

NUMERIČKO MODELIRANJE LINIJSKIH OTVORENIH TOKOVA SA PROMENLJIVIM RASPOREDOM VEGETACIJE

Dejana ĐORĐEVIĆ¹, Dubravka POKRAJAC²

¹Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

²School of Engineering, University of Aberdeen

REZIME

Sa hidrauličkog stanovišta, prostorni raspored vodene vegetacije u koritima i na obalama vodotoka je slučajna i nezavisan od karakteristika toka. Vegetacija svojim prisustvom pruža otpore kretanju vode i utiče na transportne procese i procese mešanja. Proračun otvorenih tokova sa promenljivim prostornim rasporedom vegetacije zahteva da se prilikom numeričkog modeliranja vodi računa o konvektivnim članovima, jer oni pored zavisno promenljivih sadrže i prostorno promenljivu poroznost usled prisustva vegetacije u koritu. U ovom radu se za opis linijskih otvorenih tokova sa promenljivim rasporedom vegetacije koriste trostruko osrednjene Navije-Stoksove jednačine (Depth-Integrated Double-Averaged Navier-Stokes - DIDANS equations). Prikazan je postupak njihovog numeričkog rešavanja primenom metode konačnih zapremina. Za diskretizaciju jednačina u kojima se konvektivni član piše u razvijenom obliku da bi se uzela u obzir prostorna promena poroznosti, koristi se računski postupak razdvajanja fluksova (flux-difference splitting) i prilagođena Rouova računski shema za aproksimaciju zavisno promenljivih na granicama kontrolne zapremine. Modifikovan Rouov postupak testiran je na pojednostavljenom, idealizovanom primeru homogenih DIDANS jednačina (horizontalno dno i zanemareni otpori trenja i oblika). Rezultati numeričkog modela upoređeni su sa analitičkim rešenjem za ovaj pojednostavljen slučaj, pri čemu je dobijeno odlično slaganje.

Podaci o prihvatanju članka

Primljen: 20.9.2023.

Ispravljen: -

Prihvaćen: 27.10.2023.

Kontakt: dejana@grf.bg.ac.rs

Ključne reči: prostorna heterogenost, poroznost, trostruko osrednjene Navije-Stoksove jednačine, Rouov postupak

1. UVOD

Korita i obale vodotoka su staništa različitih biljnih vrsta koje žive u vodi (vodene vegetacije). Neke od njih isključivo žive pod vodom (potopljena vegetacija), dok druge izrastu iznad vode (nepotopljena, tj. delimično potopljena vegetacija). Prisustvo kolonija vegetacije u vidu mnoštva savitljivih vlati (savitljiva vegetacija) ili krutih stabljika (nesavitljiva, kruta vegetacija) čini sredinu kroz koju voda teče poroznom, a strujno polje prostorno nehomogenim.

Uticao vegetacije na tečenje sa slobodnom površinom (otpore tečenju, strujnu sliku, liniju nivoa i slobodnu površinu) i fizičke procese kao što su procesi mešanja, transporta zagađenja i nanosa i deformacija rečnog korita, ispituju se već više decenija u laboratorijskim uslovima i u manjem obimu na terenu. Poslednjih 10 do 15 godina značajno je povećan broj ovih istraživanja, što je, uz istraživanja uticaja drugih makroorganizama koji nastanjuju dno i obale, dovelo do razvoja nove, specijalizovane grane hidraulike, koju je Nikora [13] nazvao hidrodinamikom vodenih ekosistema.

Međutim, uprkos činjenici da je tokom prve decenije 21. veka metodologija dvostrukog osrednjavanja, koja je prvobitno razvijena u meteorologiji, prilagođena potrebama analize heterogenog strujnog polja u otvorenim tokovima (Nikora i sar. [14 i 15]), relativno mali broj istraživanja koristi ovu metodologiju u analizi i interpretaciji rezultata. To su prvenstveno istraživači potekli iz grupe okupljene oko osnivača i rukovodioca laboratorije Hajdi Nepf na Tehnološkom Institutu u Masačusecu (MIT) [10, 12, 19, 20 i 24] koji se bave

fundamentalnim istraživanjima u ovoj oblasti hidrodinamike, istraživači iz Finske [1, 4], Nemačke [18], a nedavno je i grupa istraživača iz Holandije ispitivala uticaj vegetacije na plavnim površinama i procese mešanja koji su posledica različitih brzina strujanja u glavnom koritu i na plavnim površinama [22].

Istraživanja u oblasti numeričkog modeliranja otvorenih tokova sa vegetacijom su malobrojna i uglavnom se zasnivaju na korišćenju postojećih modela u kojima se rešavaju Reynoldsove jednačine ili jednačine za plitke oblasti strujanja. U ovim jednačinama uticaj vegetacije obuhvata se *ad hoc* uvođenjem dodatnog člana kojim se opisuju otpori oblika [2, 3, 5, 7, 17 i 23].

Ovaj rad predstavlja iskorak u modeliranju otvorenih tokova sa vegetacijom zato što se u njemu numerički rešavaju jednačine koje su autori izveli primenom metodologije dvostrukog osrednjavanja, tj. jednačine tokom čijeg izvođenju je uzeta u obzir prostorna heterogenost strujnog polja. Jednačine su izvedene u okviru naučnog projekta DoubleVeg koji je finansirao Fond za nauku Republike Srbije. Postupak numeričkog rešavanja zasniva se na metodi konačnih zapremina i to metodi Godunova. Za računanje fluksova kroz granice kontrolne zapremine (KZ) na raspolaganju su različite računске sheme. U ovom radu primenjena je Rouova računška shema zbog toga što je robustna i zato što se vrednosti zavisno promenljivih na granicama KZ procenjuju bez uvođenja dopunskih algoritama, korišćenjem jednostavnih izraza, koje je predložio Rou [21]. Rouova računška shema koja je do sada korišćena za rešavanje Sen-Venanovih jednačina za prostorno homogena strujanja, prilagođena je rešavanju izvedenih dvostruko osrednjenih jednačina integrisanih po dubini toka (DIDANS jednačina). Shema je testirana na primeru homogenih jednačina za ustaljeno strujanje i za različite rasporede vegetacije duž toka, jer u ovom slučaju DIDANS jednačine imaju analitičko rešenje.

