Инжинерском Кабинету Вел. Школе.

Мих. Петровић.

Бр 741.

Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris, N° du 1er Mars 1897.



*Sur la décharge des conducteurs à capacité, résistance et coefficient de self-induction variables ;*

PAR M. MICHEL PÉTROVITCH.

« Envisageons un condensateur à capacité C, et soit $Q_0$ sa charge. Mettons-le en communication avec le sol par un fil de résistance R, dont le coefficient de self-induction est L. A un instant donné $t$, la charge du condensateur est Q et son potentiel $\frac{Q}{C}$ et si C, R, L restent invariables pendant le temps de la décharge, la charge Q sera donnée par des formules connues. Le caractère de la décharge dépend, comme l'on sait, du signe de la quantité

$$\frac{R^2}{4L} - \frac{1}{C}.$$

» Si cette quantité est positive, la décharge est *continue :* la charge va constamment en décroissant et tend vers zéro quand le temps augmente indéfiniment.

» Au contraire, si cette quantité est négative, la décharge est *oscillante :* le conducteur prend alors des charges alternativement de sens contraires et le fil est le siège de courants alternatifs.

» Je me propose d'indiquer ici une généralisation de ces théorèmes, relative aux cas où C, L, R varient avec le temps d'une manière quelconque pendant la décharge. Remarquons qu'il est facile de faire varier l'une quelconque de ces quantités pendant l'expérience, et l'on peut le faire de beaucoup de manières, de sorte qu'elles soient fonctions connues du temps.

» En désignant par I l'intensité du courant à l'instant $t$ et en appliquant

*P.*

le principe de la conservation de l'énergie, on aura l'équation qui régit le phénomène

$$RI^2\,dt + I\,d(LI) + I\frac{Q}{C}\,dt = 0;$$

d'où, en remplaçant I par $\frac{dQ}{dt}$, on tire l'équation linéaire du second ordre

$$(1)\qquad L\frac{d^2Q}{dt^2} + \left(R + \frac{dL}{dt}\right)\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0$$

à coefficients variables. En posant

$$(2)\qquad Q = \frac{1}{\sqrt{L}}\,y\,e^{-\frac{1}{2}\int\frac{R}{L}dt},$$

l'équation (1) se transforme en

$$(3)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \varpi(t)\,y = 0,$$

où

$$(4)\qquad \varpi(t) = \frac{1}{CL} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right)^2.$$

» Dans chaque cas particulier on connaîtra cette fonction $\varpi(t)$, qui dépend de la disposition de l'expérience et l'on peut montrer que le caractère du phénomène, dans un intervalle considéré de temps de $t = t_1$ jusqu'à $t = t_2$, dépendra du signe de cette fonction dans cet intervalle.

» Reportons-nous à une propriété connue des équations linéaires du second ordre à coefficients variables, d'après laquelle, si l'on considère deux équations

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \varphi(t)\,u = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \chi(t)\,z = 0,$$

et si pour les valeurs de $t$, comprises dans un intervalle $(t_1, t_2)$, les fonctions $\varphi(t)$ et $\chi(t)$ sont finies, continues et telles que

$$\varphi(t) \leqq \chi(t);$$

deux zéros consécutifs de $u$, dans l'intervalle $t_1$, $t_2$, comprennent au moins un zéro de $z$.

» En appliquant ce théorème au problème qui nous occupe, on aura les propositions suivantes :

» 1° *Dans tout intervalle de temps* $(t_1, t_2)$, *dans lequel la fonction* $\varpi(t)$, *définie par* (4) *est constamment négative, la charge du conducteur ne peut changer de sens plus d'une fois; avant et après ce changement, la décharge est continue.*

» Car, si l'on désigne par $-$ M la plus grande valeur que $\varpi(t)$ prend entre les limites $(t_1, t_2)$, et si l'on envisage l'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \mathrm{M} z = 0,$$

son intégrale générale

$$z = \mathrm{C}_1 e^{t\sqrt{\mathrm{M}}} + \mathrm{C}_2 e^{-t\sqrt{\mathrm{M}}},$$

d'après le théorème cité plus haut, aura au plus autant de zéros dans l'intervalle $(t_1, t_2)$ que $z$, c'est-à-dire au plus un zéro.

