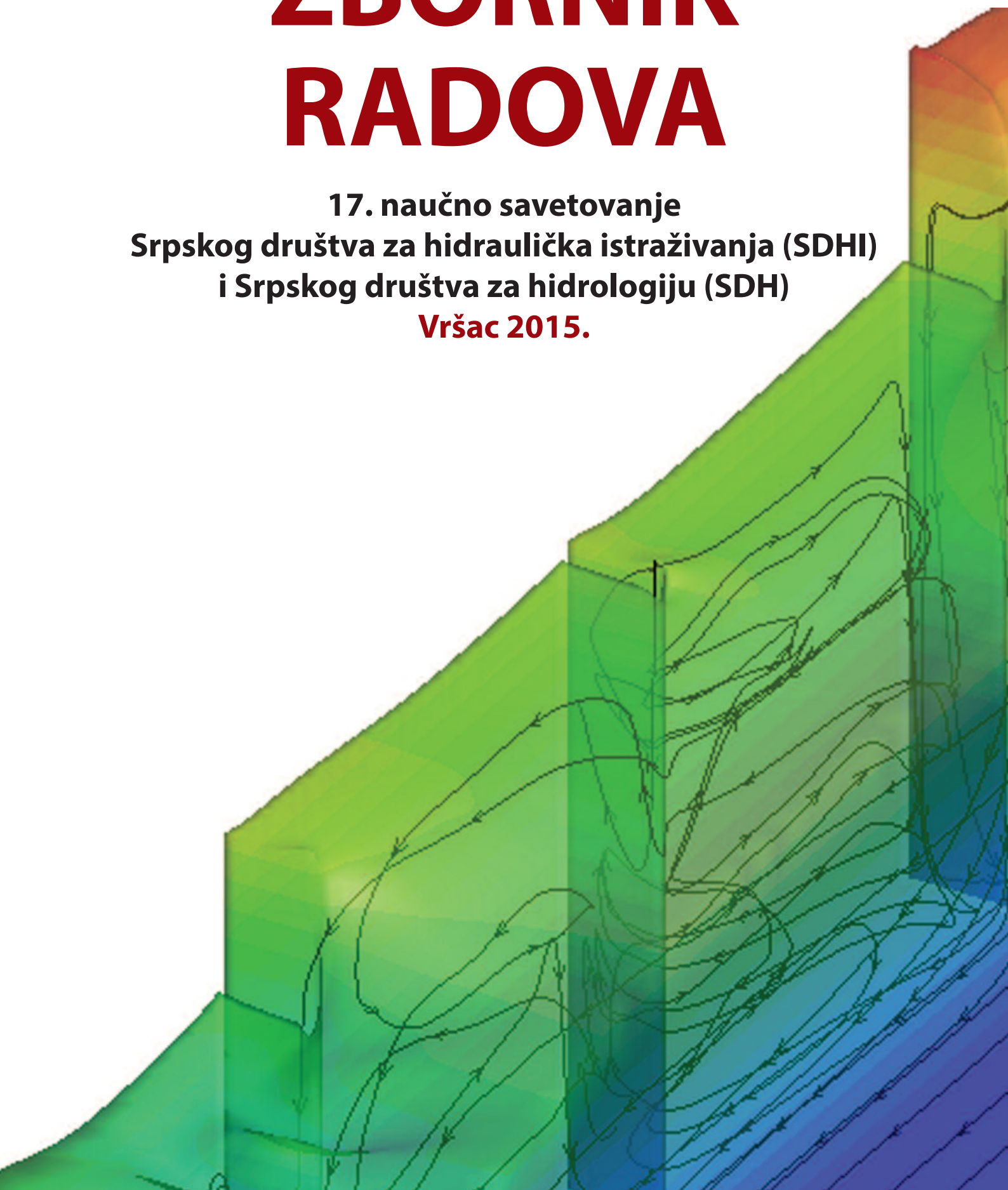


# ZBORNİK RADOVA

17. naučno savetovanje  
Srpskog društva za hidraulička istraživanja (SDHI)  
i Srpskog društva za hidrologiju (SDH)  
**Vršac 2015.**



Srpsko društvo za hidraulička istraživanja (SDHI)  
Srpsko društvo za hidrologiju (SDH)

# **ZBORNİK RADOVA**

**17. naučnog savetovanja  
Srpskog društva za hidraulička istraživanja i  
Srpskog društva za hidrologiju**

Vršac, 5-6. oktobar 2015.

Priredili:  
MARKO IVETIĆ  
RADOMIR KAPOR  
JASNA PLAVŠIĆ

Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet  
Beograd

Zbornik radova 17. naučnog savetovanja  
Srpskog društva za hidraulička istraživanja i  
Srpskog društva za hidrologiju  
Vršac, 5-6. oktobar 2015.

Elektronsko izdanje na CD-u

*Urednici*

Marko Ivetić  
Radomir Kapor  
Jasna Plavšić

*Izdavač*

Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet

*Za izdavača*

Prof. dr Branko Božić, dekan

*Dizajn i priprema*

Miodrag Jovanović i Agencija Omnibus

*Tiraž*

200 primeraka

CIP - Каталогизacija у публикацији -  
Народна библиотека Србије, Београд

626/628(082)(0.034.2)

532.5(082)(0.034.2)

СРПСКО друштво за хидрауличка истраживања (Београд). Научно саветовање  
(17 ; 2015 ; Вршац)

Zbornik radova 17. naučnog savetovanja Srpskog društva za hidraulička  
istraživanja i Srpskog društva za hidrologiju, Vršac, 5-6. oktobar 2015.

[Elektronski izvor] / priredili Marko Ivetić, Radomir Kapor, Jasna Plavšić.

- Beograd : Univerzitet, Građevinski fakultet, 2016 (Beograd : Dedraplast).

- 1 elektronski optički disk (CD-ROM) ; 12 cm

Sistemske zahteve: Nisu navedeni. - Nasl. sa naslovne strane dokumenta. -

Radovi na srp. i engl. jeziku. - Tiraž 200. - Napomene uz tekst. -

Bibliografija uz svaki rad. - Abstracts ; Apstrakti.

ISBN 978-86-7518-183-5

1. Иветић, Марко [приређивач, сакупљач], 1952- 2. Српско друштво за  
хидрологију (Београд). Научно саветовање (17 ; 2015 ; Вршац)