Poseban numerički problem o kojem treba voditi računa kada vegetacija ne ispunjava ravnomerno oblast strujanja je nagla promena poroznosti na prelazu između slobodnog toka i toka kroz vegetaciju. To zahteva da se konvektivni član, koji u sebi sadrži poroznost, napiše u razvijenom obliku i da se dodatni član, koji opisuje prostornu promenu poroznosti, diskretizuje primenom računške sheme pogodne za proračune naglo promenljivih tokova. Reč je o specifičnom problemu u kojem se menja jedna od fizičkih karakteristika oblasti strujanja. Sličan matematički problem razmatrali su

Ubar i Navaro [8] na primeru kanala koji se naizmenično širi i sužava, tj. kanala čija je širina funkcija prostorne koordinate ($b = b(x)$).

Nakon ovog Uvoda u radu su prikazane novoizvedene jednačine matematičkog modela za opisivanje linijskog tečenja u tokovima sa vegetacijom – DIDANS jednačine. U trećem delu daje se detaljan opis numeričkog postupka za rešavanje ovih jednačina. U četvrtom delu se prikazuju rezultati testiranja prilagođenog Rouovog postupka u uslovima mirnog i burnog tečenja kroz vegetaciju koja u jednom slučaju ispunjava uzvodni, a u drugom, nizvodni deo kanala sa horizontalnim dnom. Rezultati se poredе sa odgovarajućim analitičkim rešenjima za ova četiri slučaja. Na kraju se iznose zaključci u vezi sa primenljivošću prilagođenog Rouovog postupka za modeliranje linijskih otvorenih tokova sa promenljivim rasporedom vegetacije.

2. MATEMATIČKI MODEL

Linijsko tečenje sa slobodnom površinom u koritu sa promenljivim rasporedom vegetacije po dužini kanala opisuju se dvostruko osrednjenim Navije-Stoksovim jednačinama integrisanim po dubini toka (Depth-integrated Double-Averaged Navier-Stokes equations – DIDANS jednačinama). Ove jednačine su specijalan slučaj uopštenih jednačina za plitke oblasti strujanja (general shallow-water equations – GSWE), koje je izveo drugi autor ovog rada [16]. To je slučaj u kojem se pretpostavlja da je slobodna površina ravna i paralelna sa dnom. Jednačine su izvedene integracijom po dubini DANS jednačina uvođenjem sledećih pretpostavki: osrednjeno tečenje je ravansko, u vertikalnoj ravni (izvodi svih veličina u pravcu upravnom na ravan strujanja su nula), vegetacija je kruta i može se shematizovati vertikalnim cilindrima tako da se poroznost ϕ ne menja po dubini. (Poroznost je jednaka količniku dela zapremene osrednjavanja ispunjene vodom i celokupne zapremine. Zapremina osrednjavanja je tanka, paralelna sa dnom, i pokriva statistički značajnu površinu toka [6] (slika 1).

Vrednost neke veličine θ osrednjene po dubini h (merenoj duž ose z upravne na dno) je:

$$\langle \theta \rangle_d = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} \theta dz \quad (1)$$

gde su Z_b i Z_s kote dna i slobodne površine (slika 1).

Vrednost veličine θ u proizvoljnoj tački z je:

$$\theta = \langle \theta \rangle_d + \tilde{\theta}^d \quad (2)$$

gde je drugi član sa desne strane znaka jednakosti odstupanje od osrednjene vrednosti (1). Osrednjena vrednost odstupanja jednaka je nuli:

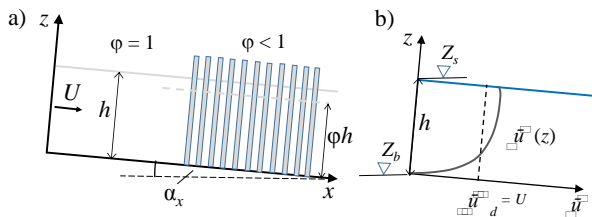
$$\langle \tilde{\theta}^d \rangle_d = 0 \quad (3)$$

Kada se jednačina (1) primeni na dvostruko osrednjenu (jednom po vremenu i jednom po zapremini) brzinu u glavnom pravcu strujanja, u , dobije se trostruko osrednjena brzina, koja će se obeležiti sa U (slika 1):

$$\langle \langle \bar{u} \rangle \rangle_d = U \quad (4)$$

Dvostruko osrednjena jednačina održanja mase integrisana po dubini toka glasi:

$$\varphi \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \varphi h U}{\partial x} = 0 \quad (5)$$



Slika 1. a) Koordinatni sistem u kojem se definišu tanki slojevi po dubini toka po kojima se sprovodi osrednjavanje u porostoru. Tanki slojevi paralelni su sa nepokretnim dnom koje zaklapa ugao α_x sa horizontalom. Koordinatna osa x poklapa se sa dnom. Osa z i nesaviljiva, nepotopljena vegetacija upravne su na dno. b) Dvostrukim osrednjavanjem Navije-Stoksovih jednačina dobijaju se rasporedi dvostruko osrednjenih brzina po dubini toka. Integracijom rasporeda dvostruko osrednjene komponente brzine u pravcu glavnog strujanja u po dubini toka, dobija se trostruko osrednjena brzina U – videti izraz (4).

Vreme t i prostorna koordinata x su nezavisno promenljive, a dubina h i trostruko osrednjena brzina U , zavisno promenljive. Ako se radi kraćeg pisanja uvede oznaka $\varphi h = H$, prethodna jednačina dobija oblik koji podseća na jednačinu održanja mase iz sistema jednačina za plitke oblasti strujanja koje važe za slobodan tok:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial UH}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

H može da se opiše i kao dubina koju bi voda imala, u delu sa vegetacijom, kada bi se vegetacija uklonila. [16]. Pošto bi uklanjanje vegetacije oslobodilo prostor za vodu, u delu sa vegetacijom H je uvek manje od h (slika 1).

