to da tečenje u zoni ušća karakteriše visok stepen anizotropije, a da  $k$ - $\varepsilon$  model podrazumeva da je vrednost koeficijenta turbulentne viskoznosti u sva koordinatna pravca ista, model bi pre korišćenja trebalo kalibrisati. Budući da terenska istraživanja na razmatranom ušću još nisu završena, nije bilo moguće obaviti kalibraciju, pa su u numeričkim simulacijama korišćene originalne vrednosti konstanti  $k$ - $\varepsilon$  modela ( $C_{\mu}$ ,  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$ ,  $\sigma_k$  i  $\sigma_\varepsilon$ ). Stoga se može sprovesti samo kvalitativno poređenje rezultata.

U radu je analizirano ustaljeno tečenje. S obzirom na to da se ušće reka Save i Dunav nalazi pod uticajem uspora HE „Đerdap 1“, može se smatrati da je nivo vode u zoni ušća horizontalan, što opravdava predstavljanje površine vodenog ogledala u vidu tzv. krutog poklopca. Na površini vodenog ogledala i na granicama kroz koje voda ističe iz razmatrane oblasti strujanja, za sve promenljive primenjen je granični uslov u vidu nule prvih izvoda razmatrane veličine po prostoru. Na granicama kroz koje voda ulazi u oblast strujanja zadat je konstantan protok. Radi očuvanja mase unutar razmatrane kontrolne zapremine, na nizvodnoj granici takođe je zadat konstantan protok.

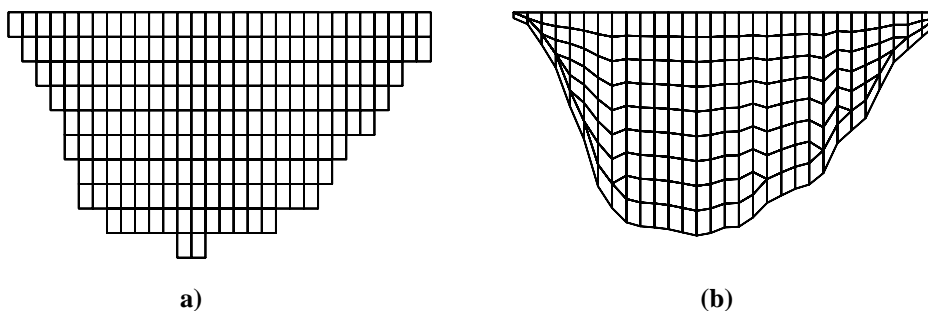
Oblast strujanja obuhvatila je korita reke i pritoke u dužini od po 1 km uzvodno od ušća i korito reke nizvodno od ušća takođe u dužini od 1 km. Dužine od po 1 km uzvodno od ušća trebalo bi da ponište mogući uticaj uzvodnog graničnog uslova na strujanje u zoni ušća. Za predstavljanje ove složene, granate oblasti

korišćena je nova vrsta računске mreže – tzv. višedelna nestrukturirana mreža. Mreža se u ovom slučaju sastoji iz dva dela – bloka od kojih jedan obuhvata korito reke Save uzvodno i nizvodno od ušća (blok 1), a drugi, korito pritoke (blok 2).

Razmatrana su dva tipa računске mreže – ortogonalna i neortogonalna. Kod ortogonalne mreže oblast strujanja je duž celog toka podeljena po dubini na slojeve jednake debljine, tako da su konačne zapremine pravi kvadri. Zbog toga je kod ortogonalnih mreža dno i u poprečnom i u uzdužnom preseku predstavljeno stepenastom linijom (slika 2a). Kod neortogonalne mreže kontrolne zapremine se oblikom prilagođavaju liniji dna, tako da pri dnu to ne moraju obavezno biti pravi kvadri, već mogu biti i prizme ili piramide, zbog čega mreža u poprečnom preseku ima izgled prikazan na slici 2b. Kod neortogonalne mreže slojevi nisu iste debljine ni po širini ni po dužini toka.

