

## Fizički zasnovano modeliranje infiltracije kod prirodom inspirisanih rešenja

Ognjen Govedarica<sup>1</sup>  
Filip Stanić<sup>2</sup>  
Anja Randelović<sup>3</sup>

APSTRAKT: Prirodom inspirisana rešenja za cilj imaju unapređivanje kvaliteta života u urbanim sredinama pospešivanjem biodiverziteta. Mnoga od ovih rešenja, kao što su zeleni krovovi i biofiltri, su takođe zanimljiva u pogledu smanjivanja i prečišćavanja kišnog oticaja u gradovima. S obzirom da se zasnivaju na procesu infiltracije, za procenu uticaja ovakvih rešenja na urbane (pod)slivove neophodno je koristiti fizički zasnovane i efikasne modele padavine-oticaaj. U literaturi se može naći veliki broj modela različitih nivoa kompleksnosti i efikasnosti, pri čemu je neophodno naći kompromisno rešenje. U ovom radu su analizirana dva numerička modela zasnovana na rešavanju Richards-ove jednačine koji spadaju u grupu fizički zasnovanih. Jedan od modela je standardna implicitna numerička shema, dok drugi koristi Ross (2003)-ovo eksplicitno numeričko rešenje. Modeli su testirani na eksperimentalnim podacima prikupljenim sa zelenog krova "Green Wave" i biofiltra na Univerzitetu Monash, a rezultati oba modela su poređeni međusobno u pogledu tačnosti i efikasnosti, a zatim i sa merenim vrednostima dreniranog oticaja. U slučaju zelenog krova gornji granični uslov je mereni intenzitet kiše a donji je slobodno dreniranje, dok se u slučaju biofiltra na gornjoj granici zadaje mereni ulazni fluks a na donjoj nulta vrednost kapilarnog potencijala. Zadati granični uslovi uzrokuju tečenje kroz nezasićeni supstrat zelenog krova, dok kod biofiltra dolazi i do potpunog zasićenja filterskog sloja. Implicitno i eksplicitno numeričko rešenje daju gotovo identične rezultate sa zanemarljivom greškom u bilansu, dok je eksplicitno rešenje skoro 3 puta efikasnije. Takođe, slaganje modeliranih i izmerenih vrednosti oticaja je zadovoljavajuće, pri čemu Nash-Sutcliffe koeficijent iznosi 0.91 u slučaju zelenog krova, odnosno 0.93 u slučaju biofiltra.

Ključne reči: infiltracija, numeričko modeliranje, zeleni krov, biofilter

## Physically based modeling of infiltration in case of Nature Based Solutions

ABSTRACT: The main goal of Nature Based Solutions (NBS) is improvement of life quality in urban areas through enhancement of biodiversity. Many of those NBSs, such as green roofs and biofilters, are also interesting in terms of reduction and purification of the urban rainfall runoff. Having on mind those solutions are based on the infiltration process, for estimating their impact on urban (sub)catchments it is necessary to use physically based and efficient rainfall-runoff models. In literature there are numerous models of different complexity and accuracy, and hence it is necessary to find a compromise solution. Two numerical models based on Richards equation, that are considered as fully physically-based, are presented in this work. One is a standard implicit numerical scheme, and the other is based on Ross (2003)'s explicit numerical solution. The models are tested on the experimental data collected from the green roof called "Green Wave" and biofilter at Monash University carpark, where their results are compared firstly in terms of accuracy and efficiency, and afterwards with measured outflow values. In case of green roof, the top boundary condition is measured rainfall intensity and the bottom one is free drainage, while in case of biofilter the measured inflow is defined at the top boundary and zero capillary potential at the bottom side. These boundary conditions cause unsaturated flow through the green roof substrate layer, while in case of biofilter the substrate can get fully saturated. Results of both models are almost identical, with insignificant errors in water balance, whereas the explicit numerical solution is almost three times more efficient. Also, agreement between the modeling results and measurements is satisfactory, where Nash-Sutcliffe coefficient takes values of 0.91 and 0.93 in case of green roof and biofilter, respectively.

Keywords: infiltration, numerical modelling, green roof, biofilter

---

<sup>1</sup> Ognjen, Govedarica, student doktorskih studija, Građevinski fakultet Beograd, [ogovedarica@grf.bg.ac.rs](mailto:ogovedarica@grf.bg.ac.rs)

<sup>2</sup> Dr, Filip, Stanić, istraživač, Građevinski fakultet Beograd, [fstanic@grf.bg.ac.rs](mailto:fstanic@grf.bg.ac.rs)

<sup>3</sup> Dr, Anja, Randelović, docent, Građevinski fakultet Beograd, [arandjelovic@grf.bg.ac.rs](mailto:arandjelovic@grf.bg.ac.rs)

## 1 Uvod

Prirodom inspirisana rešenja imaju ulogu da korišćenjem prirodnih ekosistema u urbanim područjima obezbede benefite koje pruža biodiverzitet (Kabisch i sar., 2016). Mnoga od ovih rešenja se zasnivaju na nekom vidu interakcije zemljišta i vode, što najčešće podrazumeva infiltraciju. Takvi su npr. zeleni krovovi (Stovin i sar., 2012) čiji je glavni cilj da svojom retenzionom sposobnošću i vodoprovodljivošću ublaže i odlože pik kišnog oticaja, čime se smanjuje opterećenje na kanalizacioni sistem i izbegava pojava urbanih poplava. Biofiltri pored uloge u ublažavanju pika kišnog oticaja, mogu značajno da doprinesu poboljšanju kvaliteta oticaja, pa čak i u slučaju veoma upornih zagađivača (Zhang i sar., 2014). Da bi se ovakva rešenja projektovala, kao i da bi se procenili njihovi hidrološki uticaji na urbane (pod)slivove većih razmera, neophodno je efikasno, ali dovoljno tačno, modelirati proces infiltracije.

Kada je reč o kompromisu između efikasnosti i tačnosti modela, u literaturi se mogu naći različiti tipovi modela koji se primenjuju zavisno od nivoa detaljnosti, odnosno prostorne i vremenske skale koja se razmatra. Najjednostavniji modeli su često i najefikasniji, ali s obzirom da se zasnivaju na trivijalnoj fizici, njihovi rezultati su ujedno i najnepouzdaniji. Takva je npr. SCS-CN metoda (Getter i sar., 2007) koja se zasniva na jednostavnoj proporciji da je odnos stvarne i potencijalne zapremine skladištene vode u zemljištu jednak odnosu stvarne otekle i ukupne dotekle zapremine vode na sliv. Nešto složeniji su konceptualni modeli koji poroznu sredinu aproksimiraju linearnim rezervoarima (Zimmer i Geiger, 1997; Versini i sar., 2016), kod kojih je isticanje u linearnoj korelaciji sa nivoom vode u rezervoaru, odnosno nelinearnim (Todini, 1996; Liu i Todini, 2002) kod kojih se ova veza opisuje stepenom funkcijom. Prednost konceptualnih modela je što su zasnovani na uprošćenju fizici koja se može opisati analitički, što ih čini izuzetno efikasnim, ali je njihova primena ograničena na uzak opseg zemljišta i graničnih uslova.

Fizički najsloženiji i najdetaljniji modeli vertikalne infiltracije se zasnivaju na numeričkom rešavanju Richards-ove jednačine (Richards, 1931), za šta se u slučaju linijskog tečenja najčešće koristi metoda konačnih razlika. Numerička shema je najčešće implicitna (van Dam i Feddes, 2000), čime se poboljšava tačnost proračuna na uštrb efikasnosti jer je neophodno iterativno rešavanje sistema nelinearnih jednačina. Osim efikasnosti, implicitne numeričke sheme često imaju problem i sa stabilnošću proračuna koja je uslovljena prostornom, odnosno vremenskom diskretizacijom (Crevoisier i sar., 2009). Kako bi se prevazišao problem efikasnosti i konvergencije implicitnog numeričkog rešenja, Ross (2003) je predložio novo eksplicitno numeričko rešenje koje se zasniva na linearizaciji flukseva u poroznoj sredini razvijanjem istih u Taylor-ov red i korišćenjem integralne funkcije Kirchhoff-ovog potencijala umesto izuzetno nelinearne funkcije vodoprovodljivosti.

U ovom radu su poređeni rezultati dva numerička modela, standardne implicite numeričke sheme (van Dam i Feddes, 2000) i Ross (2003)-ovog eksplicitnog numeričkog rešenja. Modeli su korišćeni za simulaciju infiltracije kroz zeleni krov koji se nalazu u mestu Champs-sur-Marne, 20 km istočno od Pariza (Versini i sar., 2020), kao i infiltracije kroz biofilter na Univerzitetu Monash (Randelovic i sar., 2016). U oba slučaja su kao ulazni podaci korišćeni intenziteti kiše, odnosno dotoka sa sliva, mereni na lokacijama na kojima se nalaze pomenuta prirodom inspirisana rešenja. Preliminarni rezultati modela, dobijeni ručnim kalibrisanjem parametara zemljišta, su osim međusobno upoređeni i sa izmerenim vrednostima dreniranih oticaja, na osnovu čega su izvedeni osnovni zaključci o modelima.