» 2° *Dans tout intervalle de temps* $(t_1, t_2)$, *dans lequel la fonction* $\varpi(t)$ *est constamment positive, la décharge est* oscillante; *de plus, si l'on désigne par* M *et* N *la plus grande et la plus petite valeur que prend cette fonction entre ces limites, la charge du conducteur change de signe dans cet intervalle au moins autant de fois qu'il y a d'unités entières dans*

$$\frac{(t_2 - t_1)\sqrt{\mathrm{N}}}{\pi},$$

*et, au plus, autant de fois qu'il y a d'unités entières dans*

$$\frac{(t_2 - t_1)\sqrt{\mathrm{M}}}{\pi} + 1.$$

» Car, d'après le théorème précédent, l'intégrale $y$ de (3) s'annulera au moins autant de fois dans l'intervalle $(t_1, t_2)$ que l'intégrale

$$u = \mathrm{C}_1 \sin(t\sqrt{\mathrm{N}} + \mathrm{C}_2)$$

de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \mathrm{N} u = 0,$$

et, au plus, autant de fois que l'intégrale

$$z = \mathrm{C}'_1 \sin(t\sqrt{\mathrm{M}} + \mathrm{C}'_2),$$

de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \mathrm{M} z = 0.$$

» Ces propositions généralisent celles que l'on connaît dans la théorie de la décharge des conducteurs à C, R, L constants; la fonction $\varpi(x)$ dans ce cas se réduit à la quantité connue

$$\frac{1}{C} - \frac{R^2}{4L}$$

dont le signe joue le rôle essentiel pour le sens du phénomène.

» Ces propositions expriment aussi les conditions d'expérience à réaliser pour que la décharge, lorsque C, R, L sont variables, soit continue ou oscillante.

» On aurait des résultats analogues dans le cas où le conducteur est relié à une source à différence de potentiel constante ou variable. Et en utilisant les résultats connus aujourd'hui sur les équations linéaires, on peut faire une étude détaillée du phénomène. »

(1er mars 1897.)



GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
24459 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

4 pt

Инжињерском Кабинету Вел.

Мих. Петров

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, N° du 14. Juin 1897.



*Sur la dynamique des réactions chimiques homogènes avec dégagement ou absorption de chaleur;*

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

« Envisageons une réaction chimique, exothermique ou endothermique, se passant entre $m$ liquides $A_1$, $A_2$, ..., $A_m$, donnant naissance à $n$ produits $B_1$, $B_2$, ..., $B_n$, sans réactions secondaires et *sans changements d'état* dans un intervalle de temps considéré de $t = t_1$ jusqu'à $t = t_2$. Je me propose : 1° *d'indiquer ici une loi approchée de variation de la température du mélange avec les quantités dépensées des corps actifs* $A_i$; 2° *de calculer le temps nécessaire pour que le mélange acquière une température donnée* T; 3° *de calculer le temps nécessaire pour qu'une quantité donnée des corps actifs soit dépensée* dans l'intervalle de temps compris entre $t = t_1$ et $t = t_2$.

» A cet effet, désignons par :

» $a_i$, $x_i$, $c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ les quantités initiales, les quantités dépensées jusqu'au moment considéré $t$ et les chaleurs spécifiques des liquides $A_i$;

» $X_i$, $k_i$ les quantités au moment $t$ et les chaleurs spécifiques des liquides $B_i$;

» L et K la quantité et la chaleur spécifique d'un liquide neutre, par lequel le mélange est dilué.

» Désignons ensuite par F(T) la quantité de chaleur produite ou dépensée dans l'intervalle de temps de $t$ jusqu'à $t + dt$ par la dépense de l'unité de quantité du liquide $A_1$, à la température T. La quantité de chaleur, correspondant à la dépense de $dx_1$ du corps $A_1$, sera

$$dq = F(T)\,dx_1. \tag{1}$$

P.

» Elle est généralement employée : 1° à élever la température du mélange de T jusqu'à $T + dT$; 2° aux changements d'état des corps actifs ou des produits de réaction. Celle-ci étant supposée sans changement d'état sensible dans l'intervalle de temps considéré, on aura donc l'équation

$$dq = [(a_1 - x_1)c_1 + \ldots + (a_m - x_m)c_m]\,dT + [X_1 k_1 + \ldots + X_n k_n]\,dT,$$

qui, en vertu des proportionnalités

$$x_i = m_i x_1, \qquad X_i = n_i x_1$$

existant entre les quantités dépensées des corps actifs et les produits de réaction, se transforme en

$$(2) \qquad dq = (M + Nx_1)\,dT,$$

où

$$(3) \qquad \begin{cases} M = LK + \Sigma a_i c_i, \\ N = \Sigma n_i k_i - \Sigma m_i c_i. \end{cases}$$

» En comparant (1) et (3), il résulte l'équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{dT}{F(T)} = \frac{dx_1}{M + Nx_1}.$$

» Or la fonction F(T) a été étudiée par M. Berthelot dans sa *Mécanique chimique* et l'on trouve, dans le cas qui nous occupe, en suivant la marche de M. Berthelot, que F(T) est de la forme

$$(5) \qquad F(T) = P - NT,$$

où N est la constante définie par (3), P une autre constante, facile à déterminer expérimentalement.