а) Хидротехника - Зборници б) Хидродинамика - Зборници с) Хидраулика

- Зборници

COBISS.SR-ID 225386764

## Sadržaj

Naučni odbor savetovanja .....	viii
Organizacioni odbor savetovanja .....	viii
Predgovor .....	ix
Uticaj sistema napera na uzvodno usporavanje toka .....	1
<i>Miodrag Jovanović</i>	
Флувијална ерозија на Јужној и Великој Морави .....	18
<i>Слободан Петковић, Милан Малешев, Вања Дамјановић</i>	
О утицају подводних каскада на неке хидродинамичке показатеље течења на речним ушћима .....	30
<i>Дејана Ђорђевић, Иван Стојнић</i>	
Раванско 2Д течење у доводном каналу Барачка испред ЦС Бездан II на Дунаву .....	42
<i>Бела Варга, Матија Ступић, Срђан Колаковић</i>	
Нумеричко моделирање бурног течења у проводнику са хоризонталном кривином .....	52
<i>Милена Лучић, Љубодраг Савић, Радомир Капор, Никола Младеновић</i>	
Model za brze proračune ravanskog plavljenja .....	65
<i>Dragan Savić, Slobodan Djordjević, Albert Chen, Michel Guidolin</i>	
Procena karaktera strujanja u krivini zatvorenog provodnika pomoću SPH metode .....	87
<i>Nikola Rosić, Ljubodrag Savić, Dejana Đorđević, Milena Lučić</i>	
Modeliranje neustaljenog strujanja u poroznoj sredini metodom konačnih elemenata .....	97
<i>Damjan Ivetić, Nenad Jaćimović, Dušan Prodanović</i>	
Poređenje metoda za proračun propagacije talasa za potrebe hidrološkog modeliranja .....	110
<i>Žana Topalović, Marko Ivetić, Jasna Plavšić</i>	
Разматрање утицаја геометрије и хидрауличких отпора на основне одлике течења у кориту за велику воду .....	124
<i>Иван Стојнић, Филип Мухић, Дејана Ђорђевић</i>	
Процена криве протока у кориту за велику воду применом метода размене количине кретања и независних сегмената .....	135
<i>Филип Мухић, Филип Станић, Иван Стојнић, Дејана Ђорђевић</i>	
Zaštita naselja od velikih voda kontrolom protoka na uzvodnom mostovskom propustu .....	146
<i>Božidar Batinić, Dragutin Pavlović, Anja Randelović</i>	
Specifični pregradni hidrotehnički objekti hidroelektrane Papenoo 0, Tahiti .....	158
<i>Nataša Marinković</i>	
Uparedna analiza bočnog preлива sa glatkim brzotokom i piano key preлива sa stepenastim brzotokom na brani Yarascay (Tасna, Peru) .....	167
<i>Dalibor Drašković</i>	
Ispitivanja lavirint preлива na dva fizička modela različitih razmera .....	183
<i>Danica Starinac, Predrag Vojt, Marijana Damnjanović, Radomir Kapor, Ljubodrag Savić, Budo Zindović, Dragiša Žugić</i>	

# 17. Savetovanje SDHI i SDH - Vršac, Srbija 2015. Conference SDHI & SDH - Vršac, Serbia 2015.

Primer modeliranja hidraulike i upravljanja kaskadnog hidroenergetskog sistema .....	202
<i>Miloš Milašinić, Damjan Ivetić, Dušan Prodanović</i>	
Закони сличности хидрауличних турбина .....	215
<i>Мирослав Бенишек</i>	
Бурно течење у хоризонталној кривини затвореног проводника .....	230
<i>Милена Лучић, Љубодраг Савић, Радомир Капор, Никола Младеновић</i>	
Губитак енергије при хеликоидном течењу у затвореном проводнику са кривином.....	244
<i>Милена Лучић, Љубодраг Савић, Радомир Капор, Никола Младеновић</i>	
Зависност хидродинамичких притисака у слапишту од сужења степенастог брзотока .....	254
<i>Бојан Миловановић, Будо Зиндовић, Предраг Војт, Радомир Капор, Владан Кузмановић, Љубодраг Савић</i>	
Анализа хидродинамичких притисака у умирујућем базену насуте бране .....	264
<i>Маријана Дамњановић, Предраг Војт, Даница Старинац, Драгиша Жугић, Радомир Капор, Љубодраг Савић</i>	
Анализа узгона на брану „Бајина Башта“ на основу података осматрања .....	273
<i>Јована Јосиповић, Бојан Миловановић, Владан Кузмановић, Љубодраг Савић</i>	
Приказ садржаја научног пројекта МПНТР ТР 37005 „Оцена утицаја климатских промена на водне ресурсе Србије“ .....	284
<i>Стеван Прохаска</i>	
Analiza uticaja klimatskih promena na režim oticanja u slivovima reka Toplice i Kolubare.....	293
<i>Mihailo Anđelić, Marija Ivković</i>	
Problemi u proceni uticaja klimatskih promena hidrološkim modeliranjem: primeri slivova Moravice i Crnog Timoka.....	313
<i>Jasna Plavšić, Filip Muhić, Aleksandar Petrović, Andrijana Todorović</i>	
Утицај климатских промена на хидролошке режиме на сливовима Колубаре, Топлице и Млаве .....	325
<i>Андрејана Тодоровић, Јасна Плавишић</i>	
Поређење различитих приступа за sagledavanje uticaja klimatskih promena na vodne resurse u slivu reke Crnice .....	341
<i>Vesna Tripković, Aleksandra Ilić, Stefan Prohaska, Borislava Blagojević</i>	
Утицај климатских промена на водне ресурсе – пројекат CCWaters, резултати pilot подручја реке Пек.....	357
<i>Dejan Dimkić, Stevan Prohaska, Bojan Stanković, Predrag Pajić, Željka Rudić</i>	
Утицај климатских промена на бујичне поплаве и ерозију земљишта са освртом на поплаве у 2014. години .....	372
<i>Milutin Stefanović, Mileta Milojević, Aleksandar Drobnjak</i>	
Нови методолошки оквир SDTS за дугорочне пројекције месечних протикаја у условима климатских промена.....	379
<i>Milan Stojković, Jasna Plavšić, Stevan Prohaska, Jovan Despotović, Dragutin Pavlović</i>	
Утицај климатских промена на пољопривредну производњу и мере ублажавања .....	390
<i>Ružica Stričević, Nevenka Đurović, Marija Ćosić, Ivan Bogdan, Miloš Pavlović, Enike Gregorić</i>	
Утицај климатских промена на потребе за водом у пољопривредној производњи.....	404
<i>M. Božić, G. Nikolić, S. Kračunov, Ž. Rudić</i>	

