

# FORMULACIJA FIBER ELEMENTA PRILIKOM NELINEARNE ANALIZE RAMOVA

## FIBER ELEMENT FORMULATION FOR INELASTIC FRAME ANALYSIS

Svetlana M. KOSTIĆ  
Biljana DERETIĆ-STOJANOVIĆ

PREGLEDNI RAD  
REVIEW PAPER  
UDK: 624.33.044  
doi:10.5937/grmk1602003K

### 1 UVOD

Savremeni standardi u građevinarstvu podrazumevaju primenu nelinearne analize u svakodnevnoj inženjerskoj praksi [2, 10]. Do sada su formulisani brojni konačni elementi koji uzimaju u obzir različite nelinearne uticaje. Prilikom nelinearne analize ramova, linijski gredni elementi u širokoj su upotrebi zbog svoje jednostavnosti i kompjuterske efikasnosti. Fiber elementi rasodeljene plastičnosti pokazali su se kao vrlo uspešni pri modeliranju čeličnih, betonskih i spregnutih konstrukcija [6, 12].

U ovom radu razmatraju se dve formulacije fiber konačnog elementa - prema metodi deformacija i metodi sila, kao i njihova upotreba prilikom nelinearne analize ramova. Pažnja je usmerena na tačnost određivanja lokalnog i globalnog odgovora konstrukcije, u zavisnosti od korišćene formulacije ovog konačnog elementa.

### 2 FORMULACIJA FIBER ELEMENTA RASPODELJENE PLASTIČNOSTI PREMA METODI DEFORMACIJA

Kod elemenata rasodeljene plastičnosti, neelastične deformacije mogu se javiti u bilo kom od nekoliko posmatranih preseka duž ose elementa (slika 1a). Kod fiber grednih elemenata, izvršena je diskretizacija poprečnog preseka pomoću nekoliko tačaka integracije (vlakana, odn. fibera) i svakoj tački integracije dodeljeno je jednoosno ponašanje odgovarajućeg materijala (slika 1b).

---

Doc. dr Svetlana Kostić, dipl. inž. građ.  
Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, imejl: svetlana@grf.bg.ac.rs  
V. prof. dr Biljana Deretić-Stojanović, dipl. inž. građ.  
Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, imejl: biljads@eunet.rs

### 1 INTRODUCTION

According to new engineering standards, the nonlinear frame analysis has become common in professional engineering practice [2, 10]. A number of finite elements have been formulated accounting for different nonlinear effects. For inelastic frame analysis, beam/column elements are widely used because of their simplicity and computational efficiency. Distributed plasticity fiber based beam/column elements are proven to be very successful for modelling steel, concrete and composite structures [6, 12].

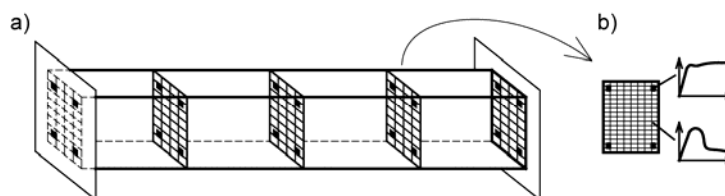
This paper discusses the use of fiber elements with displacement-based and force-based formulations in nonlinear frame analysis. The attention is focused on the accuracy of global and local response parameters depending on the element formulation.

### 2 FIBER BASED DISTRIBUTED PLASTICITY BEAM/COLUMN ELEMENT

In distributed plasticity beam/column elements, the inelastic deformations may occur in any of several monitored cross-sections along the element length (Figure 1a). In fiber based beam/column element, cross-section is discretized into a number of integration points (fibres) and an uniaxial material behaviour is assigned to each integration point (Figure 1b).

---

Doc. dr Svetlana Kostić, dipl.inž.građ.  
Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, e-mail: svetlana@grf.bg.ac.rs  
V. prof. dr Biljana Deretić-Stojanović, dipl.inž.građ.  
Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, e-mail: biljads@eunet.rs



Slika 1. Fiber element raspodeljene plastičnosti:  
a) posmatrani preseki duž ose elementa; b) diskretizovan poprečni presek

Figure 1. Distributed plasticity fiber based beam/column element:  
a) monitored sections along element axis; b) section discretization

Odgovor poprečnog preseka (matrica krutosti preseka  $\mathbf{k}_s$  i sile u preseku  $\mathbf{s}$ ) određuje se integracijom, odnosno, numerički sumiranjem po površini poprečnog preseka [9]:

$$\mathbf{k}_s = \sum_{i=1}^N E_{ii} \begin{bmatrix} 1 & -y_i & z_i \\ -y_i & y_i^2 & -y_i z_i \\ z_i & -y_i z_i & z_i^2 \end{bmatrix} A_i \quad (1)$$

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} 1 \\ -y_i \\ z_i \end{bmatrix} \sigma_i A_i \quad (2)$$

gde  $N$  predstavlja broj tačaka integracije po površini poprečnog preseka;  $E_{ii}$  – modul elastičnosti materijala dodeljenog tački integracije  $i$ ;  $A_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  jesu, redom, površina, a  $y$  i  $z$  koordinate tačke integracije  $i$ .

Položaj i „numerička težina“ posmatranih poprečnih preseka mogu biti određeni na osnovu predznanja o tome gde će se najveće plastične deformacije najverovatnije javiti. Kada se posmatraju samo dva fiber preseka na krajevima linijskog elementa, dok je ostatak elementa linearno-elastičan, element pripada elementima iz grupe koncentrisane plastičnosti. S druge strane, položaj i numerička težina posmatranih preseka mogu biti određeni i izabrani pravilom integracije. Najčešće korišćena pravila jesu Gauss i Gauss-Lobatto pravila integracije zbog njihove visoke tačnosti. Prednost Gauss-Lobatto pravila jeste to što uključuje i poprečne preseke na krajevima elementa u kojima se najčešće i javljaju najveće deformacije.

