



GRANIČNA ANALICA NOSAČA IZLOŽENIH PROMENLJIVOM OPTEREĆENJU

Stošić Saša dipl.inž.grad., asistent, Građevinski fakultet Beograd, Bul.revolucije 73/1
 Dr. Šerif Dunica dipl. inž. grad.,v.prof. Građevinski fakultet Beograd, Bul.revolucije 73/1

LIMIT ANALYSIS OF STRUCTURES SUBJECTED TO VARIABLE LOADING PROGRAM

Summary:

Limit analysis of the structure is determined by the type of loading. In many practical problems structures are subjected to some variable, time dependent loading. In this paper, the limit analysis of the frame structure, subjected to variable loading program is presented. The "SHAKEDOWN" theorem is used to determine the load parameter for some illustrative examples of structures.

UVOD

Određivanje graničnog opterećenja primenom graničnih teorema (statičke i kinematičke) je veoma rasprostranjeno među inženjerima. Navedene teoreme omogućavaju da se na relativno jednostavan način odredi granični parametar pri elastoplastičnijoj analizi.

Primena statičke ili kinematičke toreme je ograničena na slučaj kada se opterećenje monotono nanosi i ostaje konstantno. U realnim konstrukcijama najčešće se radi o pokretnom opterećenju koje može biti neneto više puta. U tom slučaju nužna je primena 'shakedown' teoreme pri određivanju graničnog parametra opterećenja.

'SHAKEDOWN' TEOREMA

Neka se pod određenim programu cikličnog $\{P\}(t)$ opterećenja javljaju naponi u telu $\sigma_{ij}^*(t)$ koji se mogu odrediti primenom teorije elastičnosti. Neka je za dati materijal definisan uslov tečenja funkcijom $\Phi(\sigma)$. Pod zaostalim ili rezidualnim naponima smatraćemo napone koji ostaju u telu nakon uklanjanja opterećenja. Samim tim, polje zaostalih napona zadovoljava uslove ravnoteže sa nulti spoljnim opterećenjem. Neka je σ_{ij}^r proizvoljno polje zaostalih napona u telu. Polje stvarnih napona može se napisati kao zbir polja zaostali napona i polja napona koje se određuje primenom teorije elastičnosti.

Ukoliko se može naći polje zaostalih napona σ_{ij}^r koje ne zavisi od vremena a pri kome je u svim trenucima ciklusa polje napona ne dodiruje površ tečenja odnosno ukoliko je:

$$\Phi(\sigma_{ij}^*(t) + \sigma_{ij}^r) \leq 0, \quad (1)$$

ispunjeni su uslovi 'shakedown' teoreme i konstrukcija može da izdrži neograničen broj ciklusa. U suprotnom, doći će ili do pojave inkrementalnog loma (u svakom ciklusu povećava će se deforemacije sve do gubitka funkcionalnosti) ili do loma u materijalu usled zamora izazvanog naizmeničnim plastičnim deformacijama u suprotnim pravcima. Sam dokaz teoreme može se naći u literaturi [2].

USVOJENE PREDPOSTAVKE

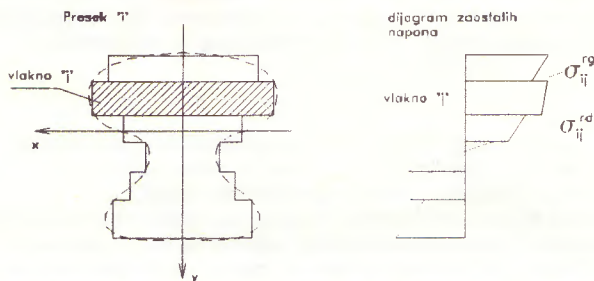
U ovom radu će se primeniti navedena teorema na ramovskim konstrukcijama. U cilju primene usvojiće se sledeće pretpostavke:

1. Zanimariće se uticajni smičućih napona u uslovu tečenja. Uslov teoreme će se proveravati samo po normalnim naponima. Na taj način uslov teoreme (1) svodi se na:

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} \leq \sigma^e + \sigma^*(t) \leq \sigma_{\max}, \\ (\forall t_i, t_j) \left| \sigma^*(t_i) - \sigma^*(t_j) \right| \leq 2\sigma_{el} \end{aligned} \quad (2)$$

pri čemu su σ_{\min} i σ_{\max} ekstremne vrednosti normalnog napona, dok je σ_{el} vrednost normalnog napona koja predstavlja granicu elastičnog ponašanja (njenim prekoračenjem nastaju plastične deformacije). U slučaju idealnog elastoplastičnog materijala (bez ojačanja) ekstremne vrednosti normalnog napona se poklapaju sa granicom elatičnog ponašanja i druga jednačina izraza (2) postaje suvišna.