# 17. Savetovanje SDHI i SDH - Vršac, Srbija 2015.

## Conference SDHI & SDH - Vršac, Serbia 2015.

Pitanje pouzdanosti u projekcijama uticaja klimatskih i drugih promena na vodne resurse.....	414
<i>Dejan Dimkić</i>	
Preliminarna projekcija stanja vodnih resursa u Srbiji u uslovima promenjene klime .....	424
<i>Stevan Prohaska, Aleksandra Ilić, Vesna Tripković, Vladimir Đurđević</i>	
Comparison of Semi vs. Fully Distributed Urban Storm Runoff Models.....	434
<i>Rui Pina, Susana Ochoa, Maria Aivazoglou, Nuno Simões, Ana Mijic, Alfeu Sá Marques, Čedo Maksimović</i>	
Калибрација дистрибуираних хидролошких модела.....	443
<i>Андријана Тодоровић, Јасна Плавишић, Милош Станић, Жељко Васић</i>	
Metod distribuiranih brzina za određivanje vremena kašnjenja sintetičkog jediničnog hidrograma .....	458
<i>Nikola Zlatanović</i>	
Kalibracija i verifikacija modela oticaja sa urbanih slivova .....	470
<i>Borislav Mašić, Miloš Stanić, Jasna Plavšić</i>	
Modeliranje urbanih slivova na osnovu javno dostupnih podataka .....	482
<i>Andrija Nedeljković, Aleksandar Sekulić, Nemanja Branislavljević</i>	
Performance of (Blue) Green Roof Systems: Full-Scale Experiments Based Modelling.....	493
<i>Xi Liu, Ana Mijić, Han Jung Kuo, Čedo Maksimović</i>	
Integralno upravljanje i korišćenje oticaja kišnih voda sa Ostružničkog mosta .....	500
<i>Jovan Despotović, Nenad Jaćimović, Jasna Plavšić, Miloš Stanić, Aleksandar Đukić, Dragutin Pavlović, Andriana Todorović, Vanja Živanović, Sanja Milić</i>	
Primena distribuiranog hidrološkog modela za simulaciju oticaja u uslovima karsta .....	509
<i>Nenad Jaćimović, Miloš Stanić, Tina Dašić, Duško Vujović</i>	
Вишекритеријумска калибрација хидролошких модела .....	520
<i>Андријана Тодоровић, Милош Станић, Јасна Плавишић, Жељко Васић</i>	
Dinamičke karakteristike pluviografa .....	537
<i>Predrag Vojt, Dragutin Pavlović</i>	
Principi modelisanja interakcije zagađivača i nanosa u rečnom toku .....	550
<i>Zoltan Horvat, Mirjana Horvat, Ognjen Gabrić</i>	
Kalibracija linijskog modela transporta nanosa .....	558
<i>Mirjana Horvat, Zoltan Horvat, Ognjen Gabrić</i>	
Prikaz i analiza rezultata merenja erozije u laboratorijskim uslovima.....	568
<i>Ognjen Gabrić, Jasna Plavšić</i>	
Merenje hidrauličkih veličina u dvofaznom fluidu .....	577
<i>Predrag Vojt, Budo Zindović, Dušan Prodanović</i>	
Hidraulička laboratorija Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu .....	585
<i>Slobodan Kolaković, Goran Jeftenić, Ljubomir Budinski, Matija Stipić, Svetlana Vujović</i>	
Bezbedno vodosnabdevanje i rizici – primer dva grada.....	598
<i>Milan Ivetić, Tamara Srdić, Marko Ivetić</i>	
Mogući uzroci havarije cevovoda Makiš – (Petlovo Brdo –) Mladenovac.....	610
<i>Marko Ivetić, Aleksandra Krsmanović, Ana Popović-Milijić</i>	

# 17. Savetovanje SDHI i SDH - Vršac, Srbija 2015.

## Conference SDHI & SDH - Vršac, Serbia 2015.

Dekompozicija vodovodne mreže primenom WatNC algoritma .....	622
<i>Željko Vasilić, Miloš Stanić, Branislav Babić, Dušan Prodanović</i>	
Hidraulička analiza i proračun nedostajućih rezervoarskih kapaciteta pitke vode u NIVOS-u .....	631
<i>Dejan Jordanović</i>	
Modeliranje hidrauličkog udara u softverskom paketu AFT Impulse.....	639
<i>Ljubomir Budinski, Slobodan Kolaković, Matija Stipić, Goran Jeftenić, Svetlana Vujović</i>	
Analiza funkcionisanja kombinovane kanalizacije gradskog područja Novog Sada .....	651
<i>Matija Stipić, Borislav Mašić, Filip Stipić, Andrea Salvai</i>	
Hidraulička analiza kanalizacije pod pritiskom naselja Nadalj.....	665
<i>Matija Stipić, Goran Jeftenić, Slobodan Kolaković, Svetlana Vujović, Ljubomir Budinski</i>	
Hidrometeorološki uslovi koji su izazvali pojavu serije poplavnih talasa u Srbiji u periodu april-septembar 2014. godine.....	676
<i>Nedeljko Todorović, Dragan Đukić, Stevan Prohaska, Vladislava Bartoš Divac</i>	
Statistička ocena značajnosti jakih kiša koje su izazvale pojavu poplavnih talasa u Srbiji u periodu april-septembar 2014. godine.....	688
<i>Stevan Prohaska, Dragan Đukić, Vladislava Bartoš Divac, Nedeljko Todorović</i>	
Analiza formiranja, prostiranja i transformacije poplavnog talasa iz maja 2014. godine u slivu reke Kolubare .....	701
<i>Niloka Zlatanović, Stevan Prohaska</i>	
Одбрана од поплава на Сави 2014 - искуства и планови за унапређење система заштите.....	716
<i>Марина Бабић Младеновић, Васиљка Коларов, Владислава Бартош Дивац</i>	
Поплаве 2014. године на реци Јадар.....	726
<i>Вања Дамјановић, Милан Малешев</i>	
Шта после поплаве 2014? .....	738
<i>Марина Бабић Младеновић, Васиљка Коларов</i>	
Вујићне поплаве у Текији септембра 2014. године и радови на санацији .....	748
<i>Ирина Миловановић, Никола Златановић, Јелена Ћотрић, Рената Пузовић</i>	
План управљања ризицима од поплава на сливу Дунава.....	755
<i>Марина Бабић Младеновић, Васиљка Коларов</i>	
Заштита Београда од великих вода Дунава и Save.....	766
<i>Војислав Антонић, Марина Бабић Младеновић</i>	
Нове мере заштите града Параћина после поплаве 2014. године.....	775
<i>Зоран Кнежевић, Владислава Бартош Дивац, Милан Малешев</i>	
Узроци плављења Баричке реке и потребне мере заштите од поплава .....	785
<i>Борис Крунић, Милан Малешев, Вања Дамјановић</i>	
Заштита улаза у луку Ковин од засипања наносом Дунава .....	793
<i>Зоран Кнежевић, Марина Бабић Младеновић</i>	
Хидролошко-хидраулички истражни радови по траси газовода Јужни ток.....	804
<i>Владислава Бартош Дивац, Војислав Антонић, Драгана Нинковић</i>	
О одређивању просечног отицања са неизучених сливова на територији Србије.....	816
<i>Драган Јанковић</i>	

# 17. Savetovanje SDHI i SDH - Vršac, Srbija 2015. Conference SDHI & SDH - Vršac, Serbia 2015.

Konsistentno određivanje zavisnosti visina–trajanje–povratni period kiše.....	826
<i>Jasna Plavšić, Žana Topalović, Jovan Despotović</i>	
Проблеми и решења при изради хидролошких анализа за коришћење вода код обновљивих извора енергије.....	838
<i>Срђан Марјановић</i>	
Хидролошко моделирање - доступност и поузданост података у реалном времену.....	848
<i>Марија Ивковић, Јулијана Нађ</i>	
Оптimalно управљање вишенаменском акумулацијом коришћењем модела HEC-5.....	860
<i>Александра Илић, Драган Милићевић, Olivera Potić</i>	
Прихватљивост гاما расподеле за прораčун индекса суше у сливу Јужне Мораве .....	871
<i>Владислава Михиловић, Борислава Благојевић</i>	
Пирсонов систем расподела и његова примена у хидрологији .....	887
<i>Марија Радичевић, Весна Јевремовић, Јасна Плавшић, Драгутин Павловић</i>	
Практични проблеми одређивања мјеродавних великих вода за потребе пројектовања система одбране од поплава .....	902
<i>Жана Топаловић, Јасна Плавшић</i>	
Неки аспекти при неparamетарском генерисању хидролошких серија података .....	913
<i>Ђурица Марковић, Јасна Плавшић, Синиша Илић</i>	
Примена модификоване TIPS методе за дугорочне пројекције серија годишњих проточаја.....	924
<i>Милан Стојковић, Стеван Прохаска, Јасна Плавшић</i>	
A maximum entropy spectral analysis of precipitation for the territory of Serbia.....	932
<i>Младен Милановић, Милан Гочић, Славиша Трајковић</i>	
IN MEMORIAM: Коста Ђонин (1922–2012) .....	939
<i>Радомир Капор</i>	
IN MEMORIAM: Стеван Брук (1923–2014) .....	941
<i>Стеван Прохаска, Миодраг Јовановић</i>	
IN MEMORIAM: Милорад Милорадов (1933–2015) .....	943
<i>Срђан Колковић, Радомир Фолић</i>	
Индекс аутора .....	946