Tačnost elementa, kao što je objašnjeno i kasnije u radu, dosta zavisi i od broja tačaka integracije kojim se vrši diskretizacija poprečnog preseka, kao i od broja tačaka integracije duž ose elementa, tj. od broja posmatranih poprečnih preseka.

Prilikom formulacije fiber konačnog elementa, uobičajena su dva pristupa: formulacija prema metodi deformacija i formulacija prema metodi sila [11]. U nastavku su date osnovne karakteristike obe formulacije.

## 2.1 Fiber element prema metodi deformacija

Za linijski konačni element sa slike 2, osnovne statički nepoznate u osnovnom sistemu obeležene su sa  $\mathbf{q}$ , a odgovarajuće deformacije sa  $\mathbf{v}$ . U formulaciji elementa prema metodi deformacija, pomeranje bilo koje tačke duž ose elementa  $\mathbf{u}(x)$  određuje se pomoću

The section response (the section stiffness matrix  $\mathbf{k}_s$  and the section resisting forces  $\mathbf{s}$ ) is obtained through integration, i.e. numerically, through summation over the cross-section [9]:

where  $N$  is the number of integration points over the cross-section;  $E_{ii}$  is the modulus of the uniaxial stress-strain relation assigned to the integration point  $i$ ;  $A_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  are, respectively, area and  $y$  and  $z$  coordinates of the integration point  $i$ .

The position and „numerical weight“ of monitored cross-sections may be determined according to the knowledge of locations where the largest plastic deformations are most likely to appear. When only two fiber sections at the element ends are monitored, while the remaining part of the element is linear elastic, the element is fiber hinge model which belongs to the group of concentrated plasticity elements. On the other side, the chosen numerical integration rule may determine the position and numerical weight of the monitored cross-sections. The most used rules are Gauss and Gauss-Lobatto integration rules because of the high level of accuracy. The advantage of the Gauss-Lobatto rule is that it includes cross-sections at the element ends where highest deformations commonly appear.

The element accuracy, as discussed latter in the paper, largely depends on the used number of integration points for the cross-section discretization and on the number of integration points over the element length, i.e. number of monitored cross sections.

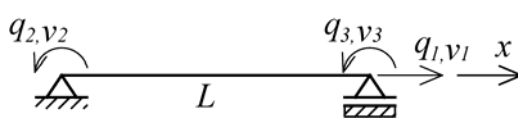
In fiber element formulation, two approaches are common: displacement based and force based formulation [11]. In the following, the main steps of the both element formulations are discussed.

## 2.1 Displacement based fiber element

For the line beam/column element in Figure 2, the basic element forces in the basic system without rigid body modes are denoted with  $\mathbf{q}$  and basic element deformations are denoted with  $\mathbf{v}$ . In the displacement

interpolacionih funkcija za pomeranja  $\mathbf{a}(x)$  (za 2D element) kao [5]:

formulation, displacements at any point along the element axis  $\mathbf{u}(x)$  may be obtained using the displacement interpolation functions  $\mathbf{a}(x)$  as [5], for 2D element:



Slika 2. Osnovni sistem 2D grednog elementa  
Figure 2. Basic forces of 2D beam/column element

$$\mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix} = \mathbf{a}(x) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & a_2(x) & a_3(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Interpolacione funkcije za pomeranja, za gredni element s dva čvora, jesu Hermite-ovi polinomi i predstavljaju rešenja diferencijalne jednačine linearno-elastičnog prizmatičnog štapa. Deformacije u bilo kojoj tački duž ose elementa  $\mathbf{e}(x)$  (tj. dilatacija  $\varepsilon(x)$ , i krivina  $\kappa(x)$ ) dobijaju se, pod pretpostavkom teorije malih deformacija, kao prvi izvod pomeranja u pravcu ose elementa (dilatacija  $\varepsilon(x)$ ) i drugi izvod pomeranja upravno na osu elementa (krivina  $\kappa(x)$ ), tj. za 2D element:

The displacement interpolation functions, for frame element with two nodes, are Hermite polynomials and represent the solution of the differential equation for a linear elastic, prismatic frame element. Deformation at any point along the element axis  $\mathbf{e}(x)$  (dilatation  $\varepsilon(x)$ , and curvature  $\kappa(x)$ ) obtains, under the assumptions of the small deformation theory, as the first derivative of the longitudinal displacement (dilatation  $\varepsilon(x)$ ) and the second derivative of the transverse displacement (curvature  $\kappa(x)$ ), i.e for 2D element:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(x) \\ \kappa(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Stoga, za ovako usvojene interpolacione funkcije za pomeranja koje su polinomi trećeg stepena za pomeranja u pravcu upravnom na osu elementa, dobija se linearna promena krivine duž ose elementa. Ova pretpostavka prihvatljiva je u slučaju linearnog ponašanja. Međutim, kada se javljaju plastične deformacije, promena krivine duž elementa postaje izrazito nelinearna i - da bi se dobili rezultati prihvatljive tačnosti - potrebna je vrlo fina podela konačnih elemenata (tj. mreža konačnih elemenata). Ovo ograničenje metode deformacija treba imati na umu [13].

Therefore the curvature change over the element length is linear for the adopted displacement interpolation functions that are third order polynomials for transverse displacements. This assumption is acceptable for linear behaviour. However, when plastic deformations appear, the curvature distribution becomes highly nonlinear and, in order to obtain results of acceptable accuracy, the mesh refinement is necessary. This limitation of the displacement formulation should be kept in mind [13].

