

Zoran Mišković¹, Siniša Savatović², Marko Popović³, Marina Latinović⁴

ODREĐIVANJE PRIGUŠENJA I MODALNIH KARAKTERISTIKA MODELA NOSAČA PRIMENOM WAVELET TRANSFORMACIJE

Rezime:

U radu je prikazano eksperimentalno određivanje prigušenja i frekventnih karakteristika modela čelične grede statičkog sistema grede sa dva prepusta. Izvršeno je merenje vertikalnih ubrzanja u tačkama u osi nosača sa odgovarajućom analizom registrovanih zapisa ubrzanja primenom Wavelet transformacije sa ciljem određivanja prigušenja i modalnih karakteristika modela grede.

Ključne reči: Wavelet transformacija, prigušenje, frekvencije, modalna analiza

DETERMINATION OF DAMPING AND MODAL PROPERTIES OF BEAM MODEL BY APPLICATION OF WAVELET TRANSFORM

Summary:

The paper presents the experimental determination of damping and frequency characteristics of a steel beam model with two overhangs. The measurement of vertical accelerations at points along the beam axis were performed with consequent post processing of measured accelerations using the Wavelet transform in order to extract damping and modal properties of the beam model.

Key words: Wavelet transform, Damping, Frequency, Modal analysis

¹ Vanredni profesor, dr, дип.инж.грађ., Грађевински факултет Универзитета у Београду, Булевар краља Александра 73, mzoran@imk.grf.bg.ac.rs

² Asistent student doktorskih studija, маг.инж.грађ., Грађевински факултет Универзитета у Београду, Булевар краља Александра 73, sinisa@imk.grf.bg.ac.rs

³ Samostalni stručni saradnik, маг.инж.грађ., Грађевински факултет Универзитета у Београду, Булевар краља Александра 73, mpopovic@imk.grf.bg.ac.rs

⁴ Asistent student doktorskih studija, маг.инж.грађ., Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет Универзитета у Бањој Луци, mar.latinovic@gmail.com

1. UVOD

Da bi odgovor nekog dinamičkog sistema usled pobude mogao da se odrediti ili predvidi, potrebno je poznavati, osim karakteristika same pobude, i dinamičke karakteristike tog sistema, a to su kružna frekvencija (ω), period oscilovanja (T) i tehnička frekvencija (f). Parametri koji ih određuju su masa (m), krutost (k) i prigušenje (c). Prigušenje je mnogo teže odrediti od prethodna dva parametra i često se pretpostavlja u zavisnosti od vrste materijala, tipa dinamičkog sistema – konstrukcije, nivoa opterećenja i oštećenja konstrukcije ili konstruktivnog elementa ili se pak, uzima kao funkcija (k) i ili (m). U ovom radu je primenjena Wavelet transformacija (*WT-transformacija*) zapisa vertikalnih ubrzanja, kako bi se pokazala pogodnost takve transformacije za eksperimentalno određivanje prigušenja.

Generalno, prigušenje se može podeliti na viskozno i histerezisno [1,2], ali postoje i autori koji su formirali detaljniju podelu, i to na viskozno, Kulonovo i histerezisno [3]. Viskozno prigušenje je proporcionalno brzini i može se, u određenim slučajevima formirati kao ekvivalentno viskozno prigušenje, jer se tokom disipacije energije, usled dejstva dinamičkog opterećenja simultano javlja više različitih tipova prigušenja [1]. Kvantifikacija prigušenja se može izraziti u različitim oblicima [4], a u radu će biti korišćeno relativno prigušenje (ζ), kao mera viskoznog prigušenja.