Nakon detaljno sprovedene analize osetljivosti rezultata na gustinu NEORTOGONALNE prostorne mreže [6], za uporednu analizu je kao merodavna usvojena neortogonalna mreža sledećih dimenzija:  $201 \times 31 \times 11$  (blok 1) i  $91 \times 26 \times 11$  (blok 2). Pri ispisivanju dimenzija mreže prvi broj predstavlja najveći broj elemenata u pravcu glavnog toka, drugi – najveći broj elemenata mreže u pravcu upravnom na pravac glavnog toka, a treći – najveći broj slojeva po dubini toka.

Uporedna analiza sprovedena je poređenjem rezultata dobijenih za neortogonalnu mrežu navedenih dimenzija sa rezultatima dobijenim za dve ortogonalne mreže od kojih je jedna iste veličine kao razmatrana neortogonalna mreža, dok je kod druge najveći broj elemenata u horizontalnoj ravni dvostruko veći. Njene dimenzije su:  $401 \times 61 \times 11$  (blok 1) i  $181 \times 51 \times 11$  (blok 2). Ovde se naglašava da ortogonalne i neortogonalne mreže istih



Slika 2. Ortogonalna (a) i neortogonalna (b) mreža.

dimenzija zbog različite filozofije i postupka formiranja mreže NEMAJU isti broj elemenata – neortogonalna mreža u ovom slučaju ima 51262, a ortogonalna 44464 elemenata.

Pošto je nanos na dnu reke i pritoke različite krupnoće ( $d_{50,P} = 2$  mm,  $d_{50,R} = 8$  mm), u reci i pritoci su korišćene različite vrednosti rapavosti određene na osnovu datih karakterističnih krupnoća zrna (korišćena je tzv. nehomogena rapavost).

#### 4 PRIKAZ I RAZMATRANJE REZULTATA

Rezultati dobijeni primenom ortogonalne i neortogonalne mreže ocenjeni su na osnovu slike sekundarnog strujanja u poprečnim presecima ušća i korita reke nizvodno od ušća. S obzirom na to da je reč o kvalitativnoj, a ne kvantitativnoj analizi, sekundarno strujanje je, radi bolje vizualizacije, predstavljeno strujnicama u ravni poprečnog preseka, a ne odgovarajućim vektorima brzina čiji se intenzitet menja sa promenom vrednosti odnosa  $M_R$ . Ovde se napominje da su komponente brzine u ravni poprečnog preseka za jedan do tri reda veličine manje od komponente brzine u pravcu glavnog toka. Najpre će se razmotriti kakvi se rezultati dobijaju primenom mreža istih dimenzija.

Za analizu su izabrani poprečni preseki prikazani na slici 1. Rezultati su prikazani za četiri od šest analiziranih kombinacija protoka reke i pritoke, jer su razlike za vrednosti odnosa  $M_R = 2.56$  i  $M_R = 3.84$  male. Isto važi i za rezultate koji odgovaraju vrednostima odnosa  $M_R = 13.35$  i  $M_R = 33.46$ . Uočava se da se tip sekundarnog strujanja na ušću (poprečni preseki A i B) pri istoj vrednosti odnosa  $M_R$  ne menja bez obzira na primenjen tip računске mreže (slika 3). To, međutim, nije slučaj u poprečnim presecima korita reke nizvodno od ušća gde se, nakon spajanja tokova različitih kinematičkih i dinamičkih karakteristika, novoformirani tok prilagođava granicama postojećeg korita (slika 4). Korišćenjem ortogonalne mreže dobija se sekundarno strujanje koje je pri vrednostima odnosa  $M_R > 1$  u delu poprečnog preseka na strani reke izraženije nego u slučaju korišćenja neortogonalne mreže – „vrtlozi“ sekundarnog strujanja u ravni poprečnog preseka su u ovom slučaju veći (slika 4). Pored toga, u presecima E i F se pri svim vrednostima odnosa  $M_R$  uz desnu obalu formira mrtva zona koja ne postoji ili je vrlo slabo izražena u rešenju koje se dobija primenom neortogonalne mreže.