Dvostruko osrednjena jednačina održanja količine kretanja, koja nakon integracije po dubini toka dobija nove članove u izrazima za silu pritiska, viskozne i Rejnoldsove napone i napone usled vegetacije, može se pojednostaviti uvođenjem pretpostavke da se sve komponente makroskopskih i mikroskopskih Rejnoldsovih napona osrednjene po dubini, sve komponente napona usled prisustva elemenata rapavosti (u ovom slučaju vegetacije), takođe osrednjene po dubini (vidi sliku 12 u [6]), mogu izostaviti kao članovi čiji je uticaj na promenu količine kretanja zanemarljiv u odnosu na sile pritiska i gravitacije (prva dva člana sa desne strane znaka jednakosti u jednačini 7) i silu na vodu u pravcu x -ose po jedinici površine usled vegetacije (D_r , internal drag force, [16], treći član). Ova jednačina nakon uvedenih pojednostavljenja glasi:

$$\frac{\partial UH}{\partial t} + \frac{\partial UUH}{\partial x} = -\frac{1}{2} g \frac{\partial (H^2/\varphi)}{\partial x} + gHS_{0_x} - \frac{1}{\rho} D_r \quad (7)$$

Sila na vodu usled vegetacije zahteva parametrizaciju za svaki konkretni slučaj prostornog rasporeda vegetacije. Jednačine (6) i (7) su specijalan slučaj generalizovanih jednačina za plitke oblasti strujanja izvedenih u [16].

Radi kraćeg pisanja, jednačine (6) i (7) napisace se u matričnom obliku:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (8)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} H \\ UH \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} UH \\ U^2H + \frac{1}{2}g\frac{H^2}{\varphi} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gHS_{0_x} - \frac{1}{\rho} D_r \end{bmatrix}$$

gde je \mathbf{Q} vektor zavisno promenljivih, \mathbf{F} je vektor fluksova, a \mathbf{S} je vektor izvornog člana. Sistem jednačina (8) sa početnim uslovom:

$$\mathbf{Q}(x, 0) = \mathbf{Q}^{(0)}(x) \tag{9}$$

i graničnim uslovima (slika 6):

$$\begin{aligned} (Uh)(0, t) = (Uh)_0(t) \text{ i } h(L, t) = h_{N_x}(t) & \text{ za } F_r < 1 \\ (Uh)(0, t) = (Uh)_0(t) \text{ i } h(0, t) = h_0(t) & \text{ za } F_r > 1 \end{aligned} \tag{10}$$

definiše početno-granični problem.

3. NUMERIČKO MODELIRANJE

3.1 Metoda konačnih zapremina i Rimanov problem

Uobičajen način da se utvrdi primenljivost izabranog računskog postupka za rešavanje jednačina kojima se opisuje neka pojava jeste da se taj računski postupak primeni na odgovarajuću homogenu jednačinu, odnosno sistem homogenih jednačina. U nastavku se razmatra sistem (8) u kojem je zanemaren izvorni član ($\mathbf{S} = 0$). Može se pokazati da je ovo sistem jednačina hiperboličkog tipa. Za rešavanje ovakvih sistema danas se standardno koristi metoda konačnih zapremina, jer obezbeđuje očuvanje mase unutar razmatrane zapremine.

Računska oblast dužine L_x deli se na N_x kontrolnih zapremina (ćelija; u daljem tekstu ova dva pojma će se ravnopravno koristiti). Granice ćelije i su $i-1/2$ i $i+1/2$ i kroz njih se definišu fluksovi između ove ćelije i njoj susednih ćelija $i-1$ i $i+1$ (slika 2). U uniformnim računskim mrežama sve ćelije su iste veličine $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = \text{const} = L_x / N_x$. Godunov je 1950ih predložio računski postupak prvog reda tačnosti [21]:

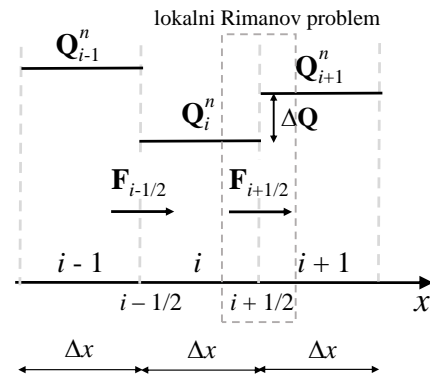
$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i-1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2}] \tag{11}$$

gde je

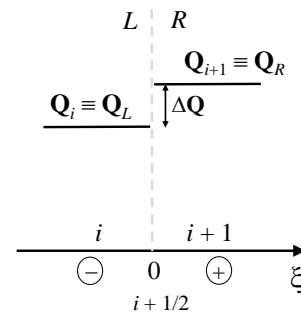
$$\mathbf{Q}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{Q}(x, t^n) dx \tag{12}$$

prosečna / prostorno osrednjena vrednost \mathbf{Q} za ćeliju i u trenutku $t = t^n = n\Delta t$, a $\mathbf{F}_{i-1/2}$ i $\mathbf{F}_{i+1/2}$ su numerički fluksovi kroz granice kontrolne zapremine (slika 2) kojima se aproksimiraju stvarni fluksovi $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ u (8). Ovi fluksovi su funkcija vrednosti zavisno promenljivih sa raznih strana razmatrane granice (slike 2 i 3):

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) \tag{13}$$



Slika 2. Kontrolne zapremine (KZ)/ćelije; prostorno osrednjene vrednosti u ćelijama; fluksovi kroz granice ćelija; promena zavisno promenljivih \mathbf{Q} duž x -ose je prekidna, skokovita, stepenasta funkcija. U neposrednoj blizini granice $i+1/2$ (pravougaonik sa stranama obeleženim isprekidanom linijom) rešava se Rimanov problem (slika 3).



Slika 3. Lokalni Rimanov problem (koordinatni početak lokalnog koordinatnog sistema je na granici dve KZ (slika 2), gde su tačke neposredno uz granicu sa leve i desne strane označene sa L i R).

Prostorno osrednjene vrednosti \mathbf{Q}_i u jednačini (12) pripisuju se centru ćelije i . Pošto se prostorno osrednjene vrednosti razlikuju od ćelije do ćelije (slika 2), na granicama kontrolnih zapremina postoje skokovite promene vredosti zavisno promenljivih. Na granicama ćelije i te promene su $\Delta \mathbf{Q}_{i-1/2}$ i $\Delta \mathbf{Q}_{i+1/2}$. To znači da na obe granice jedne KZ postoji po jedan lokalni Rimanov problem (slika 3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} &= 0 \\ \mathbf{Q}(\xi, 0) &= \begin{cases} \mathbf{Q}_L, & \text{ako je } \xi < 0 \\ \mathbf{Q}_R, & \text{ako je } \xi > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

koji treba rešiti primenom odgovarajućeg računskog postupka za određivanje fluksa kroz granicu dve ćelije. Ovde je ξ lokalna koordinata čija se nula nalazi na granici na kojoj se rešava Rimanov problem (slika 3).