## 2 Metodologija

Vertikalna infiltracija kroz nezasićenu poroznu sredinu se objašnjava bilansnom jednačinom u integralnoj formi koja opisuje promenu zapremine vlažnosti  $\theta$  (-) unutar kontrolne zapremine u vremenu  $t$ , nastalu usled razlike flukseva  $q$  (m/s) na njenom ulazu i izlazu:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial z} \quad (1)$$

Ukoliko se  $q$  izrazi preko Darcy-jeve jednačine, a član  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$  zameni članom  $\frac{\partial h_k}{\partial t} \frac{d\theta}{dh_k} = C(h_k) \frac{\partial h_k}{\partial t}$  gde je  $h_k$  kapilarni potencijal izražen u (m), dobija se Richards-ova jednačina (Richards, 1931) koja matematički opisuje vertikalnu infiltraciju kroz nezasićenu poroznu sredinu:

$$C(h_k) \frac{\partial h_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K(h_k) \left( \frac{\partial h_k}{\partial z} + 1 \right) \right) \quad (2)$$

Jednačina (2) je parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda sa nepoznatom  $h_k$ , dok su  $K(h_k)$  i  $C(h_k)$  hidrauličke karakteristike porozne sredine u vidu vodoprovodljivosti (m/s) i nagiba krive vlažnosti ( $m^{-1}$ ). Jednačina (2) se rešava numerički, za šta je neophodno analitički (ili tabelarno) definisati veze između  $\theta$  i  $h_k$  (opisane preko  $C(h_k)$ ), kao i između  $K$  i  $h_k$ . Ove analitičke korelacije su opisane različitim funkcijama (Brook i Corey, 1964; van Genuchten, 1980; itd.), među kojima su najzastupljenije one zasnovane na Brook i Corey modelu krive vlažnosti:

$$\theta(h_k) = \begin{cases} \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left( \frac{h_k}{h_{k,a}} \right)^{-\lambda}, & h_k \leq h_{k,a} \\ \theta_s & h_k > h_{k,a} \end{cases} \quad (3)$$

$$C(h_k) = \frac{d\theta(h_k)}{dh_k} = \begin{cases} -\frac{\lambda}{h_{k,a}} (\theta_s - \theta_r) \left( \frac{h_k}{h_{k,a}} \right)^{-\lambda-1}, & h_k \leq h_{k,a} \\ 0 & h_k > h_{k,a} \end{cases} \quad (4)$$

$$K(h_k) = \begin{cases} K_s \left( \frac{h_k}{h_{k,a}} \right)^{-(n+2)\lambda-2}, & h_k \leq h_{k,a} \\ K_s & h_k > h_{k,a} \end{cases} \quad (5)$$

gde su  $\theta_r$  i  $\theta_s$  rezidualna i maksimalna vlažnost (-),  $h_{k,a}$  je najveća apsolutna vrednost kapilarnog potencijala pri kojoj porozna sredina ostaje zasićena (m),  $\lambda$  je empirijski bezdimenzionalni koeficijent ( $> 0$ ) koji se odnosi na raspored veličina pora kod određenog poroznog materijala,  $n$  je Mualem-ov (Mualem, 1976) bezdimenzionalni koeficijent (može biti pozitivan i negativan) koji uzima u obzir povezanost pora (vijugavost putanje vode), dok je  $K_s$  vrednost vodoprovodljivosti (m/s) u zasićenom stanju (koeficijent filtracije). U nekim modelima se kao karakteristika zemljišta koristi i Kirchhoff-ov potencijal koji prestavlja integralnu funkciju vodoprovodljivosti po kapilarnom potencijalu  $\phi(h_k) = \int_{-\infty}^{h_k} K(h_k) dh_k$ . Ukoliko se funkcija vodoprovodljivosti zameni jednačinom (5) u pomenutom integralu, dobija se sledeći izraz za  $\phi(h_k)$ :

$$\phi(h_k) = \begin{cases} -\frac{K_s h_k}{(n+2)\lambda+1} \left( \frac{h_k}{h_{k,a}} \right)^{-(n+2)\lambda-2}, & h_k \leq h_{k,a} \\ K_s h_{k,a} \left( \frac{h_k}{h_{k,a}} - \frac{(n+2)\lambda+2}{(n+2)\lambda+1} \right), & h_k > h_{k,a} \end{cases} \quad (6)$$

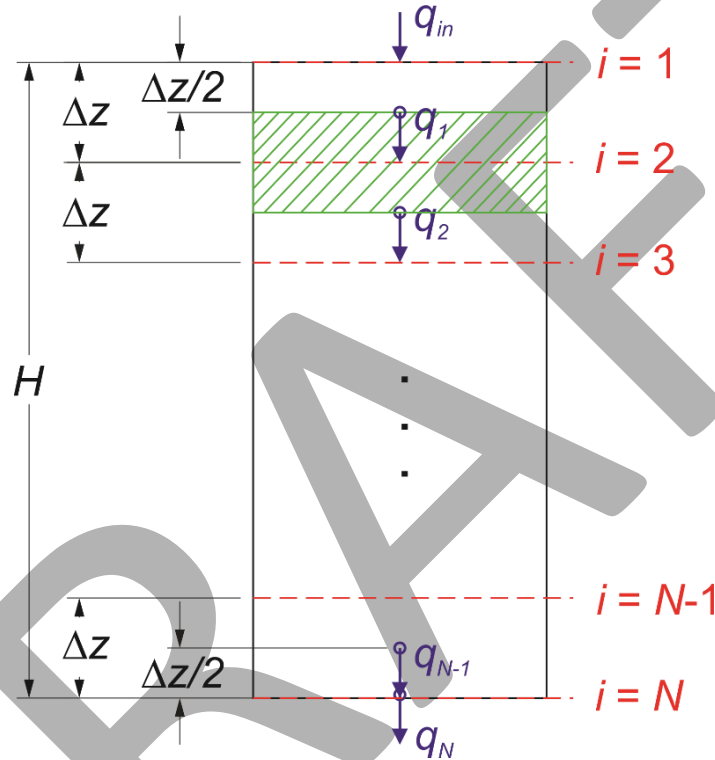
U naredna dva potpoglavlja su prikazane dve numeričke sheme za rešavanje jednačine (2) (odnosno jednačine 1) zasnovane na metodi konačnih razlika: standardna implicitna numerička shema (van Dam i Feddes, 2000) i novo eksplicitno numeričko rešenje (Ross, 2003). Oba numerička rešenja su kodirana u programskom jeziku MATLAB.

## 2.1 Implicitna numerička shema

Na Slici 1 je prikazana numerička shema zasnovana na metodi konačnih razlika, gde su nepoznate vrednosti  $h_k$  u svakom od preseka  $i = 1 : N$  u tekućem vremenskom koraku  $j$ . Prateći priloženu grafičku shemu, jednačina (2) u diskretizovanoj formi za presek  $i$  ima sledeći oblik:

$$C_i^j \frac{h_{k,i}^j - h_{k,i}^{j-1}}{\Delta t} = \frac{q_{i-1}^j - q_i^j}{\Delta z} = \frac{K_{i-1/2}^j \left( \frac{h_{k,i-1}^j - h_{k,i}^j}{\Delta z} + 1 \right) - K_{i+1/2}^j \left( \frac{h_{k,i}^j - h_{k,i+1}^j}{\Delta z} + 1 \right)}{\Delta z} \quad (7)$$

gde indeks  $j$  označava tekući,  $j-1$  prethodni vremenski korak,  $q_{i-1}^j$  i  $q_i^j$  su fluksevi (m/s) koji ulaze, odnosno izlaze iz preseka  $i$  (srafirana oblast na Slici 1), a koji se računaju koristeći vrednosti vodoprovodljivosti na sredini između preseka  $i-1$  i  $i$  ( $K_{i-1/2}^j = \frac{K_{i-1}^j + K_i^j}{2}$ ), odnosno  $i$  i  $i+1$  ( $K_{i+1/2}^j = \frac{K_i^j + K_{i+1}^j}{2}$ ). Jednačina (7) važi za svaki vremenski korak  $j$  i prostorni presek  $i = 1 : N$ , uz određene modifikacije za preseke  $i = 1$  i  $i = N$  (granični uslovi), pa je jasno da se u svakom koraku  $j$  rešava tridiagonalni sistem (svaki presek  $i$  je povezan sa prethodnim  $i-1$  i narednim  $i+1$  presekom) od  $N$  jednačina sa  $N$  nepoznatih vrednosti kapilarnih potencijala.



Slika 1. Računska shema za proračun vertikalne infiltracije metodom konačnih razlika

Figure 1. Calculation scheme for simulating vertical infiltration using the finite differences method

S obzirom da članovi  $C_i^j$ ,  $K_{i-1/2}^j$  i  $K_{i+1/2}^j$  takođe zavise od nepoznatih  $h_{k,i-1}^j$ ,  $h_{k,i}^j$ ,  $h_{k,i+1}^j$ , dobija se sistem nelinearnih jednačina koji se rešava iterativno. Rešenja dobijena u iteraciji  $p$  ( $h_{k,i}^{j,p}$ ) se porede sa rešenjima iz prethodne iteracije  $p-1$  ( $h_{k,i}^{j,p-1}$ ), sve dok maksimalna apsolutna rezlika između dve uzastopne iteracije ne postane manja od definisane tolerancije ( $|h_{k,i}^{j,p} - h_{k,i}^{j,p-1}| < 10^{-6}$  m). Da bi se smanjila greška u vodnom bilansu pri iterativnom rešavanju, levi deo jednačine (7) se može napisati na način predložen u Celia i sar. (1990):

$$C_i^j \frac{h_{k,i}^j - h_{k,i}^{j-1}}{\Delta t} = C_i^j \frac{h_{k,i}^{j,p} - h_{k,i}^{j,p-1}}{\Delta t} + \frac{\theta_i^{j,p-1} - \theta_i^{j-1}}{\Delta t} \quad (8)$$