Dobro slaganje rezultata na ušću i lošije slaganje u koritu reke nizvodno od ušća može se objasniti

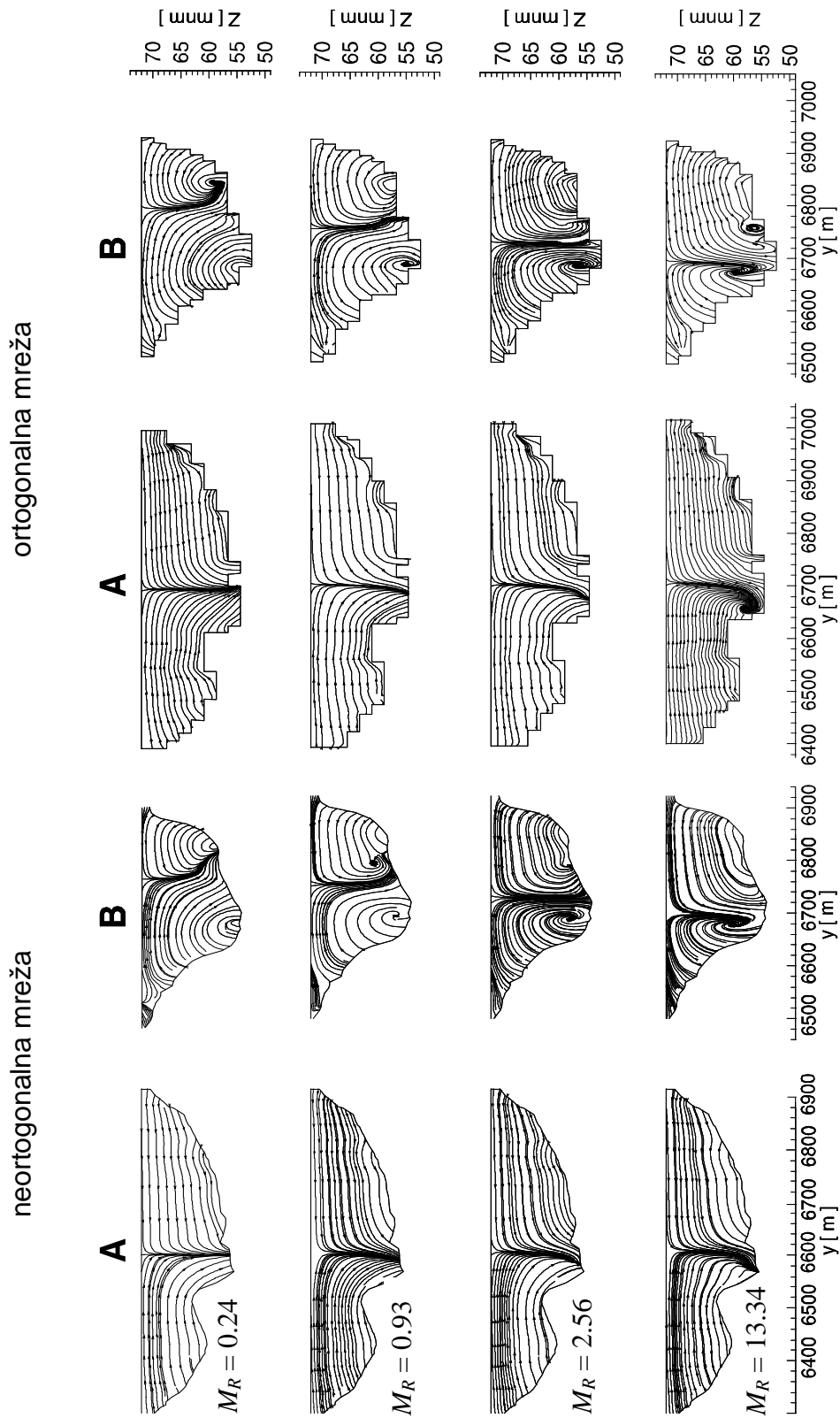
činjenicom da na ušću preovlađuju uticaji sila inercije sustičućih tokova i da oni, nakon spajanja tokova u nizvodnom koritu, postepeno slabe. Rezultati na slici 4 nedvosmisleno pokazuju da nizvodno od ušća, uporedo sa slabljenjem uticaja sila inercije, raste uticaj (oblika) čvrste granice. Za razliku od neortogonalne mreže, korišćenjem ortogonalne mreže dobija se izlomljena, stepenasta granica koja svojim oblikom utiče na formiranje nešto izmenjene strujne slike u poprečnom preseku.