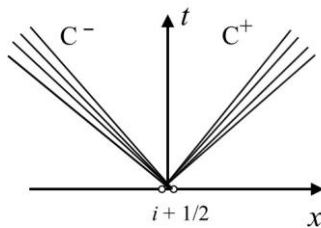
3.2 Rešenje Rimanovog problema

Sistem nelinearnih jednačina sa konstantnim koeficijentima

Rešenje Rimanovog problema za sistem od dve parcijalne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

može se predstaviti pomoću četiri kombinacije talasa (karakteristika) koji polaze sa granice dve ćelije. Postoje dve vrste talasa – talasi sa strmim čelom i talasi razblaženja.



Slika 4. Jedna od mogućih kombinacija osnovnih talasa koji polaze sa granice dve ćelije u Rimanovom problemu – dva talasa razblaženja koji se poznaju po tome što se karakteristike koje su krenule sa istog podnožja razilaze, tako da podsećaju na lepezu. Za talase sa strmim čelom karakteristike se sudaraju i formiraju strmo čelo.

Na slici 3 prikazana je, primera radi, kombinacija sa dva talasa razblaženja. Talasi se prostiru brzinama λ_i , $i = 1, 2$, pri čemu je $\lambda_1 < \lambda_2$. Brzine prostiranja poremećaja su nagibi karakteristika λ_i , a matematički gledano predstavljaju sopstvene vrednosti matrice \mathbf{A} iz jednačine (15).

Svaki skok između stanja sa leve \mathbf{Q}_L i desne strane granice \mathbf{Q}_R : $\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L$ nastavlja da se kreće kao usamljen talas sa strmim čelom ako i samo ako predstavlja linearnu kombinaciju sopstvenih vektora matrice \mathbf{A} [9]:

$$\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \mathbf{r}_i \quad (16)$$

Za ovu dekompoziciju obično se koriste tzv. desni sopstveni vektori:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Koeficijenti α_i su intenziteti sopstvenih vektora.

Sistem nelinearnih jednačina sa promenljivim koeficijentima

Međutim, sistem jednačina (14) je sistem nelinearnih jednačina sa promenljivim koeficijentima. Članovi matrice \mathbf{A} više nisu brojevi – matrica \mathbf{A} nije konstantna, već predstavlja Jakobijan matricu fluksova:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0, \quad \text{gde je} \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \quad (18)$$

Efikasno numeričko rešenje za sistem nelinearnih jednačina sa promenljivim koeficijentima predložio je Rou [9 i 21]. Suština Rouove ideje je lokalna linearizacija sistema (14) koja podrazumeva zamenu Jakobijan matrice $\mathbf{A}(\mathbf{Q})$ konstantnom Jakobijan matricom:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) \quad (19)$$

koja je funkcija stanja sa leve i desne strane granice između dve ćelije. Ova matrica zvaće se Rouova Jakobijan matrica. Dakle, u Rouovom postupku jednačine se linearizuju na svakoj granici čime se originalni Rimanov problem (14) zamenjuje *približnim* Rimanovim problemom:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial (\mathbf{Q})}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

$$\mathbf{Q}(\xi, 0) = \begin{cases} \mathbf{Q}_L, & \text{ako je } \xi < 0 \\ \mathbf{Q}_R, & \text{ako je } \xi > 0 \end{cases}$$

koji se, zatim, *tačno* rešava.

Uslovi koje treba da zadovolji Rouova Jakobijan matrica da bi linearizovan sistem (20) bio sistem hiperboličkih jednačina su:

1a) sopstvene vrednosti matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ treba da budu realne i različite:

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \quad (21)$$

1b) matrica $\tilde{\mathbf{A}}$ treba da ima kompletan skup linearno nezavisnih desnih sopstvenih vektora:

$$\tilde{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda}_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda}_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

2- matrica $\tilde{\mathbf{A}}$ treba da bude konzistentna sa originalnom Jakobijan matricom iz (18):

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \quad (23)$$

3- Rankin-Igonoov uslov skoka:

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_L) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L) \text{ ili } \Delta \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{Q} \quad (24)$$

Za računanje sopstvenih vrednosti koriste se Rouove srednje vrednosti osnovnih promenljivih toka. Ako se radi kraćeg pisanja uvedu matrice sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora približnog Rimanovog problema:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \tilde{\mathbf{R}} = [\tilde{\mathbf{r}}_2 \ \tilde{\mathbf{r}}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{\lambda}_2 & \tilde{\lambda}_1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

i inverzna matrica $\tilde{\mathbf{R}}^{-1}$, tada je Rouova Jakobijan matrica:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{\Lambda}} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \quad (26)$$

Izraz za skok fluksa (24) na granici $i+1/2$ sada glasi:

$$\Delta \mathbf{F}_{i+1/2} = (\tilde{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{Q})_{i+1/2} = (\tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{\Lambda}} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \Delta \mathbf{Q})_{i+1/2} \quad (27)$$

Rouov numerički fluks na granici $i+1/2$ između ćelija i i $i+1$ za sistem homogenih jednačina je [8]:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L) - \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{\Lambda}} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \Delta \mathbf{Q})_{i+1/2} \quad (28)$$

Fluks na granici $i-1/2$ piše se na sličan način. Fluks \mathbf{F}_R računa se sa vrednostima vektora zavisno promenljivih iz ćelije sa desne strane granice $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_R)$, a fluks \mathbf{F}_L sa vrednostima sa leve strane granice $\mathbf{F}_L = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_L)$. Ovi fluksovi koriste se u (11) za određivanje rešenja u ćeliji i u narednom vremenskom trenutku. Prvi član sa desne strane znaka jednakosti zove se centralni, a drugi, disipativni član [11].