S druge strane, implementacija fiber elementa, formulisanog prema metodi deformacija u standardne kompjuterske programe koji su uglavnom zasnovani na metodi deformacija, jeste jednostavna budući da je određivanje stanja elementa direktno. Kada su poznata pomeranja krajeva elementa, pomoću interpolacionih funkcija, određuju se deformacije poprečnog preseka (izrazi 3 i 4); sile u preseku nalaze se direktno preko konstitutivnih relacija. Konačno, sile na krajevima elementa određuju se primenom principa virtualnih pomeranja.

On the other side, the implementation of the displacement based fiber beam/column element in standard (displacement based) computer programs is straightforward since the element state determination is direct. From known end displacements, using interpolation functions, section deformations can be obtained (Eqs. 3 and 4); section forces can be found directly from section constitutive equations. Finally, element end forces are obtained from the principle of virtual displacements.

Pored ove prednosti formulacije prema metodi deformacija, treba pomenuti i još jedno ograničenje ove formulacije: uticaj raspodeljenog opterećenja ne može se direktno uzeti u obzir, budući da se sile u preseku određuju pomoću deformacija poprečnog preseka gde ovaj efekat nije uključen [5].

Besides this advantage of displacement formulation, one more limitation should be mentioned: the effect of distributed element loading cannot be directly implemented into the formulation since section forces are derived from section deformations where this effect is not included [5].

Suprotno elementu formulisanom prema metodi sila kada je jedan element dovoljan za modeliranje stu-

Oppose to the element based on the force formulation when one element per member can be used, finer discretization per member should be used with the

ba/grede, kod fiber elemenata formuliranih prema metodi deformacija, da bi se postigao isti stepen tačnosti, potrebna je znatno finija diskretizacija. Navedeno će biti ilustrovano na narednim numeričkim primerima.

## 2.2 Fiber element prema metodi sila

Prilikom formulacije prema metodi sila, sile u bilo kom preseku duž ose elementa  $\mathbf{s}(x)$  određuju se koristeći interpolacione funkcije za sile  $\mathbf{b}(x)$  (za 2D element) kao [5]:

$$\mathbf{s}(x) = \begin{bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{bmatrix} = \mathbf{b}(x)\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{x}{L}-1\right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

gde su  $\mathbf{q}$  osnovne statički nepoznate u osnovnom sistemu, kao što je prethodno pomenuto. Relacije između deformacija na krajevima elementa  $\mathbf{v}$  i deformacija poprečnog preseka  $\mathbf{e}(x)$  dobijaju se primenom principa virtualnih sila [5]:

$$\mathbf{v} = \int_L \mathbf{b}^T(x)\mathbf{e}(x)dx \quad (6)$$

Stoga, u ovoj formulaciji, deformacije poprečnog preseka  $\mathbf{e}(x)$  određuju se iz sila u poprečnom preseku  $\mathbf{s}(x)$ . Međutim, ove relacije nisu raspoložive, već njima inverzne [5]. Zbog toga se deformacije poprečnog preseka određuju kao rešenja nelinearnog sistema jednačina i određivanje stanja kod ovih elemenata komplikovanije je nego kod fiber elemenata zasnovanih na metodi deformacija.

S druge strane, jedna prednost elemenata zasnovanih na metodi sila treba da bude pomenuta. Uticaj raspodeljenog opterećenja duž ose elementa može se lako uključiti u formulaciju modifikovanjem relacije (5) na sledeći način [5]:

$$\mathbf{s}(x) = \mathbf{b}(x)\mathbf{q} + \mathbf{s}_p(x) \quad (7)$$

gde  $\mathbf{s}_p(x)$  predstavlja partikularno rešenje diferencijalne jednačine uslova ravnoteže za gredni element. Sve dok su poprečna pomeranja mala i uslovi ravnoteže su zadovoljeni u nedeformisanoj konfiguraciji, relacije (5), (6) i (7) jesu tačne bez obzira na prisustvo materijalnih nelinearnosti [5]. Zbog toga, samo jedan element dovoljan je za modeliranje stuba ili grede. Ovo je najvažnija prednost formulacije prema metodi sila u odnosu na formulaciju prema metodi deformacija. Međutim, kada numerički model uključuje i ploče kod kojih je neophodna finija diskretizacija konačnim elementima, grede je takođe neophodno podeliti na više elemenata u skladu s podelom ploča, a to donekle ograničava pomenutu prednost metode sila.

Tačnost lokalnog odgovora elementa zavisi od broja tačaka integracije koje su korišćene duž ose elementa, tj. od broja posmatranih poprečnih preseka. Najtačniji rezultati dobijaju se kada „numerička težina poprečnog preseka“ odgovara veličini (dužini) plastičnog zgloba. Imajući ovo u vidu, tačnost elementa neće se uvek povećati s povećanjem broja posmatranih poprečnih preseka. Tačnije, kada je u pitanju ponašanje materijala

element based on the displacement formulation in order to achieve the same level of accuracy. This would be demonstrated on the following numerical examples.

## 2.2 Force based fiber element

In force based formulation, the section forces at any point along the element axis  $\mathbf{s}(x)$  may be obtained using the force interpolation functions  $\mathbf{b}(x)$  as [5] (for 2D element):

where  $\mathbf{q}$  are basic element forces, as mentioned above. The relation between the element deformations  $\mathbf{v}$  and section deformations  $\mathbf{e}(x)$  obtains from the principle of virtual forces [5]:

Therefore, in this formulation, the section deformations  $\mathbf{e}(x)$  needs to be obtained from section forces  $\mathbf{s}(x)$ . These relations are unavailable, but inverse relations are available [5]. Therefore, the section deformations are obtained as the solution of the nonlinear system of equations and the element state determination is more complex than the element state determination for the displacement based fiber element.