2. Uslov 'shakedown' teoreme će se proveravati u 'Np' karakterističnih poprečnih preseka, koji će biti podeljeni u 'Nv' pravougaonih lamela (vlakana). Trajanje ciklusa opterećenja će biti podeljeno na 'No' trenutaka. Stanje zaostalih napona će se u svakioj od lamela svih posmatranih poprečnih preseka, aproksimirati linearnom funkcijom. Tako će stanje zaostalih napona biti poznato ako znamo vrednosti zaostalog napona na gornjoj i donjoj ivici posmatranog vlakna kao što je prikazno na slici 1.



Slika 1: Vlakno poprečnog preseka i dijagram zaostalih napona u poprečnom preseku.

PRIMENA TEOREME

Za zadati program opterećenja odredićemo da li postoji polje zostalih napona koje u karakterističnim poprečnim presecima zadovoljava uslove 'shakedown' teoreme. Kako se radi o sistemu jednačina i nejednačina to ćemo problem formulisati na sledeći način:

Odredićemo graničnu vrednost parametra opterećenja λ (kojim se množi celokupan program opterećenja), pri kom postoji polje zaostalih napona koje zadovoljava uslov (2) i koje je u ravnoteži sa nultim spoljnim opterećenjem.

Uslovi ravnoteže zaostalih napona predstavljaju sistem jednačina dok uslov (2) predstavlja sistem nejednačina. Za rešavanje navedenog problema koristiće se 'SIMPLEX' metod. Pri formulisanju sistema jednačina, pored normalnih napona koji za rezultante imaju momente i normalne sile, treba koristiti i transverzalne sile jer se u protivnom uslovi ravnoteže ne bi mogli korektno napisati. Pri tome će se koristiti sledeće obeležavanje:

- σ_{ij}^{rg} i σ_{ij}^{rd} - zaostali napon na gornjoj i donjoj ivici lamele 'j' preseka 'i',
- F_i i I_i - geometrijske karakteristike preseka 'i',
- y_{ij}^g, y_{ij}^d i F_{ij} - odstojanje od težišta poprečnog preseka 'i' gornje i donje ivice lamele 'j' i površina lamele,
- x_i, y_i i α_i - koordinate preseka 'i' i ugao ose štapa na mestu preseka 'i',
- M_k i N_k - vrednosti presečnih sila u preseku 'i' za opterećenje u vremenskom trenutku 'k' dobijene primenom teorije elastičnosti.

Struktura će se podeliti na "Ng" grana. Svaki od "Np" karakterističnih preseka spaja dve grane. Po svakoj grani se mogu postaviti po tri uslova ravnoteže tako da imamo 3Np jednačina uslova ravnoteže po zaostalim naponima.

$$\sum X = \sum_{\substack{\text{po svim} \\ \text{presecima 'i'} \\ \text{grane}}} \left(\cos(\alpha_i) \left(\sum_{\substack{\text{po svim} \\ \text{vlaknima 'k'}}} F_{ik} \frac{\sigma_{ik}^{rg} + \sigma_{ik}^{rd}}{2} \right) + \sin(\alpha_i) T_i \right) = 0$$

$$\sum Y = \sum_{\substack{\text{po svim} \\ \text{presecima 'i'} \\ \text{grane}}} \left(\sin(\alpha_i) \left(\sum_{\substack{\text{po svim} \\ \text{vlaknima 'k'}}} F_{ik} \frac{\sigma_{ik}^{rg} + \sigma_{ik}^{rd}}{2} \right) - \cos(\alpha_i) T_i \right) = 0$$