U radu [5] je prikazan jedan od načina eksperimentalnog određivanja frekventnih karakteristika modela nosača primenom *Fourier*-ove transformacije (*FT*). Prigušenje bi moglo u tom slučaju da se odredi nekom metodom koja se zasniva na tumačenju registrovanih zapisa u frekventnom domenu, npr. 3-dB metod. Nije ga moguće u vremenskom domenu odrediti, jer se *Fourier*-ovom transformacijom signala dobija samo podatak o postojanju pojedinih frekvencija sa odgovarajućim amplitudama, ali ne i podatak o tome kako se amplitude sa određenim frekvencijama menjaju kroz vreme [6]. Drugim rečima, *Fourier*-ova transformacija nije pogodna za analizu nestacionarnih signala. Primenom *Short time Fourier* - transformacije (*STFT*), kada se vremenski domen zapisa podeli u kratke intervale i tad primeni *FT*, taj problem se može rešiti u određenoj meri. Tada postoji problem u rezoluciji, u vremenskom i frekventnom domenu koji sledi Hajzenbergov princip neodređenosti [6,7]. Dakle, nije moguće znati podatak o tome koja frekvencija postoji u kom vremenskom trenutku, već koji opseg frekvencija postoji u kom vremenskom intervalu i proizvod tih intervala ne može biti manji od određene vrednosti. *WT* transformacijom se dobijaju mnogo bolji rezultati od *STFT* transformacije zbog toga što *WT* ima promenljivu vremensku rezoluciju (promenljive vremenske intervale), za razliku od *STFT* koja ima konstantnu. Promenljiva vremenska rezolucija znači da se više frekvencije prikazuju sa boljom vremenskom rezolucijom, a niže frekvencije prikazuju sa boljom frekvencijskom rezolucijom [6,7].

Kao što je već napisano, prigušenje, o kome je reč, može da se odredi analizom zapisa signala u vremenskom i frekventnom domenu, ali i kombinovano. Postoji više metoda zasnovanih na *WT* transformaciji kao što su '*cross-section method*', '*impulse response function*', '*wavelet ridges and skeleton of the WT*' metod, itd.[1]. U ovom radu je korišćen prvi metod. Poslednji od nabrojana tri metoda daje, u konkretnom slučaju, iste rezultate kao prvi, jer razmatrane svojstvene frekvencije zadržavaju iste vrednosti tokom vremena.

2. KRATAK OSVRT NA WAVELET TRANSFORMACIJU

Osnovna ideja potiče od *Fourier*-ove ideje da se svaka 2π periodična i integrabilna funkcija može prikazati kao suma prostih trigonometrijskih funkcija. U slučaju *WT* transformacije, koja je takođe linearna, funkcija koja ima konačnu energiju se može predstaviti sumom kratkih – vremenski ograničenih periodičnih funkcija – talasića $\psi_{a,b}(y)$.

$$\text{Uslov: } \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt < \infty; \quad \text{Talasić: } \psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right); a > 0 \quad (1)$$

gde je:

$y(t)$ registrovani zapis,

a, b parametri koji definišu skaliranje i vremensko pomeranje talasića.

Kada se izabere osnovni talasić – *mother wavelet*, onda se takva funkcija skalira parametrom a (koji je u vezi sa frekvencijom talasića) i pomera po vremenskoj osi b , od početka do kraja trajanja signala. Za svaki položaj talasića vrši se integracija duž celog registrovanog zapisa $y(t)$. Matematički se *WT* transformacija može predstaviti na sledeći način:

$$WT_y(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot \overline{\psi}\left(\frac{t-a}{b}\right) dt \quad (2)$$

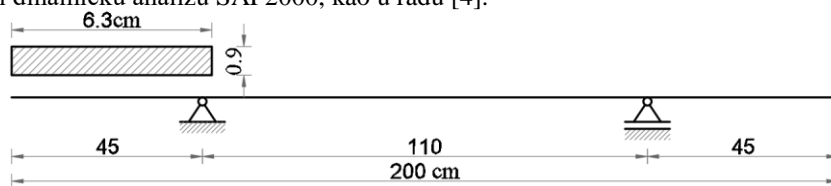
gde je:

$\overline{\psi}$ funkcija koja je konjugovano-kompleksna funkciji ψ .

Izraz (2) označava kontinualnu *wavelet* transformaciju u opštem obliku. U radu će biti korišćen *Morse wavelets* familija funkcija, a proračun je izveden u programskom jeziku Matlab korišćenjem funkcije *cwt* – continuous wavelet transform. Proračun se vrši u konačnom broju tačaka i funkcija u Matlab-u je diskretizovana verzija kontinualne transformacije [6].