Povećanje gustine ortogonalne računске mreže u horizontalnoj ravni ne menja bitno sliku sekundarnog strujanja nizvodno od ušća, jer se oblik poprečnih i uzdužnih preseka vrlo malo menja u odnosu na mrežu manje gustine (slika 5b i 5c). Rešenje dobijeno primenom ortogonalne mreže više nije osetljivo na gustinu računске mreže. Male razlike uočavaju se u detalju strujanja uz čvrstu stepenastu granicu koja je u slučaju finije mreže na pojedinim mestima „izlomljenija“ od mreže duplo manje gustine. Dakle, nezavisna rešenja (rešenja koja nisu osetljiva na gustinu računске mreže) dobijena primenom ortogonalne i neortogonalne mreže međusobno se razlikuju. Time je pokazano ono što je i intuitivno bilo jasno – da različiti tipovi računskih mreža daju različita rešenja.

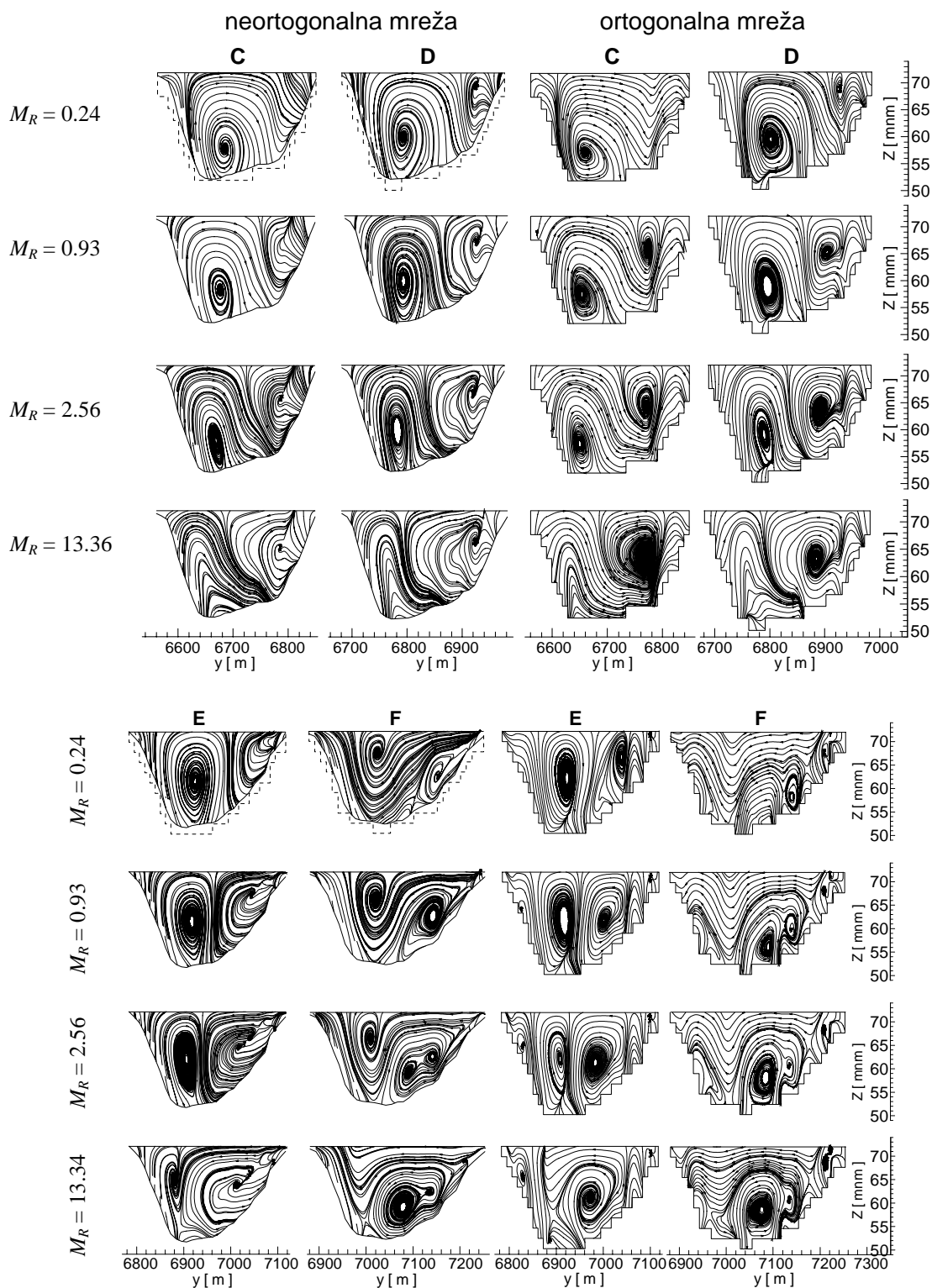
#### 5 ZAVRŠNA RAZMATRANJA

Na osnovu prikazanih rezultata numeričke simulacije prostornog tečenja na ušću reka Save i Dunav može se zaključiti da:

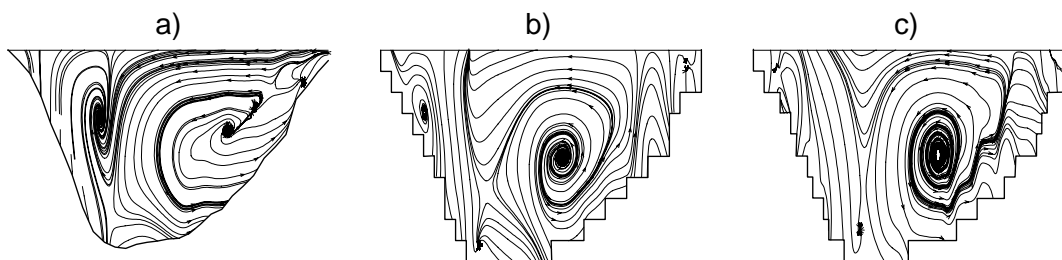
1. Tip sekundarnog strujanja na ušću ne zavisi od primenjene računске mreže – ortogonalne ili neortogonalne, već isključivo od vrednosti odnosa inercijalnih sila reke i pritoke.