Kako rešenje konvergira, tako razlika  $h_{k,i}^{j,p} - h_{k,i}^{j,p-1}$  postaje sve manja, a član  $C_i^j \frac{h_{k,i}^{j,p} - h_{k,i}^{j,p-1}}{\Delta t}$  kompenzuje grešku u bilansu nastalu usled nepotpune konvergencije. Konačno, za  $i = 2 : N-1$ , jednačina (7) se može napisati u sledećem obliku:

$$-\frac{K_{i-1/2}^j}{c_i^j(\Delta z)^2} h_{k,i-1}^j + \left( \frac{K_{i-1/2}^j}{c_i^j(\Delta z)^2} + \frac{K_{i+1/2}^j}{c_i^j(\Delta z)^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) h_{k,i}^{j,p} - \frac{K_{i+1/2}^j}{c_i^j(\Delta z)^2} h_{k,i+1}^j = \frac{h_{k,i}^{j,p-1}}{\Delta t} - \frac{\theta_i^{j,p-1} - \theta_i^{j-1}}{c_i^j \Delta t} + \frac{K_{i-1/2}^j - K_{i+1/2}^j}{c_i^j \Delta z} \quad (9)$$

gde članovi uz nepoznate  $h_{k,i-1}^j$ ,  $h_{k,i}^j$  i  $h_{k,i+1}^j$  (najčešće obeleženi sa  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  i  $\gamma_i$  i računaju se na osnovu  $h_{k,i-1}^{j,p-1}$ ,  $h_{k,i}^{j,p-1}$  i  $h_{k,i+1}^{j,p-1}$ ), popunjavaju tridijagonalnu kvadratnu matricu  $A$  [ $N \times N$ ], dok članovi sa desne strane jednakosti (najčešće obeleženi sa  $b_i$ ) popunjavaju vektor kolonu slobodnih članova  $b$  [ $N \times 1$ ]. Sistem jednačina, u matricnoj formi zapisan kao  $A \times h = b$ , se u programskom jeziku MATLAB rešava Thomas-ovim algoritmom, pri čemu se kao rezultat dobija vektor kolona  $h$  [ $N \times 1$ ] koji sadrži nepoznate vrednosti  $h_{k,i}^j$  za preseke  $i = 1 : N$ . Da bi se numerički rešio opisani sistem nelinearnih jednačina potrebno je prvo definisati granične uslove u presecima  $i = 1$  i  $i = N$ .

### 2.1.1 Gornji granični uslov – definisan fluks $q_{in}$

S obzirom da je  $i = 1$  prvi presek, ne postoje članovi sa indeksom  $i - 1$  i jednačina (7), odnosno (9), se definiše kroz gornji granični uslov. U kontekstu prirodom inspirisanih rešenja, najzastupljeniji gornji granični uslov je poznata vrednost ulaznog fluksa  $q_{in}^j$  u preseku  $i = 1$  (najčešće intenzitet padavina ili dotok sa sliva), pa jednačina (7) ima sledeću formu:

$$C_1^j \frac{h_{k,1}^{j,p} - h_{k,1}^{j,p-1}}{\Delta t} + \frac{\theta_1^{j,p-1} - \theta_1^{j-1}}{\Delta t} = \frac{q_{in}^j - K_{3/2}^j \left( \frac{h_{k,1}^j - h_{k,2}^j}{\Delta z} + 1 \right)}{\Delta z/2} \quad (10)$$

koja u razvijenom obliku izgleda ovako:

$$\left( \frac{K_{3/2}^j}{c_1^j \Delta z \Delta z/2} + \frac{1}{\Delta t} \right) h_{k,1}^{j,p} - \frac{K_{3/2}^j}{c_1^j \Delta z \Delta z/2} h_{k,2}^j = \frac{h_{k,1}^{j,p-1}}{\Delta t} - \frac{\theta_1^{j,p-1} - \theta_1^{j-1}}{c_1^j \Delta t} + \frac{q_{in}^j - K_{3/2}^j}{c_1^j \Delta z/2} \quad (11)$$

gde je  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1$  i  $\gamma_1$  su redno članovi uz  $h_{k,1}^j$  i  $h_{k,2}^j$ , dok je  $b_1$  vrednost sa desne strane jednakosti. U skladu sa Slikom 1 kao prostorna diskretizacija između flukseva  $q_{in}^j$  i  $q_1^j$  se koristi  $\Delta z/2$ . Kada je površinski sloj zemljišta ( $i = 1$ ) zasićen, u njemu više ne dolazi do promene vlažnosti već do stvaranja nadsloja vode. Stoga se umesto jednačine (11) rešava sledeća jednačina:

$$\frac{h_{k,1}^j - h_{k,1}^{j-1}}{\Delta t} = q_{in}^j - q_1^j \quad (12)$$

koja opisuje promenu nivoa na površini usled razlike između dotoka  $q_{in}^j$  i isticanja  $q_1^j$  iz preseka  $i = 1$ . U razvijenoj formi jednačina (12) izgleda ovako:

$$\left( \frac{K_{3/2}^j}{\Delta z} + \frac{1}{\Delta t} \right) h_{k,1}^{j,p} - \frac{K_{3/2}^j}{\Delta z} h_{k,2}^j = \frac{h_{k,1}^{j-1}}{\Delta t} + \left( q_{in}^j - K_{3/2}^j \right) \quad (13)$$

pri čemu je  $\alpha_1 = 0$  kao u jednačini (11), dok se vrednosti  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  i  $b_1$  razlikuju.

### 2.1.2 Donji granični uslov – slobodno dreniranje

Presek  $i = N$  je poslednji presek u nizu i za njega ne postoje članovi sa indeksom  $i + 1$  pa se jednačina (7) definiše uz pomoć donjeg graničnog uslova. U slučaju prirodom inspirisanih rešenja jedan od najčešćih oblika donjeg graničnog uslova je slobodno dreniranje, gde se vrednost fluksa za presek  $i = N$  izjednačava sa vrednošću vodoprovodljivosti,  $q_N^j = K_N^j$  (vrednost gradienta  $\left. \frac{\partial h_k}{\partial z} \right|_{z=H} = 0$ ). U tom slučaju, jednačina (7) ima sledeći oblik:

$$C_N^j \frac{h_{k,N}^{j,p} - h_{k,N}^{j,p-1}}{\Delta t} + \frac{\theta_N^{j,p-1} - \theta_N^{j-1}}{\Delta t} = \frac{K_{N-1/2}^j \left( \frac{h_{k,N-1}^j - h_{k,N}^j}{\Delta z} + 1 \right) - K_N^j}{\Delta z/2} \quad (14)$$

dok u razvijenom obliku izgleda ovako:

$$-\frac{K_{N-1/2}^j}{C_N^j \Delta z \Delta z/2} h_{k,N-1}^j + \left( \frac{K_{N-1/2}^j}{C_N^j \Delta z \Delta z/2} + \frac{1}{\Delta t} \right) h_{k,N}^{j,p} = \frac{h_{k,N}^{j,p-1}}{\Delta t} - \frac{\theta_N^{j,p-1} - \theta_N^{j-1}}{C_N^j \Delta t} + \frac{K_{N-1/2}^j - K_N^j}{C_N^j \Delta z/2} \quad (15)$$

pri čemu se kao u slučaju  $i = 1$ , koristi prostorna diskretizacija  $\Delta z/2$  između flukseva  $q_{N-1}^j$  i  $q_N^j$ . Jednačina (15) ima identičan oblik i kada je presek  $i = N$  zasićen, gde je  $\gamma_N = 0$ ,  $\alpha_N$  i  $\beta_N$  su vrednosti koeficijenata uz  $h_{k,N-1}^j$ , odnosno  $h_{k,N}^{j,p}$ , dok je  $b_N$  vrednost izraza sa desne strane jednakosti. Kada su svi preseki  $i = 1 : N$  zasićeni, isticanje na dnu više nije slobodno već pod pritiskom, pa je u tom slučaju  $q_N^j = q_{N-1}^j$  zbog čega desna strana jednačine (7) postaje jednaka nuli:

$$\frac{1}{\Delta t} h_{k,N}^{j,p} = \frac{h_{k,N}^{j,p-1}}{\Delta t} - \frac{\theta_N^{j,p-1} - \theta_N^{j-1}}{C_N^j \Delta t} \quad (16)$$

Vrednosti  $\alpha_N$  i  $\gamma_N$  su jednake nuli,  $\beta_N = \frac{1}{\Delta t}$ , dok  $b_N$  odgovara izrazu sa desne strane jednačine (16).

Još jedan od čestih oblika donjeg graničnog uslova je definisana vrednost kapilarnog potencijala  $h_{k,bot}$  u preseku  $i = N$ . U tom slučaju se poslednji red matrice  $A$  popunjava sledećim vrednostima:  $\alpha_N = \gamma_N = 0$ ,  $\beta_N = 1$ , dok je  $b_N = h_{k,bot}$ .