3. PRORAČUN MODALNIH KARAKTERISTIKA

Proračun modalnih karakteristika je izvršen metodom konačnih elemenata u programu za statičku i dinamičku analizu SAP2000, kao u radu [4].

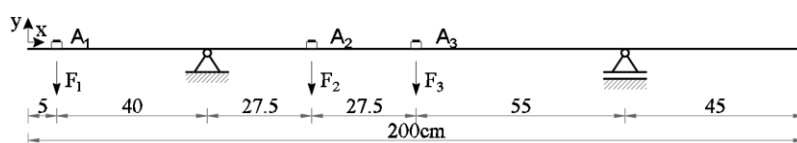


Slika 1 – Dispozicija analiziranog grednog nosača

Vrednosti dobijenih svojstvenih frekvencija su prikazane u Tabeli 1. Model je podeljen na 42 konačna elementa (frame - elements). Sa povećanjem broja konačnih elemenata dobija se neznatno veća tačnost posmatranih modalnih karakteristika.

4. EKSPERIMENTALNO ODREĐIVANJE MODALNIH KARAKTERISTIKA

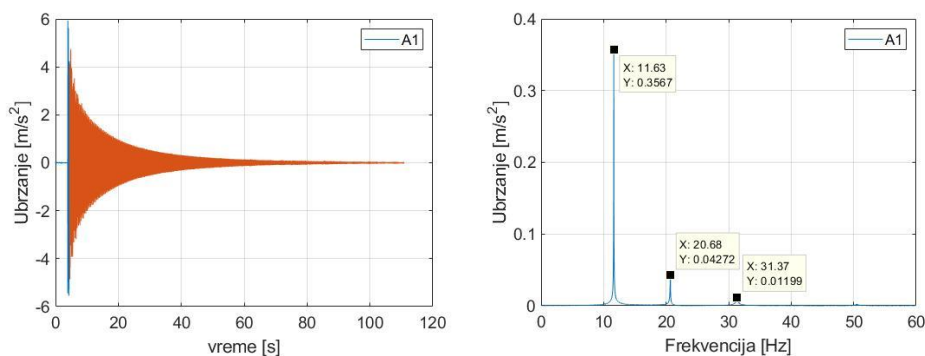
Pobuda je vršena tako što je nosač opterećen jednom silom F_1 . Nakon stabilizacije pomeranja, isti je naglo rasterećen presecanjem konca preko koga je opterećenje bilo vezano za nosač. Tako nastale vibracije registruju akcelerometri (Silicon Designs 2210-002) na položajima kao na slici 2. Taj postupak je ponovljen 3 puta radi dobijanja pouzdanijih podataka i to za dva nivoa opterećenja. Takođe, taj postupak je ponovljen na mestima 2 i 3 (sile F_2 i F_3).



Slika 2 – Položaj akcelerometara tokom eksperimenta

4.1. EKSPERIMENTALNO ODREĐIVANJE SVOJSTVENIH FREKVENCIJA

Primenom brze *Fourier*-ove transformacije zapisa na slici 3 levo (*FFT* funkcija u Matlab-u) dobijaju se vrednosti kao na slici 3 desno (analiziran je deo zapisa ubrzanja od $t=5s$ do kraja zapisa da bi bio što više otklonjen uticaj pobude). Primenom *WT* transformacije (*cwt* – funkcija u Matlab-u) dobijaju se vrednosti kao na slici 4 levo. Na slici 4 desno se vide pobuđene frekvencije u trenutku $t=5s$. Dobijaju se iste vrednosti frekvencija za bilo koji trenutak nakon pobude – $t= 3.8s$. Za *WT* transformaciju analiziran je ceo registrovani zapis ubrzanja.