2. Nizvodno od ušća na sliku sekundarnog strujanja, pored vrednosti odnosa  $M_R$  i ugla ulivanja pritoke, bitno utiče i topografija rečnog dna. Neortogonalna mreža se svojim oblikom bolje prilagođava obliku rečnog korita, pa bi se moglo očekivati da se njenom primenom dobije vernija slika sekundarnog strujanja od one koja se dobija korišćenjem ortogonalne mreže. Pri tom se pretpostavlja da je neortogonalna mreža napravljena tako da oblikom i veličinom svojih elemenata ispunjava zahteve za dobijanje stabilnog rešenja.
3. Konačni zaključci o upotrebljivosti rezultata numeričkih simulacija dobijenih primenom ortogonalnih i neortogonalnih mreža mogu se doneti tek nakon poređenja sa rezultatima terenskih merenja.



Slika 3. Sekundarno strujanje u poprečnim profilima ušća.



Slika 4. Sekundarno strujanje u poprečnim presecima nizvodno od ušća



Slika 5. Uticaj promene gustine ortogonalne računске mreže na sekundarno strujanje nizvodno od ušća – primer strujanja u poprečnom preseku E; a) neortogonalna mreža dimenzija  $201 \times 31 \times 11 + 91 \times 26 \times 11$ ; b) ortogonalna mreža dimenzija  $201 \times 31 \times 11 + 91 \times 26 \times 11$ ; c) ortogonalna mreža dimenzija  $401 \times 61 \times 11 + 181 \times 51 \times 11$ .