## 2.2 Ross (2003)-ovo eksplicitno numeričko rešenje

Za razliku od prethodno opisane implicitne sheme, Ross (2003)-ovo numeričko rešenje je potpuno eksplicitno zahvaljujući linearizaciji flukseva koja je opisana u nastavku teksta. Na osnovu Slike 1, jednačina (1) se u diskretnoj formi za presek  $i$  može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{(\theta_s - \theta_r) \Delta S_i^j}{\Delta t} = \frac{q_{i-1}^j - q_i^j}{\Delta z} \quad (17)$$

Gde je  $S_i = \frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$  stepen zasićenosti (-) koji varira između 0 i 1,  $\Delta S_i^j$  je promena stepena zasićenosti između trenutka  $t^{j-1}$  i  $t^j$ , dok su  $q_{i-1}^j$  i  $q_i^j$  fluksevi koji ulaze, odnosno izlaze iz preseka  $i$  u  $t^j$ . Kako se eksplicitnom shemom ne bi gubilo na tačnosti, Ross (2003) je predložio nekoliko modifikacija. Prvo, flukseve  $q_{i-1}^j$  i  $q_i^j$  je predstavio pomoću Taylor-ovog reda koristeći vrednosti iz prethodnog vremenskog koraka ( $j-1$ ):

$$q_{i-1}^j = q_{i-1}^{j-1} + \sigma \left( \frac{\partial q_{i-1}}{\partial S_{i-1}} \right)^{j-1} \Delta S_{i-1}^j + \frac{\partial q_{i-1}}{\partial S_i} \left( \Delta S_{i-1}^j \right)^{j-1} \Delta S_i^j \quad (18)$$

$$q_i^j = q_i^{j-1} + \sigma \left( \frac{\partial q_i}{\partial S_i} \right)^{j-1} \Delta S_i^j + \frac{\partial q_i}{\partial S_{i+1}} \left( \Delta S_{i+1}^j \right)^{j-1} \Delta S_{i+1}^j \quad (19)$$

Jednačine (18) i (19) koriste samo prve parcijalne izvode flukseva po stepenu zasićenosti koji se takođe odnose na korak ( $j-1$ ) u kojem su sve vrednosti  $S_i^{j-1}$  poznate (izvodi se množe sa faktorom  $\sigma = 0.5$  kada je zemljište nezasićeno). Kada se jednačine (18) i (19) uvrste u jednačinu (17) dobija se jednačina sa tri nepoznate promene stepena zasićenosti u tri uzastopna preseka ( $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$ ) u trenutku  $t^j$ :

$$-\frac{\partial q_{i-1}}{\partial S_{i-1}} \left( \Delta S_{i-1}^j \right)^{j-1} + \left( \frac{\partial q_i}{\partial S_i} \right)^{j-1} - \frac{\partial q_{i-1}}{\partial S_i} \left( \Delta S_{i-1}^j \right)^{j-1} - \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta z}{\Delta t} (\theta_s - \theta_r) \Delta S_i^j + \frac{\partial q_i}{\partial S_{i+1}} \left( \Delta S_{i+1}^j \right)^{j-1} \Delta S_{i+1}^j = \frac{1}{\sigma} (q_i^{j-1} - q_{i-1}^{j-1}) \quad (20)$$

gde se elementi  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  i  $\gamma_i$ , grupisani uz svaku od nepoznatih  $\Delta S_{i-1}^j$ ,  $\Delta S_i^j$  i  $\Delta S_{i+1}^j$ , računaju na osnovu vrednosti iz prethodnog vremenskog koraka ( $j-1$ ). Kada se jednačina (20) napiše za  $i = 1 : N$ , uz male modifikacije za  $i = 1$  i  $i = N$ , dobija se tridiagonalni sistem od  $N$  jednačina sa  $N$  nepoznatih koji se ne rešava iterativno jer se vrednosti  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  i  $b_i$  ne menjaju u iteracijama.

Radi tačnijeg proračuna parcijalnih izvoda flukseva izraženih preko Darcy-jevog zakona, Ross (2003) zamenjuje izuzetno nelinearan član  $K(h_k) \frac{\partial h_k}{\partial z}$  izrazom  $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ :

$$q_{i-1} = -\frac{\Delta\phi_{i-1}}{\Delta z} + \frac{K_{i-1}+K_i}{2} = \frac{\phi_{i-1}-\phi_i}{\Delta z} + \frac{K_{i-1}+K_i}{2} \quad (21)$$

$$q_i = -\frac{\Delta\phi_i}{\Delta z} + \frac{K_i+K_{i+1}}{2} = \frac{\phi_i-\phi_{i+1}}{\Delta z} + \frac{K_i+K_{i+1}}{2} \quad (22)$$

Na osnovu jednačina (21) i (22) moguće je sračunati elemente sa desne strane jednakosti u jednačini (20), kao i izvode koji se javljaju sa leve strane jednakosti:

$$\left. \frac{\partial q_{i-1}}{\partial S_{i-1}} \right|^{j-1} = \frac{1}{\Delta z} \left. \frac{d\phi_{i-1}}{dS_{i-1}} \right|^{j-1} + \frac{1}{2} \left. \frac{dK_{i-1}}{dS_{i-1}} \right|^{j-1} \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial q_{i-1}}{\partial S_i} \right|^{j-1} = -\frac{1}{\Delta z} \left. \frac{d\phi_i}{dS_i} \right|^{j-1} + \frac{1}{2} \left. \frac{dK_i}{dS_i} \right|^{j-1} \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial q_i}{\partial S_i} \right|^{j-1} = \frac{1}{\Delta z} \left. \frac{d\phi_i}{dS_i} \right|^{j-1} + \frac{1}{2} \left. \frac{dK_i}{dS_i} \right|^{j-1} \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial q_i}{\partial S_{i+1}} \right|^{j-1} = -\frac{1}{\Delta z} \left. \frac{d\phi_{i+1}}{dS_{i+1}} \right|^{j-1} + \frac{1}{2} \left. \frac{dK_{i+1}}{dS_{i+1}} \right|^{j-1} \quad (26)$$

Imajući u vidu funkcionalnu vezu između  $\phi$  i  $h_k$  (jednačina 5), moguće je analitički izraziti izvode iz jednačina (23-26) na sledeći način:

$$\frac{d\phi}{dS} = \frac{d\phi}{dh_k} \frac{dh_k}{dS} = \frac{d\phi}{dh_k} \frac{1}{\frac{dS}{dh_k}} = \frac{\phi}{S} \left( n + 2 + \frac{1}{\lambda} \right) \quad (27)$$

$$\frac{dK}{dS} = \frac{dK}{dh_k} \frac{dh_k}{dS} = \frac{dK}{dh_k} \frac{1}{\frac{dS}{dh_k}} = \frac{K}{S} \left( n + 2 + \frac{2}{\lambda} \right) \quad (28)$$

Konačno, kada se izrazi (27) i (28) uvrste u jednačine (23 - 26) koje se zatim vrte u jednačinu (20), moguće je eksplicitno rešiti tridiagonalni sistem linearnih jednačina pri čemu se kao rezultat dobijaju nepoznate vrednosti  $\Delta S_i^j$  ( $i = 1$  do  $N$ ), odnosno  $S_i^j = S_i^{j-1} + \Delta S_i^j$ . Konačno, koristeći jednačinu (3) moguće je jednostavno odrediti  $h_{k,i}^j$ .

Ukoliko je presek  $i$  zasićen ( $S_i^{j-1} = 1$ ), ne dolazi do promene vlažnosti ( $\Delta S_i^j = 0$ ) i leva strana polazne jednačine (17) postaje nula. U tom slučaju jednačina (20) izgleda ovako:

$$-\left. \frac{\partial q_{i-1}}{\partial S_{i-1}} \right|^{j-1} \Delta S_{i-1}^j + \left( \left. \frac{\partial q_i}{\partial \phi_i} \right|^{j-1} - \left. \frac{\partial q_{i-1}}{\partial \phi_i} \right|^{j-1} \right) \Delta \phi_i^j + \left. \frac{\partial q_i}{\partial S_{i+1}} \right|^{j-1} \Delta S_{i+1}^j = \frac{1}{\sigma} (q_i^{j-1} - q_{i-1}^{j-1}) \quad (29)$$

pri čemu sa za svaki presek koji je zasićen (u ovom slučaju samo  $i$ ) kao nepoznata koristi  $\Delta \phi_i^j$  umesto  $\Delta S_i^j$  jer se  $\phi$  linearno menja sa  $h_k$  u zasićenom stanju (za  $h_k > h_{k,a}$ ), dok je  $S = 1$  konstantno. Na kraju se sračunava  $\phi_i^j = \phi_i^{j-1} + \Delta \phi_i^j$ , na osnovu čega se pomoću jednačine (6) određuje  $h_{k,i}^j$ . U odnosu na jednačinu (20), u slučaju jednačine (29) menja se vrednost koeficijenta  $\beta_i$  dok ostali koeficijenti ostaju nepromenjeni. Takođe, faktor je  $\sigma = 1$ , dok su izvodi prikazani jednačinama (27) i (28) jednaki  $\frac{d\phi}{d\phi} = 1$  i  $\frac{dK}{d\phi} = 0$  za  $h_k > h_{k,a}$ .

### 2.2.1 Gornji granični uslov – definisan fluks $q_{in}$

Kao kod implicitne sheme, jednačina (20) se u slučaju preseka  $i = 1$  definiše uz pomoć gornjeg graničnog uslova u vidu poznatog fluksa  $q_{in}^j$ :

$$\left( \left. \frac{\partial q_1}{\partial S_1} \right|^{j-1} - \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta z/2}{\Delta t} (\theta_s - \theta_r) \right) \Delta S_1^j + \left. \frac{\partial q_1}{\partial S_2} \right|^{j-1} \Delta S_2^j = \frac{1}{\sigma} (q_1^{j-1} - q_{in}^j) \quad (30)$$

pri čemu se u skladu sa Slikom 1 kao prostorna diskretizacija koristi  $\Delta z/2$ . Kao i u implicitnoj shemi,  $\alpha_i = 0$ ,  $\beta_i$  i  $\gamma_i$  se nalaze uz promenljive  $\Delta S_1^j$  i  $\Delta S_2^j$ , dok  $b_i$  odgovara izrazu sa desne strane jednakosti. Ukoliko je presek  $i = 1$  zasićen, rešava se jednačina (12) koja u razvijenoj formi ima sledeći oblik:

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial h_1}\right)^{j-1} - \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\Delta t} \Delta h_{k,1}^j + \frac{\partial q_1}{\partial S_2} \Delta S_2^j = \frac{1}{\sigma} (q_1^{j-1} - q_{in}^j) \quad (31)$$

Treba napomenuti da se jedino u slučaju zasićenog preseka  $i = 1$ , kao nepoznata koristi  $\Delta h_{k,1}^j$  ( $h_{k,1}^j = h_{k,1}^{j-1} + \Delta h_{k,1}^j$ ), dok se za sve ostale preseke  $i = 2 : N$  koristi  $\Delta S_i^j$  u nezasićenim uslovima, odnosno  $\Delta \phi_i^j$  u zasićenim.