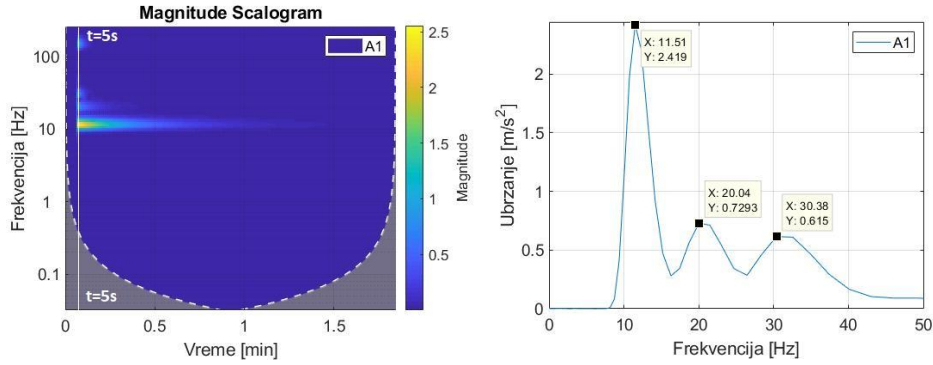
Slika 3 – Zapis registrovanih ubrzanja na mestu A_1 i frekventni domen tog signala dobijen *FFT* analizom usled delovanja sile $F_2=0.015kN$

Brzina uzorkovanja signala je $f_s = 600Hz$ a frekvencijska rezolucija *FFT* analize je konstantna i iznosi:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = 600 / 62758 \approx 0.0096Hz \quad (3)$$

gde je:

N broj registrovanih podataka koji varira u granicama koje zavise od dužine trajanja signala.



Slika 4 – WT transformacija usled delovanja sile $F_2=0.015kN$

Frekventna osa (pseudo frekvencije) se formira kao količnik frekvencije osnovnog talasića ($F_c = 2^{8.124}$ [Hz]) i faktora skaliranja a koji ima vrednosti $2^{i/10}$, $i=1,2,3...$

Na slikama 3 i 4 su prikazani dijagrami samo za zapis akcelerometra A_1 . Diskretna funkcija zapisa u frekventnom domenu, na mestima A_2 i A_3 je afina prikazanim dijagramima, samo sa različitim vrednostim amplituda.

4.2. EKSPERIMENTALNO ODREĐIVANJE PRIGUŠENJA

Na slikama 3 desno i 4 se vidi da su registrovane prve tri sopstvene frekvencije, $n = 1, 2, 3$, i upravo za te tri vrednosti su određena relativna prigušenja ζ_n .

Za prve tri svojstvene frekvencije, Tabela 1, određena su relativna prigušenja. Posmatrana su ubrzanja samo za sopstvene frekvencije. Matematički, te oscilacije se mogu predstaviti na sledeći način:

$$y_{A1,n}(t) = A_{A1,n} \cdot e^{-\zeta_n \omega_n t} \cdot \sin(\sqrt{1 - \zeta_n^2} \cdot \omega_n \cdot t + \varphi_n); \quad (4)$$

gde su:

ω_n, ζ_n kružna frekvencija i prigušenje,

$A_{A1,n}$ amplituda oscilovanja na mestu akcelerometra A_1 ,

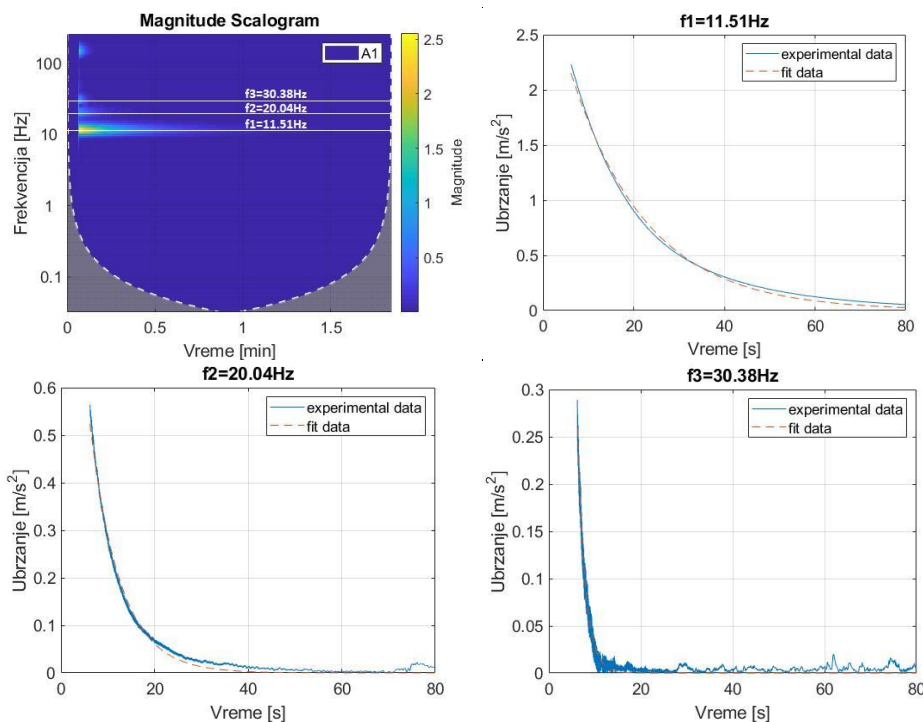
$$\varphi_n = \arctg \frac{\text{Im}\{WT_y(a_n, b)\}}{\text{Re}\{WT_y(a_n, b)\}} \text{ fazni zaostatak.}$$