$$\sum M = \sum_{\substack{\text{po svim} \\ \text{presecima 'i'} \\ \text{grane}}} \left\{ (\sin(\alpha_i) y_i + \cos(\alpha_i) x_i) T_i + \sum_{\substack{\text{po svim} \\ \text{vlaknima 'k'}}} \left(\sin(\alpha_i) x_i + \cos(\alpha_i) y_i + \frac{2y_{ik}^s + y_{ik}^d}{3} \right) \frac{F_{ik}}{2} \sigma_{ik}^s \right. \\ \left. + \sum_{\substack{\text{po svim} \\ \text{vlaknima 'k'}}} \left(\sin(\alpha_i) x_i + \cos(\alpha_i) y_i + \frac{y_{ik}^s + 2y_{ik}^d}{3} \right) \frac{F_{ik}}{2} \sigma_{ik}^d \right\}$$

Pored ovih uvode se još "Nu" uslova koji definišu linearnu kombinaciju presečnih sila u nekom od karakterističnih preseka. Ti uslovi su oblika:

$$C_{mi} M_i + C_{ni} N_i + C_{ti} T_i = 0$$

i njima se između ostalog mogu definisati zglobovi u vezi dve grane ili razne vrste oslonaca. Tako dolazimo da 3Np+Nu jednačina koje moraju biti zadovoljene.

Vrednosti elastičnog dela presečnih sila za svaki od karakterističnih trenutaka ciklusa opterećenja dobijaju se kao rezultat teorije elastičnosti i u ovom radu će se tretirati kao ulazne veličine. Vrednosti elastičnog dela napona u preseku 'i', odnosno vlaknu dobijaju se primenom izraza:

$$\sigma_{ij}^{ed} = \frac{M_k}{I_i} y_j^s + \frac{N_k}{F_i}$$

Množenjem parametrom λ opterećenja, množe se i elastični uticaji koje proizvodi te se uslov teoreme (2.a) može pisati u obliku:

$$\sigma_{min} \leq \lambda (\sigma_{ij}^{rg}) + \sigma_{ij}^{rg} = \lambda \left(\frac{M_k}{I_i} y_{ij}^s + \frac{N_k}{F_i} \right) + \sigma_{ij}^{rg} \leq \sigma_{max} \quad (3)$$

Navedeni uslov sadrži dve nejednačine po svakoj ivici svakog vlakna i može se napisati za svaki 'trenutak' ciklusa. Tako se mogu napisati 4*Np*Nv*No nejednačina.

Uslov (2.b) u sebi sadrži razliku napona te se u njemu deo koji predstavlja zaostali napon skraćuje i praktično svodi na uslov po elastičnom delu napona. Takođe se može uočiti da će uslov biti zadovoljen ukoliko je zadovoljen na krajnjim ivicama poprečnog preseka. U njemu se nalazi samo jedna nepoznata λ , i može se svesti na samo jednu nejednačinu:

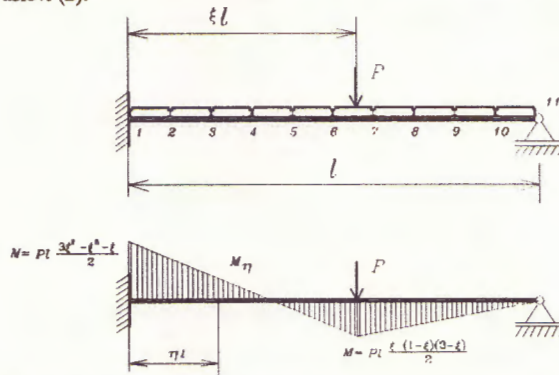
$$\lambda \leq \text{Min} \left\{ \frac{2\sigma_{el}}{\left| \frac{N_{ik} - N_{il}}{F_i} + \frac{M_{ik} - M_{il}}{I_i} y_{i,max} \right|}, \frac{2\sigma_{el}}{\left| \frac{N_{ik} - N_{il}}{F_i} + \frac{M_{ik} - M_{il}}{I_i} y_{i,min} \right|} \right\} \quad (4)$$

Izloženim postupkom smo problem sveli na sistem od 3Ng+Nu jednačina i 4Np*Nv*No+1 nejednačina sa 2*Np*Nv nepoznatih zaostalih napona, Np nepoznatih transverzalnih sila T_i i nepoznatim parametrom opterećenja λ . Problem se rešava primenom 'simplex' algoritma, pri čemu je neophodno ograničiti prostor promenljivih. Od promenljivih potrebno je oreničiti samo transverzalne sile nekom poizvoljnom, ali konačnom veličinom T_{max} (zaostali naponi su ograničeni izrazima (3) a parametar opterećenja izrazom(4) . Na taj način dobijamo još Np nejednačina.