### 2.2.2 Donji granični uslov – slobodno dreniranje

Kao što je napomenuto u poglavlju 2.1.2, uslov slobodnog dreniranja podrazumeva da je fluks u preseku  $i = N$  jednak koeficijentu vodoprovodljivosti  $q_N^j = K_N^j$ . U tom slučaju jednačina (20) dobija sledeći oblik u nezasićenim uslovima:

$$-\frac{\partial q_{N-1}}{\partial S_{N-1}} \Delta S_{N-1}^j + \left(\frac{\partial K_N}{\partial S_N} - \frac{\partial q_{N-1}}{\partial S_N} - \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta z}{2 \Delta t} (\theta_s - \theta_r)\right) \Delta S_N^j = \frac{1}{\sigma} (K_N^{j-1} - q_{N-1}^{j-1}) \quad (32)$$

odnosno u zasićenim:

$$-\frac{\partial q_{N-1}}{\partial S_{N-1}} \Delta S_{N-1}^j + \left(\frac{\partial K_N}{\partial \phi_N} - \frac{\partial q_{N-1}}{\partial \phi_N}\right) \Delta \phi_N^j = \frac{1}{\sigma} (K_N^{j-1} - q_{N-1}^{j-1}) \quad (33)$$

Gde je  $\sigma = 0.5$  u jednačini (32), odnosno  $\sigma = 1$  u jednačini (33),  $\gamma_N = 0$ ,  $\alpha_N$  i  $\beta_N$  su izrazi uz promenljive  $\Delta S_{N-1}^j$  i  $\Delta S_N^j$  (ili  $\Delta \phi_N^j$ ), dok vrednost  $b_N$  odgovara desnoj strani jednakosti. Ukoliko dođe do dreniranja pod pritiskom (preseki  $i = 1$  do  $N$  zasićeni), vrednost  $q_N^j = q_N^{j-1} + \sigma \frac{\partial q_N}{\partial \phi_N} \Delta \phi_N^j$ , pri čemu je  $q_N^{j-1} = q_{N-1}^{j-1}$ , pa se jednačina (33) može napisati u sledećoj formi:

$$-\frac{\partial q_{N-1}}{\partial \phi_{N-1}} \Delta \phi_{N-1}^j + \left(\frac{\partial q_N}{\partial \phi_N} - \frac{\partial q_{N-1}}{\partial \phi_N}\right) \Delta \phi_N^j = 0 \quad (34)$$

gde je za razliku od jednačine (33) i  $b_N = 0$ . Konačno, ako se kao donji granični uslov definiše fiksna vrednost kapilarnog potencijala  $h_{k,down}$ , tada su kao i kod implicitne sheme  $\alpha_N = \gamma_N = 0$ ,  $\beta_N = 1$ , dok je  $b_N = 0$  što znači da u preseku  $i = N$  ne dolazi ni do kakvih promena ( $\Delta S_N^j = 0$ , odnosno  $\Delta \phi_N^j = 0$ ) u vremenu. Na taj način je kapilarni potencijal na dnu uvek jednak vrednosti  $h_{k,down}$  definisanoj kao početni uslov.

## 3 Rezultati

Radi validacije dva prethodno opisana numerička modela, rezultati simulacija su upoređeni kako međusobno, tako i sa merenim vrednostima dreniranih oticaja u slučaju zelenog krova i biofiltera. U prvom slučaju korišćeni su podaci prikupljeni sa krova "Green Wave" (Versini i sar., 2020) koji se nalazi u predgrađu Pariza (mesto Champs-sur-Marne), preko puta fakulteta Ecole des Ponts ParisTech (Slika 2a), dok su u slučaju biofiltera korišćeni podaci sa Univerziteta Monash gde se oticaj sa parkinga prikuplja i usmerava ka biofilteru (Slika 2b). U oba slučaja numeričke simulacije su sprovedene koristeći lokalno izmerene ulazne flukseve (intenzitet kiše za zeleni krov, odnosno dotok za biofilter), dok su parametri zemljišta (Brooks & Corey funkcije) ručno kalibrisani kako bi se obezbedilo najbolje moguće slaganje između simuliranih i izmerenih vrednosti dreniranih oticaja. Takođe, da bi se dva predstavljena numerička rešenja adekvatno uporedila u pogledu tačnosti i efikasnosti, identični parametri zemljišta, kao i prostorna i vremenska diskretizacija, su korišćeni za oba modela.



## 19. Savetovanje SDHI i SDH - Beograd, Srbija 2021. Conference SDHI & SDH - Belgrade, Serbia 2021.

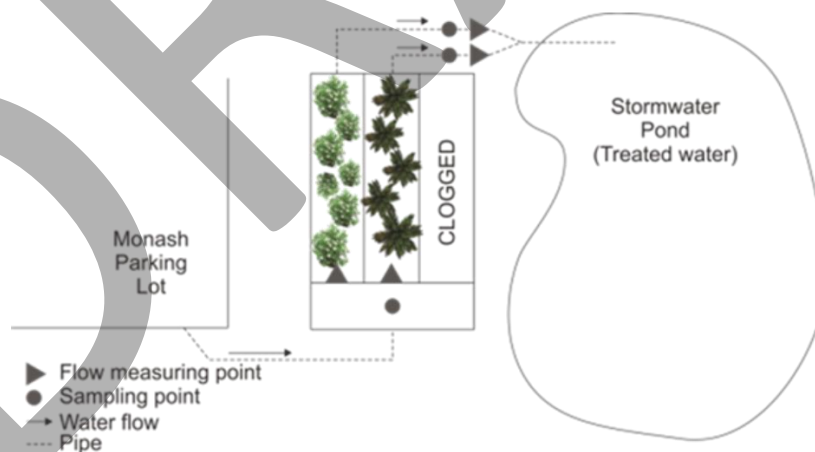
Treba napomenuti da su u narednim poglavljima prikazani preliminarni rezultati modela dobijeni uz određena pojednostavljena koja podrazumevaju:

- Simulaciju infiltracije samo u vertikalnom pravcu
- Zanemarivanje evapotranspiracije
- Zanemarivanje uticaja vegetacije
- Tretiranje porozne sredine kao homogene
- Uprošćavanje geometrije i graničnih uslova

(A)



(B)

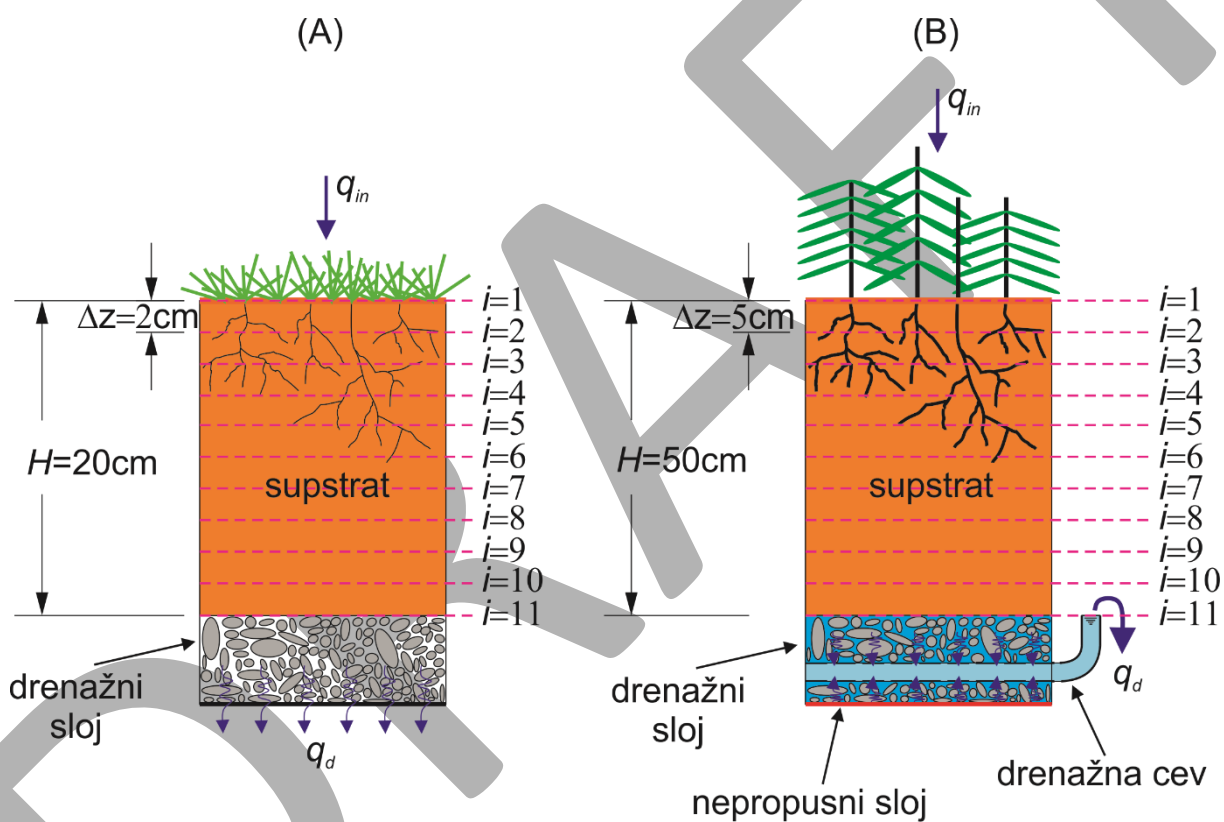


Slika 2. (A) Zeleni krov „Green Wave“ (preuzeto iz Stanić i sar., 2019); (B) Biofilter (preuzeto iz Randelovic, 2016)

Figure 2. (A) Green roof called „Green Wave“ (after Stanić et al., 2019); (B) Biofilter (after Randelovic, 2016)