Analogno, oscilacije na mestima akcelerometara A_2 i A_3 se mogu prikazati kao i u izrazu (4), samo sa odgovarajućim amplitudama. Za prigušenje je potrebno posmatrati samo članove koji množe trigonometrijsku funkciju u izrazu (4):

$$A_1(t)_n = A_{A1,n} \cdot e^{-\zeta_n \omega_n t} \quad (5)$$

Sa druge strane, moguće je eksperimentalno odrediti amplitude oscilovanja $A_1(t)_n$ WT transformacijom kao apsolutnu vrednost kompleksnih koeficijenata:

$$A_1(t) = |WT_y(a = a_n, b)| = \sqrt{\text{Re}\{WT_y(a_n, b)\}^2 + \text{Im}\{WT_y(a_n, b)\}^2} \quad (6)$$



Slika 5 – Relativno prigušenje za pojedine forme osvilovanja usled delovanja sile $F_2=0.015kN$

Dakle, potrebno je aproksimirati grafik funkcije definisan u vremenskom domenu (experimental data – Slika 5) jednačinom (6) funkcijom eksponencijalnog oblika:

$$A_1(t)_n = A_n \cdot e^{-B_n \cdot t}; \quad (7)$$

Parametri A_n i B_n se mogu odrediti metodom najmanjih kvadrata ili se može iskoristiti funkcija -fit u Matlab-u, kao što je u ovom radu urađeno. Parametar B_n je jednak:

$$B_n = \zeta_n \cdot \omega_n = \zeta_n \cdot 2\pi \cdot f_n \Rightarrow \zeta_n = \frac{B_n}{2\pi \cdot f_n} \cdot 100[\%] \quad (8)$$

4.3. EKSPERIMENTALNO ODREĐIVANJE FORMI OSCILOVANJA

Potrebno je posmatrati oscilacije tačaka na mernim mestima A_1 , A_2 i A_3 istovremeno, i to samo za frekvencije koje odgovaraju sopstvenim frekvencijama. Oscilacije tačaka na mernim mestima 1, 2 i 3, videti Sliku 2, se mogu dobiti na osnovu izraza (4). Ako se posmatraju odnosi amplituda u određenom vremenskom trenutku npr. 5s, za posmatrana tri merna mesta, kao i njihovi fazni zaostaci, mogu se dobiti forme oscilovanja, kao u radu [5]. Korišćenjem simetrije i antisimetrije dobijene su forme oscilovanja na celom nosaču koristeći merene rezultate.