## **Naučni odbor savetovanja**

Prof. dr Marko Ivetić (Predsednik)  
Prof. dr Dragan Arandelović  
Doc. Dr Borislava Blagojević  
Prof. dr Jovan Despotović  
Prof. dr Milan Dimkić  
Prof. dr Aleksandar Gajić  
Doc. dr Lajoš Hovanj  
Prof. dr Miodrag Jovanović  
Prof. dr Radomir Kapor  
Prof. dr Srđan Kolaković  
Prof. dr Čedo Maksimović  
Mr Jelisaveta Muškatirović  
Prof. dr Zorana Naunović  
Prof. dr Miloš Nedeljković  
Prof. dr Sava Petković  
Prof. dr Slobodan Petković  
Prof. dr Jasna Plavšić  
Prof. dr Dušan Prodanović  
Prof. dr Stevan Prohaska  
Prof. dr Dragan Savić  
Prof. dr Miodrag Spasojević

## **Organizacioni odbor savetovanja**

Prof. dr Marko Ivetić  
Prof. dr Jasna Plavšić  
Prof. dr Radomir Kapor  
Andrijana Todorović, dipl. građ. inž.  
Budo Zindović, dipl. građ. inž.

## Predgovor

Poštovane kolegice i kolege,

Pred Vama je pregled radova prikazanih na 17. naučnom savetovanju Srpskog društva za hidraulička istraživanja i Srpskog društva za hidrologiju održanog u Vršcu oktobra 2015. godine. Ovog puta smo imali značajan broj pristiglih radova – tačno 80, koje ćete naći u ovom zborniku na preko 900 strana. Kao i na prošlom savetovanju, zbornik izdajemo u elektronskoj formi, na CD-u, sa radovima u PDF formatu, dok je knjiga apstrakata na srpskom i engleskom jeziku štampana i podeljena na samom savetovanju. Ovaj pristup je omogućio da prihvatimo i radove sa većim brojem strana nego što je to bio ranije slučaj, a da kvalitet slika, dijagrama i animacija, ostane onakav kako su ga dostavili autori. Pri tome je rok za prihvatanje radova bio mnogo fleksibilniji, dok su troškovi pripreme savetovanja značajno niži. Uz to, neki autori su dobili još dragocenog vremena da svoje radove dovedu do oblika u kom mogu da se prikažu u ovom zborniku.

I ovog puta Savetovanje je organizovano zajedno sa Srpskim društvom za hidrologiju (SDH), što je doprinelo ne samo povećanom broju radova već je omogućilo i da se pojedine važne teme, kao što su poplave iz 2014. godine kojima je posvećena posebna sesija, sagledaju sveobuhvatno. Deo radova je prikazan na odvojenim sednicama, a deo na zajedničkim, što nam je omogućilo da ceo program održimo u dva dana, uz aktivno prisustvo velikog broja učesnika, do samog kraja Savetovanja.

Radovi iz oblasti hidraulike pokrili su više tematskih oblasti, a najviše rečnu hidrauliku, hidrotehničke objekte, numeričko modeliranje i komunalnu hidrotehniku. U oblasti hidrologije veliki broj radova se bavio modernom temom – uticajem klimatskih promena na vodne resurse, kao i determinističkim i stohastičkim hidrološkim modelima. Najveći deo „domaćih“ radova je vezan za tekuće naučno istraživačke projekte Ministarstva nauke. Stiče se utisak da učesnici Savetovanja spremno očekuju novi ciklus projekata.

Već iz samog spiska radova se može videti prožimanje nauke i prakse, kao i naglašavanje važnih problema u domaćoj hidrotehnici i vodoprivredi. Tu su, naravno, i važni doprinosi naših kolega iz dijaspore koji ukazuju na pojedine pravce naučnog i tehnološkog razvoja u hidrotehnici, i koji se sve više okreću urbanim sredinama i njihovim (ne samo) hidrotehničkim problemima. Mi smo im posebno zahvalni što su našli vremena da dva dana u Vršcu budu sa nama. Takođe, u zborniku ćete naći značajne radove naših doajena i srednje generacije čija je odgovornost da prošire i prenesu znanja iz ove dve fundamentalne discipline. Međutim, u zborniku ćete naći i rezultate istraživanja mlade generacije koji su danas upućeni da svoj kvalitet i kompetencije dokazuju na globalnom nivou kroz objavljivanje u međunarodnim časopisima. I u toj grupi ima veoma vrednih i inovativnih radova, što nam uliva nadu da će se u ovim oblastima ostvariti kontinuitet i napredak.

U periodu od prethodnog savetovanja do sada, napustili su nas, prof. Kosta Đonin, prof. Stevan Bruk i prof. Milorad Miloradov, dugodišnji članovi SDHI, i po mnogo čemu izuzetni.

# 17. Savetovanje SDHI i SDH - Vršac, Srbija 2015. Conference SDHI & SDH - Vršac, Serbia

Na njih i na njihov veliki doprinos istraživanjima u oblasti voda, na Savetovanju su nas podsetili njihovi bliski saradnici i prijatelji, koji su pripremili kratke tekstove o njima.

Zahvaljujem se kolegini Jasni Plavšić, predsednici Srpskog društva za hidrologiju, i kolegi Radomiru Kaporu, na izvanrednom doprinosu u organizovanju i realizaciji ovog savetovanja. Njima uz rame, izdvojio bih i kolege iz Instituta „Jaroslav Černi“, Marinu Babić Mladenović i Stevana Prohasku, za njihov doprinos temama, Poplave 2014. godine i Klimatske promene. Zbog svega ovoga se nadamo da će ovaj zbornik mnogima biti zanimljivo štivo za čitanje.

Beograd, oktobar 2015.

Prof. dr Marko Ivetić  
Predsednik SDHI

## **Procena karaktera strujanja u krivini zatvorenog provodnika pomoću SPH metode**

Nikola Rosić<sup>1</sup>  
Ljubodrag Savić<sup>2</sup>  
Dejana Đorđević<sup>3</sup>  
Milena Lučić<sup>4</sup>

**APSTRAKT:** U radu se razmatra mogućnost primene SPH metode u modeliranju burnog tečenja u krivinama zatvorenog provodnika kružnog poprečnog preseka. Korišćen je programski kod DualSPHysics koji je dopunjen kako bi se zadali odgovarajući granični uslovi na uzvodnom kraju računске oblasti. Model je kalibrisan i verifikovan korišćenjem rezultata ispitivanja na fizičkom modelu. Rezultati pokazuju da se vrednost koeficijenta veštačke viskoznosti, koji se standardno koristi u SPH metodi kako bi se proračun stabilizovao na mestima naglih promena vrednosti fizičkih veličina, može podešavati kako bi se dobio odgovarajući karakter tečenja u krivini.