### 3.1 Zeleni krov

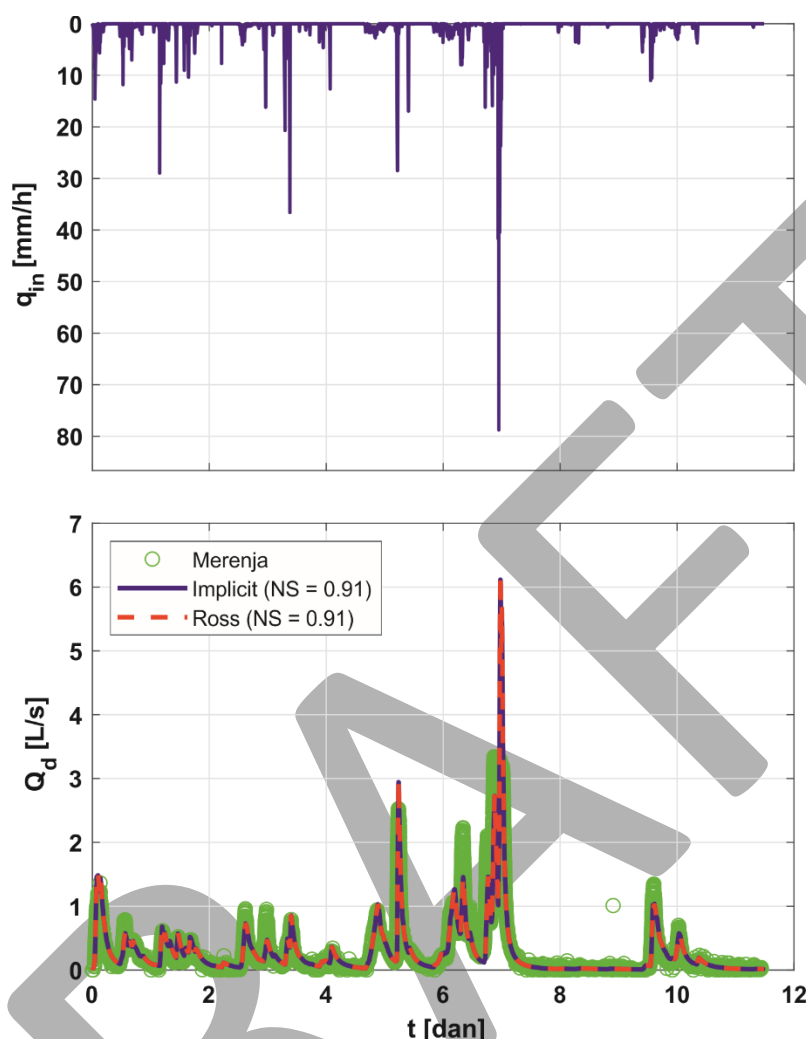
Kao što je već napomenuto, na analiziranom krovu „Green Wave“ su kontinualno osmatrani intenziteti padavina pomoću lokalnog disdrometra, kao i drenirani oticaj sa krova koji se meri na osnovu promene nivoa u sabirnom rezervoaru (metode merenja različitih komponenti vodnog bilansa su prikazane u Versini i sar., 2020). S obzirom da je po celoj dužini zelenog krova obezbeđeno slobodno dreniranje, nagib krova nema bitan uticaj na drenirani oticaj (Stanić, 2020), pa je opravdano koristiti linijski (vertikalni) model tečenja u poroznoj sredini. Uprošćena računaska shema je prikazana na Slici 3a, gde je prikazana ukupna debljina supstrata ( $H = 20$  cm), prostorna diskretizacija ( $\Delta z = 2$  cm), kao i gornji i donji granični uslovi u vidu poznatog intenziteta kiše, odnosno slobodnog dreniranja na dnu supstrata. Rezultat simulacije je oticaj dreniran kroz dno supstrata koji odgovara fluksu u poslednjem računskom preseku ( $i = N$ ) pomnoženom sa površinom krova ( $A_{GR} = 3511$  m<sup>2</sup>),  $Q_d = q_N(t)A_{GR} = K(h_{k,N}(t))A_{GR}$ .



Slika 3. Uprošćena računaska shema za proračun infiltracije kroz: (A) zeleni krov „Green Wave“ (gornji granični uslov – intenzitet kiše; donji granični uslov – slobodno dreniranje); (B) biofilter (gornji granični uslov – ulazni fluks; donji granični uslov – fiksna vrednost kapilarnog potencijala  $h_{k,down} = 0$ )

Figure 3. Simplified calculation scheme for simulating infiltration through (A) green roof „Green Wave“ (top boundary condition – rainfall intensity, bottom boundary condition – free drainage); (B) biofilter (top boundary condition – defined inflow, bottom boundary condition – defined capillary potential  $h_{k,down} = 0$ )

# 19. Savetovanje SDHI i SDH - Beograd, Srbija 2021. Conference SDHI & SDH - Belgrade, Serbia 2021.



Slika 4. Gornji grafik – izmereni intenzitet kiše na zelenom krovu „Green Wave“ (preuzeto iz Stanić, 2020); Donji grafik – poređenje merenih vrednosti oticaja (krugovi - preuzeto iz Stanić, 2020) sa rezultatima implicitne numeričke sheme (puna linija) i Ross-ovog eksplicitnog numeričkog rešenja (isprekidana linija)

Figure 4. Top graph – measured rainfall intensity on „Green Wave“ (after Stanić, 2020); Bottom graph – comparison between the measured outflow values (circles - after Stanić, 2020) and results of the implicit numerical scheme (solid line) and Ross’s explicit numerical solution (dashed line)

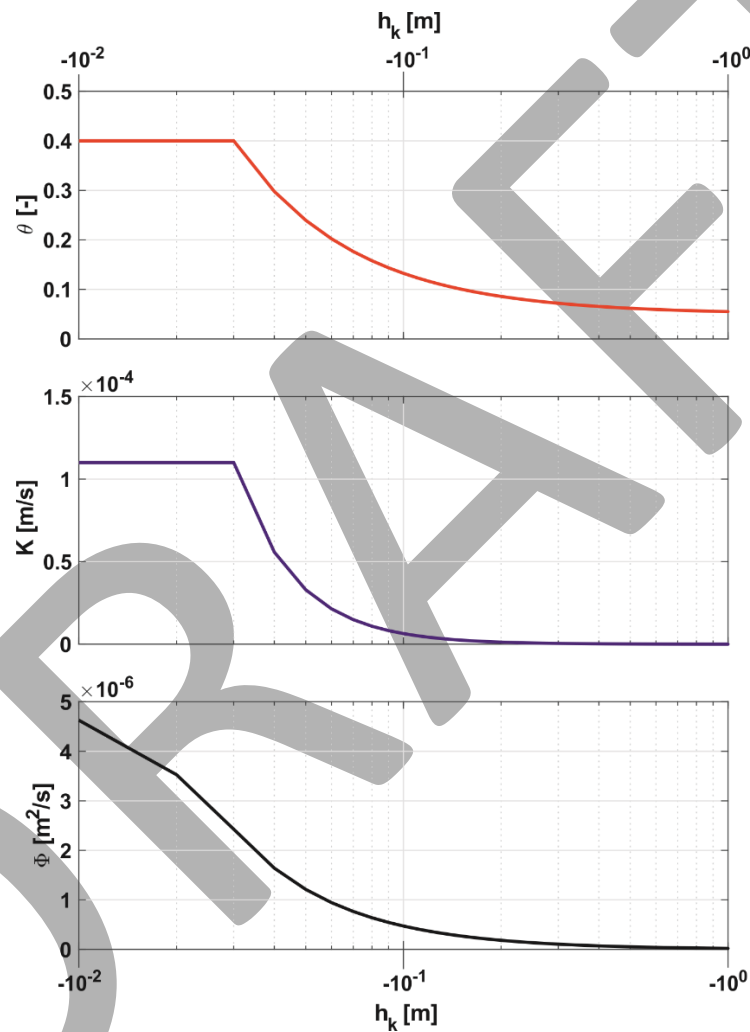
Na Slici 4-gore je prikazana kišna epizoda trajanja 11 dana (15.01.2019 - 26.01.2019), sa vremenskom diskretizacijom od 30 s, koja je koršćena kao ulazni podatak za oba numerička modela. Na Slici 4-dole su prikazani mereni protoci (zeleni krugovi) za isti period, kao i protoci modelirani pomoću implicitnog (puna plava linija), odnosno Ross-ovog (isprekidana crvena linija) numeričkog rešenja. Kalibrisanjem parametara hidrauličkih karakteristika supstrata zelenog krova (funkcije krive vlažnosti, vodoprovodljivosti i Kirchhoff-ovog potencijala su prikazane na Slici 5, a vrednosti parametara u Tabeli 1) dobija se zadovoljavajuće slaganje rezultata modela i merenja koje je opisano pomoću Nash-Sutcliffe koeficijenta ( $NS = 0.91$  u oba slučaja).

Tabela 1. Kalibrisani Brooks i Corey parametri zemljišta

Table 1. Fitted Brooks and Corey soil parameters

	$\theta_s$ [-]	$\theta_r$ [-]	$h_{k,a}$ [m]	$\lambda$ [-]	$K_s$ [m/s]	$n$ [-]
Zeleni krov	0.4	0.05	-0.03	1.2	$1.1 \times 10^{-4}$	-1.7
Biofilter	0.5	0.2	-0.1	0.75	$5 \times 10^{-5}$	-3.75

Kao početni uslov za simulaciju zadata je vrednost vlažnosti bliska rezidualnoj  $\theta_{init} = 0.053$ , a tokom čitave simulacije supstrat zelenog krova ostaje nezasićen u svim preseccima. Kao što je prethodno napomenuto, identične vrednosti parametara zemljišta, kao i prostorne/vremenske diskretizacije ( $\Delta z = 2$  cm /  $\Delta t = 30$  s), korišćeni su za oba modela koji daju gotovo identične rezultate uz zanemarljivu grešku u vodnom bilansu ( $6.3 \times 10^{-6}$  % i  $6.2 \times 10^{-4}$  % u slučaju implicitne, odnosno Ross-ove sheme). S druge strane, efikasnost ova dva modela je opisana kroz ukupan broj prolaza kroz sistem jednačina (u ovom slučaju 11 jednačina sa 11 nepoznatih), koji je 2.89 puta veći kod implicitne sheme u poređenju sa Ross-ovim rešenjem.