5. REZULTATI MERENJA

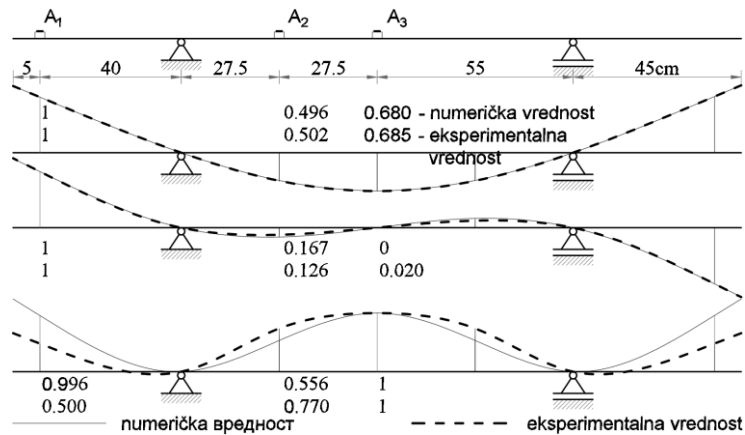
Dobijene vrednosti svojstvenih frekvencija numerički, *Wavelet* – transformacijom i *Fourier*-ovom transformacijom su prikazane u Tabeli 1. Posmatrajući eksperimentalne podatke - frekvencije, za svaku pobudu (1, 2 i 3) i na svakom mernom mestu (A1, A2 i A3) dobijaju se vrednosti čije su međusobne razlike zanemarljive, zato je i prikazana po jedna vrednost za svaku formu oscilovanja za *FFT* i *WT*. Vrednosti frekvencija dobijene *FFT* i *WT* transformacijom odstupaju jedne od drugih zbog različitih frekventnih rezolucija, zbog drugačijeg načina aproksimacije posmatranih zapisa, korišćenja drugačije baze osnovnih funkcija pri toj aproksimaciji... Sa druge strane, eksperimentalne vrednosti odstupaju od numeričkih vrednosti zbog razlika u fizičkom i numeričkom – matematičkom modelu. Posmatrani načini pobude nosača su izazvali odgovor istog, koji u svom sastavu sadrži primetno samo prve tri forme oscilovanja pa se ne može iz datih podataka zaključiti da li postoji trend povećanja odstupanja eksperimentalnih od numeričkih vrednosti sa povećanjem vrednosti svojstvenih frekvencija. Zbog postojanja izvesnog nivoa trenja na mestu oslonaca, u radu [5] su dobijena odstupanja u odnosu na ovde prikazane numeričke vrednosti, ali ta odstupanja nisu značajna.

Tabela 1 -Vrednosti svojstvenih frekvencija- akcelerometri A1, A2 i A3

	<i>Numerički Hz</i>	<i>FFT [Hz]</i>	<i>WT [Hz]</i>
I	11.54	11.63	11.51
II	21.45	20.68	20.04
III	37.09	31.37	30.38

Tabela 2 – Relativno prigušenje ζ [%] – akcelerometar A1

		<i>F₁</i> <i>1[kg]</i>	<i>F₂</i> <i>1[kg]</i>	<i>F₃</i> <i>1[kg]</i>	<i>F₁</i> <i>1.5[kg]</i>	<i>F₂</i> <i>1.5[kg]</i>	<i>F₃</i> <i>1.5[kg]</i>
I ton	1	0.119	0.078	0.086	0.079	0.092	0.089
	2	0.110	0.075	0.089	0.086	0.083	0.085
	3	0.101	0.079	0.091	0.081	0.082	0.099
	Sr.vr.	0.11	0.077	0.089	0.082	0.086	0.091
	St.dev.	0.009	0.002	0.003	0.004	0.006	0.007
II ton	1	0.168	0.135	0.040	0.346	0.121	0.125
	2	0.168	0.143	0.010	0.340	0.127	0.020
	3	0.194	0.136	0.110	0.344	0.134	0.074
	Sr.vr.	0.177	0.138	0.053	0.343	0.127	0.073
	St.dev.	0.015	0.004	0.051	0.003	0.006	0.005
III ton	1	0.531	0.331	0.478	0.633	0.365	0.561
	2	0.497	0.272	0.375	0.603	0.321	0.468
	3	0.687	0.297	0.416	0.761	0.3419	0.493
	Sr.vr.	0.572	0.300	0.423	0.666	0.343	0.507
	St.dev.	0.101	0.030	0.052	0.084	0.022	0.048