**Ključne reči:** SPH, tečenje sa slobodnom površinom, burno tečenje u krivini, granični uslovi

## **Estimation of flow type in closed conduit bends using SPH method**

**ABSTRACT:** The paper discusses a capability of SPH method in modeling of supercritical flow in circular conduit bends. The DualSPHysics code is supplemented with algorithm for appropriate modelling of upstream boundary conditions at the upstream end of the computational domain. The model is calibrated against available experimental data. It is shown that appropriate choice of the artificial viscosity coefficient can lead to correct presentation of the bend flow type.

**Keywords:** SPH, free surface flow, supercritical bend flow, open boundary conditions

---

<sup>1</sup> Nikola Rosić, dipl. građ. inž., student doktorskih studija, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Bul. kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, nrosic@grf.bg.ac.rs

<sup>2</sup> Dr Ljubodrag Savić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Bul. kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, ljdsavic@grf.bg.ac.rs

<sup>3</sup> Dr Dejana, Đorđević, docent, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Bul. kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, dejana@grf.bg.ac.rs

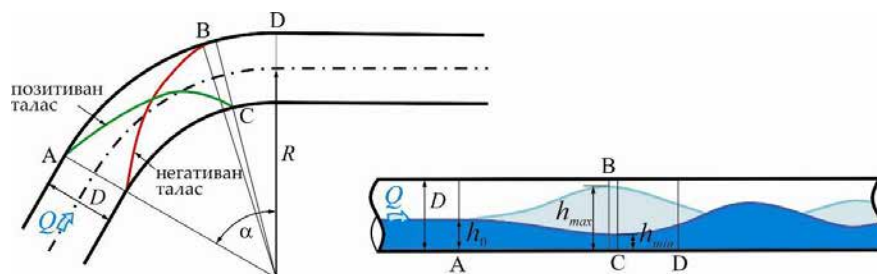
<sup>4</sup> Milena Lučić, dipl. građ. inž., student doktorskih studija, Eneprojekat Hidroinženjering a.d., Bul. Mihaila Pupina 12, 11070 Beograd, milenakolarevic@yahoo.com

## 1 Uvod

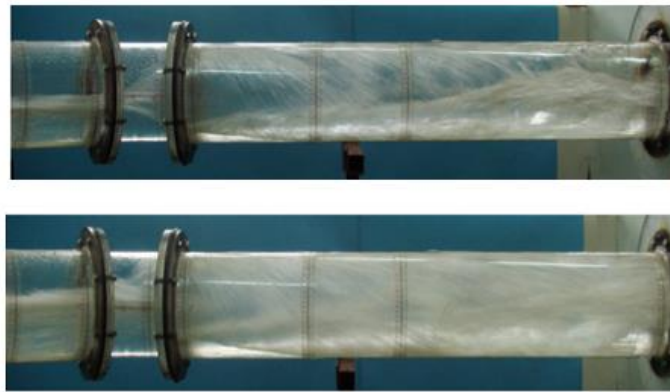
Metoda SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) je najpoznatiji predstavnik numeričkih metoda za rešavanje jednačina kretanja fluida koje su zasnovane na praćenju fluidnih delića. S obzirom na to da se radi o znatno složenijem pristupu u analizi strujnog polja (Lagranžov pristup u odnosu na Ojlerov), SPH metod zahteva znatno veće angažovanje računarskih sredstava, u odnosu na konvencionalne metode. SPH metod je našao primenu u istraživanju pojava koje se ne mogu lako modelirati standardnim numeričkim metodama, ovde se pre svega misli na pojave koje uključuju nagle promene oblika slobodne površine. Kao prednosti u odnosu na konvencionalne metode mogu se izdvojiti sledeće osobine: (a) Primena SPH metode ne zahteva računsku mrežu, pa se komplikovane i fragmentirane oblasti strujanja (kao na primer kod lomećih talasa), kao i oblasti sa spajanjem i mešanjem tokova, relativno lako modeliraju; (b) svojstva fizičkog sistema u celini lako se utvrđuju praćenjem čestica; (c) konvekcija se direktno određuje bez numeričke difuzije; (d) korišćenjem *jednačine stanja* u matematičkom modelu se daje eksplicitni karakter proračunu jer se proračun pritiska „razdvaja“ od proračuna brzina što znatno pojednostavljuje računski algoritam; (e) eksplicitni računski algoritam omogućava jednostavnu primenu algoritama za paralelizaciju proračuna čime se numerički postupci mogu značajno ubrzati.

Cilj ovog rada je da se oceni mogućnost primene SPH metode u proceni karaktera tečenja u krivini zatvorenog provodnika kružnog preseka. U ovom radu su predstavljeni rezultati kalibracije SPH modela koji je opisan u radu sa prethodnog savetovanja SDHI [10]. Model koji je tom prilikom predstavljen, a čiji se detaljniji opis može naći u uputstvu za korišćenje programskog koda DualSPHysics odnosno u radovima ([1], [5] i [6]), je za potrebe ovog rada dopunjen implementacijom originalnog postupka za zadavanje graničnih uslova na „otvorenoj“ granici.

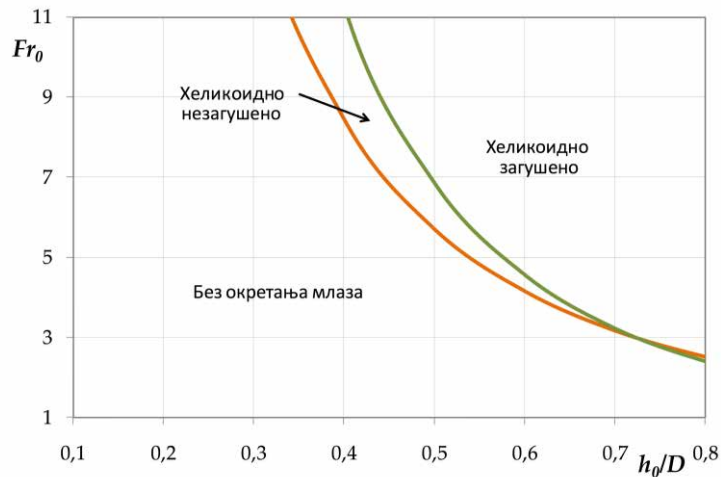
Analizira se tečenje koje je u burnom režimu uzvodno od krivine dok se u krivini usled promene geometrije čvrste granice može javiti tečenje sa okretanjem mlaza (slika 2) ili bez njegovog okretanja (slika 1). Pri odgovarajućim hidrauličkim uslovima može doći do pojave helikoidnog strujanja bez zagušenja (slika 2 - iznad), ili do neželjenog zagušenja toka u provodniku (slika 2 - ispod). Merenjima na modelu je utvrđeno ([4], [7], [8]) da se za zadate vrednosti skretnog ugla i zakrivljenosti krivine, karakter tečenja u krivini može proceniti na osnovu vrednosti Frudovog broja i relativne dubine uzvodno od krivine. Kao rezultat ispitivanja na fizičkom modelu dobijaju se funkcionalne zavisnosti koje utvrđuju potrebne (hidrauličke) uslove za helikoidno strujanje i za zagušenje toka (slika 3).