» En le remplaçant dans (4) et en intégrant, on obtient

$$(6) \qquad (P - NT)(M + Nx_1) = MF(T_0) = \text{const.},$$

$T_0$ désignant la température initiale du mélange; la constante d'intégration sera donc positive ou négative suivant que la réaction est exo- ou endothermique. Remarquons que si les chaleurs spécifiques variaient sensiblement dans l'intervalle de temps considéré, on aura F(T) par une quadrature et $x_1$ en fonction de T par deux quadratures.

» La formule (6) résout le problème 1°; il est facile de construire la courbe représentant la loi de variation cherchée et d'en discuter les divers cas.

» Pour traiter les problèmes 2° et 3°, rappelons-nous la loi fondamentale de Dynamique chimique, d'après laquelle on a à chaque instant

$$(7) \qquad \frac{dx_1}{dt} = C(a_1 - x_1)(a_2 - m_2 x_1)\ldots(a_m - m_m x_1),$$

le coefficient C variant avec la température T du mélange à l'instant $t$. M. Van t'Hoff a trouvé par des considérations thermodynamiques, et l'expérience l'a vérifié, que la loi de variation de C avec T est (au moins approximativement) représentée par l'équation

$$(8) \qquad \frac{1}{C}\frac{dC}{dT} = \frac{F(T)}{2T^2},$$

où F(T) est la quantité de chaleur produite ou dépensée par la réaction, correspondant à la dépense de l'unité de quantité du corps $A_1$, T étant la température absolue. En remplaçant cette fonction par sa valeur précédente et en intégrant l'équation ainsi obtenue, on trouve

$$(9) \qquad C = Re^{-\frac{P}{2T}} T^{-\frac{N}{2}}.$$

» Des formules (6), (7), (9), on tire

$$(10) \qquad t = H\int_{T_0}^{T} T^{\frac{N}{2}} e_2^{\frac{P}{T}} \frac{(P - NT)^{m-2}}{(\alpha_1 - \beta_1 T)\ldots(\alpha_m - \beta_m T)}\, dT,$$

où H, $\alpha_i$, $\beta_i$ sont des constantes, connues dans chaque cas particulier donné, $T_0$ étant la température initiale du mélange.

» L'intégrale se calcule approximativement pour une valeur donnée de T, pourvu que cette valeur soit admissible; il en sera ainsi lorsque l'intégrale (10) est finie, positive et comprise dans l'intervalle entre $\frac{t_1}{H}$ et $\frac{t_2}{H}$.

» On calculera d'une manière analogue $t$ à l'aide de $x_1$. »

(14 juin 1897.)

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
24806 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

Бр 528

47

Минис. Кабинету Вел. Школе

Бр 739.

Писац.

Extrait des Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris, N° du 1er Juin 1896.



*Sur une équation différentielle du premier ordre;*

PAR M. MICHEL **PETROVITCH**.

« La solution de tout problème de Mécanique dans le plan, pour lequel il existe une fonction des forces, les lignes équipotentielles étant des droites d'ailleurs quelconques, se ramène, par la méthode de Jacobi, à l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre et du second degré

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = f(x). \tag{1}$$

» La même équation se rencontre dans plusieurs problèmes importants de Mécanique et de Géométrie supérieure. Ainsi, la recherche des géodésiques des surfaces spirales, et le problème d'applicabilité de ces surfaces, l'une sur l'autre, se ramène à l'intégration de l'équation (1). Si dans (1) on change $x$ en $\omega$, et $y$ en $\rho$, on a l'équation à laquelle on est conduit lorsqu'on cherche, en coordonnées polaires, les isométriques d'une courbe donnée par rapport à un système de droites concourantes, etc.

» Remarquons que l'équation plus générale

$$\varphi(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \psi(x)y\frac{dy}{dx} + \chi(x)y^2 + \theta(x) = 0 \tag{2}$$

se ramène à la forme (1), car si l'on pose

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int\frac{\psi}{\varphi}dx}, \qquad y = uY,$$

*P.*

l'équation (2) se change en

$$\varphi(x)\,u^2\left(\frac{dY}{dx}\right)^2+\left[\varphi(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\psi(x)\,u\,\frac{du}{dx}+\chi(x)\,u^2\right]Y^2+\theta(x)=0,$$

et en posant

$$z=\int\frac{dx}{u}\sqrt{\frac{\varphi(x)\,u'^2+\psi(x)\,uu'+\chi(x)\,u^2}{\varphi}},$$

l'équation prend la forme (1).