On the other side the following advantage of the force based beam/column element should be mentioned. The effect of the element (distributed) load can be easily included into the formulation by modifying the relation (5) as [5]:

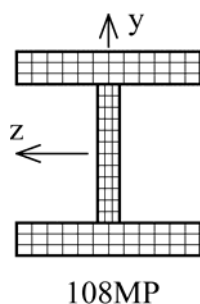
where  $\mathbf{s}_p(x)$  represents the particular solution of the differential equations of equilibrium for a frame element. As long as the transverse displacements are small and the equilibrium equations are satisfied in the undeformed configuration, the relations (5), (6) and (7) hold true despite of the presence of material non-linearities [5]. Therefore, only one element per beam or column member is sufficient. That is the main advantage of the force formulation over the displacement formulation. However, when numerical model includes slabs that require finer discretization, beams also need to be discretized in accordance with this finer discretization and that limits the mentioned force formulation advantages.

The accuracy of the local element response depends on the used number of integration points along the element axis, i.e. number of monitored cross-sections. The best quality results are obtained when the „section weight“ corresponds to the plastic length. Having this fact in mind, the element accuracy would not always increase with rapid increment of the number of the monitored sections. Actually, in the absence of

bez ojačanja, s velikim brojem poprečnih preseka odgovarajuća dužina plastičnog zgloba će biti vrlo mala i sračunata neelastična krivina nerealno velika. Stoga, za stubove je obično dovoljno uzeti tri ili četiri tačke integracije duž ose elementa. Za grede je dovoljno četiri tačke ili pet tačaka, u zavisnosti od toga da li je potrebno posmatrati presek na sredini elementa, odnosno da li je prisutno ili ne raspodeljeno opterećenje. Povećanje broja poprečnih preseka ima smisla samo u slučaju kada postoji ojačanje materijala. Tada je moguće pratiti širenje zona plastifikacije duž ose elementa.

### 3 DISKRETIZACIJA POPREČNOG PRESEKA I TAČNOST REZULTATA

Tačnost rezultata i kompjuterska efikasnost fiber elemenata raspodeljene plastičnosti umnogome zavisi od upotrebljenog broja tačaka integracije po površini poprečnog preseka. Na osnovu prikazanog [9], uočljivo je da nije potrebno koristiti nekoliko stotina tačaka integracije za poprečni presek, kao što to vrlo često istraživači rade. Rezultati prihvatljive tačnosti mogu se dobiti i sa, na primer, samo 12 tačaka integracije kod čeličnih I profila i 17 tačaka integracije kod pravougaonih betonskih preseka. U ovom radu, čelični I profil diskretizovan je 108MP diskretizacijom (slika 3) [9] kako bi se izbegle numeričke greške nastale usled diskretizacije poprečnog preseka i kako bi se analizirao uticaj formulacije elementa na njegovu tačnost.



Slika 3 108 MP šema diskretizacije  
Figure 3. 108MP discretization scheme

### 4 NUMERIČKI PRIMERI

Razlike u formulaciji fiber konačnog elementa i njihov uticaj na rezultate numeričke analize ilustrovani su u dva naredna numerička primera. Za numeričke simulacije korišćen je FEDEASLab [4], Matlab toolbox za nelinearnu statičku i dinamičku analizu.

#### 4.1 Statička pushover analiza

Prvi primer obuhvata statičku *pushover* analizu rama prikazanog na slici 4, koji je prethodno analizirao Ziemian [14]. U ovom primeru, pored rezidualnih napona, postoji i raspodeljeno opterećenje duž ose elementa. Ram poseduje svojstvo redistribucije sila s pojavom plastičnih zglobova [1].

Da bi se analizirao uticaj formulacije fiber elementa na odgovor rama, napravljena su dva modela sa

hardening, when too many sections are monitored, the corresponding plastic length is very small and the calculated inelastic curvature has become unrealistically high. Therefore, usually, for columns, 3 to 4 integration points over the element length are sufficient. For beams, 4 to 5 integration points are used depending whether the middle cross section is monitored or not, i.e. whether the distributed loading is present or not. To increase the number of monitored cross-sections has a sense only in the case when hardening is present. The spread of plastic zones over the element length can be captured in this way.

### 3 SECTION DISCRETIZATION AND ACCURACY

The accuracy and computational efficiency of the fiber based distributed plasticity beam/column element largely depends on the used number of integration points over the cross section. It was shown [9] that there is no need to use several hundred integration points for the cross section discretization as usually researchers do. The results of acceptable accuracy may be obtained using only 12 integration points for the steel WF sections and 17 integration points for the concrete rectangular section. In this study, the steel WF cross-section is discretized with 108MP discretization (Figure 3) [9] in order to avoid numerical errors due to the section discretization and to analyse the effect of different formulations on element accuracy.

### 4 NUMERICAL EXAMPLES

The discussed differences in the fiber element formulations and its effect on analysis results are illustrated on the following two numerical examples. For numerical simulations, the FEDEASLab [4], a Matlab toolbox for nonlinear static and dynamic analysis is used.

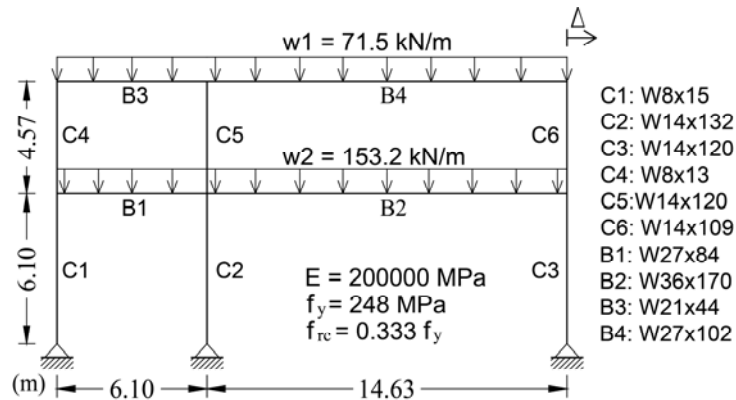
#### 4.1 Static pushover analysis

The first example involves the static pushover analysis of the low-rise frame in Figure 4, previously studied by Ziemian [14]. In this example, besides residual stresses, the distributed element loading is present. The frame shows the effect of force redistribution upon plastic hinge formation [1].