U cilju praktične primene napisan je program koji, koristeći rutine 'simplex' algoritma iz [3] na osnovu definisanih geometrijskih karakteristika svakih od preseka, položaja grana, i vrednosti elastičnih rešenja u svakom trenutku nalazi graničnu vrednost parametra opterećenja.

BROJNI PRIMER I

Posmatrajmo posredno opterećen štapa tipa 'g', pravougaonog poprečnog preseka, opterećen koncentrisanom silom koja tokom vremena menja svoj položaj. Za razliku od "klasičnog" problema graničnog opterećenja pri kome se traži "kritični položaj" koncentrisane sile i određuje vrednost kritičnog opterećenja, u ovom slučaju traži se polje zaostalih napona pri kome će za svaki položaj koncentrisane sile biti zadovoljeni uslovi (2).



Slika 2: Posredno opterećen nosač i dijagrami momenata savijanja na neposredno opterećenom nosaču

Elastično rešenje problema prikazano je na slici 2 i u zavisnosti od položaja preseka (η) i položaja sile (ξ) mogu se naći vrednosti presečnih sila:

$$M(\xi, \eta) = Pl \left[\frac{(3-\xi)\xi^2}{2}(1-\eta) - \xi\eta(\xi-\eta) \right]$$

Kako u konkretnom primeru nema normalnih sila, mogao se primeniti i uslov (2) definisan u prostoru momenata kao što je definisano u [1].

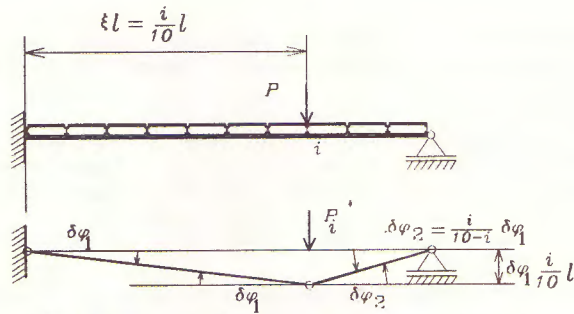
Poprečni presek je pravougaoni dimenzija $b \times h = 40 \times 20$ cm i podeljen je na samo dve lamele jer ne postoje normalne sile. Kao rezultat programa dobićemo dve granice parametra opterećenja. Prva je određena nejednačinama (3), dok je druga određena nejednačinama (4) od kojih treba usvojiti manju. Prva vrednost može se upoređivati sa vrednošću parametra opterećenja koji se dobija primenom graničnih teorema za jedan od slučajeva opterećenja. Tako smo kao rezultat dobili granične vrednosti parametara: $\lambda_1 = 1.7935$ i $\lambda_2 = 2.217$.

Uporedimo vrednost parametra λ_1 sa graničnom vrednošću λ^* parametra za proizvoljan položaj "nepokretne" koncentrisane sile. Parametar λ^* ćemo odrediti primenom kinematičke teoreme za karakteristične položaje. Kako je nosač posredno opterećen to su položaji mogućih plastičnih zglobova predodređeni položajima tačaka u kojima se prenosi posredno opterećenje, te u ovom slučaju imamo 9 mogućih mehanizma loma prikazan na slici 3. Za svaki od njih dobijamo kritičnu silu u funkciji graničnog momenta M^* .

$$P_i^* \delta \varphi_i \frac{i}{10} l = M^* (2\delta \varphi_1 + \delta \varphi_2) = M^* \left(2 + \frac{i}{10-i} \right) \delta \varphi_1$$

$$\Rightarrow P_i^* = \frac{M^* 10}{l} \frac{20-i}{i(10-i)} = \frac{M^*}{l} \left(\frac{10(20-i)}{i(10-i)} \right)$$

U ovom slučaju najmanja vrednost koncentrisane sile dobiće se za $i=6$, pri čemu je $P^* l = 5.83333M^*$. Kako je za konkretan brojni primer $M^* = 0.04 \cdot 0.2 \cdot 240$, dobijamo vrednost granične sile $P^* = 1.866$. Kako je ceo primer sproveden za jediničnu vrednost sile to je granična vrednost faktora opterećenja $\lambda^* = 1.8666$.