Slika 1. Pojava stojećih talasa u krivini cevi  
 Figure 1. Standing waves in the pipe bend



Slika 2. Helikoidno tečenje bez i sa zagušenjem toka  
 Figure 2. Helical flow in the pipe bend without (top) and with (bottom) choking



Slika 3. Primer funkcionalne zavisnosti koja određuje karakter tečenja u krivini [7]  
 Figure 3. An example of limit curves for onset of helical and choking flows [7]

## 2 Numerički model

Osnovna karakteristika SPH metode je da se proračun vrednosti odgovarajućih fizičkih veličina vezuje za kvazi čestice kojima se diskretizuje fluidna sredina. Matematički model kojim se opisuje strujanje fluida zato čini sistem običnih diferencijalnih jednačina koje opisuju zakone održanja mase i količine kretanja (po potrebi i energije)<sup>5</sup>:

<sup>5</sup> Predstavljen oblik jednačina strujanja se, u zavisnosti od načina modeliranja difuzionog člana, može odnositi na laminarne ili na turbulentne tokove.

# 17. Savetovanje SDHI i SDH - Vršac, Srbija 2015.

## Conference SDHI & SDH - Vršac, Serbia 2015.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{P} + \mathbf{g} + \Theta \end{array} \right. , \quad (1)$$

gde su  $\mathbf{v}$  - vektor brzine,  $\rho$  - gustina,  $\mathbf{P}$  - pritisak,  $\mathbf{g}$  - gravitaciono ubrzanje i  $\Theta$  - difuzioni član. Korišćenjem odgovarajućih pravila za predstavljanje funkcija u SPH metodi, prikazani izvodi se računaju za svaku česticu ( $i$ ) korišćenjem težinske funkcije  $W$  na sledeći način:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} \\ \frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\sum_j m_j \left( \frac{\mathbf{P}_j}{\rho_j^2} + \frac{\mathbf{P}_i}{\rho_i^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla W_{ij} + \mathbf{g} \end{array} \right. , \quad (2)$$

gde se oznaka  $j$  odnosi na sve čestice fluidne sredine koje se nalaze na rastojanju manjem od  $2 \cdot h$  od čestice  $i$  ( $h$  je obično jednako  $1,2 \cdot \Delta p_0$ , gde je  $\Delta p_0$  početno rastojanje između čestica),  $m_j$  označava masu čestice  $j$  a  $\mathbf{v}_{ij}$  je vektor relativne brzine čestice  $i$  u odnosu na česticu  $j$ . Član  $\Pi_{ij}$  se odnosi na difuzioni član  $\Theta$  koji se u razmatranom računskom postupku izračunava preko izraza koji je predložio Monaghan [9], kako bi se u SPH postupak uvela veštačka viskoznost:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} -\frac{\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0, \\ 0 & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} > 0, \end{cases} \quad (3)$$

gde su:  $\mathbf{r}_{ij}$  vektor relativnog položaja čestice  $i$  u odnosu na česticu  $j$ ;  $\mu_{ij} = \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} + 0.01 h^2}$ ;

$\bar{c}_{ij} = (c_i + c_j)/2$  ( $c$  je brzina prostiranja zvuka u fluidu i sračunava se na osnovu izraza (5) kao parcijalni izvod pritiska po gustini);  $\alpha$  je parametar koji se određuje probanjem (uobičajene vrednosti su reda veličine 0,1). Kao težinska funkcija koristi se kubni polinom ( $q = \frac{|\mathbf{r}_{ij}|}{h}$ ):

$$W_{ab}(q, h) = 1/(\pi h^3) \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} q^2 + \frac{3}{4} q^3 & 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{4} (2 - q)^3 & 1 \leq q \leq 2, \\ 0 & q \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

# 17. Savetovanje SDHI i SDH - Vršac, Srbija 2015. Conference SDHI & SDH - Vršac, Serbia 2015.

U razmatranoj varijanti SPH metode pritisak se računa iz *jednačine stanja*, pretpostavljajući da je fluid blago stišljiv. Na ovaj način pojednostavljuje se računski postupak, jer je proračun pritiska „razdvojen” od proračuna brzina i može se obaviti preko *jednačine stanja* (*Tait's equation*) na sledeći način:

$$P = B \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right], \quad (5)$$

gde je obično  $\gamma = 7$ , a  $B = c_0^2 \rho_0 / \gamma$  uzimajući da je  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$  dok je  $c_0$  brzina prostiranja zvuka u vodi pri gustini  $\rho_0$ . Vrednost brzine zvuka u fluidu se obično uzima da je manja od realne kako bi vrednost vremenskog računskog koraka bila prihvatljiva<sup>6</sup>.

Važno je primetiti da su međusobni doprinosi čestica u izrazima (2) jednaki, čime je zadovoljena konzervativnost količine kretanja. S obzirom na to da čestice tokom proračuna ne menjaju masu, problem održanja mase se svodi na zadržavanje čestica u računskoj oblasti.

Za vremensku integraciju sistema jednačina koristi se prediktor-korektor simplektička shema [9] po kojoj se promena položaja, brzine i gustine čestice određuje u tri etape. Uzimajući da je  $F_i = \frac{dv_i}{dt}$  i  $D_i = \frac{d\rho_i}{dt}$ , u prvoj etapi se računaju prediktor vrednosti (indeks  $p$ ) u vremenskom trenutku  $(n+1/2)\Delta t$ :

$$v_i^{p,n+1/2} = v_i^n + \frac{\Delta t}{2} F_i^n; \rho_i^{p,n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{2} D_i^n; r_i^{p,n+1} = r_i^n + \frac{\Delta t}{2} v_i^n. \quad (6)$$

U drugoj etapi se na osnovu predhodno sračunatih prediktor vrednosti računaju korigovane (korektor) vrednosti u istom vremenskom trenutku:

$$v_i^{n+1/2} = v_i^n + \frac{\Delta t}{2} F_i^{p,n+1/2}; \rho_i^{n+1/2} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{2} D_i^{p,n+1/2}; r_i^{n+1/2} = r_i^n + \frac{\Delta t}{2} v_i^{p,n+1/2}. \quad (7)$$

U poslednjoj etapi se računaju nepoznate vrednosti u  $(n+1)\Delta t$  vremenskom trenutku:

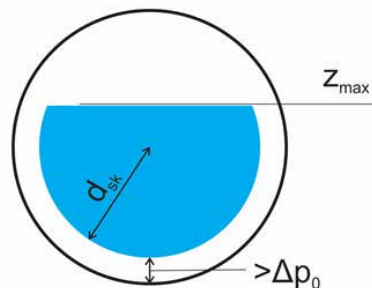
$$v_i^{n+1} = 2v_i^{n+1/2} - v_i^n; \rho_i^{n+1} = 2\rho_i^{n+1/2} - \rho_i^n; r_i^{n+1} = 2r_i^{n+1/2} - r_i^n. \quad (8)$$

U korišćenoj varijanti SPH metode nepokretna granica (cev i rezervoar) se modelira korišćenjem nepokretnih čestica koje figurišu u izrazima za određivanje odgovarajućih izvoda čestica fluida koje se nalaze na rastojanju manjem od  $2h$  od čvrste granice ([2]). Za ove nepokretne čestice se korišćenjem jednačine kontinuiteta računa izvod gustine pa samim tim, na osnovu jednačine stanja, i promena pritiska. Tako u slučajevima kada se čestice fluida približavaju česticama granice, raste vrednost pritiska koji se pridružuje tim česticama tj. povećava se odbojna sila između čestica čime se ostvaruje mehanizam koji sprečava čestice fluida da napuste cev.