Slika 6 – Forme oscilovanja usled delovanja sile $F_2=0.015kN$

U tabeli 2 su prikazane vrednosti relativnih prigušenja dobijenih za različite pobude, za različita mesta i nivoje opterećenja. Prikazane su i srednje vrednosti i procenjene standardne devijacije za ponovljena merenja (1,2 i 3). Posmatrane su samo vrednosti registrovanih zapisa na mestu A_1 . Za druga dva merna mesta, za istu pobudu, se dobijaju identične vrednosti. Generalno, za veće nivoje opterećenja dobijaju se veće vrednosti prigušenja. Može se primetiti da je rasipanje rezultata manje, odnosno pouzdaniji su podaci dobijeni za forme oscilovanja koje su više pobuđene, kao što je prvi ton u konkretnom slučaju. Zbog frekvencijske rezolucije WT transformacije, odstupanje oblika oscilovanja je najveće za treći ton a najmanje za prvi, slika 6.

6. ZAKLJUČAK

Prigušenje je parametar koji je osetljiv na šum u zapisu, nivo i način pobude i potrebno je izvršiti više različitih merenja, pri različitim nivoima opterećenja, kako bi se stekao bolji uvid u nivo prigušenja u posmatranoj konstrukciji.

Primenom WT transformacije na posmatrani zapis ubrzanja dobija se dekompozicija istog u prostoru: vreme-frekvencija-amplituda. Ovakva analiza opisuje ponašanje prigušenja kroz vreme za sisteme sa jednim ili više stepeni slobode ali podrazumeva da se koriste zapisi slobodnih prigušenih oscilacija, što nije uvek izvodljivo pogotovo kada se određivanje prigušenja vrši za realne konstrukcije, i to zbog načina bobude.

Za određivanje sopstvenih frekvencija oscilovanja nosača je bio dovoljano postaviti samo jedan akcelerometar, npr. na mestu A_1 i dobijeni podaci ne zavise mnogo od vrste i nivoa pobude. Tačnost oblika oscilovanja zavisi od tačnosti i preciznosti određivanja frekvencija oscilovanja nosača i potreban broj akcelerometara zavisi od broja formi oscilovanja koji treba odrediti. Primenjena WT transformacija ima manju frekvencijsku rezoluciju u oblasti druge i treće sopstvene frekvencije, pa su dobijene forme oscilovanja sa većim odstupanjem od vrednosti dobijenih numeričkim postupkom. Taj problem je moguće rešiti npr. primenom drugačijeg osnovnog talasića (*mother wavelet*) ili povećanjem brzine uzorkovanja signala.

ZAHVALNICA

Istraživanje prikazano u radu je sprovedeno u okviru naučnog projekta TR-36048: „Istraživanje stanja i metoda unapređenja građevinskih konstrukcija sa aspekta upotrebljivosti, nosivosti, ekonomičnosti i održavanja“ kojeg finansira Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije. Autori se zahvaljuju Ministarstvu prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije za finansijsku podršku kroz projekat razvoja tehnologije TR-36048.

LITERATURA

- [1] Staszewski W.J.: Identification of damping in mdof systems using time-scale decomposition. *Jurnal of Sound and Vibration* 1997; 203(5):283-305. <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1996.0864>.
- [2] W. T. THOMSON 1993. *Theory of Vibration with Applications*. London. Chapman and Hall (fourth edition).
- [3] M. Richardson, R. Potter: Viscous vs. Structural Damping in Modal Analysis. 46th Shock and Vibration Symposium, October 1975
- [4] D. I. G. JONES 1987 in *Shock and Vibration Handbook* (editor C. M. Harris); New York: McGraw-Hill. Application of damping treatments (third edition), Chapter 36.
- [5] Z. Mišković, S. Savatović: Upporedna analiza merenih i računskih modalnih oblika modela čeličnog nosača. V međunarodni simpozijum studenata doktorskih studija iz oblasti građevinarstva, arhitekture i zaštite životne sredine, 2019.
- [6] R. Polikar: *The wavelet Tutorial Second Edition Part I. Fundamental Concepts & An Overview of The Wavelet Theory*.
- [7] D. Radunović: *Talasići (Wavelets)*. Akademska misao, Bulevar kralja Aleksandra 73, Beograd 2005. ISBN 86-7466-190-4.