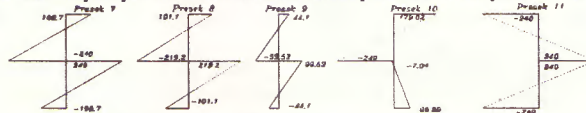


Slika 3 Mogući mehanizmi loma posredno opterećenog štapa

Možemo uočiti da je $\lambda^* > \lambda_1$ što je trebalo i očekivati. Tako će u slučaju da je parametar opterećenja veći od $\lambda^*=1.866$ do loma doći pri nanošenju opterećenja odnosno u trenutku kad opterećenje dođe u položaj $i=6$. Ukoliko je parametar opterećenja manji od $\lambda_1=1.7935$ koncentrisana sila se može neograničen broj puta "prošetati" po nosaču bez gubitka nosivosti nosača. Pri tom će nakon konačnog broja ciklusa opterećenja (prelaska sile preko nosača) polje zaostalih napona postati stacionarno i neće se dalje menjati.

Ukoliko je pak parametar opterećenja veći od λ_1 i manji od λ^* do gubitka nosivosti doći će bilo zbog cikličnog zamora materijala ili zbog neprestanog povećavanja deformacija nosača u svakom ciklusu. U ovom slučaju u zavisnosti od položaja sile menjaće se polje zaostalih napona.

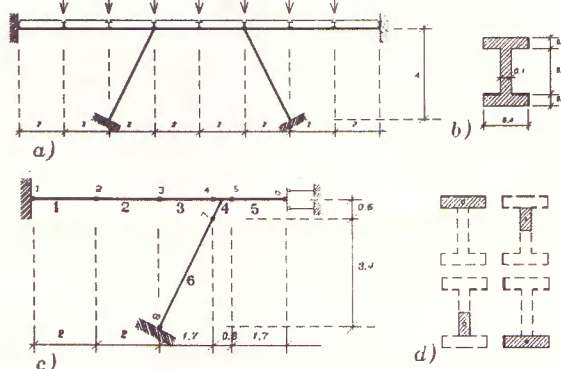
Kao jedan od rezultata programa dobijaju se i vrednosti zaostalih napona u okviru preseka. Tako možemo uočiti, posmatrajući dobijeno polje zaostalih napona u preseku 11, da je to jedno od mogućih polja koje zadovoljava uslove ravnoteže. Kako je presek 11 sve vreme bio neopterećen, sigurno je da se u stvarnosti u njemu neće javiti nikakvi zaostali naponi. Uprkos tome dobili smo u ovom preseku zaostale napone, ali su ukupne presečne sile u navedenom preseku ostale jednake nuli.



Slika 4: Dijagrami zaostalih napona u presecima 7,8,9,10 i 11.

BROJNI PRIMER II

Posmatrajmo posredano opterećen nosač prikazan na slici 5. Karakteristike materijala su identične već korišćenim u predhodnom primeru, odnosno $\sigma_{el}=160\text{MPa}$ i $\sigma_{max}=240\text{MPa}$.



Slika 5 a) Posredno opterećen nosač sa karakterističnim položajima opterećenja, b) poprečni presek, c) podela nosača na grane i numeracija, d) podela preseka na lamele.

Konstrukcija je posredno opterećena pokretnom koncentrisanom silom, te je dovoljno vršiti analizu u sedam karakterističnih položaja koncentrisane sile prikazanih na slici (S1, S2,... S7), kao i slučaju bez opterećenja S8.