<sup>6</sup> Navedeno sledi iz *Kurantovog uslova* baziranog na brzini zvuka.



S obzirom da se analizira burno tečenje, granični uslovi se zadaju na uzvodnom kraju cevi. Zadavanje graničnih uslova na „otvorenoj granici“ kod modliranja prostornog tečenja SPH metodom za sada predstavlja problem ([11]) i autorima nije poznat ni jedan programski kod koji omogućava zadavanje ovog tipa graničnih uslova. Za svrhu obavljanja proračuna predstavljenih u ovom radu autori su koristili originalni postupak po kojem se na uzvodnom kraju računске oblasti generišu čestice fluida zadatog (jednakog) inteziteta i pravca brzine. Čestice fluida „ulaze“ u računsku oblast formirajući vodeni stub zadate visine. Kako se pokazalo, potreban uslov da ne dođe do numeričke nestabilnosti u zoni uzvodne granice je da čestice koje se generišu budu na određenom rastojanju od čvrste granice koje je veće od rastojanja  $\Delta p_0$ . Postupak je ilustrovan na slici 4. Zadavanje graničnih uslova se praktično obavlja definisanjem inteziteta brzine, vrednosti prečnika  $d_{sk}$  i kote do koje se generišu čestice  $z_{max}$ . Najveća vrednost prečnika  $d_{sk}$  pri kojoj se ne javljaju numeričke nestabilnosti se određuje probanjem za svaki slučaj.



Slika 4. Raspored fluidnih delića na uzvodnoj granici (plava boja)  
Figure 4. Cross-section beyond actual upstream boundary

## 3 Računski primer

### 3.1 Opis fizičkog modela

Ispitivanja tečenja sa slobodnom površinom na fizičkom modelu odvodnog tunela sa krivinom detaljno su opisana u ([7], [8]). Laboratorijska instalacija (slika 5) na kojoj je ispitivana opisana pojava sastojala se od uzvodnog rezervoara iz kojeg se upušta voda u provodnik kojeg čine prelazna deonica i kružna cev prečnika 15 cm. Kružna cev ima dve pravolinijske deonice između kojih je umetnuta horizontalna krivina. Pravolinijska deonica na uzvodnom kraju je dužine 245 cm, a na nizvodnom kraju 150 cm. Cirkulacija vode je obezbeđena pumpom koja vodu iz donjeg - nizvodnog rezervora (nije prikazan na slici) vraća u gornji - uzvodni rezervoar. Uzvodno od gornjeg rezervoara nalazi se Tompsonov preliv pomoću kojeg se meri protok na modelu. Oba bezdimenzionalna broja, Frudov broj ( $F_r = Q / \sqrt{g D h_0^4}$ , definisan prema radu [4]) i relativna dubina ( $h_0/D$ ), određuju se u preseku na pravcu, udaljenom 50 cm uzvodno od početka krivine.

U sklopu istraživanja M. Kolarević i saradnika ([7] i [8]) ispitivano je više različitih slučajeva u kojima su varirani zakrivljenost i skretni ugao krivine. U numeričkim ogledima



Slika 5. Laboratorijska instalacija  
Figure 5. Experimental setup

koji su predstavljeni u ovom radu razmatrana je jedna dispozicija instalacije sa zakrivljenošću krivine  $D/R=1/3$  i skretnim uglom od  $45^\circ$ .

### 3.2 Postavka numeričkog modela

Kako bi se rezultati numeričkih oglada mogli uporediti sa merenjima na fizičkom modelu, potrebno je da se na usvojenoj granici računске oblasti zadaju vrednosti protoka i dubine koje odgovaraju izmerenim vrednostima. S obzirom da objašnjeni postupak zadavanja graničnog uslova zahteva da se čestice fluida odmaknu od zida cevi, na „otvorenoj“ granice nije moguće direktno zadavati vrednosti dubine. Zato se, kao „nova uzvodna granica“ računске oblasti mora izabrati poprečni presek dovoljno nizvodno tako da u njemu čestice fluida dodiruju zidove cevi. Kako je u ispitivanjima na fizičkom modelu karakterističan presek 50 cm uzvodno od krivine, na otvorenoj granici se probanjem dolazilo do kote  $z_{\max}$  za koju se dobija odgovarajuća dubina u ovom poprečnom preseku.

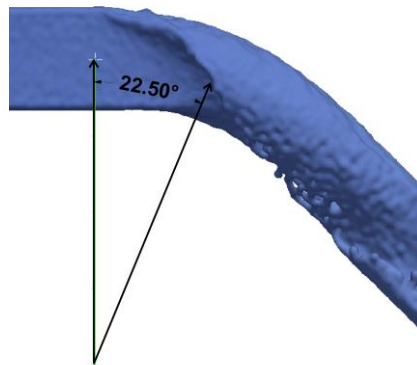
U svim numeričkim proračunima korišćen je Kurantov uslov za određivanje vremenskog koraka. Vrednost Kurantovog broja iznosila je 0,3. Vrednosti početnog rastojanja su varirane od 4,5 mm do 6,0 mm. Pored rastojanja između čestica, pokazalo se, da na rezultate proračuna najviše utiče promena vrednosti parametra  $\alpha$  za sračunavanje veštače viskoznosti (izraz 3).

Programski kod DualSPHysics izmenjen je kako bi se omogućila izvedba opisanog postupka za zadavanje uzvodnog graničnog uslova. Izmenjeni kod predviđa da se sve čestice koje učestvuju u proračunu zadaju na početku proračuna. U početnom trenutku cev je prazna a čestice se, uzvodno od računске oblasti, „ređaju“ u vodeni stub čiji poprečni pesek odgovara preseku na „otvorenoj granici“. Dužina vodenog stuba se određuje na osnovu potrebnog trajanja simulacije koje se pak određuje iz uslova konvergencije proračunatih vrednosti odgovarajućih fizičkih veličina. U toku proračuna broj čestica se smanjuje kako iste na nizvodnoj granici napuštaju računsku oblast. Najveći broj čestica u jednoj simulaciji iznosio je približno 4,5 miliona i pri tome je proračun, obavljen na grafičkoj karti sa čipom GTX 970,

za 10 s simulacije, trajao približno 7 časova. Napominje se da autori ostavljaju otvoreno pitanje optimizacije izmenjenog dela koda koji se odnosi na zadavanje graničnih uslova. Ovde se pre svega misli na pitanje generisanja čestica u toku proračuna kako bi se smanjio broj čestica koji u istom trenutku učestvuju u proračunu.

### 3.3 Rezultati

Za kalibraciju numeričkog modela korišćeni su rezultati merenja iz oglada u kojem se javilo okretanje mlaza vode u krivini. Protok je u ogledu bio 22,4 l/s a dubina vode uzvodno od krivine 9 cm. Kriterijum za kalibraciju je bilo slaganje položaja preseka u kome mlaz koji se okreće u krivini dodiruje kalotu cevi. Na fizičkom modelu je izmereno da mlaz dodiruje teme provodnika na  $22,5^\circ$  od početka krivine. Najbolje slaganje rezultata proračuna i merenja dobijeno je za vrednost parametara  $\alpha = 0,000001$  i početno rastojanje između čestica 4,5 mm. Izgled proračunom dobijene slobodne površine u krivini, za ove vrednosti parametara, prikazan je na slikama 6 i 7. Na slici 8 je radi poređenja prikazan izgled fluidne struje na laboratorijskom eksperimentu.