» C'est donc à cause de l'importance de l'équation (1) que la remarque suivante pourra présenter quelque intérêt. Je me propose de montrer comment cette équation se ramène elle-même à une autre qui a déjà été l'objet de travaux importants, dont les résultats deviendront ainsi applicables aux questions citées plus haut.

» L'équation (1) est satisfaite si l'on pose

f(x)

$$y=\sqrt{f(x)}\sin\varphi,\qquad \frac{dy}{dx}=\sqrt{\cancel{x}}\cos\varphi,$$

où $\varphi$ est la nouvelle fonction inconnue de $x$ définie par l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi}{dx}=1-\frac{1}{2}\frac{f'(x)}{f(x)}\operatorname{tang}\varphi. \tag{3}$$

» En posant

$$\varphi=x+u,$$

l'équation devient

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{f'(x)}{f(x)}\operatorname{tang}(x+u), \tag{4}$$

et en introduisant la nouvelle variable indépendante

$$z=-\frac{1}{2}\log f(x),$$

d'où, par exemple,

$$x=\theta(z),$$

on aura

$$\frac{du}{dz}=\operatorname{tang}[\theta(z)+u], \tag{5}$$

ou

$$\theta(z)+u=\operatorname{arc\,tang}p\qquad\text{avec}\qquad p=\frac{du}{dz}.$$

» En différentiant et en résolvant par rapport à $\frac{dp}{dz}$, on aura

$$(6) \qquad \frac{dp}{dz} = (1 + p^2)[p + \theta'(z)].$$

» Si l'on pose alors

$$p = -\frac{1}{3}\theta'(z) + X,$$

l'équation devient

$$(7) \qquad \frac{dX}{dz} = \lambda(z) + \mu(z)X + X^3$$

avec

$$\lambda(z) = \frac{1}{3}\theta''(z) + \frac{2}{3}\theta'(z) + \frac{2}{27}\theta'(z)^3,$$

$$\mu(z) = 1 - \frac{1}{3}\theta'(z)^2.$$

» Posons ensuite

$$\varphi = e^{z - \frac{1}{3}\int \theta'(z)^2 dz}, \qquad X = \varphi Y,$$

on aura

$$(8) \qquad \frac{dY}{dz} = \frac{\lambda(z)}{\varphi} + \varphi^2 Y^3;$$

enfin, en posant

$$t = \int \varphi^2 dz,$$

d'où, par exemple,

$$z = \chi(t),$$

l'équation se ramène à la forme

$$(9) \qquad \frac{dY}{dt} = F(t) + Y^3.$$

» L'équation (9) a été l'objet des travaux importants de M. Roger Liouville ([1]) qui l'a considéré sous plusieurs points de vue et a donné plusieurs cas d'intégration, et de M. Appell ([2]) qui en a fait une étude approfondie. Ces résultats deviennent donc applicables aux questions de Mécanique et de Géométrie citées plus haut; on peut, par exemple, établir une théorie des invariants de l'équation (1), etc.

---

([1]) *Comptes rendus,* 6 septembre 1886, 12 septembre 1887.

([2]) *Journal de Liouville,* 4e série, V; 1889.

» Réciproquement, comme on sait déterminer complètement les géodésiques d'un nombre illimité de surfaces spirales, on aura une infinité de formes de la fonction $F(t)$ pour lesquelles on saura intégrer l'équation (9). Car, comme il est connu dans la théorie des surfaces ([1]), toutes les fois que l'on saura déterminer par une méthode quelconque les géodésiques d'une surface spirale, on pourra obtenir par une quadrature l'intégrale générale de l'équation correspondante (1), et, par suite, en suivant la marche que nous avons exposée, on pourra complètement intégrer l'équation correspondante (9). »

([1]) Darboux, *Théorie des surfaces*, IIIe Partie, Livre VI.

(1er juin 1896.)



GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
23632 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

Минц. Кабинету Вел. Школе

Бр 738.

Писац.

Extrait des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, N° du 6. Janvier 1896.



*Sur un mode de décomposition des intégrales définies en éléments simples;*

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

« Supposons que, pour $n$ entier et positif, on ait

$$(1)\qquad \int_a^b [u(z)]^n \chi(z)\,dz = \varphi(n),$$

avec $\varphi(0)$ finie et déterminée, et soit $F(u)$ une fraction rationnelle en $u$, holomorphe lorsque $u$ varie entre les limites $u(a)$, $u(b)$; $\chi(z)$ est une fonction donnée quelconque de $z$.