Zbog simetrije konstrukcije i proizvoljnosti položaja koncentrisane sile polje zaostalih napona (ili sila) mora takođe biti simetrično pa će se u programu analizirati model prikazan na slici 5.c. Model se sastoji iz 6 krutih tela ("Ng"=6), međusobno vezanih sa 8 poprečnih preseka istog oblika ("Np"=8), opterećenih sa 7 različitih slučajeva opterećenja ("No"=8). Poprečni presek je podeljen na 4 vlakna ("Nv"=4), pri čemu su karakteristike vlakana prikazane na slici 5.d.

Za razliku od modela štapa tipa "g" u ovom slučaju pored uticaja momenata savijanja u obzir se moraju uzeti i normalne sile.

Vrednost parametra opterećenja koja zadovoljava uslove "shakedown" teoreme je $\lambda_1=7.954$. Ova vrednost dobija se nezavisno od vrednosti σ_{ei} jer se uslov (4) može nezavisno posmatrati. Tako je u slučaju da smo posmatrali idealno elastoplastičan materijal vrednost $\lambda_1=7.954$ ujedno i vrednost parametra opterećenja. Navedena vrednost uporediva je sa vrednostima koje se dobijaju u slučaju da postoji samo jedan slučaj opterećenja. U slučaju samo jednog opterećenja problem se može rešavati primenom graničnih teorema ali je u ovom slučaju rešavan primenom istog programa pri čemu je četiri puta "propuštan" ulazna datoteka sa po jednim opterećenjem. Tako su dobijene vrednosti parametra prikazane u tabeli:

Slučaj opterećenja	položaj sile S1	položaj sile S2	položaj sile S3	položaj sile S4	kombinacija "shakedown"
λ_{max}	8.71	8.62	28.71	11.51	7.954

Vidimo da je najmanji od svih parametra opterećenja, kad je "nepokretna" koncentrisana sila na proizvoljnom mestu, 8.62 i on odgovara položaju koncentrisane sile S2. Ovaj faktor ujedno odgovara položaju sile na proizvoljnom mestu kao jedinom opterećenju nosača.

Proizvoljan položaj "pokretne" sile međutim predstavlja program opterećenja koji se ciklično ponavlja. U slučaju da je faktor opterećenja bio između 7.954 i 8.62 pri prvom prolasku koncentrisane sile preko nosača neće doći do loma ili gubitka funkcionalnosti. Međutim ukoliko sila nastavi da se kreće preko nosača u konačnom vremenskom trenutku (nakon konačnog broja ciklusa) će sigurno doći do loma ili gubitka funkcionalnosti zbog velikih deformacija.

U slučaju materijala sa $\sigma_{ei}=160\text{MPa}$, odnosno u slučaju da se posmatra i uslov (4) vrednost parametra opterećenja pada na $\lambda_2=5.803$.

ZAKLJUČAK

U slučaju promenljivog, pokretnog opterećenja, elastoplastična analiza se nesme vršiti posmatranjem niza nezavisnih slučajeva opterećenja, već se mora posmatrati njihova kombinacija. Odnosno, mora se primeniti 'shakedown' teorema. Izloženi postupak daje rezultate koji zavise od izbora karakterističnih 'trenutaka' opterećenja, položaja karakterističnih preseka kao i podele preseka na lamele. Dok greške u prva dva izbora mogu dovesti do većeg graničnog parametra opterećenja od stvarnog, pogrešna podela preseka na lamele može samo dati manju vrednost graničnog parametra od stvarnog (ostajemo na strani sigurnosti). Navedenim postupkom je moguća i analiza u slučajevima kad nije zanemarljiv uticaj normalnih sila. Kao jedan od rezultata programa se dobija i polje zaostalih napona u posmatranim presecima. Treba napomenuti da dobijeno polje predstavlja samo jedno od mogućih polja koje zadovoljava uslov (2) a ne stvarno polje zaostalih napona.

*Izrada ovog rada je finansiranijski podpomognuta od strane RFNS kroz projekat 1701, kao i SMNR kroz projekat OSI 262.

LITERATURA:

1. Neal B.G. The Plastic Methods of Structural Analysis, Chapman & Hall, London 1965.
2. Martin J.B., Plasticity: fundamentals and general results, MIT Press, 1975.
3. William H.P., Brian P.F., Saul A.T., William T.V., Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, Cambridge 1987.