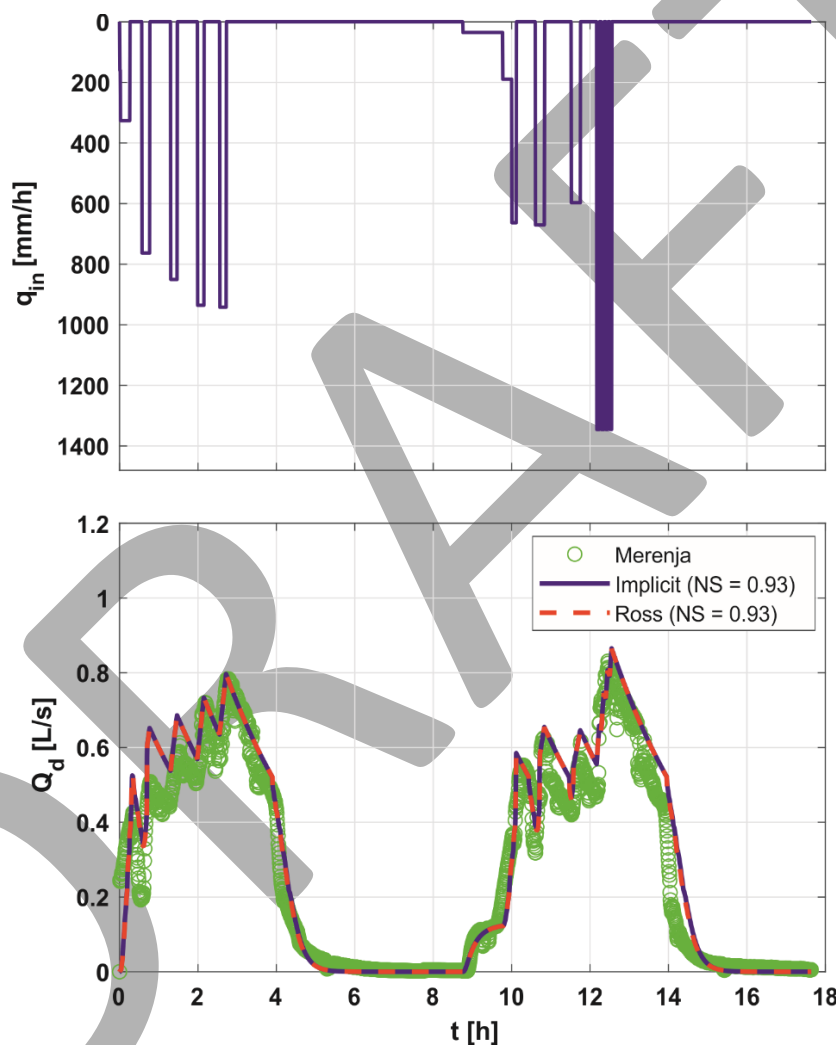
Slika 5. Hidrauličke karakteristike supstrata zelenog krova Green Wave opisane parametrima prikazanim u Tabeli 1: Gornji grafik – kriva vlažnosti (jednačina 3); Centralni grafik – kriva vodoprovodljivosti (jednačina 5); Donji grafik – kriva Kirchhoff-ovog potencijala (jednačina 6)

Figure 5. Soil hydraulic properties of the Green Wave substrate described by means of parameters presented in Table 1: Top graph – water retention curve (equation 3); Middle graph – hydraulic conductivity function (equation 5); Bottom graph – Kirchhoff potential curve (equation 6)

### 3.2 Biofilter

U slučaju biofiltera Univerziteta Monash (Slika 2b), kao ulazni podatak se koriste kontinualna merenja dotoka u biofilter, dok se drenirani oticaj meri na izlazu iz drenažnog sistema. Na Slici 3b je prikazana uprošćena računaska shema biofiltera ukupne debljine  $H = 0.5$  m, prostorne diskretizacije  $\Delta z =$

5 cm, sa gornjim graničnim uslovom u vidu zadatog fluksa  $q_{in}(t) = Q_{in}(t)/A_{BF}$ , gde je površina osnove biofiltra  $A_{BF} = 13 \text{ m}^2$ , i donjim graničnim uslovom u vidu zadate vrednosti kapilarnog potencijala  $h_{k,down} = 0$ . Sa sheme se može videti da je horizontalno postavljena drenažna cev na kraju savijena vertikalno naviše kako bi se obezbedilo zasićeno stanje drenažnog sloja, što omogućava kapilarno penjanje vode kroz biofilter periodima bez vode. S obzirom da vrednost pritiska (kapilarnog potencijala) u preseku  $i = 11$  ( $h_{k,N}$ ) odgovara visinskoj razlici između kote preliva iz drenažne cevi i kote preseka  $i = 11$  (podrazumeva se da je cev puna voda – Slika 3b), jasno je da je  $h_{k,N} = h_{k,down} = 0$  kada se preliv i presek nalaze na istoj koti. U slučaju biofiltra, rezultat modela je  $Q_d(t) = q_N(t)A_{BF} = K(h_{k,down}) \left( \frac{h_{k,N-1}(t) - h_{k,down}}{\Delta z} + 1 \right) A_{BF}$ .



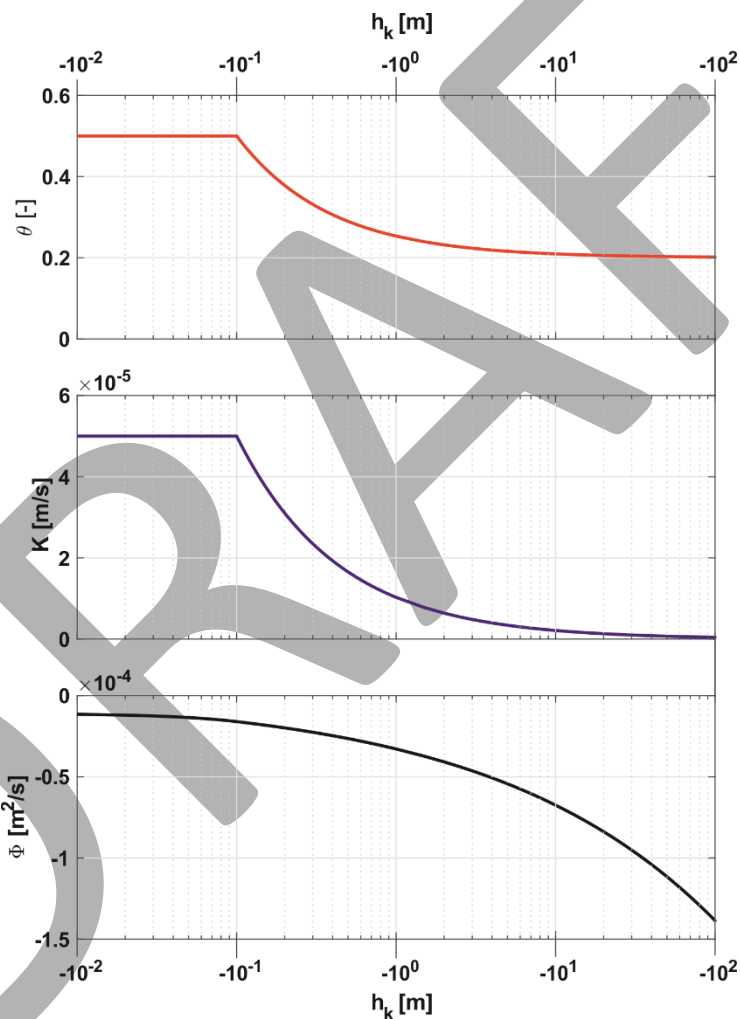
Slika 6. Gornji grafik – izmerene vrednosti ulaznog fluksa u biofilter (preuzeto iz Randelovic i sar, 2016); Donji grafik – poređenje merenih vrednosti oticaja (krugovi - preuzeto iz Randelovic i sar, 2016) sa rezultatima implicitne numeričke sheme (puna linija) i Ross-ovog eksplicitnog numeričkog rešenja (isprekidana linija)

Figure 6. Top graph – measured inflow in biofilter (after Randelovic et al., 2016); Bottom graph – comparison between the measured outflow values (circles – after Randelovic et al., 2016) and results of the implicit numerical scheme (solid line) and Ross’s explicit numerical solution (dashed line)

Na Slici 6-gore su prikazani mereni ulazni fluksevi u biofilter  $q_{in}(t)$  u trajanju od 18 h, sa vremenskom diskretizacijom od 30 s, dok su na Slici 6-dole prikazani rezultati modela (implicitna shema – puna plava linija, Ross-ovo rešenje – crvena isprekidana linija) i merene vrednosti dreniranog oticaja (zeleni krugovi). Kao i u slučaju zelenog krova, parametri zemljišta su ručno kalibrisani (vrednosti u

# 19. Savetovanje SDHI i SDH - Beograd, Srbija 2021. Conference SDHI & SDH - Belgrade, Serbia 2021.

Tabeli 1) kako bi se obezbedilo što bolje slaganje između modeliranih i merenih vrednosti protoka, a krive hidrauličkih funkcija koje odgovaraju kalibrisanim parametrima su prikazane na Slici 7. I u ovom slučaju su postignute visoke vrednosti Nash-Sutcliffe koeficijenta ( $NS = 0.93$  za oba modela), čime se pokazuje da opisani modeli sasvim dobro interpretiraju merenja. Zbog specifičnog donjeg graničnog uslova, početni uslov u slučaju biofiltra je hidrostatički raspored pritisaka (kapilarnih potencijala) pri čemu se najveća vrednost javlja na dnu gde je  $h_{k,N} = h_{k,down} = 0$ , dok je vrednost na vrhu  $h_{k,I} = -H$ . Za razliku od slučaja zelenog krova gde supstrat ostaje nezasićen tokom čitave simulacije, u slučaju biofiltra dolazi do zasićenja po čitavoj dubini  $H$  prvenstveno zbog donjeg graničnog uslova, kao i zbog visokih intenziteta dotoka. Oba modela daju gotovo identične rezultate sa malom greškom u bilansu (0.15 % i 0.65 % u slučaju implicitne sheme, odnosno Ross-ovog rešenja), dok je u pogledu effikasnosti Ross-ovo rešenje u prednosti sa 2.7 puta manje prolaza kroz sistem jednačina u poređenju sa implicitnom shemom.