» Envisageons l'intégrale

$$J = \int_a^b F(u)\chi(z)\,dz,$$

et la fonction

$$\theta(x) = \sum_0^\infty \varphi(n)\,x^n.$$

» En développant $F(u)$ suivant les puissances de $u$, on aura

$$(2)\qquad F(u) = \sum_0^\infty \varphi_n u^n,$$

où $\varphi_n$ aura, d'après Moivre et Lagrange, la forme suivante

$$\varphi_n = \sum P_r(n)\,r^n,$$

où $r$ désigne une racine quelconque de l'équation génératrice $G(r) = 0$ de la série récurrente (2), de degré de multiplicité $\lambda$; $P_r(n)$ désigne un

P.

certain polynome en $n$ de degré $\lambda - 1$, et le signe $\sum$ s'étend à toutes les racines de l'équation génératrice. D'ailleurs, le premier membre de l'équation génératrice ne diffère du dénominateur de la fraction rationnelle $F(u)$ que par le changement de $u$ en $\frac{1}{r}$.

» Supposons que toutes les racines soient comprises à l'intérieur du cercle de convergence de la série $\theta$, et considérons dans $v_n$ la partie correspondant à une des racines $r$ d'ordre $\lambda$. On peut alors écrire

$$P_r(n) = A_0 + A_1 n + A_2 n(n-1) + \ldots + A_{\lambda-1} n(n-1)\ldots(n-\lambda+2),$$

d'où, en posant successivement $n = 0, 1, 2, \ldots, \lambda - 2$, on calculera les coefficients $A_i$ au moyen de

$$P_r(0), \quad P_r(1), \quad \ldots, \quad P_r(\lambda-2).$$

» La racine $r$ donnera donc dans J une partie de la forme

$$\Psi_r = A_0 \sum_0^\infty \varphi(n) r^n + A_1 \sum_0^\infty n\varphi(n) r^n + \ldots$$
$$+ A_{\lambda-1} \sum_0^\infty n(n-1)\ldots(n-\lambda+2)\varphi(n) r^n.$$

» Mais on a en général

$$\sum_0^\infty n(n-1)\ldots(n-k)\varphi(n) r^n = r^{k+1} \frac{d^{k+1}\theta(r)}{dr^{k+1}},$$

donc

$$\Psi_r = A_0\theta(r) + A_1 r\theta'(r) + \ldots + A_{\lambda-1} r^{\lambda-1}\theta^{(\lambda-1)}(r),$$

et, par suite,

$$J = \sum \Psi_r,$$

la sommation s'étendant à toutes les racines de l'équation génératrice. *La fonction* $\theta(x)$ *joue donc le rôle d'élément simple pour l'intégrale* J.

» Ceci subsiste encore si $\varphi(0)$ n'est pas finie et déterminée, en supposant $F(0) = 0$. C'est alors la fonction

$$\theta_1(x) = \sum_0^\infty \varphi(n+1) x^n$$

qui joue le rôle d'élément simple de J.

» Ainsi, lorsque

$$u = e^{-z^2}$$

et si $F(u)$ est une fraction rationnelle en $u$, holomorphe lorsque $u$ varie de $0$ à $1$ et s'annulant pour $u = 0$, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(e^{-z^2})\,dz$$

admet la transcendante

$$\theta(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$$

comme élément simple. Pour l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} [e^{-z}F(b) - e^{-az}F(be^{-z})]\frac{dz}{z}$$

(où $a > 0$), c'est la transcendante

$$\theta(x) = \sum_{0}^{\infty} \log(n+a)\,x^n$$

qui joue le rôle d'élément simple.

» On sait, par exemple, que, pour toute valeur de $n$ telle que $\frac{a-n}{\omega}$ ne soit pas un entier, on peut choisir un entier $p$ de manière qu'on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\left(p-\frac{a}{\omega}\right)z} e^{\frac{nz}{\omega}} - e^{\left(1-p+\frac{a}{\omega}\right)z} e^{-\frac{nz}{\omega}}}{1-e^{z}}\,dz = \frac{1}{\pi}\cot\frac{\pi}{\omega}(n-a).$$

» Il s'ensuit que, pour l'intégrale

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\left(p-\frac{a}{\omega}\right)z} F\left(e^{\frac{z}{\omega}}\right) - e^{\left(1-p+\frac{a}{\omega}\right)} F\left(e^{-z}\right)}{1-e^{z}}\,dz,$$

c'est la transcendante

$$\theta(x, a) = \sum_{0}^{\infty} \cot\frac{\pi}{\omega}(n-a)x^n$$

qui joue le rôle d'élément simple. Et si l'on se rappelle que, en posant [1]

$$C(\xi) = -\sum_{1}^{\infty}\left[\cot\frac{\pi}{\omega}(n+\xi) + \sqrt{-1}\right],$$

---

[1] APPELL, *Comptes rendus*, t. LXXXVI, p. 953-956; 1878.

on aura

$$D \log \theta_1 \left( \frac{\pi\xi}{\omega} \right) = C(\xi) - C(\xi - 1) - \sqrt{-1},$$

on apercevra facilement la possibilité d'*exprimer les fonctions méromorphe doublement périodiques à l'aide d'intégrales définies de la forme* J, c'est-à-dire ne portant que sur des combinaisons rationnelles d'exponentielles, avec les limites d'intégration $-\infty$ et $+\infty$.