To investigate the effect of the fiber element formulation on the frame response, two models with elements

elementima formulisanim prema obe metode. Oba modela analizirana su s nekoliko diskretizacija. Podaci o ovim diskretizacijama dati su u Tabeli 1, gde  $n_e$  označava broj konačnih elemenata po stubu/gredi, a  $n_{ip}$  označava broj tačaka integracije duž ose elementa.

based on both formulations are created. Both models are used with several discretizations. Details about these discretizations are given in Table 1, where  $n_e$  denotes the number of elements per member and  $n_{ip}$  denotes the number of integration points over the element length.



Slika 4. Ziemian ram  
Figure 4. Ziemian low-rise frame

Kada su u pitanju oba modela, pretpostavljena je raspodela rezidualnih napona prilikom koje se naponi menjaju linearno u flanšama i imaju najveću vrednost pritiska od  $0.333\sigma_y$ , dok je raspodela rezidualnih napona u rebu konstantna [7]. Kod fiber grednog konačnog elementa, rezidualni naponi zadaju se kao inicijalni naponi svakom vlaknu poprečnog preseka na početku analize. Zbog 2D varijacije rezidualnih napona po površini poprečnog preseka, potrebna je diskretizacija preseka u pravcu ose  $y$ - i u pravcu ose  $z$ - poprečnog preseka i u slučaju 2D analize rama.

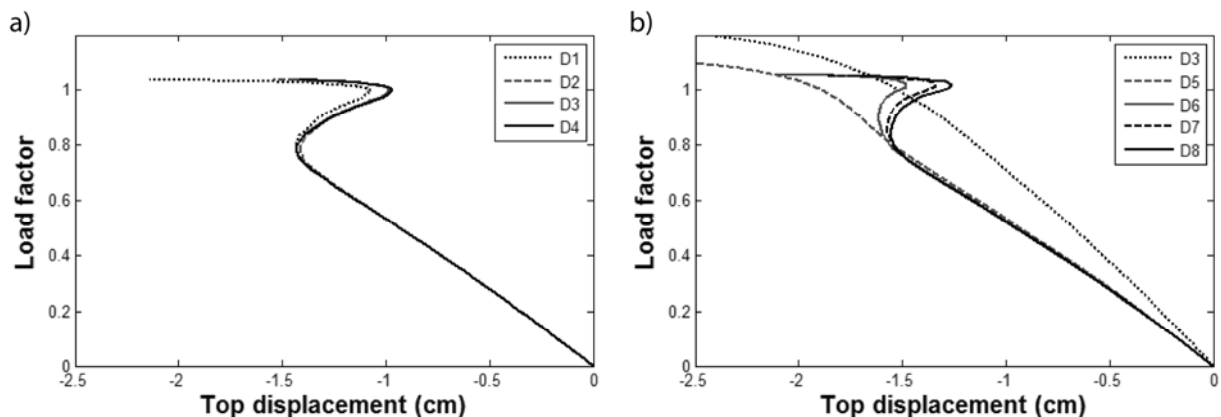
In both models, the residual stress pattern is assumed to vary linearly in the flange with peak stress in compression of  $0.333\sigma_y$  and constant tensile stress in the web [7]. The fiber beam-column element accounts for the residual stress pattern with the assignment of an initial stress to each fiber at the start of the analysis. Because of the 2D variation of residual stresses over the cross section, a fiber discretization in the  $y$ - and  $z$ -axis of the cross section is required, even for a 2D frame analysis.

Tabela 1. Podaci o diskretizacijama rama  
Table 1. Details about used frame discretizations

Discretization Diskretizacija	Column C1-C6 Stub C1-C6		Beam B1, B3 Greda B1, B3		Beam B2, B4 Greda B2, B4		Total number of elements Ukupan broj elemenata
	$n_e$	$n_{ip}$	$n_e$	$n_{ip}$	$n_e$	$n_{ip}$	
D1	1	4	1	5	1	5	10
D2	1	4	1	5	1	7	10
D3	1	4	2	5	4	5	18
D4	1	4	2	5	4	7	18
D5	2	3	8	5	16	5	60
D6	4	3	16	5	32	5	120
D7	4	3	32	5	64	5	216
D8	4	3	64	5	128	5	408

Materijal je elastično-idealno plastičan. Geometrijske nelinearnosti uzete su u obzir primenom korotacione formulacije [3].

The material model is assumed elastic-perfectly plastic. The nonlinear geometry under large displacements is accounted for with the corotational formulation [3].



Slika 5. Pomeranje vrha rama-faktor opterećenja za  
a) fiber element prema metodi sila; b) fiber element prema metodi deformacija

Figure 5. Top displacement-load factor relation for  
a) force based fiber element; b) displacement based fiber element

Slika 5 prikazuje rezultate za zavisnost vrha pomeranja rama  $\Delta$  od faktora opterećenja za dva modela i različitim diskretizacijama rama. Rezultati se slažu s rezultatima drugih autora [1]. Prednosti formulacije prema metodi sila nad formulacijom prema metodi deformacija evidentne su u ovom primeru, naročito zbog mogućnosti metode sila da direktno uzme u obzir uticaj raspodeljenog opterećenja duž ose elementa modifikovanjem interpolacionih funkcija za sile. Kao posledica, u formulaciji prema metodi sila diskretizacija rama sa samo jednim elementom po stubu/gredi daje rezultate prihvatljive tačnosti. Nasuprot tome, kod modela s fiber elementom prema metodi deformacija potrebna je mnogo finija diskretizacija da bi se postigao isti nivo tačnosti.