3.3 Prilagođen Rouov postupak za DIDANS jednačine

Može se pokazati da je brzina prostiranja talasa u toku sa vegetacijom ista kao u slobodnom toku dubine h :

$$c = \sqrt{\frac{gH}{\phi}} = \sqrt{gh} \quad (29)$$

Rouova srednja vrednost brzine prostiranja na granici dve ćelije je:

$$\tilde{c} = \sqrt{0.5 (c_L^2 + c_R^2)} \quad (30)$$

$$c_L = \sqrt{\frac{gH_L}{\phi_L}}, \quad c_R = \sqrt{\frac{gH_R}{\phi_R}}$$

a srednje vrednosti dubine toka i brzine su:

$$\tilde{h} = \sqrt{h_L h_R} \quad (31a)$$

$$\tilde{U} = \frac{U_L \sqrt{H_L} + U_R \sqrt{H_R}}{\sqrt{H_L} + \sqrt{H_R}} \quad (31b)$$

Izraz za srednju vrednost brzine (31b) razlikuje se od onog za slobodan tok. U njemu umesto dubina toka h_L i h_R figurišu vrednosti zavisno promenljivih H_L i H_R . Brzine prostiranja poremećaja duž negativne i pozitivne karakteristike su:

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{U} - \tilde{c} \quad \text{i} \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{U} + \tilde{c} \quad (32)$$

a sopstveni vektori:

$$\tilde{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{\lambda}_1 \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{\lambda}_2 \end{bmatrix}^T \quad (33)$$

Veličine skoka zavisno promenljivih su:

$$\Delta H = H_R - H_L \quad (34a)$$

$$\Delta UH = (UH)_R - (UH)_L \quad (34b)$$

odnosno

$$\Delta \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \Delta H \\ \Delta UH \end{bmatrix} \quad (34c)$$

Sve ove veličine dovoljne su da se odredi fluks slobodnog toka na posmatranoj granici. Međutim, u DIDANS jednačinama fluks ne zavisi samo od \mathbf{Q} , nego i od prostorno

promenljive poroznosti $\varphi = \varphi(x)$, pa se linearizacijom homogene jednačine (18) dobija još jedan član.

Diskretizacija člana sa promenljivom poroznošću

Linearizovana jednačina (25) ima sledeći oblik:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \varphi)}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}}_{\mathbf{A}(\mathbf{Q})} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dx}}_{\mathbf{V}} = 0 \quad (35)$$

\downarrow Rou \downarrow Ubar i Navaro
 $\tilde{\mathbf{A}}$ $\tilde{\mathbf{V}}$

U njoj pored Rouove Jakobijan matrice postoji vektor \mathbf{V} koji predstavlja izvod fluksa po prostorno promenljivoj fizičkoj karakteristici oblasti strujanja. Kod Ubara i Navaro [8] to je promenljiva širina korita u jednačinama za plitke oblasti strujanja koje važe za slobodan tok, a u DIDANS jednačinama to je prostorno promenljiva poroznost. Dodatni član uzima u obzir skok poroznosti između slobodnog toka i toka kroz vegetaciju:

$$\Delta \varphi = \varphi_R - \varphi_L \quad (36)$$

i, u skladu sa Rouovim pristupom, diskretizuje se korišćenjem Rouove srednje vrednosti za dubinu na toj granici:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \left[0 \quad -\frac{1}{2} g \tilde{h}^2 \right]^T \Delta \varphi \quad (37)$$

Izraz za računanje fluksa kroz granicu $i+1/2$ tada glasi [8]:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L) - \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \Delta \mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{R}} \text{sign}(\mathbf{I}) \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{V}})_{i+1/2} \quad (38)$$

gde je:

$$\text{sign}(\mathbf{I}) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \left| \tilde{\mathbf{A}} \right| \quad (39)$$

3.4 Granični uslovi

Princip računanja graničnih uslova u uslovima mirnog i burnog tečenja isti je kao i u slučaju slobodnog toka, s

tim što je u ovom radu prilagođen Rouovom postupku. Prilagođavanje Rouovom postupku podrazumeva korišćenje Rouovih srednjih vrednosti na granicama kontrolne zapremine prilikom interpolacije podataka u cilju određivanja vrednosti zavisno promenljivih u bazi karakteristike. Nepoznate vrednosti zavisno promenljivih (zavisno promenljivih koje nisu zadate graničnim uslovom) računaju se iz Rimanovih invarijanti duž karakteristika (negativne C^- na uzvodnoj i pozitivne C^+ na nizvodnoj granici u slučaju mirnog tečenja – slika 5a odnosno, pozitivne i negativne karakteristike na nizvodnoj granici, u slučaju burnog tečenja – slika 5b). Postupak proračuna je iterativan i podrazumeva sukcesivno podešavanje položaja baze odgovarajuće karakteristike i pripadajućih vrednosti zavisno promenljivih.

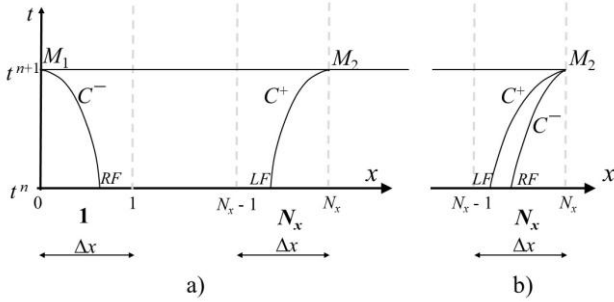
Iako se granice ćelija obeležavaju sa $i-1/2$ i $i+1/2$, radi kraćeg pisanja, uzvodna granica ćelije $\mathbf{1}$ obeležena je indeksom 0, a nizvodna, indeksom 1. Granice ćelije N_x na nizvodnom kraju mreže obeležene su na sličan način: uzvodna sa $N_x - 1$ i nizvodna sa N_x . Redni brojevi ćelija obeleženi su masnim brojevima/slovima. Vrednosti promenljivih sa leve strane granice $\mathbf{1}$ imaju indeks „1L“, a sa desne strane ove granice „1R“. Isti sistem obeležavanja koristi se na svim ostalim granicama graničnih ćelija $\mathbf{1}$ i N_x .