» Je signale l'intérêt que les transcendantes précédentes $\theta$ présentent pour le calcul des intégrales définies. »

(6 janvier 1896.)



GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
23032 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

Инжињ. Кабинету Вел. Школе

Исид.

Extrait des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, N° du 4. Nov. 1895.

II 975

Sur l'équation différentielle binome du premier ordre;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

« Envisageons l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = \mathrm{R}(x, \mathrm{X}, y),$$

où R est rationnel en $x$, X, $y$, en supposant $x$ et X liés par une relation algébrique $\mathrm{G}(x, \mathrm{X}) = 0$. L'équation se ramène d'ailleurs à la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{P}_1(x, \mathrm{X}, y)\sqrt[m]{\mathrm{P}_2(x, \mathrm{X}, y)}}{\mathrm{P}_3(x, \mathrm{X}, y)},$$

où $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$, $\mathrm{P}_3$ sont des polynomes en $x$, X, $y$. Il ne peut y avoir d'intégrales uniformes et transcendantes en $x$ que si le polynome G en $x$ et X est de degré 1 en X; s'il n'en est pas ainsi, toute intégrale uniforme en $x$ est rationnelle, *mais il peut y avoir des intégrales uniformes et transcendantes en $x$ et* X, et même l'intégrale générale peut être de telle nature.

» Occupons-nous d'abord du cas où l'intégrale générale de (1) est uniforme en $(x, \mathrm{X})$. S'il en est ainsi, l'équation (1) est à points critiques fixes. En y appliquant le théorème de M. Fuchs, on arrive à ce résultat que l'équation (1), supposée irréductible, doit être ou bien d'un degré $m < 3$ et de la forme

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda_1(y - \lambda_2),$$

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda_1(y - \lambda_2)(y - \lambda_3),$$

$$(4) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \lambda_1(y - \lambda_2)^2(y - a)(y - b)$$

*P.*

(où $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ sont fonctions de $x$ seulement, et $a$, $b$ des constantes), ou bien, si $m \geqq 3$, de la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = f(x)\,\mathrm{R}(y), \tag{5}$$

où $\mathrm{R}(y)$ est un polynome en $y$. De plus, en ramenant l'équation (5) à la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = \mathrm{R}(y), \tag{6}$$

on peut remarquer que si l'intégrale générale de (5) est à points critiques fixes, celle de (6) est uniforme, et l'on connaît, d'après Briot et Bouquet, tous les types d'équations (6) intégrables par des fonctions uniformes. On aura ainsi le Tableau suivant d'équations [auquel il faut joindre (2), (3) et (4)] dont l'intégrale générale peut être uniforme en $(x, \mathrm{X})$ :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \lambda(y-a)(y-b)(y-c)(y-d), \tag{7}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \lambda(v-a)y-by)^2((z-c)^2, \tag{8}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \lambda(y-a)^2(y-b)^3(y-c)^3, \tag{9}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = \lambda(y-a)^3(y-b)^4(y-c)^5, \tag{10}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = \lambda(y-a)^{m+1}(y-b)^{m-1} \tag{11}$$

($\lambda$ est fonction de $x$, et $a$, $b$, $c$, $d$ des constantes). Ces formes sont distinctes entre elles; on en aura d'ailleurs encore d'autres par des transformations homographiques.

» L'équation (2) est linéaire; (3) est une équation de Riccati; (4) se ramène à une équation de Riccati et à une quadrature; les équations (7), (8), (9), (10), (11) s'intègrent toutes par des quadratures.

» Supposons maintenant que l'intégrale générale ne soit pas uniforme en $(x, \mathrm{X})$; alors il peut y avoir des intégrales particulières de telle nature. Cherchons à préciser les types d'équations (1) pouvant admettre de telles intégrales.

» Toute intégrale singulière $y = \varphi(x, \mathrm{X})$, annulant $\mathrm{P}_2$ et par suite $y$, doit être une constante et réciproquement. Si toutefois $y = \varphi$ annulait $\mathrm{P}_2$ ou $\mathrm{P}_3$, ce serait un lieu de points critiques de l'intégrale.