Figure 5 shows the results for the top displacement  $\Delta$  - load factor relation of the two models with different discretization schemes. These results agree well with the results obtained by the other authors [1]. The advantages of the force-based element over the displacement-based element are evident in this example with the capability of the former to account directly for the presence of distributed element loading by modification of the force interpolation functions. As a consequence, the discretization with only one force-based fibre beam-column element per member provides the results of acceptable accuracy. On the contrary, for the model with displacement-based fiber beam-column element, for the same level of accuracy, much finer discretization needs to be used.

#### 4.2 Nelinearna dinamička analiza

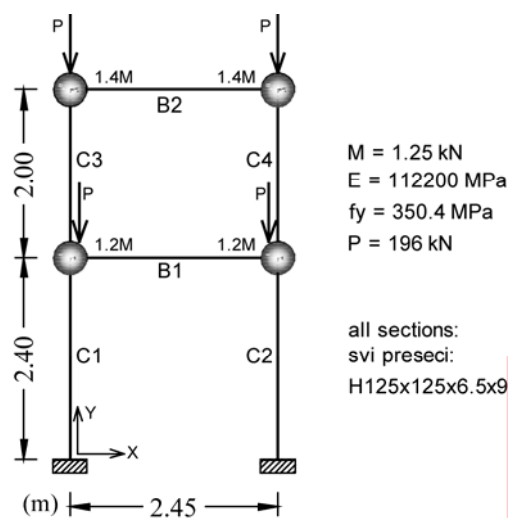
Drugi primer prikazuje nelinearnu dinamičku analizu dvospratnog rama, prikazanog na slici 6. Prostornu 3D verziju ovog rama analizirali su Kim i drugi [8]. Karakteristike materijala prikazane su na slici 6. Model je usvojen kao elastičan-idealno plastičan.

Ram je prvo opterećen konstantnim gravitacionim opterećenjem, a zatim zemljotresnim opterećenjem 1940 El Centro zapisa skaliranog tako da je maksimalno ubrzanje tla (PGA) 1.2753g, u X pravcu. Mase su koncentrisane u čvorovima s vrednostima prikazanim na slici 6. Pretpostavljeno je viskozno prigušenje u iznosu od 4% za prva dva svojstvena tona oscilovanja elastične konstrukcije. Slično kao u prethodnom primeru, diskretizacije rama koje su korišćene prikazane su u Tabeli 2.

#### 4.2 Nonlinear time history analysis

The second example refers to the nonlinear time history analysis of a small two-story frame from Figure 6. 3D version of this frame was studied by Kim et al. [8]. Data about the frame geometry and material properties are given in Figure 6. The material model is assumed to be elastic-perfectly plastic.

The frame is first subjected to the constant gravity loading and, then, to a ground excitation in X direction with the 1940 El Centro record scaled to a peak ground acceleration (PGA) of 1.2753g. The mass is lumped at each node with a value given in Figure 6. Rayleigh damping was assumed in the analysis with 4% viscous damping ratio for the first two vibration modes of the elastic structure. Similarly to the previous example, the used discretizations are explained in Table 2.



Slika 6. Dvospratni ram  
Figure 6. Two-story frame

Tabela 2: Podaci o diskretizacijama dvospratnog rama  
Table 2: Details about used two-story frame discretizations

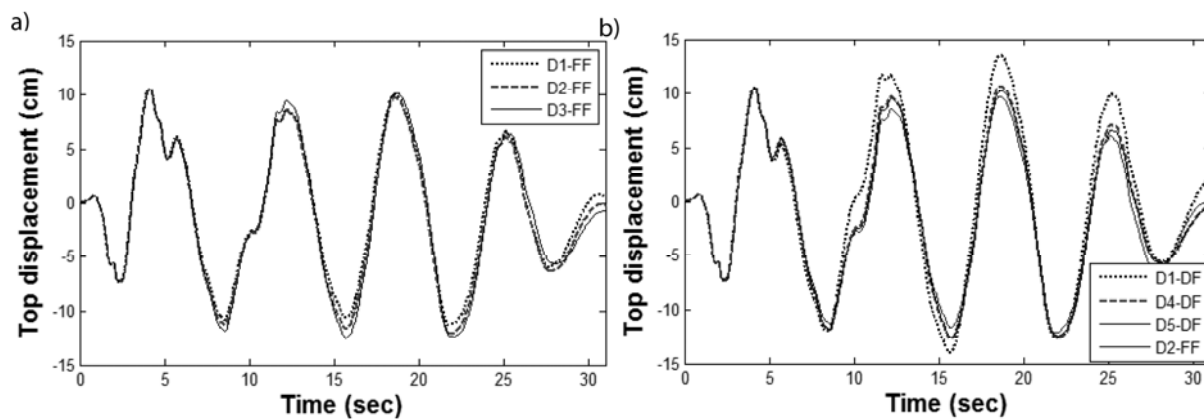
Discretization Diskretizacija	Columns		Beams		Total number of elements: Ukupan broj elemenata:
	$n_e$	$n_{ip}$	$n_e$	$n_{ip}$	
D1	1	4	1	5	6
D2	2	4	2	4	12
D3	4	4	4	4	24
D4	8	4	8	4	48
D5	16	4	16	4	96
D6	24	4	24	4	144

Slika 7 prikazuje istoriju pomeranja vrha rama, a slike 8 i 9 prikazuju promenu momenta savijanja i aksijalne sile za presek u uklještenju stuba C1.

Kao što se može videti, kod modela s fiber elementom prema metodi sile, čak i diskretizacija sa samo jednim elementom po stubu/gredi daje rezultate vrlo visoke tačnosti kako za pomeranje vrha, tako i za sile u preseku. Da bi se postigao isti nivo tačnosti pomoću modela s fiber elementom prema metodi deformacija, ponovo je neophodna mnogo finija diskretizacija.