Prva iteracija

Položaji baza karakteristika u mirnom režimu računaju se na osnovu brzina prostiranja (32) na uzvodnoj granici ćelije $\mathbf{1}$ (za C^-) i nizvodnoj granici ćelije N_x (za C^+):

$$\begin{aligned} x_{RF\mathbf{1}}^{(1)} &= \left| \tilde{U}_0 - \tilde{c}_0 \right| \Delta t, & \text{baza } C^- \\ x_{LF N_x}^{(1)} &= N_x \Delta x - (\tilde{U}_{N_x} + \tilde{c}_{N_x}) \Delta t, & \text{baza } C^+ \end{aligned} \quad (40)$$

a potom se interpolacijom vrednosti sa granica prve ćelije odnosno, ćelije N_x određuju vrednosti zavisno promenljivih u bazama pozitivne (RF) i negativne (LF) karakteristike (slika 5a).



Slika 5. Skice za računanje graničnih uslova metodom karakteristika u uslovima a) mirnog i b) burnog tečenja

Vrednosti u bazi negativne karakteristike (RF) u ćeliji 1 su:

$$(UH)_{RF} = (UH)_1 + [(UH)_0 - (UH)_1] \left(1 - \frac{x_{RF}}{\Delta x} \right)$$

$$h_{RF} = \tilde{h}_1 + (\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1) \left(1 - \frac{x_{RF}}{\Delta x} \right) \quad (41)$$

$$H_{RF} = h_{RF} \varphi_1$$

vrednosti u bazi negativne karakteristike (LF) u ćeliji N_x su:

$$(UH)_{LF} = (UH)_{N_x} + [(UH)_{N_x-1} - (UH)_{N_x}] \left(N_x - \frac{x_{LF}}{\Delta x} \right)$$

$$h_{LF} = \tilde{h}_{N_x} + (\tilde{h}_{N_x-1} - \tilde{h}_{N_x}) \left(N_x - \frac{x_{LF}}{\Delta x} \right) \quad (42)$$

$$H_{LF} = h_{LF} \varphi_{N_x}$$

Dubine h sa oznakom „ \sim ” u izrazima (41) i (42) su Rouove srednje vrednosti (31a) na granicama najuzvodnije (ćelija 1) i najnižvodnije ćelije (ćelija N_x) računске mreže (slika 5).

Na uzvodnom kraju se zadaje jedinični protok $(Uh)_{M_1}$, pa se nepoznata dubina $H_{M_1} = (\varphi h)_{M_1}$ računa iz Rimanove invarijante duž negativne karakteristike:

$$(UH)_{M_1} - (UH)_{RF} - (U_{RF} + c_{RF})(H_{M_1} - H_{RF}) = 0 \quad (43)$$

Na nizvodnom kraju zadaje se dubina h_{M_2} , a računa se nepoznati jedinični protok $(Uh)_{M_2} = (UH)_{M_2} / \varphi_{N_x}$ iz Rimanove invarijante duž pozitivne karakteristike:

$$(UH)_{M_2} - (UH)_{LF} - (U_{LF} - c_{LF})(H_{M_2} - H_{LF}) = 0 \quad (44)$$

U slučaju burnog tečenja, položaj baze negativne karakteristike u ćeliji N_x (slika 5b) je:

$$x_{RF_{N_x}}^{(i)} = N_x \Delta x - (\tilde{U}_{N_x} - \tilde{c}_{N_x}) \Delta t \quad (45)$$

a nepoznati dubina i jedinični protok dobijaju se rešavanjem sistema jednačina (43) i (44).

Druga i naredne iteracije

Počevši od druge iteracije položaj baza karakteristika računa se korišćenjem sledećih izraza:

$$x_{RF_1}^{(it)} = 0,5 \left[\left| \tilde{U}_{M_1}^{(it-1)} - \tilde{c}_{M_1}^{(it-1)} \right| + \left| U_{RF}^{(it-1)} - c_{RF}^{(it-1)} \right| \right] \Delta t, \quad (46)$$

$$x_{LF_{N_x}}^{(it)} = N_x \Delta x - 0,5 \left[(\tilde{U}_{N_x}^{(it-1)} + \tilde{c}_{N_x}^{(it-1)}) + (U_{LF}^{(it-1)} + c_{LF}^{(it-1)}) \right] \Delta t$$

Za fino podešavanje položaja baze karakteristike koristi se, dakle, srednja vrednost brzina prostiranja u bazi odgovarajuće karakteristike i u tački M_i ($i = 1$ na uzvodnoj, odnosno $i = 2$ na nizvodnoj granici) iz prethodne iteracije ($it - 1$).

Vrednosti zavisno promenljivih u bazi karakteristika određuju se linearnom interpolacijom na isti način kao u prvoj iteraciji.

Zavisno promenljiva koja nije zadata graničnim uslovom računa se u mirnom režimu iz odgovarajuće Rimanove invarijante ((43) za nepoznatu dubinu na uzvodnom kraju odnosno, (44) za nepoznat jedinični protok na nizvodnom kraju) u kojoj se koristi srednja vrednost brzina prostiranja, kao u (46). Primera radi, navodi se samo Rimanova invarijanta duž negativne karakteristike:

$$(UH)_{M_1} - (UH)_{RF} - 0,5 \left[\left(\tilde{U}_{M_1}^{(it-1)} + \tilde{c}_{M_1}^{(it-1)} \right) + \left(U_{RF}^{(it-1)} + c_{RF}^{(it-1)} \right) \right] (H_{M_1} - H_{RF}) = 0 \quad (47)$$

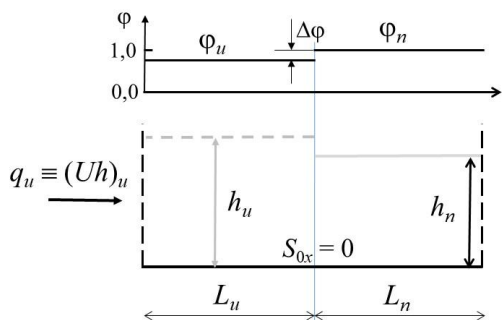
Radi kraćeg pisanja, u prethodnom izrazu izostavljene su, oznake tekuće iteracije (it) uz vrednosti zavisno promenljivih u bazi karakteristike i na granici 1 (tj. tački M_1).

Prikazani numerički model se u nastavku testira na hipotetičkom primeru kanala sa horizontalnim dnom u

kojem se zanemaruju svi otpori tečenju. Ovaj test primer matematički se opisuje homogenim jednačinama (35).