Slika 6. Mesto gde mlaz koji se okreće dodiruje kalotu cevi  
Figure 6. Location of the section where the wave reaches the pipe invert (top view)

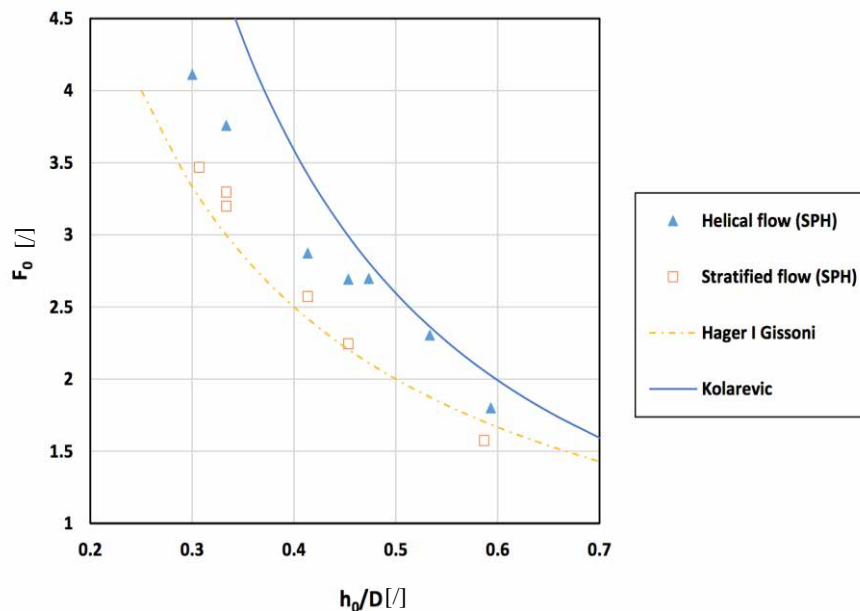


Slika 7. Izgled fluidne struje u krivini dobijen upotrebom SPH metode  
Figure 7. Location of the section where the wave reaches the pipe invert (side view)



Slika 8. Helikoidno tečenje na fizičkom modelu  
 Figure 8. Helical flow (physical model)

Kako bi se dao odgovor na pitanje da li se primenom SPH metode može predvideti karakter tečenja u krivini, izvršeno je nekoliko različitih numeričkih ogleda u kojima su varirane vrednosti protoka i dubine uzvodno od krivine. Cilj je bio da se dobije funkcionalna zavisnost koja određuje da li u krivini dolazi do okretanja mlaza. Numerički ogledi su obavljani sa vrednostima  $\alpha=0,000001$  uzimajući da je početno rastojanje između čestica jednako 4,5 mm. Rezultati ove analize prikazani su na slici 9 gde su pored rezultata numeričkih ogleda (označeni tačkama) prikazane i zavisnosti iz literature ([7] i [4]). Isprekidanom linijom prikazana je zavisnost do koje su došli Hager i Gissoni dok je punom linijom prikazana zavisnost dobijena na osnovu merenja Kolarević i saradnika. Sa slike se može zaključiti da se dobijeni rezultati primene SPH metode „negde između” rezultata laboratorijskih ispitivanja. Treba naglasiti da je vrednost parametra  $\alpha$  koja je usvojena na osnovu kalibracije ujedno i najmanja vrednost koja je korišćena. Povećanjem ove vrednosti u proračunima raste energetski gubitak u krivini (smanjuje se kapacitet odvodnog tunela) što praktično znači da se upotrebom standardnih vrednosti ovog koeficijenta u proračunu SPH metodom dobijaju rezultati koji su sa inženjerskog stanovišta na strani sigurnosti.



Slika 9. Zavisnosti za procenu karaktera tečenja  
 Figure 9. Comparison between numerical and experimental results

## 4 Zaključak

U radu je uspešno primenjen SPH metod u modeliranju burnog tečenja u krivini zatvorenog provodnika kružnog preseka. Za tu svrhu bilo je potrebno modifikovati standardnu varijantu SPH metode kako bi se zadavali granični uslovi na „otvorenoj“ granici. Na osnovu poređenja rezultata upotrebe SPH metode i rezultata ispitivanja na fizičkim modelima može se izvesti zaključak da je pomoću SPH metodom moguće pouzdano proceniti karakter tečenja u krivini zatvorenog provodnika. Korišćenjem standardnih vrednosti koeficijenta veštačke viskoznosti dobijaju vrednosti koje su sa inženjerskog stanovišta na strani sigurnosti.

## Zahvalnost

Autori se zahvaljuju Ministarstvu prosvete, nauke i tehnološkog razvoja na finansiranju projekata TR 37009 i TR37010.

## Literatura

1. Crespo AJC, Domínguez JM, Barreiro A, Gómez-Gesteira M and Rogers BD. 2011. *GPUs, a new tool of acceleration in CFD: Efficiency and reliability on Smoothed Particle Hydrodynamics methods*. PLoS ONE 6 (6), e20685.
2. Dalrymple, R. A., Knio, O., 2001., *SPH Modelling of Water Waves*, Proc. Coastal Dynamics, Lund, pages 779-787.
3. Gingold R. A., and Monaghan J. J., 1977. *Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars*. Mon. Not. R. Astron. Soc., 181, 375–89
4. Gissoni, C., Hager, W., H., 2000., *Supercritical Flow in Bend Manhole*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, Vol. 84.
5. Gómez-Gesteira M, Rogers BD, Crespo AJC, Dalrymple RA, Narayanaswamy M and Domínguez JM. 2012. *SPHysics - development of a free-surface fluid solver- Part 1: Theory and Formulations*. Computers & Geosciences, 48, 289-299.
6. Gómez-Gesteira M, Crespo AJC, Rogers BD, Dalrymple RA, Domínguez JM and Barreiro A. 2012. *SPHysics - development of a free-surface fluid solver- Part 2: Efficiency and test cases*. Computers & Geosciences, 48, 300-307.
7. Kolarević M., Savić Lj, Kapor R, Mladenović N., 2014., *Burno tečenje u krivini provodnika kružnog poprečnog preseka*, Vodoprivreda br. 261-263, st. 123-137.
8. Kolarević M., Savić Lj, Kapor R, Mladenović N., 2015., *Supercritical Flow in Circular Closed- conduit Bends*, Journal of Hydraulic Research, vol. 53 No. 1, 93-100.
9. Monaghan, J. J., 1994., *Simulating free surface flow with SPH*, Journal of Computational Physics, Elsevier, Vol. 110
10. Rosić, N., Kolarević, M. (2012), *Numeričko modeliranje tečenja sa slobodnom površinom pomoću metode SPH*, 16. Savetovanje SDHI., Donji Milanovac.
11. Vetsch, D., *Numerical simulation of sediment transport with meshfree methods*, 2012., PhD thesis, ETH Zurich.