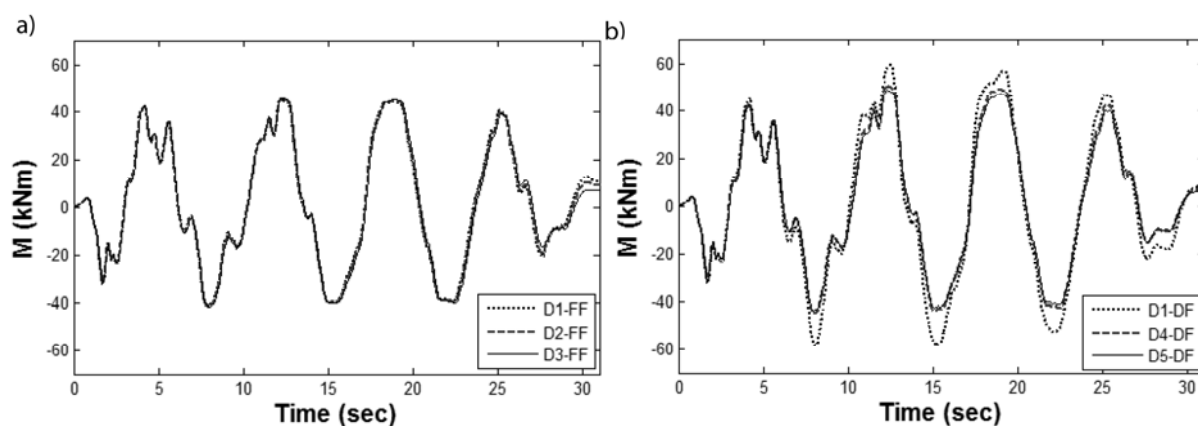
Figure 7 shows the top story displacement history, and Figures 8 and 9 show bending moment history and axial force history for column C1, section at fixed end. It can be seen that even the model with the coarsest discretization with the fibre element with force formulation that has only one element per member gives results of great accuracy for both, top displacement and section forces. To achieve the same level of accuracy with the fiber element with displacement formulation, much finer discretization is required.





Slika 7. Pomeranje vrha rama za  
 a) fiber element prema metodi sili; b) fiber element prema metodi deformacija

Figure 7. Top displacement history for  
 a) force based fiber element; b) displacement based fiber element



Slika 8. Moment savijanja u stubu C1, presek kod uklještenja za  
 a) fiber element prema metodi sili; b) fiber element prema metodi deformacija

Figure 8. Bending moment history for column C1, section at fixed end for  
 a) force based fiber element; b) displacement based fiber element

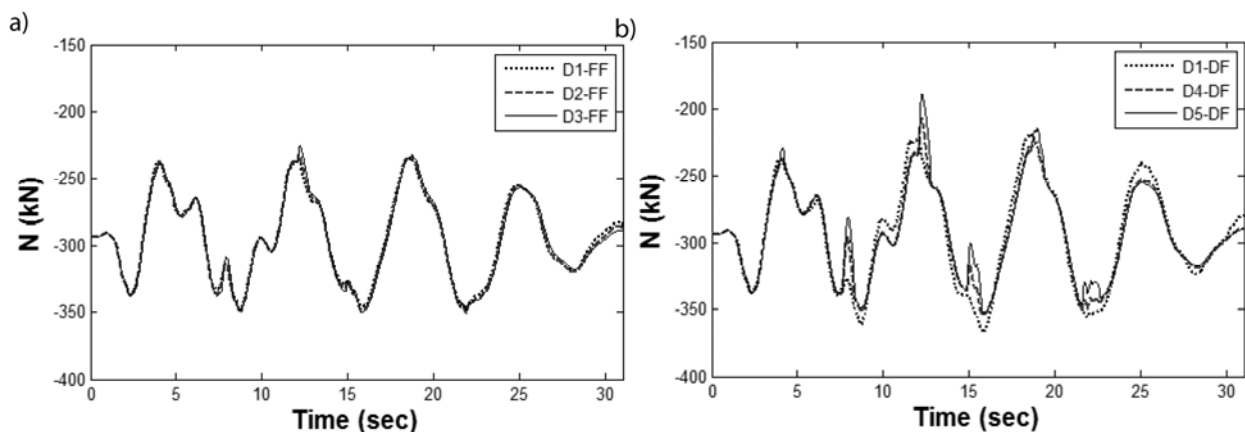


Figure 9: Aksijalna sila u stubu C1, presek kod uklještenja za  
 a) fiber element prema metodi sili; b) fiber element prema metodi deformacija

Figure 9. Axial force history for column C1, section at fixed end for  
 a) force based fiber element; b) displacement based fiber element

## 5 ZAKLJUČAK

Fiber element raspodeljene plastičnosti pokazao se kao vrlo uspešan u nelinearnoj analizi ramova. Prilikom formulacije elementa, uobičajena su dva pristupa: prema metodi sila i prema metodi deformacija. Osnovna prednost formulacije prema metodi sila jeste to što je jedan element po stubu s tri ili četiri tačke integracije duž ose, odnosno, jedan element po gredi s četiri tačke ili pet tačaka integracije duž ose elementa dovoljan i što se uticaj raspodeljenog opterećenja lako može uzeti u obzir direktno formulacijom. S druge strane, osnovna prednost fiber elementa prema metodi deformacija jeste njegova jednostavnost.

Pomoću dva numerička primera, pokazano je da se za postizanje istog nivoa tačnosti globalnog odgovora, mora koristiti mnogo finija konačnih elemenata kod modela s fiber elementom prema metodi deformacija. U slučaju lokalnih parametara odgovora, neophodno je čak dalje progušćenje mreže konačnih elemenata kod modela prema metodi deformacija. Stoga, treba imati na umu da dve formulacije fiber elementa nisu ekvivalentne i da se ovi elementi ne mogu koristiti na isti način.