4. TESTIRANJE ROUOVOG POSTUPKA PRILAGOĐENOG REŠAVANJU DIDANS JEDNAČINA

Shematski prokaz kanala sa horizontalnim dnom dat je na slici 6. Kanal je dužine 3 m i podeljen je na dva jednaka dela. Posmatra se ravanski problem u vertikalnoj ravni. Jedna polovina kanala ravnomerno je ispunjena krutom vegetacijom, a druga je prazna.

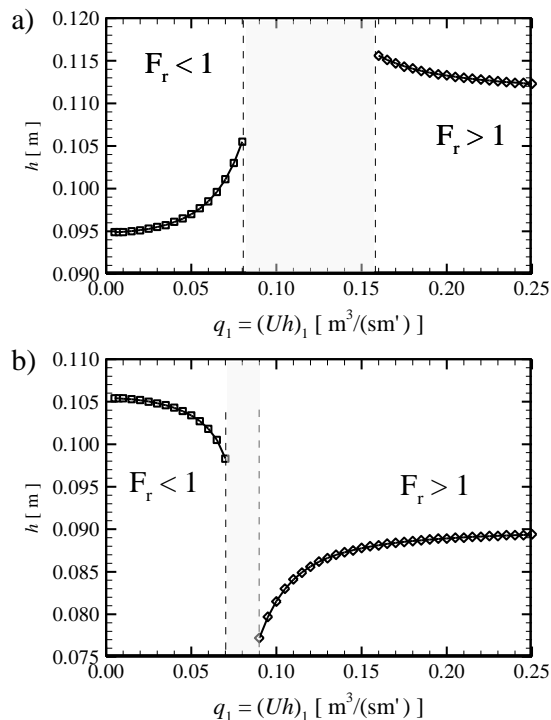


Slika 6. Skica za test primere na kojima je proveren Rouov postupak

Tabela 1. Razmatrani rasporedi vegetacije i režimi tečenja

Slučaj	položaj vegetacije u kanalu	režim tečenja
1	nizvodna polovina	miran
2	nizvodna polovina	buran
3	uzvodna polovina	miran
4	uzvodna polovina	buran

Razmatraju se četiri slučaja iz tabele 1 za jednu vrednost poroznosti – $\varphi = 0,90$. Početna dubina u kanalu je u svim slučajevima ista i iznosi 0,1 m. U uslovima mirnog tečenja voda u kanalu na početku proračuna miruje, a u uslovima burnog tečenja jedinični protok kanalom je konstantan i iznosi $0,12 \text{ m}^2/\text{s}$. Granični uslovi kada je tečenje u kanalu mirno su: jedinični protok na uzvodnom kraju kanala $q_u \equiv (Uh)_u$ i dubina na nizvodnom kraju h_n (slika 6). Kada je tečenje burno, na uzvodnom kraju se zadaju i jedinični protok i dubina (h_u). Vrednost dubine je ista i za mirno i za burno tečenje, iznosi 0,1 m i ne menja se tokom vremena. Jedinični protok na uzvodnom kraju se na početku proračuna skokovito menja od početne do zadate vrednosti i nadalje se drži konstantnim. Vrednost jediničnog protoka varirana je u



Slika 7. Poređenje numeričkog i analitičkog rešenja za slučaj kada se vegetacija nalazi u: a) nizvodnoj i b) uzvodnoj polovini kanala. Punom linijom prikazano je analitičko rešenje, a simbolima \square i \diamond numeričko rešenje. Osećena površina predstavlja oblast u kojoj ne postoji rešenje.

opsegu od 0 do $0,25 \text{ m}^2/\text{s}$. Proračun se obustavlja kada se u kanalu uspostavi ustaljeno tečenje.

Dužina kanala podeljena je na 6 segmenata jednake dužine ($\Delta x = 0,5 \text{ m}$). Usvojen je konstantan vremenski korak od 0,2 s. Kurantov broj je tokom celog proračuna bio manji od 0,5.

Rezultati proračuna dobijeni primenom Rouovog postupka upoređeni su sa analitičkim rešenjem za ustaljeno tečenje (slika 7). To je rešenje jednačine trećeg stepena:

$$\begin{aligned}
 Ah_u^3 + Bh_u + C &= 0 \\
 A &= 0,5\varphi_u^2 g \\
 B &= -\varphi_u(\varphi_n h_n U_n^2 + 0,5\varphi_n g h_n^2) \\
 C &= \varphi_n^2 h_n^2 U_n^2
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

u kojoj se koriste oznake sa slike 6, a od tri rešenja jednačine (48) bira se ono koje je fizički ispravno, odnosno koje je u istom režimu tečenja kao što je zadati režim. Kao što se vidi, numeričko rešenje u potpunosti prati analitičko za oba razmatrana rasporeda vegetacije i oba režima tečenja. Relativna odstupanja manja su od 5%. Prazan prostor na dijagramima koji razdvaja oblasti mirnog i burnog tečenja je oblast u kojem rešenje jednačine (48) ne postoji.

5. ZAKLJUČCI

U radu je prikazana primena metode konačnih zapremina sa Rouovom računskom shemom na rešavanje homogenih DIDANS jednačina koje opisuju strujanje u otvorenim tokovima sa horizontalnim dnom koji sadrže prostorno promenljivu vegetaciju. Vegetacija utiče na tečenje jedino time što zauzima jedan deo korita, pošto je sila kojom ona deluje na vodu zanemarena. Odlično slaganje numeričkog i analitičkog rešenja dobar je pokazatelj da se primenom prilagođene Rouove računске sheme za rešavanje kompletnih, nehomogenih DIDANS jednačina mogu očekivati zadovoljavajući rezultati.

ZAHVALNICA / ACKNOWLEDGEMENT

Istraživanje je sprovedeno uz podršku Fonda za nauku Republike Srbije, Program DIJASPORA, #Broj projekta 6466895, Akronim: DoubleVeg

This research was supported by the Science Fund of the Republic of Serbia, Program DIASPORA, #GRANT No. 6466895, Acronym: DoubleVeg.