» Ceci étant, si le nombre total de valeurs distinctes $y_i = \varphi_i(x, X)$, qui ou bien annulent $P_3$ ou bien annulent $P_2$ sans être constantes, dépasse deux, *toute intégrale uniforme en* $(x, X)$ *est rationnelle en* $(x, X)$. En effet, toute intégrale qui pour $x = x_0$ prend la valeur $\varphi_i(x_0, X_0)$ admet $x_0$ comme point critique, sauf pour certains points $x_0$ exceptionnels en nombre fini. L'intégrale $y$, supposée uniforme en $(x, X)$, ne peut donc être égale à $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ que pour des valeurs exceptionnelles de $x$ en nombre fini et le raisonnement s'achèvera comme dans le cas de l'équation du premier degré, dont nous nous sommes occupé dans une Note antérieure (¹).

» Désignons par $\lambda$ le nombre de valeurs $y_i = \varphi_i(x, X)$ qui annulent $P_2$ sans être des constantes. Pour que l'intégrale puisse être uniforme en $(x, X)$ et transcendante, il faut, d'après ce qui précède, que $\lambda = 0, 1, 2$.

» Soit d'abord $\lambda = 0$. $P_2$ est alors polynome en $y$ à coefficients constants, soit $\varpi(y)$. Si $y$ est une intégrale uniforme transcendante en $(x, X)$, le radical

$$\sqrt[m]{\varpi(y)} = \frac{P_3(x, X, y)}{P_1(x, X, y)}$$

l'est également. Pour qu'il en soit ainsi, il faut, d'après un théorème de M. Picard, *que la courbe* $z^m = \varpi(y)$ *soit du genre* 0 *ou* 1. (En particulier, si $m = 2$, le polynome $\varpi(y)$ doit être d'un degré inférieur à 5.) D'autre part, le nombre de valeurs de $y$ qui rendent infinie $\frac{dy}{dx}$ (y compris la valeur $y = \infty$), ne peut pas dépasser deux; par conséquent, l'équation doit être de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_1(x, X, y)\sqrt[m]{\varpi(y)}}{(y - \varphi_1)^{k_1}(y - \varphi_2)^{k_2}},$$

et l'on aura une relation entre les degrés du numérateur et du dénominateur en tenant compte de ce que $z = 0$ ne peut pas être une intégrale de l'équation en $z = \frac{1}{y}$, sans quoi il y aurait au moins trois valeurs $y_i = \varphi_i$ (en comptant $y = \infty$ comme une telle valeur).

» Si $\lambda = 1$, l'une des valeurs $\varphi_1$ et $\varphi_2$ doit annuler $P_2$.

» Si $\lambda = 2$, toutes les deux valeurs $\varphi_1$ et $\varphi_2$ (si elles existent) doivent annuler $P_2$.

---

(¹) *Comptes rendus*, n° 22; 1894.

» Enfin, si $P_1 = o$ admet des solutions $y =$ const., ces solutions jouent le même rôle que $y_i = \varphi_i$, de sorte qu'on peut dire, d'une manière générale, que *le nombre total des infinis* $y_i = \varphi_i(x, X)$ *de* $y'$, *de zéros non constants de* $P_2$ *et de zéros constants de* $P_1$, *doit être inférieur à* 3.

» J'ajoute qu'il suffit de supposer X rationnel en $x$ pour que tout ce qui précède puisse s'appliquer aux intégrales, uniformes en $x$, de l'équation binome. »

(4 novembre 1895.)



GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
22777 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

Инжин. Кабинетъ Вел. Школе

Одесс.

Extrait des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, N° du 16. Avril 1895.



*Sommation des séries à l'aide des intégrales définies;*

Par M. PETROVITCH.

« *Première formule.* — Soit $f(x)$ une fonction développable en série de Fourier

$$f(x) = \sum_0^\infty (a_m \sin mx + b_m \cos mx$$

pour $0 < x < 2\pi$, et posons

$$\varphi(x, r) = \sum_0^\infty (a_m \sin mx + b_m \cos mx) r^m,$$

où la partie réelle de $r$ est comprise entre $-1$ et $+1$.

» Envisageons la transcendante

$$C(x, a) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} [\cot a(n+x) + i]$$

définie par M. Appell ([1]), holomorphe pour toute valeur de $x$ à l'exception de celles qui rendent infinie une des cotangentes et jouant le rôle de l'élément simple pour les fonctions méromorphes doublement périodiques. Posons

$$\Phi(z, \beta) = C[(-z+\beta), \tfrac{1}{2}] - C[(-z-\beta), \tfrac{1}{2}],$$

où $\beta$ est une quantité imaginaire avec le coefficient de $\sqrt{-1}$ positif, et en-

([1]) *Comptes rendus*, t. LXXXVI, p. 953-956; 1878.