Slika 5. Hidrauličke karakteristike supstrata biofiltra opisane parametrima prikazanim u Tabeli 1: Gornji grafik – kriva vlažnosti (jednačina 3); Centralni grafik – kriva vodoprovodljivosti (jednačina 5); Donji grafik – kriva Kirchoff-ovog potencijala (jednačina 6)

Figure 5. Soil hydraulic properties of the biofilter substrate described by means of parameters presented in Table 1: Top graph – water retention curve (equation 3); Middle graph – hydraulic conductivity function (equation 5); Bottom graph – Kirchoff potential curve (equation 6)

## 4 Zaključak

U ovom radu su prikazana dva numerička modela vertikalne infiltracije zasnovana na metodi konačnih razlika, standardna implicitna shema za rešavanje Richards-ove jednačine i Ross-ovo eksplicitno numeričko rešenje. Njihovi rezultati su poređeni u pogledu tačnosti i efikasnosti za različite granične uslove koji se javljaju kod prirodnim inspirisanih rešenja. Standardna implicitna shema podrazumeva iterativno rešavanje sistema nelinearnih jednačina napisanih za svaki računski presek, gde se kao rezultat dobija prostorna raspodela kapilarnih potencijala (vlažnosti). S druge strane, linearizacijom flukseva u poroznoj sredini korišćenjem Taylor-ovog reda i gradijenta Kirkhoff-ovog potencijala, kao rezultat se dobija slična prostorna raspodela kapilarnih potencijala (vlažnosti) bez iterativnog proračuna. Na osnovu rezultata modela moguće je sračunati vrednosti dreniranih oticaja u svakom vremenskom trenutku, što je korišćeno za poređenje dva numerička rešenja.

Radi validacije, dva modela su osim međusobno upoređeni i sa protocima osmotrenim na zelenom krovu Green Wave lociranom u predgrađu Pariza, kao i na biofiltru Univerziteta Monash. Oba modela koriste intenzitet kiše, odnosno dotok, kao gornji granični uslov, dok su slobodno dreniranje, odnosno fiksna vrednost kapilarnog potencijala, zadati na donjoj granici. Za identične parametre prostorne / vremenske diskretizacije i hidrauličkih karakteristika zemljišta dobijeni su gotovo identični rezultati sa zanemarljivim greškama u bilansu u slučaju oba modela, pri čemu je Ross-ovo eksplicitno rešenje skoro 3 puta efikasnije. Takođe, postignuta su zadovoljavajuća slaganja između modeliranih i merenih podataka (Nash-Sutcliffe koeficijenti su 0.91 za zeleni krov i 0.93 za biofilter), što potvrđuje da se modeli mogu koristiti za simulaciju tečenja u zasićenoj i delimično zasićenoj sredini, za različite tipove prirodnim inspirisanih rešenja (tj. za različite granične uslove).

Treba imati na da je glavni cilj ovog rada poređenje dva numerička modela u pogledu tačnosti i efikasnosti, dok poređenje sa realnim podacima prikazuje njihovu potencijalnu primenu u slučaju prirodnim inspirisanih rešenja. U ovom radu su prikazani samo preliminarni rezultati dobijeni ručnom kalibracijom parametara zemljišta (Brooks i Corey funkcije), uz zanemarivanje uticaja vegetacije, evapotranspiracije, kao i heterogenosti zemljišta.

## Zahvalnica



Ovaj rad je urađen u okviru projekta euPOLIS. euPOLIS je finansiran u okviru programa Evropske Unije Horizon 2020: H2020-EU.3.5.2., pod ugovorom No 869448

This work is part of the project euPOLIS. euPolis has received funding from the European Union's Horizon 2020 program H2020-EU.3.5.2., under grant agreement No 869448.



## Literatura

1. Brooks R. H., Corey A. T. (1964) Hydraulic Properties of Porous Media, *Hydrology Papers*, 3: 1–27.
2. Celia M.A., Bouloutas E.T., Zarba R.L. (1990) A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation, *Water Resour. Res.*, 26: 1483-1496.
3. Crevoisier D., Chanzy A., Voltz M. (2009) Evaluation of the Ross fast solution of Richards' equation in unfavourable conditions for standard finite element methods, *Advances in Water Resources*, 32: 936-947.
4. Dam, J. C. van, Feddes R. A. (2000) Numerical Simulation of Infiltration, Evaporation and Shallow Groundwater Levels with the Richards Equation, *Journal of Hydrology*, 233: 72–85.
5. Genuchten M. Th. van (1980) A Closed-Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils, *Soil Science Society of America Journal*, 44 (5): 892–98, <https://doi.org/10.2136/sssaj1980.%0A03615995004400050002x>.

## 19. Savetovanje SDHI i SDH - Beograd, Srbija 2021. Conference SDHI & SDH - Belgrade, Serbia 2021.

6. Getter K. L., Rowe D. B., Andersen J. A. (2007) Quantifying the Effect of Slope on Extensive Green Roof Stormwater Retention, *Ecological Engineering*, 3 (1): 225–31. <https://doi.org/10.1016/j.ecoleng.2007.06.004>.
7. Kabisch N., Frantzeskaki N., Pauleit S., Naumann, S., Davis M., Artmann M., Haase D., et al. (2016) Nature-Based Solutions to Climate Change Mitigation and Adaptation in Urban Areas : Perspectives on Indicators, Knowledge Gaps, Barriers, and Opportunities for Action, *Ecology and Society*, 21 (2). <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.5751/ES-08373-210239>.
8. Liu Z., Todini E. (2002) Towards a Comprehensive Physically-Based Rainfall-Runoff Model, *Hydrology and Earth System Sciences*, 6 (5): 859–81.
9. Mualem Y. (1976) A New Model for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Porous Media, *Water Resources Research*, 12 (3): 513–22. <https://doi.org/10.1029/WR012i003p00513>.
10. Randelović A. (2016) Modelling transport of micropollutants in biofiltration systems for stormwater treatment, PhD Thesis, University of Belgrade.
11. Randelovic A., Zhang K., Jacimovic N., McCarthy D., Deletic A. (2016) Stormwater biofilter treatment model (MPiRe) for selected micro-pollutants, *Water Research*, 89: 180-191. <https://doi.org/10.1016/j.watres.2015.11.046>.
12. Richards L. A. (1931) Capillary Conduction of Liquids through Porous Media, *Physics*, 1: 318–33.
13. Ross P. J. (2003) Modeling Soil Water and Solute Transport – Fast, Simplified Numerical Solutions, *Agronomy Journal*, 95(6): 1352-1361
14. Stanić F. (2020). High resolution monitoring and modelling of hydrological fluxes in a green roof (Doctoral dissertation), Université Paris-Est (Ecole des Ponts ParisTech), Paris, France.
15. Stanić F., Cui Y.-J., Delage P., De Laure E., Versini P.-A., Schertzer D., Tchiguirinskaia I. (2019) A Device for the Simultaneous Determination of the Water Retention Properties and the Hydraulic Conductivity Function of an Unsaturated Coarse Material; Application to a Green-Roof Volcanic Substrate, *Geotechnical Testing Journal*, 43(3): 547–564. <https://doi.org/10.1520/GTJ20170443>
16. Stovin V., Vesuvianom G, Kasmin H. (2012) The Hydrological Performance of a Green Roof Test Bed under UK Climatic Conditions, *Journal of Hydrology*, 414–415: 148–61. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2011.10.022>.
17. Todini E. (1996) The ARNO Rainfall-Runoff, *Journal of Hydrology*, 175: 339–82.
18. Versini P. -A., Gires A., Tchiguirinskaia I., Schertzer D.(2016) Toward an Operational Tool to Simulate Green Roof Hydrological Impact at the Basin Scale: A New Version of the Distributed Rainfall–Runoff Model Multi-Hydro, *Water Science & Technology*, 74 (8): 1845–1854. <https://doi.org/10.2166/wst.2016.310>.
19. Versini P.-A., Stanic F., Gires A., Schertzer D., Tchiguirinskaia I. (2020) Measurements of the Water Balance Components of a Large Green Roof in the Greater Paris Area, *Earth Syst. Sci. Data*. 12: 1025–1035. <https://doi.org/10.5194/essd-12-1025-2020>.
20. Zhang K., Randelovic A., Page D., McCarthy D. T., Deletic A. (2014) The validation of stormwater biofilters for micropollutant removal using in situ challenge tests, *Ecological Engineering*, 67: 1-10. <https://doi.org/10.1016/j.ecoleng.2014.03.004>.
21. Zimmer U., Geiger W. F. (1997) MULTILAYERED INFILTRATION SYSTEMS, *Water Science & Technology*, 36 (8–9): 301–306. [https://doi.org/10.1016/S0273-1223\(97\)00582-9](https://doi.org/10.1016/S0273-1223(97)00582-9).