LITERATURA

- [1] Aberle, J. and Järvelä, J. (2013) Flow resistance of emergent rigid and flexible floodplain vegetation, *J. Hydraul. Res.*, 51(1), 33-45.
- [2] Bai, Y., and Duan, J.G. (2014) Simulating unsteady flow and sediment transport in vegetated channel network, *J. Hydrol.*, 515, 90-102.
- [3] Barrios-Piña, H.; Ramírez-León, H.; Rodríguez-Cuevas, C.; Couder-Castañeda, C. (2014) Multilayer Numerical Modeling of Flows through Vegetation Using a Mixing-Length Turbulence Model, *Water*, 6, 2084-2103 <https://doi.org/10.3390/w6072084>.
- [4] Caroppi, G., Västilä, K., Gualtieri, P., Järvelä, J., Giugni, M., & Rowiński, P. M. (2021). Comparison of flexible and rigid vegetation induced shear layers in partly vegetated channels. *Water Resour. Res.*, 57, e2020WR028243. <https://doi.org/10.1029/2020WR028243>
- [5] Chatelain, M., and Proust, S. (2021) Open-channel flows through emergent rigid vegetation: Effects of bed roughness and shallowness on the flow structure and surface waves. *Physics of Fluids*, 33 (10), pp.106602. [10.1063/5.0063288](https://doi.org/10.1063/5.0063288).
- [6] Đorđević, D. i Pokrajac, D. (2020) O Metodologiji dvostrukog osrednjavanja – pregled istorijskog razvoja i teorijske osnove, *Vodoprivreda*, 52 (306-308), 185-200.
- [7] Huang, J., Zhang, X. and Chua, V.P. (2015) Numerical modelling of longitudinal dispersion in tidal flows with submerged vegetation, *J. Hydraul. Res.*, 53(6), 728–746.
- [8] Hubbard, M.E. and Garcia-Navarro, P (2000) Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients, *J. Comp. Phys.*, 165(1), 89-125.
- [9] LaVeque, R.J. (2002) *Finite Volume Methods For Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press
- [10] Luhar, M., Rominger, J. and Nepf, H. (2008) Interaction between flow, transport and vegetation spatial structure, *Environ. Fluid Mech.*, 8, 423-439.
- [11] Musa, O., Huanga, G., Yua, Z. and Li, Q. (2020) An improved Roe solver for high order reconstruction schemes, *Comp. & Fluids*, 207, 104591, <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104591>
- [12] Nepf, H. and Ghisalberti, M. (2008) Flow and transport in channels with submerged vegetation, *Acta Geophysica*, 56(3), 753-777.
- [13] Nikora, V. (2010) Hydrodynamics of aquatic ecosystems: an interface between ecology, biomechanics and environmental fluid mechanics, *River Res. Applic.*, 26, 367–384.
- [14] Nikora, V., McEwan, I., McLean, S., Coleman, S., Pokrajac, D., Walters, R. (2007) Double-averaging concept for rough-bed open-channel and overland flows: theoretical background, *J. Hydraul. Eng.*, ASCE 133(8), 873-883.

- [15] Nikora, V., Ballio, F., Coleman, S., Pokrajac, D., (2013). Spatially-averaged rough beds: definitions, averaging theorems and conservation equations, *J. Hydraul. Eng.*, ASCE 139(8), 803-811.
- [16] Pokrajac, D. (2023) General shallow water equations (GSWEs), *J. Hydraul. Res.*, 61(3), 303-321.
- [17] Qu, J. and Yu. J. (2021) A numerical modelling of flows in an open channel with emergent vegetation, *J. Hydraul. Res.*, 59(2), 250–262.
- [18] Siniscalchi, F., Nikora, V. I. and Aberle, J. (2012), Plant patch hydrodynamics in streams: Mean flow, turbulence, and drag forces, *Water Resour. Res.*, 48, W01513, doi:10.1029/2011WR011050.
- [19] Tanino, Y.; Nepf, H. M. (2008) Laboratory Investigation of Mean Drag in a Random Array of Rigid, Emergent Cylinders, *J. Hydraul. Eng.*, 134(1), 34-41.
- [20] Tanino, Y.; Nepf, H. M. (2008) Lateral dispersion in random cylinder arrays at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, 600, 339-371.
- [21] Toro, E.T. (2009) Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction, 2nd Ed., Springer
- [22] Truong, S. H., & Uijtewaal, W. S. J. (2019). Transverse momentum exchange induced by large coherent structures in a vegetated compound channel. *Water Resour. Res.*, 55, 589–612.
- [23] Wang, M., Avital, E., Chen, Q., Williams, J., Mi, S., Xie, Q. (2021) A numerical study on suspended sediment transport in a partially vegetated channel flow, *J. Hydrol.*, 599, 126335, <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.126335>.
- [24] White, B.L., Nepf, H.M. (2007) Shear instability and coherent structures in shallow flow adjacent to a porous layer, *J. Fluid Mech.*, 593, 1-32.

NUMERICAL MODELLING OF VEGETATED OPEN-CHANNEL FLOWS WITH ARBITRARY DISTRIBUTION OF VEGETATION PATCHES

by

Dejana ĐORĐEVIĆ¹, Dubravka POKRAJAC²

¹Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade

²School of Engineering, University of Aberdeen

Summary

From the point of view of Engineering Hydraulics, the spatial distribution of the aquatic vegetation in the natural streams and their floodplains is random and unrelated to the streams' flow characteristics. Aquatic vegetation enhances flow resistance and influences mixing and transport processes. Numerical simulation of open channel flows with variable spatial distribution of aquatic vegetation requires a special treatment of the advective terms, because, besides the main variables, they also contain the spatially variable porosity due to the presence of vegetation in the channel. In this paper flow in open channels with variable spatial distribution of vegetation is described using triple-averaged Navier-Stokes equations (Depth-Integrated Double-Averaged Navier-Stokes, DIDANS equations). They are solved

numerically using the finite volume method. The equations with the advective terms explicitly accounting for the spatial variation of porosity are solved by using the flux difference splitting and Roe's method for approximation of the dependent variables at the boundaries between the computational cells. The modified Roe's method is tested on an idealised case of homogeneous DIDANS equations (horizontal bed and all flow resistance terms neglected). Numerical results for this simplified case are in excellent agreement with the analytical solution.

Key words: spatial heterogeneity, porosity, Depth-Integrated Double-Averaged Navier-Stokes equations, Roe's method