P.

visageons l'intégrale définie

$$J = \int_0^{2\pi} f(z)\Phi(z, \beta)\, dz.$$

» *Je dis que l'on aura*

$$(2) \qquad J = 4\pi i \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi(n, e^{\beta i}).$$

» En effet, on a

$$\Phi(z, \beta) = \sum_1^\infty \cot\tfrac{1}{2}(n - z - \beta) - \sum_1^\infty \cot\tfrac{1}{2}(n - z + \beta)$$

$$= \sum_1^\infty \frac{2i(1 - e^{2\beta i})}{1 - 2e^{\beta i}\cos(n - z) + e^{2\beta i}}$$

et, par conséquent,

$$J = 2i \sum_{n=1}^{n=\infty} \psi(n),$$

où

$$(3) \qquad \psi(n) = \int_0^{2\pi} \frac{(1 - e^{2\beta i}) f(z)\, dz}{1 - 2e^{\beta i}\cos(n - z) + e^{2\beta i}}.$$

Or le coefficient de $i$ dans $\beta$ étant positif, la partie réelle de $e^{\beta i}$ est plus petite que l'unité; l'intégrale $\psi(n)$ est donc une intégrale de Poisson ayant pour valeur

$$\psi(n) = 2\pi\,\varphi(n, e^{\beta i}),$$

d'où la formule (2).

» Cette formule subsiste encore pour $\beta = 0$, d'après ce qu'on sait sur l'intégrale de Poisson (Picard, *Analyse*, t. I), de sorte que l'on aura

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} f(n) = \lim \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} f(z)\,\Phi(z, \beta)\, dz, \qquad \text{pour } \beta = 0.$$

» Ainsi, par exemple, la limite de l'intégrale définie

$$J = \int_0^{2\pi} R(\sin xz, \cos xz)\,\Phi(z, \beta)\, dz,$$

pour $\beta = 0$, où R est rationnel en $\sin xz$ et $\cos xz$ (lorsque cette limite existe, ce que l'on saura reconnaître), s'exprime linéairement par des fonctions telles que

$$C(a_i, x), \qquad \frac{d}{da_i}C(a_i, x), \qquad \frac{d^2}{da_i^2}C(a_i, x), \qquad \ldots,$$

et des fonctions telles que

$$\frac{e^{2k_i x\sqrt{-1}}}{1 - e^{2k_i x\sqrt{-1}}},$$

où les $a_i$ sont certaines constantes et les $k_i$ des entiers; on s'en assure par la décomposition de R en éléments simples, d'après la méthode de M. Hermite.

» En se rappelant que

$$D\log\theta_1(ax) = C(-x, a) - C(x-1, a) - \sqrt{-1}$$

(les valeurs $\omega$ et $\omega'$ qui correspondent à $D\log\theta_1$ sont $\omega = \pi$ et $\omega' = a$), on trouve facilement les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire R, pour que cette limite soit une fonction méromorphe et doublement périodique de $x$. Inversement, toute fonction méromorphe doublement périodique peut être représentée par une intégrale définie de la forme précédente.

» *Deuxième formule.* — Soit $F(x)$ une fonction satisfaisant aux conditions de Dirichlet et pouvant être écrite sous la forme

$$F = F_1 - F_2,$$

où $F_1$ et $F_2$ sont deux fonctions ayant une même limite commune, finie et déterminée, lorsque $x$ croît indéfiniment par des valeurs réelles croissantes jusqu'à $+\infty$ et décroissantes jusqu'à $-\infty$.

» On sait alors qu'en posant

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)e^{qiz}\,dz = \theta(q),$$

on aura

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \theta(q)e^{qix}\,dq = F(x).$$

» Ceci étant, envisageons les séries (supposées convergentes)

$$J_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n)e^{\lambda n}, \qquad J_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} F(n)e^{\lambda n},$$

$\lambda$ dépendant de $n$ et ayant sa partie réelle négative. En posant

$$\theta(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(z)\, e^{qiz}\, dz,$$

on aura

$$\mathrm{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(q)}{1 - e^{\lambda + qi}}\, dq,$$

$$\mathrm{J}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(q) e^{\lambda + qi}\, dq}{1 - e^{\lambda + qi}},$$

formules qui permettent assez souvent d'exprimer des transcendantes nouvelles sous forme d'intégrale définie portant sur des fonctions simples. »

(16 avril 1895.)

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
22346 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.