### Zahvalnost

Prvi autor zahvaljuje Ministarstvu nauke Republike Srbije za finansijsku podršku u okviru projekta TR 36046.

## 6 LITERATURA REFERENCES

- [1] Attalla, M.R., G.G. Deierlein, and W. McGuire, Spread of plasticity: quasi-plastic-hinge approach. *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 1994. **120**: p. 2451-2473.
- [2] Cosic, M. and S. Brcic, Typology of NSPA pushover curves and surfaces for 3D performance-based seismic response of structures. *Building materials and structures*, 2013. **56**(4): p. 19-38.
- [3] Crisfield, M.A., *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. 1991, West Sussex: John Wiley & Sons.
- [4] Filippou, F.C. and M. Constantinides, *FEDEASLab Getting Started Guide and Simulation Examples*. 2004, University of California, Berkeley.
- [5] Filippou, F.C. and G.L. Fenves, *Methods of Analysis for Earthquake-Resistant Structures*, in *Earthquake Engineering: From Engineering Seismology to Performance-Based Engineering*, Y. Bozorgnia and V.V. Bertero, Editors. 2004, CRC Press.
- [6] Hajjar, J.F., A. Molodan, and P.H. Schiller, A distributed plasticity model for cyclic analysis of concrete-filled steel tube beam-columns and composite frames. *Engineering Structures*, 1998. **20**(4-6): p. 398-412.
- [7] Ketter, R.L., E.L. Kaminsky, and L.S. Beedle, Plastic deformation of wide-flange beam columns. *Transactions ASCE*, 1955. **120**: p. 1028-1069.

## 5 CONCLUSION

Fiber based distributed plasticity beam/column element has proven to be very efficient for nonlinear frame analysis. Usually two element formulations are used: force based and displacement based. The main advantage of the force formulation is that one element with 3 to 4 integration points per column and 4 to 5 integration points per beam are sufficient and that effect of distributed element loading can easily be included into the formulation. On the contrary, the main advantage of the displacement formulation is its simplicity.

On the two numerical examples it is shown that for the same level of global response, much finer element discretization needs to be used when displacement based fiber beam/column element is used. For the local element response measures, even further discretization refinement is necessary. In conclusion, the two formulations are not equivalent and the two elements cannot be used in the same way.

### Acknowledgement

The first author thanks the Ministry of Science of the Republic of Serbia for financial support under project number TR 36046.

- [8] Kim, S.-E., C. Ngo-Huu, and D.-H. Lee, Second-order inelastic dynamic analysis of 3-D steel frames. *International Journal of Solids and Structures*, 2006. **43**(6): p. 1693-1709.
- [9] Kostic, S.M. and F.C. Filippou, Section Discretization of Fiber Beam-Column Elements for Cyclic Inelastic Response. *Journal of Structural Engineering*, 2012. **138**(5): p. 592-601.
- [10] Liolios, A., G. Hatzigeorgiou, and A. Liolios, Effects of multiple earthquakes to the seismic response of structures. *Building materials and structures*, 2012. **55**(4): p. 3-14.
- [11] Neuenhofer, A. and F.C. Filippou, Evaluation of Nonlinear Frame Finite Element Models. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1997. **123**(7): p. 958-966.
- [12] Spacone, E., F.C. Filippou, and F.F. Taucer, *Fiber Beam-Column Model for Nonlinear Analysis of RC Frames: II: Applications*. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1996. **25**(7): p. 727-742.
- [13] Vesna, T. Force-based Element vs. Displacement-based Element. [PDF slides] 2011.
- [14] Ziemian, R.D., W. McGuire, and G.G. Deierlein, Inelastic limit states design. Part I: Planar frame studies. *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 1992. **118**(2532-2549).

## SUMMARY

### FORMULACIJA FIBER ELEMENTA KOD NELINEARNE ANALIZE RAMOVA

Svetlana KOSTIĆ  
Biljana DERETIĆ-STOJANOVIĆ

U radu su prikazane dve formulacije fiber konačnog elementa raspodeljene plastičnosti. Za metodu sila i metodu deformacija, ukazano je na osnovne razlike dve metode. Razlike u rezultatima analize koje se dobijaju primenom fiber elementa prema ove dve formulacije prikazane su putem dva numerička primera. Prvi primer obuhvata statičku *pushover* analizu rama s raspodeljenim opterećenjem duž greda. Drugi primer je nelinearna dinamička analiza dvospratnog rama izloženog zemljotresnom opterećenju. Prikazane su razlike kod dobijenog globalnog i lokalnog odgovora u zavisnosti od formulacije i diskretizacije rama. U zaključku, rezimirane su primene dve formulacije fiber elementa i date napomene u vezi s njihovim korišćenjem.

**Key words:** fiber konačni element, raspodeljena plastičnost, metoda sila, metoda deformacija

## REZIME

### FIBER ELEMENT FORMULATION FOR INELASTIC FRAME ANALYSIS

Svetlana KOSTIĆ  
Biljana DERETIĆ-STOJANOVIĆ

The paper discusses two formulations for the fiber based distributed plasticity beam/column element. For force based and displacement based formulations, basic details and main differences are emphasized. The differences in results of analysis when elements with these two formulations are used are demonstrated on two numerical examples. The first example involves the nonlinear static pushover analysis of low-rise frame with distributed element loading. The second example is nonlinear time history analysis of two-story frame subjected to earthquake loading. The differences in global and local response depending on the used finite element discretization are shown. In conclusion, the advantages of force based formulation and directions for the use of the two elements are summarized..

**Ključne reči:** fiber based beam/column element, distributed plasticity, force formulation, displacement formulation