#### LITERATURA

- [1] Biron, P., Best, J.L. & Roy, A.G. (1996b), *Effects of bed discordance on flow dynamics at open-channel confluences*, Journal of Hydraulic Engineering, 122(12): 676-682.
- [2] Biron, P.M., Ramamurthy, A.S. & Han, S. (2004), *Three-dimensional numerical modeling of mixing at river confluences*, Journal of Hydraulic Engineering, 130(3), 243-253.
- [3] Boreli, M., Bruk, S. (1963), *Dunav i Sava ko Beograda – Hidraulički problemi i hidraulička proučavanja*, Beograd Institut za vodoprivredu “Jaroslav Černi”.
- [4] Bradbook, K.F., Lane, S.N. & Richards, K.S. (2000), *Numerical simulation of the three-dimensional, time-averaged flow structure at river channel confluences*, Water Resources Research, 36(9), 2731-2746.
- [5] Bradbook, K.F., Lane, S.N., Richards, K.S., Biron, P.M. & Roys, A.G. (2001), *Role of bed discordance at asymmetrical river confluences*. Journal of Hydraulic Engineering, 127(5): 351-368.
- [6] Đorđević, D., Ivetić, M. (2006), *Numerical Simulation of the Three-Dimensional Flow at the Confluence of the Sava and Danube Rivers*, Proceed. of the 7th Int. Conference on Hydroinformatics – HIC 2006, 1147-1154
- [7] Đorđević, D., Jovanović, M. (2006), *On the effect of the bed morphology on the river confluence hydrodynamics*, Proceed. of the 3<sup>rd</sup> Int. Conference on Fluvial Hydraulics – River Flow 2006, Vol. 2, 1165-1174
- [8] Jovanović, M., Đorđević, D., Kapor, R., Prodanović, D., Ivetić, M., (2005) *Hidraulička analiza na ušću reke Save u Dunav u Beogradu*, Beograd: Institut za hidrotehniku – Građevinski fakultet u Beogradu
- [9] Olsen, N.R., (2000), *CFD Algorithms for Hydraulic Engineering*, Trondheim: The Norwegian University of Science and Technology
- [10] Olsen, N.R. (2002), *Hydroinformatics, Fluvial Hydraulics and Limnology*. Trondheim: The Norwegian University of Science and Technology
- [11] Olsen, N.R., (2004), *A three-dimensional numerical model for simulation of sediment movements in water intakes with multi-block option – User’s Manual*, Trondheim: The Norwegian University of Science and Technology
- [12] Rhoads, B.L. & Sukhodolov, A.N., (2001), *Field investigation of the three-dimensional flow structure at stream confluences: 1. Thermal mixing and time-averaged velocities*, Water Resources Research, 37(9), 2393-2410.
- [13] Huang, J., Weber, L.J. & Lai, Y.G. (2002), *Three-dimensional numerical study of flows in open-channel junctions*, Journal of Hydraulic Engineering, 128(3): 268-280.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE RESULTS OBTAINED WITH  
3D ORTHOGONAL AND NON-ORTHOGONAL GRIDS IN THE 3D-FLOW MODELS – PART 1

by

Mr Dejana ĐORĐEVIĆ, Faculty of Civil Engineering, Belgrade  
e-mail: dejana@grf.bg.ac.yu

## Summary

Application of orthogonal and non-orthogonal grids in numerical models of the three-dimensional flow is considered. A river confluence is chosen as an example due to strong three-dimensional flow effects occurring at the confluence and the complex bathymetry of the river bed. In addition to the type of numerical method/scheme used, the quality of the numerical simulation results depends on the choice of the computational grid, too. In contrast to orthogonal grids, the non-orthogonal ones are better aligned with the boundary. Hence, they are more suitable for discretisation of the complex flow domains such as the

river confluence than the orthogonal ones. The paper aims at investigating the difference in the numerical simulation results obtained with the two types of grids. The investigation is rather qualitative than the quantitative one. The results are discussed in terms of the type of the secondary flow patterns developed in the confluence and the post-confluence channel under different flow conditions at the confluence.

Key words: three-dimensional flow, orthogonal and non-orthogonal grids, river confluence

Redigovano 20.12.2006.